Exercice 1 - $\mathbb{R}$-différentiable - *L3/M1* - ⋆

Pour $z = x + iy$, on pose $f(z) = x + iy^2$.

1. Prouver que f est $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}$. Déterminer la différentielle de f.
2. En quels points f est-elle $\mathbb{C}$-différentiable ? Existe-t-il un ouvert non vide U de $\mathbb{C}$ tel que la restriction de f à U soit holomorphe sur U ?

Exercice 2 - Fonctions holomorphes à valeurs réelles - *L3/M1* - ⋆⋆

Soit Ω un ouvert connexe et f une fonction holomorphe dans Ω. On écrit $f = u + iv$, où u et v sont à valeurs réelles. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est constante ;
(ii) u est constante ;
(iii) v est constante ;
(iv) $\bar{f}$ est holomorphe ;
(v) $|f|$ est constante.

Exercice 3 - Parties réelles et imaginaires harmoniques - *L3/M1* - ⋆

Soit $f = u + iv$ une fonction holomorphe dans un ouvert Ω. Montrer que u et v sont harmoniques, c'est-à-dire que
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 4 - Reconstruction - *L3/M1* - ⋆

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour $z = x + iy$, on pose
$$P(z) = az^2 + 2bxy + c^2.$$
Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour qu'il existe une fonction holomorphe f sur $\mathbb{C}$ vérifiant $\Re e(f) = P$. Lorsque cette condition est remplie, déterminer toutes les fonctions f solution.

Exercice 5 - Symétrie - *L3/M1* - ⋆⋆

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U. Soit $V = \{z \in \mathbb{C};\ \bar{z} \in U\}$. On pose, pour $z \in V$, $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Montrer que g est holomorphe sur V.

Exercice 6 - Courbes orthogonales - *L3/M1* - ⋆⋆

Soit $f = u+iv$ une fonction holomorphe dans un ouvert Ω. Montre que les familles de courbes $u(x, y) =$ constante et $v(x, y) =$ constante sont orthogonales. Plus précisément, montrer qu'en tout point $z_0 = x_0 + iy_0$ de deux de ces courbes tel que $f'(z_0) \neq 0$, leurs tangentes respectives sont perpendiculaires.

Exercice 7 - d-barre - *L3/M1* - ⋆⋆⋆

Dans cet exercice, on identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ via l'application $(x, y) \mapsto x + iy$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in C^1(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

1. Montrer que
$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}.$$
2. Montrer que f est holomorphe si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Montrer que dans ce cas, $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$.
3. On dit que f est antiholomorphe si $\bar{f}$ est holomorphe. Montrer que f est antiholomorphe si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.
4. Soit f de classe C^2. Montrer que $\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$.
5. On suppose que f est une fonction holomorphe. Montrer que
$$\Delta |f|^2 = 4|f'(z)|^2.$$
6. On considère $f_1, \dots, f_p$ des fonctions holomorphes dans un ouvert connexe Ω. On suppose que $|f_1|^2 + \cdots + |f_p|^2$ est constante. Montrer que chaque fonction f_j est constante.