Fonction Zéta de Riemann

Pour x réel, on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. On définit ainsi la fonction *Zeta* de Riemann.

Partie I

Dans cette partie, on étudie sommairement les variations de la fonction ζ.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction ζ ? [S]
2. Montrer que la fonction ζ est strictement décroissante. [S]
3. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 1+} \zeta(x) = +\infty$. [S]
4. (a) Montrer que pour tout $x \geq 2$ et tout $N \geq 1$ on a : $1 \leq \zeta(x) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. [S]
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \zeta(x) = 1$. [S]
5. Montrer que la fonction ζ est convexe. [S]
6. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x > 1, \zeta^{(p)}(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^p}{n^x}$.

   Retrouver ainsi le résultat des questions 2 et 5. [S]
7. Représenter sommairement la courbe représentative de la fonction ζ. [S]

Partie II

Dans cette partie, on étudie plus précisément le comportement de la fonction ζ en 1 et en $+\infty$, et on établit sa dérivabilité à tout ordre.

1. Pour $n \geq 2$ et $x > 0$, montrer les inégalités $\displaystyle\int_n^{n+1} t^{-x}\,\mathrm{d}t \leq n^{-x} \leq \int_{n-1}^{n} t^{-x}\,\mathrm{d}t$. [S]
2. En déduire que pour $x > 1$ et $N \geq 2$ on a : $\dfrac{N^{1-x}}{x-1} \leq \displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{(N-1)^{1-x}}{x-1}$. [S]
3. Montrer que lorsque x tend vers $+\infty$, alors $\zeta(x) - 1 \sim 2^{-x}$. [S]
4. Déduire de la question II-2 que $\zeta(x) \sim \dfrac{1}{x-1}$ quand x tend vers 1. [S]

Partie III

Dans cette partie, on améliore le résultat de la question II-4

On définit une série de fonctions $\sum f_n$ par : $f_n(x) = n^{-x} - \displaystyle\int_n^{n+1} t^{-x}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite de terne général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ est convergente.

   Sa limite est notée γ et on l'appelle la *constante d'Euler* ($\gamma \approx 0.5772156649$). [S]

2. Prouver que pour $n \geq 1$ et $x > 0$ on a : $0 \leq f_n(x) \leq n^{-x} - (n+1)^{-x}$. [S]
3. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ est convergente sur $]0, +\infty[$. [S]
4. Soit S la somme de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   Montrer que $S(1) = \gamma$ et donner l'expression de $S(x)$ quand $x > 1$. [S]
5. Prouver que la convergence de la série $\sum f_n$ est uniforme sur $[1, +\infty[$. [S]
6. En déduire que lorsque x tend vers 1 alors $\zeta(x) - \dfrac{1}{x-1}$ tend vers γ. [S]

Corrigé du problème

Partie I

1. Pour tout x réel, la série définisant $\zeta(x)$ est une série de référence de Riemann.
   Une telle série est convergente si et seulement si $x > 1$.
   Le domaine de définition de la fonction ζ est donc $]1, +\infty[$. [Q]
2. Soient x et y deux réels tels que $1 < x < y$.
   Pour tout $n \geq 2$, on a alors $\dfrac{1}{n^y} < \dfrac{1}{n^x}$.
   En sommant pour $n \geq 2$, on trouve $1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^y} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, c'est-à-dire $\zeta(y) < \zeta(x)$.
   La fonction ζ est donc strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. [Q]
3. La fonction ζ étant décroissante sur $]1, +\infty[$, elle admet une limite en 1 à droite.
   Cette limite est un réel λ si ζ est majorée, et $+\infty$ sinon.
   Par l'absurde, supposons $\lim\limits_{x \to 1+} \zeta(x) = \lambda \in \mathbb{R}$.
   Alors, toujours en vertu de la décroissante de ζ, on a : $\forall x > 1, \zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq \lambda$.
   On en déduit, pour tout $x > 1$ et pour tout N de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \lambda$.
   On peut faire tendre x vers 1 dans cette inégalité car la somme est finie.
   On en déduit que pour tout entier N de $\mathbb{N}^*$ on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq \lambda$.
   Mais c'est absurde, car la série harmonique diverge. On a en effet $\lim\limits_{N \to +\infty} \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty$.
   On en déduit donc bien que $\lim\limits_{x \to 1+} \zeta(x) = +\infty$. [Q]
4. (a) Il est clair que pour tout $x > 1$, on a $\zeta(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x} \geq 1$.

   Soit N un entier strictement positif. Pour tout $x \geq 2$, on a l'inégalité $\dfrac{1}{n^x} \leq \dfrac{1}{n^2}$.

   Ainsi : $\forall x \geq 2,\ 1 \leq \zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. [Q]

   (b) **Première variante :**

   On sait que l'application ζ est décroissante et minorée (par 1 par exemple.)

   On en déduit que $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} \zeta(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ (et même $\ell \geq 1$.)

   On fait d'abord tendre x vers $+\infty$ dans le résultat de la question précédente.

   On en déduit : $\forall x \geq 2, 1 \leq \ell \leq 1 + \displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

   On fait enfin tendre N vers $+\infty$ dans ce résultat et on trouve $\ell = 1$.

Deuxième variante :

On reprend l'encadrement obtenu dans la question (4a). On se donne $\varepsilon > 0$.

Puisque $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, il existe un entier N_0 tel que $\displaystyle 0 \leq \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour cet entier N_0, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n^x} = 1$ (limite dans une somme finie.)

Il existe donc un réel $x_0 \geq 2$ tel que $\displaystyle x \geq x_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n^x} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$.

On en déduit : $x \geq x_0 \Rightarrow 1 \leq \zeta(x) \leq 1 + \varepsilon$. Il en découle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.

Remarque : dans cette variante on n'utilise pas la monotonie de ζ. [Q]

5. Rappelons qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe sur l'intervalle I si :

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Pour tout $a > 0$, l'application $x \mapsto \varphi(x) = a^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ donc sur $]1, +\infty[$ car $\varphi''(x) = (\ln a)^2\, a^x \geq 0$ (condition suffisante de convexité.)

En particulier, les applications $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

On en déduit : $\forall x, y > 1, \forall n \in \mathbb{N}^* :\ f_n(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_n(x) + (1-\lambda) f_n(y)$.

Si on somme ces inégalités pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\forall x > 1, \forall y > 1, \zeta(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda \zeta(x) + (1-\lambda)\zeta(y)$$

L'application ζ est donc convexe sur $]1, +\infty[$.

Remarque : dans cette méthode, il n'a pas été nécessaire d'utiliser $\zeta''(x) \geq 0$ (d'ailleurs on n'a encore pas établi la dérivabilité de la fonction ζ.) [Q]

6. Pour $n \geq 1$ et tout réel x, posons $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$. Notons que $f_1' \equiv 0$.

Les applications f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$: $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n^{(p)}(x) = \dfrac{(-\ln n)^p}{n^x}$.

Soit $a > 1$. On a alors : $\forall n \geq 2, \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq a, \left| f_n^{(p)}(x) \right| \leq \dfrac{(\ln n)^p}{n^a}$.

Or $\lambda_n = \dfrac{(\ln n)^p}{n^a}$ est le terme général d'une série convergente (série de Bertrand.)

Ainsi les séries $\sum f_n^{(p)}$ sont CVN (donc CVU) convergentes sure $[a, +\infty[$ quand $a > 1$.

On peut donc appliquer indéfiniment le théorème de dérivation des séries de fonctions.

On en déduit que l'application ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ et donc sur $]1, +\infty[$, et qu'on peut dériver la somme terme à terme à tout ordre.

Ainsi : $\displaystyle\forall x > 1, \forall p \in \mathbb{N}^*, \zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n^{(p)}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^p}{n^x}$.

On constate en particulier que :

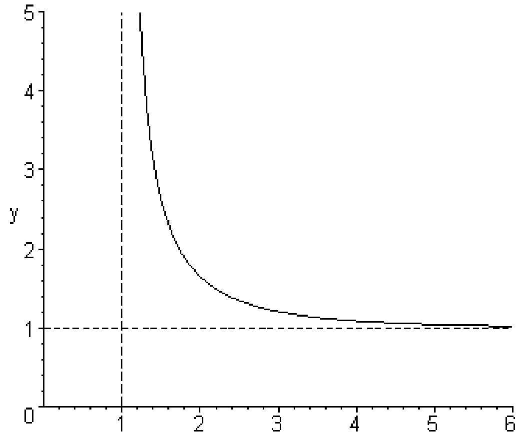
– $\forall x > 1, \zeta'(x) = -\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{n^x} < 0$: la fonction ζ est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

– $\forall x > 1, \zeta''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(\ln n)^2}{n^x} > 0$: la fonction ζ est convexe sur $]1, +\infty[$.

[Q]

7. Les questions précéentes donnent une idée de la courbe $y = \zeta(x)$.

   Pour l'instant le seul point connu sur la courbe est $(2, \dfrac{\pi^2}{6})$.



[Q]

Partie II

1. L'application $t \mapsto t^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et décroissante.

   Pour $n \le t \le n+1$ on a donc $t^{-x} \le n^{-x}$ puis $\displaystyle\int_n^{n+1} t^{-x}\,\mathrm{d}t \le n^{-x}$ par intégration.

   De même, on a $n^{-x} \le t^{-x}$ si $t \in [n-1, n]$, puis $n^{-x} \le \displaystyle\int_{n-1}^{n} t^{-x}\,\mathrm{d}t$ par intégration. [Q]

2. Soit N et M deux entiers, avec $2 \le N \le M$.
   Reprenons l'encadrement vu dans la question II-1.

   Par sommation de $n = N$ à $n = M$: $\displaystyle\int_N^{M+1} t^{-x}\,\mathrm{d}t \le \sum_{n=N}^{M} \frac{1}{n^x} \le \int_{N-1}^{M} t^{-x}\,\mathrm{d}t$.

   Quand $M \to +\infty$, sachant que $x > 1$, on obtient : $\displaystyle\int_N^{+\infty} t^{-x}\,\mathrm{d}t \le \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \le \int_{N-1}^{+\infty} t^{-x}\,\mathrm{d}t$.

   Mais une primitive de $t \mapsto t^{-x}$ est $t \mapsto \dfrac{t^{1-x}}{1-x}$. Donc $\displaystyle\int_N^{+\infty} t^{-x}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_N^{+\infty} = \frac{N^{1-x}}{x-1}$.

   On a donc bien obtenu, pour $x > 1$ et $N \ge 2$: $\dfrac{N^{1-x}}{x-1} \le \displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^x} \le \frac{(N-1)^{1-x}}{x-1}$. [Q]

3. Pour tout $x > 1$, on a déjà l'inégalité : $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \geq 1 + \frac{1}{2^x}$.

   Avec $N = 3$, la question II-2 donne : $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{2^{1-x}}{x-1}$ c'est-à-dire $\zeta(x) - 1 - \dfrac{1}{2^x} \leq \dfrac{2^{1-x}}{x-1}$.

   On a donc l'encadrement : $0 \leq \zeta(x) - 1 - \dfrac{1}{2^x} \leq \dfrac{2}{x-1} 2^{-x}$.

   Ainsi, quand $x \to +\infty$ on trouve $\zeta(x) - 1 - \dfrac{1}{2^x} = \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{2^x}\Big)$. On en déduit $\zeta(x) - 1 \sim 2^{-x}$. [Q]

4. Avec $N = 2$, l'encadrement vu en II-2 donne : $1 + \dfrac{2^{1-x}}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

   Autrement dit : $x - 1 + 2^{1-x} \leq (x-1)\zeta(x) \leq x$.

   On en déduit $\displaystyle\lim_{x \to 1} (x-1)\zeta(x) = 1$, c'est-à-dire $\zeta(x) \sim \dfrac{1}{x-1}$ quand x tend vers 1. [Q]

Partie III

1. On sait que la suite (u_n) a même nature que la série $\sum v_n$ avec $v_n = u_n - u_{n-1}$.

   Or $v_n = \dfrac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n} - \ln\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big) = \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.

   La série $\sum v_n$, dominée par une série de Riemann, est convergente.

   Il en est donc de même de la suite (u_n). On note $\displaystyle\lim_{n \to \infty} u_n = \gamma$. [Q]

2. On utilise le résultat de la question II-1.

   On sait que $\displaystyle\int_n^{n+1} t^{-x} \, \mathrm{d}t \leq n^{-x}$. On en déduit $f_n(x) \geq 0$.

   On a également $(n+1)^{-x} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} t^{-x} \, \mathrm{d}t$. On en déduit $f_n(x) \leq n^{-x} - (n+1)^{-x}$. [Q]

3. Pour tout $x > 0$, et quand n tend vers $+\infty$, on a :

$$n^{-x} - (n+1)^{-x} = n^{-x}\Big(1 - \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{-x}\Big) = n^{-x}\Big(1 - \Big(1 - \frac{x}{n} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\Big) \sim \frac{x}{n^{x+1}}$$

   La série de terme général $n^{-x} - (n+1)^{-x}$ est donc convergente pour tout $x > 0$ (par comparaison avec une série de Riemann).

   On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ est convergente sur $\mathbb{R}^{+*}$. [Q]

4. – On $f_n(1) = \dfrac{1}{n} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$.

   On en déduit, pour tout entier $N \geq 1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} f_n(1) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N+1)$.

   On fait tendre N vers $+\infty$ et d'après III-1 on en déduit que $S(1) = \gamma$.

– Pour tout réel $x > 1$ et tout entier $N \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(x) = \sum_{n=1}^{N}\Big(n^{-x} - \int_n^{n+1} t^{-x}\,\mathrm{d}t\Big) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x} - \int_1^{N+1} t^{-x}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x} - \Big[\frac{t^{1-x}}{1-x}\Big]_1^{N+1}$$

On fait tendre N vers $+\infty$ et on en déduit : $\forall x > 1, S(x) = \zeta(x) - \dfrac{1}{x-1}$.

[Q]

5. Soit N et M deux entiers avec $1 \leq N \leq M$.

   On somme l'encadrement $0 \leq f_n(x) \leq n^{-x} - (n+1)^{-x}$ de $n = N$ à $n = M$.

   On en déduit $0 \leq \displaystyle\sum_{n=N}^{M} f_n(x) \leq N^{-x} - (M+1)^{-x}$.

   Si on fait tendre M vers $+\infty$, on trouve (avec $x > 0$) : $0 \leq \displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x) \leq \frac{1}{N^x}$.

   Si on suppose $x \geq 1$ on en déduit, pour tout $N \geq 1$: $0 \leq R_N(x) = \displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x) \leq \frac{1}{N}$.

   Ainsi la suite des restes R_N de la série $\sum f_n$ converge uniformément vers la fonction nulle. Cela signifie la convergence uniforme de la série $\sum f_n$ sur $[1, +\infty[$. [Q]

6. Le convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[1, +\infty[$ et la continuité des applications f_n impliquent que la somme S est continue sur $[1, +\infty[$ et au particulier au point 1.

   Or on a $S(1) = \gamma$ et $S(x) = \zeta(x) - \dfrac{1}{x-1}$ si $x > 1$.

   La continuité de S en 1 s'écrit donc : $\displaystyle\lim_{x\to 1+}\Big(\zeta(x) - \frac{1}{x-1}\Big) = \gamma$. [Q]