Développement en série de $1/\sin^2(t)$

On considère des applications à valeurs réelles et définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.

On dit que $\mathcal{D}$ vérifie la condition (1) si : $\forall x \in \mathcal{D}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \dfrac{x+k}{n} \in \mathcal{D}$.

On dit ensuite que f vérifie la condition (2) si : $\forall x \in \mathcal{D}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n^2 f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{x+k}{n})$.

1. Vérifier rapidement que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ satisfont à la condition (1). [S]
2. Soit f une application continue et vérifiant la condition (2) sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que f est l'application nulle. [S]
3. (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout z de $\mathbb{C}$: $\sin(\pi z) = 2^{n-1} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin(\pi \frac{z+k}{n})$.
   Indication : formule d'Euler et factorisation de $X^n - 1$ dans , $\mathbb{C}$. [S]
   (b) En déduire que l'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(\pi x)}$ vérifie la condition (2) sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. [S]
4. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, cette suite étant indicée par l'ensemble des entiers relatifs.
   On dit que la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$ est simplement (resp. uniformément, resp. normalement) convergente sur I si les deux séries de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geq 0} f_n$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 1} f_{-n}$ sont simplement (resp. uniformément, resp. normalement) convergentes sur I.
   En cas de convergence on note, pour tout x de I : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(x)$.
   Autrement dit, $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x)$ est la limite de $\displaystyle\sum_{n=p}^{q} f_n(x)$ quand $\begin{cases} p \to -\infty \\ q \to +\infty \end{cases}$
   (a) Montrer qu'on définit une application S sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ en posant $S(s) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ [S]
   (b) Prouver que l'application S est périodique de période 1. [S]
   (c) Démontrer que S est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
   Indication : montrer que la série définissant S est normalement convergente sur tout segment $[a, b]$ de $]0, 1[$. [S]
   (d) Prouver que l'application S vérifie la condition (2) sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. [S]
5. (a) Montrer que l'application $x \mapsto \psi(x) = \dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} - \dfrac{1}{x^2}$ a une limite finie en $x = 0$. [S]
   (b) Montrer que $g : x \to \dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} - S(x)$ est continuement prolongeable sur $\mathbb{R}$. [S]
   (c) On note $\widehat{g}$ le prolongement continu de g à $\mathbb{R}$. Montrer que $\widehat{g}$ est l'application nulle. [S]

6. (a) En déduire que pour tout t de $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$: $\dfrac{1}{\sin^2 t} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{(t+n\pi)^2}$. [S]

   (b) Montrer que l'application $H(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$. [S]

   (c) Prouver que $H(x) = \operatorname{cotan} x - \dfrac{1}{x}$ pour $0 < |x| < \pi$. [S]

   (d) Par intégration terme à terme, montrer que :

   $0 < |x| < \pi \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \ln \dfrac{\sin x}{x}$. [S]

   (e) En déduire finalement que si $0 < |x| < \pi$ alors : $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \dfrac{\sin x}{x}$. [S]

Corrigé du problème

1. Il est évident que $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ satisfait à la condition (1).
   Soit x un élément de $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et k dans $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.
   Alors $y = \dfrac{x+k}{n}$ n'est pas dans $\mathbb{Z}$, sans quoi $x = ny - k$ serait lui aussi un entier.
   Donc l'ensemble $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ vérifie la condition (2). [Q]
2. Soit x un réel quelconque, et soit J le segment $[-|x|-1, |x|+1]$.
   Sur ce segment l'application continue f est bornée : on pose $M = \sup_{t\in J} |f(t)|$.
   Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout k de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, le réel $t = \dfrac{x+k}{n}$ est dans J.
   On en déduit $|f(x)| = \left|\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{x+k}{n}\Big)\right| \le \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\Big(\frac{x+k}{n}\Big)\right| \le \dfrac{M}{n}$.
   Comme ce résultat est vrai pour tout n, il en découle $f(x) = 0$.
   Ce résultat étant vrai pour tout x de $\mathbb{R}$, on en déduit que f est nulle sur $\mathbb{R}$. [Q]
3. (a) Le polynôme $P = X^n - 1$ se factorise dans $\mathbb{C}$ en : $P = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X - \exp\frac{-2ik\pi}{n})$.

   D'autre part $\sin(\pi z) = \dfrac{1}{2i}(\exp(i\pi z) - \exp(-i\pi z)) = \dfrac{\exp(-i\pi z)}{2i}(\exp(2i\pi z) - 1)$.

   Si on pose $X = \exp\dfrac{2i\pi z}{n}$, alors :

$$
\begin{aligned}
\sin(\pi z) &= \frac{\exp(-i\pi z)}{2i}(X^n - 1) = \frac{\exp(-i\pi z)}{2i}\prod_{k=0}^{n-1}(X - \exp\frac{-2ik\pi}{n})\\
&= \frac{\exp(-i\pi z)}{2i}\prod_{k=0}^{n-1}(\exp\frac{2i\pi z}{n} - \exp\frac{-2ik\pi}{n})\\
&= \frac{\exp(-i\pi z)}{2i}\prod_{k=0}^{n-1}\exp\frac{i\pi(z-k)}{n}\Big(\exp\frac{i\pi(z+k)}{n} - \exp\frac{-i\pi(z+k)}{n}\Big)\\
&= \frac{\exp(-i\pi z)}{2i}\,\exp\Big(i\pi z - \frac{i\pi(n-1)}{2}\Big)\prod_{k=0}^{n-1} 2i\sin(\pi\frac{z+k}{n})\\
&= \frac{1}{2i}(-i)^{n-1}(2i)^n\prod_{k=0}^{n-1}\sin(\pi\frac{z+k}{n}) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\sin(\pi\frac{z+k}{n}).
\end{aligned}
$$

   [Q]

   (b) D'après ce qui précède, et pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\sin\pi x = 2^{n-1}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\sin(\pi\frac{x+k}{n})$.

   Si on se place sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, alors $\sin\pi x \neq 0$ (et donc aussi chaque terme du produit.)
   On peut alors prendre la dérivée logarithmique dans l'égalité précédente.

$$\ln|\sin \pi x| = (n-1)\ln 2 + \sum_{k=0}^{n-1} \ln\Big|\sin(\pi \frac{x+k}{n})\Big| \Rightarrow \pi\text{cotan}\,\pi x = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\text{cotan}\,(\pi\frac{x+k}{n}).$$

On dérive à nouveau par rapport à x : $\dfrac{-\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \dfrac{\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{-\pi}{n\,\sin^2(\pi\frac{x+k}{n})}$.

Après simplification par $-\pi^2$, le résultat s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z},\quad f(x) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{x+k}{n}).$$

L'application f vérifie donc la condition (2) sur l'ensemble $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$. [Q]

4. (a) Si x n'est pas un entier relatif, alors $u_n = \dfrac{1}{(n+x)^2}$ est défini pour tout n de $\mathbb{Z}$.

   Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n et u_{-n} sont équivalents à $\dfrac{1}{n^2}$ quand $n \to +\infty$.

   On en déduit la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum u_{-n}$ et donc celle de la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$.

   Ainsi l'application $S(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+n)^2}$ est définie sur $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$. [Q]

   (b) Soit x dans $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$. Pour tous p, q de $\mathbb{Z}$, on a : $\displaystyle\sum_{n=p}^{q}\frac{1}{(n+x+1)^2} = \sum_{n=p+1}^{q+1}\frac{1}{(n+x)^2}$.

   Quand on fait tendre p vers $-\infty$ et q vers $+\infty$ on obtient : $S(x+1) = S(x)$.
   Conclusion : l'application S est périodique de période 1. [Q]

   (c) Puisque S est 1-périodique, il suffit de vérifier que S est continue sur $]0,1[$.

   Pour cela (et sachant que les fonctions f_n définissant la série sont continues sur $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ donc sur $]0,1[$) on va démontrer que la série définissant S est normalement (donc uniformément) convergente sur tout segment $[a,b]$ de $]0,1[$.

   $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ 0 < n+a \le n+x \Rightarrow f_n(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2} \le \dfrac{1}{(n+a)^2}$.

   $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [a,b],\ -n+x \le -n+b < 0 \Rightarrow f_{-n}(x) = \dfrac{1}{(n-x)^2} \le \dfrac{1}{(n-b)^2}$.

   Les séries de terme général $\dfrac{1}{(n+a)^2}$ et $\dfrac{1}{(n-b)^2}$ convergent (Riemann.)

   On en déduit que les séries $\sum f_n$ et $\sum f_{-n}$ sont normalement convergentes sur $[a,b]$.

   Ainsi leurs sommes, et donc la fonction S, sont continues sur $[a,b]$.

   Puisque cela est vrai pour tout segment $[a,b]$ de $]0,1[$ on en déduit (on utilise pour cela le caractère local de la continuité) que S est continue sur $]0,1[$.

   L'application S étant 1-périodique, elle est donc continue sur $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$. [Q]

(d) Soit x dans $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$, et p,q dans $\mathbb{Z}$. On pose $T_{pq}(x)=\displaystyle\sum_{n=p}^{n=q}\frac{1}{(n+x)^2}$. Soit $m\in\mathbb{N}^*$.

On va évaluer $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}T\Big(\frac{x+k}{m}\Big)$ avant de faire tendre p vers $-\infty$ et q vers $+\infty$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1}T_{pq}\Big(\frac{x+k}{m}\Big) &= \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n=p}^{n=q}\frac{1}{\Big(n+\dfrac{x+k}{m}\Big)^2}=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n=p}^{n=q}\frac{m^2}{(x+k+mn)^2}\\ &= m^2\sum_{n=p}^{n=q}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{(x+k+mn)^2}=m^2\sum_{n=p}^{n=q}\sum_{k=nm}^{(n+1)m-1}\frac{1}{(x+k)^2}\\ &= m^2\sum_{k=pm}^{(q+1)m-1}\frac{1}{(x+k)^2}.\end{aligned}$$

Si $p\to-\infty$ et $q\to+\infty$, alors pour tout y, la quantité $T_{pq}(y)$ tend vers $S(y)$.

On passe à la limite dans la somme finie $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}T_{pq}\Big(\frac{x+k}{m}\Big)$ et on trouve $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}S\Big(\frac{x+k}{m}\Big)$.

Si $p\to-\infty$ et $q\to+\infty$ dans $m^2\displaystyle\sum_{k=pm}^{(q+1)m-1}\frac{1}{(x+k)^2}$, on trouve $m^2S(x)$.

Finalement, ce passage à la limite dans le résultat du calcul précédent donne :

$$\forall m\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z},\quad \sum_{k=0}^{m-1}S\Big(\frac{x+k}{m}\Big)=m^2S(x).$$

Cela prouve que l'application S vérifie la condition (2) sur $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$. [Q]

5. (a) On sait que $\sin X=X-\dfrac{X^3}{6}+\mathrm{O}(X^5)$ au voisinage de 0.

On en déduit $\sin^2 X=X^2-\dfrac{X^4}{3}+\mathrm{O}(X^6)=X^2\Big(1-\dfrac{X^2}{3}+\mathrm{O}(X^4)\Big)$.

Il en découle $\dfrac{1}{\sin^2 X}=\dfrac{1}{X^2}\Big(1+\dfrac{X^2}{3}+\mathrm{O}(X^4)\Big)=\dfrac{1}{X^2}+\dfrac{1}{3}+\mathrm{O}(X^2)$.

On en déduit $\psi(x)=\dfrac{\pi^2}{3}+\mathrm{O}(X^2)$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to0}\psi(x)=\frac{\pi^2}{3}$. [Q]

(b) On remarque que g est définie sur $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ et que, tout comme S, elle y est continue.

D'autre part g est 1-périodique car différence de deux fonctions 1-périodiques.

Il suffit donc de montrer que g est prolongeable par continuité en $x=0$.

Or pour tout x de $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$, on a : $g(x)=\psi(x)-\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(-n+x)^2}$.

On sait que ψ est prolongeable par continuité en 0.
Il reste donc à démontrer que les deux séries apparaissant dans l'expression qui précéde définissent des fonctions continues en 0.

Cela résulte de ce que par exemple ces deux séries convergent normalement sur l'intervalle $J = [-a, a]$ avec $0 < a < 1$.

En effet : $\forall n \geq 1,\ \forall x \in J,\ \dfrac{1}{(n+x)^2} \leq \dfrac{1}{(n-a)^2}$ et $\dfrac{1}{(-n+x)^2} \leq \dfrac{1}{(-n+a)^2}$.

Conclusion : l'application g est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ tout entier. [Q]

(c) D'après (3b) et (4d), l'application $\widehat{g}$ vérifie la condition (2) sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Par continuité, cette condition est encore satisfaite pour les x de $\mathbb{Z}$.

D'après la question (2), cela implique que $\widehat{g}$ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. [Q]

6. (a) On sait que pour tout x de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, on a $g(x) = \dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} - \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} = 0$.

Si on effectue le changement de variable $t = \pi x$, alors t décrit $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$.

On en déduit : $\forall t \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z},\quad \dfrac{\pi^2}{\sin^2 t} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\frac{t}{\pi} + n)^2}$

Autrement dit : $\dfrac{1}{\sin^2 t} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t+n\pi)^2}$. [Q]

(b) Posons $h_n(x) = \dfrac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$ et $H(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_n(x)$. On a évidemment $H(0) = 0$.

Toutes les applications h_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$.
Pour tout x de $]-\pi, \pi[$ et tout $n \geq 1$, on a :
$h_n(x) = \dfrac{2x}{(x-n\pi)(x+n\pi)} = \dfrac{1}{x-n\pi} + \dfrac{1}{x+n\pi}$.
On en déduit $h'_n(x) = -\dfrac{1}{(x-n\pi)^2} - \dfrac{1}{(x+n\pi)^2}$.

Soit $a \in]0, \pi[$. Pout tout x de $[-a, a]$ et tout $n \geq 1$, on a : $|h'_n(x)| \leq \dfrac{2}{(n\pi - a)^2}$.

La série $\sum h'_n$ est donc CVN (donc CVU) sur $[-a, a]$.

On peut donc appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions sur $[-a, a]$.

Puique c'est vrai pour tout a de $]0, \pi[$, on en déduit que H est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$ et :

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, H'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h'_n(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{(x-n\pi)^2} + \frac{1}{(x+n\pi)^2}\Big).$$

[Q]

(c) $x \mapsto \lambda(x) = \text{cotan}\, x - \dfrac{1}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 si on pose $\lambda(0) = 0$.

En effet $\tan x = x + \text{O}(x^3) = x(1 + \text{O}(x^2)) \Rightarrow \text{cotan}\, x = \dfrac{1}{x}(1 + \text{O}(x^2)) = \dfrac{1}{x} + \text{O}(x)$.

Tout comme H, λ est donc continue sur $]-\pi, \pi[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ pour $0 < |x| < \pi$.

Pour montrer que H et λ, égales en 0, le sont si $0 < |x| < \pi$, il suffit de prouver qu'elles y ont la même dérivée. Or si $0 < |x| < \pi$, on a :

$$\begin{aligned}\lambda'(x) &= -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n\pi)^2} + \frac{1}{x^2}\\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n\pi)^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n\pi)^2} = H'(x)\end{aligned}$$

Conclusion : on a l'égalité $H(x) = \text{cotan}\, x - \dfrac{1}{x}$ pour $0 < |x| < \pi$. [Q]

(d) La série $H(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$ est normalement donc uniformément convergente sur $[-a, a]$, pour tout a de $]0, \pi[$.

Cela résulte en effet du théorème de dérivation des séries de fonctions tel qu'on l'a utilisé dans la question précédente, mais on peut le montrer directement.

En effet : $(n \geq 1, |x| \leq a) \Rightarrow |h_n(x)| \leq \dfrac{2\pi}{n^2\pi^2 - a^2}$ (terme général d'une série CV.)

Pour tout x vérifiant $0 < |x| < \pi$, on peut donc intégrer terme à terme sur $[0, x]$.

$$\begin{aligned}\int_0^x H(t)\,\text{d}t &= \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(t)\,\text{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x h_n(t)\,\text{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\,\text{d}t\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} [\ln(n^2\pi^2 - t^2)]_0^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}).\end{aligned}$$

Mais d'autre part : $\displaystyle\int_0^x H(t)\,\text{d}t = \int_0^x (\text{cotan}\, t - \frac{1}{t})\,\text{d}t = \Big[\ln \frac{\sin t}{t}\Big]_0^x = \ln \frac{\sin x}{x}$.

On a donc bien prouvé que si $0 < |x| < \pi$, alors : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}) = \ln \frac{\sin x}{x}$. [Q]

(e) Pour tout x tel que $0 < |x| < \pi$, on a :

$$\begin{aligned}\ln \frac{\sin x}{x} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \ln(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}) = \lim_{N\to+\infty} \ln \prod_{n=1}^{N} (1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2})\\ &= \ln \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} (1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}) = \ln \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}).\end{aligned}$$

Le résultat en découle en prenant l'exponentielle membre à membre. [Q]