Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Préciser la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}^+$. On suppose que la série $\sum n^2 u_n^2$ converge.
Montrer qu'il en est de même de la série $\sum u_n$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Nature de la série $\sum u_n$, où $u_0 \in \mathbb{R}$ et où pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{n}\exp(-u_{n-1})$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}^+$ telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.
Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes réels strictement positifs.
On suppose que pour $n \geq n_0$, on a l'inégalité $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
Montrer que si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

EXERCICE 6 [Indication] [Correction]

Pour tout $\alpha > 1$, trouver un équivalent du reste $R_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$, avec $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

EXERCICE 7 [Indication] [Correction]

Pour $0 < \alpha < 1$ trouver un équivalent quand $N \to \infty$ de $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$, avec $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Pour tout $n \geq 3$, montrer que $u_n \leq \dfrac{2}{n^2}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Pour tout entier $N \geq 1$, montrer que $\displaystyle\Big(\sum_{n=1}^{N} u_n\Big)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2$

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Pour tout $n \geq 1$, montrer que $0 < u_n < \dfrac{1}{n}$, puis $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Poser $v_n = n^\alpha u_n$, et vérifier que $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.
En déduire qu'on peut écrire $\displaystyle\lim_{n\to\infty} v_n = \mu$ avec $\mu > 0$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

C'est du cours. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq \lambda v_n$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Avec $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, prouver que $\displaystyle 0 \leq \int_{N+1}^{N+p+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} u_n \leq \int_{N}^{N+p} f(x)\,\mathrm{d}x$.

En déduire $\displaystyle R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{(1-\alpha)N^{\alpha-1}}$.

Indication pour l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

Avec $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, prouver que $\displaystyle 0 \leq \int_{2}^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=2}^{N} u_n \leq \int_{1}^{N} f(x)\,\mathrm{d}x$.

En déduire $\displaystyle S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{1-\alpha} N^{1-\alpha}$ quand $N \to \infty$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Pour tout $n \geq 3$, on $n! = 2\prod_{k=3}^{n} k \leq 2\prod_{k=3}^{n} n$, c'est-à-dire $n! \leq 2n^{n-2}$.

On en déduit $u_n \leq \dfrac{2}{n^2}$. La série $\sum u_n$ est donc convergente.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Pour tout entier $N \geq 1$, et en utilisant Cauchy-Schwarz :

$$\Bigl(\sum_{n=1}^{N} u_n\Bigr)^2 = \Bigl(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} n u_n\Bigr)^2 \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{N} n^2 u_n^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2$$

La suite des sommes partielles de la série positive $\sum u_n$ est donc majorée.

On en déduit que cette série est convergente.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{n}\exp(-u_{n-1}) > 0$ et donc $0 < \exp(-u_n) < 1$.

On en déduit $0 < u_n < \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Il en découle $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(-u_{n-1}) = 1$ et donc $u_n = \dfrac{1}{n}\exp(-u_{n-1}) \sim \dfrac{1}{n}$.

Conclusion : la série $\sum u_n$ est divergente.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On constate que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \Bigl(1+\dfrac{1}{n}\Bigr)^{\alpha} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \Bigl(1+\dfrac{\alpha}{n}+\mathrm{O}\Bigl(\dfrac{1}{n^2}\Bigr)\Bigr)\Bigl(1-\dfrac{\alpha}{n}+\mathrm{O}\Bigl(\dfrac{1}{n^2}\Bigr)\Bigr) = 1+\mathrm{O}\Bigl(\dfrac{1}{n^2}\Bigr)$.

On en déduit $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \ln\Bigl(1+\mathrm{O}\Bigl(\dfrac{1}{n^2}\Bigr)\Bigr) = \mathrm{O}\Bigl(\dfrac{1}{n^2}\Bigr)$.

Ainsi la série de terme général $w_n = \ln v_{n+1} - \ln v_n$ est convergente.

On sait que cela signifie que la suite de terme général $\ln v_n$ est convergente.

Posons $\lim\limits_{n\to\infty} \ln v_n = \lambda$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \mu$ avec $\mu = \exp\lambda > 0$.

On en déduit $u_n \sim \dfrac{\mu}{n^{\alpha}}$.

Par comparaison avec les séries de Riemann, on peut conclure : $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

L'hypothèse s'écrit : $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \dfrac{u_n}{v_n}$.

La suite de terme général $q_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ est donc décroissante, au moins à partie de n_0.

On en déduit $0 \leq q_n \leq \lambda = q_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi : $\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq \lambda v_n$.

Dans ces conditions on sait que la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

Corrigé de l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

On a $u_n = f(n)$, où l'application $x \to f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ est positive décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On en déduit, pour tout $n \geq 2$: $0 \leq \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq u_n \leq \int_{n-1}^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

On somme de $n = N+1$ à $n = N+p$: $0 \leq \displaystyle\int_{N+1}^{N+p+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} u_n \leq \int_N^{N+p} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Une primitive de f est $x \to F(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ car $\alpha > 1$.

Avec ces notations : $0 \leq F(N+p+1) - F(N+1) \leq \displaystyle\sum_{n=N+1}^{N+p} u_n \leq F(N+p) - F(N)$.

On en déduit, quand $p \to +\infty$: $0 \leq -F(N+1) \leq R_N \leq -F(N)$.

Or $-F(N+1) \sim -F(N) = \dfrac{1}{(1-\alpha)N^{\alpha-1}}$.

Conclusion : pour tout $\alpha > 1$, un équivalent de $R_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est $\dfrac{1}{(1-\alpha)N^{\alpha-1}}$.

Corrigé de l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

On a $u_n = f(n)$, où l'application $x \to f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ est positive décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On en déduit, pour tout $n \geq 2$: $0 \leq \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq u_n \leq \int_{n-1}^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

On somme de $n = 2$ à $n = N$: $0 \leq \displaystyle\int_2^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=2}^{N} u_n \leq \int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x$.

Une primitive de f est $x \to F(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)}x^{1-\alpha}$. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ car $0 < \alpha < 1$.

Avec ces notations : $0 \leq F(N+1) - F(2) + u_1 \leq S_N \leq F(N) - F(1) + u_1$.

Or $F(N+1) \sim F(N) = \dfrac{1}{1-\alpha}N^{1-\alpha}$.

On en déduit $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{1-\alpha}N^{1-\alpha}$ quand $N \to \infty$.