

Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass

1. Pour tout n de \mathbb{N} , et tout k de $\{0, \dots, n\}$, on pose $R_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

(a) Prouver les trois égalités suivantes :

$$\sum_{k=0}^n R_{n,k}(x) = 1, \quad \sum_{k=0}^n k R_{n,k}(x) = nx, \quad \sum_{k=0}^n k(k-1) R_{n,k}(x) = n(n-1)x^2. \quad [\text{S}]$$

(b) En déduire l'égalité : $\sum_{k=0}^n (k-nx)^2 R_{n,k}(x) = nx(1-x)$. [\[S\]](#)

2. Soit f une application continue sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{K} .

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |y - x| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Indication : raisonner par l'absurde et introduire un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites (x_n) et (y_n) de $[a, b]$ telles que $|y_n - x_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$. [\[S\]](#)

3. Soit f une application définie et continue sur $[0, 1]$, à valeurs dans \mathbb{K} .

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) R_{n,k}(x)$.

On dit que les $B_n(f)$ sont les polynômes de Bernstein de f .

On va montrer que la suite $(B_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

On se donne $\varepsilon > 0$. On sait d'après la question précédente qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |y - x| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

(a) Montrer que $f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) R_{n,k}(x)$. [\[S\]](#)

(b) Soit x un élément de $[0, 1]$. On note $A = \left\{k \in \{0, \dots, n\}, \left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \alpha\right\}$.

Soit B le complémentaire de A dans $\{0, \dots, n\}$.

i. Montrer que $\sum_{k \in A} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(x) \leq \varepsilon$. [\[S\]](#)

ii. Prouver $\alpha^2 \sum_{k \in B} R_{n,k}(x) \leq \sum_{k \in B} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 R_{n,k}(x) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n (nx - k)^2 R_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n}$ [\[S\]](#)

iii. Prouver que $\sum_{k \in B} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$. [\[S\]](#)

iv. Montrer finalement que $\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$. [\[S\]](#)

(c) En déduire que la suite $(B_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$. [\[S\]](#)

4. Montrer plus généralement le *théorème de Weierstrass* :

Toute application g continue sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{K} est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynomiales. [\[S\]](#)

Corrigé du problème

1. (a) – On utilise la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^n R_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1$$

- Remarquons que le résultat demandé est évident si $n = 0$.

On utilise la relation, vraie si $n \geq k \geq 1$:

$$k C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} = n C_{n-1}^{k-1}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k R_{n,k}(x) &= \sum_{k=1}^n k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= nx \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k} = nx(x + (1-x))^{n-1} = nx. \end{aligned}$$

- Remarquons que le résultat demandé est évident si $n = 0$ ou $n = 1$.

On utilise la relation, vraie si $n \geq k \geq 2$:

$$k(k-1) C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!} = n(n-1) C_{n-2}^{k-2}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k(k-1) R_{n,k}(x) &= \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= n(n-1)x^2 \sum_{k=2}^n C_{n-2}^{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k} \\ &= n(n-1)x^2 \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-2-k} \\ &= n(n-1)x^2(x + (1-x))^{n-2} = n(n-1)x^2. \end{aligned}$$

[Q]

- (b) On constate l'égalité $(k - nx)^2 = k(k-1) + (1-2nx)k + n^2x^2$.

On peut alors utiliser les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 R_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^n (k(k-1) + (1-2nx)k + n^2x^2) R_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n k(k-1) R_{n,k}(x) + (1-2nx) \sum_{k=0}^n k R_{n,k}(x) + n^2x^2 \sum_{k=0}^n R_{n,k}(x) \\ &= n(n-1)x^2 + (1-2nx)nx + n^2x^2 = -nx^2 + nx = nx(1-x). \end{aligned}$$

[Q]

2. On suppose, par l'absurde, que la propriété évoquée par l'énoncé n'est pas vraie.

Il existe donc un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$ on puisse trouver x et y dans $[a, b]$ tels que $|y - x| \leq \alpha$ mais tels que $|f(y) - f(x)| \geq \varepsilon$.

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_n, y_n) \in [a, b]^2, \begin{cases} |y_n - x_n| \leq \frac{1}{n} \\ |f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon \end{cases}$

De la suite de terme général $z_n = (x_n, y_n)$ du compact $[a, b]^2$ de \mathbb{R}^2 on peut extraire une suite convergente $z'_n = (x'_n, y'_n)$.

Avec ces notations, il existe donc une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $x'_n = x_{\varphi(n)}$ et $y'_n = y_{\varphi(n)}$.

Les inégalités $|y'_n - x'_n| \leq \frac{1}{\varphi(n)}$ et le fait que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = +\infty$ impliquent que les suites convergentes (x'_n) et (y'_n) ont la même limite ℓ .

La continuité de f permet alors d'écrire $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y'_n) = f(\ell)$, ce qui est absurde car par hypothèse $|f(y'_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$ pour tout entier n . [Q]

3. (a) On sait que $\sum_{k=0}^n R_{n,k}(x) = 1$. Le résultat est alors évident :

$$f(x) - B_n(f)(x) = f(x) \sum_{k=0}^n R_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) R_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) R_{n,k}(x)$$

[Q]

- (b) i. Pour tout élément x de A , on a $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \alpha$ donc $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \varepsilon$.

$$\text{On en déduit : } \sum_{k \in A} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(x) \leq \varepsilon \sum_{k \in A} R_{n,k}(x).$$

Cette expression est majorée par $\varepsilon \sum_{k=0}^n R_{n,k}(x)$ c'est-à-dire par ε . [Q]

- ii. Pour tout x de B , on a $\left|x - \frac{k}{n}\right| \geq \alpha$.

$$\text{On en déduit } \sum_{k \in B} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 R_{n,k}(x) \geq \alpha^2 \sum_{k \in B} R_{n,k}(x). \text{ D'autre part :}$$

$$\sum_{k \in B} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 R_{n,k}(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k \in B} (nx - k)^2 R_{n,k}(x) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n (nx - k)^2 R_{n,k}(x)$$

$$\text{Autrement dit : } \sum_{k \in B} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 R_{n,k}(x) \leq \frac{1}{n^2} nx(1-x).$$

Enfin, pour tout x de $[0, 1]$, on a $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

$$\text{On en déduit } \sum_{k \in B} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 R_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n}. \text{ [Q]}$$



iii. On majore $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$ par $2\|f\|_\infty$.

D'après la question précédente on a : $\alpha^2 \sum_{k \in B} R_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n}$.

On en déduit : $\sum_{k \in B} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(x) \leq 2\|f\|_\infty \sum_{k \in B} R_{n,k}(x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$. [Q]

iv. Pour tout x de $[0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) R_{n,k}(x) \right| \leq \sum_{k=0}^n \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(x) \\ &\leq \sum_{k \in A} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(x) + \sum_{k \in B} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| R_{n,k}(x) \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}. \end{aligned}$$

Puisque c'est vrai sur $[0, 1]$, on peut écrire : $\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$. [Q]

(c) On commence par se donner $\varepsilon > 0$ et on en déduit l'existence d'un réel $\alpha > 0$ pour lequel l'inégalité précédente est vérifiée pour tout $n \geq 1$.

Il suffit alors de choisir un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} \leq \varepsilon$.

On a alors, pour tout $n \geq n_0$: $\|f - B_n(f)\|_\infty \leq 2\varepsilon$.

On en déduit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - B_n(f)\|_\infty = 0$.

Autrement dit, la suite $(B_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$. [Q]

4. Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$, continue.

On utilise le changement de variable $t = a + x(b - a)$.

Quand x parcourt $[0, 1]$, t parcourt $[a, b]$.

Le changement de variable inverse est donné par $x = \frac{t-a}{b-a}$.

Pour tout x de $[0, 1]$, on pose $f(x) = g(a + x(b - a))$.

L'application f est continue sur $[0, 1]$: il existe donc une suite de polynômes $x \rightarrow P_n(x)$ (par exemple les polynômes de Bernstein de f) uniformément convergente vers f sur $[0, 1]$.

On pose alors, pour tout n de \mathbb{N} et tout t de $[a, b]$: $Q_n(t) = P_n\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$.

Les Q_n sont des applications polynômiales et : $\sup_{t \in [a, b]} |g(t) - Q_n(t)| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - P_n(x)|$.

Cette quantité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Conclusion : la suite des polynômes Q_n est uniformément convergente vers g sur $[a, b]$, ce qui achève la démonstration du théorème de Weierstrass. [Q]