Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Calculer $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n = \dfrac{1}{n^2-1}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, avec $u_n = \dfrac{n}{n^4+n^2+1}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer la somme de la série $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$, avec $u_n = \ln\Bigl(1-\dfrac{1}{n^2}\Bigr)$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, avec $u_n = \arctan \dfrac{2}{n^2}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Calculer $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$, avec $u_n = \ln\cos \dfrac{\pi}{2^n}$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit p un entier ≥ 2. Trouver la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $u_n = \dfrac{1}{2(n-1)} - \dfrac{1}{2(n+1)}$ pour obtenir $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} u_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2N} - \frac{1}{2(N+1)}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $u_n = v_n - v_{n+1}$, avec $v_n = \dfrac{1}{2(n^2-n+1)}$. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(N^2+N+1)}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $u_n = \ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln(n)$. En déduire $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} u_n = -\ln 2 + \ln \frac{N+1}{N}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $u_n = v_{n-1} - v_{n+1}$, avec $v_n = \arctan \dfrac{1}{n}$.

En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n = \frac{3\pi}{4} - \arctan\frac{1}{N} - \arctan\frac{1}{N+1}$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $u_n \sim -\dfrac{\pi^2}{2^{2n+1}}$, puis que $\ln\cos\dfrac{\pi}{2^n} = v_{n-1} - v_n - \ln 2$, avec $v_n = \ln\sin\dfrac{\pi}{2^n}$.

En déduire $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} u_n = -\ln\Big(2^{N-1}\sin\frac{\pi}{2^N}\Big)$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Noter $u_{n,p} = \dfrac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}$. Remarquer que $u_{n,p} = \dfrac{1}{p}(u_{n,p-1} - u_{n+1,p-1})$.

En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_{n,p} = \frac{1}{p}(u_{1,p-1} - u_{N+1,p-1})$, puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,p} = \frac{1}{p}\,u_{1,p-1} = \frac{1}{p\,p!}$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

La série converge car $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ (série de Riemann).

Pour tout $n \geq 2$, on a $u_n = \dfrac{1}{2(n-1)} - \dfrac{1}{2(n+1)}$.

On en déduit $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} u_n = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{2(n-1)} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{2(n+1)} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2n} - \sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{2n} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2N} - \frac{1}{2(N+1)}$.

On fait tendre N vers $+\infty$ et on trouve $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} u_n = \frac{3}{4}$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

La série $\sum u_n$ est convergente car $u_n \sim \dfrac{1}{n^3}$ (comparaison avec une série de Riemann.)

D'autre part $n^4 + n^2 + 1 = (n^2+1)^2 - n^2 = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$.

Pour tout entier n, $u_n = \dfrac{1}{2(n^2 - n + 1)} - \dfrac{1}{2(n^2 + n + 1)} = \dfrac{1}{2(n(n-1)+1)} - \dfrac{1}{2((n+1)n+1)}$.

u_n s'écrit donc $u_n = v_n - v_{n+1}$, avec $v_n = \dfrac{1}{2(n^2 - n + 1)}$.

On en déduit, pour tout N : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} (v_n - v_{n+1}) = v_1 - v_{N+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(N^2 + N + 1)}$.

On fait tendre N vers $+\infty$ et on trouve : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

La série $\sum u_n$ est convergente car $u_n \sim -\dfrac{1}{n^2}$ (comparaison avec une série de Riemann.)

Pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \ln(n^2 - 1) - 2\ln(n) = \ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln(n)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} u_n &= \sum_{n=2}^{N} \ln(n-1) + \sum_{n=2}^{N} \ln(n+1) - 2\sum_{n=2}^{N} \ln(n) = \sum_{n=1}^{N-1} \ln n + \sum_{n=3}^{N+1} \ln n - 2\sum_{n=2}^{N} \ln(n) \\ &= \ln 2 + \ln N + \ln(N+1) - 2\ln 2 - 2\ln N = -\ln 2 + \ln \frac{N+1}{N}\end{aligned}$$

On fait tendre N vers $+\infty$ et on trouve : $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big) = -\ln 2$

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

La série $\sum u_n$ est convergente car $u_n \sim \dfrac{2}{n^2}$ (comparaison avec une série de Riemann.)

Pour tout $n \geq 2$, on a : $\dfrac{2}{n^2} = \dfrac{2}{(n^2-1)+1} = \dfrac{\dfrac{2}{n^2-1}}{1+\dfrac{1}{n^2-1}} = \dfrac{\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}}{1+\dfrac{1}{(n-1)(n+1)}}$

Posons $v_n = \arctan \dfrac{1}{n}$. Alors $\dfrac{2}{n^2} = \dfrac{\tan v_{n-1} - \tan v_{n+1}}{1+\tan v_{n-1}\tan v_{n+1}} = \tan(v_{n-1}-v_{n+1})$

Puisque $0 < v_{n-1} - v_{n+1} < \dfrac{\pi}{2}$, on en déduit $u_n = v_{n-1} - v_{n+1}$. Pour tout $N \geq 2$, on a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} u_n &= u_1 + \sum_{n=2}^{N}(v_{n-1}-v_{n+1}) = u_1 + \sum_{n=2}^{N} v_{n-1} - \sum_{n=2}^{N} v_{n+1} = u_1 + \sum_{n=1}^{N-1} v_n - \sum_{n=3}^{N+1} v_n \\ &= u_1 + v_1 + v_2 - v_N - v_{N+1} \\ &= \arctan 2 + \arctan 1 + \arctan \tfrac{1}{2} - \arctan \tfrac{1}{N} - \arctan \tfrac{1}{N+1}\end{aligned}$$

Puisque $\arctan 2 + \arctan \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$, il vient $\sum\limits_{n=1}^{N} u_n = \frac{3\pi}{4} - \arctan \frac{1}{N} - \arctan \frac{1}{N+1}$.

Quand on fait tendre N vers $+\infty$, on trouve : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2}{n^2} = \frac{3\pi}{4}$.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Quand $x \to 0$, $\ln\cos x \sim \cos x - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}$. Donc quand $n \to \infty$: $u_n \sim -\dfrac{\pi^2}{2^{2n+1}}$.

On en déduit la convergence de la série $\sum u_n$, par comparaison avec une série géométrique.

Pour tout entier n, $\sin \dfrac{\pi}{2^{n-1}} = 2 \sin \dfrac{\pi}{2^n} \cos \dfrac{\pi}{2^n}$.

On en déduit, pour tout $n \geq 2$: $\ln\cos \dfrac{\pi}{2^n} = v_{n-1} - v_n - \ln 2$, avec $v_n = \ln\sin \dfrac{\pi}{2^n}$.

On somme de $n=2$ à $n=N$: $\sum\limits_{n=2}^{N} u_n = v_1 - v_N - (N-1)\ln 2 = -\ln\Bigl(2^{N-1}\sin \dfrac{\pi}{2^N}\Bigr)$.

Quand $N \to \infty$, $2^{N-1}\sin \dfrac{\pi}{2^N} \sim 2^{N-1}\dfrac{\pi}{2^N} \sim \dfrac{\pi}{2}$. Donc $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\cos \dfrac{\pi}{2^n} = -\ln \dfrac{\pi}{2}$.

Corrigé de l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Notons $u_{n,p} = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}$. Puisque $p \geq 2$, $\sum u_{n,p}$ est convergente.

On a : $u_{n,p} = \frac{1}{p}\,\frac{(n+p)-n}{n(n+1)\cdots(n+p)} = \frac{1}{p}\,\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p-1)} - \frac{1}{p}\,\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}$.

Autrement dit $u_{n,p} = \frac{1}{p}(u_{n,p-1} - u_{n+1,p-1})$.

On en déduit $\sum\limits_{n=1}^{N} u_{n,p} = \frac{1}{p}(u_{1,p-1} - u_{N+1,p-1})$, et quand $N \to \infty$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{n,p} = \frac{1}{p}\,u_{1,p-1} = \frac{1}{p\,p!}$.