Devoir n° 1*

Alexandre PACHOT

31 janvier 2020

Question 1

(a) Actions

Action	Niveau
Transport d'unité de flot de l'entrepôt $i = 1, 2$ au client $j = 1, 2, 3$.	x_{ij}

(b) Objectif

Minimiser le cout total de transport : $3x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 7x_{22} + x_{23}$

(c) Contraintes

$x_{11} + x_{21} = 8$ (Demande client 1)
$x_{12} + x_{22} = 7$ (Demande client 2)
$x_{13} + x_{23} = 5$ (Demande client 3)
$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 12$ (Offre entrepôt 1)
$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 8$ (Offre entrepôt 2)
Non-négativité : $x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2, 3$

(d) Simplification

$x_{11} + x_{21} = 8 \Longrightarrow x_{21} = 8 - x_{11}$
$x_{12} + x_{22} = 7 \Longrightarrow x_{22} = 7 - x_{12}$
$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 12 \Longrightarrow x_{13} = 12 - x_{11} - x_{12}$
Étant donné que la demande $(8+7+5)$ est égale à l'offre $(12+8)$, on a $x_{23} = x_{11} + x_{12} - 7$.

Lorsqu'on remplace x_{13}, x_{21}, x_{22} et x_{23} par les valeurs trouvées ci-dessus, la fonction à minimiser devient $94 - x_{11} - 4x_{12}$. Ce qui revient à minimiser $-x_{11} - 4x_{12}$.

x_{13}, x_{21}, x_{22} et x_{23} étant des variables positives, on a :
$x_{21} = 8 - x_{11} \Longrightarrow x_{11} \leq 8$
$x_{22} = 7 - x_{12} \Longrightarrow x_{12} \leq 7$
$x_{13} = 12 - x_{11} - x_{12} \Longrightarrow x_{11} + x_{12} \leq 12$
$x_{23} = x_{11} + x_{12} - 7 \Longrightarrow x_{11} + x_{12} \geq 7$

Remarque : Il s'agit d'une fonction à minimiser, les coefficients de x_{11} et x_{12} sont négatifs. Il faut trouver x_{11} et x_{12} le plus grand possible. La dernière équation $(x_{11} + x_{12} \geq 7)$ est redondante avec l'équation à minimiser, par conséquent nous n'allons pas la prendre en compte dans notre modèle.

(e) Modèle

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Min } z = & - & x_{11} & - & 4x_{12} & & & \\
\text{Sujet à :} & & x_{11} & & & \leq & 8 \\
& & & & x_{12} & \leq & 7 \\
& & x_{11} & + & x_{12} & \leq & 12 \\
\end{array}
$$
$$x_{11}, x_{12} \geq 0$$

Question 2

(a) Actions

Action	Niveau
Porte-patio, cadre en bois	x
Porte-patio, cadre en aluminium	y

*IFT 1575 - Modèles de recherche opérationnelle - Université de Montréal - Jean-Yves POTVIN

(b) Objectif

Maximiser le profit : $60x + 30y$

(c) Contraintes

$x \leq 6$	(cadre en bois)
$y \leq 4$	(cadre en aluminium)
$6x + 8x \leq 48$	(Verre)

Non-négativité : $x,\ y \geq 0$.

(d) Modèle

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max & 2x & + & y & & \\
\text{Sujet à :} & x & & & \leq & 6 \\
 & & & y & \leq & 4 \\
 & 3x & + & 4y & \leq & 24 \\
\end{array}$$
$$x,\ y \geq 0$$

(e) Résolution graphique

D'après la première contrainte, la solution se trouve à gauche de la droite $x \leq 6$. De même, afin de respecter la deuxième contrainte, la solution se trouve sous la droite $y \leq 4$. Et finalement, la troisième contrainte impose que la solution soit sous la droite $3x + 4y \leq 24$. En y incluant les contraintes de non-négativité, l'ensemble solution est représenté par la zone hachurée. La solution optimale se situe à l'intersection de la droite $2x + y \leq 1,5$, il s'agit du point de coordonnées (6 ; 1,5), cf. fig 1.

(f) Profit porte-patio, cadre en bois : 60 \$ → 20 \$

Le fait de modifier le profit des portes-patio ayant un cadre en bois, cela modifie le coefficient directeur de la fonction à maximiser. Ce qui modifie la solution optimale, comme on peut le voir à la figure 2. La solution optimale correspond au point d'abscisse $\frac{8}{3}(= 2,\underline{6})$ et d'ordonnée 4.

(g) Production portes-patio, cadre en bois : 6/jour → 5/jour

Si la personne qui produit 6 portes-patio avec cadre en bois par jour ne peut en produire plus 5, cela va réduire l'ensemble solution. Au lieu d'avoir une

FIGURE 1 – Résolution graphique

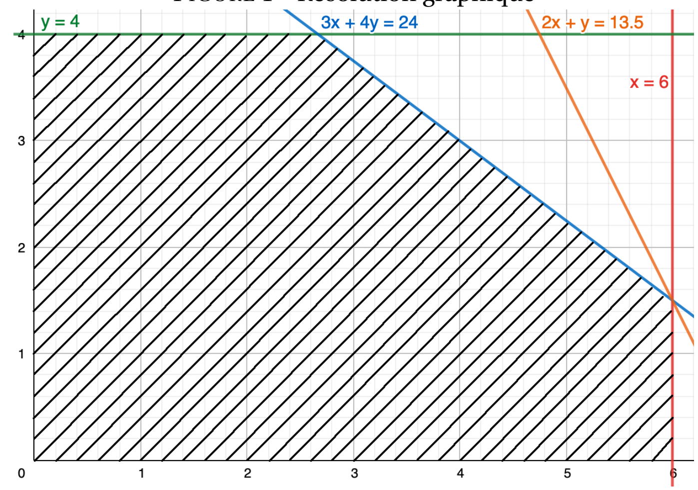
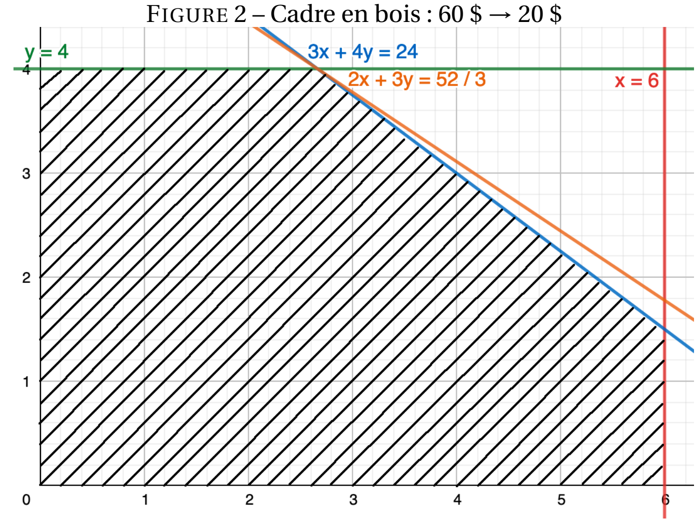
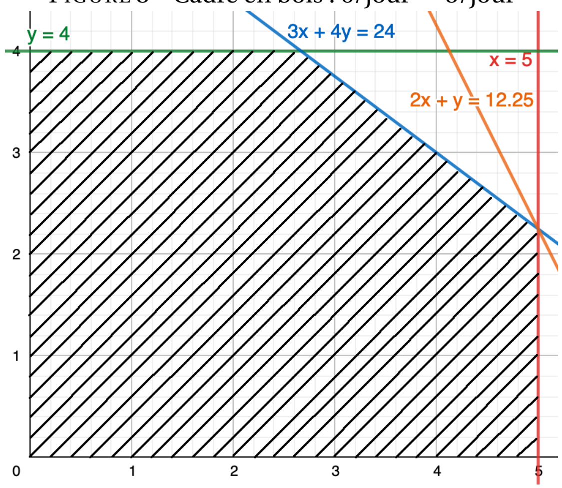


FIGURE 2 – Cadre en bois : 60 \$ → 20 \$



droite $y = 6$, on va avoir une droite $y = 5$ (cf. fig 3). Étant donné que l'ancienne solution optimale était à l'intersection de la droite $y = 6$ et de la fonction à optimiser, cela va avoir une conséquence sur la solution optimale qui devient le point (5, 2,25).

FIGURE 3 – Cadre en bois : 6/jour → 5/jour



Question 3

(a) Actions

Action	Niveau
Unité des produits P_i à fabriquer, $i = 1,2,3$.	x_i

(b) Objectif

Maximiser le profit hebdomadaire : $4x_1 + 12x_2 + 3x_3$

(c) Contraintes

$x_1 \leq 1\,000$ (Produit P_1)
$x_2 \leq 500$ (Produit P_2)
$x_3 \leq 1\,500$ (Produit P_3)
$\frac{x_1}{50} + \frac{x_2}{25} + \frac{x_3}{75} \leq 45$ (Capacité de production)
Non-négativité : $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

(d) Modèle

$$\begin{array}{rcccccccl}
\text{Max} & 4x_1 & + & 12x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{Sujet à :} & x_1 & & & & & \leq & 1\,000 \\
 & & & x_2 & & & \leq & 500 \\
 & & & & & x_3 & \leq & 1\,500 \\
 & \frac{x_1}{50} & + & \frac{x_2}{25} & + & \frac{x_3}{75} & \leq & 45
\end{array}$$
$$x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0$$

(e) Résolution

Lorsqu'on utilise la machine pendant une heure, cela nous permet de fabriquer 50 produits P_1, et chacun de ces produits assure un profit de 4 \$, ce qui fait un total 200 \$. Pour les produits P_2 et P_3, ces montants sont respectivement de 300 \$ et 225 \$. Les produits les plus intéressants à produire sont P_2, P_3 puis P_1. On peut fabriquer 500 produits P_2, ce qui va prendre 20 heures, puis 1500 produits P_3, ce qui va prendre un deuxième 20 heures. Il nous reste finalement 5 heures, pour fabriquer 250 produits P_1.

La solution optimale est : 250 P_1, 500 P_2 et 1 500 P_3.

Question 4

(a) Modèle initial

$$\begin{array}{rccclrl}
\text{Max} & 7x_1 & + & 5x_2 & & & \\
\text{Sujet à :} & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 2\,400 & (1) \\
 & 2x_1 & + & 0.5x_2 & \leq & 500 & \\
 & x_1 & & & \geq & 100 & (2)
\end{array}$$
$$x_1,\, x_2 \geq 0$$

(b) Analyse

La contrainte (2) est inutile. Considérons un x_1 qui ne respecte pas la contrainte (2), par exemple $x_1 = 99$. Afin de respecter la contrainte (1), x_2 ne peut pas dépasser 668 et la fonction à maximiser vaudra 4033. À l'opposé, si

$x_1 = 100$, alors la valeur maximum de x_2 est $666 + \frac{2}{3}$ et la fonction à maximiser vaut $4033 + \frac{1}{3}$. Le système fait qu'il est plus intéressant que x_1 soit supérieur à 100, par conséquent l'équation (2) n'est pas contraignante, on peut l'ignorer.

(c) Modèle optimisé

$$\begin{array}{rcccccc} \text{Max} & 7x_1 & + & 5x_2 & & \\ \text{Sujet à :} & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 2\,400 \\ & 4x_1 & + & x_2 & \leq & 1\,000 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Question 5

(a) Algorithme du simplexe

Variables dépendantes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	Termes de droite
x_4	1	3	4	1				256
x_5	1	2	3		1			128
x_6	1	1	2			1		96
$-z$	−2	−4	−5				1	0

Min$\{-2, -4, -5\} = -5$, la variable d'entrée est x_3.
Min $\{\frac{256}{4}, \frac{128}{3}\ \frac{96}{2}\}$ = Min $\{64, 42+\frac{2}{3}, 48\} = 42+\frac{2}{3}$, la variable de sortie est x_5.

Variables dépendantes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	Termes de droite
x_4	−1/3	1/3		1	−4/3			256/3
x_3	1/3	2/3	1		1/3			128/3
x_6	1/3	−1/3			−2/3	1		32/3
$-z$	−1/3	−2/3			5/3		1	640/3

Min$\{-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0\} = -\frac{2}{3}$, la variable d'entrée est x_2.
Min $\{256, 64\} = 64$, la variable de sortie est x_3.

Variables dépendantes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	Termes de droite
x_4	−1/2		−1/2	1	−3/2			64
x_2	1/2	1	3/2		1/2			64
x_6	1		1/2		−1/2	1		32
$-z$			1		2		1	256

Une solution optimale est $x_1 = 0$, $x_2 = 64$ et $x_3 = 0$. La valeur de l'objectif pour cette solution est $z = -256$.

(b) Unicité de la solution optimale

La solution optimale n'est pas unique. En effet, dans le dernier tableau, les coefficients de x_1 et x_2 sont nuls tous les deux. On pourrait faire entrer x_1 et faire sortir x_6. On obtiendrait comme solution $x_1 = 64$, $x_2 = 32$ et $x_3 = 0$. Il y a une infinité de solutions optimales, elles sont solutions du système $a.(0, 64, 0) + b.(64, 32, 0)$ avec $a + b = 1$.