Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Sachant que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Pour tout x de $]-1,1[$, montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

1. Calculer la limite quand n tend vers l'infini de $s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
2. Retrouver ainsi la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Nature et somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{2n\pi}{3}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Nature et somme de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $n \geq 0$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Nature et somme de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$, $n \geq 2$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Poser $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$, $T_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)^2}$ et $U_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Vérifier que $S_{2N} = \frac{1}{4} S_N + T_N$ et que $U_{2N} = \frac{1}{4} S_N - T_N$.

En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Poser $\varphi_N(x) = \ln(1-x) + \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n}$ sur $]-1,1[$.

Avec l'inégalité des accroissements finis, montrer que $|\varphi_N(x)| =\leq \frac{|x|^{N+1}}{1-|x|}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. Utiliser une somme de Riemann. On trouve $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln 2$.
2. Montrer que si $n \geq 1$, $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = s_n$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $S_{3N} = -\frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{3N} \frac{1}{n}$, puis (somme de Riemann) que $\lim_{N\to\infty} S_{3N} = -\frac{1}{2} \ln 3$.

Obtenir finalement l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{2n\pi}{3} = -\frac{1}{2} \ln 3$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Évoquer tout d'abord le critère spécial des séries alternées.

Prouver que $S_N = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\, dx$. En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que $u_{2n} + u_{2n+1} = 0$. En déduire $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Pour tout $N \geq 1$, posons $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$, $T_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)^2}$ et $U_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

On voit que $S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4} S_N + T_N$.

Quand N tend vers $+\infty$, on trouve : $\lim_{N\to\infty} T_N = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6}$. Ainsi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Enfin, $U_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4} S_N - T_N$.

On en déduit $\lim_{N\to\infty} U_{2N} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}$. Finalement $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

$x \to \varphi_N(x) = \ln(1-x) + \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n}$ est dérivable sur $]-1,1[$ et $\varphi_N(0) = 0$.

Pour tout x de $]-1,1[$: $\varphi_n'(x) = -\frac{1}{1-x} + \sum_{n=1}^{N} x^{n-1} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1-x^N}{1-x} = -\frac{x^N}{1-x}$.

Si on fixe x dans $]-1,1[$ alors un majorant de $|\varphi_N'(t)|$ sur $[0,x]$ est $\frac{|x|^N}{1-|x|}$

On en déduit, avec l'inégalité des accroissements finis : $|\varphi_N(x)| = |\varphi_N(x) - \varphi_N(0)| \leq \frac{|x|^{N+1}}{1-|x|}$.

Il en découle $\lim_{N\to\infty} \varphi_N(x) = 0$, c'est-à-dire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. Pour tout $n \geq 1$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ avec $f(x) \equiv \frac{1}{1+x}$.

   C'est une somme de Riemann. On en déduit $\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$.
2. On sait que la série proposée est convergente (critère spécial des séries alternées).

   Pour tout $n \geq 1$, $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = s_n$.

   Ainsi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_n = \ln(2)$.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On pose $u_n = \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$ et $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$. Nous allons calculer $\lim_{N\to\infty} S_{3N}$.

L'application $n \mapsto v_n = \cos\dfrac{2n\pi}{3}$ est 3-périodique.

On a donc $v_{3n-2} = v_1 = -\dfrac{1}{2}$, $v_{3n-1} = v_2 = -\dfrac{1}{2}$ et $v_{3n} = v_0 = 1$. On en déduit :

$$\begin{aligned} S_{3N} &= \sum_{n=1}^{N}(u_{3n-2}+u_{3n-1}+u_{3n}) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{3n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}\Big) \\ &= \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{3n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}\Big) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3N}\frac{1}{n} = -\frac{1}{2}\sum_{n=N+1}^{3N}\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi, avec $a=0$, $b=2$ et $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$:

$$S_{3N} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N}\frac{1}{N+k} = -\frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{2N}\frac{1}{1+\frac{k}{N}} = -\frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{2N} f\Big(a+k\frac{b-a}{2N}\Big)$$

C'est une somme de Riemann :

$$\lim_{N\to\infty} S_{3N} = -\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}[\ln(1+x)]_0^2 = -\frac{1}{2}\ln 3$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, les suites de terme général S_{3N+1} et S_{3N+2} ont la même limite.

Finalement $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{2n\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}\ln 3$.

Remarque :

Il y a une variante dans les calculs précédents qui n'utilise pas de somme de Riemman, mais le résultat classique selon lequel la suite de terme général $\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n} - \ln N$ est convergente (sa limite est la constante d'Euler $\gamma \approx 0.5772156649$).

On peut donc écrire, en posant $s_N = \sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n}$: $s_N = \ln N + \gamma + \mathrm{o}(1)$.

On en déduit, en reprenant les notations (et une partie des calculs) de la première méthode :

$$\begin{aligned} S_{3N} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3N}\frac{1}{n} = \frac{1}{2}(s_N - s_{3N}) \\ &= \frac{1}{2}(\ln N + \gamma - \ln(3N) - \gamma + \mathrm{o}(1)) = -\frac{1}{2}\ln 3 + \mathrm{o}(1) \end{aligned}$$

Quand $N \to +\infty$, on trouve encore $\lim_{N\to\infty} S_{3N} = -\dfrac{1}{2}\ln 3$.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

La série $\sum u_n$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées.

Pour tout $N \geq 0$:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-x^2)^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi $S_N = I - J_N$, avec $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

Or $|J_N| \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^{2(n+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+3}$.

On en déduit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{\pi}{4}$.

Corrigé de l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Le développement limité $\ln(1+x) = x + \mathrm{O}(x^2)$ donne $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.

$\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ (critère spécial) et $\sum \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ (Riemann) sont convergentes.

Il en est donc de même de $\sum u_n$.

On remarque que $u_{2n} + u_{2n+1} = \ln\Big(1+\dfrac{1}{2n}\Big) + \ln\Big(1-\dfrac{1}{2n+1}\Big) = \ln\Big(\dfrac{2n+1}{2n}\Big) + \ln\Big(\dfrac{2n}{2n+1}\Big) = 0$.

Ainsi $S_{2N+1} = \displaystyle\sum_{n=2}^{2N+1} u_n = \sum_{n=1}^{N} (u_{2n} + u_{2n+1}) = 0$.

Donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\Big(1+\frac{(-1)^n}{n}\Big) = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} S_{2N+1} = 0$.