Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence, et somme, de la série entière $\sum a_n z^n$, avec $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (2+(-1)^n)^n$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2n+1}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence, et somme sur l'intervalle ouvert de convergence, de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n\theta}{n} x^n$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ où $a_n = \dfrac{1}{n}\cos\Big(\dfrac{\pi}{4} + n\dfrac{\pi}{2}\Big)$.
NB : on donnera deux méthodes différentes.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

On considère une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence 1, de somme $S(x)$.
On suppose que la série $\sum a_n$ est convergente, et on veut montrer que la série $\sum a_n x^n$ est uniformément convergente sur le segment $[0,1]$.

1. Traiter le cas particulier où les a_n sont tous positifs ou nuls.
2. Traiter le cas où $a_n = (-1)^n \lambda_n$, la suite (λ_n) étant décroissante et convergente vers 0.
3. Traiter le cas général. On pourra poser $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ pour tout entier n.
4. Que peut on en déduire pour $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $[0,1]$, et notamment pour $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$?

Exercice 6 [Indication] [Correction]

On pose $a_0 > 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Montrer que la série entière converge en $x = -1$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\Big)$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n a_n = 2$. Conclusion ?

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Le rayon de convergence est égal à $\frac{1}{3}$. On trouve $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{x}{1-x^2} + \frac{1}{1-9x^2}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On a $R=1$. Poser $T(x) = xS(x^2)$ et calculer $T'(x)$.

En déduire $S(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ sur $]0,1[$. Sur $]-1,0[$, considérer $U(x) = xS(-x^2)$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Poser $u_n(x) = \operatorname{Im} \frac{(xe^{i\theta})^n}{n}$. Montrer que $U'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \frac{\cos\theta - x}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$.

Obtenir finalement $\forall x \in]-1,1[,\ U(x) = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

- On a $a_n = \operatorname{Re} b_n$, avec $b_n = \frac{1+i}{n\sqrt{2}} i^n$. Montrer que $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(ix)^n$.
  Dériver $T(x)$, puis intégrer les parties réelle et imaginaire de $T'(x)$.
  En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\arctan x + \ln\sqrt{1+x^2})$.
- Calculer a_{2p} et a_{2p+1}. Séparer en deux séries et reconnaître deux séries classiques.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

3. Vérifier que $S_{n,p}(x) = \sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k = r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} r_k (x^{k+1} - x^k) - r_p x^p$.
   Montrer que la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
4. On en déduit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

1. Montrer que la suite (a_n) est convergente vers $\ell = 0$. En déduire $R = 1$.
2. Pour $x = -1$, utiliser le critère spécial des séries alternées.
3. Montrer que $a_n - \ln(1+a_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{a_n^2}{2}$.
   Utiliser la convergence au sens de Césaro pour $u_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}$.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Si $n = 2p$, alors $a_n = a_{2p} = 3^{2p}$. Si $n = 2p+1$, alors $a_n = a_{2p+1} = 1$.

$\sum a_n x^n$ est donc la somme de $\displaystyle\sum_{p\geq 0} a_{2p}x^{2p} = \sum_{p\geq 0}(3x)^{2p}$ et de $\displaystyle\sum_{p\geq 0} a_{2p+1}x^{2p+1} = \sum_{p\geq 0} x^{2p+1}$.

La première converge si $|3x| < 1$, diverge sinon, et sa somme est $\dfrac{1}{1-9x^2}$.

Quant à la seconde, elle converge si $|x| < 1$, diverge sinon et sa somme est $\dfrac{x}{1-x^2}$.

Le rayon de convergence R de la série $\sum a_n$ est donc égal à $\dfrac{1}{3}$, minimum des deux rayons.

Conclusion : pour $|x| < \dfrac{1}{3}$ on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{x}{1-x^2} + \frac{1}{1-9x^2}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Avec $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ donc $R = 1$.

Sur $]-1,1[$, posons $T(x) = xS(x^2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Par dérivation on trouve, $\forall x \in]-1,1[, T'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\Big)$.

Puis, par intégration terme à terme :

$\forall x \in]-1,1[, xS(x^2) = T(x) = \dfrac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

On en déduit : $\forall x \in]0,1[, S(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ln \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

Pour obtenir l'expression de $S(x)$ sur $]-1,0[$, il faut poser $U(x) = xS(-x^2)$.

Ainsi pour tout x de $]-1,1[, U(x) = xS(-x^2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$.

On en déduit : $\forall x \in]-1,0[, S(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x}} \arctan\sqrt{-x}$. Notons d'autre part que $S(0) = 1$.

On a ainsi obtenu S sur tout $]-1,1[$. Deux expressions sont nécessaires suivant qu'on se place sur $]0,1[$ ou sur $]-1,0[$ mais on ne doit pas oublier que S (en tant que somme d'une série entière réelle de rayon de convergence 1) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout l'intervalle $]-1,1[$.

Les sommes partielles de la série définissant S donnent le développement limité de S à tout ordre en 0. On trouve ainsi à l'ordre 4 : $S(x) = 1 + \dfrac{x}{3} + \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{x^3}{7} + \dfrac{x^4}{9} + \mathrm{O}(x^5)$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Pour x réel, posons $u_n(x) = \dfrac{\cos n\theta}{n}\,x^n = \mathrm{Im}\,(z_n(x))$, avec $z_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n}x^n = \dfrac{(x\mathrm{e}^{i\theta})^n}{n}$.

Les deux séries entières $\sum u_n(x)$ et $\sum z_n(x)$ ont le même rayon de convergence R.

C'est celui de $\sum \dfrac{t^n}{n}$, c'est-à-dire 1. $x \mapsto Z(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(x)$ est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

On peut dériver terme à terme et on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[,\ Z'(x) = \mathrm{e}^{i\theta}\sum_{n=1}^{+\infty}(x\mathrm{e}^{i\theta})^{n-1} = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{1-x\mathrm{e}^{i\theta}} = \frac{(1-x\mathrm{e}^{-i\theta})\mathrm{e}^{i\theta}}{|1-x\mathrm{e}^{i\theta}|^2} = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}-x}{1-2x\cos\theta+x^2}.$$

On prend la partie réelle et on trouve, pour tout x de $]-1,1[$:

$$U'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \frac{\cos\theta - x}{1-2x\cos\theta+x^2} = -\frac{1}{2}\frac{(1-2x\cos\theta+x^2)'}{1-2x\cos\theta+x^2}.$$

Avec $U(x)=0$, on obtient : $\forall x \in]-1,1[,\ U(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n}\,x^n = -\frac{1}{2}\ln(1-2x\cos\theta+x^2)$.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

– **Première méthode :** on va passer par les nombres complexes.

  On pose $b_n = \dfrac{1}{n}\exp\left(\dfrac{i\pi}{4}+n\dfrac{i\pi}{2}\right) = \dfrac{1+i}{n\sqrt{2}}\,i^n$. Pour tout entier n, on a : $a_n = \mathrm{Re}\,\mathrm{b_n}$.

  Le rayon de $\sum \dfrac{z^n}{n}$ est 1. Il en est donc de même de $\sum b_n x^n$ et de $\sum a_n x^n$.

  Pour tout x de l'intervalle $]-1,1[$, posons $T(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(ix)^n$.

  On dérive : $\forall x \in]-1,1[, T'(x) = \dfrac{i-1}{\sqrt{2}}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(ix)^{n-1} = \frac{i-1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{1-ix} = \frac{i-1}{\sqrt{2}}\,\frac{1+ix}{1+x^2}$

  On intègre : $\forall x \in]-1,1[, T(x) = \dfrac{i-1}{\sqrt{2}}(\arctan x + i\ln\sqrt{1+x^2})$

  On prend la partie réelle : $\forall x \in]-1,1[,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\arctan x + \ln\sqrt{1+x^2})$

– **Deuxième méthode**

  On évalue a_n suivant les différentes valeurs de n et on sépare en deux séries distinctes.

  On a : $a_{2p} = \dfrac{1}{2p}\cos\Big(\dfrac{\pi}{4}+p\pi\Big) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\dfrac{(-1)^p}{2p}$ et $a_{2p+1} = \dfrac{1}{2p+1}\cos\Big(\dfrac{3\pi}{4}+p\pi\Big) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\dfrac{(-1)^{p+1}}{2p+1}$

  On reconnait deux séries classiques. Pour tout x de $]-1,1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{p}(x^2)^p - \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}x^{2p+1} = -\frac{\ln(1+x^2)}{2\sqrt{2}} - \frac{\arctan x}{\sqrt{2}}$$

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. Si les a_n sont tous positifs, alors : $\forall x \in [0,1], |a_n x^n| = a_n |x|^n \le a_n$.
   La série $\sum a_n x^n$ est donc normalement (donc uniformément convergente) sur $[0,1]$.
2. Ici $a_n = (-1)^n \lambda_n x^n$ et on applique le critère des séries alternées pour tout x de $[0,1]$.
   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right| \le |a_{n+1} x^{n+1}| \le \lambda_{n+1} \to 0$ quand $n \to \infty$.
   La suite des restes $R_n(x)$ converge donc uniformément vers 0 sur $[0,1]$, ce qui traduit la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la série $\sum a_n x^n$.
3. Dans le cas général, soit n un entier positif ou nul quelconque.
   On cherche à majorer $S_{n,p}(x) = \sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k$ uniformément sur $[0,1]$.
   $$\begin{aligned} S_{n,p}(x) &= \sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{p} (r_{k-1} - r_k) x^k = \sum_{k=n+1}^{p} r_{k-1} x^k - \sum_{k=n+1}^{p} r_k x^k \\ &= \sum_{k=n}^{p-1} r_k x^{k+1} - \sum_{k=n+1}^{p} r_k x^k = r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} r_k (x^{k+1} - x^k) - r_p x^p \end{aligned}$$
   On se donne un réel $\varepsilon > 0$. On sait que la suite de terme général (r_n) converge vers 0.
   Il existe donc un entier n_0 tel que $n \ge n_0 \Rightarrow |r_n| \le \varepsilon$.
   On en déduit, en choisissant $p \ge n \ge n_0$, et pour tout x de $[0,1]$:
   $$\begin{aligned} |S_{n,p}(x)| &= \left| r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} r_k (x^{k+1} - x^k) - r_p x^p \right| \\ &\le |r_n|\, x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} |r_k|\, (x^k - x^{k+1}) + |r_p|\, x^p \\ &\le \varepsilon \Big(x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^k - x^{k+1}) + x^p \Big) = 2\varepsilon x^{n+1} \le 2\varepsilon \end{aligned}$$
   Avec $n \ge n_0$ et $x \in [0,1]$ fixés, on fait tendre p vers $+\infty$.
   On trouve : $\forall n \ge n_0, \forall x \in [0,1], \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \le 2\varepsilon$.
   Cela signifie que la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
4. La CVU $\Rightarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ est continue sur $[0,1]$ donc en 1 : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   Exemples :
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \to 1-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \lim_{x \to 1-} \ln(1+x) = \ln 2$.
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x \to 1-} \arctan x = \frac{\pi}{4}$.

Corrigé de l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

1. On sait que pour tout $x > 0$, on a : $0 < \ln(1+x) < x$.
   On en déduit, $0 < a_1 < a_0$, puis par une récurrence évidente : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_{n+1} < a_n$.
   Ainsi la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et à termes positifs.
   On en déduit qu'elle est convergente dans $\mathbb{R}^+$. Posons $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
   Si on passe à la limite dans $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$ on trouve $\ell = \ln(1+\ell)$ et donc $\ell = 0$.
   Ce résultat permet d'écrire $a_{n+1} = \ln(1+a_n) \underset{n\to\infty}{\sim} a_n$.
   Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$: le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est égal à 1.
2. Pour $x = -1$, la série s'écrit $\sum (-1)^n x^n$.
   C'est une série convergente en vertu du critère spécial des séries alternées.
3. On a $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n a_{n+1}}$. Or $a_n \to 0 \Rightarrow a_n - \ln(1+a_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{a_n^2}{2}$.
   De même $a_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} a_n$. On en déduit $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$.
   Posons $u_n = \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n-1}}$. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{1}{2}$ (Césaro).
   Or $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_0}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{na_n}$. On en déduit $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 2$, c'est-à-dire $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$.
   Conclusion : la série entière $\sum a_n x^n$ est divergente en $x = 1$.