UNIVERSITÉ FÉLIX HOUPHOUET-BOIGNY UFR Mathématiques et Informatique

COURS DE MECANIQUE 1
MECANIQUE DU POINT MATERIEL

Responsable: Professeur SYLLA Moussa
Laboratoire de Mécanique

PROGRAMME INDICATIF

- CHAPITRE I: RAPPEL DE CALCULS VECTORIELS
- CHAPITRE II: CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL
- CHAPITRE III: DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL
- CHAPITRE IV: ENERGETIQUE DU POINT MATERIEL

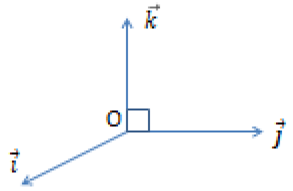
BIBLIOGRAPHIE

- LIVRES DE MECANIQUE:
  - P. BROUSSE
  - J. PEREZ
  - M. MANTION
  - PRECIS DE PHYSIQUE

CHAPITRE I: RAPPEL DE CALCULS VECTORIELS

1) OPERATIONS SUR LES VECTEURS

On note $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère cartésien orthonormé direct R *de l'espace à trois dimensions:*
$R = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; O est l'origine de R, les axes $(O;\vec{i})$, $(O;\vec{j})$ et $(O;\vec{k})$ sont orthogonaux deux à deux, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est la base orthonormée de R, les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont normés.



1.1/ PRODUIT SCALAIRE

Considérons deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de coordonnées cartésiennes respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) sur la base de R:

$$\vec{U} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} \text{ ou bien } \vec{V}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est le nombre réel noté $\vec{U}.\vec{V}$ défini par :

$$\vec{U}.\vec{V} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i \quad (1.1.a)$$

La formule(1.1.a) reste valable lorsque la base de (R) est orthonormée.

1.1.1/ Norme d'un vecteur

On considère un vecteur $\vec{U}$ de coordonnées cartésiennes (u_1, u_2, u_3) sur la base de (R). La norme de $\vec{U}$ est le nombre réel noté $\|\vec{U}\|$ défini par :

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{\vec{U}^2} = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} {u_i}^2}$$

(1.1.b)

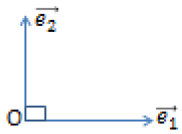
La formule (1.1.b) reste valable lorsque la base de (R) est orthonormée.

Autre notation de la norme: $\|\vec{U}\| = U$

$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ base orthonormée de $(R) \Rightarrow \|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$

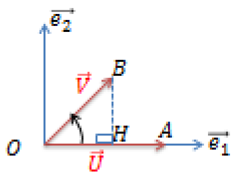
<u>1.1.2/ Représentation géométrique</u>

Considérons un plan rapporté au repère $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ orthonormé d'origine O.



Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(u_1, 0)$ et (v_1, v_2) sur $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$, définis par les points A et B du plan tels que:

$$\vec{U} = \overrightarrow{OA} = u_1 \vec{e_1}$$
$$\vec{V} = \overrightarrow{OB} = v_1 \vec{e_1} + v_2 \vec{e_2}$$



θ est l'angle défini par: $\theta = (\widehat{\vec{U}, \vec{V}})$

$\Rightarrow \vec{U}.\vec{V} = u_1 v_1$, or $v_1 = \|\vec{V}\| cos\theta = V cos\theta$ et $\|\vec{U}\| = u_1 = U$

$$\Rightarrow \vec{U}.\vec{V} = u_1 v_1 = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\| cos\theta = U.V cos\theta$$

De façon générale si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ont des coordonnées quelconques respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans un repère de l'espace à trois dimensions on a la formule suivante :

$\boldsymbol{\vec{U}.\vec{V} = \| U\| \|V\| cos\theta}$ **(1.1.c)** où $\theta = (\widehat{\vec{U}, \vec{V}})$

$\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux $(\vec{U} \perp \vec{V})$ si et seulement si $\vec{U}.\vec{V} = 0$

1.2 PRODUIT VECTORIEL

Considérons deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de coordonnées cartésiennes respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans le repère orthonormé direct (R). On appelle produit vectoriel de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ noté : $\vec{U} \wedge \vec{V}$, le vecteur $\vec{W}$, $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ défini par : $\vec{W}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ dans (R) :

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad \text{(1.2.a)}$$

$$\Leftrightarrow \quad w_1 = u_2v_3 - u_3v_2, w_2 = u_3v_1 - u_1v_3, w_3 = u_1v_2 - u_2v_1$$

En appliquant la formule (1.2.a) à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de R :

$\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a :

$$\begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \\ \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}, \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \end{cases}$$

$$\forall \quad \vec{U} \text{ et } \vec{V}, \text{on a } \vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U} \quad \textbf{(1.2.b)}$$

1.2.1/ Propriétés

Soit $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$

Cas où $\vec{W} = \vec{0} \Rightarrow \vec{U} = \vec{0}$, $\vec{V} = \vec{0}$ ou $\vec{U} // \vec{V}$

$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} \Rightarrow \vec{U}.\vec{W} = 0 \; et \; \vec{V}.\vec{W} = 0$ donc $\vec{W} \perp \vec{U}$ et $\vec{W} \perp \vec{V}$.

1.2.2/ Calcul de la norme de $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$

En utilisant la formule (1.2.a) on a :

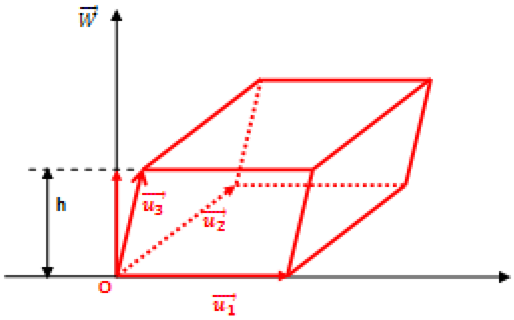
$$\vec{W}^2 = (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2$$

En développant et en arrangeant ces termes on obtient :

$$\vec{W}^2 = \|\vec{U}\|^2 \|\vec{V}\|^2 \left[1 - cos^2(\widehat{\vec{U},\vec{V}})\right] = \|\vec{U}\|^2 \|\vec{V}\|^2 sin^2(\widehat{\vec{U},\vec{V}}) \quad \textbf{(1.2.c)}$$

1.3/ PRODUIT MIXTE DE TROIS VECTEURS DANS UN ESPACE A TROIS DIMENSIONS

Considérons trois vecteurs $\vec{U_1}$, $\vec{U_2}$ et $\vec{U_3}$ dans un espace à trois dimensions rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tels que :



(figure 1.3.a)

Le produit mixte des trois vecteurs $\vec{U_1}$, $\vec{U_2}$ et $\vec{U_3}$ est la quantité scalaire définie par :

$$(\vec{U_1} \wedge \vec{U_2}).\vec{U_3} \quad \textbf{(1.3.b)}$$

1.3.1/ Calcul de volume

La valeur absolue du produit mixte de la formule (1.3.b), s'identifie au volume limité par le parallélépipède de la figure (1.3.a), construit avec les trois vecteurs $\overrightarrow{U_1}$, $\overrightarrow{U_2}$ et $\overrightarrow{U_3}$.

L'aire de la base de ce parallélépipède est la norme du vecteur $\overrightarrow{W}$ défini par :

$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$**(1.3.c)**

La hauteur h de ce parallélépipède est la norme du vecteur :

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{W}, \overrightarrow{U_3}}\right) . \overrightarrow{U_3}$ **(1.3.d)**

1.3.2/ propriété du produit mixte

Pr permutation circulaire on obtient le résultat suivant pour le produit mixte des trois vecteurs $\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3}$:

$\forall\ \overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3},\ \ (\overrightarrow{U_1} \wedge \overrightarrow{U_2}). \overrightarrow{U_3} = (\overrightarrow{U_2} \wedge \overrightarrow{U_3}). \overrightarrow{U_1} = (\overrightarrow{U_3} \wedge \overrightarrow{U_1}). \overrightarrow{U_2}$**(1.3.e)**

1.4 DOUBLE PRODUIT VECTORIEL

Considérons trois vecteurs $\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3}$ de l'espace à trois dimensions. Le double produit vectoriel de $\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}$ et $\overrightarrow{U_3}$ est le vecteur défini par :

$\overrightarrow{U_1} \wedge (\overrightarrow{U_2} \wedge \overrightarrow{U_3})$**(1.4.a)**

En utilisant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}$ et $\overrightarrow{U_3}$ dans une base orthonormée, on montre que :

$\overrightarrow{U_1} \wedge \left(\overrightarrow{U_2} \wedge \overrightarrow{U_3}\right) = \overrightarrow{\mathbf{U_2}}. \left(\overrightarrow{\mathbf{U_1}}. \overrightarrow{\mathbf{U_3}}\right) - \overrightarrow{\mathbf{U_3}}. \left(\overrightarrow{\mathbf{U_1}}. \overrightarrow{\mathbf{U_2}}\right)$ **(1.4.b)**

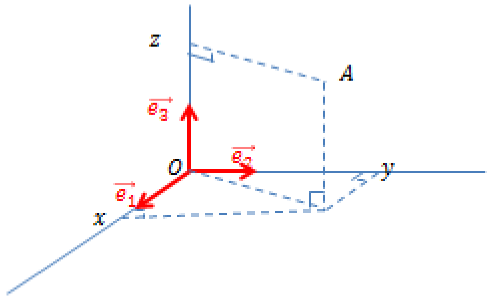
2/ SYSTEMES DE COORDONNEES D'UN VECTEUR

Les différents systèmes de coordonnées permet de repérer un vecteur dans l'espace rapporté à un type de repère.

2.1/ COORDONNEES CARTESIENNES

Les coordonnées cartésiennes sont celles déjà évoquées dans le paragraphe 1.

Etant donné un point matériel A de l'espace à trois dimensions rapporté à un repère orthonormé direct $R_1(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$, repère cartésien, A est repéré dans R_1 par ses coordonnées cartésiennes notées (x,y,z).



Le vecteur $\overrightarrow{OA}$: $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$ (2.1.a)

2.2/ Coordonnées cylindriques

On peut rapporter l'espace à trois dimensions à un repère cylindrique R_2 d'origine O de base orthonormée notée $(\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi},\overrightarrow{e_z})$: $R_2 = (O;\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi},\overrightarrow{e_z})$.

Considérons le point A de coordonnées cartésiennes (x,y,z) dans le repère R_1 du paragraphe (2.1).

Désignons respectivement par P et H les projections orthogonales de A sur le plan $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ et sur l'axe $(O;\overrightarrow{e_3})$.

Définissons les paramètres ρ, φ *et* z par :

$$\rho = \|\overrightarrow{OP}\|\text{ , }\rho\text{ est une longueur}$$

$\varphi = (\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OP}})$: paramètre d'angle (2.2.a)

$$z = \|\overrightarrow{OH}\| : \text{la côte}$$

La base $(\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi},\overrightarrow{e_z})$est défini par :

$\overrightarrow{e_\rho} = \frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|}, \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{e_\rho}$ (2.2.b)

Les paramètres (ρ, φ, z) définis en (2.2.a) représentent les coordonnées cylindriques du point A. Il résulte de la formule (2.2.b) la représentation géométrique suivante:

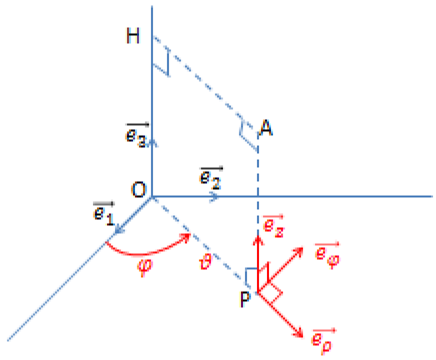


figure (2.2.c)

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OH}$$

D'après les formules (2.2.a) et (2.2.b), on obtient: $\overrightarrow{OA} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z}$ **(2.2.d)**

D'autre part, la formule (2.1.a)⇔ $\overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$**(2.1.a)**

la figure (2.2.c) rapporté dans le plan:

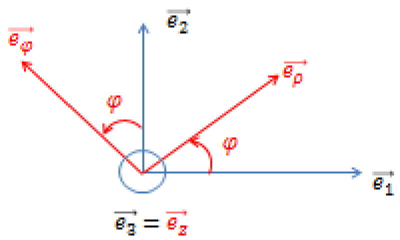


figure (2.2.e)

Il en résulte :

$$\overrightarrow{e_\rho} = cos\varphi\overrightarrow{e_1} + sin\varphi\overrightarrow{e_2}$$

$\overrightarrow{e_\varphi} = cos\varphi\overrightarrow{e_2} - sin\varphi\overrightarrow{e_1}$ (2.2.f)

En tenant compte de (2.2.f) dans (2.2.d) on a :

$$\overrightarrow{OA} = \rho cos\varphi\overrightarrow{e_1} + \rho sin\varphi\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_z}$$

D'après les coordonnées de vecteur $\overrightarrow{OA}$ en (2.1.a) , on obtient finalement la relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques:

$$x = \rho cos\varphi$$

$$y = \rho sin\varphi \quad (2.2.g)$$

$$z = z$$

Remarque: les coordonnées cylindriques sont adaptées pour décrire des systèmes physiques qui ont une symétrique cylindrique.

2.3/ Coordonnées sphériques

L'espace à trois dimensions peut être rapporté à un repère sphérique R_3 d'origine O et de base orthonormée notée $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$, $R_3 = (O; \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$. On rappelle que A est le point de coordonnées (x, y, z) dans le repère cartésien R_1 du paragraphe (2.1).

Soient H et P les projections orthogonales respectives de A sur l'axe $(O; \overrightarrow{e_3})$ et le plan horizontal $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Définissons les paramètres r, θ et φ:

$$r = \|\overrightarrow{OA}\| \quad paramètre\ de\ longueur$$

$$\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{OA}}\right) \quad paramètre\ d'angle \quad (2.3.a)$$

$$\varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OP}}\right) \quad paramètre\ d'angle$$

La base sphérique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ est défini par :

$$\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}, \overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_\rho} \wedge \overrightarrow{e_r} \quad \textbf{(2.3.b)}$$

Où on rappelle que vecteur $\overrightarrow{e_\rho} = \frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|}$ (confère paragraphe (2.2))

Les paramètres (r, θ, ρ) définis en (2.3.a) sont appelés coordonnées sphériques du point A. il résulte des formules (2.3.a) et (2.3.b) la représentation géométrique suivante:

Il résulte des formules (2.3.a) et (2.3.b) la représentation géométrique suivante:

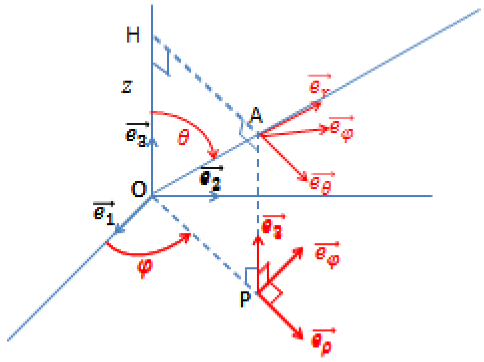


figure (2.3.c)

$$\overrightarrow{OA} = \left\|\overrightarrow{OA}\right\|\overrightarrow{e_r}$$

D'après (2.3.b) on a: $\overrightarrow{OA} = r\overrightarrow{e_r}$ (2.3.d)

D'autre part, on a d'après (2.1.a) ⇔ $\overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$ (2.1.a)

La figure (2.3.c) rapportée dans les plans suivants:

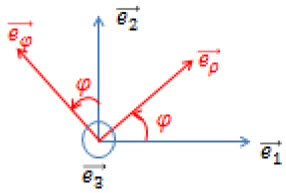


figure (2.3.e)

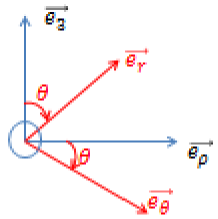


figure (2.3.f)

Ces figures nous donnent les projections suivantes:

$$\overrightarrow{e_\rho} = \cos\varphi\overrightarrow{e_1} + \sin\varphi\overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{e_\varphi} = \cos\varphi\overrightarrow{e_2} - \sin\varphi\overrightarrow{e_1} \quad \textbf{(2.3.g)}$$

$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\overrightarrow{e_3} + \sin\theta\overrightarrow{e_\rho}$$

$$\overrightarrow{e_\theta} = \cos\theta\overrightarrow{e_\rho} - \sin\theta\overrightarrow{e_3}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{e_r} = sin\theta cos\varphi \overrightarrow{e_1} + sin\theta sin\varphi \overrightarrow{e_2} + cos\theta \overrightarrow{e_3}$$

$$\overrightarrow{e_\theta} = cos\theta cos\varphi \overrightarrow{e_1} + cos\theta sin\varphi \overrightarrow{e_2} - sin\theta \overrightarrow{e_3} \quad (2.3.h)$$

En tenant compte de (2.3.h) dans (2.3.d) on obtient:

$$\overrightarrow{OA} = rsin\theta cos\varphi \overrightarrow{e_1} + rsin\theta sin\varphi \overrightarrow{e_2} + rcos\theta \overrightarrow{e_3} (2.3.i)$$

En comparant les formules (2.3.i) et (2.1.a) , on établit la relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques du point A:

$$x = rsin\theta cos\varphi$$

$$y = rsin\theta sin\varphi \quad (2.3.j)$$

$$z = rcos\theta$$

<u>Remarque</u>: les coordonnées sphériques sont adaptées pour décrire des systèmes physiques qui ont une symétrique sphérique.