Cours de Probabilités

Table des matières

Chapitre 1

Denombrement

Le dénombrement consiste à déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble fini. Ce chapitre fournit des méthodes de dénombrement particulirement utiles en probabilités.

1. Cardinal d'un ensemble fini

Définition 1.1. *Un ensemble E non vide est dit fini s'il existe un entier n et une bijection de $\{1, 2, \ldots, n\}$ sur E. Lorsqu'il existe, l'entier n est unique et est noté $Card(E)$. C'est le cardinal ou le nombre d'éléments de E*

Définition 1.2. *Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E. Un ensemble E est dit infini non dénombrable s'il n'est ni fini, ni dénombrable.*

Soit E un ensemble fini et A, B deux parties de E.

Proposition 1.1. *1. Si $\bar{A}$ est le complémentaire de A dans E alors*

$$Card(\bar{A}) = Card(E) - Card(A).$$

2. $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.

3. Si $A \cap B = \emptyset$ alors $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$

4. $Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$

2. Principes de comptage

2.1. Principe additif

Soit E un ensemble fini et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties de E constituant une partition de E, c'est dire,

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$

- $E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Alors nous avons $Card(E) = \sum_{i=1}^{n} Card(A_i)$.

Lorsqu'on veut dénombrer un ensemble fini E, on peut trouver une partition $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de cet ensemble, où les cardinaux des ensembles A_i sont plus faciles déterminer. Il ne reste alors qu'à faire la somme des differents cardinaux obtenus.

Exemple 1. *J'ai dans ma bibliothèque* 50 *livres de mathématiques en franais et* 40 *livres de mathématiques en anglais (et aucun dans une autre langue). Je peux donc y choisir un livre de mathématiques de* $50 + 40 = 90$ *façons différentes.*

2.2. Principe multiplicatif

Si une situation correspond p choix successifs ayant chacun respectivement n_1, $n_2, \ldots, n_p$ possibilités alors le nombre total de possibilités est

$$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p.$$

3. Arrangements

3.1. Arrangements avec répétition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini n éléments.

Définition 1.3. *Un arrangement avec répétition de p éléments (ou p-liste) de E est une partie ordonnée de p éléments de E non nécessairement distincts. Cela revient à prendre p objets dans E en tenant compte de l'ordre dans lequel on les choisit, et en pouvant prendre plusieurs fois le même élément.*

Proposition 1.2. *Le nombre d'arrangements avec répétition de p objets parmi n est* n^p.

En effet, on a n possibilités pour chaque place, soit $n \times n \times \ldots \times n = n^p$ possibilités d'arrangement d'après le principe multiplicatif.

Exemple 2. *Combien y a-t-il de numéros de téléphone commençant par* 08 *?*
Un numéro de téléphone est constitué de 8 *chiffres. Les* 6 *numéros qui suivent le* "08" *sont des arrangements avec répétitions de* 6 *éléments de l'ensemble*

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \}.$$

Il y en a $10^6 = 1000000$ *possibilités.*

Exemple 3. *Tirer successivement p boules, en les remettant chaque fois dans l'urne, et en tenant compte de l'ordre de sortie des numros constitue un arrangement avec répétition de p éléments parmi n. Il y a* n^p *possibilités.*

3.2. Arrangements sans répétition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini n éléments.

Définition 1.4. *Un arrangement de p éléments de E est une partie ordonne de p lments (distincts) de E. Cela revient prendre p objets distincts dans E en tenant compte de l'ordre dans lequel on les choisit.*

Proposition 1.3. *Le nombre d'arrangements de p objets parmi n est*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Nous avons n possibilités pour la première place, $n-1$ possibilités pour la deuxième place, $n-2$ possibilités pour la troisième place,..., $(n-(p-1))$ possibilités pour la dernière place. D'après le principe multiplicatif, le nombre total de possibilités est :

$$\begin{aligned} A_n^p &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(p-1)) \\ &= \frac{n!}{(n-p)!}. \end{aligned}$$

Exemple 4. ***Le tiercé.*** *Une course de chevaux comporte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles de tiercés dans l'ordre ?*
Soit E l'ensemble des numéros des chevaux. On a $Card(E) = 20$. Un tiercé correspond un arrangement de 3 éléments de E, il y en a $A_{20}^3 = 6840$ possibilités.

Exemple 5. *Tirer successivement p boules sans remise en tenant compte de l'ordre de sortie des numéros constitue un arrangement de p éléments parmi n. Il y a A_n^p possibilités.*

3.3. Permutation

Soit E un ensemble fini n éléments.

Définition 1.5. *Une permutation de E est un arrangement des n éléments de E. Cela revient prendre les n éléments de E en tenant compte de l'ordre dans lequel on les choisit.*

Proposition 1.4. *Le nombre de permutations d'un ensemble E n éléments est*

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1.$$

Nous avons n possibilités pour la première place, $n-1$ possibilités pour la deuxième place, $n-2$ possibilités pour la troisième place,..., 1 possibilités pour la dernière place. D'après le principe multiplicatif, le nombre total de possibilités est :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1 = A_n^n$$

Exemple 6. *De combien de façons peut-on répartir* 7 *personnes sur* 7 *chaises ?*
Désignons par $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$ *les* 7 *personnes et posons*

$$E = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}.$$

Une répartition peut se voir comme une permutation de E*, il y en a* $7! = 5040$.

Exemple 7. *Une urne contient* n *boules distinctes. Tirer successivement les* n *boules en tenant compte de l'ordre de sortie des boules constitue une permutation de* n *éléments. Il y a* $n!$ *possibilités.*

4. Combinaisons

4.1. Combinaison sans répétition

Définition 1.6. *Une combinaison de* p *éléments de* E *est une partie non ordonnée de* E *formée de* p *éléments. Cela revient prendre* p *objets dans* E *sans tenir compte de l'ordre dans lequel on les choisit.*

Proposition 1.5. *Le nombre de combinaisons possibles de* p *objets pris parmi* n *est*

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}.$$

Exemple 8. *Quel est le nombre de comités de* 3 *personnes que l'on peut élire dans une assemblée de* 20 *personnes.*
Le nombre de comités possibles est le nombre de combinaisons de 3 *personnes parmi* 20*, soit* $C_{20}^3 = 1140$

Exemple 9. *Tirer simultanement* p *boules parmi* n *constitue une combinaison de* p *éléments parmi* n *éléments. Il y a* C_n^p *possibilités.*

4.2. Binôme de Newton

Proposition 1.6. *Soient* a *et* b *deux nombres rels et* n *un entier naturel non nul, alors :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

4.3. Combinaison avec répétition

Définition 1.7. *Une* k*-combinaison avec répétition d'un ensemble fini* E *de cardinal* n*, est une application* f *de* E *dans* $\{0, 1, \cdots, k\}$*, telle que*

$$\sum_{x \in E} f(x) = k.$$

Plus précisément, si $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ *alors* f *vérifie*

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) = k.$$

f *s'appelle aussi une combinaison de* n *éléments pris* k *à* k.

Remarque 1.1. *Cette application indique pour chaque élément de* E *le nombre de fois qu'il est choisi ; et si l'application associe la valeur* 0 *à un élément de* E*, alors l'élément n'est pas choisi. De plus la somme des nombres de répétitions doit bien être égale à* k*, si nous voulons exactement* k *objets éventuellement répétés.*

Théorème 1.1. *Soit* E *un ensemble fini de cardinal* n, $(n \in \mathbb{N}^*)$. *Alors l'ensemble* $K_k(E)$ *des* k*-combinaisons avec répétition de* E *est fini et son cardinal est égal à*

$$\Gamma_n^k = C_{n+k-1}^k$$

qui est le nombre de k*-combinaisons de* $n + k - 1$ *éléments*

5. Quel modèle choisir ?

- Si l'énoncé contient le mot **successif**, il faut tenir compte de tous les ordres dans lesquels on peut obtenir un événement donné. On doit souvent multiplier par le nombre d'ordres possibles le résultat trouvé pour un ordre déterminé.
- Si l'énoncé contient les mots "**successif et avec remise**", cela signifie que l'ordre dans lequel on considre les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété. Le modèle mathématique est la p-liste ou arrangement avec répétition.
- Si l'énoncé contient les mots **successif et sans remise**, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance mais que tous les éléments considérés sont distincts (ou qu'il n'y a pas de répétition d'éléments). Le modèle mathématique est l'arrangement.
- Si l'énoncé contient le mot **simultanément sans répétition** , cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments n'a pas d'importance et les éléments sont distincts deux à deux. Le modèle mathématique est la combinaison classique.
- Si l'énoncé contient le mot **simultanément avec répétition** , cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments n'a pas d'importance mais les éléments peuvent se répéter. Le modèle mathématique est la combinaison avec répétition.

Chapitre 2

Espace probabilisé

1. Expérience aléatoire

Activité 1. On lance un dé équilibré à 6 faces numérotés de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé après l'arrêt.

1. Quel est l'ensemble de résultats possibles ?
   Peut-on prévoir avant le lancer les résultats possibles ?
2. Déterminer l'ensemble des résultats pairs.
3. Déterminer l'ensemble des possibilités d'avoir le chiffre "2" ?
4. Déterminer l'ensemble des possibilités d'avoir le chiffre "7" ?
5. Déterminer l'ensemble de résultats "obtenir un nombre infrieur 7 "
6. On considère les ensembles suivants :
   A est l'ensemble "obtenir un nombre au moins gal 4 "
   B est l'ensemble "obtenir un multiple de 2"
   C est l'ensemble "obtenir le chiffre 5"
   (a) Déterminer l'ensemble "obtenir un multiple de 2 ou un nombre au moins gal 4".
   (b) Déterminer l'ensemble "obtenir un multiple de 2 et un nombre au moins gal 4".
   (c) Déterminer l'ensemble "obtenir un multiple de 2 et le chiffre 5".

Correction de l'activité 1. *On lance un dé équilibré de* 6 *faces numrotées de* 1 6 *et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé àprès l'arrêt.*

1. *L'ensemble des résultats possibles appel univers des possibles est*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

   On ne peut pas prévoir l'avance le résultat.

2. *L'ensemble des résultats pairs est* $\{2, 4, 6\}$

3. *Nous avons une possibilité d'avoir le chiffre 2 est* $\{2\}$.
4. *Ce résultat est impossible.*
5. *L'ensemble des résultats "obtenir un nombre inférieur 7" est* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
6. *Nous avons* $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ *et* $C = \{5\}$.
   (a) *On note D l'ensemble "obtenir un multiple de 2 ou un nombre au moins égal 4" :* $D = A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.
   (b) *On note E l'ensemble "obtenir un multiple de 2 et un nombre au moins égal 4".* $E = A \cap B = \{4, 6\}$
   (c) *On note F l'ensemble "obtenir un multiple de 2 et le chiffre 5"* *Cet ensemble est* $F = A \cap C = \emptyset$.

Définition 2.1. *Une expérience $\mathcal{E}$ est qualifiée d'aléatoire si on ne peut pas prévoir par avance son résultat et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut donner lieu des résultats différents.*

Remarque 2.1. *Avant toute exprimentation, on peut décrire l'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire.*

Définition 2.2. *Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire. On appelle univers, et l'on note souvent Ω, l'ensemble des résultats possibles de $\mathcal{E}$. Si Ω est non vide. On notera $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Dans toute la suite de ce chapitre, on supposera que Ω est fini.*

Définition 2.3. *On appelle événement associé à une expérience aléatoire, toute partie A de Ω.*

Remarque 2.2.
1. *L'événement $A = \Omega$ est appel événement certain. Il se réalise toujours.*
2. *L'événement $A = \emptyset$ est appel événement impossible. Il ne se réalise jamais.*
3. *L'événement $A = \{\omega\}$ constitu d'un seul élément de Ω est appel événement élémentaire.*

Les événements étant des ensembles, on utilisera 3 opérateurs définies sur les ensembles :

- l'union ; l'événement $A \cup B$ se réalise si A se réalise ou B se réalise
- l'intersection ; $A \cap B$ se réalise si A se réalise et B se réalise
- le complémentaire ; $\bar{A}$ se ralise si A ne réalise pas.

Application 1. *Un sac contient trois boules de couleurs différentes ; une boule rouge, une boule verte et une boule bleue. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur. On replace la boule dans le sac et on retire au hasard en notant nouveau sa couleur.*

1. *Déterminer l'univers des éventualités de cette expérience.*
2. *Citer un événement élémentaire et un événement non élémentaire*
3. *Soit A l'événement : "les deux boules sont de même couleur", B l'événement : "obtenir une boule bleue et une boule verte ", et C l'événement : "obtenir d'abord une boule rouge"*

(a) *Déterminer l'événement contraire de A*

(b) *Déterminer l'événement : "A et B "; "A et C" puis l'événement "A ou C", Les événements A et B sont-ils incompatibles ?*

Correction de l'exercice d'application 1. *On note :*
R=*"la couleur de la boule tire est rouge"*
B=*"la couleur de la boule tire est bleue"*
V=*"la couleur de la boule tire est verte"*

1. *L'événement élémentaire est un couple (C_1, C_2) où C_1 représente la couleur de la première boule tire et C_2 la couleur de la deuxième. L'univers des possibles est*

$$\Omega = \{(R,R),(R,V),(V,R),(R,B),(B,R),(V,V),(V,B),(B,V),(B,B)\}.$$

2. *(R,V) est un événement élémentaire ; $\{(R,R),(R,V)\}$ est un événement non élémentaire.*
3. *Nous avons*

$$\begin{aligned} A &= \text{"les deux boules sont de même couleur"} = \{(R,R),(V,V),(B,B)\} \\ B &= \text{"obtenir une boule bleue et une boule verte "} = \{(B,V),(V,B)\} \\ C &= \text{"obtenir d'abord une boule rouge"} = \{(R,R),(R,V),(R,B)\}. \end{aligned}$$

(a) *L'événement contraire de A est*

$$\bar{A} = \{(R,V),(V,R),(R,B),(B,R),(V,B),(B,V)\}.$$

(b) *Nous avons :*

$$\begin{aligned} &A \cap B = \emptyset \\ &A \cap C = \{(R,R)\} \\ &A \cup C = \{(R,R),(V,V),(B,B),(R,V),(R,B)\} \end{aligned}$$

Les événements A et B sont incompatibles.

Définition 2.4. *Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire, et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de parties de Ω. Alors, le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est appelé espace probabilisable.*

2. Probabilité

Activité 2. Un sac contient trois boules de couleurs différentes ; une boule rouge, une boule verte et une boule bleue. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur. On replace la boule dans le sac et on retire en notant à nouveau sa couleur. Chaque boule a la même chance d'être tirée.

1. Quel est le nombre de résultats possibles ?
2. Quelle est la fréquence d'apparition du couple (R, B) ?
3. Quelle est la fréquence d'apparition de chaque couple de l'univers.
   Faire la somme de tous les résultats obtenus ?
4. Quelle est la fréquence d'apparition de deux boules de même couleur ?

Correction de l'activité 2. *Un sac contient trois boules de couleurs différentes ; une boule rouge, une boule verte et une boule bleue. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur. On replace la boule dans le sac et on retire en notant nouveau sa couleur. Chaque boule a la même chance d'être tirée.*

1. $card(\Omega) = 9$.
2. *La fréquence d'apparition du couple* (R, B) *est* $\dfrac{1}{card(\Omega)} = \dfrac{1}{9}$.
3. *La fréquence d'apparition de chaque couple de l'univers est* $\frac{1}{9}$. *De plus,*

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\frac{1}{9} + \frac{1}{9} = 1$$

4. *Tirer deux boules de même couleur revient tirer un élément de*

$$A = \{(R, R), (V, V), (B, B)\}.$$

   La fréquence d'apparition de deux boules de même couleur est $\dfrac{3}{9}$.

Définition 2.5. *On appelle probabilité sur l'univers* Ω *d'une expérience aéatoire l'application*

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \mathbb{P}(A) \end{aligned}$$

telle que

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- *pour tout sous-ensemble* $\{A_1, \ldots, A_n, \ldots\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *deux deux disjoints, nous*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Propriété 2.1.

1. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
2. *si* $A \cap B = \emptyset$ *alors* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
3. $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$

Activité 3. On lance un dé truqué numéroté de 1 6 tel que $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = \frac{1}{7}$ et $P_6 = \frac{2}{7}$ où P_i est la probabilit d'apparition du numéro i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Soit A l'événement "obtenir un nombre au moins égale à 4" et B="obtenir un multiple de 2 "

1. Calculer la probabilité des événements A et B.
2. Déterminer les ensembles $A \cap B$ et $A \cup B$ puis calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$
3. Comparer $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$
4. (a) Calculer la probabilité de l'événement $C=$ "obtenir un nombre impair "
   (b) Calculer $\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$

Correction de l'activité 3. *Soit A l'événement "obtenir un nombre au moins gal 4" et $B=$"obtenir un multiple de 2 "*

1. *Nous avons $A = \{4, 5, 6\} = \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}$. Les événements $\{4\}$, $\{5\}$ et $\{6\}$ tant deux deux disjoints, nous obtenons*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = P_4 + P_5 + P_6 = \frac{4}{7}$$

   De même, nous avons $B = \{2, 4, 6\}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$.
2. *$A \cap B = \{4, 6\}$ et $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ et*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{7} \qquad \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{5}{7}.$$

3. *$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cup B)$*
4. *(a) $C = \{1, 3, 5\}$*
   (b) $\mathbb{P}(C) = \frac{3}{7}$ et $\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$.

Activité 4. Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0.45$; $\mathbb{P}(B) = 0.60$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.80$ calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(\bar{A})$

Correction de l'activité 4. 1. *Nous avons*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Par suite

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = 0.25.$$

2. *$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 0.55$*

Remarque 2.3. *Une expérience se déroule dans les conditions équiprobables si tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser. Dans ce cas, nous avons pour tout événement A,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{card(\Omega)} \sum_{\omega \in A} 1 \\
&= \frac{card(A)}{card(\Omega)} \\
\mathbb{P}(A) &= \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}.
\end{aligned}$$

Exercice de fixation 1. *Dans un jeu de 32 cartes il y'a 4 As, on tire au hasard 4 cartes de ce jeu.*

1. *Calculer la probabilité d'obtenir 2 As.*
2. *Quelle est la probabilité de n'avoir aucun As ?*
3. *Quelle est la probabilité de tirer au moins un As ?*

Correction de l'exercice de fixation 1. *Dans un jeu de 32 cartes il y'a 4 As, on tire au hasard 4 cartes de ce jeu. Le nombre total de possibilits est le nombre de combinaisons de 4 cartes parmi 32 :*

$$card(\Omega) = C_{32}^4.$$

1. *Soit l'événement $A =$"obtenir 2 As dans le tirage". Nous avons :*
   - C_4^2 *possibilités de tirer 2 As parmi 4*
   - C_{28}^2 *possibilités de tirer les 2 cartes restantes parmi 28.*

   D'après le principe multiplicatif, le nombre de possibilités d'obtenir 2 As dans le tirage est

   $$card(A) = C_4^2 \times C_{28}^2.$$

   La probabilité d'obtenir 2 As est donc

   $$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{C_4^2 \times C_{28}^2}{C_{32}^4}.$$

2. *Soit l'événement $B =$"n'avoir aucun As". Nous avons C_{28}^4 possibilités d'obtenir un tirage sans aucun As, soit $card(B) = C_{28}^4$. La probabiliét de n'avoir aucun As est donc*

   $$\mathbb{P}(B) = \frac{C_{28}^4}{C_{32}^4}.$$

3. *Soit l'événement $C =$"avoir au moins un As". L'événement contraire de C est B. Ainsi, nous obtenons*

   $$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(B) = 1 - \frac{C_{28}^4}{C_{32}^4}.$$

   Deuxime méthode : L'événement $C = \cup_{i=1}^4 C_i$ o l'événement $C_i =$"avoir exactement i As avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Nous avons
   - C_4^i *possibilités de tirer i As parmi 4*
   - C_{28}^{4-i} *possibilités de tirer les $4 - i$ cartes restantes parmi 28.*

   D'après le principe multiplicatif, le nombre de possibilités d'obtenir exactement i As dans le tirage est

   $$card(A) = C_4^i \times C_{28}^{4-i}.$$

   De plus C_1, C_2, C_3 et C_4 sont deux deux incompatibles. Ce qui implique que

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}(C_2) + \mathbb{P}(C_3) + \mathbb{P}(C_4)\\ &= \frac{C_4^1 \times C_{28}^3 + C_4^2 \times C_{28}^2 + C_4^3 \times C_{28}^1 + C_4^4}{C_{32}^4}\end{aligned}$$

3. Modélisation d'une expérience aléatoire

Lors de la modélisation d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, on est amené à choisir :

1. un univers Ω
2. une famille de parties de Ω. Dans le cas où l'univers Ω est fini, on considère $\mathcal{P}(\Omega)$
3. une probabilité $\mathbb{P}$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est appel espace probabilisé.

4. Probabilités conditionnelles, indépendance

4.1. Probabilité conditionnelle

Activité 5. Dans une classe de Terminale D de 36 élèves, 23 ont 18 ans, 29 sont des filles et 17 filles ont 18 ans. On choisit au hasard un élève de cette classe.

1. Calculer la probabilité des évènements suivants : A="l'élève a 18 ans ", B ="l'élève est une fille", C=" l'élève est une fille de 18 ans"
2. Si l'élève est une fille, quelle est la probabilité pour qu'elle ait 18 ans ?
3. Comparer le résultat de la question 2 et $\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

Correction de l'activité 5. ***Première méthode :***

	18 ans	*Autres*	*Total*
Filles	*17*	*12*	*29*
Garons	*6*	*1*	*7*
Total	*23*	*13*	*36*

1. *Nous obtenons*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{23}{36}$$
$$\mathbb{P}(B) = \frac{29}{36}$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{17}{36}.$$

2. *D'après le tableau, c'est parmi les* 29 *filles qu'on cherche celles qui ont* 18 *ans :*

$$\mathbb{P}(C) = \frac{17}{29}$$

3. *Nous obtenons*

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{17}{36}}{\frac{29}{36}} = \frac{17}{29}.$$
$$\mathbb{P}(C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Deuxime méthode : arbres de choix. *La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est 1. La probabilité de l'événement correspond à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet. En dehors des branches du premier niveau, les probabilités indiques sont des probabilités conditionnelles .*

Théorème 2.1. *Soit une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ d'univers Ω, $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω et B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. L'application*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B : \mathcal{P} &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{aligned}$$

est une probabilité sur Ω. $\mathbb{P}_B(A)$ se lit probabilité de A sachant B

Définition 2.6. *L'application $\mathbb{P}_B$ ainsi définie s'appelle "probabilité conditionnelle sachant B". La quantité $\mathbb{P}_B(A)$ est parfois note $\mathbb{P}(A|B)$.*

Exercice de fixation 2. *Une urne contient trois boules rouges et deux boules blanches. On tire successivement avec remise deux boules de l'urne en notant leur couleur. Calculer la probabilité d'avoir deux boules de même couleur sachant que la première boule est rouge.*

Correction de l'exercice de fixation 2. *Le cardinal de l'univers est le nombre d'arrangements avec répétition d'un ensemble 2 éléments dans un ensemble 5 éléments, soit $card(\Omega) = 5^2$.*
Soit A l'événement "avoir deux boules de même couleur "; $A = A_1 \cup A_2$ où A_1 "avoir deux boules rouges" et A_2 "avoir deux boules blanches; $card(A_1)$ est le nombre d'arrangements avec réptitions d'un ensemble 2 éléments dans un ensemble 3 éléments soit $card(A_1) = 3^2$; $card(A_2)$ est le nombre d'arrangements avec répétitions d'un ensemble 2 éléments dans un ensemble à 2 éléments soit $card(A_2) = 2^2$; Par suite

$$card(A) = 3^2 + 2^2.$$

Soit B l'événement "la première boule tiré est rouge"; nous avons 3^1 possibilits de tirer une boule rouge au premier tirage et 5^1 possibilits de tirer une boule au second tirage, soit

$$card(B) = 3^1 \times 5^1.$$

$A \cap B$="les deux boules tires sont rouges"; $card(A \cap B) = 3^2$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{3^2}{5^2} \\ \mathbb{P}(B) &= \frac{3^1 \times 5^1}{5^2}. \end{aligned}$$

Nous déduisons que

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{3^2}{3^1 \times 5^1}.$$

Définition 2.7 ((Système complet d'événement))**.** *On dit qu'une famille* $(B_k)_{1\leq n}$ *est un* **système complet d'évènements** *lorsque :*

1. $\forall\ (i,j) \in \lfloor 1;n \rfloor^2,\ (i \neq j)\ B_i \cap B_j =$ *(On dit alors que les* $(B_k)_{1\leq n}$*, sont deux a deux disjoints ou incompatibles)*
2. $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \Omega$.

Autrement dit les $B_k,\ k = 1, \cdots, n$*, constituent une partition de* Ω.

Exemple 2.1. *Soit* A *une partie non trivial de* Ω*. Alors la paire* $\{A,\ \bar{A}\}$ *est un système complet d"événement.*

Théorème 2.2 ((Probabilité totale))**.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $(B_k)_{1\leq n}$ *un système complet d"événement. Alors pour tout événement* A*, on a :*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)$$

Corollaire 2.1 ((Formule de Bayes))**.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $(B_k)_{1\leq n}$ *un système complet d"événement. Alors pour tout événement* A*, on a :*$\forall\ j \in \lfloor 1;n \rfloor$,

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}.$$

4.2. Indépendance

Définition 2.8. *Deux événements* A *et* B *de probabilités non nulles sont indépendants lorsque la réalisation (ou non) de l'un n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation de l'autre :* $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ *ou* $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

Théorème 2.3. *Deux événements* A *et* B *sont indépendants si et seulement si* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Exercice de fixation 3. *On lance une pièce de monnaie non truqué deux fois de suite et on note le couple de côtés qui apparaît.*

1. *Les événements : A= "face apparaît au premier lancer " et B="pile apparaît au deuxième lancer" sont-ils indpendants ?*
2. *Les événements : C="le même côté apparaît deux fois" et D=" le nombre d'apparition de " face" est différent de deux " sont-ils indépendants ?*

Correction de l'exercice de fixation 3. *On lance une pièce de monnaie non truquée deux fois de suite et on note le couple de côtés qui apparaît. L'univers est*

$$\Omega = \{(P,P), (P,F), (F,F), (F,P)\}$$

1. $A = \{(F,F),(F,P)\}$ $B = \{(P,P),(F,P)\}$ $A \cap B = \{(F,P)\}$. *Nous avons*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} \quad \mathbb{P}(A) = \frac{2}{4} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{2}{4}.$$

On note que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. *On déduit que* A *et* B *sont indépendants.*

2. $C = \{(F,F),(P,P)\}$ $D = \{(P,P),(F,P),(P,F)\}$ $C \cap D = \{(P,P)\}$. *Nous avons*

$$\mathbb{P}(C \cap D) = \frac{1}{4} \quad \mathbb{P}(C) = \frac{2}{4} \quad \mathbb{P}(D) = \frac{3}{4}.$$

On note que $\mathbb{P}(C \cap D) \neq \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$. *On déduit que* C *et* D *ne sont pas indépendants.*

Chapitre 3

Variables aléatoires réelles

On fait une expérience aléatoire qui est traduite par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Maintenant on s'intéresse à certaines conséquences de cette expérience.

1. Généralités

Définition 3.1. *Soit Ω l'univers fini ou dénombrable d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ et E un ensemble. On considère l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On appelle variable aléatoire toute application X définie sur Ω à valeurs dans E telle que*

$$\forall A \subset E, \quad X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in A\} \in \mathcal{P}(\Omega).$$

Remarque 3.1. *1. (i) Si $E = \mathbb{R}$, X est une variable aléatoire réelle*

2. (ii) Soit X une variable aléatoire réelle. Si $X(\Omega)$ est un sous-ensemble fini ou infini dénombrable de $\mathbb{R}$, alors la v.a.r X est dite discrète. Sinon, elle est dite continue.

Définition 3.2. *Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ valeurs dans E. On appelle loi de probabilité de X, la probabilité $\mathbb{P}_X$ définie sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$ par :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \quad \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A).$$

Définition 3.3. *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On appelle fonction de répartition de la v.a.r X, la fonction F définie par :*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longrightarrow F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x[). \end{aligned}$$

Propriété 3.1. *1. (i) F est une fonction non décroissante*

2. $[b]$ $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

3. (c) F est continue à droite et limité à gauche.

Définition 3.4. *Soit X une variable aléatoire réelle. Supposons que la fonction de répartition F soit continue et strictement croissante. Pour $0 \leq \alpha \leq 1$; on note x_α l'unique nombre réel vérifiant*

$$F(x_\alpha) = \mathbb{P}(X < x_\alpha) = \alpha.$$

On dit X_α est le quantile d'ordre α.

Remarque 3.2. *Pour connaître la loi d'une variable aléatoire discrète X, il faut connaître l'ensemble de ses valeurs possibles, et la probabilité avec laquelle elle réalise chaque valeur i.e*

$$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \subset \mathbb{R} \ \ et \ \ P(X = x_i).$$

Pour toute fonction h, on définit l'espérance de $h(X)$ par

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) P(X = x_i).$$

En particulier

si $h(x) = |x|^p$, $p \geq 1$ alors on parle de moment d'ordre p de la v.a. X. Le moment d'ordre 1 est appelé l'espérance de X.

si $h(x) = |x - \mathbb{E}(X)|^p$, $p \geq 1$ alors on parle de moment centré d'ordre p de la v.a. X. Le moment centré d'ordre 2 est appelé la variance de X.

Remarque 3.3. 1. *(i) X une variable aléatoire continue est absolument continue s'il existe une fonction définie sur $\mathbb{R}$, positive, vérifiant $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$, telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

La fonction f est appelée densité de probabilité de la variable aléatoire X.

2. *(ii) Pour toute fonction continue h, on définit l'espérance de $h(X)$ par*

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx.$$

En particulier

si $h(x) = |x|^p$, $p \geq 1$ alors on parle de moment d'ordre p de la v.a. X. Le moment d'ordre 1 est appelé l'espérance de X.

si $h(x) = |x - \mathbb{E}(X)|^p$, $p \geq 1$ alors on parle de moment centré d'ordre p de la v.a. X. Le moment centré d'ordre 2 est appelé la variance de X.

Remarque 3.4. *La loi d'une variable aléatoire est complètement détermine via sa fonction de répartition, ou via sa densité de probabilite.*

2. Variables aléatoitrs réelles usuelles

2.1. Variables aléatoires discrètess uuelles

La loi de Bernoulli

C'est la plus simple des lois de probabilité. Une variable aléatoire X est dite de Bernoulli si $X(\Omega) = \{0; 1\}$. On note

$$p = \mathbb{P}(X = 1); q = 1 - p = \mathbb{P}(X = 0)$$

Exemple 10. *Le jeu de pile ou face (non truqué, $p = 0,5$, truqué, $p \neq 0,5$).*

La loi Binomiale

Une variable aléatoire S suit une loi binomiale si $S(\Omega) = \{0; 1; 2; \ldots, n\}$, et pour $0 \leq k \leq n$, on a

$$\mathbb{P}(S = k) = C_n^k \, p^k \, q^{n-k};$$

où $p \in [0, 1], \; q = 1 - p$.

L'espérance d'une variable de Binomiale est $\mathbb{E}(S) = np$.

La variance est $V(S) = npq = np(1 - p)$ et l'écart type est $\sigma(S) = \sqrt{npq}$.

Remarque 3.5. *C'est la loi d'une somme de n variables X_i de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.*

Exemple 11. *On joue n fois à pile ou face avec une pièce non truquée. On suppose les lancés indépendants. Soit S la variable "nombre de pile obtenus". Si on note X_i la variable définie par $X_i = 1$ si "pile" au i-ème lancé, on a*

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Les variables X_i sont de Bernoulli, indépendantes, et S suit une loi Binomiale de paramètre $p = 1/2$.

Loi géométrique

Une variable aléatoire S suit une loi géométrique de paramètre $(0 \leq p \leq 1)$ si $S(\Omega) = \{1; 2; \ldots; n; \cdots\}$, et pour $k \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(S = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

- L'espérance d'une variable géométrique est

$$\mathbb{E}(S) = \frac{1}{p}$$

- La variance est

$$V(S) = \frac{1 - p}{p^2}$$

.

Remarque 3.6. *Si on réalise n preuves de bernoulli de paramètre p de manière indépendante, le rang du premier succès est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p.*

La loi hypergéométrique

Une variable aléatoire S suit une loi hypergéométrique si $S(\Omega) = \{0; 1; 2; \ldots; n\}$, et pour $0 \leq k \leq K$, on a

$$\mathbb{P}(S = k) = \frac{C_K^k \, C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n},$$

où $0 \leq K \leq N$ sont des entiers, avec $n \leq N$.

L'espérance d'une variable hypergéométrique est $\mathbb{E}(S) = n\frac{K}{N}$.

La variance est $V(S) = n\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)\left(\dfrac{N-K}{N}\right)$.

Exemple 12. *Une urne contient N boules avec K blanches et $N - K$ noires. On tire $n \leq N$ boules sans remise. Alors la variable $S =$ "nombre de boules blanches" suit une loi hypergéométrique.*

La loi de Poisson

Une variable X suit une loi de Poisson si $X(\Omega) = \{0; 1; 2; \ldots; n; \ldots; +\infty\}$ et on a pour $k = \{0; 1; \ldots; +\infty\}$

$$P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!}\, e^{-\mu};$$

où $\mu > 0$ est le paramètre de la loi.

L'espérance d'une variable de Poisson est $\mathbb{E}(X) = \mu$.

La variance est aussi $V(X) = \mu$.

Exemple 13. *Le nombre de pannes d'un système mécanique durant une période donnée : μ est le taux moyen de pannes $\times$ la durée de la période.*

2.2. Variables aléatoires continues uuelles

La loi uniforme

Une v.a. X continue suit une loi uniforme sur $[a, b]$ si sa fonction de répartition a pour densité f où

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \leq u \leq b \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'espérance d'une variable uniforme est $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.

La variance est $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

L'écart type est $\sigma(X) = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$