UFR-MI **2012-2013**
L1 & **MIAGE**

Fonctions dérivables

Exercice 1. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction Arctg, montrer que
$$\forall t>0, \operatorname{Arctg} t > \frac{t}{1+t^2}$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = exp(1/x)$. Montrer que, pour tout $x>0$, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que
$$f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c^2}\exp\frac{1}{c}.$$
Déterminer
$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(\exp(\frac{1}{x}) - \exp(\frac{1}{x+1})\right)$$

Exercice 3.

1. A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que
$$\forall x>0,\ \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$
2. En déduire que les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \text{ et } g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$
sont monotones.
3. Déterminer les limites en l'infini de $\ln f$ et $\ln g$, puis de f et g.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

1. Donner un développement limité de f à l'ordre 3 en zéro.
2. En déduire que la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse 0, dont on précisera l'équation.
3. Prouver que la courbe traverse la tangente en 0. Un tel point est appelé point d'inflexion.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2+2x+2)$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point

Exercice 6. A l'aide des développements limités, déterminer les asymptotes éventuelles et la position relative par rapport aux asymptotes de la courbe représentative de la fonction :
$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}.$$

Exercice 7. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f admet une fonction réciproque sur $\mathbb{R}$. Donner un développement limité de f^{-1} à l'ordre 3 en 0.

Exercice 8. Calculer les limites suivantes en utilisant si possible les développements limités :

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\exp(\sin x) - \exp(\tan x)}{\sin x - \tan x}$
2. $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^{x^x} \ln x}{x^x - 1}$
3. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}$ avec $a, b > 0$