Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Постановка задачи

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) широко используется для математического моделирования процессов в различных областях науки и техники. С помощью ОДУ можно описать задачи движения системы взаимодействия материальных точек, электрических цепей сопротивления материалов и множество др. Таким образом, решение ОДУ занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

Простейшим обыкновенным дифференциальным уравнением является уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной

$$y' = f(x, y) \quad (1);$$

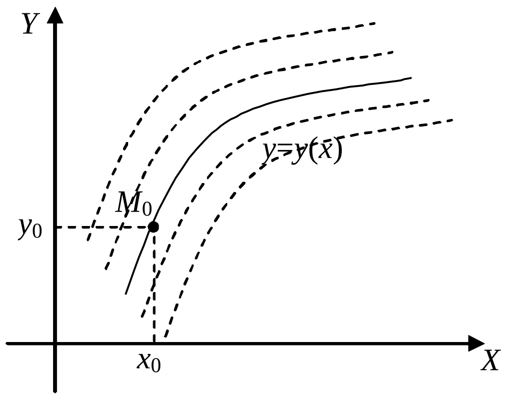
или $\varphi(x, y, y') = 0$. Дифференциальное уравнение *n* порядка $y(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ эквивалентно системе из *n* уравнений.

Например,

$$y'' + p_1 y' + p_2 y + p_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = y, \\ y_1' = y_2, (y') \\ y_2' = -p_1 y_2 - p_2 y_1 - p_3, (y'') \end{cases}.$$

Уравнение (1) имеет бесконечное множество решений (множество интегральных кривых). Единственность решения обеспечивается за счет дополнительных условий, которым должны удовлетворять искомые решения.

В зависимости от этих условий различают 3 типа задач.



1. **Задача Коши** (задача с начальными условиями). Найти решение уравнения $y' = f(x, y)$ в виде функции *y*(*x*) удовлетворяющей начальному условию

$$y(x_0) = y_0 \quad \textbf{(2)}$$

Геометрически это означает, что надо найти интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ при выполнении равенства (1).

2) Граничные или краевые задачи

Дополнительные условия задаются в виде функциональных соотношений между несколькими решениями. Условия могут быть заданы как на границах, так и внутри интервала. Например, $y(x_0) + y'(x_1) + y''(x_n) = 3$

3) **Задачи на собственные значения.** Кроме исходной функции и производной в уравнении входят *m* неизвестных параметров $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, которые называют собственные значения. В таких задачах всего *n*+*m* условий.

Методы решения ОДУ можно условно разделить на 3 класса:

1. Аналитические методы, применение которых дает решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения.

2. Графические методы, дающие приближенное решение в виде графика.

3. Численные методы, когда искомая функция получается в виде таблицы.

Если дифференциальное уравнение не удается решить аналитическим путем, то прибегают к приближенным численным методам решения. Кроме того, иногда численные методы оказываются более эффективными и при наличии аналитического решения.

Далее будем рассматривать методы решения задачи Коши.

Метод Эйлера

В основе метода лежит идея графического построения решения дифференциального уравнения, однако этот метод дает одновременно и способ нахождения искомой функции в численной (табличной) форме.

Пусть дано уравнение $y' = f(x, y)$ (1) с начальным условием $y(x_0) = y_0$ (2) (поставлена задача Коши).

Выбрав малый шаг h, построим, начиная с точки x_0, систему равноотстоящих точек $x_i = x_0 + i \cdot h$ ($i=1, 2, \ldots, n$). Вместо искомой интегральной кривой на отрезке $[x_0, x_1]$, рассмотрим отрезок касательной L_1 к этой кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$. Уравнение этой касательной

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

При $x=x_1$ получим

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

т.е. приращение на 1 шаге имеет вид

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = h \cdot f(x_0, y_0).$$

Проведем касательную L_2 к некоторой интегральной кривой в точке $M_1(x_1, y_1)$, получим

$$y=y_1+f(x_1, y_1)(x-x_1)$$

При $x=x_2$, получим,

$$y_2=y_1+f(x_1, y_1)(x_2-x_1) = y_1+f(x_1, y_1)\, h$$

т.е.

$$\Delta y_1= y_2-y_1= h\cdot f(x_1, y_1)$$

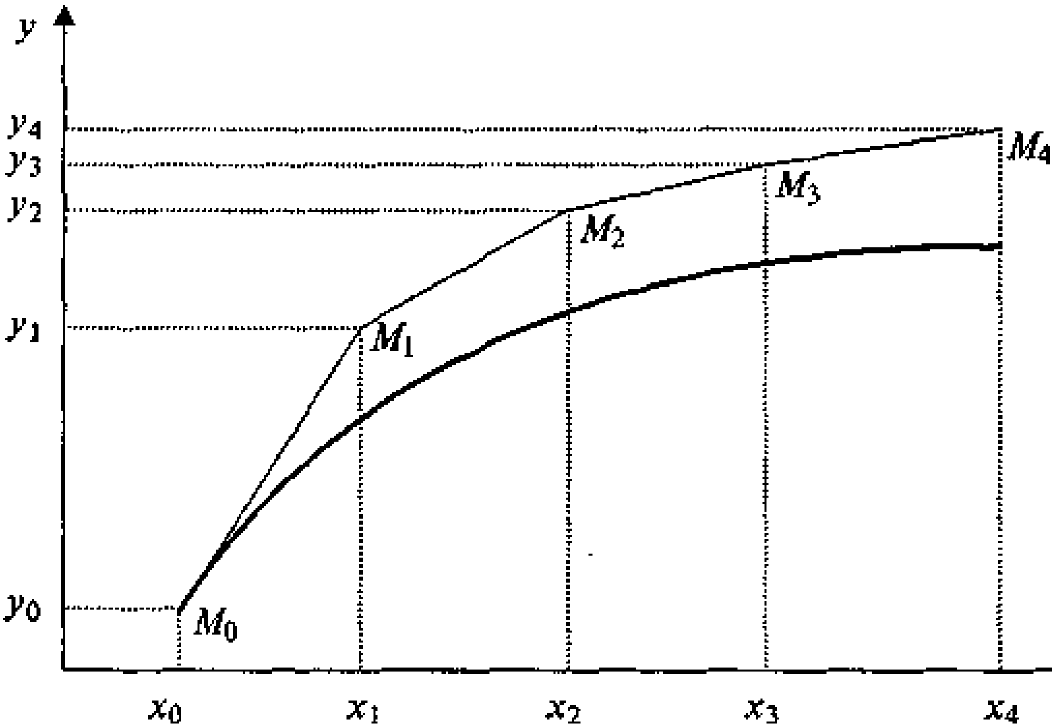
и т.д.

Таким образом, построение таблицы значений искомой функции методом Эйлера заключается в циклическом применении пары формул:

$$\Delta y_k= h\cdot f(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1}=y_k+ \Delta y_k,\ k=0,1,2,\dots \quad (3)$$

Геометрически – искомую функцию $y(x)$ заменяем ломаной линией, состоящей из отрезков касательных в точках x_0, x_1,….



Метод Эйлера обладает малой точностью, кроме того, на каждом шаге погрешность возрастает. Наиболее приемлемый для практики метод оценки точности – способ двойного счета: выполняем вычисления с шагом h и с шагом $\frac{h}{2}$. Совпадение значений в полученных двумя способами соответствующих результатах позволяет считать их точными.

Методы Рунге-Кутта второго порядка

В окрестности точки x_0 разложим $y(x)$ в ряд Тейлора, который можно использовать для приближенного нахождения значений функции $y(x)$.

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)\frac{h}{1!} + y''(x_0)\frac{h^2}{2!} + \ldots$$

или

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)\frac{h}{1!} + y''(x_n)\frac{h^2}{2!} + \ldots$$

Производные аппроксимируются через значения функции $f(x, y)$.

В зависимости от старшей степени h, с которой учитываются члены ряда, построены вычислительные схемы Рунге-Кутта различных порядков точности.

Для второго порядка точности, после некоторых преобразований, получено семейство схем вида:

$$y(x_0 + h) = y_0 + h\left[(1-\alpha) f(x_0, y_0) + \alpha f\left(x_0 + \gamma h, y_0 + \gamma h f(x_0, y_0)\right)\right]$$

где $0 < \alpha \le 1$, $\gamma = \dfrac{1}{2\alpha}$

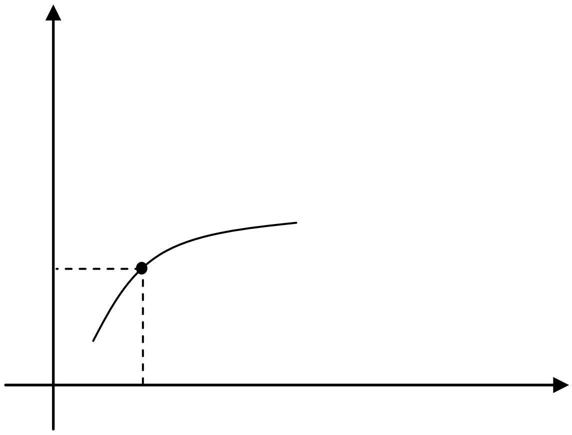
Наиболее часто используются значения параметра α 0,5 и 1.

Для $\alpha = \dfrac{1}{2}$ $\gamma = 1$, получим схему, которая называется метод среднего арифметического угла наклона.

$y(x_0 + h) =$

____

Графическая интерпретация метода:



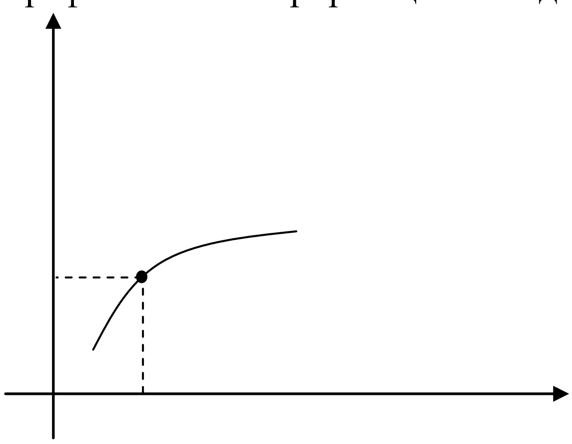
Для $\alpha = 1$ $\gamma =$ _1/2_, получим схему, которая называется метод угла наклона в средней точке.

$$y(x_0 + h) = y_0 + h[(1-\alpha) f(x_0, y_0) + \alpha f(x_0 + \gamma h, y_0 + \gamma h f(x_0, y_0))]$$

$$y(x_0 + h) = y_0 + hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0)\right)$$

____

Графическая интерпретация метода:



Метод Адамса

Решая обыкновенные дифференциальные уравнения методами Рунге-Кутта, необходимо вычислять правые части уравнений в нескольких точках на каждом шаге (в зависимости от порядка 2, 4 точки). Используя так называемые многошаговые или многоточечные методы можно определить значение функции $f(x)$ в нескольких точках x_0, x_1, … x_n и сократить количество вычислений для точки x_{n+1}.

Решаем задачу Коши ______________________________

С помощью любой из предыдущих схем вычисляем значения функции $y(x)$ в точках x_1, x_2, x_3, получим соответственно y_1, y_2, y_3.

Правая часть уравнения интегральной кривой, соответствующая начальному условию, будет являться функцией только одного аргумента x:

$$f(x)=f(x, y(x))$$

Значения этой функции в рассматриваемых точках обозначим f_0, f_1, f_2, f_3.

В окрестности узлов x_0, x_1, x_2, x_3 заменим функцию $f(x)$ первым интерполяционным многочленом Ньютона

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + A_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

Получим

$$\boldsymbol{f(x)=f_0+f_{01}(x-x_0)+f_{012}(x-x_0)(x-x_1)+f_{0123}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}, \tag{7}$$

где f_{01}, f_{012}, f_{0123} – разделенные разности 1, 2, 3 порядков соответственно.

$$f_{01} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{h};$$

$$f_{012} = \frac{f_{02} - f_{01}}{x_2 - x_1} = \frac{\dfrac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0} - \dfrac{f_1 - f_0}{h}}{h} = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2}$$

$$f_{013} = \frac{f_{03} - f_{01}}{x_3 - x_1} = \frac{\dfrac{f_3 - f_0}{x_3 - x_0} - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{2h} = \frac{f_3 - 3f_1 + 2f_0}{6h^2}$$

$$f_{0123}=\frac{f_{013}-f_{012}}{x_3-x_2}=\frac{\frac{f_3-3f_1+2f_0}{6h^2}-\frac{f_2-2f_1+f_0}{2h^2}}{h}=$$

$$=\frac{f_3-3f_2+3f_1-f_0}{6h^3}$$

Представим искомое решение в точке $x_4=x_3+h$ в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точки x_3.

$$y_4=y_3+hf_3+\frac{f_3{}'h^2}{2}+\frac{f_3{}''h^3}{6}+\frac{f_3'''h^4}{24}+\Theta\left(h^5\right)$$ (9), где f_3', f_3'', f_3''' – производные от правой части дифференциального уравнения в точке x_3.

Дифференцируя полином (7), получим выражения для производных

$$\boldsymbol{f(x)=f_0+f_{01}(x-x_0)+f_{012}(x-x_0)(x-x_1)+f_{0123}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$f'=\boldsymbol{f_{01}+f_{012}((x-x_1)+(x-x_0))+f_{0123}((x-x_1)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_1))}$$

$$f''=\boldsymbol{2f_{012}+f_{0123}((x-x_2)+(x-x_1)+(x-x_2)+(x-x_0)+(x-x_1)+(x-x_0))=}$$

$$f''=\boldsymbol{2f_{012}+2f_{0123}((x-x_0)+(x-x_1)+(x-x_2))}$$

$$f'''=\boldsymbol{6f_{0123}}$$

Эти соотношения при $x=x_3$, в случае равноотстоящих узлов, при подстановке разделенных разностей, принимают вид:

$$f'=\boldsymbol{f_{01}+f_{012}((x-x_1)+(x-x_0))+f_{0123}((x-x_1)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_1))}$$

$$f_3' = \frac{f_1 - f_0}{h} + \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2} 5h + \frac{f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0}{6h^3} 11h^2 =$$

$$= \frac{11f_3 - 18f_2 + 9f_1 - 2f_0}{6h}$$

$$f'' = \mathbf{2}\boldsymbol{f}_{\mathbf{012}} + \mathbf{2}\boldsymbol{f}_{\mathbf{0123}}\big((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathbf{2}})\big)$$

$$f_3'' = 2\frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2} + 2\frac{f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0}{6h^3} 6h =$$

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} = \frac{2f_3 - 5f_2 + 4f_1 - f_0}{h^2}$$

$$f''' = \boldsymbol{6f}_{\mathbf{0123}}$$

$$f_3''' = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$$

Подставим производные (11) в разложение

$$y_4 = y_3 + hf_3 + \frac{f_3' h^2}{2} + \frac{f_3'' h^3}{6} + \frac{f_3''' h^4}{24} + \Theta\left(h^5\right) \quad (9)$$

, получим формулу Адамса

$$y_4 = y_3 + hf_3 + h^2 \frac{11f_3 - 18f_2 + 9f_1 - 2f_0}{12h} + h^3 \frac{2f_3 - 5f_2 + 4f_1 - f_0}{6h^2} + h^4 \frac{f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0}{24h^3} =$$

$$= y_3 + h\frac{32f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0}{24} + \Theta\left(h^5\right)$$

Где $\Theta\left(h^5\right) = \frac{251}{720} h^5 f^{(4)}(x)$, т.е. погрешность метода имеет 5-й порядок.

Изменяя количество членов ряда Тейлора, можно получить схемы Адамса других порядков.

Метод Гира

Получим решение задачи Коши y_1, y_2, y_3, в точках x_1, x_2, x_3 используя один из методов Рунге-Кутта. В окрестности узлов x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 искомое решение аппроксимируем многочленом Ньютона 4-й степени

$$\boldsymbol{y(x)=y_0+y_{01}(x-x_0)+ y_{012}(x-x_0)(x-x_1) + y_{0123}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + y_{01234}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$$

где y_{01}, y_{012}, y_{0123}, y_{01234} – разделенные разности 1, 2, 3, 4 порядков. Выразим разделенные разности через значения функции $y(x)$, учитывая, что $h=x_{i+1}-x_i$.

$$y_{01} = \frac{\quad - \quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad};$$

$$y_{012} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad}}{\quad} = \frac{\quad}{\quad};$$

$$y_{013} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad}}{\quad} = \frac{\quad}{\quad};$$

$$y_{0123} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad}}{\quad} =$$

$$= \frac{\quad}{\quad}$$

$$y_{014} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad}}{\quad} = \frac{\quad}{\quad};$$

$$y_{0124} = \frac{y_{0124} - y_{012}}{x_4 - x_2} = \frac{\dfrac{y_4 - 4y_1 + 3y_0}{12h^2} - \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}}{2h} =$$

$$= \frac{\quad}{\quad}$$

$$y_{01234} = \frac{y_{0124} - y_{0123}}{x_4 - x_3} = \frac{\dfrac{y_4 - 6y_2 + 8y_1 - 3y_0}{24h^3} - \dfrac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{6h^3}}{h} =$$

$$= \frac{y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0}{24h^4}$$

$$\boldsymbol{y(x)=y_0+y_{01}(x-x_0)+ y_{012}(x-x_0)(x-x_1) + y_{0123}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + y_{01234}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$$

Продиффиринцируем $y(x)$, получим

$y'(x)=$ **y_{01}+ y_{012}(x-x_1+ x-x_0)+y_{0123}[(x-x_1)(x-x_2)+ (x-x_0)(x-x_2)+ (x-x_0) (x-x_1)]+ + y_{01234}[(x-x_1)(x-x_2) (x-x_3)+ (x-x_0)(x-x_2) (x-x_3)+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)]**

С учетом разделенных разностей, при x=x_4 выражение для производной примет вид:

$$y'(x_4)=\frac{y_1-y_0}{h}+\frac{y_2-2y_1+y_0}{2h^2}7h+\frac{y_3-3y_2+3y_1-y_0}{6h^3}26h^2+\frac{y_4-4y_3+6y_2-4y_1+y_0}{24h^4}5$$

$$=\frac{y_1-y_0}{h}+\frac{y_2-2y_1+y_0}{2h}7+\frac{y_3-3y_2+3y_1-y_0}{3h}13+\frac{y_4-4y_3+6y_2-4y_1+y_0}{12h}25=$$

$$=\frac{25y_4-48y_3+36y_2-16y_1+3y_0}{12h}$$

.

С другой стороны при x=x_4 уравнение (1) принимает вид

$$y'(x_4)=f(x_4,y_4).$$

Приравнивая правые части выражений () и () получим

$$y_4=\frac{\qquad}{} \qquad ()$$

() – схема Гира 4-го порядка. Изменяя количество узлов можно получить схемы других порядков.

Для нахождения начального приближения y_4 полагаем в выражении () x=x_3, получим

$$y'(x_3)=\frac{y_1-y_0}{h}+\frac{y_2-2y_1+y_0}{2h^2}\quad+\frac{y_3-3y_2+3y_1-y_0}{6h^3}\quad+\frac{y_4-4y_3+6y_2-4y_1+y_0}{24h^4}\quad=$$

$$=\frac{\qquad}{}$$

Из уравнения (1) при x=x_3 получим

$$y'(x_3) = f(x_3, y_3)$$

Приравнивая правые части выражений () и () получим формулу

$$y_4 = \frac{\qquad}{\qquad} \qquad ()$$

С помощью () можно найти начальное приближение y_4 и использовать его в формуле Гира ().

Подробный вывод формул в книге (есть на абонементе):

Лапчик М.П., Рагулина М.И., Стукалов В.А. Численные методы: Учеб. пособие для пед. вузов.-М.: Академия, 2001