Suites et séries de fonctions

Sommaire

I Convergence simple ou uniforme

On considère des applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

On note $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications bornées de I dans $\mathbb{K}$.

C'est un sous-espace de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ de toutes les fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

C'est un espace vectoriel normé quand on le munit de la norme dite *de la convergence uniforme* et définie par : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} \|f(x)\|$.

Définition *(Convergence simple)*

On dit que la suite (f_n) est simplement convergente (en abrégé CVS) si pour tout x de I la suite de terme général $f_n(x)$ est convergente dans $\mathbb{K}$.

Si on pose, pour tout x de I, $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, on dit que l'application $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est la *limite simple* de la suite (f_n).

Remarque

Avec les notations précédentes, l'application g est définie sur I par :

$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$.

On notera que l'entier n_0 est fonction à la fois de ε et de x.

Définition *(Convergence uniforme)*

On dit que la suite (f_n) est *uniformément convergente* (en abrégé CVU) s'il existe une application $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ telle que :
- À partir d'un certain rang, $f_n - g$ appartient à $B(I, \mathbb{K})$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - g\|_\infty = 0$.

Remarque

Avec les notations précédentes, l'application g est définie sur I par :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, \|f_n - g\|_\infty \leq \varepsilon$, ou encore :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, \forall x \in I, |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$.

On notera que l'entier n_0 est fonction seulement de ε.

Définition *(Convergence sur un sous-intervalle)*

Soit J un sous-intervalle de I.
- On dit que la suite (f_n) converge simplement (resp. uniformément) sur J si la suite des restrictions des f_n à J est simplement (resp. uniformément) convergente.
- On dit que la suite (f_n) est uniformément convergente *sur tout compact* si, pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, la suite (f_n) est uniformément convergente sur $[a, b]$.

Remarques

- Bien sûr, si la suite (f_n) est uniformément convergente vers g sur I, elle converge uniformément sur tout compact vers g et elle est simplement convergente vers g sur I. Les réciproques sont fausses.
- En général, on commence par vérifier que la suite (f_n) converge simplement, sur I, vers une fonction g. On examine ensuite si la convergence est uniforme sur I, ou sinon sur certains sous-intervalles J de I.
- Si on sait que la suite (f_n) converge simplement sur I vers g et si pour tout entier n, au moins à partir d'un certain rang, on sait trouver un élément x_n de I tel que la suite $f_n(x_n) - g(x_n)$ ne converge pas vers 0, alors il n'y a pas convergence uniforme sur I.

Proposition *(Critère de Cauchy de convergence uniforme)*

La suite (f_n) est uniformément convergente sur I si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que : } \begin{cases} \forall n \geq n_0 \\ \forall p \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad \begin{cases} f_{n+p} - f_n \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}) \\ \|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leq \varepsilon \end{cases}$$

Cela équivaut à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \begin{cases} \forall n \geq n_0 \\ \forall p \in \mathbb{N} \\ \forall x \in I \end{cases}, \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

II Propriétés des suites de fonctions convergentes

Proposition *(Convergence des suites de fonctions à valeurs complexes)*

Soit (f_n) une suite de fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Soient g_n et h_n les fonctions réelles définies par $g_n = \mathrm{Re}\,(\mathrm{f_n})$ et $h_n = \mathrm{Im}\,(f_n)$.

De même, soient g et h les fonctions réelles définies par $f = g + ih$.

La suite (f_n) converge simplement vers $f \Leftrightarrow$:
- La suite (g_n) converge simplement vers g.
- La suite (h_n) converge simplement vers h.

(même résultat avec la convergence uniforme et la convergence uniforme sur tout compact.)

Proposition *(Limites et convergence uniforme)*

On suppose que la suite des fonctions $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est uniformément convergente sur I, vers une application g.

Soit a un élément de I. On suppose que pour tout entier n, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lambda_n$.

Dans ces conditions :
- La suite (λ_n) est convergente vers un élément λ de $\mathbb{K}$.
- La limite de g en a existe et : $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n$.

On peut exprimer ce résultat en écrivant :

$\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\Big) = \lim\limits_{x\to a}\Big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\Big)$ (interversion des limites.)

Proposition *(Continuité et convergence uniforme)*

Si la suite de fonctions $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est uniformément convergente sur I, et si les applications f_n sont continues en un point a de I, alors la limite g est continue en a.

Bien sûr, si les (f_n) sont continues sur I, g est continue sur I.

Ces propriétés restent vraies en cas de convergence uniforme sur tout compact.

Remarque

On peut utiliser cette propriété pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme :

Si la suite (f_n) converge simplement vers g, si les f_n sont continues en un point a, mais si g n'est pas continue en a, alors il n'y a pas convergence uniforme.

Proposition *(Convergence uniforme et intégration)*

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, uniformément convergente sur tout compact de I vers une application g. Soit a un point quelconque de I.

La suite des fonctions $F_n : x \to \displaystyle\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$ est uniformément convergente, sur tout compact de l'intervalle I, vers l'application $G : x \to \displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$.

En particulier, pour tous points a et b de I : $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

Remarque

Cette propriété est parfois utilisée pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme.

Proposition *(Convergence uniforme et dérivation)*

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I, telle que :
– La suite (f_n') est uniformément convergente sur tout compact de I vers une fonction g.
– Il existe x_0 dans I tel que la suite $(f_n(x_0))$ soit convergente.
Sous ces hypothèses :
– La suite (f_n) est uniformément convergente sur tout compact de I, vers une fonction f.
– Cette fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée de f est $f' = g$.
On peut donc écrire l'égalité, valable sur I : $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$.

III Approximations uniformes classiques

Proposition

Toute application continue par morceaux sur $[a,b]$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite d'applications en escaliers.

Proposition

Si f est continue sur $[a,b]$, elle est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite d'applications continues affines par morceaux.

Proposition *(Théorème de Weierstrass)*

Toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales.

Proposition

Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$, T-périodique, est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynômes trigonométriques complexes, c'est-à-dire de fonctions s'écrivant sous la forme de sommes finies $f_n(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k \exp(2i\pi k\,\frac{x}{T})$.

IV Convergence simple des séries de fonctions

Définition *(Sommes partielles)*

Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$.

Pour tout entier N, on définit l'application $S_N : I \to \mathbb{K}$, par $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$.

Les fonctions S_N sont appelées *sommes partielles* de la *série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} f_n$.

Définition *(Convergence simple)*

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est *simplement convergente* sur I si la suite de fonctions (S_N) est simplement convergente sur I.

Cela revient à dire que pour tout x de I, la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est convergente dans $\mathbb{K}$.

Définition *(Somme et restes d'une série de fonctions convergente)*

Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions convergente.

– La limite S de la suite (S_N) est appelée *somme* de cette série, et notée $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.
  Elle est donc définie par : $\forall x \in I, S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
– Pour tout N de $\mathbb{N}$, on appelle *reste d'ordre* N de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ la fonction R_N définie par : $\forall x \in I, R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)$.

Remarques

– Avec les notations précédentes, on a : $\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in I : S(x) = S_N(x) + R_N(x)$.
  Par définition, la suite (R_N) converge simplement sur I vers la fonction nulle.
– On abrège souvent "convergence simple" en CVS.
– Il y a d'autres modes de convergence pour les séries de fonctions. Mais quand on dira qu'une série de fonctions est convergente, sans précision supplémentaire, ce sera pour la convergence simple.

V Séries de fonctions : autres modes de convergence

Définition *(Convergence absolue)*

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est *absolument convergente* sur I si pour tout x de I la série numérique $\sum_{n\geq 0} |f_n(x)|$ est convergente dans $\mathbb{R}^+$.

Proposition

Si une série de fonctions est absolument convergente, alors elle est simplement convergente.

Définition *(Convergence uniforme)*

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est *uniformément convergente* sur I si la suite (S_N) des sommes partielles est uniformément convergente sur I.

Proposition

Si une série de fonctions est uniformément convergente, elle est simplement convergente.

Remarque

Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions, simplement convergente.

Pour tout N de $\mathbb{N}$, soit $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n$ le reste d'indice N de cette série.

Dire que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ est uniformément convergente sur I, c'est dire que la suite (R_N) converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

Cela équivaut à écrire : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall N \geq N_0, \forall x \in I,$ $\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\right| \leq \varepsilon.$

Proposition *(Critères nécessaires de convergence)*

Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement (resp. uniformément) sur I, alors la suite (f_n) converge simplement (resp. uniformément) sur I vers la fonction nulle.

Remarque

La propriété précédente est souvent utilisée pour démontrer qu'une série de fonctions n'est pas simplement convergente ou qu'elle n'est pas uniformément convergente.

Définition *(Convergence normale)*

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est *normalement convergente* sur I s'il existe une série $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ de $\mathbb{R}^+$, convergente, telle que pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de I, $|f_n(x)| \leq \alpha_n$.
Cela revient à dire que la série numérique $\sum_{n\geq 0} \sup_{x\in I} |f_n(x)|$ est convergente.

Proposition

Si une série de fonctions est normalement convergente, alors elle est uniformément convergente et elle est absolument convergente. En particulier, elle est simplement convergente.

Définition *(Convergence sur un sous-intervalle)*

Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$. Soit J un sous-intervalle de I.

Pour tout entier n, soit g_n la restriction de f_n à J.

- On dit que $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement (resp. absolument, uniformément, normalement) sur J si $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ converge simplement (resp. absolument, uniformément, normalement).
- On dit par exemple que $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ est uniformément convergente sur tout compact si pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ est uniformément convergente sur $[a, b]$.

Remarque

On abrège souvent les modes de convergences précédents en CVA, CVU et CVN.

On a vu que la comparaison entre les différents modes de convergence des séries de fonction se résume en les implications : $CVN \Rightarrow CVA \Rightarrow CVS$ et $CVN \Rightarrow CVU \Rightarrow CVS$.

Toutes les réciproques de ces implications sont fausses.

De même, il n'y a aucune implication en général entre CVU et CVA.

VI Propriétés des séries de fonctions convergentes

Proposition *(Séries de fonctions à valeurs complexes)*

Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{C}$. On pose $g_n = \mathrm{Re}\,(\mathrm{f_n})$ et $h_n = \mathrm{Im}\,(f_n)$.
La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ est CVS (resp. CVA, CVU, CVN) $\Leftrightarrow$ les séries $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} h_n$ sont CVS (resp. CVA, CVU, CVN).

On a alors, pour tout x de I : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(x) + i \sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(x)$.

Proposition *(Opérations sur les séries de fonctions)*

Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

Soient α et β deux éléments de $\mathbb{K}$.

Si les séries $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ sont CVS (resp. CVA, CVU, CVN) sur I, alors la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} (\alpha f_n + \beta g_n)$ est CVS (resp. CVA, CVU, CVN) sur I.

On a alors, pour tout x de I : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha f_n + \beta g_n)(x) = \alpha \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) + \beta \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(x)$.

Proposition *(Continuité de la somme d'une série d'applications)*

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose que la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ est uniformément convergente sur tout compact.

- Si les (f_n) sont continues en un point x_0 de I, alors $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue en x_0.
- En particulier : si les f_n sont continues sur I, la somme $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur I.

Remarque

Les deux propriétés précédentes peuvent parfois être utilisées pour montrer qu'une série de fonctions n'est pas uniformément convergente.

Proposition *(Intégration de la somme d'une série d'applications)*

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$, continues sur I.
On suppose que la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ est uniformément convergente sur tout compact.

Alors pour tous a, b de I on a l'égalité : $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Proposition *(Dérivabilité de la somme d'une série d'applications)*

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que :

– Il existe au moins un x_0 de I tel que la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge.

– La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n'$ est uniformément convergente sur tout compact de I.

Alors on a les résultats suivants :

– La série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ est uniformément convergente sur tout compact de I.

– La somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

– Sur tout l'intervalle I, on a l'égalité : $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'$.