

Licence de Physique (S4)

Cours d'Electromagnétisme

Chargé du Cours : M. Gagou Yaovi

Maître de Conférences à l'Université de Picardie Jules Verne, Amiens

yaovi.gagou@u-picardie.fr

Table des matières

1	Rappels d'électrocinétique	6
1.1	Notion de courant électrique	6
1.2	Vecteur densité de courant et intensité du courant	6
1.3	Conservation de la charge	7
1.4	Loi d'Ohm	7
1.5	Champ d'induction magnétique créé par un courant électrique	8
1.5.1	Introduction	8
1.5.2	Loi de Biot et Savart	8
1.6	Théorème d'Ampère	9
1.6.1	Circulation du vecteur induction	9
1.6.2	Généralisation du théorème d'Ampère	10
1.7	Equation de Maxwell-Ampère	10
1.7.1	Théorème de Stokes	10
1.7.2	Equation de Maxwell-Ampère	11
1.8	Potentiel vecteur de l'induction magnétostatique	11
1.8.1	\vec{B} est créé par un courant filiforme	11
1.8.2	\vec{B} est créé par un courant non filiforme	11
1.8.3	Courant surfacique	11
1.8.4	Courant volumique	12
1.8.5	Remarque	12
1.8.6	Conclusion	12
1.9	Conservation du flux d'induction	12
1.10	Dipôle magnétique	13
1.10.1	Définition	13
1.10.2	Potentiel scalaire et induction magnétique créés par un dipôle magnétique . . .	13
1.11	Forces électromagnétiques	14
1.11.1	Loi fondamentale de Laplace	14
1.11.2	Travail des forces électromagnétiques	14
1.11.3	Energie potentielle électromagnétique	15
2	Régime quasi-stationnaire	16
2.1	Introduction	16
2.2	Force électromotrice d'induction	16
2.2.1	Hypothèses	16
2.2.2	Circulation du champ électromoteur	16
2.3	Induction électromagnétique - LOI DE FARADAY	17
2.3.1	Loi de Faraday	17
2.3.2	Sens du courant induit : Loi de Lenz	18
2.4	Phénomènes d'induction dans un circuit fixe placé dans un champ \vec{B} variable	18

2.4.1	Expression mathématique du champ électromoteur	18
2.4.2	Extension de la notion de champ électrique	18
2.4.3	Relation de Maxwell-Faraday	19
2.5	Coefficient d'induction mixte	20
2.6	Inductance propre et inductance mutuelle	20
2.7	Principe de conservation de la charge	21
2.8	Loi d'Ohm en régime quasi-stationnaire	21
2.9	Conclusion	21
2.10	Energie électromagnétiques	22
2.10.1	Définition	22
2.10.2	Energie électromagnétique dans un circuit unique	22
2.10.3	Cas de deux circuits filiformes (c_1) et (c_2)	22
2.10.4	Généralisation	23
2.11	Densité volumique d'énergie électromagnétique	24
2.11.1	Energie électromagnétique	24
2.11.2	Localisation de l'énergie électromagnétique : densité d'énergie électromagnétique	24
2.12	Energie électromagnétique dans le cas des circuits non filiformes	25
3	Introduction	27
4	Série de Fourier	27
4.1	Définitions	27
4.2	Représentation Complexe	28
4.3	Représentation spectrale	28
4.3.1	Harmoniques	28
4.3.2	Spectre	28
4.3.3	Symétrie et Changement de l'origine des temps	28
5	Etude du circuit [R,L,C] série	29
5.1	Méthode de Fresnel	29
5.2	Notation en Complexe	29
5.3	Valeur maximale, Valeur efficace	30
5.4	Puissance Instantanée, Puissance moyenne	30
5.5	Puissance active, Puissance réactive	31
6	Rappels	32
6.1	Champs stationnaires	32
6.2	Champs quasi-stationnaires	32
7	Régimes Variables (rapidement)	32
7.1	Passage en régime variable	33

7.1.1	Difficultés d'ordre mathématique	33
7.1.2	Difficultés d'ordre physique	33
7.1.3	Que se passe-t-il réellement entre les armatures du condensateur ?	34
7.1.4	L'équation de Maxwell-Ampère, 1876	35
7.1.5	Résumé des Equations de Maxwell	35
7.1.6	Justification des Equations de Maxwell	36
7.2	Les potentiels	36
8	Equation de propagation du champ	37
8.1	Cas général	37
8.2	Cas où le milieu est considéré comme un diélectrique parfait	38
8.3	Equations aux dimensions de	
9.1	Cas général d'un milieu quelconque	40
10	Définition d'une onde plane	43
11	Onde plane se propageant suivant un axe (Oz)	43
11.1	Caractère transversale de l'onde	44
11.2	Relation entre les champs \vec{E} et \vec{B}	44
11.3	Integration des équations de propagation	44
11.3.1	Détermination de la composante $(E_x(z, t))$	44
11.3.2	Détermination de $B_y(z, t)$	46
11.3.3	Détermination de l'onde $(E_y(z, t), B_x(z, t))$	46
11.4	Discussions	46
11.4.1	Ondes progressives et régressives	46
11.4.2	Propriétés de l'onde progressive	47
12	Cas général : Onde plane de direction quelconque	48
13	Notion de polarisation	49
13.1	Définitions	50
14	O.E.M. plane sinusoïdale et polarisée rectilignement	50
14.1	Propagation suivant une direction quelconque	50
14.2	Cas particulier d'une propagation suivant \vec{Oz}	51
15	O.E.M. plane sinusoïdale et polarisée circulairement et elliptiquement	52
16	Onde plane sinusoïdale se propageant rectilignement (notations complexes)	53
17	Rappels	55

18 Calcul de l'énergie électromagnétique	55
18.1 Causes de la variation de l'énergie électromagnétique	55
18.2 Méthode de calcul	56
18.3 Discussion	56
18.4 Conservation de l'énergie électromagnétique	56
18.4.1 Cas d'un volume non chargé	57
18.4.2 Cas d'un volume chargé	57

Chapitre 1

RAPPELS ET COMPLEMENTS DE MAGNETOSTATIQUE

1 Rappels d'électrocinétique

1.1 Notion de courant électrique

L'ensemble des électrons d'un conducteur peuvent être répartie en deux catégories : charges fixes fortement liées au noyau et les électrons de conduction. Tout ceci constitue un ensemble électriquement neutre avec une moyenne de vitesse nulle en l'absence de champ électrique appliqué. En présence d'un champ électrique constant \vec{E} , les charges sont soumises à des électriques

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (1)$$

et à des forces de frottement \vec{F}_r dues à des collisions des électrons contre les ions. Un état de régime s'établit où les charges q sont animées d'un mouvement d'ensemble de vitesse \vec{v} : c'est le courant électrique.

1.2 Vecteur densité de courant et intensité du courant

Soit ρ la quantité de charges mobiles par unité de volume. Pendant un intervalle de temps dt suffisamment petit les charges mobiles qui ont traversé l'élément de surface ds sont contenues dans un petit volume cylindrique $d\tau$ de base ds et de génératrice parallèle à \vec{v} .

On a :

$$d\tau = \vec{ds} \cdot \vec{v} dt = \vec{v} \cdot \vec{n} ds dt \quad (2)$$

$d\tau$ contient la charge,

$$\boxed{dQ = \rho d\tau = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds dt} \quad (3)$$

Par définition, on appelle vecteur densité de courant au point M, le vecteur

$$\boxed{\vec{j} = \rho \vec{v}} \quad (4)$$

par définition on appelle intensité du courant traversant l'élément ds la grandeur :

$$\boxed{dI = \frac{dQ}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{ds} = \vec{j} \cdot \vec{n} ds} \quad (5)$$

on en déduit :

$$I = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{ds} \quad (6)$$

Si dQ est la charge ayant traversée le circuit pendant dt alors on a : $I = \frac{dQ}{dt}$

1.3 Conservation de la charge

Soit Σ une surface entièrement fermée prise à l'intérieur du conducteur et délimitant le volume τ , soit \vec{n} la normale à la surface en tout point. L'intensité du courant I' ayant traversé Σ sera :

$$I' = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} ds = -\frac{dQ'}{dt}$$

où Q' est la charge contenue dans D (le signe - pour traduire la diminution de charge dans τ due aux charges sortantes du conducteur). Or,

$$Q' = \iiint_D \rho \cdot d\tau$$

donc

$$\iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} ds = - \iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot d\tau$$

Par ailleurs d'après le théorème de Green Ostrogradski,

$$\iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} ds = \iiint_D \text{div}(\vec{j}) d\tau$$

alors,

$$\iiint_D (\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) d\tau = 0 \quad (7)$$

on en déduit,

$$\boxed{\text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad (8)$$

En régime stationnaire ρ est partout constant dans le conducteur et alors $\boxed{\text{div} \vec{j} = 0}$ (courant constant).

1.4 Loi d'Ohm

– $\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$ est la force dont est soumise la charge q en tout point du conducteur. \vec{E} dérive du potentiel appliqué au conducteur.

– Ces charges sont soumises aussi aux forces de frottement :

$$\vec{F}_r = -\lambda \vec{v}$$

en régime permanent, v =constante et le PFD s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_e + \vec{F}_r$$

Conclusion :

$$q \cdot \vec{E} - \lambda \vec{v} = 0$$

soit

$$\vec{v} = \frac{q}{\lambda} \vec{E}$$

d'où

$$\boxed{\vec{j} = \rho \vec{v} = \frac{\rho q}{\lambda} \vec{E} = \sigma \vec{E}} \quad (9)$$

avec $\sigma = \frac{\rho q}{\lambda}$. Cette relation (loi d'Ohm) indique que le vecteur \vec{j} est colinéaire au champ \vec{E} et donc lui est proportionnel. σ est appelé *conductivité* du matériaux. La quantité $\gamma = \frac{1}{\sigma}$ est appelé *résistivité* du matériaux. Les grandeurs γ et σ permettent de classer les matériaux en trois types : isolant, semi-conducteurs et conducteurs.

1.5 Champ d'induction magnétique créé par un courant électrique

1.5.1 Introduction

La force électrostatique sur une charge q placée dans un champ électrique \vec{E} est : $\vec{F} = q\vec{E}$. L'expérience montre que si q se déplace à la vitesse \vec{v}_0 , elle engendre en plus du champ \vec{E} un champ d'induction magnétique \vec{B} . Lorentz a montré qu'une particule de charge q se déplaçant à la vitesse \vec{v} en présence des champs \vec{E} et \vec{B} créés par une charge quelconque Q , subit la force

$$\vec{F} = q.(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (10)$$

A la force d'origine électrostatique s'est donc ajoutée une force d'origine magnétique $\vec{F}_m = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$. Le courant électrique étant la circulation de charges électriques, il en résulte qu'un circuit électrique parcouru par une charge électrique produira en tout point M un champ d'induction magnétique \vec{B} et que l'action de ce champ sur un autre circuit se traduira par l'apparition de forces s'exerçant sur ce circuit.

1.5.2 Loi de Biot et Savart

a) Courant filiforme

Considérons un fil métallique dans le plan π , $d\vec{l} = P\vec{P}'$. Par définition la quantité $I d\vec{l}$ est appelé élément de courant au point P . Soit M un point quelconque de l'espace tel que $P\vec{M} = \vec{r} = r\vec{u}$, alors l'élément de courant $I d\vec{l}$ crée au point M un vecteur induction magnétique élémentaire $d\vec{B}$ dont :

- le support est perpendiculaire au plan défini par $(I d\vec{l}, P\vec{M})$
- le sens est tel que le trièdre $(d\vec{l}, \vec{r}, d\vec{B})$ soit direct
- le module est défini par :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \sin\theta,$$

où θ désigne l'angle $(d\vec{l}, \vec{u})$, μ_0 est la perméabilité du vide.

Vectoriellement on écrit :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} d\vec{l} \wedge \vec{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} d\vec{l} \wedge \vec{u} \quad (11)$$

L'induction magnétique \vec{B} créée en un point M par un circuit filiforme fermé s'obtient par intégration de la relation précédente.

$$\vec{B} = \oint_{(c)} d\vec{B}$$

Exemple : Un fil rectiligne infini traversé par un courant I crée en un point M situé à une distance a du fil crée l'induction magnétique \vec{B} de module :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (12)$$

Le sens de \vec{B} est donné par la règle du tire-bouchon ou celle des trois doigts de la main.

b) Courant surfacique

Soit \vec{k} le vecteur densité surfacique de courant, l'élément de courant au point de la surface crée au point M un champs magnétique :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{k} \wedge \vec{r}}{r^3} ds \quad (13)$$

En intégrant sur la surface on a :

$$\vec{B} = \iint_{(c)} d\vec{B} = \iint_{(c)} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{k} \wedge \vec{r}}{r^3} ds$$

c) Courant volumique

Un volume élémentaire cylindrique de section ds est traversé par un courant $dI = \vec{j} \cdot d\vec{s}$.

L'élément de courant au point P pris à l'intérieur du conducteur est alors $dI \cdot d\vec{l} = \vec{j} \cdot d\vec{s} \cdot d\vec{l} = \vec{j} \cdot d\tau$ on en deduit :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau$$

d'où,

$$\vec{B} = \iiint_{(c)} d\vec{B} = \iiint_{(c)} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau \quad (14)$$

1.6 Théorème d'Ampère

1.6.1 Circulation du vecteur induction

Soit Γ le cercle de rayon r centré en un point d'un fil infini traversé par le courant I. Le sens de parcours de Γ étant choisi de sorte que le courant I entre par sa face sud et sorte par le nord.

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La circulation du vecteur induction magnétique \vec{B} le long de Γ s'écrit :

$$\mathcal{C} = \oint_{(\Gamma)} \vec{B}.d\vec{M} = \oint_{(\Gamma)} B_\theta.r.d\theta = \oint_{(\Gamma)} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.r.d\theta = \mu_0 I \quad (15)$$

on peut écrire aussi :

$$\mathcal{C} = \oint_{(\Gamma)} \vec{H}.d\vec{M} = I$$

car $\vec{H} = \frac{B}{\mu_0}$, qui est vecteur excitation du champ magnétique ou (champ magnétique, tout court).

1.6.2 Généralisation du théorème d'Ampère

Cas d'une distribution de courant filiforme

Soit (Γ) le contour fermé enlaçant certains courants ; la circulation du vecteur induction magnétique s'écrit :

$$\mathcal{C} = \oint_{(\Gamma)} \vec{B}.d\vec{M} = \mu_0 \sum (\pm I_n) \quad (16)$$

les courants *sud-nord* sont comptés positivement et les *nord-sud* négativement.

Cas d'une distribution de courant non filiforme

$$\mathcal{C} = \oint_{(\Gamma)} \vec{B}.d\vec{M} = \mu_0 \iint_{(\Sigma)} \vec{j}.d\vec{s} \quad (17)$$

1.7 Equation de Maxwell-Ampère

1.7.1 Théorème de Stokes

Hypothèses :

- a.) Soit (Σ) une portion de surface délimitée par un contour (Γ) ; on suppose que cette surface est continument orientable et que le contour fermé (Γ) est orienté par la règle du tire-bouchon.
- b.) Soit $\vec{A}(M)$ un champ vectoriel continu sur $(\Sigma) \cup (\Gamma)$ et possédant des dérivées partielles premières continues en tout point de (Σ) :

Le théorème de Stokes stipule que la circulation du vecteur $\vec{A}(M)$ le long de la courbe (Γ) est égal au flux du rotationnel de $\vec{A}(M)$ à travers la surface orientée (Σ) ; c'est à dire :

$$\boxed{\oint_{(\Gamma)} \vec{A}(M).d\vec{M} = \iint_{(\Sigma)} \text{rot} \vec{A}(M).d\vec{s}} \quad (18)$$

remarque : cas général

$$\text{rot} \vec{A}(M).d\vec{s} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(M).\vec{n}.ds = ds(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}, \vec{n}) = ds(\vec{n} \wedge \vec{\nabla}).\vec{A}$$

soit,

$$\oint_{(\Gamma)} \circ \circ d\vec{M} = \iint_{(\Sigma)} ds(\vec{n} \wedge \vec{\nabla}) \circ \circ \quad (19)$$

$\circ \circ$ est une grandeur (physique ou mathématique) quelconque

1.7.2 Equation de Maxwell-Ampère

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{M} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

D'après Stokes on peut écrire :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} d\vec{M} = \iint_{\Sigma} r \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

on en déduit que :

$$\iint_{\Sigma} r \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

d'où

$$\boxed{r \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}} \quad (20)$$

1.8 Potentiel vecteur de l'induction magnétostatique

1.8.1 \vec{B} est créé par un courant filiforme

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} d\vec{l} \wedge \vec{r}$$

Posons

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} d\vec{l} \quad (21)$$

alors

$$d\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge d\vec{A} = r \vec{\text{rot}}(d\vec{A})$$

$$\text{On en déduit que } \vec{B} = \int_{(c)} d\vec{B} = \int_{(c)} r \vec{\text{rot}}(d\vec{A})$$

c'est à dire : $\vec{B} = r \vec{\text{rot}} \vec{A}$ avec

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{(c)} \frac{d\vec{l}}{r}$$

1.8.2 \vec{B} est créé par un courant non filiforme

1.8.3 Courant surfacique

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{k} ds}{r}$$

avec \vec{k} =vecteur densité surfacique de courant.

On déduit

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_{(c)} \frac{\vec{k}}{r} ds \quad (22)$$

1.8.4 Courant volumique

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dI d\vec{l}}{r} \text{ avec } dI = \vec{j} d\vec{s}$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{j} d\vec{s} \cdot d\vec{l}}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{j}}{r} d\tau \text{ d'où}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iiint_{(c)} \frac{\vec{j}}{r} d\tau \quad (23)$$

1.8.5 Remarque

Dans tous les cas \vec{A} est défini à un gradient près.
En effet, si $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{grad} f$ alors $\vec{B} = \vec{rot} \vec{A} = \vec{rot} \vec{A}'$

1.8.6 Conclusion

Comme pour \vec{E} ($\vec{E} = -\vec{grad} V$) on a : $\vec{B} = \vec{rot} \vec{A}$
 \vec{A} et V ont grossomodo la même forme.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(c)} \frac{\rho}{r} d\tau \quad (24)$$

et

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iiint_{(c)} \frac{\vec{j}}{r} d\tau \quad (25)$$

Enfin, de $\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$

et $\vec{B} = \vec{rot} \vec{A}$

on a :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

soit,

$$\boxed{\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}} \quad (26)$$

1.9 Conservation du flux d'induction

Puisque $\vec{B} = \vec{rot} \vec{A}$, on a

$$\boxed{\text{div} \vec{B} = \text{div}(\vec{rot} \vec{A}) = 0} \quad (27)$$

\vec{B} est à flux conservateur c'est à dire :

$$\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = Cste$$

1.10 Dipôle magnétique

1.10.1 Définition

C'est une boucle (spire) traversée par un courant I et dont les dimensions sont très petites devant la distance r séparant le centre de la spire et un point M de l'espace choisi pour étude.

Soit S la surface de cette spire, par définition, le moment magnétique de la spire est :

$$\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S} = IS\vec{n}, \text{ pour } N \text{ spires on a : } \vec{\mathcal{M}} = NIS\vec{n}$$

1.10.2 Potentiel scalaire et induction magnétique créés par un dipôle magnétique

L'élément $I\vec{dl}$ de la spire crée en M une induction magnétique :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r'^3} \vec{dl} \wedge \vec{r'}$$

$$\text{Soit } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{dl} \wedge \vec{r'}}{r'^3}$$

Imaginons un déplacement élémentaire $d\vec{\lambda} = M\vec{M}'$ du point M . La circulation infinitésimale de \vec{B} s'écrit :

$$\begin{aligned} d\mathcal{C} &= \vec{B} \cdot d\vec{\lambda} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{\lambda} \cdot \int_{(c)} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{r'}}{r'^3} \\ d\mathcal{C} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{(c)} d\vec{\lambda} \cdot \left(\frac{\vec{dl} \wedge \vec{r'}}{r'^3} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

soit

$$d\mathcal{C} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{(c)} \left(\frac{\vec{dl} \wedge d\vec{\lambda}}{r'^3} \right) \cdot \vec{r'} \quad (29)$$

Quand l'on passe de M pour aller en M' , l'angle solide Ω sous lequel de M on voit la spire, change de $d\Omega$:

$$\text{or } d\Omega = \int_{(c)} \left(\frac{\vec{dl} \wedge d\vec{\lambda}}{r'^3} \right) \cdot \vec{r'}$$

alors

$$d\mathcal{C} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega \quad (30)$$

Si nous posons $V^* = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega$, alors on peut écrire :

$$d\mathcal{C} = -dV^*, \text{ soit } \vec{B} \cdot d\vec{\lambda} = -gradV^* \cdot d\vec{\lambda}$$

$$\vec{B} = -gradV^* \quad (31)$$

Par définition, V^* est le potentiel scalaire magnétostatique dont dérive le vecteur induction magnétique \vec{B} .

Remarque :

Géométriquement, Ω est l'angle solide sous lequel on voit la face sud du dipôle magnétique

$$\Omega = \frac{\vec{S} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$$

$$\text{on déduit } V^* = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

1.11 Forces électromagnétiques

1.11.1 Loi fondamentale de Laplace

L'expérience montre qu'un petit élément de courant $I d\vec{l}$ placé dans une région où règne un champ magnétique \vec{B} créé par un courant indépendant de I, subit la force :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (32)$$

1.11.2 Travail des forces électromagnétiques

a) Flux d'induction magnétique

Par définition, le flux φ du vecteur \vec{B} à travers une surface (S) est défini par :

$$\varphi = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_{(S)} \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{(\Gamma)} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (33)$$

Si (Γ) est un circuit (C) parcouru par un courant I, alors on parle de flux de \vec{B} à travers (S) . Si on lui fait subir un déplacement élémentaire $d\lambda$, le travail de la force magnétique agissant sur $I d\vec{l}$ est

$$\begin{aligned} \delta^2 W &= d\vec{F} \cdot d\vec{\lambda} \\ \delta^2 W &= I (d\vec{l} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\lambda} \\ \delta^2 W &= I (d\vec{\lambda} \wedge d\vec{l}) \cdot \vec{B} \\ \delta^2 W &= I d^2 \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} \text{ (avec } d^2 \vec{\Sigma} = d\vec{\lambda} \wedge d\vec{l}) \\ \delta^2 W &= I d^2 \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} \\ \delta^2 W &= I d^2 \vec{\varphi}_c \end{aligned} \quad (34)$$

φ_c est le flux coupé par l'élément de courant $I d\vec{l}$ au cours de son déplacement sur (C) .

On déduit :

$$\delta W = I d\varphi_c \quad (35)$$

Le travail total mis en jeu est :

$$W = I \Delta \varphi_c \quad (36)$$

avec $\Delta \varphi_c$ est la variation du flux entre deux positions M et M'.

a) Force et couple subis par les circuits mobiles

De

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{M} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \text{ (en repère cartésien)}$$

et

$$\delta W = I d\varphi_c = I \left(\frac{\partial \varphi_c}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_c}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi_c}{\partial z} dz \right)$$

on déduit :

$$F_x = I \frac{\partial \varphi_c}{\partial x}, F_y = I \frac{\partial \varphi_c}{\partial y}, F_z = I \frac{\partial \varphi_c}{\partial z} \quad (37)$$

b) Dipôle magnétique dans un champ extérieur

Soit un dipole magnétique (C) d'axe parallèle à \vec{B} . Déplaçons (C) dans la direction de son axe d'une distance $d\lambda$. On a :

$$d\varphi = 0 \Rightarrow \delta W = 0$$

Par conséquent, la résultante des forces appliquées est nulle. Tout se passe comme si (C) est soumis à un couple de force tendant à le tourner de façon à rendre $\vec{n} \parallel \vec{B}$

Au cours d'une rotation $d\theta$ le travail des forces magnétiques est :

$$\delta W = \Gamma d\theta \quad (\Gamma \text{ est le moment du Couple})$$

$$\delta W = \Gamma d\varphi \text{ où } \varphi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \theta$$

$$\text{On a : } \Gamma d\theta = -ISB \sin \theta d\theta$$

d'où

$$\Gamma = -ISB \sin \theta = I \frac{d\varphi}{d\theta} \quad (38)$$

On peut remarquer que cette écriture est la même chose que :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} \quad (39)$$

1.11.3 Energie potentielle électromagnétique

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{\lambda} = I \cdot d\varphi = -dE_p \text{ On en déduit :}$$

$$E_p = -I \cdot \varphi \quad (40)$$

Un dipôle magnétique plongé dans un champ magnétique extérieur \vec{B} est le siège d'une énergie potentielle électromagnétique qui s'écrit sous la forme :

$$E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B} \quad (41)$$

Comme $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{\lambda}$ alors

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p = \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B} = \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\nabla} \vec{B} \quad (42)$$

Chapitre 2

ETUDE DES REGIMES QUASI-STATIONNAIRES

2 Régime quasi-stationnaire

2.1 Introduction

Ce sont des régimes lentement (quasiment) variables pour que les lois en régime stationnaire puissent être appliquées instantanément.

2.2 Force électromotrice d'induction

2.2.1 Hypothèses

Soit dans un référentiel galiléen (\mathcal{R}) un circuit (C) parcouru par un courant d'intensité I , et placé dans un champ induction magnétique \vec{B} (uniforme et constant).

Une charge quelconque q de (C) se déplace à la vitesse v_a par rapport à (\mathcal{R}).

On peut écrire $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ où v_r et v_e sont respectivement, les vitesses relative et d'entraînement de q par rapport au référentiel (\mathcal{R}).

La charge q est soumise à la force de Laplace

$$\vec{F} = q\vec{v}_a \wedge \vec{B} = q(\vec{v}_r + \vec{v}_e) \wedge \vec{B} \quad (43)$$

Posons $\vec{E}_m = \vec{v}_a \wedge \vec{B} = (\vec{v}_r + \vec{v}_e) \wedge \vec{B}$

On a alors

$$\vec{F} = q\vec{E}_m \quad (44)$$

\vec{E}_m est par définition, le *champ électromoteur*

2.2.2 Circulation du champ électromoteur

Considérons un déplacement élémentaire $\vec{dl} = \vec{v}_r dt$ de chaque charge dans le circuit (C).

On a par définition :

$$d\mathcal{C} = \vec{E}_m \cdot \vec{dl}$$

$$d\mathcal{C} = (\vec{v}_r + \vec{v}_e) \wedge \vec{B} \cdot \vec{dl}$$

$$d\mathcal{C} = (\vec{v}_r, \vec{B}, \vec{dl}) + (\vec{v}_e, \vec{B}, \vec{dl})$$

$$d\mathcal{C} = (\vec{v}_e, \vec{B}, \vec{dl})$$

car le premier terme est nul ($d\vec{l} \parallel \vec{v}_e$)

$$d\mathcal{C} = -(\vec{v}_e \wedge d\vec{l}) \cdot \vec{B}$$

d'où

$$\mathcal{C} = \oint_{(C)} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = - \oint_{(C)} (\vec{v}_e \wedge d\vec{l}) \cdot \vec{B} \quad (45)$$

Remarque :

- pendant l'intervalle de temps dt l'élément $d\vec{l}$ s'est déplacé de $d\vec{\lambda} = \vec{v}_e dt$.
- $d\vec{\lambda}$ a balayé une surface élémentaire $d^2\vec{\Sigma} = d\vec{\lambda} \wedge d\vec{l} = (\vec{v}_e \wedge d\vec{l})dt$
- le flux coupé correspondant à $d^2\vec{\Sigma}$ est $d^2\varphi = \vec{B} \cdot d^2\vec{\Sigma} = \vec{B} \cdot (\vec{v}_e \wedge d\vec{l})dt$, c'est à dire, le flux $d\varphi_c$ coupé par le circuit (C) au cours de son déplacement élémentaire $d\vec{\lambda}$ a pour valeur :
 $d\varphi_c = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot (\vec{v}_e \wedge d\vec{l})dt = dt \oint_{(C)} (\vec{v}_e \wedge d\vec{l}) \cdot \vec{B}$

Par conséquent, la circulation du champ électromoteur le long du contour (C) a pour valeur :

$$\oint_{(C)} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = - \frac{d\varphi_c}{dt} \underbrace{=}_{*} - \frac{d\varphi}{dt} \quad (46)$$

* car le flux coupé est égale à la variation du flux à travers le circuit (C) dans son déplacement.

Par définition, on appelle *force électromotrice* d'induction exercée sur le circuit (C) la quantité :

$$e = \oint_{(C)} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \quad (47)$$

Et donc, on a :

$$\boxed{e = - \frac{d\varphi_c}{dt} = - \frac{d\varphi}{dt}} \quad (48)$$

2.3 Induction électromagnétique - LOI DE FARADAY

C'est une généralisation du résultat (50) et qui tient compte des résultats expérimentaux suivants :

- le résultat (50) est valable pour les circuits non filiformes
- le résultat (50) est valable lorsque la variation du flux de \vec{B} résulte du cas de figure "circuit fixe" - "Induction \vec{B} variable".

2.3.1 Loi de Faraday

Si on fait varier par un procédé quelconque le flux d'induction magnétique φ à travers un circuit fermé, ce circuit est le siège d'un courant induit. Faraday a expliqué l'apparition de ce courant induit par l'existence de la force électromotrice d'induction.

$$\boxed{e_i = - \frac{d\varphi}{dt}} \quad (49)$$

2.3.2 Sens du courant induit : Loi de Lenz

Le courant engendré par la force électromotrice d'induction (courant induit) a un sens tel que le flux d'induction produit dans le circuit par ce courant s'oppose à la variation du flux qui lui a donné naissance (flux inducteur) d'où le signe (-) dans la relation (51).

Convention de signe

Etant donné un circuit (C), on choisit un sens positif de parcours du courant. Le flux de \vec{B} à travers (C) est positif s'il traverse le circuit de la face Sud à la face Nord. La force électromotrice d'induction e est positive si le courant qu'elle crée dans le circuit (courant induit) est dirigé dans le sens positif choisi sinon, il joue le rôle d'une force contre-électromotrice.

2.4 Phénomènes d'induction dans un circuit fixe placé dans un champ \vec{B} variable

2.4.1 Expression mathématique du champ électromoteur

Soit un circuit (C) plongé dans un champ \vec{B} variable.

$$\varphi_c = \oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \varphi$$

On déduit :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_{(C)} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = - \oint_{(C)} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \quad (50)$$

On peut donc écrire localement :

$$\boxed{\vec{E}_m = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \quad (51)$$

Lorsque les deux phénomènes coexistent (circuit (C) mobile dans une induction \vec{B} variable), le champ électromoteur s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\vec{E}_m = \vec{v}_a \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \quad (52)$$

Le champ électromoteur est parfois appelé champ électrique d'induction. Il présente des propriétés différentes de celles du champ électrostatique.

2.4.2 Extension de la notion de champ électrique

Supposons qu'en plus des phénomènes d'induction, il règne dans la région considérée un champ \vec{E}_s d'origine électrostatique : $\vec{E}_s = -\text{grad}V$.

– D'une part, une charge q du circuit sera soumise à la force totale :

$$\vec{F}_t = q(\vec{E}_m + \vec{E}_s) \quad (53)$$

$$\vec{F}_t = q(\vec{v}_a \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{grad}V) \quad (54)$$

– D'autre part, la force de Lorentz qui s'exerce sur cette charge est égale à :

$$\vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v}_a \wedge \vec{B}) \quad (55)$$

Par identification des relations (56) et (57) on en déduit l'expression de

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \quad (56)$$

Par définition, le vecteur \vec{E} de la relation (58) s'appelle *vecteur champ électrique généralisé*.

2.4.3 Relation de Maxwell-Faraday

De la relation (58) on en déduit :

$$\begin{aligned} \vec{rot}\vec{E} &= -\vec{rot}(\vec{grad}V) - \vec{rot}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{rot}\vec{E} &= -\vec{rot}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial(\vec{rot}\vec{A})}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad \boxed{\vec{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (57)$$

Cette équation dite de Maxwell-Faraday constitue une relation générale et fondamentale de l'électromagnétisme.

C'est l'une des équations de Maxwell dans la théorie de propagation des ondes.

Rappel :

Nous avons déjà établi : $div\vec{B} = 0$

Par ailleurs de la relation (58) on déduit :

$$div\vec{E} = -div(\vec{grad}V) - \frac{\partial}{\partial t}div\vec{A} \quad \boxed{div\vec{E} = -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t}div\vec{A}} \quad (58)$$

En régime quasi-stationnaire, on peut comme en régime stationnaire choisir \vec{A} de façon à ce que $div\vec{A} = 0$. Cette condition est appelée *jauge de Coulomb* :

Si $\vec{B} = \vec{rot}\vec{A}$ alors $\vec{B} = \vec{rot}\vec{A}'$,

toute fois que $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{grad}f$.

On a alors, en s'appuyant sur le théorème de Gauss,

$$\boxed{div\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (59)$$

$div\vec{E} = 0$ si la région est dépourvue de charges statiques (dans le vide, par exemple).

Remarque :

La jauge de Coulomb implique que :

$$div\vec{A}' = div\vec{A} + div(\vec{grad}\varphi) = 0,$$

c'est à dire $div(\vec{grad}\varphi) = 0$

c'est à dire $\Delta\varphi = 0$ (potentiel harmonique).

2.5 Coefficient d'induction mixte

Soit une série de N circuits en influence les uns par rapport aux autres et vice versa. Ces circuits sont plongés dans un champ variable. Le flux coupé par le $k^{ième}$ circuit s'écrit :

$$\varphi_k = L_k I_k + \sum_{l=1(l \neq k)}^n M_{kl} I_l \quad (60)$$

L_k est le coefficient d'auto-induction ou Self ou inductance propre.

La force électromotrice d'induction magnétique e_i créée dans le circuit (c_k) est alors :

$$e_i^k = -\frac{d\varphi_k}{dt} = -\frac{d(L_k I_k)}{dt} - \sum_{l=1(l \neq k)}^n \frac{d(M_{kl} I_l)}{dt} \quad (61)$$

la quantité $e_a^k = -\frac{d(L_k I_k)}{dt}$ s'appelle force électromotrice d'auto-induction.

Remarque

Les L_k et M_{kl} ne dépendent que de la forme des circuits.

Dans le cas des circuits indéformables (L_k et M_{kl}) on peut alors écrire :

$$\boxed{e_a^k = -L_k \frac{dI_k}{dt}} \quad (62)$$

$$\boxed{e_i^k = -\frac{d\varphi_k}{dt} = -L_k \frac{dI_k}{dt} - \sum_{l=1(l \neq k)}^n M_{kl} \frac{dI_l}{dt}} \quad (63)$$

2.6 Inductance propre et inductance mutuelle

Soit une série de n circuits indépendants et traversés par les courants I_1, I_2, \dots, I_n .

Ces circuits interagissent entre eux par une variation de flux les uns par rapport aux autres

$\varphi \propto B$ et $B \propto I$ donc $\varphi \propto I$

Soit φ_k le flux traversant le $k^{ième}$ circuit et I_k le courant le traversant.

On a :

$$\varphi_k = L_k I_k + \sum_{l=1(l \neq k)}^n M_{kl} I_l \quad (64)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & L_{22} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} \quad (65)$$

Les éléments diagonaux sont appelés *inductances propres* ($L_k > 0$).

Les éléments non diagonaux portent le nom d'induction mutuelles ou *coefficients d'induction mutuelle*.

Le principe de l'interaction nous permet de montrer que $M_{kl} = M_{lk}$. Les unités sont exprimées en **Henry**.

2.7 Principe de conservation de la charge

Le principe général qui décrit que la charge est conservée en un point M du conducteur est :

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (66)$$

En régime quasi-stationnaire, ρ varie lentement avec le temps de telle sorte qu'on a, comme en régime stationnaire :

$$\boxed{\text{div} \vec{j} = 0} \quad (67)$$

Cela veut dire qu'en régime quasi-stationnaire, les lois de Kirchoff relatives aux noeuds restent valables.

2.8 Loi d'Ohm en régime quasi-stationnaire

En régime stationnaire on a : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ avec σ la conductivité électrique du matériau.

En régime quasi-stationnaire : $\vec{j} = \sigma(\vec{E}_s + \vec{E}_m)$

D'après la loi d'Ohm le courant induit à l'instant t qui apparaît dans un circuit de résistance R sera :

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\varphi}{dt} \quad (68)$$

La quantité de charge induite entre les instants t_1 et t_2 vaut :

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i dt = -\frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} d\varphi \quad (69)$$

soit,

$$\boxed{Q = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}} \quad (70)$$

La loi de Pouillet va s'écrire alors sous la forme :

$$\mathcal{E} = RI \quad (71)$$

\mathcal{E} est somme algébrique des f.é.m et f.c.é.m appliquées et induites. R est la résistante totale du circuit, I est l'intensité du courant traversant le circuit (C).

2.9 Conclusion

On pourra appliquer en régime quasi-stationnaire les mêmes lois qu'en régime permanent, à savoir :

- les lois d'ohm
- les lois de Kirchoff relatives aux noeuds et aux mailles à condition d'ajouter aux f.e.m appliquées, les forces électromotrices d'induction.

2.10 Energie électromagnétiques

2.10.1 Définition

Considérons un circuit (C) parcouru par un courant d'intensité I . Soit φ , son flux d'auto-induction. On appelle énergie électromagnétique du circuit (C) le travail minimal que l'on doit lui fournir pour faire passer l'intensité du courant et son flux propre des valeurs initiales 0, aux valeurs I et φ , respectivement.

2.10.2 Energie électromagnétique dans un circuit unique

Soit un circuit R,L, contenant un générateur de f.é.m. E , si on ferme son interrupteur K il apparaît un courant dans le circuit. $i(t)$ vérifie l'équation : $E + e = R.i$

$e = -\frac{d\varphi}{dt}$ et $\varphi = Li$, e étant la f.e.m induite de la bobine.

On a : $E = L\frac{di}{dt} + R.i$

En multipliant les deux membres par idt , on a :

$$E.idt = L\frac{d\varphi}{dt}.idt + R.i^2dt \quad (72)$$

Discussion :

1. La quantité $E.idt$ représente l'énergie ou le travail fourni par le générateur pendant l'intervalle de tps dt
2. La quantité $R.i^2dt$ représente l'énergie calorifique dissipée par effet joule dans le circuit pendant l'intervalle de temps dt .
3. Le terme $L.idi = d(\frac{1}{2}L.i^2) = dW_m$ représente l'énergie absorbée pour faire passer le courant malgré la f.é.m d'induction. Il correspond à l'accroissement du flux d'auto-induction à travers le circuit pendant l'intervalle de temps dt . C'est l'augmentation de l'énergie électromagnétique du circuit l'énergie.

Si $i(t)$ passe de 0 (à l'instant $t=0$) à I (à l'instant t) alors l'énergie électromagnétique emmagasinée dans le circuit est :

$$W_m = \int_0^I L.idi = \frac{1}{2}LI^2 \quad (73)$$

Comme $\varphi = L.I$ on a :

$$W_m = \frac{1}{2}\varphi.I \quad (74)$$

Cette énergie sera restituée à la rupture du courant.

2.10.3 Cas de deux circuits filiformes (c_1) et (c_2)

Deux circuits (c_1) et (c_2) étant caractérisés par les éléments respectifs ci-après :

$(c_1) = \{E_1, R_1, L_1, i_1\}$ et $(c_2) = \{E_2, R_2, L_2, i_2\}$.

Soit M le coefficient d'induction mutuelle entre (c_1) et (c_2) .

La loi d'Ohm dans les deux circuits s'écrit :

$$(c_1) \longleftrightarrow E_1 + e_1 = R.i_1 \text{ avec } e_1 = -\frac{d\varphi_1}{dt} \text{ et } \varphi_1 = L_1.i_1 + M.i_2$$

$$(c_2) \longleftrightarrow E_2 + e_2 = R.i_2 \text{ avec } e_2 = -\frac{d\varphi_2}{dt} \text{ et } \varphi_2 = L_2.i_2 + M.i_1$$

Ceci aboutit au système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} E_1 = -e_1 + Ri_1 \\ E_2 = -e_2 + Ri_2 \end{cases} \quad (75)$$

soit,

$$\begin{cases} E_1 = -e_1 + R_1i_1 \\ E_2 = -e_2 + R_2i_2 \end{cases} \quad (76)$$

$$\begin{cases} E_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + R_1i_1 + M\frac{di_2}{dt} \\ E_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + R_2i_2 + M\frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (77)$$

Multiplions les deux membres par $i_k dt$, respectivement $k = 1, 2$; on a :

$$\begin{cases} E_1i_1dt = R_1i_1^2dt + L_1i_1di_1 + Mi_1di_2 \\ E_2i_2dt = R_2i_2^2dt + L_2i_2di_2 + Mi_2di_1 \end{cases} \quad (78)$$

Le bilan énergétique correspondant au système, s'écrit :

$$E_1i_1dt + E_2i_2dt = R_1i_1^2dt + R_2i_2^2dt + L_1i_1di_1 + L_2i_2di_2 + Mi_1di_2 + Mi_2di_1 \quad (79)$$

et comme dans le paragraphe précédent,

$$dW_m = L_1i_1di_1dt + L_2i_2di_2dt + Mi_1di_2 + Mi_2di_1 = d\left(\frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2\right) + d(Mi_1i_2) \quad (80)$$

représente l'accroissement de l'énergie électromagnétique du système formé par les deux circuits.

Quand i_1 passe de 0 à I_1 et i_2 passe de 0 à I_2 , on trouve par intégration, l'énergie électromagnétique ou l'accroissement de l'énergie électromagnétique sous la forme :

$$W_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2 \quad (81)$$

soit, puisque :

$$\begin{cases} \varphi_1 = L_1I_1 + MI_2 \\ \varphi_2 = L_2I_2 + MI_1 \end{cases} \quad (82)$$

on a :

$$W_m = \frac{1}{2}I_1\varphi_1 + \frac{1}{2}I_2\varphi_2 \quad (83)$$

2.10.4 Généralisation

Soient les circuits (c_1) , (c_2) ... et (c_n) , n circuits caractérisés par leur éléments respectifs $(c_1) = \{E_1, R_1, L_1, i_1\}$, $(c_2) = \{E_2, R_2, L_2, i_2\}$, ..., et $(c_n) = \{E_n, R_n, L_n, i_n\}$ Lorsqu'on ferme les circuits, l'énergie électromagnétique mise en jeu, s'écrit :

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \varphi_k} \quad (84)$$

Dans ce cas, φ_k s'exprime sous la forme :

$$\varphi_k = L_k I_k + \sum_{l \neq k, l=1}^n M_{kl} I_l \quad (85)$$

2.11 Densité volumique d'énergie électromagnétique

2.11.1 Energie électromagnétique

Considérons, dans une région de l'espace où règne une induction magnétique \vec{B} et un champ électrique \vec{E} variables, une charge q animée d'une vitesse \vec{v} . D'après Lorentz, cette charge est soumise à une force qui s'écrit sous la forme : $\vec{F} = q.(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. On a également, $\vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Au cours d'un déplacement élémentaire, $d\vec{M} = \vec{v}dt$, le travail de la force \vec{F} est :

$$dW = \vec{F}.d\vec{M} = q.(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).d\vec{M} \text{ , soit}$$

$$dW = q\vec{E}.\vec{v}dt$$

L'énergie électromagnétique dissipée dans le circuit sous l'action de la force \vec{F} est une énergie potentielle qui s'écrit sous la forme :

$$dW_m = -q\vec{E}.\vec{v}dt \quad (86)$$

Supposons que l'on ait un volume chargé de charges totale Q définie par une densité volumique de charge ρ . Dans le volume $d\tau$ se concentre la charge $dQ = \rho d\tau$. L'énergie électromagnétique mise en jeu par le déplacement de charge élémentaire, en remarquant que :

$$d\tau = d\vec{S}.d\vec{l}$$

$$d^2W_m = -dQ\vec{E}.\vec{v}dt = -\rho d\tau \vec{E}.\vec{v}dt = -\vec{j}.\vec{E}d\tau dt$$

soit,

$$dW_m = - \iiint_{(\mathcal{D})} \vec{j}.\vec{E}d\tau dt \quad (87)$$

$$\boxed{\frac{dW_m}{dt} = - \iiint_{(\mathcal{D})} \vec{j}.\vec{E}d\tau} \quad (88)$$

L'équation (20) peut être aussi écrit sous la forme :

$$\boxed{\frac{dW_m}{dt} = -\frac{1}{\mu_0} \iiint_{(\mathcal{D})} \vec{E}.r\vec{\text{rot}}\vec{B}d\tau} \quad (89)$$

$$\text{car } r\vec{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

On en déduit que :

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{(\mathcal{D})} B^2 d\tau \quad (90)$$

2.11.2 Localisation de l'énergie électromagnétique : densité d'énergie électromagnétique

$$\text{Partons de } d^2W_m = -\vec{j}.\vec{E}d\tau dt$$

et remarquons que : $r\vec{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

on a alors

$$d^2W_m = -\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \vec{r} \otimes \vec{B} \cdot d\vec{t} \cdot d\vec{\tau}, \quad (91)$$

soit, puisque

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{r} \otimes \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{r} \otimes \vec{B},$$

on a alors :

$$\begin{aligned} d^2W_m &= \frac{1}{\mu_0} [\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) - \vec{B} \cdot \vec{r} \otimes \vec{E}] d\tau dt \\ &= \frac{1}{\mu_0} [\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}] d\tau dt \\ &= \frac{1}{\mu_0} [\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) d\tau dt + \frac{1}{2} d(B^2) d\tau] \end{aligned}$$

$$dW_m = \frac{1}{\mu_0} \iiint_{(\mathcal{D})} \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) d\tau dt + \frac{1}{2\mu_0} d \iiint_{(\mathcal{D})} (B^2) d\tau$$

$$dW_m = \frac{1}{\mu_0} \iint_{(\Sigma)} \vec{E} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{S} dt + \frac{1}{2\mu_0} d \iiint_{(\mathcal{D})} (B^2) d\tau$$

où Σ est la surface d'une sphère de rayon R délimitant le volume \mathcal{D} .

Lorsque $R \rightarrow \infty$,

$\left. \begin{array}{l} *B \text{ varie en } \frac{1}{R^2} \\ *E \text{ varie en } \frac{1}{R} \\ *dS \text{ varie en } R^2 \end{array} \right\}$ alors le premier terme dans l'expression dW_m est nul.
 d'où

$$dW_m = \frac{1}{2\mu_0} d \iiint_{(\mathcal{D})} (B^2) d\tau \quad (92)$$

soit,

$$\boxed{W_m = \iiint_{(\mathcal{E})} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau} \quad (93)$$

La relation (93) exprime que l'énergie électromagnétique est répartie dans l'espace avec une densité

$$\boxed{\omega_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{B \cdot H}{2} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2} \quad (94)$$

Lorsqu'il existe simultanément des charges élémentaires d'origine électrostatique et des champ d'origine magnétique, l'énergie totale se calcule comme si elle était répartie dans l'espace avec une densité d'énergie électromagnétique ω . on a :

$$\boxed{\omega = \omega_e + \omega_m = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{D^2}{\epsilon_0} + \frac{B^2}{\mu_0} \right)} \quad (95)$$

2.12 Energie électromagnétique dans le cas des circuits non filiformes

L'expression (94) donnant la valeur de l'énergie électromagnétique fait intervenir la valeur d'un champ magnétique. Comme celui-ci peut être créé par la présence du courant, nous pourrions écrire une expression de l'énergie électromagnétique en fonction du vecteur densité du courant. En effet,

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{(\mathcal{E})} B^2 d\tau$$

peut s'écrire sous la forme :

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{(\mathcal{E})} \vec{B} \cdot \vec{rot} \vec{A} d\tau.$$

En remarquant que

$$div(\vec{B} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{rot} \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{rot} \vec{A}, \quad (96)$$

on a alors ;

$$W_m = -\frac{1}{2\mu_0} \iiint_{(\mathcal{E})} div(\vec{B} \wedge \vec{A}) d\tau + \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{(\mathcal{E})} \vec{A} \cdot \vec{rot} \vec{B} d\tau \quad (97)$$

Puisque, $\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ et d'après Stokes,

$$W_m = -\frac{1}{2\mu_0} \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{(\Sigma)} (\vec{B} \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \iiint_{(\mathcal{E})} \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau$$

En faisant le même raisonnement que précédemment, la première intégrale est nulle d'où :

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2} \iiint_{(\mathcal{E})} \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau} \quad (98)$$

Chapitre 3

LE COURANT ALTERNATIF SINUSOÏDAL

3 Introduction

Nous étudierons dans ce chapitre des circuits simples aux bornes desquels la f.e.m appliquée est de la forme :

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_m \cos(\omega t) \quad (99)$$

On aboutira à des résolutions d'équations différentielles du second ordre linéaires à coefficients constants et avec second membre. Par conséquent, la solution générale du circuit comportera deux termes :

- la solution de l'équation sans second membre (ESSM)
- une solution permanente de l'équation complète (EASM).

Remarque :

Au bout d'un certain temps (souvent très court) appelé régime transitoire, les effets physiques de la solution amortie disparaissent et seule persistent les effets de la solution permanente.

Nous nous intéresserons dans ce cours et dans chaque cas, à la recherche de la solution permanente, réponse que nous noterons sous la forme :

$$I = I_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (100)$$

4 Série de Fourier

4.1 Définitions

Soit un signal $x(t)$ périodique de période T admettant un nombre fini de discontinuités ; on a :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (101)$$

$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$	$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \cos(n\omega t) dt$	$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \sin(n\omega t) dt$
--	--	--

(102)

4.2 Représentation Complexe

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + \sum_{n=1}^{n=-\infty} b_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}$$

soit,

$$x(t) = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - jb_n)e^{jn\omega t} + (a_n + jb_n)e^{-jn\omega t}]$$

Les coefficients C_n sont calculés par l'intégrale :

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt = C_{-n}^* = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

4.3 Représentation spectrale

4.3.1 Harmoniques

Posons $\tan \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$.

$$\text{On a : } x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(n\omega t) - \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(n\omega t) \right)$$

$$\cos(\varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_n}} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\varphi_n) = \frac{-b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad \text{avec} \quad S_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$x(t)$ = somme d'un signal continue et d'une infinité de signaux sinusoïdaux de pulsation $\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots, n\omega, \dots$

Le terme de pulsation ω est appelé la fondamentale ou le premier harmonique. Les autres termes s'appellent respectivement harmoniques d'ordre 2, 3, 4, ..., n, ...

4.3.2 Spectre

On porte sur l'axe des abscisses la pulsation ω et en ordonnée les raies traduisant les modules des S_n correspondants.

De même, on représente le spectre en puissance (S_n^2) et puis le spectre en phase (φ_n).

4.3.3 Symétrie et Changement de l'origine des temps

Fonction paire

$$a_n = \frac{4}{T} \int_{t_0}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = 0, \text{ on en déduit que } C_n = C_{-n} = \frac{a_n}{2}$$

Fonction Impaire

$$b_n = \frac{4}{T} \int_{t_0}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin(n\omega t) dt, \quad a_n = 0, \text{ on en déduit que } C_n = -C_{-n} = \frac{b_n}{2j}$$

5 Etude du circuit [R,L,C] série

5.1 Méthode de Fresnel

C'est une méthode purement vectorielle. Le raisonnement s'appuie sur les schémas réalisés dans le plan (xoy).

Je vous rappelle que tous les schémas ont été déjà réalisés en amphi, pendant mon cours.

La loi d'Ohm du circuit [R,L,C] série s'écrit :

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = E(t) \quad (103)$$

Par commodité, pour le montage série, le courant $I(t)$ confondu avec l'axe (x'ox)

$$I(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (104)$$

Pour des circuits en dérivation, on choisit plutôt $E(t)$ dirigé suivant l'axe (x'ox).

1. à $RI(t)$ on associe un vecteur de norme RI_m et confondu avec l'axe (x'ox)
2. à $L \frac{dI}{dt}$ on associe un vecteur de norme $L\omega I_m$ déduit du premier par la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$
3. à $\frac{1}{C} \int I dt$ on associe un vecteur de norme $\frac{I_m}{C\omega}$ déduit du premier par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$
4. à $E(t)$ on associe un vecteur de norme E_m déduit du premier par une rotation de $(-\varphi)$

On déduit immédiatement que : $E_m^2 = R^2 I_m^2 + I_m^2 (\frac{1}{C\omega} - L\omega)^2$

$$\begin{cases} I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \\ \tan \varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R} = -\frac{(L\omega - \frac{1}{C\omega})}{R} \end{cases} \quad (105)$$

La quantité $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ est appelée *Impédance réelle* du circuit (du latin *impedere* = empêcher)

Z est une fonction de la fréquence au travers de la pulsation $\omega = 2\pi f$

Z est définie par la relation $Z = \frac{E_m}{I_m}$

Z est homogène à une résistance et s'exprime en (Ohm).

φ est tel que :

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{RI_m}{E_m} = \frac{R}{Z} \\ \sin \varphi = -\frac{(L\omega - \frac{1}{C\omega})I_m}{E_m} = -\frac{(L\omega - \frac{1}{C\omega})}{Z} \end{cases}$$

5.2 Notation en Complexe

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = E(t)$$

1. à $I(t)$ on associe le nombre complexe $\mathcal{I} = I_m \exp j(\omega t + \varphi)$
2. à $RI(t)$ on associe le nombre complexe $\mathcal{U}_R = RI_m \exp j(\omega t + \varphi)$

3. à $L \frac{dI}{dt}$ on associe le nombre complexe $\mathcal{U}_L = jL\omega I_m \exp j(\omega t + \varphi)$
4. à $\frac{1}{C} \int I dt$ on associe le nombre complexe $\mathcal{U}_C = -j \frac{I_m}{C\omega} \exp j(\omega t + \varphi)$
5. à $E(t) = E_m \cos(\omega t)$ on associe le nombre complexe $\mathcal{E}(t) = E_m \exp j(\omega t)$

La quantité

$$\mathcal{Z} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) \quad (106)$$

est appelée *impédance complexe* du circuit.

La quantité $X = \text{Im}(\mathcal{Z})$ (partie imaginaire de \mathcal{Z} est appelée *Réactance du circuit*. Finalement, pour un circuit [R,L,C] les impédances complexes de chaque élément s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned} \boxed{\mathcal{Z}_R = R}, & \text{ pour une résistance} \\ \boxed{\mathcal{Z}_L = jL\omega}, & \text{ pour une self pure} \\ \boxed{\mathcal{Z}_C = \frac{-j}{C\omega}}, & \text{ pour une capacité pure} \end{aligned}$$

de telle sorte que $\mathcal{Z} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$ pour un circuit [R,L,C] série.

Bien évidemment les règles de montage en série ou en parallèle s'appliquent à partir de ces expressions complexes des éléments du circuit :

la somme des impédances complexes pour un montage en série, l'inverse de l'impédance équivalente étant égale à la somme des inverses de chaque impédance complexe du circuit, dans le cas d'un montage en parallèle. De la même façon, la loi d'Ohm s'applique sous la forme :

$$\boxed{\mathcal{U} = \mathcal{Z} \cdot \mathcal{I}} \quad (107)$$

5.3 Valeur maximale, Valeur efficace

Les amplitudes I_m , E_m et U_m sont les valeurs maximales pour chaque grandeur en courant alternatif. On appelle valeur efficace d'un courant alternatif sinusoïdal, l'intensité I_{eff} du courant continu qui produirait dans la même résistance pendant le même temps, le même dégagement d'énergie par effet Joule. D'où :

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (108)$$

même expression pour U_{eff} et E_{eff}

5.4 Puissance Instantanée, Puissance moyenne

$$p(t) = I(t) \cdot U(t) \quad (109)$$

est la puissance instantanée consommée dans une impédance.

$$P = \langle p(t) \rangle = I_{eff} \cdot U_{eff} \cos \varphi \quad (110)$$

est la puissance moyenne, et $\cos \varphi$ est le facteur de puissance. L'unité de puissance est le *Watt*

5.5 Puissance active, Puissance réactive

La puissance complexe s'écrit à partir des expressions complexes de $I(t)$ et $U(t)$

$$\mathcal{I}(t) = I_m \exp j(\omega t + \varphi)$$

$$\mathcal{U}(t) = U_m \exp j(\omega t)$$

$$\boxed{\mathcal{P} = \mathcal{I} \cdot \mathcal{U}(t)}$$

L'amplitude complexe de \mathcal{P} est :

$$\boxed{||\mathcal{P}|| = U_{eff} \cdot I_{eff} \exp(-j\varphi) = P_a + jP_r}$$

P_a est la puissance active et P_r la puissance réactive.

$$\boxed{P_a = R(I_{eff})^2}$$

et $\boxed{P_r = X \cdot (I_{eff})^2}$

Commentaire :

La puissance active est attachée aux résistances du réseau, elle est toujours positive et correspond à l'énergie dissipée par effet Joule.

La puissance réactive est associée à la réactance du réseau ; son signe dépend de X et correspond à l'énergie emmagasinée dans une réactance.

Chapitre 4

EQUATIONS DE MAXWELL

6 Rappels

6.1 Champs stationnaires

Les équations qui traduisent les champ stationnaires sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{rot} \vec{E} = \vec{0} \\ div \vec{D} = \rho \\ \vec{rot} \vec{H} = \vec{j} \\ div \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad (111)$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \end{array} \right.$ (dans le vide) et $\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{array} \right.$ (dans un milieu diélectrique parfait)

Dans un conducteur de conductivité σ on peut écrire également :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (112)$$

et

$$div \vec{j} = 0 \quad (113)$$

6.2 Champs quasi-stationnaires

Les relations du milieu sont toujours les mêmes et on peut écrire pour les compléter ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div \vec{D} = \rho \\ \vec{rot} \vec{H} = \vec{j} \\ div \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad (114)$$

7 Régimes Variables (rapidement)

Les champs sont à présent produits par des sources variables dans le temps ; la variation s'effectuant de façon quelconque.

- On a fréquemment des circuits ouverts
- l'intensité n'est plus la même à tous les points du circuit

- les déplacements de charges (resp. du courant variable) peuvent faire varier la densité locale de charges ρ .

Il pourra y avoir (*par exemple*) accumulation de charge en certains points du circuit (milieu non-isotrope).

Dans le cas plus général, l'équation qui traduit la conservation de la charge n'est plus $\text{div} \vec{j} = 0$, mais au contraire :

$$\boxed{\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad (115)$$

7.1 Passage en régime variable

D'une manière générale, l'application brutale des équations en régime quasi-stationnaires aux régimes variables conduit à des difficultés à la fois d'ordre physique et d'ordre mathématique.

7.1.1 Difficultés d'ordre mathématique

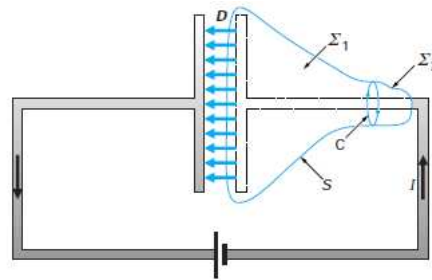
Considérons l'équation $\vec{r} \otimes \vec{H} = \vec{j}$ qui traduit le théorème d'Ampère (localement).

Supposons qu'elle soit vérifiée en régime rapidement variable.

On en déduira que $\text{div}(\vec{r} \otimes \vec{H}) = \text{div}(\vec{j}) = 0$.

Or, nous venons d'écrire (*paragraphe précédent*) que $\text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$. Par conséquent, il y a une contradiction, donc le théorème d'Ampère n'est plus valable sous cette forme.

7.1.2 Difficultés d'ordre physique



Circuit de Maxwell

On fait circuler pendant un temps plus ou moins grand un courant $I(t)$ dans le circuit ci-dessus.

Pendant la charge du condensateur $I(t) = \frac{dQ}{dt}$ et pendant la décharge on a : $I(t) = -\frac{dQ}{dt}$.

La loi d'Ohm appliquée au circuit s'écrit : $RI = \mathcal{E} - v_c$

soit :

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}$$

ou

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad (116)$$

(équation différentielle du 1er ordre avec second membre).

la solution est de la forme : $Q(t) = \mathcal{E}C + B \exp(-\frac{t}{RC})$

A l'instant $t = 0$ la charge $Q(0) = 0$ et $\frac{dQ}{dt}(0) = 0$, d'où $B = -\mathcal{E}C$

Par conséquent,

$$Q(t) = \mathcal{E}C[1 - \exp(-\frac{t}{RC})] \quad (117)$$

d'où

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} \exp(-\frac{t}{RC}) \quad (118)$$

Ce courant produit dans son voisinage un champ magnétique \vec{H} , en principe calculable soit par la loi de Biot et Savart, ou soit par le théorème d'Ampère. Appliquons le théorème d'Ampère en considérant les surfaces fermées (S) et (Σ_1) comme indiquées sur le schéma de la figure ci-dessus.

On a : $\oint_{(C)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} r \vec{\otimes} t \vec{H} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$ où \mathcal{S} est une surface s'appuyant sur (C) . \mathcal{S} et Σ_1 s'appuient sur le même contour (C) .

Remarque :

Pour $(\mathcal{S}) = (\Sigma_1)$ le théorème d'Ampère s'écrit :

$\oint_{(C_1)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{(\Sigma_1)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ (intérieur du condensateur dépourvu de charges et *puisque aucun courant ne traverse Σ_1*).

Pour $(\mathcal{S}) = (\Sigma_2)$ le théorème d'Ampère s'écrit :

$\oint_{(C_2)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{(\Sigma_2)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = I(t)$ car le courant $I(t)$ le traverse.

Il y a donc un problème à résoudre.

7.1.3 Que se passe-t-il réellement entre les armatures du condensateur ?

Entre les plaques du condensateur, il n'y a pas de courant mais il y existe un champ électrique $E(t)$ dont le module croît en fonction du temps.

$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}$ avec $\sigma(t) = \frac{q(t)}{S}$, $\sigma(t)$ est la densité surfacique de charges de l'armature positive.

Pour pouvoir continuer à appliquer le théorème d'Ampère, Maxwell a imaginé que ce champ électrique $E(t)$ devrait produire les mêmes effets (magnétiques) qu'un courant dont l'intensité totale dans le diélectrique serait égale à l'intensité $I(t)$ du circuit.

Remarque :

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = S \frac{d\sigma}{dt} = \epsilon_0 \cdot S \frac{dE}{dt}$$

$I(t)$ peut s'écrire aussi sous la forme $I(t) = S \cdot \frac{dD}{dt}$ avec $D = \epsilon_0 E$ ou encore $I(t) = S \cdot \frac{\partial D}{\partial t}$

Considérons la quantité vectorielle $\vec{I}_D = S \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$; on déduit immédiatement que $\|\vec{I}_D\| = I$.

\vec{I}_D est orienté de l'armature positive vers l'armature négative. L'idée de Maxwell est que le champ variable $E(t)$ équivaut dans le diélectrique à une répartition fictive de courant de densité uniforme

$$\vec{j}_D = \frac{\vec{I}_D}{S} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Ce courant fictif est appelé **courant de déplacement de Maxwell**.

Il met en évidence un fait nouveau : c'est qu'un champ électrique variable crée un champ magnétique ; phénomène complémentaire du phénomène d'induction.

7.1.4 L'équation de Maxwell-Ampère, 1876

Partons de l'équation de conservation de la charge

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (i)$$

et du théorème de Gauss

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (ii)$$

On en déduit : $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$

et $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} = -\operatorname{div} \vec{j}$

d'où, $\boxed{\operatorname{div}(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0}$

Par cette relation, nous avons montré que le vecteur densité de courant total $j_t = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} + \vec{j}_D$ est à flux conservatif.

L'hypothèse de Maxwell selon laquelle \vec{j}_D a toutes les propriétés magnétiques qu'un courant de conduction permet d'appliquer le théorème d'Ampère sur le courant total de densité j_t d'où l'équation de Maxwell-Ampère, à savoir : $\boxed{r\vec{\otimes} \vec{H} = j_t = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$

En l'absence de courant de conduction, le théorème de Maxwell-Ampère s'écrit : $\boxed{r\vec{\otimes} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$

Cela signifie qu'un champ électrique variable engendre un champ magnétique dont il faut tenir compte dans le calcul de l'induction magnétique.

7.1.5 Résumé des Equations de Maxwell

Ce sont les équations de champs, dans le cas le plus général, et par rapport aux équations des états stationnaires, seules les équations de Maxwell-Ampère varient d'un milieu à un autre.

En général, les équations de Maxwell pour l'électromagnétisme se résument en ces quatre équations ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} r\vec{\otimes} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ r\vec{\otimes} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Dans le vide on a : $(\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \vec{B} = \mu_0 \vec{H})$,

dans un diélectrique parfait et isotrope du point de vue électrique et magnétique on a :

$(\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H})$

et dans un milieu conducteur on a : $\operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, avec $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Par conséquent, dans le vide et en l'absence de charges les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} r\vec{\otimes} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ r\vec{\otimes} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

car ($\vec{j} = \vec{0}$ et $\rho = 0$) : équations parfaitement symétriques

Les équations ci-dessus sont très importantes dans la théorie de propagation des ondes électromagnétiques.

7.1.6 Justification des Equations de Maxwell

Une des conséquences des équations de Maxwell est déterminée par les équations de comparaison. Jusqu'à présent aucune théorie n'a démontré l'invalidité de l'intuition de Maxwell.

Les difficultés mathématiques n'existent plus :

$$\vec{r} \otimes \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \text{div}(\vec{r} \otimes \vec{H}) = \text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\vec{D}) = 0,$$

soit :

$$\boxed{\text{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0}; \quad (119)$$

on retrouve l'équation de conservation de la charge.

Les difficultés physiques sont résolues :

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{D} d\vec{S} = \iint_{(S)} \vec{D} d\vec{S} = \iint_{\Sigma_2} \vec{D} d\vec{S} = \iiint_{(\mathcal{D})} \rho d\tau = q$$

ce qui implique que :

$$\oint_{(C)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \rho = I(t)$$

(th. de Stokes)

7.2 Les potentiels

De $\vec{r} \otimes \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ on en déduit, puisque $\boxed{\vec{B} = \vec{r} \otimes (\vec{A})}$, que : $\boxed{\vec{E} = -\vec{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$ et aussi $\text{div} \vec{B} = 0$.

On peut montrer que le couple (V, \vec{A}) , est ainsi défini d'une manière équivoque.

En effet, supposons qu'un autre couple (V', \vec{A}') soit tel que :

$$\vec{E} = -\vec{grad} V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \text{ et } \vec{B} = \vec{r} \otimes (\vec{A}') \text{ on a :}$$

$$\vec{B} = \vec{r} \otimes \vec{A} \Rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{grad} \varphi \text{ avec } \varphi \text{ une fonction scalaire du point.}$$

$$\text{On déduit } \vec{A} = \vec{A}' - \vec{grad} \varphi \Rightarrow \vec{E} = -\vec{grad} V - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} + \vec{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\text{soit, } \vec{E} = -\vec{grad} (V - \frac{\partial \varphi}{\partial t}) - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

$$\text{Or } \vec{E} = -\vec{grad} V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}, \text{ alors } V' = V - \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Nous venons de démontrer que les potentiels (V, \vec{A}) , d'une part et (V', \vec{A}') d'autre part, conduisent au même champ \vec{E} pourvu que l'on ait :

$$\boxed{\vec{A} = \vec{A}' - \vec{grad} \varphi}$$

et

$$\boxed{V' = V - \frac{\partial \varphi}{\partial t}}$$

Chapitre 5

PROPAGATION DES ONDES

8 Equation de propagation du champ

Après l'établissement des équations dans le cas général, nous allons nous limiter dans notre étude au cas d'un milieu homogène isotrope, où la densité de charges ρ est nulle.

8.1 Cas général

Partons de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div} \vec{D} = \rho & \text{(a)} \\ \text{div} \vec{B} = 0 & \text{(b)} \\ \vec{r} \text{ot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \text{(d)} \\ \vec{r} \text{ot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(c)} \end{array} \right. \quad (120)$$

Les relations du milieu sont : $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

A partir de la relation (c) ; il vient :

$$\begin{aligned} \vec{r} \text{ot} \vec{r} \text{ot} \vec{H} &= \vec{r} \text{ot} \vec{j} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{r} \text{ot} \vec{E} \\ &= \sigma \vec{r} \text{ot} \vec{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{r} \text{ot} \vec{E} \\ &= -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (121)$$

d'où

$$\boxed{\vec{r} \text{ot} \vec{r} \text{ot} \vec{H} = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}} \quad (e) \quad (122)$$

or $\vec{r} \text{ot} \vec{r} \text{ot} \vec{H} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{H} - \Delta \vec{H}$ on a : $\boxed{\vec{r} \text{ot} \vec{r} \text{ot} \vec{H} = -\Delta \vec{H}}$ (f), d'après (a).

de (e) et (f) on déduit que :

$$\boxed{\Delta \vec{H} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}} \quad (123)$$

ou encore

$$\boxed{\Delta \vec{B} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}} \quad (124)$$

De la même façon partons de la relation (d)

Il vient

$$\begin{aligned}
 \vec{r} \otimes \vec{r} \otimes \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{r} \otimes \vec{B} \\
 &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{r} \otimes \vec{H} \\
 &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \\
 &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})
 \end{aligned} \tag{125}$$

c'est à dire :

$$\boxed{\vec{r} \otimes \vec{r} \otimes \vec{E} = -\sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \tag{126}$$

Par ailleurs, comme : $\vec{r} \otimes \vec{r} \otimes \vec{E} = \vec{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$,

c'est à dire : $\vec{r} \otimes \vec{r} \otimes \vec{E} = \vec{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = \vec{grad} \frac{\rho}{\epsilon} - \Delta \vec{E}$, d'après (a)

Dans le cas d'un milieu isotrope, $\vec{grad} \frac{\rho}{\epsilon} = 0$

d'où :

$$\vec{r} \otimes \vec{r} \otimes \vec{E} = -\Delta \vec{E} \quad (f) \tag{127}$$

Il résulte de (e) et (f) que :

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \quad (g) \tag{128}$$

D'une manière générale les équations équivalentes (124) et (128) exprimant une relation entre l'état spatial et temporelle des champs et décrivent spécifiquement, la propagation des ondes électromagnétiques.

8.2 Cas où le milieu est considéré comme un diélectrique parfait

Il s'agit d'un milieu isolant dépourvu de charges libres. Dans ce cas les équations s'écrivent sous la forme :

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta \vec{B} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= 0 \\ \Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}} \tag{129}$$

8.3 Equations aux dimensions de

Un fil infini traversé par un courant I crée un champ magnétique $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, au point M situé à une distance r du fil.

$$[\mu] = [B][r][I^{-1}] \text{ (m)}$$

$$\vec{S} \perp \vec{B} \text{ alors } \varphi = B.S \Rightarrow [B] = [\varphi][S^{-1}] \text{ (n)}$$

Le travail des forces électromagnétiques est $W = I\varphi$

$$[\varphi] = [W][I^{-1}] = [F][L][I^{-1}] = [M][L][T^{-2}][L][I^{-1}]$$

$$\text{De la relation (n) on peut écrire : } [B] = [MLT^{-2}][LT^{-1}][L^{-2}] = [MT^{-2}I^{-2}]$$

$$\text{De la relation (m) on peut écrire : } [\mu] = [MT^{-2}I^{-1}][L][I^{-1}] = [MT^{-2}I^{-2}L]$$

$$\text{D'autre part } F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq'}{d^2}$$

$$[\epsilon] = [F^{-1}][d^{-2}][q^{-2}]$$

Or $q = It$ alors $[\epsilon] = [M^{-1}L^{-1}T^2][L^{-2}][I^2T^2] = [M^{-1}L^{-3}T^4I^2]$

Au final, on déduit de tout ce qui précède que la dimension de $\epsilon\mu$ s'écrit :

$$[\epsilon.\mu] = [L T^{-1}]^{-2} \text{ ou soit, } \frac{1}{[\epsilon\mu]} = [T^{-1}]^2.$$

Par conséquent, le quotient $\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ s'exprime en mètre/seconde ($m.s^{-1}$) ; c'est donc *une vitesse*.

Dans le vide on a :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c \approx 3.10^8 m.s^{-1}} \quad (130)$$

Les équations de propagation s'écrivent alors :

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= 0 \\ \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}} \quad (131)$$

Sous cette forme, les équations (131) représentent les équations de propagation de deux grandeurs \vec{E} et \vec{B} .

Par conséquent :

Si la propagation a lieu suivant les $x > 0$ à la vitesse constante v et est décrite par la fonction $\psi = \psi_0 = f(t)$, elle atteint le point M d'abscisse x au bout d'un temps $\tau = \frac{x}{v}$

La position de M est décrite par :

$$\psi = \psi_M = f(t - \tau) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad (132)$$

Si la propagation a lieu suivant les $x < 0$, à la vitesse v , elle atteint le point N abscisse x avec un retard de $\tau = -\frac{x}{v}$. La position de ce point est décrite par la fonction

$$\psi = \psi_N = f(t - \tau) = f\left(t + \frac{x}{v}\right) \quad (133)$$

Remarque :

De $f\left(t - \frac{x}{v}\right) = f\left[-\frac{1}{v}(x - vt)\right]$ et de $f\left(t + \frac{x}{v}\right) = f\left[\frac{1}{v}(x + vt)\right]$, on peut écrire :

$$\psi = \psi_M = f(t - \tau) = F_1(x - vt) \text{ et } \psi = \psi_N = f(t + \tau) = F_2(x + vt).$$

Montrons que lorsque ψ s'écrit sous l'une de ces formes, elle est solution des équations de Maxwell :

En effet, posons : $u = t \pm \frac{x}{v} = t + \alpha \frac{x}{v}$ avec $\alpha = \pm 1$

On a :

$$\psi_M = \psi_N = \psi = f(u)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial t} = f'(u) \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = f''(u) \quad (o)$$

De même,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\epsilon}{v} f'(u)$$

$$\text{et } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\epsilon^2}{v^2} f''(u) = \frac{1}{v^2} f''(u) \quad (p)$$

(o) et (p) permettent d'écrire (par identification) :

$$v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (134)$$

c'est à dire :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0} \quad (135)$$

En 3D, cette relation s'écrit :

$$\boxed{\Delta \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0} \quad (136)$$

En faisant une analogie entre les équations (131) et (136) nous pourrions conclure que les équations de Maxwell traduisent bien la propagation de champs \vec{E} et \vec{B} .

Remarque :

Si l'on introduit l'opérateur d'Alembertien, $\boxed{\square = \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}$ les équations de Maxwell s'écrivent simplement sous la forme :

$$\boxed{\begin{array}{l} \square \vec{E} = \vec{0} \\ \square \vec{B} = \vec{0} \end{array}} \quad (137)$$

9 Les potentiels : Conditions de Lorentz

Le but de ce paragraphe est de montrer que le potentiel vecteur \vec{A} et le potentiel scalaire V décrivant respectivement les champs \vec{H} et \vec{E} obéissent aux mêmes équations de propagations analogues de celles de \vec{H} et \vec{E} à condition de s'imposer une relation particulière entre \vec{A} et V . En magnétostatique le potentiel vecteur \vec{A} définit par $\vec{B} = \vec{rot} \vec{A}$, a été choisi de telle sorte que $div \vec{A} = 0$ (jauge de Coulomb). Ceci est dû au fait que si $\vec{B} = \vec{rot} \vec{A}$ alors $\vec{A}' = \vec{A} + grad \varphi$ vérifie la même équation ($\vec{B} = \vec{rot} \vec{A}'$).

De plus nous avons vu également qu'en régime variable, si (\vec{A}', V') et (\vec{A}, V) vérifient les mêmes relations, alors on a forcément :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{A}' = + grad \varphi \\ V' = V - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{array}} \quad (138)$$

9.1 Cas général d'un milieu quelconque

Partons des équation de Maxwell

$$\boxed{\begin{array}{l} div \vec{D} = \epsilon div \vec{E} = \rho \quad (i) \\ \vec{rot} \vec{B} = \mu \vec{j} + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (ii) \end{array}} \quad (139)$$

en remarquant que $\vec{E} = -grad V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (iii)$

L'équation (i) s'écrit : $div(-grad V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \frac{\rho}{\epsilon}$

c'est à dire : $\Delta V + \frac{\partial}{\partial t} div \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (iv)$

$$\vec{B} = \vec{rot} \vec{A}$$

$$\vec{rot} \vec{B} = \vec{rot} \vec{rot} \vec{A}$$

$$\begin{aligned}\vec{rot}\vec{B} &= \mu\vec{j} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t}(-\vec{grad}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) \\ \vec{rot}\vec{B} &= \mu\vec{j} - \mu\epsilon \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \mu\epsilon \vec{grad}(\frac{\partial V}{\partial t}).\end{aligned}$$

On en déduit, puisque $\vec{rot}\vec{rot}\vec{A} = \vec{grad}\text{div}(\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

$$\Delta\vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j} + \vec{grad}(\text{div}\vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}) \quad (v)$$

Les équations précédentes nous conduisent au système suivant :

$$\begin{cases} \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon} - \frac{\partial}{\partial t}\text{div}\vec{A} & (vi) \\ \Delta\vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j} + \vec{grad}(\text{div}\vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}) & (vii) \end{cases} \quad (141)$$

On voit que si l'on prend $\text{div}\vec{A} = 0$, la deuxième équation de (vii) rompt la symétrie observée par rapport à \vec{A} , puis à V . Pour cela, on écrit (tout en gardant intact la deuxième équation), la première équation c'est à dire (vi) en ajoutant à chacun des deux membres le terme :

$$\boxed{-\mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}} \quad (142)$$

On obtient :

$$\boxed{\begin{cases} \Delta V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} - \frac{\partial}{\partial t}\text{div}\vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} \\ \Delta\vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j} + \vec{grad}(\text{div}\vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t}) \end{cases}} \quad (143)$$

On voit que si l'on choisit la fonction arbitraire φ de telle sorte que :

$$\boxed{\text{div}\vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0} \quad (144)$$

alors, on obtient les mêmes équations de propagation de Maxwell pour les grandeurs \vec{A} et V , à savoir :

$$\boxed{\begin{cases} \Delta\vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j} \\ \Delta V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases}} \quad (145)$$

Cette condition porte le nom de ***Jauge (condition) de Lorentz***.

Puisque :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{grad}\varphi \text{ et } V' = V - \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

la condition de Lorentz implique que :

$$\text{div}(\vec{A}') + \epsilon\mu \frac{\partial V'}{\partial t} = \text{div}(\vec{A}) + \epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t}$$

En effet,

$$\text{div}(\vec{A}') + \epsilon\mu \frac{\partial V'}{\partial t} = \text{div}(\vec{A} + \vec{grad}\varphi) + \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}(V - \frac{\partial\varphi}{\partial t}) = \text{div}(\vec{A}) + \epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t}$$

On déduit que :

$$\Delta\varphi - \epsilon\mu \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (146)$$

Dans le cas du vide (en l'absence de charges et de courant), on a :

$$\boxed{\begin{cases} \Delta V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0} \end{cases}} \quad (147)$$

La propagation des ondes électromagnétiques est donc régie par les même équations de Maxwell aussi bien pour le couple (\vec{E}, \vec{H}) que pour le couple (\vec{A}, V)

Les solutions sont très variées et dépendent des conditions du milieu. On les détermine à partir du système de charge et de courant (appelés sources) qui créent les champs \vec{E} et \vec{B} dans les milieux de propagation. La difficulté mathématique consiste à trouver la fonction mathématique satisfaisant aux *conditions aux limites* imposées par le problème à résoudre.

Chapitre 6

PROPAGATION D'UNE ONDE PLANE DANS LE VIDE, EN L'ABSCENCE DE CHARGES

10 Définition d'une onde plane

Une onde plane est une onde dont l'amplitude est la même pour tout point situé dans un plan normal à la direction de propagation. Cela revient à dire que les champs électriques \vec{E} et magnétiques \vec{B} sont identiques en tout point du plan.

11 Onde plane se propageant suivant un axe (Oz)

Dans le vide et en l'absence de charge, les 4 équations de Maxwell deviennent :

$$\begin{cases} \text{div} \vec{E} = 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (148)$$

Les champs \vec{E} et \vec{B} ne dépendent que de z et t , ce qui équivaut à dire que plan d'ondes sont parallèles au plan xy d'un trièdre direct.

On a donc :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = \vec{0}} \quad (149)$$

De plus, d'après (148) :

$$\text{div} \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0} \quad (150)$$

De même,

$$\text{div} \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0} \quad (151)$$

D'autre part,

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} & -\frac{\partial E_x}{\partial z} & -\frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} & \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} & -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} & -\frac{\partial B_y}{\partial t} & -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{vmatrix} \quad (152)$$

Avec (149) on trouve alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (153)$$

En procédant de la même manière pour l'équation $\text{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$,

On trouve que :

$$\begin{cases} \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (154)$$

On rappelle, au passage, que $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$.

11.1 Caractère transversale de l'onde

Les équations (150) et (154) montrent que E_z ne dépend ni de z ni de t , par conséquent E_z est une constante.

S'il n'y a pas de champs pré-existant, $E_z = 0$. De même, il résulte des équations (151) et (153) que B_z est une constante. On a alors $B_z = 0$. On déduit donc que \vec{E} et \vec{B} sont contenus dans le plan d'onde.

Ils sont tous deux perpendiculaires à la direction de propagation : l'onde est dite **transversale**.

11.2 Relation entre les champs \vec{E} et \vec{B}

On tire des équations (153) et (154) que les composantes E_x et E_y sont indépendantes. Il en est de même pour B_x et B_y . Par contre E_x est lié à B_y et E_y est lié à B_x . L'onde plane peut donc être considérée comme la superposition de deux ondes indépendantes : (E_x, B_y) et (E_y, B_x) .

11.3 Intégration des équations de propagation

Nous connaissons déjà les équations de propagation des champs \vec{E} et \vec{B} :

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (155)$$

Avec les simplifications précédentes, ces équations deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (156)$$

11.3.1 Détermination de la composante $(E_x(z, t))$

L'équation pour \vec{E} devient :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (157)$$

Calcul des dérivées premières

La différentielle totale exacte de E_x s'écrit :

$$dE_x = \frac{\partial E_x}{\partial z} dz + \frac{\partial E_x}{\partial t} dt \quad (158)$$

Posons $u = t - \frac{z}{c}$ et $v = t + \frac{z}{c}$, alors :

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2}(u + v) \\ z &= \frac{c}{2}(v - u) \\ dE_x &= \frac{\partial E_x}{\partial u} du + \frac{\partial E_x}{\partial v} dv \\ dE_x &= \frac{\partial E_x}{\partial u} (dt - \frac{dz}{c}) + \frac{\partial E_x}{\partial v} (dt + \frac{dz}{c}) \\ dE_x &= (\frac{\partial E_x}{\partial u} + \frac{\partial E_x}{\partial v}) dt + \frac{1}{c} (\frac{\partial E_x}{\partial v} - \frac{\partial E_x}{\partial u}) dz \end{aligned} \quad (159)$$

Ce qui revient à écrire, par identification entre les équations (11) et (12) :

$$\begin{aligned} P &= \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial u} + \frac{\partial E_x}{\partial v} \\ Q &= \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{1}{c} (\frac{\partial E_x}{\partial v} - \frac{\partial E_x}{\partial u}) \end{aligned} \quad (160)$$

Calcul des dérivées secondes

La différentielle de P s'écrit :

$$\begin{aligned} dP &= \frac{\partial P}{\partial z} dz + \frac{\partial P}{\partial t} dt \\ dP &= \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t} dz + \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} dt \end{aligned} \quad (161)$$

De même que précédemment, on peut écrire :

$$\begin{aligned} dP &= (\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial v}) dt + \frac{1}{c} (\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial P}{\partial u}) dz \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} (\frac{\partial E_x}{\partial u} + \frac{\partial E_x}{\partial v}) + \frac{\partial}{\partial v} (\frac{\partial E_x}{\partial u} + \frac{\partial E_x}{\partial v}) \\ &= \frac{\partial^2 E_x}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial v^2} \end{aligned} \quad (162)$$

En effectuant le même cheminement pour Q, on trouve :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} (\frac{\partial^2 E_x}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial v^2}) \quad (163)$$

L'équation de propagation devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= -\frac{4}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial u \partial v} = 0 \\ \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial u \partial v} = 0} \end{aligned} \quad (164)$$

En posant $h(v) = \frac{\partial E_x}{\partial v}$

$$\begin{aligned} E_x &= \int h(v) dv + f(u) \\ \boxed{E_x = g(v) + f(u) + \text{constante}} \end{aligned} \quad (165)$$

Lorsqu'il n'y a pas de charge dans le milieu considéré, la constante d'intégration devient nulle. La solution générale de l'équation de propagation est donc, comme on pouvait s'y attendre,

$$\boxed{E_x(z, t) = g(t - \frac{z}{c}) + f(t + \frac{z}{c})}, \quad (166)$$

où g et f sont des fonctions arbitraires.

11.3.2 Détermination de $B_y(z, t)$

Au lieu de résoudre les équations de propagation, nous allons utiliser cette fois une relation liant B_y et E_x :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\
 \Leftrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial z} &= \frac{1}{c}f'(u) - \frac{1}{c}g'(u) \\
 \Leftrightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} &= \frac{1}{c}g'(u) - \frac{1}{c}f'(u) \\
 \Leftrightarrow B_y &= \frac{1}{c} \int \frac{dg}{du} dt - \frac{1}{c} \int \frac{df}{dv} dt \\
 &= \frac{1}{c} \int dg - \frac{1}{c} \int df
 \end{aligned} \tag{167}$$

car

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dv} dt &= \frac{df}{dt} \frac{dt}{dv} dt = df \\
 \Leftrightarrow B_y &= -\frac{1}{c}f\left(t + \frac{z}{c}\right) + \frac{1}{c}g\left(t - \frac{z}{c}\right)
 \end{aligned} \tag{168}$$

11.3.3 Détermination de l'onde $(E_y(z, t), B_x(z, t))$

Ici encore, nous devons résoudre les équations de propagation associées aux champs électrique et magnétique :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} &= 0
 \end{aligned} \tag{169}$$

La solution générale de ce système est analogue à la solution trouvée pour $E_x(z, t)$ et $B_y(z, t)$. On aboutit alors aux solutions :

$$\begin{aligned}
 E_y(z, t) &= G\left(t - \frac{z}{c}\right) + F\left(t + \frac{z}{c}\right) \\
 B_x(z, t) &= -\frac{1}{c}G\left(t - \frac{z}{c}\right) + \frac{1}{c}F\left(t + \frac{z}{c}\right)
 \end{aligned} \tag{170}$$

Attention, F et G sont à priori différents de f et g.

11.4 Discussions

Les solutions trouvées précédemment nous apportent de précieuses informations sur les caractéristiques de l'onde

11.4.1 Ondes progressives et régressives

Considérons l'onde (E_x, B_y) :

$$\begin{aligned}
 E_x &= g\left(t - \frac{z}{c}\right) + f\left(t + \frac{z}{c}\right) \\
 B_y &= -\frac{1}{c}f\left(t + \frac{z}{c}\right) + \frac{1}{c}g\left(t - \frac{z}{c}\right)
 \end{aligned} \tag{171}$$

Il apparait que cette onde est la superposition de deux ondes :
l'une progressive (p), l'autre régressive (r) :

$$\left| \begin{array}{l} Ep_x = g(t - \frac{z}{c}) \\ Bp_y = \frac{1}{c}g(t - \frac{z}{c}) \\ Er_x = f(t + \frac{z}{c}) \\ Br_y = -\frac{1}{c}f(t + \frac{z}{c}) \end{array} \right. \quad (172)$$

(Ep_x, Bp_y) se propage à c vers les z croissants et (Er_x, Br_y) se propage à c vers les z décroissants.

$$\left| \begin{array}{l} Ep_y = G(t - \frac{z}{c}) \\ Bp_x = \frac{1}{c}G(t - \frac{z}{c}) \\ Er_y = F(t + \frac{z}{c}) \\ Br_x = -\frac{1}{c}F(t + \frac{z}{c}) \end{array} \right. \quad (173)$$

Les champs \vec{E} et \vec{B} se propageant dans le vide sont tels que :

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} \quad (174)$$

avec

$$\begin{aligned} E_x &= Ep_x + Er_x \\ E_y &= Ep_y + Er_y \end{aligned} \quad (175)$$

De même pour \vec{B} ,

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} \quad (176)$$

avec

$$\begin{aligned} B_x &= Bp_x + Br_x \\ B_y &= Bp_y + Br_y \end{aligned} \quad (177)$$

11.4.2 Propriétés de l'onde progressive

$$\left| \begin{array}{l} \vec{E}p = Ep_x\vec{i} + Ep_y\vec{j} \\ \vec{B}p = Bp_x\vec{i} + Bp_y\vec{j} \end{array} \right. \quad (178)$$

et

$$\left| \begin{array}{l} Ep_x = g(t - \frac{z}{c}) \\ Ep_y = G(t - \frac{z}{c}) \\ Bp_x = -\frac{1}{c}G(t - \frac{z}{c}) \\ Bp_y = \frac{1}{c}g(t - \frac{z}{c}) \end{array} \right. \quad (179)$$

Les champs \vec{E} et \vec{B} sont Orthogonaux

En effet, le produit scalaire des champs $\vec{E}.\vec{B}$ est nul! Par conséquent les champs \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux!

Les champs E et B sont en phase

En effet, dire que les champs \vec{E} et \vec{B} sont en phase revient à dire que le rapport $\frac{\|\vec{E}(z,t)\|}{\|\vec{B}(z,t)\|}$ est constant.

$$\|\vec{E}(z,t)\|^2 = E p_x^2 + E p_y^2 \quad (180)$$

$$\|\vec{B}(z,t)\|^2 = B p_x^2 + B p_y^2 \quad (181)$$

$$\begin{aligned} E p_x^2 &= g^2(t - \frac{z}{c}) \\ E p_y^2 &= G^2(t - \frac{z}{c}) \\ B p_x^2 &= -\frac{1}{c^2} G^2(t - \frac{z}{c}) \\ B p_y^2 &= \frac{1}{c^2} g^2(t - \frac{z}{c}) \end{aligned} \quad (182)$$

$$E p_x^2 + E p_y^2 = c^2(B p_x^2 + B p_y^2) \Leftrightarrow \sqrt{E p_x^2 + E p_y^2} = c \sqrt{B p_x^2 + B p_y^2} \quad (183)$$

On a donc

$$\boxed{\frac{\|\vec{E}(z,t)\|}{\|\vec{B}(z,t)\|} = c} \quad (184)$$

et c est bien une constante.

Impédance du vide

Si, à la place de \vec{B} , nous introduisons le champs $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$, il apparait une constante homogène à une impédance.

$$\boxed{Z_0 = \frac{\|\vec{E}(z,t)\|}{\|\vec{B}(z,t)\|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \ \Omega} \quad (185)$$

Z_0 représente l'impédance du vide.

12 Cas général : Onde plane de direction quelconque

Supposons maintenant une onde plane se dirigeant dans une direction $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ quelconque. Si nous nous limitons à l'onde progressive, \vec{E} et \vec{B} ne seront fonction que du temps et de la distance parcourue suivant la normale \vec{n} au plan d'onde. Dans ce cas on peut écrire :

$$\begin{aligned} \vec{E}(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}) \\ \vec{B}(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}) \end{aligned} \quad (186)$$

avec $\vec{r} = (x, y, z)$ vecteur position correspondant au point M où l'onde est considérée.

En posant $u = (t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c})$ il vient :

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial u} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial u} &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \right. \quad (187)$$

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\alpha}{c} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\gamma}{c} \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned} \right. \quad (188)$$

d'où

$$\vec{\nabla} = -\frac{1}{c}(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k})\frac{\partial}{\partial u} = -\frac{1}{c}\vec{n}\frac{\partial}{\partial u} \quad (189)$$

alors

$$r\vec{ot}\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\vec{n}\frac{\partial}{\partial u} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial u} \quad (190)$$

Ce qui donne par intégration :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n} \times \vec{E} + cste} \quad (191)$$

La constante d'intégration étant nulle en l'absence de champs. De même, $r\vec{ot}\vec{B}$ nous donne :

$$\boxed{\vec{E} = c\vec{B} \times \vec{n}} \quad (192)$$

On en déduit que :

Les champs \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux à \vec{n} et sont par conséquent dans le plan d'onde.

Le trièdre \vec{E} , \vec{B} et \vec{n} est direct.

On retrouve que $\frac{E}{B} = c$

En introduisant \vec{H} , l'équation devient :

$$\boxed{\vec{E} = Z_0\vec{H} \times \vec{n}} \quad (193)$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n} \wedge \vec{E}} \quad (194)$$

Si on était parti de la relation $r\vec{ot}\vec{B} = \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ alors on aurait obtenu :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial u}(\vec{n} \wedge \vec{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial u}$$

c'est à dire :

$$\boxed{E = -c\vec{n} \wedge \vec{B} = c\vec{B} \wedge \vec{n}} \quad (195)$$

Commentaire :

a) Les champs \vec{E} et \vec{B} sont tous deux perpendiculaires à \vec{n} et sont par conséquent dans le plan d'onde.

b) Ils sont mutuellement orthogonaux et $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{n})$ forme un trièdre direct. c) On retrouve également que leurs normes sont proportionnelles i.e. $\frac{E}{B} = c$. Cela signifie que \vec{E} et \vec{B} sont en phase. d) Si on

introduit Z_0 , on a :

$$\vec{E} = Z_0.\vec{H} \wedge \vec{n} \quad (196)$$

13 Notion de polarisation

L'état de polarisation d'une onde électromagnétique caractérise l'évolution du champ \vec{E} et \vec{B} dans le plan d'onde.

13.1 Définitions

Si le vecteur \vec{E} , et par la suite le vecteur \vec{B} gardent une direction constante ; on dit que l'onde est polarisée rectilignement.

On appelle plan de polarisation, le plan contenant \vec{E} et \vec{n} .

On appelle plan de vibration, le plan contenant \vec{B} et \vec{n} .

Le plan de polarisation est perpendiculaire au plan de vibration.

L'expression des champs \vec{E} et \vec{B} pour une onde électromagnétique (O.E.M.) polarisée rectilignement est :

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 f(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 g(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}) \end{cases} \quad (197)$$

\vec{E}_0 et \vec{B}_0 sont des vecteurs constants. f et g sont des fonctions périodiques scalaires.

on rencontre aussi d'autres états de polarisations, à savoir :

Une O.E.M. est dite polarisée circulairement si l'extrémité du vecteur \vec{E} décrit un cercle dans le plan d'onde.

Une O.E.M. est dite polarisée elliptiquement lorsque l'extrémité du vecteur \vec{E} décrit dans le plan d'onde, une ellipse.

Si la direction de \vec{E} varie d'une façon quelconque, on dit que l'onde n'est pas polarisée.

14 O.E.M. plane sinusoïdale et polarisée rectilignement

14.1 Propagation suivant une direction quelconque

Si on ne considère que les ondes progressives les champs \vec{E} et \vec{B} s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega (t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \cos \omega (t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \end{cases}$$

ω est la pulsation de l'onde.

T sa période temporelle

On appelle longueur d'onde la quantité

$$\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu} \quad (198)$$

On appelle nombre d'onde la quantité

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{\omega}{2\pi c} \quad (199)$$

Par définition, on appelle vecteur d'onde, le vecteur :

$$\vec{k} = 2\pi\sigma\vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n} = \frac{\omega}{c}\vec{n} \quad (200)$$

Les normes des vecteurs \vec{E}_0 et \vec{B}_0 sont liées par la relation : $E_0 = cB_0$

La relation $\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \wedge \vec{E}}$ s'écrit :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}} \quad (201)$$

14.2 Cas particulier d'une propagation suivant \vec{Oz}

Dans ce cas :

$$\begin{cases} \vec{n} = (0, 0, 1) \\ \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(0, 0, 1) \\ \vec{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, 0) \\ \vec{B}_0 = (B_{0x}, B_{0y}, 0) \end{cases}$$

Les champs \vec{E} et \vec{B} s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \end{cases}$$

deviennent

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z) \end{cases} \quad (202)$$

Les amplitudes \vec{E}_0 et \vec{B}_0 sont reliées par la relation :

$$\boxed{\vec{B}_0 = \frac{1}{c} \vec{n} \wedge \vec{E}_0} \quad (203)$$

c'est à dire

$$\begin{vmatrix} B_{0x} \\ B_{0y} \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{c} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ 0 \end{vmatrix}$$

soit

$$\begin{cases} B_{0x} = -\frac{1}{c} E_{0y} \\ B_{0y} = \frac{1}{c} E_{0x} \end{cases}$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = E_{0x} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \\ E_y = E_{0y} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \\ B_x = -\frac{1}{c} E_{0y} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \\ B_y = \frac{1}{c} E_{0x} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \end{array} \right.$$

15 O.E.M. plane sinusoïdale et polarisée circulairement et elliptiquement

On dit qu'une onde plane se propageant dans la direction de \vec{Oz} est polarisée elliptiquement lorsque l'extrémité du vecteur \vec{E} décrit une ellipse dans le plan d'onde. On en déduit que les composantes du champ électrique \vec{E} sont de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = E_{0x} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \\ E_y = E_{0y} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \varphi \right) \end{array} \right. \quad (204)$$

Il en est de même de \vec{B}

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = B_{0x} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \\ B_y = B_{0y} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \varphi \right) \end{array} \right. \quad (205)$$

En éliminant t entre les deux équations de l'une des series, on obtient :

$$\boxed{\frac{E_x^2}{E_{0x}^2 \sin^2 \varphi} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2 \sin^2 \varphi} - \frac{2E_x E_y \cos \varphi}{E_{0x} E_{0y} \sin^2 \varphi} = 1} \quad (206)$$

Cette équation indique que l'extrémité du vecteur \vec{E} décrit une ellipse inscrite dans un rectangle de côté $(2E_{0x}, 2E_{0y})$.

On rappelle que si cette extrémité se déplace dans le sens trigonométrique direct, l'ellipse est dite gauche, et elle est direct droite dans le cas contraire. Si $0 < \varphi < \pi$ l'ellipse est droite

Si $-\pi < \varphi < 0$ l'ellipse est gauche

Si $\varphi = 0$ on a :

$$\boxed{\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - \frac{2E_x E_y \cos \varphi}{E_{0x} E_{0y}} = 0} \quad (207)$$

soit

$$\boxed{\frac{E_x}{E_{0x}} = \frac{E_y}{E_{0y}}} \quad (208)$$

et l'onde dans ce cas est polarisée rectilignement (première diagonale du rectangle).

Si $\varphi = \pi$ dans ce cas l'on est polarisée rectilignement (deuxième diagonale du rectangle).

Si $E_{0x} = E_{0y}$ et $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ alors, $E_{0x}^2 + E_{0y}^2 = ||E_0||^2 = Cte$, l'extrémité du vecteur \vec{E} décrit un cercle et l'onde est dite polarisée circulairement.

si $(\varphi = \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ circulairement droite
si $(\varphi = -\frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ circulairement gauche.

16 Onde plane sinusoïdale se propageant rectilignement (notations complexes)

En notation complexe les champs électriques et magnétiques de l'OEMPS peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{E}} = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z) \\ \vec{\mathcal{B}} = \vec{B}_0 \exp j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z) \end{cases} \quad (209)$$

on peut remarquer que \vec{E} est la partie réelle de $\vec{\mathcal{E}}$, idem pour B

les équations de Maxwell peuvent s'écrire en notation complexes sous la forme :

$$\begin{cases} \text{div}(\vec{\mathcal{D}}) = 0 & (\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}) \\ \vec{rot} \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \\ \text{div}(\vec{\mathcal{B}}) = 0 \\ \vec{rot} \vec{\mathcal{B}} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \end{cases} \quad (210)$$

on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = j\omega \vec{\mathcal{E}} \\ \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = j\omega \vec{\mathcal{B}} \end{cases} \quad (211)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} = -jk_x \mathcal{E}_x \\ \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} = -jk_y \mathcal{E}_y \\ \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (212)$$

\Rightarrow

$$\boxed{\text{div} \vec{\mathcal{E}} = -j\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}}} \quad (213)$$

même démonstration pour $\vec{\mathcal{B}}$, soit ;

$$\boxed{\text{div} \vec{\mathcal{B}} = -j\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{B}}} \quad (214)$$

en calculant de la même manière, $\vec{rot}(\vec{\mathcal{B}})$ et $\vec{rot}(\vec{\mathcal{E}})$, nous aboutirons à :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{rot} \vec{\mathcal{E}} &= -j\vec{k} \wedge \vec{\mathcal{E}} \\ \vec{rot} \vec{\mathcal{B}} &= -j\vec{k} \wedge \vec{\mathcal{B}} \end{aligned}} \quad (215)$$

Finalement, les équations de Maxwell en notation complexe s'écrivent :

$$\begin{cases} j\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \\ j\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \\ j\vec{k} \wedge \vec{\mathcal{E}} = j\omega \vec{\mathcal{B}} \\ j\vec{k} \wedge \vec{\mathcal{B}} = -j\frac{\omega}{c^2} \vec{\mathcal{E}} \quad (\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0) \end{cases} \quad (216)$$

On a également :

$$\boxed{\vec{\mathcal{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{\mathcal{E}}}{\omega}} \quad (217)$$

Chapitre 7

PROPAGATION DE L'ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE

17 Rappels

L'énergie électrostatique W_e s'écrit :

$$W_e = \iiint_{esp} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau \quad (218)$$

Elle peut aussi s'écrire sous la forme :

$$W_e = \iiint_{esp} \rho V(r) d\tau \quad (219)$$

L'énergie magnétique s'écrit :

$$W_m = \iiint_{esp} \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} d\tau \quad (220)$$

ou encore

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_{esp} \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau \quad (221)$$

Dans tous les cas,

$$W_{em} = W_e + W_m = \iiint_{esp} u_{em} d\tau \quad (222)$$

et en régime stationnaire la densité d'énergie électromagnétique u_{em} est constante dans le temps.

18 Calcul de l'énergie électromagnétique

18.1 Causes de la variation de l'énergie électromagnétique

Les causes de la variation d'énergie sont de deux types :

- existence à l'intérieur du volume $d\tau$ d'une transformation d'énergie électromagnétique à une autre forme d'énergie (Effet Joule)
- échange d'énergie avec le milieu extérieur sous forme d'énergie magnétique rayonnée (dans ce cas, il n'y a pas de dégradation d'énergie mais déplacement d'un point à l'autre de l'espace).

18.2 Méthode de calcul

Il s'agit d'appliquer le principe de la conservation d'énergie en admettant la possibilité d'établir un bilan local de l'énergie électromagnétique autour d'un point M dans le volume $d\tau$ entourant ce point.

Nous avons démontré dans le premier chapitre que la variation temporelle de l'énergie électromagnétique s'écrit sous la forme :

$$\frac{dW}{dt} = - \iiint_{esp} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau \quad (223)$$

Remarquons que, de l'expression

$$r\vec{\text{ot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

on déduit :

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} r\vec{\text{ot}}\vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Nous pouvons écrire par la suite :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= -\frac{1}{\mu_0} \iiint_{esp} \vec{E} \cdot r\vec{\text{ot}}\vec{B} d\tau + \epsilon_0 \iiint_{esp} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\tau \\ \frac{dW}{dt} &= -\frac{1}{\mu_0} \iiint_{esp} \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0} \iiint_{esp} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\tau + \epsilon_0 \iiint_{esp} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\tau \end{aligned}$$

soit,

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = \iiint_{esp} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) d\tau + \frac{1}{\mu_0} \iiint_{esp} \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) d\tau} \quad (224)$$

18.3 Discussion

Le premier terme de cette expression représente l'énergie électromagnétique (chap I) dans le cas stationnaire et quasi-stationnaire.

On admet que ce terme représente toujours l'énergie localisée dans l'espace. Dans la présente expression, il s'agit de la variation par rapport au temps, de l'énergie électromagnétique. L'énergie $\frac{dW}{dt}$ exprime qu'il y a variation de l'énergie localisée dans l'espace et traduit le principe de la conservation de l'énergie.

18.4 Conservation de l'énergie électromagnétique

De la relation

$$\iiint_{esp} \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) d\tau = \iint_{\Sigma} \vec{E} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (225)$$

en posant $\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \wedge \vec{B})$ Alors, la relation ci-dessus devient (conservation de l'énergie) :

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = \iiint_{esp} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) d\tau + \iint_{\Sigma} \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{S} = 0} \quad (226)$$

Par définition, le vecteur $\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \wedge \vec{B})$ est appelé **vecteur Poynting** localement, la conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{U}_{em}}{\partial t} + \text{div} \vec{\mathcal{P}} = 0 \quad (227)$$

18.4.1 Cas d'un volume non chargé

$\rho = 0$ et $\vec{J} = \vec{0}$, on a alors

$$\frac{dW}{dt} = - \iiint_{esp} \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau = 0 \quad (228)$$

Cette relation est à rapprocher de celle de la conservation de charges électrostatiques. Elle indique que la variation de l'énergie électromagnétique contenue dans un volume non chargé est égale au flux du vecteur Poynting à travers la surface délimitant ce volume.

18.4.2 Cas d'un volume chargé

$\vec{J} \neq \vec{0}$ et on a :

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_{esp} \mathcal{U}_{em} d\tau + \iint_{\Sigma} \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{S} = - \iiint_{(D)} \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau \quad (229)$$

Dans ce cas la variation de l'énergie électromagnétique n'est plus égale au flux du vecteur Poynting. Il y a dissipation d'énergie à l'intérieur du volume qui égale à

$$- \iiint_{(D)} \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau$$

Si (D) est conducteur, alors $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

$\vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 \Rightarrow \vec{J} \cdot \vec{E} \tau = \vec{J} \cdot \vec{E} \ell \cdot S$ (homogène à Volt.Ampère)

Il s'agit d'une puissance.

Si on l'applique à l'onde sinusoïdale progressive et polarisée rectilignement, on a :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z) \vec{i}$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z) \vec{j}$$

Alors

$$\mathcal{U}_{em} = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z) \quad (230)$$

$$||\vec{\mathcal{P}}|| = c \cdot \mathcal{U}_{em} \quad (231)$$

Remarque :

Puisque $\vec{E} \wedge \vec{B}$ a le même sens que \vec{k} , et qu'on peut écrire $\vec{c} = c\vec{n}$ alors :

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{c} \cdot \mathcal{U}_{em} \quad (232)$$

FIN