Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Trouver le développement en série entière de $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Trouver le développement en série entière de $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}\right)$, où $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Trouver le développement en série entière de $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Trouver le développement en série entière de $f(x) = \displaystyle\int_0^x \exp(t^2 - x^2)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Trouver le développement en série entière de $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$.

1. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?
2. Montrer que f satisfait à l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.
3. En déduire une expression de f.

Exercice 7 [Indication] [Correction]

Développement en série entière de $f(x) = (\arcsin x)^2$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $f(x) = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{(i-1)x}$. En déduire $\mathrm{e}^{-x}\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \sin \frac{3n\pi}{4} x^n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Montrer que $f'(x) = \operatorname{Im}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{1 - x\mathrm{e}^{i\alpha}}\right)$. En déduire $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} x^n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Noter que $f(x) = \dfrac{1-x}{1-x^3}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Montrer que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2xf(x) + 1$.

Poser $y(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. On trouve $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ et $a_n = -\dfrac{2}{n} a_{n-2}$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Au voisinage de 0, écrire $f(x) = \ln(2-x) + \ln(3-x)$.

En déduire $f(x) = \ln 2 + \ln 3 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) \frac{x^n}{n}$ pour $|x| < 2$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

1. Le rayon de convergence de la série entière définissant f est 1.
2. Montrer que f est solution de $(1-x^2)y' - xy = 1$ sur $]-1,1[$.
3. Résoudre l'équation homogène, puis utiliser la méthode de variation de la constante.

   Trouver finalement : $\forall x \in]-1,1[\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [Retour à l'énoncé]

Montrer que $(1-x^2)f''(x) = 2 + xf'(x)$. En déduire $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}(n-1)!^2}{(2n)!} x^{2n}$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On passe par les nombres complexes car il n'est pas recommandé d'effectuer le produit des développements en série entière de e^x et de $\sin x$. Tout ce qu'on peut dire est que ces deux fonctions étant développables sur $\mathbb{R}$ il en est de même de leur produit.

Pour tout réel x, on a l'égalité $f(x) = \operatorname{Im} g(x)$ avec $g(x) = e^{(i-1)x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i-1)^n x^n}{n!}$.

Or $(i-1)^n = \left(\sqrt{2} \exp \dfrac{3i\pi}{4}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos \dfrac{3n\pi}{4} + i \sin \dfrac{3n\pi}{4}\right)$.

On en déduit, en prenant la partie imaginaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \sin \frac{3n\pi}{4} x^n$$

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Remarquons tout d'abord que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{\cos \alpha}\right\}$.

En particulier, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I = \left]-\dfrac{1}{\cos \alpha}, \dfrac{1}{\cos \alpha}\right[$, qui contient l'intervalle $]-1,1[$.

Pour tout x de I, on a : $f'(x) = \dfrac{\sin \alpha}{(1 - x \cos \alpha)^2} \dfrac{1}{1 + \dfrac{(x \sin \alpha)^2}{(1 - x \cos \alpha)^2}} = \dfrac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}$.

On a la factorisation $x^2 - 2x \cos \alpha + 1 = (x - e^{i\alpha})(x - e^{-i\alpha})$.

On en déduit la décomposition : $f'(x) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{x - e^{i\alpha}} - \dfrac{1}{x - e^{-i\alpha}}\right) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{e^{i\alpha}}{1 - xe^{i\alpha}} - \dfrac{e^{-i\alpha}}{1 - xe^{-i\alpha}}\right)$

Ainsi $f'(x) = \operatorname{Im}\left(\dfrac{e^{i\alpha}}{1 - xe^{i\alpha}}\right)$. On peut alors utiliser $\dfrac{1}{1 - z^n} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, valable pour $|z| < 1$.

Donc : $\forall x \in]-1,1[: f'(x) = \operatorname{Im}\left(e^{i\alpha} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\alpha} x^n\right) = \operatorname{Im}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{i(n+1)\alpha} x^n\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin((n+1)\alpha) x^n$.

On intègre, avec $f(0) = 0$: $\forall x \in]-1,1[, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\alpha)}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} x^n$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Il suffit de noter que pour tout x de $]-1,1[$, on a : $f(x) = \dfrac{1-x}{1-x^3} = (1-x) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n}$.

On en déduit : $\forall x \in]-1,1[, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_{3n} = 1$, $a_{3n+1} = -1$ et $a_{3n+2} = 0$.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On écrit f sous la forme $f(x)=\exp(-x^2)\varphi(x)$ avec $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^x \exp(t^2)\,\mathrm{d}t$.
L'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $\varphi'(x)=\exp(x^2)$.
L'application f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Elle vérifie $f(0)=0$ et : $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=-2xf(x)+1$.
f est donc l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de $y'+2xy=1$ telle que $y(0)=0$.

Cherchons cette solution sous la forme $y(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$, de rayon $R>0$ inconnu.

$$\begin{aligned}\forall x\in]-R,R[,\ y'(x)+2xy(x)=1 &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+2\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^{n+1}=1\\ &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+2\sum_{n=3}^{+\infty}a_{n-2}x^{n-1}=1\end{aligned}$$

Par identification on trouve alors : $\begin{cases}a_1=1\\ a_2=0\end{cases}$ et : $\forall n\geq 3:\ a_n=-\dfrac{2}{n}a_{n-2}$.
On en déduit d'une part que tous les coefficients d'indice pair sont nuls.
D'autre part les coeffcients a_{2n+1} satisfont à : $\forall n\geq 1, a_{2n+1}=-\dfrac{2}{2n+1}a_{2n-1}$.
Compte tenu de $a_1=1$, il vient :

$$a_{2n+1}=(-1)^n\Big(\frac{2}{2n+1}\Big)\Big(\frac{2}{2n-1}\Big)\cdots\Big(\frac{2}{3}\Big)a_1=\frac{(-4)^nn!}{(2n+1)!}$$

On en déduit que $y(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-4)^nn!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ sur l'intervalle $]-R,R[$.
Mais le rayon de convergence est infini : c'est une conséquence de $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}=0$.
Les deux applications $x\mapsto f(x)$ et $x\mapsto y(x)$ sont solutions de l'équation différentielle linéaire $y'+2xy=1$ avec la même condition initiale (elles s'annulent en 0).
L'unicité d'une telle solution (c'est du cours) implique :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-4)^nn!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Au voisinage de 0, $f(x)=\ln((x-3)(x-2))=\ln(2-x)+\ln(3-x)$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}f(x)&=\ln 2+\ln 3+\ln\Big(1-\frac{x}{2}\Big)+\ln\Big(1-\frac{x}{3}\Big)=\ln 2+\ln 3-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n2^n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n3^n}\\ &=\ln 2+\ln 3-\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\Big)\frac{x^n}{n}\quad\text{et le développement est valable pour } |x|<2.\end{aligned}$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

1. Comme il s'agit d'une série entière *lacunaire* (il manque les exposants pairs), il vaut mieux utiliser la forme initiale du critère de d'Alembert.

   Posons donc $u_n = \dfrac{4^n n!^2}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$, pour tout entier n et pour x réel fixé non nul.

   On constate que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{4(n+1)^2\,|x|^2}{(2n+3)(2n+2)} = \dfrac{2(n+1)\,|x|^2}{2n+3} \underset{n\to\infty}{\sim} |x|^2$.

   On en déduit que la série $\sum u_n$ converge si $|x| < 1$ et qu'elle diverge si $|x| > 1$.

   Le rayon de convergence de la série entière définissant la fonction f est donc 1.

2. Sur $I =]-1,1[$, on peut dériver la série terme à terme. On obtient :

$$(1-x^2)f'(x) = (1-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n n!^2}{(2n)!}\,x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n n!^2}{(2n)!}\,x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n n!^2}{(2n)!}\,x^{2n+2}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{4^{n+1}(n+1)!^2}{(2n+2)!} - \frac{4^n n!^2}{(2n)!}\Big)x^{2n+2} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n n!^2}{(2n)!}\left(\frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} - 1\right)x^{2n+2}$$

$$= 1 + x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n n!^2}{(2n)!}\left(\frac{2(n+1)}{2n+1} - 1\right)x^{2n+1} = 1 + x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n n!^2}{(2n+1)!}\,x^{2n+1} = 1 + xf'(x).$$

   Ainsi f est solution de l'équation différentielle (E) $(1-x^2)y' - xy = 1$ sur $]-1,1[$.

3. L'équation différentielle homogène associée à (E) s'écrit : (H) $(1-x^2)y' = xy$.

   Sa solution générale sur $]-1,1[$ est la droite vectorielle engendrée par l'application $x \mapsto h(x) = \exp(\varphi(x))$ où $\varphi'(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$.

   Par exemple $\varphi(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)$ et donc $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   On cherche alors la solution générale de (E) par la méthode de variation de la constante.

   On écrit donc que $y(x) = \lambda(x)h(x)$ est solution de (E) sur I (λ dérivable).

   Pour tout x de $]-1,1[$, sachant que h est une solution particulière de (H) :

$$(1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1 \Leftrightarrow (1-x^2)(\lambda'(x)h(x) + \lambda(x)h'(x)) - x\lambda(x)h(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow (1-x^2)\lambda'(x)h(x) = 1 \Leftrightarrow \lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow \lambda(x) = \arcsin(x) + \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

   On en déduit la solution générale de (E) sur $]-1,1[$: $y(x) = \dfrac{\arcsin(x)+\alpha}{\sqrt{1-x^2}}$.

   La somme f de notre série entière est donc de cette forme.

   Mais on observe que $f(0) = 0$, ce qui impose $\alpha = 0$.

   On en déduit finalement : $\forall x \in]-1,1[,\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n n!^2}{(2n+1)!}\,x^{2n+1} = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 7 [Retour à l'énoncé]

Pour tout x de $]-1,1[$, on a $f'(x) = \dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

On trouve ensuite : $f''(x) = \dfrac{2}{1-x^2} + \dfrac{2x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

Ainsi, pour tout x de $]-1,1[$, on a : $(1-x^2)f''(x) = 2 + xf'(x)$.

f est donc solution de l'équation différentielle (E) $(1-x^2)y'' = xy' + 2$ sur $]-1,1[$.

Compte tenu de ce que $f(0) = f'(0) = 0$, on peut dire que f est la solution de (E) qui s'annule à l'origine ainsi que sa dérivée (on utilise l'existence et l'unicité du problème de Cauchy, pour ce type d'équation.)

D'autre part, la fonction f est paire.

On est donc conduit à chercher une solution de (E) sous la forme $y(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n}$, avec un rayon $R > 0$ inconnu pour l'instant.

Sur l'intervalle $]-R,R[$, on a :

$$\begin{aligned}(1-x^2)y'' = xy' + 2 &\Leftrightarrow (1-x^2)\sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1)a_n x^{2n-2} = x\sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{2n-1} + 2\\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)(2n+1)a_{n+1}x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1)a_n x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{2n} + 2\\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)(2n+1)a_{n+1}x^{2n} = 4\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n x^{2n} + 2.\end{aligned}$$

L'identification des termes constants donne $a_1 = 1$.

L'identification des termes de degré ≥ 2 donne : $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \dfrac{4n^2}{(2n+2)(2n+1)}a_n$.

On en déduit l'expression de a_n :

$$a_n = \frac{4(n-1)^2}{(2n)(2n-1)}\,\frac{4(n-2)^2}{(2n-2)(2n-3)}\cdots\frac{4}{4\cdot 3}a_1 = \frac{2^{2n-1}(n-1)!^2}{(2n)!}$$

On constate que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{4n^2}{(2n+2)(2n+1)} \underset{n\to\infty}{\sim} 1$.

Le rayon de convergence de la série entière obtenue est donc $R = 1$.

Sur l'intervalle $]-1,1[$, la fonction f et la somme S de cette série sont identiques (car solutions de (E) avec les mêmes conditions initiales.)

On en déduit finalement :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ (\arcsin x)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}(n-1)!^2}{(2n)!}x^{2n}$$