Agrégation interne de Mathématiques
Département de Mathématiques
Université de La Rochelle
F. Geoffriau

2006-2007

Exercices sur les matrices

Agrégation interne de Mathématiques
Département de Mathématiques
Université de La Rochelle
F. Geoffriau

2006-2007

Exercices sur les matrices

Énoncés

1. – L'inverse d'une matrice comme somme de ses puissances

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{k})$

a. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_0 \in \mathbb{k}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{k}$ tels que

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \cdots + \lambda_k A^k = 0$$

Prouver que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de A et des λ_i.

b. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{k}$ non tous nuls tels que

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \cdots + \lambda_k A^k = 0$$

Montrer que, si A est inversible, on peut en outre obtenir une telle relation avec $\lambda_0 \neq 0$.

2. – Centre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{k})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. On note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{k})$ n'ayant que des 0 sauf en position (i, j) où le coefficient vaut 1.

a. Soit $i, j, k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$$

où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker.

b. Montrer que le centre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{k})$ est l'ensemble des matrices scalaires.

3. – Matrices qui commutent à une matrice donnée

a. Soit $A \in \mathrm{M}_2(\Bbbk)$ et $\mathcal{C}$ son commutant (l'ensemble des matrices qui commutent à A) dans $\mathrm{M}_2(\Bbbk)$. Montrer que $\dim \mathcal{C}$ est 2 ou 4.
b. Soit $A, B \in \mathrm{GL}_2(\Bbbk)$ et $C = ABA^{-1}B^{-1}$. On suppose que A et B commutent à C. Prouver que $AB = BA$ ou $AB = -BA$.

4. – Matrice nilpotente et matrice inversible

Soit $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, A inversible et B nilpotente. Montrer que $I_n + A^{-1}BA$ et $I_n + ABA^{-1}$ sont inversibles et déterminer leurs inverses.

5. – Matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} \mathrm{C}_{j-1}^{i-1} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $\mathcal{E} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base de $\mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Déterminer $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ tel que $A = \mathrm{mat}(u, \mathcal{E})$. En déduire A^{-1} et A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

 F. Geoffriau

6. – Calcul d'inverse de matrice

Vérifier que les matrices suivantes de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sont inversibles et calculer leur inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

F. Geoffriau

7. – Calcul de déterminant

Soit $A_n = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\} \qquad a_{i,j} = 2\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j} + 3\delta i, j + 1$$

Calculer le déterminant de A_n.

F. Geoffriau

8. – Déterminant de matrice par bloc

Soit M une matrice carrée d'ordre $n = p + q$ de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_{q,p} & B \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{k})$, $B \in \mathrm{M}_q(\mathbb{k})$ et $C \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{k})$. Montrer $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

F. Geoffriau

9. – Déterminant de matrice par bloc

Soit $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{k})$ telles que $AC = CA$ et A inversible. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

Que peut-on dire si A n'est pas inversible ?

10. – Système avec un paramètre

Résoudre et discuter suivant les valeurs de λ le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2(\lambda+1)x & + & 3y & + & \lambda z & = & \lambda+4 \\ (4\lambda-1)x & + & (\lambda+1)y & + & (2\lambda-1)z & = & 2\lambda+4 \\ (5\lambda-4)x & + & (\lambda+1)y & + & (3\lambda-4)z & = & \lambda-1 \end{array}\right.$$

F. Geoffriau

11. – ENDOMORPHISMES DE $\mathrm{M}_n(\mathbb{k})$

Soit $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{k})$. On définit trois endomorphismes φ, χ et ψ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{k})$ en posant, pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{k})$

$$\varphi(M) = AM, \quad \chi(M) = MB, \quad \psi(M) = AMB$$

Déterminer les traces de ces endomorphismes.

12. – Forme linéaire de $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ et matrices élémentaires

a. Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on pose $E_{i,j} = (\delta_{i,r}\delta_{j,s})_{1 \leqslant r,s \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\Bbbk)$ et pour $r \in \{1, \dots, n-1\}$, on pose

$$\begin{aligned} A_r &= E_{1,1} + E_{2,2} + \cdots + E_{r,r} \\ B_r &= E_{1,2} + E_{2,3} + \cdots + E_{r,r+1} \\ C_r &= E_{2,1} + E_{3,2} + \cdots + E_{r+1,r} \end{aligned}$$

Soit $r \in \{1, \dots, n-1\}$. Montrer que $A_r B_r = B_r$, $B_r A_r = B_{r-1}$ si $r \neq 1$, $B_1 A_1 = 0$ et $B_r C_r = A_r$.

b. Soit $f \colon \mathrm{M}_n(\Bbbk) \to \Bbbk$ une application non constante telle que

$$\forall\, M, N \in \mathrm{M}_n(\Bbbk) \qquad f(MN) = f(M) f(N)$$

Déterminer l'ensemble $\{M \in \mathrm{M}_n(\Bbbk);\ \ f(M) = 0\}$.

F. Geoffriau

Agrégation interne de Mathématiques
Département de Mathématiques
Université de La Rochelle
F. Geoffriau

2006-2007

Exercices sur les matrices

Indications

1. – L'inverse d'une matrice comme somme de ses puissances

Indication

a. Diviser par λ_0 et mettre A en facteur.

b. Remarquer que la famille $(I_n, A, A^2, \ldots, A^p)$ est liée dès que $p > n^2$ et que s'il existe une matrice B non nulle telle que $AB = 0$ alors A n'est pas inversible.

2. – Centre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{k})$

Indication

a. Écrire la matrice $E_{i,j}$ avec le symbole de Kronecker.

b. Soit A une matrice commutant avec toutes les autres matrices. Écrire A dans la base canonique $(E_{i,j})_{i,j}$ et dire que A commute avec les matrices $E_{i,j}$.

3. – Matrices qui commutent à une matrice donnée
Indication

a. Montrer que si A n'est pas une matrice scalaire, $\mathcal{C}$ est de dimension supérieure ou égale à 2 et montrer que si $\dim \mathcal{C} \geqslant 3$ alors A est scalairee nconsidérant un endomorphisme dont $\mathcal{C}$ est le noyau.
b. On pourra discuter suivant la liberté de la famille (I_2, A, B).

4. – Matrice nilpotente et matrice inversible

Indication

Considérer $I_n - (-1)^n C^n$ pour une certaine matrice C.

5. – Matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Indication

Pour $k = 0, \ldots, n$, on a $u(X^k) = (X+1)^k$.

6. – Calcul d'inverse de matrice

Indication

Utiliser la matrice complémentaire. La dernière matrice est une matrice de permutation.

7. – Calcul de déterminant
Indication

Faire une récurrence.

8. – Déterminant de matrice par bloc

Indication

Distinguer les cas A inversible et A non inversible et faire un produit de matrices par bloc.

9. – Déterminant de matrice par bloc
Indication

Multiplier la matrice par une matrice inversible de déterminant 1. Dans le deuxième cas, remplacer A par $A - \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{k}^*$.

10. – Système avec un paramètre

Indication

Utiliser les formules de Cramer lorsque le déterminant du système est non nul.

11. – Endomorphismes de $\mathrm{M}_n(\mathbb{k})$

Indication

Appliquer ces endomorphismes à la base canonique $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{k})$.

12. – Forme linéaire de $\mathrm{M}_n(\mathbb{k})$ et matrices élémentaires

Indication

a. Montrer que $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$.
b. Déterminer $f(I_n)$, puis $f(0_n)$, étudier $f(M)$ pour $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$ puis pour $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{k})$ non inversible. Pour le dernier cas, si r est le rang de M, il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $M = PA_rQ$.

Agrégation interne de Mathématiques
Département de Mathématiques
Université de La Rochelle
F. Geoffriau

2006-2007

Exercices sur les matrices

Solutions

1. – L'inverse d'une matrice comme somme de ses puissances

Solution

a. Puisque λ_0 est non nul, on a

$$A\Big(-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}I_n - \frac{\lambda_2}{\lambda_0}A - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0}A^{k-1}\Big) = I_n$$
$$\Big(-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}I_n - \frac{\lambda_2}{\lambda_0}A - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0}A^{k-1}\Big)A = I_n$$

Donc A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0}I_n - \frac{\lambda_2}{\lambda_0}A - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0}A^{k-1}$$

b. L'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ étant de dimension n^2, la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n^2})$ est liée, donc il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n^2} \in \Bbbk$ non tous nuls tels que

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \cdots + \lambda_{n^2} A^{n^2} = 0$$

En fait d'après le théorème de Cayley-Hamilton, il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \Bbbk$ non tous nuls ($\lambda_n = 1$) tels que

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \cdots + \lambda_n A^n = 0$$

Supposons A inversible. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ non tous nuls tels que

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \cdots + \lambda_k A^k = 0$$

On pose

$$r = \min\{i \in \mathbb{N}; \quad i \leqslant k \text{ et } \lambda_i \neq 0\}$$

Alors

$$\lambda_r \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall\, i \in \{0, \dots, r-1\} \quad \lambda_i = 0$$

et

$$\begin{gathered}
\lambda_r A^r + \lambda_{r+1} A^{r+1} + \cdots + \lambda_k A^k = 0 \\
A^r(\lambda_r I_n + \lambda_{r+1} A + \cdots + \lambda_k A^{k-r}) = 0 \\
\lambda_r I_n + \lambda_{r+1} A + \cdots + \lambda_k A^{k-r} = 0
\end{gathered}$$

car A^r est inversible.

2. – Centre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{k})$
Solution

a. On a $E_{i,j} = (\delta_{i,r}\delta_{j,s})_{r,s}$ et $E_{k,\ell} = (\delta_{k,r}\delta_{\ell,s})_{r,s}$. Posons $E_{i,j}E_{k,\ell} = (a_{r,s})_{t,s}$, alors pour $r, s \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$a_{r,s} = \sum_{t=1}^{n} \delta_{i,r}\delta_{j,t}\delta_{k,t}\delta_{\ell,s} = \delta_{i,r}\delta_{j,k}\delta_{\ell,s}$$

donc

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = (\delta_{i,r}\delta_{j,k}\delta_{\ell,s})_{r,s} = \delta_{j,k}(\delta_{i,r}\delta_{\ell,s})_{r,s} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$$

b. Soit A une matrice commutant avec toutes les autres matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{k})$. On pose $A = (a_{i,j})_{i,j}$ et alors

$$A = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}E_{i,j}$$

Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$E_{i,j}A = E_{i,j} \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} a_{k,\ell}E_{k,\ell} = \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} a_{k,\ell}E_{i,j}E_{k,\ell} = \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} a_{k,\ell}\delta_{j,k}E_{i,\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{j,\ell}E_{i,\ell}$$

$$AE_{i,j} = \Big(\sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} a_{k,\ell}E_{k,\ell}\Big)E_{i,j} = \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} a_{k,\ell}E_{k,\ell}E_{i,j} = \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} a_{k,\ell}\delta_{\ell,i}E_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}$$

donc

$$a_{j,j} = a_{i,i} \quad \text{et} \quad \forall\, \ell \neq j \quad a_{j,\ell} = 0$$

Ainsi

$$a_{i,j} = \begin{cases} a_{1,1} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $A = a_{1,1} I_n$.

Réciproquement, il est clair que toute matrice scalaire commute avec l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Donc le centre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{k})$ est constitué des matrices scalaires.

3. – Matrices qui commutent à une matrice donnée
Solution

a. L'ensemble $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel qui contient A et I_2. Si A n'est pas une matrice scalaire, la famille (A, I_2) est libre et donc $\dim \mathcal{C} \geqslant 2$ et si A est une matrice scalaire, toute matrice commute avec A, donc $\mathcal{C} = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et $\dim \mathcal{C} = 4$.

Supposons que $\mathcal{C}$ est de dimension supérieure ou égale à 3. Soit φ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{k})$ qui à la matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{k})$ associe $AM - MA$. Son noyau est $\mathcal{C}$. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{k}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On a

$$\varphi(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi(E_{21}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix}$$
$$\varphi(E_{12}) = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad \varphi(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$$

L'image de φ est engendrée par ces quatre matrices. Si $\mathcal{C} = \ker(\varphi)$ est de dimension supérieure ou égale à 3, $\mathrm{im}(\varphi)$ est de dimension inférieure ou égale à 1, i.e. ces quatre matrices sont proportionnelles. Ainsi $b = c = 0$ et $a = d$, i.e. la matrice A est scalaire. Mais dans ce cas $\mathcal{C} = \mathrm{M}_2(\mathbb{k})$.

Par conséquent, $\mathcal{C}$ est de dimension 4 si A est une matrice scalaire et 2 sinon.

b. Si la famille (I_2, A, B) est liée, alors la matrice A ou la matrice B s'exprime en fonction de I_2 et de l'autre matrice. Ainsi les matrices A et B commutent, i.e. $AB = BA$.

Sinon, la famille (I_2, A, B) est libre, le commutant de C est de dimension supérieure ou égale à 3. Donc d'après la première question, C est une matrice scalaire, i.e. il existe $\lambda \in \Bbbk$ tel que $C = \lambda I_2$. Mais

$$\lambda^2 = \det(\lambda I_2) = \det(C) = \det(ABA^{-1}B^{-1}) = \det(A)\det(B)\det(A^{-1})\det(B^{-1}) = 1$$

donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$, i.e. $AB = BA$ ou $AB = -BA$.

4. – Matrice nilpotente et matrice inversible

Solution

Montrons tout d'abord que $I_n + B$ est inversible (cas particulier où $A = I_n$). Soit p l'indice de nilpotence de B, alors

$$\begin{aligned}(I_n + B)\Big(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k B^k\Big) &= \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k B^k + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k B^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k B^k + \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1} B^k \\ &= I_n + (-1)^{p-1}B^p = I_n\end{aligned}$$

De plus les matrices $I_n + B$ et $\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k B^k$ commutent, donc la matrice $I_n + B$ est inversible d'inverse la matrice $\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k B^k$.

Par récurrence, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\big(A^{-1}BA\big)^k = A^{-1}B^kA$. Donc la matrice B étant nilpotente, il en est de même de la matrice $A^{-1}BA$ avec un indice de nilpotence inférieur ou égal (en fait égal). Donc d'après ce qui précède, la matrice

$I_n + A^{-1}BA$ est inversible d'inverse

$$\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\left(A^{-1}BA\right)^k = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k A^{-1}B^k A = A^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k B^k\Big)A$$

Montrons d'une autre manière que $I_n + ABA^{-1}$ est inversible. On a

$$I_n + ABA^{-1} = AI_nA^{-1} + ABA^{-1} = A(I_n + B)A^{-1}$$

Les matrices $I_n + B$ et $I_n + ABA^{-1}$ sont donc semblables, la première étant inversible, la deuxième l'est aussi et

$$(I_n + ABA^{-1})^{-1} = \left(A(I_n + B)A^{-1}\right)^{-1} = (A^{-1})^{-1}(I_n + B)^{-1}A^{-1} = A\Big(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k B^k\Big)A^{-1}$$

5. – Matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
Solution

On a

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & C_{j-1}^0 & \cdots & \cdots & C_n^0 \\
0 & 1 & 2 & 3 & & C_{j-1}^1 & & & C_n^1 \\
0 & 0 & 1 & 3 & & \vdots & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & C_{j-1}^{j-1} & & & \vdots \\
\vdots & & & & & 0 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & C_n^n
\end{pmatrix}$$

c'est une matrice triangulaire supérieure n'ayant que des 1 sur la diagonale, son déterminant est donc égal à 1 et cette matrice est inversible.

Soit $u \in L(\mathbb{R}_n[X])$ tel que $A = \mathrm{mat}(u, \mathcal{E})$. Pour $j = 1, \ldots, n+1$, l'image de X^{j-1} par

u est

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{i,j} X^{i-1} = \sum_{i=1}^{j} \mathrm{C}_{j-1}^{i-1} X^{i-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \mathrm{C}_{j-1}^{i} X^{i} = (X+1)^{j-1}$$

Ainsi u coïncide sur la base $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ avec l'application qui à un polynôme P associe la polynôme $P(X+1)$. Puisque ce sont des applicatinos linéaires, elles coïncident partout. Ainsi

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X] \qquad u(P) = P(X+1)$$

On montre facilement que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$u^{-1}(P) = P(X-1) \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad u^k(P) = P(X+k)$$

donc

$$u^{-1}(X^{j-1}) = (X-1)^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{j-1-i}\, \mathrm{C}_{j-1}^{i} X^{i} = \sum_{i=1}^{j} (-1)^{j-i}\, \mathrm{C}_{j-1}^{i-1} X^{i-1}$$

et pour $k \in \mathbb{N}$,

$$u^k(X^{j-1}) = (X+k)^{j-1} = \sum_{i=1}^{j} k^{j-i}\, \mathrm{C}_{j-1}^{i-1} X^{i-1}$$

Et puisque $A^{-1} = \mathrm{mat}(u^{-1}, \mathcal{E})$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $A^k = \mathrm{mat}(u^k, \mathcal{E})$, on a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{j-1}\,\mathrm{C}_{j-1}^{0} & \cdots & \cdots & (-1)^{n-1}\,\mathrm{C}_{n}^{0} \\ 0 & 1 & -2 & 3 & & (-1)^{j-2}\,\mathrm{C}_{j-1}^{1} & & & (-1)^{n-2}\,\mathrm{C}_{n}^{1} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & (-1)^{j-j}\,\mathrm{C}_{j-1}^{j-1} & & & \vdots \\ \vdots & & & & & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-n}\,\mathrm{C}_{n}^{n} \end{pmatrix}$$

et pour $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = \begin{pmatrix}
1 & k & k^2 & k^3 & \cdots & k^{j-1}\,\mathrm{C}_{j-1}^0 & \cdots & \cdots & k^{n-1}\,\mathrm{C}_n^0 \\
0 & 1 & 2k & 3k^2 & & k^{j-2}\,\mathrm{C}_{j-1}^1 & & & k^{n-2}\,\mathrm{C}_n^1 \\
0 & 0 & 1 & 3k & & \vdots & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & k^{j-j}\,\mathrm{C}_{j-1}^{j-1} & & & \vdots \\
\vdots & & & & & 0 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & k^{n-n}\,\mathrm{C}_n^n
\end{pmatrix}$$

6. – Calcul d'inverse de matrice
Solution

Les trois matrices sont inversibles et leurs inverses respectifs sont

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. – Calcul de déterminant
Solution

On note Δ_n le déterminant de la matrice A_n. Alors en développant par rapport à la première ligne puis par rapport à la première colonne, on obtient

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 3 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_{n-1} - 3\Delta_{n-2}$$

L'équation caractéristique associée $r^2 - 2r + 3 = 0$ possède deux solutions complexes

$1+i\sqrt{2}$ et $1-i\sqrt{2}$. Il existe donc deux complexes λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Delta_n = \lambda(1+i\sqrt{2})^n + \mu(1-i\sqrt{2})^n$$

On a $\Delta_1 = 2$ et on peut supposer $\Delta_0 = 1$ (en effet $\Delta_2 = 1 = 2 \times 2 - 3 \times 1$). Alors

$$\lambda + \mu = 1 \quad \text{et} \quad \lambda(1+i\sqrt{2}) + \mu(1-i\sqrt{2}) = 2$$

ainsi

$$\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i\sqrt{2}$$

et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\sqrt{2}\right)(1+i\sqrt{2})^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i\sqrt{2}\right)(1-i\sqrt{2})^n$$

et Δ_n est un entier !

8. – Déterminant de matrice par bloc
Solution

En développant suivant les lignes ou les colonnes, on a

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0_{p,q} & I_q \end{pmatrix} = \det(A) \quad \text{et} \quad \det\begin{pmatrix} I_p & C \\ 0_{p,q} & B \end{pmatrix} = \det(B)$$

Supposons que A soit inversible, alors

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_{q,p} & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0_{q,p} \\ 0_{p,q} & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & A^{-1}C \\ 0_{q,p} & B \end{pmatrix}$$

donc

$$\det(M) = \det\begin{pmatrix} A & C \\ 0_{q,p} & B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & 0_{q,p} \\ 0_{p,q} & I_q \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} I_p & A^{-1}C \\ 0_{q,p} & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$$

Si A est non inversible, ses vecteurs-colonne sont liés et donc les vecteurs-colonne de la matrice M sont aussi liés, ainsi M est non inversible. Par conséquent les déterminants de A et de M sont nuls et $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

9. – Déterminant de matrice par bloc
Solution

On a

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & AD - CB \end{pmatrix}$$

La première et la troisième matrices sont triangulaires par bloc, leurs déterminants sont donc le produit des déterminants des blocs diagonaux et donc

$$\det(A^{-1}) \det(A) \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(I_n) \det(AD - BC)$$

et ainsi puisque $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$

Si la matrice A n'est pas inversible, pour tout $\lambda \in \Bbbk \setminus \mathrm{Sp}(A)$ (où $\mathrm{Sp}(A)$ désigne le spectre de A, i.e. l'ensemble des valeurs propres de A), la matrice $A - \lambda I_n$ est inversible et d'après ce qui précède,

$$\det \begin{pmatrix} A - \lambda I_n & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\big((A - \lambda I_n)D - BC\big)$$

On obtient donc deux expressions polynomiales en λ égales en une infinité de points (la matrice A a au plus n valeurs propres), elle sont donc égales partout et en particulier pour $\lambda = 0$ et ainsi

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$

10. – Système avec un paramètre
Solution

On a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(\lambda+1) & 3 & \lambda \\ 4\lambda-1 & \lambda+1 & 2\lambda-1 \\ 5\lambda-4 & \lambda+1 & 3\lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(\lambda+1) & 3 & \lambda \\ 4\lambda-1 & \lambda+1 & 2\lambda-1 \\ \lambda-3 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda+2 & 3 & \lambda \\ 2\lambda & \lambda+1 & 2\lambda-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda+2 & 3 \\ 2\lambda & \lambda+1 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 \\ \lambda-1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Le système est donc de Cramer pour λ distinct de 1, 2 et 3. Et dans ce cas

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \lambda+4 & 3 & \lambda \\ 2\lambda+4 & \lambda+1 & 2\lambda-1 \\ \lambda-1 & \lambda+1 & 3\lambda-4 \end{vmatrix} = 2\lambda^3+4\lambda^2-27\lambda+39$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2(\lambda+1) & \lambda+4 & \lambda \\ 4\lambda-1 & 2\lambda+4 & 2\lambda-1 \\ 5\lambda-4 & \lambda-1 & 3\lambda-4 \end{vmatrix} = 3\lambda^2+21\lambda-34$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2(\lambda+1) & 3 & \lambda+4 \\ 4\lambda-1 & \lambda+1 & 2\lambda+4 \\ 5\lambda-4 & \lambda+1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = -3\lambda^3+2\lambda^2+40\lambda-49$$

L'unique solution du système est le triplet

$$\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right) = \left(\frac{2\lambda^3+4\lambda^2-27\lambda+39}{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}, \frac{3\lambda^2+21\lambda-34}{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}, \frac{-3\lambda^3+2\lambda^2+40\lambda-49}{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}\right)$$

Si $\lambda = 1$, on a

$$\begin{cases} 4x+3y+z=5 \\ 3x+2y+z=6 \\ x+2y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x+5y=5 \\ 4x+4y=6 \\ z=x+2y \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=1 \\ 4=6 \\ z=x+2y=0 \end{cases}$$

Si $\lambda = 2$, on a

$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 6 \\ 7x + 3y + 3z = 8 \\ 6x + 3y + 2z = 1 \end{cases} \Longrightarrow 6 = 1$$

Si $\lambda = 3$, on a

$$\begin{cases} 8x + 3y + 3z = 7 \\ 11x + 4y + 5z = 10 \\ 11x + 4y + 5z = 2 \end{cases} \Longrightarrow 10 = 2$$

Ainsi dans les trois cas, le système n'a donc pas de solutions.

11. – Endomorphismes de $\mathrm{M}_n(\mathbb{k})$
Solution

La trace d'un endomorphisme étant indépendant de la base choisie, on considère la base canonique $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{k})$.

On pose $A=(a_{i,j})_{i,j}$ et $B=(b_{i,j})_{i,j}$.

Soit $i,j\in\{1,\dots,n\}$. Alors

$$\varphi(E_{i,j}) = AE_{i,j} = \Big(\sum_{k,\ell} a_{k,\ell}E_{k,\ell}\Big)E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}$$

$$\chi(E_{i,j}) = E_{i,j}B = E_{i,j}\sum_{k,\ell} b_{k,\ell}E_{k,\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} b_{j,\ell}E_{i,\ell}$$

$$\psi(E_{i,j}) = AE_{i,j}B = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}\Big)\Big(\sum_{r,s} b_{r,s}E_{r,s}\Big) = \sum_{k,s} a_{k,i}b_{j,s}E_{k,s}$$

donc le coefficient en position $\big((i,j),(i,j)\big)$ de la matrice de φ dans la base canonique est $a_{i,i}$, celui de la matrice de χ est $b_{j,j}$ et celui de la matrice de ψ est $a_{i,i}b_{j,j}$. Ainsi

$$\operatorname{tr}(\varphi) = \sum_{i,j} a_{i,i} = n\operatorname{tr}(A) \quad \operatorname{tr}(\chi) = \sum_{i,j} b_{j,j} = n\operatorname{tr}(B) \quad \operatorname{tr}(\psi) = \sum_{i,j} a_{i,i}b_{j,j} = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$$

Une vérification possible est de remplacer A ou B par I_n, en particulier si $A = I_n$, alors $\psi = \chi$.

12. – Forme linéaire de $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ et matrices élémentaires
Solution

a. Pour $i, j, k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$, on a $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$.
On a

$$A_rB_r = \Big(\sum_{i=1}^{r} E_{i,i}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{r} E_{i,i+1}\Big) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant r} E_{i,i}E_{j,j+1} = \sum_{i=1}^{r} E_{i,i+1} = B_r$$

$$B_rA_r = \Big(\sum_{i=1}^{r} E_{i,i+1}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{r} E_{i,i}\Big) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant r} E_{i,i+1}E_{j,j} = \sum_{i=1}^{r-1} E_{i,i+1} = \begin{cases} B_{r-1} & \text{si } r > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$B_rC_r = \Big(\sum_{i=1}^{r} E_{i,i+1}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{r} E_{i+1,i}\Big) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant r} E_{i,i+1}E_{j+1,j} = \sum_{i=1}^{r} E_{i,i} = A_r$$

b. On a $f(I_n) = f(I_n)^2$, donc $f(I_n) = 0$ ou $f(I_n) = 1$. Si $f(I_n) = 0$, alors

$$\forall\, M \in \mathrm{M}_n(\Bbbk) \quad f(A) = f(AI_n) = f(A)f(I_n) = 0$$

ce qui est impossible car f est supposée non constante. Donc $f(I_n) = 1$.

 F. Geoffriau

Puisque f est supposée non constante, il existe une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{k})$ telle que $f(M) \neq 1$ et alors

$$f(0_n) = f(M0_n) = f(M)f(0_n)$$

et donc $f(0_n) = 0$.

Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$. On a

$$f(M)f(M^{-1}) = f(MM^{-1}) = f(I_n) = 1$$

donc $f(M) \neq 0$.

Soit $r \in \{2, \ldots, n-1\}$. On a

$$\begin{gathered} f(B_1) = f(A_1B_1) = f(A_1)f(B_1) = f(B_1)f(A_1) = f(B_1A_1) = f(0_n) = 0 \\ f(B_r) = f(A_rB_r) = f(A_r)f(B_r) = f(B_r)f(A_r) = f(B_rA_r) = f(B_{r_1}) \\ f(A_r) = f(B_rC_r) = f(B_r)f(C_r) \end{gathered}$$

donc, d'après le principe de récurrence, pour tout $r \in \{1, \ldots, n\}$, on a $f(B_r) = 0$, d'où $f(A_r) = 0$.

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{k})$ de rang $r < n$. Il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $M = PA_rQ$ et

$$f(M) = f(Pa_rQ) = f(P)f(A_r)f(Q) = 0$$

Ainsi $f^{-1}(0) = \mathrm{M}_n(\mathbb{k}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$.