Opérations sur des suites de carré sommable

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$.

Un élément u de $\mathcal{S}$ sera noté $u = (u_n)_{n\geq 1}$.

On note $\mathcal{S}_1$ le sous ensemble de $\mathcal{S}$ formé des suites u telles que la série $\sum u_n$ soit convergente.

On note $\mathcal{S}_2$ le sous ensemble de $\mathcal{S}$ formé des suites u telles que la série $\sum u_n^2$ soit convergente.

Pour tout élément $u = (u_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{S}$, on note :
- $\Delta(u)$ la suite de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour $n \geq 1$.
- $\nabla(u)$ la suite définie par $w_1 = v_1$ et $w_n = v_n - v_{n-1}$ si $n \geq 2$.
  On constate que pour tout $n \geq 2$, $w_n = (u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1}) = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}$.

Pour tout élément u de $\mathcal{S}_2$, on note $\sigma(u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_1$ n'est pas inclus dans $\mathcal{S}_2$, et que $\mathcal{S}_2$ n'est pas inclus dans $\mathcal{S}_1$. [S]
2. Montrer que $\mathcal{S}_1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. [S]
3. (a) Montrer que si les suites u, v sont dans $\mathcal{S}_2$, alors la suite p de terme général $p_n = u_n\, v_n$ est dans $\mathcal{S}_1$. [S]
   (b) En déduire que $\mathcal{S}_2$ est muni d'une structure d'espace vectoriel. [S]
   (c) Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{S}_2$ en posant $< u, v > = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$. [S]
4. Montrer que les restrictions de Δ et de ∇ à $\mathcal{S}_2$ sont des endomorphismes de $\mathcal{S}_2$.
   Pour toute suite u de $\mathcal{S}_2$, on notera $J_0(u) = \sigma(u)$, $J_1(u) = \sigma(\Delta(u))$ et $J_2(u) = \sigma(\nabla(u))$. [S]
5. On considère la suite u de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$.
   (a) Rappeler la valeur de $J_0(u)$. [S]
   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. En déduire $J_1(u) = \dfrac{\pi^2}{3} - 3$. [S]
   (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)} = \frac{3}{4}$. En déduire $J_2(u) = \pi^2 - \dfrac{19}{2}$. [S]
   (d) Contrôler qu'on a bien l'inégalité $J_1(u)^2 \leq J_0(u)J_2(u)$. [S]
6. Dans cette question, on va déterminer les valeurs propres de la restriction de Δ à $\mathcal{S}_2$, et les vecteurs propres associés.
   (a) Soit u un élément de $\mathcal{S}_2$, vecteur propre de Δ pour une valeur propre λ (autrement dit : u n'est pas la suite nulle et $\Delta(u) = \lambda u$.)
   Montrer que $-2 < \lambda < 0$ et que u est une suite géométrique de raison $\lambda + 1$. [S]
   (b) Etablir la réciproque. En déduire le spectre de la restriction de Δ à $\mathcal{S}_2$. [S]

(c) Soit u un élément de $\mathcal{S}_2$, vecteur propre de Δ pour une valeur propre λ.
Calculer $J_0(u)$, $J_1(u)$, $J_2(u)$, et vérifier l'inégalité $J_1(u)^2 \le J_0(u)J_2(u)$. [S]

7. Soient u un élément $\mathcal{S}_2$. On note $v = \Delta(u)$ et $w = \nabla(u)$. Montrer que $J_1(u) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n\, w_n$. [S]

8. Soit u un élément quelconque de $\mathcal{S}_2$.

   (a) En utilisant la question précédente, montrer l'inégalité $2J_1(u) \le J_0(u) + J_2(u)$. [S]

   (b) Existe-t-il des suites de $\mathcal{S}_2$ qui satisfont à l'égalité $2J_1(u) = J_0(u) + J_2(u)$? [S]

9. Soit u un élément quelconque de $\mathcal{S}_2$. Montrer que $J_1(u)^2 \le J_0(u)J_2(u)$. [S]

Corrigé du problème

1. – La suite de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est dans $\mathcal{S}_1$ mais pas dans $\mathcal{S}_2$.
   En effet la série $\sum u_n$ converge (grâce au critère spécial des séries alternées) mais la série $\sum u_n^2$ diverge (c'est la série harmonique).
   L'ensemble $\mathcal{S}_1$ n'est donc pas inclus dans l'ensemble $\mathcal{S}_2$.

   – La suite $u = \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est dans $\mathcal{S}_2$ mais pas dans $\mathcal{S}_1$, car $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge mais pas $\sum \dfrac{1}{n}$.
   L'ensemble $\mathcal{S}_2$ n'est donc pas inclus dans l'ensemble $\mathcal{S}_1$.

   [Q]
2. $\mathcal{S}_1$ est de manière évidente non vide (la suite nulle est dans $\mathcal{S}_1$) et stable par combinaisons linéaires : si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, il en est de même des séries $\sum(\lambda u_n+\mu v_n)$.
   $\mathcal{S}_1$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$. [Q]
3. (a) Pour tout entier N, Cauchy-Schwarz permet d'écrire :
   $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} |u_n\, v_n|\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{N} u_n^2 \sum_{n=1}^{N} v_n^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2.$
   Par majoration des sommes partielles, on en déduit la convergence de la série de terme général $|u_n\, v_n|$, c'est-à-dire la convergence absolue de la série $\sum p_n$, ce qu'il fallait démontrer. [Q]

   (b) On montre que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.
   La suite nulle est évidemment dans $\mathcal{S}_2$.
   Soient u, v deux éléments de $\mathcal{S}_2$, et soient λ, μ deux réels quelconques.
   Les séries $\sum u_n^2$, $\sum v_n^2$ et $\sum u_n\, v_n$ sont convergentes (pour cette dernière, d'après la question précédente). On en déduit que la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)^2$ est convergente, ce qui prouve que $\lambda u + \mu v$ appartient à $\mathcal{S}_2$.
   Conclusion : $\mathcal{S}_2$ est muni d'une structure d'espace vectoriel. [Q]

   (c) La question 2-a prouve l'existence de $< u, v >$, pour tous éléments u et v de $\mathcal{S}_2$.
   L'application $(u, v) \mapsto < u, v >$ est de manière évidente bilinéaire et symétrique.
   Il est clair aussi que $< u, u > = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ est ≥ 0 et n'est nul que si la suite u est nulle.
   Conclusion : on a bien défini un produit scalaire sur $\mathcal{S}_2$. [Q]
4. Si u est un élément de $\mathcal{S}_2$, c'est-à-dire si la série $\sum u_n^2$ converge, alors les séries $\sum u_{n+1}^2$ et $\sum u_{n-1}^2$ convergent (il ne s'agit que d'une translation d'indice !).
   Les suites $n \mapsto u_{n+1}$ et $n \mapsto u_{n-1}$ sont donc éléments de $\mathcal{S}_2$.
   Puisque $\mathcal{S}_2$ est un espace vectoriel, la suite $\Delta(u)$ est un élément de $\mathcal{S}_2$.
   De la même manière, la suite $\nabla(u)$ appartient à $\mathcal{S}_2$ (à un indice près, elle se déduit de la suite $\Delta(u)$ comme la suite $\Delta(u)$ se déduit de u.)
   L'ensemble $\mathcal{S}_2$ est donc stable par les applications Δ et ∇.
   Enfin la linéarité de Δ et de ∇ (et donc de leurs restrictions à $\mathcal{S}_2$) est évidente. [Q]

5. (a) On sait bien sûr que $J_0(u)$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, est égal à $\dfrac{\pi^2}{6}$. [Q]

(b) Pour tout $N\geq 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\Bigl(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Bigr)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{N+1}$.

Quand on fait tendre N vers $+\infty$, on trouve : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

Puisque $u_n=\dfrac{1}{n}$, $v=\Delta(u)$ est définie par $v_n=u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}$.

On trouve facilement :

$$\begin{aligned}J_1(u)&=\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\Bigr)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n(n+1)}\Bigr)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\Bigl(\frac{\pi^2}{6}-1\Bigr)+\frac{\pi^2}{6}-2=\frac{\pi^2}{3}-3.\end{aligned}$$ [Q]

(c) Pour tout entier $N\geq 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{(n+1)(n-1)}&=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\Bigl(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\Bigr)=\frac{1}{2}\Bigl(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}-\sum_{n=3}^{N+1}\frac{1}{n}\Bigr)\\&=\frac{1}{2}\Bigl(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\Bigr)\end{aligned}$$

Quand on fait tendre N vers $+\infty$, on trouve : $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n-1)}=\frac{3}{4}$.

Notons w la suite $\nabla(u)$.

On a $w_1=v_1=u_2-u_1=-\dfrac{1}{2}$ et, $\forall n\geq 2$, $w_n=u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n-1}$.

On en déduit :

$$J_2(u)=\sum_{n=1}^{\infty}w_n^2=\frac{1}{4}+\sum_{n=2}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n-1}\Bigr)^2$$

$$=\frac{1}{4}+\sum_{n=2}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{4}{(n+1)n}-\frac{4}{n(n-1)}+\frac{2}{(n+1)(n-1)}\Bigr)$$

$$=\frac{1}{4}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}+4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n}$$ [Q]

$$-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n}+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n-1)}$$

$$=\frac{1}{4}+\Bigl(\frac{\pi^2}{6}-1-\frac{1}{4}\Bigr)+4\Bigl(\frac{\pi^2}{6}-1\Bigr)+\frac{\pi^2}{6}-4\Bigl(1-\frac{1}{2}\Bigr)-4+2\cdot\frac{3}{4}=\pi^2-\frac{19}{2}.$$

(d) On constate que :

$$J_0(u)J_2(u) - J_1(u)^2 = \frac{\pi^2}{6}\Big(\pi^2 - \frac{19}{2}\Big) - \Big(\frac{\pi^2}{3} - 3\Big)^2 = \frac{\pi^4}{18} + \frac{5\pi^2}{12} - 9 \approx 0.524 > 0$$

On a donc bien vérifié l'inégalité : $J_1(u)^2 \le J_0(u)J_2(u)$. [Q]

6. (a) Par hypothèse, et pour tout entier $n \ge 1$: $u_{n+1} - u_n = \lambda u_n$.
On en déduit $u_{n+1} = (\lambda+1)u_n$ et donc, pour tout $n \ge 1$: $u_n = (\lambda+1)^{n-1}\, u_1$.
Autrement dit, la suite u est géométrique de raison $\lambda + 1$.
Mais par hypothèse, la série $\sum u_n^2$ est convergente.
Cela exige $|\lambda+1| < 1$, c'est-à-dire $-2 < \lambda < 0$. [Q]

(b) Soit u une suite géométrique de raison q, avec $|q| < 1$.
De cette manière la suite u est dans $\mathcal{S}_2$.
Pour tout $n \ge 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = (q-1)u_n$. Ainsi $\Delta(u) = (q-1)u$.
La suite u (qui n'est pas nulle si on choisit $u_1 \neq 0$) est donc vecteur propre de Δ pour la valeur propre $q-1$ (elle même élément de $]-2,0[$.)
Conclusion : le spectre de la restriction de Δ à $\mathcal{S}_2$ est $]-2,0[$. Pour chaque valeur propre λ, le sous-espace propre est l'ensemble des suites géométriques de raison $\lambda+1$ (c'est une droite vectorielle, engendrée par la suite de terme général $(\lambda+1)^n$.) [Q]

(c) – On sait que pour tout entier $n \ge 1$, $u_n = (\lambda+1)^{n-1}u_1$, avec $u_1 \neq 0$.
On en déduit $J_0(u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = u_1^2 \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+1)^{2n} = u_1^2 \frac{1}{1-(\lambda+1)^2} = -u_1^2 \frac{1}{\lambda(\lambda+2)}$.

– On sait que $v = \Delta(u) = \lambda u$.
On en déduit $J_1(u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 = \lambda^2 J_0(u) = -u_1^2 \frac{\lambda}{\lambda+2}$.

– Notons $w = \nabla(u)$. Par définition $w_1 = v_1 = \lambda u_1$.
D'autre part, pour tout $n \ge 2$, $w_n = v_n - v_{n-1} = \lambda(u_n - u_{n-1}) = \lambda v_{n-1} = \lambda^2 u_{n-1}$.

On en déduit $J_2(u) = \lambda^2 u_1^2 + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} w_n^2 = \lambda^2 u_1^2 + \lambda^4 \sum_{n=2}^{\infty} u_{n-1}^2 = \lambda^2 u_1^2 + \lambda^4 J_0(u)$.

Ainsi $J_2(u) = \lambda^2 u_1^2 - \lambda^3 u_1^2 \dfrac{1}{\lambda+2} = u_1^2 \dfrac{2\lambda^2}{\lambda+2}$.

– On constate que $J_1(u)^2 - J_0(u)J_2(u) = \dfrac{\lambda^2 u_1^4}{(\lambda+2)^2} + \dfrac{u_1^2}{\lambda(\lambda+2)}\,\dfrac{2\lambda^2 u_1^2}{\lambda+2} = u_1^4 \dfrac{\lambda}{\lambda+2}$.

Cette quantité est négative car $\lambda \in]-2,0[$.
On a donc l'inégalité $J_1(u)^2 \le J_0(u)J_2(u)$.
[Q]

7. On sait que la suite w est dans $\mathcal{S}_2$ (voir question 4.)
D'après la question 3-a, cela implique la convergence de la série $\sum u_n\, w_n$.
Dans le calcul suivant, toutes les séries sont convergentes :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} u_n\, w_n &= u_1 w_1 + \sum_{n=2}^{\infty} u_n\,(v_n - v_{n-1}) = u_1 v_1 + \sum_{n=2}^{\infty} u_n\, v_n - \sum_{n=2}^{\infty} u_n\, v_{n-1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n\, v_n - \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}\, v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1})\, v_n = -\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 = -J_1(u).\end{aligned}$$

[Q]

8. (a) Il suffit d'évaluer la différence et d'utiliser le résultat précédent.

   $$J_0(u) + J_2(u) - 2J_1(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} u_n\, w_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + w_n)^2 \geq 0$$

   On a donc démontré l'inégalité $2J_1(u) \leq J_0(u) + J_2(u)$. [Q]

   (b) Notons que la suite nulle convient. Nous allons vérifier que c'est la seule.
   On suppose donc que $2J_1(u) = J_0(u) + J_2(u)$.
   Comme cela résulte de la question précédente, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + w_n)^2 = 0$.
   Autrement dit, et pour tout $n \geq 1$, $u_n + w_n = 0$.
   Or $w_1 = v_1 = u_2 - u_1$. On en déduit $u_2 = 0$.
   D'autre part, pour tout $n \geq 2$, on a $w_n + u_n = u_{n+1} - u_n + u_{n-1}$.
   La suite u satisfait donc à une récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $t^2 - t + 1 = 0$, dont une racine complexe est $t = \exp \dfrac{i\pi}{3}$.
   On en déduit l'existence de scalaires α, β tels que, $\forall n \geq 1, u_n = \alpha \cos \dfrac{n\pi}{3} + \beta \sin \dfrac{n\pi}{3}$.
   Ainsi la suite u est périodique. Mais pour qu'elle soit élément de $\mathcal{S}_2$, il faut au moins qu'elle converge vers 0 : cela n'est possible que si u est la suite nulle.
   Conclusion :
   La seule suite u de $\mathcal{S}_2$ qui vérifie l'égalité $2J_1(u) = J_0(u) + J_2(u)$ est la suite nulle. [Q]

9. D'après la question (a), on peut écrire $J_1(u)^2 = \Big(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n w_n\Big)^2$.

   Or pour tout entier N, et grâce à Cauchy-Schwarz $\Big(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n w_n\Big)^2 \leq \sum_{n=1}^{N} u_n^2 \sum_{n=1}^{N} w_n^2$.

   En faisant tendre N vers $+\infty$, on trouve : $\Big(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n w_n\Big)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} w_n^2$.

   On a donc prouvé l'inégalité : $J_1(u)^2 \leq J_0(u) J_2(u)$. [Q]