Théorème de Dirichlet

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de période 2π et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

On note a_k et b_k les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note S_n le polynôme de Fourier de f d'indice n.

On rappelle que S_n est défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, S_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$.

On pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ \tilde{f}(x) = \dfrac{1}{2}(f(x^-)+f(x^+))$, avec $f(x^-) = \displaystyle\lim_{t\to x,\, t<x} f(t)$ et $f(x+) = \displaystyle\lim_{t\to x,\, t>x} f(t)$.

L'application $\tilde{f}$ (la "régularisée" de f) coïncide donc avec f en tout point où f est continue.

Dans cette question, x est un réel donné.

1. Soit g une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ (avec $a<b$).

   Pour tout réel strictement positif t, on pose $I_t(g) = \displaystyle\int_a^b g(u)\sin tu \,\mathrm{d}u$.

   Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} I_t(g) = 0$.

   Indication : on commencera par supposer que g est en escaliers sur $[a,b]$. [S]
2. On pose, pour tout u de $]0,\pi]$, $g(u) = \dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}}(f(x+u)+f(x-u)-2\tilde{f}(x))$.

   Montrer que g se prolonge en une application continue par morceaux sur $[0,\pi]$. [S]
3. Montrer que pour tout u de $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, on a l'égalité : $\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos ku = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}$. [S]
4. En déduire la valeur de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^\pi \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u$. [S]
5. Montrer que $S_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-u)}{2\sin\frac{x-u}{2}} f(u)\,\mathrm{d}u$ [S]
6. Montrer que $S_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} f(u+x)\mathrm{d}u$. [S]
7. Montrer que $S_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} (f(u+x)+f(x-u))\mathrm{d}u$. [S]
8. En déduire que $S_n(x) - \tilde{f}(x) = \displaystyle\int_0^\pi g(u)\sin(n+\tfrac{1}{2})u\,\mathrm{d}u$ [S]
9. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \tilde{f}(x)$. Conclusion ? [S]

Corrigé du problème

1. – On suppose que l'application g est en escaliers sur $[a,b]$.

   Il existe donc une subdivision $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$ et une suite $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ de $\mathbb{C}$ telles que : $\forall k \in \{1,\ldots,n\}, \forall x \in]x_{k-1},x_k[, g(x) = \lambda_k$.

   Pour tout réel $t \neq 0$, on a alors : $I_t(g) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sin tu\,\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Big[-\frac{1}{t}\cos tu\Big]_{x_{k-1}}^{x_k}$

   On en déduit $|I_t(g)| \leq \dfrac{2}{t}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$ et donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} I_t(g) = 0$.

   – On suppose maintenant que g est continue par morceaux sur $[a,b]$.

   On se donne un réel ε strictement positif. On sait qu'il existe une application φ, en escaliers sur $[a,b]$, et telle que : $\forall x \in [a,b], |g(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$.

   On peut alors écrire : $|I_t(g)| = |I_t(g-\varphi) + I_t(\varphi)| \leq |I_t(g-\varphi)| + |I_t(\varphi)|$.

   Or $|I_t(g-\varphi)| \leq \displaystyle\int_a^b |g(u) - \varphi(u)|\,\mathrm{d}u \leq (b-a)\varepsilon$.

   Puisque φ est en escaliers, il existe $t_0 > 0$ tel que : $t \geq t_0 \Rightarrow |I_t(\varphi)| \leq \varepsilon$.

   On en déduit : $\forall t \geq t_0, |I_t(g)| \leq (b-a+1)\varepsilon$.

   Ce résultat prouve que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} I_t(g) = 0$.

   [Q]

2. Comme f, l'application $u \mapsto f(x+u) + f(x-u) - 2\tilde{f}(x)$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

   Il s'ensuit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ et en particulier sur $]0,\pi]$.

   Il reste à montrer que la fonction g est prolongeable par continuité en 0 à droite.

   Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, l'application f' possède une limite à gauche et une limite à droite (toutes deux finies) au point x.

   Notons les respectivement $f'(x^+)$ et $f'(x^-)$.

   On a les développements limités, quand u tend vers 0 par valeurs positives :

   $$f(x+u) = f(x^+) + uf'(x^+) + o(u) \text{ et } f(x-u) = f(x^-) - uf'(x^-) + o(u)$$

   On en déduit, toujours quand $u \to 0^+$:

   $$f(x+u) + f(x-u) - 2\tilde{f}(x) = u(f'(x^+) - f'(x^-)) + \mathrm{o}(u)$$

   D'autre part, $2\sin\dfrac{u}{2} = u + \mathrm{o}(u)$.

   On en déduit, quand $u \to 0^+$: $g(u) = f'(x^+) - f'(x^-) + \mathrm{o}(1)$.

   Ainsi l'application g est prolongeable par continuité en 0 à droite. [Q]

3. On constate effectivement, après simplifications, que :

$$2\sin\frac{u}{2}\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ku\Big)=\sin\frac{u}{2}+\sum_{k=1}^{n}\Big(\sin(k+\frac{1}{2})u-\sin(k-\frac{1}{2})u\Big)=\sin(n+\frac{1}{2})u$$

Si $u\in\mathbb{R}-2\pi\mathbb{Z}$, c'est-à-dire si $\sin\frac{u}{2}\neq 0$, le résultat en découle en divisant par $2\sin\frac{u}{2}$. [Q]

4. Avec la question précédente : $J_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\Big(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos ku\Big)\,\mathrm{d}u=\pi+2\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\Big[\frac{1}{k}\sin ku\Big]_0^{\pi}}_{=0}=\pi.$

[Q]

5. On utilise les expressions des coefficients a_k et b_k : $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\,\mathrm{d}u$

Et pour tout $k\geq 1$: $a_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\cos ku\,\mathrm{d}u$ et $b_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\sin ku\,\mathrm{d}u$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}S_n(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+\sum_{k=1}^{n}b_k\sin kx\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos ku\cos kx+\sin ku\sin kx)\Big)f(u)\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k(x-u))\Big)f(u)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-u)}{2\sin\frac{x-u}{2}}f(u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

[Q]

6. Dans l'expression précédente de S_n, on effectue le changement de variable $\theta=u-x$.

On trouve : $S_n(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-u)}{2\sin\frac{x-u}{2}}f(u)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}f(\theta+x)\mathrm{d}\theta.$

Mais la fonction à intégrer est 2π-périodique, et on intègre ici sur l'intervalle $[-\pi-x,\pi-x]$ qui est de longueur 2π. Il est donc équivalent d'intégrer sur $[-\pi,\pi]$.

En revenant à la variable muette u, on obtient : $S_n(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}f(x+u)\,\mathrm{d}u.$

[Q]

7. On utilise le résultat précédent et on effectue le changement de variable $u\to -u$.

On trouve : $S_n(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}f(x+u)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}f(x-u)\,\mathrm{d}u.$

On prend alors la demi-somme : $S_n(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}(f(x+u)+f(x-u))\,\mathrm{d}u.$

Mais la fonction intégrée est paire. On peut donc se limiter à $[0,\pi]$ et écrire :

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}(f(u+x)+f(x-u))\mathrm{d}u$$

[Q]

8. On se souvient que $J_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u = \pi$.

   On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} S_n(x) - \tilde{f}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}(f(u+x)+f(x-u))\,\mathrm{d}u - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\tilde{f}(x)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}(f(u+x)+f(x-u)-2\tilde{f}(x))\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^\pi g(u)\sin(n+\tfrac{1}{2})u\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

[Q]

9. On sait que l'application g est continue par morceaux sur $[0,\pi]$.

   On peut donc appliquer le résultat de la première question, avec ici $t = n+\frac{1}{2}$ et conclure que la suite de terme général $S_n(x) - \tilde{f}(x)$ converge vers 0.

   Autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \tilde{f}(x)$. Et le résultat est valable pour tout réel x.

   On a ainsi démontré le théorème de Dirichlet : Pour toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la suite des polynômes de Fourier de f converge sur $\mathbb{R}$ (au sens de la convergence simple) vers la "régularisée" $\tilde{f}$ de f.

   En terme de série, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f)\cos kx + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kx = \tilde{f}(x)$.

   [Q]