Cours de Calcul Différentiel pour la Licence de Mathématiques

Prof. Assohoun ADJE

Abidjan, le 19 octobre 2016

Table des matières

Chapitre 1

Différentiabilité

1.1 Dérivée directionnelle

Soit E un espace vectoriel normé, U un ouvert de E, $f : U \subset E \to F$ une application, $a \in U$ et $u \in E$.

Définition 1. *On dit que f admet une dérivée dans la direction u au point a si la fonction*

$$t \to \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} \tag{1.1}$$

admet une limite lorsque t tend vers 0.

On pose alors :

$$f'(a;u) = lim_{t\to 0}\frac{f(a+tu)-f(a)}{t} \tag{1.2}$$

Le vecteur $f'(a;u) \in F$ est appelée dérivée directionnelle de f en a dans la direction u.

1.2 Notion de Différentielle

1.2.1 Définitions et exemples

Soient E et F des espaces de Banach sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ normés respectivement par $|.|_E$ et $|.|_F$, U un ouvert de $E, a \in U$ et $f : U \to F$ une application.

Lemme 1. *Il existe au plus une application linéaire continue $T : E \to F$ telle que*

$$f(a+h) - f(a) = T(h) + |h|_E\,\varphi(h) \tag{1.3}$$

où φ, définie dans un voisinage de 0 dans E et à valeurs dans F, est telle que,

$$\lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0. \tag{1.4}$$

Démonstration. Soient T_1 et $T_2 : E \to F$ deux applications linéaires continues qui satisfont à la condition du 1.

Soit $v \in E$. U étant ouvert et a étant dans U, il existe un réel $t_0 > 0$ suffisamment petit tel que $a + tv \in U$ pour tout $0 < t < t_0$. Soit $0 < t < t_0$, posons $h = tv$. Nous avons l'existence de fonctions φ_i, $1 \leq i \leq 2$ v'erifiant la condition

$$\lim_{h \to o_E} \varphi_i(h) = o_F$$

et

$$f(a+h) - f(a) = T_i(h) + |h|_E \, \varphi_i(h).$$

Posons $T = T_1 - T_2$. En retranchant les deux epressions de $f(a+h) - f(a)$, nous trouvons :

$$T(h) = |h|_E (\varphi_2 - \varphi_1)(h)$$

et, puisque $h = tv$, la linéarité de T permet d'avoir

$$tT(v) = t\,|v|_E (\varphi_2(tV) - \varphi_1(tv))$$

qui, après simplification par $t > 0$, donne

$$T(v) = |v|_E (\varphi_2(tV) - \varphi_1(tv)).$$

En prenant la limite des deux membres lorsque t tend vers o_E, nous obtenons $T(v) = 0$. Comme ceci est vrai $\forall v \in E$, nous avons $T_1 = T_2$.

Définition 2. *On dit que f est différentiable au point a s'il existe $T \in L(E)$ et φ qui vérifient les relations du Lemme 1. Dans ce cas, l'application linéaire T est appelée différentielle de f au point a.Elle est notée $f'(a)$ ou $Df(a)$.*

Proposition 1. *Si f est différentiable au point a, elle admet une dérivée directionnelle au point a dans toute direction u.*

Démonstration f étant différentiable en a, il existe une fonction φ définie dans un voisinage de 0_E telle que par tout vecteur $u \in E$ et par tout réel t assez petit

$$f(a+tu) - f(a) = t\ f'(a)u + |t|\,\|u\|\,\varphi(u) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0.$$

D'où

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} = f'(a).u.$$

D'où $f'(a;u)$ existe et $f'(a;u) = f'(a).u$.

Remarque :

Une fonction f peut être continue en un point a, avoir des dérivées directionnelles relativement à tout vecteur $u \in E$, l'application $\varphi : E \to F \quad u \to f'(a;u)$ peut être linéaire, continue sans que f soit différentiable au point a. Cette affirmation est confirmée par l'exemple suivant.

Exemple :

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \ f(x,y)=\begin{cases}\frac{|y|\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{(x^2+y^2)^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad \text{si} & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

En faisant le changement de variable :

$$x=r\cos\theta\ \ ,\ \ \ y=r\sin\theta \qquad \theta>0\ ,\ \text{ on a}$$

$$f(x,y)=\frac{r^2\left|\sin\theta\right|}{r^2+\sin^2\theta}=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

. f est continue au point $a=(0,0)$

En effet

$$\frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}=\frac{r^2\left|\sin\theta\right|}{r^2+\sin^2\theta}\leq\frac{f\left|\sin\theta\right|}{2f\left|\sin\theta\right|}=\frac{1}{2}$$

car de $0\leq(r-\left|\sin\theta\right|)^2=r^2{+}\sin\theta{-}2r\left|\sin\theta\right|$ on tire que $2r\left|\sin\theta\right|\leq r^2{+}\sin^2\theta$.

D'où $0\leq f(x,y)\leq\frac{1}{2}\|(x,y)\|$ où $\|(.)\|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ est donc continue en $(0,0)$.

Pour tout $(u,v)\in R^2$, $f'((0,0)(u,v)$ existe. Le vérifiier. Pourtant f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Définition 3. **(i)** *Si f est continue sur U, on dit que f est de classe C^0 sur U.*

(ii) *Si f est différentiable en tout point $a\in U$, on dit que f est différentiable sur U. Dans ce cas l'application*

$$f':U\longrightarrow \pounds(E;F)\quad ,\quad a\longrightarrow f'(a)$$

s'appelle la dérivée de f.

(iii) *Si f' est continue, on dit que f est de classe C^1.*

(iv) *Si A est une partie pas nécessairement ouverte, on dit que f est différentielle (resp. de classe C^1) dans A si f est la restriction à A d'une application différentiable (resp. de classe $C1$) dans un ouvert contenant A dans F.*

Comme $\varphi(h)$ tend vers 0_F quand h tend vers 0_E, on déduit de (1.3) que $\varepsilon>0$ étant donné, il existe $\delta>0$ tel que

$$|h|<\delta\Longrightarrow\left|f(a+h)-f(a)-T(h)\right|_F<|h|_E\,\varepsilon \tag{1.5}$$

Ceci nous amène à la définition suivante :

Définition 4. *On dit que $f:U\longrightarrow F$ est strictement différentiable au point $a\in U$ s'il existe $\Lambda\in\mathcal{L}(E,F)$ telle que $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ tel que :*

$$\forall x,y\in U,\ \ \left.\begin{array}{l}|x-a|<\delta\\|y-a|<\delta\end{array}\right\}\Longrightarrow\left|f(x)-f(y)-\Lambda(x-y)\right|_F<\varepsilon\left|x-y\right|_E \tag{1.6}$$

En prenant $x=a$ et $y=a+h$ dans (1.6), on obtient (1.5), de telle sorte que toute application strictement différentiable en a est également différentiable en a.

1.2.2 Exemples

Exemple 1. *Si a et b son deux réels tels que $a < b$ et $f :]a, b[\longrightarrow F$ est une application*

différentiable, pour tout $a < x < b, f'(x) : \mathbb{R} \longrightarrow F$ est une application linéaire et continue. Cependant $f'(x)$ étant linéaire, nous avons, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$f'(x).t = f'(x)(t.1) = t(f'(x).1).$$

Par suite $f'(x)$ est la multiplication (à droite) par le vecteur $f'(x).1 \in F$. D'ailleurs il est possible d'identifier $f'(x)$ et le vecteur $f'(x).1 \in F$. grâce à l'isomorphisme canonique $\mathcal{L}(\mathbb{R}, F) \simeq F$.

Exemple 2. *Soient $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$ est différentiable en tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et sa différentielle en (x_0, y_0) est telle que que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$f'(x_0, y_0)(x, y) = x_0 y + y_0 x = \begin{pmatrix} y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Exemple 3. *Soient $E = F = \mathbb{R}^2$. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, xy)$ est différentiable en tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et sa différentielle en (x_0, y_0) est l'application linéaire continue $f'(x_0, y_0)(x, y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f'(x_0, y_0)(x, y) = (x + y, x_0 y + y_0 x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Exemple 4. *Toute application linéaire continue $f \in \mathcal{L}(E; F)$ est différentiable dans E et,pour tout $a \in E, f'(a) = f$. Cela résulte de l'égalité*

$$f(a + h) = f(a) + f(h) + |h|_E .0_F$$

Exemple 5. *Il est aisé de voir que l'espace $E = C^1(0, 1)$ des fonctions $u : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ possédant une déivée continue est normé par*

$$\|u\|_{C^1} = \|u\|_{C^0} + \|u\|_{C^0} \qquad où \qquad \|u\|_{C^0} = \sup_{t \in [0,1]} |u(t)|$$

qui en fait un espace de Banach. De même, l'espace $F = C^0[0, 1]$ des fonctions continues $v : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est normé par $\|v\|_{C^0}$. Soit $f : E \longrightarrow F$ définie par

$$f(u)(t) = u'(t) + tu^2(t).$$

Alors, avec un abus évident de notation, si $u, h \in E$,

$$f(u + h) = f(u) + (h' + 2t.h) + th^2$$

$$= f(u) + (h' + 2t.u.h) + \|h\|_{C^0} .\varphi(h)$$

où

$$\varphi(h) = \frac{t^{t^2}}{\|h\|_{C^0}}$$

L'application $L : E \longrightarrow F$ définie par $L(h) = h' + 2t.u.h$, évidemment linéaire, est

continue car

$$\|L(h)\|_{C^0} \leq \|h'\|_{C^0} + 2\|u\|_{C^0}\|h\|_{C^0}$$
$$\leq (1 + 2\|u\|_{C^0})\|h\|_{C^1}$$

D'autre part,

$$\|\varphi(h)\|_{C^0} \leq \frac{1\,\|h\|^2}{\|h\|_{C^0}} =_{C^0} \|h\| \leq_{C^0} \|h\|_{C^1}$$

et dès lors $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$.

Par conséquent f est différentiable sur E et,

$$f'(u).h =' + 2t.u.h.$$

Exemple 6. *Soient $E = \mathbb{R}^2$ normé par $|(x,y)|_{\mathbb{R}^2} = |x| + |y|$ et $F = \mathbb{R}^3$ normé par*

$|(x,y,z)|_{\mathbb{R}^3} = |x| + |y| + |z|$ et soit $f : E \longrightarrow F$ définie par

$|(x,y)| = (x+y, x-y, xy)$ si $v = (h,k)$ et $u_0 = (a,b)$ sont dans $\mathbb{R}^2$, nous avons

$$f(u_0 + v) - F(u_0) = L(V) + |v|_{R^2}\,\varphi(v)$$

où

$$L(v) = (h+k, h-k, bh+ak)$$

et

$$\varphi(v) = \frac{1}{|v|_{\mathbb{R}^2}}(0,0,h.k).$$

L'application L, évidemment linéaire, est continue (puisque nous sommes en dimension finie).

D'autre part,

$$|\varphi(v)|_{R^3} = \frac{1}{|v|_{\mathbb{R}^2}}|(0,h,k)| \leq \frac{1}{|v|_{\mathbb{R}^2}}(|h| + |k|)^2 = |h| + |k| = |v|_{\mathbb{R}^2}$$

et donc $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$. En conséquence, f est différentiable dans R^2 et, pour tout $v = (h,k)$ et pour tout $u_0(a,b)$ dans $\mathbb{R}^2$,

$$f'(u_0)v = (h+k-h, bh+ak).$$

1.3 Propriétés et règles de calcul

Proposition 2. *Si f est différentiable en $a \in E$ pour une paire de normes de E et F, elle demeure différentiable en a lorsqu'on remplace les normes par des normes équivalentes et $f'(a)$ ne change pas.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que, par définition de l'équivalence des normes, la quantité

$$\frac{\|f(a+h)-f(a)-f'(a)h\|_F}{\|f\|_E}$$

est minorée et majorée par une constante fois la même expression calculée avec les aures normes □

Proposition 3 (Composition avec une translation)**.** *Soient E et F des evn, U un ouvert de E $a \in U$ et $f : U \to F$ une application. Soient $x_0 \in E$ et $f_0 : x_0 + U \to F$ l'application définie par*

$$f_0(x) = f(x - x_0).$$

Si f est différentiable en a, f_0 est différentiable en $a + x_0$ et,

$$f_0'(a + x_0) = f'(a).$$

1.3.1 Différentiabilité et continuité

Proposition 4. *Soient $a \in U, E, F$ et f comme dans la définition de la différentielle. Si f est différentiable en a, elle continue en a.*

Démonstration : Supposons que f soit différentiable en a et soit donc φ définie dans un voisinage V de 0 dans E telle que $a + h \in V$ et

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)\,h + |h|_E\,\varphi(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0.$$

Alors

$$\lim_{h\to 0}\left[f(a+h) - f(a)\right] = \lim_{h\to 0}\left[f'(a)\,h + |h|_E\,\varphi(h)\right] = 0$$

d'où la thèse □

Ainsi la différentiabilité de f en a entraîne sa continuité en ce point.

La réciproque est fausse : il existe des fonctions continues qui ne sont pas différentiables. Pour s'en convaincre, considérer $f(t) = |t|$ et prendre $a = 0$.

1.3.2 Linéarité de la différentielle

Considérons E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, $a \in U, f$ et g deux applications à valeurs dans F et définies sur U. Leur somme $f + g : U \longrightarrow F$ est la fonction $f + g$ définie par :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in U$$

et, pour tout $\lambda \in K$, le produit λf de f par le scalaire λ est l'application $\lambda f : U \longrightarrow F$ définie par :

$$(\lambda f)(x) = \lambda.f(x) \quad \forall x \in U.$$

Proposition 5. *Avec les notations précédentes, si f et g sont différentiables au point a, il en est de même de $\lambda f + \delta g$ $\forall \lambda \in K$ et $\delta \in K$ et,*

$$(\lambda f + \delta g)'(a) = \lambda f'(a) + \delta g'(a).$$

Autrement dit, l'ensemble des $f : U \longrightarrow F$ qui sont différentiables en a est un sous-espace vectoriel V de toutes les applications définies dans U et à valeurs dans F et, l'application

$$f \longrightarrow D_a(f) = f'(a)$$

est linéaire.

Démonstration. En effet, il existe des fonctions φ_1 et φ_2 définies dans un voisinage U de $0 \in E$ et à valeurs dans F telles que, quelque soit $h \in E$ tel que $a + h \in U$,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a).h + |h|_E \varphi_1(h) \\ g(a+h) &= f(a) + g'(a).h + |h|_E \varphi_2(h) \end{aligned}$$

et

$$\lim_{h \to 0} \varphi_1(h) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Nous avons alors pour tout $(\lambda, \delta) \in K^2$ et pour $h \in E$ tel que $a + h \in U$,

$$(\lambda f + \delta g)(a+h) = (\lambda f + \delta g)(a) + (\lambda f'(a) + \delta g'(a)).h + |h|_E (\lambda \varphi_1(h) + \varphi_2(h)).$$

Comme $\lim_{h \to 0} \lambda \varphi_1 + \delta \varphi_2(h) = \lambda \lim_{h \to 0} \varphi_1(h) + \lim_{h \to 0} \varphi_2(h) = 0.$
la proposition est démontrée □

1.3.3 Différentielle d'une application affine

Soient E et F deux espaces vectoriels normés.

Définition 5. *Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite affine s'il existe $b \in F$ et $A \in \mathcal{L}(E; F)$ tels que*

$$f(x) = A(x) + b \quad \forall x \in E.$$

Pour une telle application, il est aisé de voir qu'elle est différentiable en tout point $a \in E$ et que $f'(a) = A$. En particulier si f est constante, sa différentielle est nulle.

Nous verrons que la réciproque est vraie si f est définie dans un ouvert connexe.

1.3.4 Différentielle d'une composition d'applications

Dans cette partie nous noterons indifféremment. $\|\|$ toutes les normes.

Proposition 6. *Soient E, F et G des espaces vectoriels normés, U un ouvert de E,V un ouvert de $F, a \in U, f : U \longrightarrow V$, $b = f(a) \in V$ et $g : V \longrightarrow G$. Si f est différentiable en a et g est différentiable en b, alors $g \circ f : U \longrightarrow G$ est différentiable en a et,*

$$(gof)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a) \tag{1.7}$$

Démonstration :Par hypothèse, il existe une fonction φ_1 à valeurs dans V et

définie dans un voisinage W_1 de $0 \in E$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + f('a).h + \|h\| \delta_1(h)$$

et une fonction φ_2 définie dans un voisinage W de $0 \in F$ telle que

$$g(f(a)+u) = gf(a) + g'(f(a)) + \|u\| \delta_2(u)$$

les fonctions $\varphi_1, i = 1, 2$ vérifiant

$$\lim_{y \to 0} \varphi_1(y) = 0.$$

Par ailleurs $f'(a)$ et $g'(f(a))$ étant des applications linéaires continues, il existe α et $\beta > 0$ tels que

$$\|f'(a).h\| \leq \alpha \|h\| \qquad \forall h \in W_1$$

$$\|g'(f(a)).u\| \leq \beta \|u\| \quad \forall u \in W_2$$

Comme f est continue au point a, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|h\| < \eta \Rightarrow h \in W \quad \text{et} \quad f(a+h) - f(a) \in W_2$$

pour h tel que $\|h\| < \eta$ nous avons alors :

$$\begin{aligned} &g(f(a+h)) - g(f(a)) = g(f(a) + f'(a).h + \|h\| \delta_1(h)) - (gof)(a) \\ &= g'(f(a)).(f'(a)..h + \|h\| \delta_1(h)) + \|f'(a).h + \|h\| \delta_1(h)\| \delta_2(f('a).h \|h\| \delta_1(h)) \\ &= g'(f(a))_0 f'(a).h + \|h\| g'(f(a)).\delta_1(h) + \|f'(a)\|.h + \|h\| \\ &+ \|f'(a).h + \|h\| \delta_1(h)\| \delta_2(f'(a).h + \|h\| \delta_1(h)). \end{aligned}$$

La thèse sera démontrée si nous prouvons que

$$\varphi(h) = g'(f(a)).\delta_1(h) + (\|f'(a).h \|h\| \delta_1(h)\|) \delta_2(f'(a).h + \|h\|.\delta_1(h)) \|h\|^{-1}$$

tend vers 0 quand h tend vers 0. D'ailleurs

$$\|\delta(h)\| \leq \|g'(f(a)) \delta_1(h)\| + \|(f'(a)).h + \|h\|.\delta_1(h)\| \delta_2$$

$$(f'(a).h + \|h\|.\delta_1(h)) \|h\|^{-1} \leq \beta \|\delta_1(h)\| + (\alpha + \|\delta_1(h)\|)$$

$$\|\delta_2(f'(a).h + \|h\|.\delta_1(h))\|$$

et dès lors

$$\lim_{h \to 0} \|\varphi(h)\| = 0 \ \square$$

1.3.5 Différentielle d'une application bilinéaire continue

Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés de normes notées indifféremment $\|.\|$. Prenons sur le produit $E \times F$ la norme

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Proposition 7. *Soit $f : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire continue et $u = (a, b) \in E \times F$. Alors f est différentiable en (a, b) et, pour tout $(h, k) \in E \times F$,*

$$f'(a, b).(h, k) = f(a, k) + f(h, b).$$

Démonstration : Puisque, pour tout $(h,k) \in E \times F$ $f(a+h,b+k) - f(a,k) = f(a,k) + f(h,b) + f(h,k)$, il suffit de prouver que :

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

D'ailleurs :

$$\|(h,k)\| = \|h\| + \|k\| \quad \text{et} \quad \|f(h,k)\| \leq \|f\| . \|h\| \, \|h\|$$

de telle sorte que :

$$\frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|} \leq \frac{\|f\| . \|h\| . \|k\|}{\|h\| + \|k\|} \leq \|f\| \frac{(\|h\| + \|h\|)^2}{\|h\| + \|h\|}$$
$$= \|f\| . (\|h\| + \|k\|) = \|f\| . \|(h.k)\| .$$

En conséquence :

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0.$$

De manière générale :

Exercice 1. *Soient* $E_1 \quad 1 \leq i \leq n$ *et* F *des espaces vectoriels normés et* $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2 ..., E_n; F)$. *Alors* f *est différentiable en tout point* $a = (a_1, ..., a_n)$ *et la valeur en* $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$ *de sa différentielle au point* a *est :*

$$f'(a).h = \sum_{i=1}^{n} f(a_1, ..., a_{i-1}, h_i, a_{i+1}+, ..., a_n).$$

1.3.6 Différentiabilité d'un quotient

Soient E et F deux espaces de Banach. Nous savons déjà que $U = Isom(E;F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E;F)$ et que l'application $\varphi : U \longrightarrow \mathcal{L}(F;E)$ définie par

$$\varphi(a) = a^{-1}$$

est continue. Le résultat suivant établit que φ est différentiable. En fait :

Proposition 8. *Avec les notations précédentes* φ *est de classe* C^1 *dans* U *et, pour tout* $a \in U$,

$$\varphi'(a).f = -a^{-1} \circ f \circ a^{-1} \quad \forall f \in \mathcal{L}(E;F) \tag{1.8}$$

Démonstration

Preuve de la différentiabilité. Soit $a \in U$ et soit W un voisinage de 0 dans $\mathcal{L}(E;F)$ tel que $a+f \in U$ pour tout $f \in W$. Pour $f \in W$ nous avons :

$$\varphi(a+f) - \varphi(a) = (a+f)^{-1} - a^{-1}$$
$$= a^{-1}a(a+f)^{-1} - a^{-1}(a+f)(a+f)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= a^{-1}\left[a-(a+f)\right](a+f)^{-1} \\
&= -a^{-1}f\,(a+f)^{-1} \\
&= -a^{-1}fa^{-1} + a^{-1}f\left[a^{-1}-(a+f)^{-1}\right] \\
&= -a^{-1}fa^{-1} + T\,(f)
\end{aligned}$$

où

$$T\,(f) = -a^{-1}f\left[a^{-1}-(a+f)^{-1}\right]$$

De plus,

$$\frac{\|T\,(f)\|}{\|f\|} \leq \left\|a^{-1}\right\| \left\|a^{-1}-(a+f)^{-}\right\| \longrightarrow 0$$

quand $f \longrightarrow 0$, puisque l'application $u \longrightarrow u^{-1}$ est continue dans U. Par conséquent φ est différentiable en tout point $a \in U$ et la valeur en f de la différentiable $\varphi\,(a)$ est bien l'expression donnée dans l'énoncé de la proposition.

Continuité de l'application dérivée de φ :

$$\varphi' : U \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathcal{L}\,(E;F)\ ;\ \mathcal{L}\,(F;E)\right)$$

Pour v et ω dans $\mathcal{L}\,(F;E)$,
notons $\psi\,(v,\omega)$ l'application de $\mathcal{L}\,(E;F)$ dans $\mathcal{L}\,(F;E)$ définie par :

$$\psi\,(v,\omega)\,.h = voho\omega$$

. Alors, d'après l'expression de φ', on a :

$$\varphi'\,(a) = -\psi\left(a^{-1},a^{-1}\right).$$

L'application $(v,\omega) \longrightarrow \psi\,(v,\omega)$ de $\mathcal{L}\,(F;E)\times\mathcal{L}\,(F;E)$ dans $\mathcal{L}\,(E;F)\,;\mathcal{L}\,(F;E)$ est bilinéaire. Elle est en outre continue, puisque

$$\|\psi\,(v,\omega)\,.h\| = \|voho\omega\| \leq \|v\|\,\|\omega\|\,.\,\|h\|\,.$$

Maintenant l'application $a \longrightarrow \varphi'\,(a) = \psi\left(a^{-1},a^{-1}\right)$ est composée de l'application continue

$$a \longrightarrow \left(a^{-1},a^{-1}\right)$$

de U dans $\mathcal{L}\,(F;E)$ et de l'application bilinéaire continue

$$(v,\omega) \longrightarrow \psi\,(v,\omega)\,.$$

Elle est donc continue et dès lors la thèse est démontrée $\square$

1.3.7 Différentiabilité des fonctions à valeurs dans un produit d'espaces

Supposons que l'espace vectoriel F soit le produit d'un nombre fini n d'espaces vectoriels normés F_i, $F = F_1 \times F_2 \times ... \times F_n$. Pour $1 \leq i \leq n$, considérons la projection $p_i : F \longrightarrow F_i$ définie par

$$p_i\,(y_1...,y_i...,y_n) = y_i$$

et l'injection canonique $u_i : F_i \longrightarrow F$ définie par :

$$u_i\left(y\right) = \left(0, ..., 0, y, 0, ..., 0\right).$$

Il est aisé de voir que p_i et u_i sont linéaires continues et que, pour $1 \leq i \leq n$,

$$p_i \circ u_i = 1_{F_i} \text{ (identité sur } F_i).$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \circ p_i = 1_F \text{ (identité sur } F).$$

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé $E, a \in U$ et soit $f : U \longrightarrow F$ une application. Pour $1 \leq i \leq n$, soit

$$f_i = p_i \circ f : U \longrightarrow F_i.$$

Proposition 9. *Avec les notations précédentes, f est différentiable en a si et seulement si, pour tout $1 \leq i \leq n$; f_i est différentiable en a. Dans ce cas :*

$$f'\left(a\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i \circ f_i'\left(a\right) = \left(f_1'\left(a\right), f_2'\left(a\right), ..., f_n'\left(a\right)\right) \tag{1.9}$$

Démonstration : Notons que les applications p_i et u_i sont différentiables car linéaire et continues.

Condition nécessaire. Supposons que f soit différentiable en a. Alors pour tout $1 \leq i \leq n$; $f_i = p_i \circ f$ est différentiable comme composée d'applications différentiables; de plus, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$f_i'\left(a\right) = p_i'\left(f\left(a\right)\right) \circ f'\left(a\right) = p_i \circ f'\left(a\right)$$

Condition suffisante. Supposons que pour tout $1 \leq i \leq m$, f_i soit différentiable. Des égalités

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \circ f_i = \sum_{i=1}^{m} u_i \circ \left(p_i \circ f\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(u_i \circ p_i\right) \circ f = f,$$

nous déduisons que f est différentiable en a. De plus, l'expression de $f'(a)$ s'obtient un différentiant en a les deux membres de l'égalité

$$f = \sum_{i=1}^{m} u_i \circ f_i$$

et en notant que u_i est linéaire et dès lors que

$$u_i'\left(f_i\left(a\right)\right) \circ f_i'\left(a\right) = u_i \circ f_i'\left(a\right) \ .$$

Exemple 7.

Dans la proposition 9, posons, pour tout $1 \leq i \leq m$, $F_i = K$ (où $K = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$). Alors la donnée de $f : U \longrightarrow K^m$ équivaut à la donnée de n applications à valeurs réelles ou complexes

$$f_i = p_i \circ f \ : U \longrightarrow K.$$

En vertu de la Proposition (9), f est différentiable en a si et seulement si chaque f_i est différentiable en a et, $f'\left(a\right)$ est l'application de E dans K de composantes $f_1'\left(a\right), ..., f_n'\left(a\right)$, définie par

$$f'\left(a\right).h = \left(f_1'\left(a\right).h, \ f_2'\left(a\right).h, ..., f_m'\left(a\right).h\right)$$

1.3.8 Une application

Soient E, E_1 et E_2 des espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ une application bilinéaire continue. Soient $u : U \longrightarrow E_1$ et $v : U \longrightarrow E_2$ deux applications différentiables. Définissons l'application $W : U \longrightarrow F$ par

$$W(x) = f(u(x), v(x)). \tag{1.10}$$

Proposition 10. *Avec les notations précédentes, si u et v sont différentiables au point $a \in U$ alors W est différentiable en a et $\forall h \in E$.*

$$W'(a).h = (f(u'(a)).h,\ v(a)) + f(u(a), v'(a).h) \tag{1.11}$$

Démonstration. Soit $\alpha : U \longrightarrow E_1 \times E_2$ l'application définie par

$$\alpha(x) = (u(x), v(x))$$

Les fonctions u et v étant différentiables en $a \in U$, il en est de même de α et, quelque soit $h \in E$,

$$\alpha'(a).h = (u'(a).h \quad , \quad v'(a).h)$$

en vertu de la proposition 9. D'autre part, l'application $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ est différentiable en tout point de $E_1 \times E_2$, puiqu'elle est bilinéaire et continue. L'application W ci-dessus définie est composée de α et de f ; plus précisement, $W = f \circ \alpha$. Elle est différentiable en a comme composée d'applications différentiables et, pour tout $h \in E$.

$$W'(a).h = f'(\alpha(a)).('\alpha(a).h).$$

Il suffit d'appliquer (**??**) avec $a_1 = u(a)$, $a_2 = v(a)$, $x_1 = u'(a).h$ et
$x_2 = v(a).h$ pour obtenir la formule (**??**) $\square$

Cas particulier. Dans la proposition 10, prenons $E = \mathbb{R}$. Alors, nous savons que $u'(a).h = hu'(a)$, produit de $u'(a) \in L(\mathbb{R}, E_1) \approx E_1$ par le scalaire h, et que $v(a).h = hv'(a) \in E_2$. La relation (1.11) donne alors pour, $h = 1$,

$$W'(a) = f(u'(a),\ v(a)) + f(u(a),\ v'(a)).$$

Nous retrouvons ainsi la formule qui donne la dérivée d'un "produit" de deux fonctions u et v d'une variable réelle : par exemple, le produit vectoriel de deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, le produit scalaire de deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

1.3.9 Différentiabilité des fonctions définies dans un produit d'espaces vectoriels normés - Dérivées partielles

Soient E_j, $1 \leq j \leq n$ et F des espaces vectoriels normés, $E = E_1 \times E_2 ... \times E_n$ le produit des E_j, U ouvert de E et $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in U$ et $f : U \longrightarrow F$ une application. Pour tout $1 \leq j \leq n$, l'injection canomique $I_j : E_j \longrightarrow E$ définie par

$$I_j(x_j) = (a_1, .., a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ..., a_n)$$

est une application continue. Puisque $I_j(a_j) = a \in U$, $I_j^{-1}(U)$ est un ouvert de E_j qui contient a_j. En conséquence la fonction

$$g_j : E_j \longrightarrow F$$

définie par

$$g_j(x) = f(a_1, ..., a_{j-1}, x, a_{j+1}, ..., a_n) = (f \circ I_j)(x)$$

est définie dans l'ouvert $I_j^{-1}(U)$. Si l'application g_j est différentiable en a_j, sa différentielle en a_j est appelée la différentielle partielle de f par rapport à la $j-$*ième* variable en a. C'est un élément de l'espace $\mathcal{L}(E_j\,;\,F)$. On le note

$$D_j f(a) \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \quad \text{ ou } \quad f'_{x_j}(a).$$

Proposition 11. *Avec les notations précédentes, si* f *est différentiable au point* a *alors, pour* $1 \leq j \leq n$, $g_j = f \circ I_j$ *est différentiable au point* $a_j \in E_j$ *et, pour* $h = (h_1, ..., h_n) \in E$,

$$f'(a).h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_j. \tag{1.12}$$

Démonstration. Si $u_j : E_j \longrightarrow E$ est l'injection $x \longrightarrow (0, ..., 0, x_j, 0, ..., 0)$, on a

$$I_j(x_j) = a + u_j(x_j - a_j)$$

de telle sorte que I_j est une application affine, donc différentiable et $(I_j)'(a_j) = u_j$. En conséquence si f est différentiable en $a = I_j(a_j)$, la différentiabilité de $g_j = f \circ I_j$ en a_j, résulte de la proposition relative à la composition d'applications différentiables. En outre,

$$g_j'(a_j) = (f \circ I_j)'(a_j) = f'(a) \circ u_j.$$

Si $p_j : E \longrightarrow E_j$ est la projection sur la $j-$*ième* composante, déjà considérée, nous avons évidemment

$$f = \sum_{j=1}^{n} f \circ I_j \circ p_j$$

Le résultat portant sur la différentiation des fonctions composées entraîne

$$f'(a) = \sum_{j=1}^{n} (f \circ I_j)'(p_j(a)) \circ p'(a) = \sum_{j=1}^{n} f'(a) \circ u_j \circ p_j\,;$$

donc

$$f'(a).h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_j$$

Exemple Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin\left(x^2 y\right)$. Alors : $\frac{\partial f}{\partial x} f(a, b)$ est la dérivée en a de $q_1(x) = \sin\ \left(x^2 b\right)$, soit

$$D_1 f(a, b) = 2ab \cos\left(a^2 . b\right).$$

$$D_2 f(a, b) \text{ est la dérivée en } b \text{ de } q_2(y) = \sin\ \left(a^2 y\right),$$

soit

$$D_2 f(a, b) = a^2 \cos\left(a^2 b\right)$$

donc

$$f'(a, b)(h_1, h_2) = a \cos\left(a^2 b\right)(2abh_1 + ah_2).$$

Remarque La proposition 11 n'affirme pas que l'existence des dérivées partielles $D_j f$ en un point $a \in U$ implique l'existence de $f'(a)$. D'ailleurs la réciproque de la proposition 11 est fausse et ceci n'est pas étonnant, car comme il a été vu dans les classes antérieures, la dérivabilité par rapport à chaque variable est une condition plus faible que la différentiabilité dans toutes les directions qui est une condition nécessaire à la différentiabilité. Par ailleurs, l'existence de $D_j f(a)$ entraîne la continuité de f par rapport à la variable x_j en a en vertu de la proposition **??** ; et ceci n'assure même pas la continuité de f en a de telle sorte qu'elle ne peut être différentiable en a. Pour s'en convaincre, prenons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xh}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

Nous avons $f(0, y) = f(x, 0) = 0$ de telle sorte que $f'(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ et poutant f n'est pas différentiable en $a = (0, 0)$. D'ailleurs si f était différentiable en $(0, 0)$ sa différentielle en un point serait nulle d'après la proposition **??** et l'on aurait :

$$f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2} \delta(x, y)$$

où $\lim\limits_{(x,y) \to 0} \delta(x, y) = 0$. Pourtant si $x = 3t$ et $y = 4t$, nous avons $f(3t, 4t) = \frac{12}{25}$ qui ne tend pas vers zéro avec t . Mieux f n'est pas continue en $(0, 0)$ bien que admettant des dérivées partielles en ce point.

Remarque. Puique

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = f'(a) \circ u_j,$$

si l'application dérivée $f' : U \longrightarrow \mathcal{L}(E\,;\,F)$ est continue, l'application

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \longrightarrow \mathcal{L}(E_j\,;\,F)$$

est aussi continue. Réciproquement, si pour chaque $1 \leq j \leq n$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ est continue, f' est aussi continue en vertu de (1.12). Ainsi, si f est différentiable dans U, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit de classe C^1 est que pour tout $1 \leq j \leq n$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ soit continue.

1.3.10 Le cas où $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$. Calcul de la matrice jacobienne

.

Soit a un point d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application. La donnée de f correspond à la donnée de m applications $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = (f_1(x), ..., f_i(x_1), ..., f_m(x)).$$

Proposition 12. *Si f est différentiable dans U, l'élément occupant la $i-$ième ligne et la $j-$ième colonne de sa matrice jacobienne en a est $D_j f_i(a) = \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(a)$.*

Démonstration. Notons que la matrice jacobienne en a de l'application différentiable $f : U \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est, par définition, la matrice de l'application linéaire $f'(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dans les bases canomiques. C'est une matrice à m lignes et à n colonnes. D'après **??**, la $i-ième$ ligne de cette matrice est la matrice jacobienne en a de $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

D'après **??**, la matrice jacobienne de f_i en a est

$$(D_1 f_i(a), D_2 f_i(a), ..., D_j f_i(a), ..., D_n f_i(a)).$$

Le résultat suivant est très pratique.

Proposition 13. *Soient $g_1, ..., g_n : K^n \longrightarrow K$ des fonctions différentiables en a et $f_i : K^m \longrightarrow K$ une fonction différentiables en $b = (g_1(a), ..., g_m(a))$. Définitions $F : K^n \longrightarrow K$ par*

$$F(x) = f(g_1(x), ..., g_n(x)).$$

Alors F est différentiable en a et

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(b).\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

Démonstration. En posant $g(x) = (g_1(x), ..., g_m(x))$, alors $F = f \circ g$ et le théorème de la différentiation des applications composées montre que F est différentiable en a et

$$F'(a) = f'(g(a)).g'(a) = f'(b).g'(a).$$

Il suffit d'écrire que la matrice jacobienne de F en a est égale au produit des matrices jacobiennes de f en b et de g en a.

Exemple 8. *Soit à calculer les dérivées partielles de $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x, y) = f(h(x), s(y))$$

où f, s et h sont différentiables.

En posant
$$g_1(x,y) = h(x) \quad \text{et} \quad g_2(x,y) = s(y),$$
on se ramène à la proposition précédente.

Ainsi
$$F(x,y) = f(g_1(x,y)\,,\ g_2(x,y))$$
et dès lors en posant
$$u = (g_1(x,y)\,,\ g_2(x,y))$$
, on a :
$$D_1F(x,y) = D_1f(u)\,.\,D_1g_1(x,y) + D_2f(u)\,.\,D_1g_2(x,y)$$
$$D_2F(x,y) = D_1f(u)\,.\,D_2g_1(x,y) + D_2f(u)\,.\,D_2g_2(x,y)$$
Comme
$$D_1g_1(x,y) = h'(x)\,,\ \ D_1g_2(x,y) = 0\,,\ \ D_2g_1(x,y) = 0,$$
$$D_2g_2(x,y) = s'(y)\,,$$
nous avons $D_1F(x,y) = D_1f(u)\,.\,h'(x)$ et $D_2F(x,y) = D_2f(u)\,.\,s'(y)$.

Exercice 2. *Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que la fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par*
$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2})$$
vérifie
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0.$$
On pourra poser $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$.

Chapitre 2

Théorème des accroissements finis et applications

Il est bien connu que si $a < b$ sont des nombres réels, f une fonction numérique définie et continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c) \tag{2.1}$$

Si l'on pose $b = a+h$, alors l'assertion précédente se traduit par l'existence d'un nombre $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h)$$

C'est le théorème de Lagrange (ou théorème de la moyenne ou encore fornule des accroissements finis) pour les fonctins de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ce résultat est certainement faux pour les fonctions à valeurs vectorielles comme le montre l'exemple suivant. La fonction $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x) = (\cos x, \sin x)$$

est dérivable (et donc continue) en chaque point de $\mathbb{R}$ et est telle que :

$$f(2\pi) - f(0) = 0 \tag{2.2}$$

Mais pour tout $x \in R$, nous avons

$$f'(x) = (-\sin x, \cos x),$$

de telle sorte que,

$$\|f'(x)\|^2 = \cos^2 x + \sin^2 = 1$$

où $\|.\|$ est la norme euclidienne. En conséquence, il n'existe aucun $c \in]0, 2\pi[$ qui en lequel f' s'annule.

Toutefois, une version affaiblie du théorème de Lagrange s'exprimant en terme d'inégalité au lieu d'égalité, mais tout aussi utile pour les applications, subsiste pour les fonctions définies entre espaces vectoriels normés.

2.1 Le cas où la variable est réelle

Théorème 1. *Soient $a < b$ deux nombres réels, $I = [a, b]$, F un espacevectoriel normé, $f : I \longrightarrow F$, $g : I \longrightarrow R$ deux applications définies et continues dans I. Supposons qu'il existe un ensemble au plus dénombrable D inclus dans I tel que f et g soient dérivables dans $I - D$ et que*

$$\|f'(x)\| \leq g'(x) \quad \forall x \in I - D$$

Alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) \tag{2.3}$$

Démonstration. L'ensemble D étant au plus dénombrable, il existe une surjection $\alpha : \mathbb{N}^* \longrightarrow D$ de telle sorte qu'on peut ranger les éléments de D en une suite $x_1, x_2, ..., x_n, ...$. Nous allons montrer que pour chaque $\varepsilon > 0$,

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b - a + 1)$$

une fois ceci prouvé, il suffira de faire tendre ε vers 0 pour obtenir (2.3). Pour cela, pour chaque $x \in I$, nous notons N_x l'ensemble des entiers $n > 0$ tels que $\alpha(x) = x_n < x$. Soit $J \subset [a, b]$ l'ensemble des $x \in I$ qui sont tels que, quelque soit $y \in [a, x]$,

$$\|f(y) - f(a)\| \leq g(y) - g(a) + \varepsilon(y - a) + \varepsilon \sum_{n \in N_y} 2^{-n}$$

Il nous faut montré que $y = [a, x]$. D'ailleurs $\alpha \in J$ et, si $y = J$ alors, par définition, tout $z \in [a, y]$ est un

élément de J de telle sorte que J intervalle.

Soit $c$la borne supérieure de J. Alors, soit $J = [a, c]$, soit $J = [a, c[$. En fait $J = [a, c]$. En effet, pour tout $y \in J$, nous avons

$$\sum_{n \in N_y} 2^{-n} \leq \sum_{n \in N_c} 2^{-n}$$

puisque $y \leq c$ donc

$$\|f(y) - f(a)\| \leq g(y) - g(a) + \varepsilon(y - a) + \varepsilon \sum_{n \in N_c} 2^{-n}$$

Faisons tendre y vers c ; comme f et g sont continues, nous obtenons

$$\|f(c) - f(a)\| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon \sum_{n \in N_c} 2^{-n}$$

et donc $c \in J$.

<u>Pouvons ensuite que</u> $\mathbf{c} = \mathbf{b}$. Supposons que $c < b$. Deux cas sont à considérer : les cas $c \in D$ et $c \neq D$.

<u>Supposons que</u> $\mathbf{c} \notin \mathbf{D}$. Nous savons que $a \leq c < b$ et puisque, sans perdre de

généralité on peut supposer que $a \in D$, et dès lors, en vertu de la définition de la dérivée, il existe un intervalle $I(c) = [c, c+\lambda] \subset I$ qui est tel que, quel que soit

$x \in [c, c+\lambda]$, nous ayons :

$$\|f(x) - f(c) - (x-c) f'(c)\| \leq (\varepsilon/2)(x-c) \tag{2.4}$$

$$\|g(x) - y(c) - (x-c) g'(c)\| \leq (\varepsilon/2)(x-c) \tag{2.5}$$

La relation (2.4), compte tenu du fait que $c \notin D$ et que

$$\|f'(c)\| \leq g'(c),$$

donne

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(c)\| &\leq (x-c)\|f'(c)\| + (\varepsilon/2)(x-c) \\ &\leq (x-c)\ \ g'c + (\varepsilon/2)(x-c) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nous déduisons de (**??**) que

$$(x-c) g'(c) \leq |g(x) - g(c)| + (\varepsilon/2)(x-c)$$

et puisque g est croissante en vertu de l'hypothèse

$$0 \leq \|f'(c)\| \leq g'(x),$$

la relation (2.6) devient

$$\|f(x) - f(c)\| \leq g(x) - g(c) + \varepsilon(x-c).$$

En conséquence, puisque $c \in J$, nous obtenons

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\|$$

$$\leq g(x) - g(c) + \varepsilon(x-c) + g(c) - g(a)$$

$$+ (c-a) + \varepsilon \sum_{n \in N_c} 2^{-2}$$

$$\leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon \sum_{n \in N_x} 2^{-2}$$

Ce qui signifie que $x \in J$; une contradiction avec le faut que c est la borne supérieure de J.

Supposons que $c \in D$. Alors, il existe $m \in N^*$ tel que $c = x_m$. Les fonctions f et g étant continues en c, il existe $t > 0$ tel que quel que soit $x \in]c,\ c+t]$ nous ayons :

$$\|f(x) - f(c)\| \leq 2^{-m}(c/2)$$

et

$$\left| g(x) - g(c) \leq 2^{-m}(c/2) \right|.$$

Mais alors, puisque $c \in J$, nous obtenons,

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\|$$

$$\leq 2^{-m}\left(c/2\right)+g\left(c\right)-g\left(a\right)+\varepsilon\left(c-a\right)+\varepsilon\left(\sum_{n\in N_c\setminus\{m\}}^{2^{-n}+2^{-m}}\right)$$

$$\leq g\left(x\right)-g\left(c\right)+g\left(c\right)-g\left(a\right)+\varepsilon\left(c-a\right)+\underset{n\in N_c}{\Sigma}2^{-2}$$

Comme $c<x$ et que g est croissante, nous avons

$$\left|g\left(x\right)-g\left(c\right)=g\left(x\right)-g\left(c\right)\right|$$

de telle sorte que

$$\left\|f\left(x\right)-f\left(a\right)\right\|\leq g\left(x\right)-g\left(a\right)+\varepsilon\left(x-a\right)+\underset{n\in N_c}{\Sigma}2^{-2}$$

Cela signifie que $x\in J$; une contradiction avec le fait que c est la borne supérieure de J. **CQFD**

Remarque 1. *Nous notons que le théorème précédent est à fortiori vrai si D est l'ensemble vide. Autrement dit, avec les notations du théorème précédent, si f et g sont différentiables à l'intérieur de I et sont telles que*

$$\left\|f'\left(x\right)\right\|\leq g'\left(x\right)\quad\forall x\in\left]a,\,b\right[$$

alors :

$$\left\|f\left(b\right)-f\left(a\right)\right\|\leq g\left(b\right)-g\left(a\right)$$

Corollaire 1. *Soient I,f et D comme dans le théorème précédent. Supposons que que $\left\|f'\left(x\right)\right\|\leq M\quad\forall x\in I\setminus D$ où $M>0$. Alors*

$$\left\|f\left(b\right)-f\left(a\right)\right\|\leq M\left(b-a\right)$$

et plus généralement :

$$\left\|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right\|\leq M\left|\left(y-a\right)\right|$$

quels que soient $y,x\in[a,\,b]$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème ci-dessus avec la fonction $g\ :\ I\longrightarrow R$ définie par $g\left(x\right)=Mx$.

2.2 Le cas où la variable est vectorielle

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, a et b deux points de E.

Le segment fermé d'extrémités a et b noté $[a,\,b]$ est, par définition, l'ensemble

$$[a,\ b]=\{x\in E\ :\ x=(1-t)\,a+tb,\,0\leq t\leq1\}$$

Théorème 2. *Soient U un ouvert de E, $f : U \longrightarrow F$ une application différentiable, a et b des éléments distincts de U. Si $[a,\ b] \subset U$ alors,*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|f'((1-t)a + tb)\|$$

Démonstration : La fonction $h : [0,\ 1] \longrightarrow F$ définie par

$$h(t) = f((1-t)a + tb)$$

est continue sur $[0,\ 1]$, et dérivable sur $]0,\ 1]$ et, pour tout $0 < t < 1$,

$$h'(t) = f'((1-t)a + tb) . (b - a)$$

et dès lors

$$\|f'(t)\| \leq \| f'((1-t)a + tb) \|.\| b - a\|$$
$$\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|f'((1-t)a + tb) \|.\| b - a\| = M.$$

Il suffit d'appliquer le corollaire précédent avec la fonction h.

Corollaire 2. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert convexe de E et $f : U \longrightarrow F$ une application différentiable. Supposons que :*

$$\|f'(x)\| \leq M \ \ \forall x \in U,$$

où $M \geq 0$. Alors, quels que soient x et y dans U,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\| .$$

Démonstration. Puisque U est convexe, pour tous x et y dans U, le segment $[x,\ y]$ est contenu dans U. Les hypothèses du théorème ci-dessus sont satisfaites ; d'où la thèse.

Corollaire 3. *Sous les hypothèses du corollaire* **??**, *si $M = 0$, f est constante dans U.*

En fait on a un résultat plus général.

Proposition 14. *Soient E et F des espaces vectoriels normés, U un ouvert connexe de E et $f : U \longrightarrow F$ une application différentiable. Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in U \in$, alors f est constante dans U.*

La démonstration de la proposition utilise le

Lemme 2. *Soient X et Y des espaces métriques, $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Si f est localement constante et si X est connexe, alors f est constante.*

Démonstration. Par définition, f est dite localement constante sur un espace métrique X si chaque point de X possède un voisinage dans lequel f est constante. Soit $a \in X$ et $b = f(a)$. Alors d'une part, f 'etant continue, $f^{-1}(b)$ est une partie fermée de X et d'autre part, f étant localement constante, $f^{-1}(b)$ est une partie ouverte. Ainsi $f^{-1}(b)$ est une partie de X qui est à la fois ouverte et fermée. X étant connexe et $f^{-1}(b)$ étant non vide, puisque $a \in f^{-1}(b)$, on a

$$f^{-1}(b) = X,$$

c'est-à-dire $f(x) = b \quad \forall x \in X$.

Démonstration de la proposition. Soit a un point quelconque de l'ouvert U. U contient une boule ouverte B_a centrée en a ; B_a. Ainsi f est localement constante. Il suffit d'appliquer le lemme ci-dessus pour conclure.

2.3 Quelques applications

2.3.1 Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une application soit de classe C^1

Donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application soit de classe C^1.

Soient E_j, $1 \leq j \leq n$, F des espaces vectoriels normés, U un ouvert de $E = E_1 x E_2 x ... x E_n$, $a \in U$ et $f : U \longrightarrow F$ une application. Il résulte de la relation

$$D_j f(a) = f'(a)\, 0 u_j$$

définissant la dérivée partielle de f en a par rapport à la $j-ième$ variable que si f est de classe C^1 dans U alors les dérivées partielles

$$D_j \ : U \longrightarrow \mathcal{L}(E_j, F)$$

sont continues dans U. Nous allons prouver la réciproque.

Proposition 15. *Avec les notations ci-dessus, si f est telle que les différentielles partielles $D_j f(x)$, $1 \leq j \leq n$ existent en chaque point $x \in U$ et si les dérivées partielles $D_j \ : U \longrightarrow \mathcal{L}(E_j, F)$ sont continues, alors f est de classe C^1.*

Démonstration : De la formule

$$f'(a).h = \sum_{j=1}^{n} D_j f(a).h_j, \tag{2.7}$$

il suffit de prouver que $f'(a)$ existe. Pour ce faire, nous allons montrer que la fonction $g : U \longrightarrow F$ définie par

$$g(x) = f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} D_j\, f(a)\,(x_i - a_i)$$

vérifie

$$\lim_{x \to a} g(x) \|x-a\|^{-1} = 0.$$

D'ailleurs

$$D_i g(x) = D_i f(x) - D_i f(a),$$

les différentielles partielles étant continues en a, à tout $\varepsilon > 0$, il correspond $r > 0$ tel que

$$\|x-a\| < r \Rightarrow \|D_i g(x)\| \leq \varepsilon, \ \ i = 1, ..., n$$

D'autre part,

$$g(x) \sum_{i=1}^{n} \ g(x_1, ..., x_i, \ a_i + 1, ..., a_n) - g(x_1, ..., x_{i-1}, \ a_i, ..., a_n)$$

de telle sorte que comme par le théorème des accroissement finis (corollaire **??**).

$$\|g(x_1, ..., x_i, \ a_i + 1, ..., a_n) - g(x_1, ..., x_{i-1}, \ a_i, ..., a_n)\|$$

$$\leq \sup_i |D \ \ g(x_i)| \, \|x - a_i\|, \ \ x \in B_a$$

nous avons

$$\|g(x)\| \leq \underset{i=1}{\Sigma} \ \sup_{x \in B_a} \ \|D \ \ g(x_i)\| . \| \, x_i - a_i\| \leq n.\varepsilon \|x-a\|.$$

Comme ε est arbitraire,

$$\lim_{x \to a} g(x) \|x-a\|^{-1} = 0.$$

CQFD.

2.3.2 Critère de convergence uniforme pour une suite d'applications différentiables

Comme une seconde application du théorème des accroissements finis, voici un critère de convergence uniforme pour une suite d'applications différentiables.

Proposition 16. *Soient U un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé E, F un espace de Banach et (f_n) une suite d'applications différentiables de U dans F. Supposons que :*

(i) il existe un point $a \in U$ tel que la suite $(f_n(a))$ converge ;

(ii) la suite (f_n') l'applications de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ converge uniformément sur chaque partie bornée de U vers une application $g : U \longrightarrow L(E, F)$.

Alors, pour chaque $x \in U$, la suite $f_n(x)$ converge vers une limite, qu'on note $f(x) \in F$. Cette convergence est uniforme sur chaque partie bornée convexe de U. Enfin $f = \lim_n f_n$ est différentiable et $f' = g$.

Démonstration. U étant ouvert, contient une boule ouverte B_r centrée en a et de rayon $r > 0$. Par le théorème **??**, pour tout $x \in B_r$, nous avons :

$$\|f(x) - f_p(x) - (f_q(a_q) - f(a_q))\| \leq \|x - a\| \sup_{u \in B} \left\|f'_p(u) - f'_q(u)\right\|$$

Comme la suite $(f_n(a))$ converge et que (f'_n) converge uniformément sur B_r, (**??**) laisse apparaître que $(f_n(x))$ est une suite de cauche dans F.

L'espace F étant complet, $\lim_n f(x) = f(x)$ existe. Ce même raisonnement montre que si (f_n) converbe en un point d'une boule ouverte de U, elle converge uniformément sur cette boule. L'ensemble des points x de U où $(f_n(x))$ converge est donc ouvert et fermé. Comme cet ensemble n'est pas vide (puisque a s'y trouve) et que u est connexe, il coïncide avec U. Autrement dit $\lim_n f(x) = f(x)$ existe quelque soit $x \in U$.

Si nous désignons maintenant par B une partie connexe et bornée de U, de diamètre d, l'inégalité (**??**) donne, pour tout $x \in B$,

$$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \left\|f_p(a) - f'_q(a)\right\| + d \ \sup_B \left\|f'_p(u) - f''_q(u)\right\|$$

Cela montre que la convergence de (f_p) vers f est uniforme dans B.

Dans (**??**) faisons tendre p vers $+\infty$. Puisque $\lim f'_n = g$, nous obtenons

$$\|f(x) - f(a) - (f_q(x) - f_q(a))\| \leq \|x - a\| \sup_B \left\|g(u) - f''_q(u)\right\|$$

La convergence de $\left(f'_q\right)$ étant uniforme sur B, à tout $\varepsilon > 0$ correspond un entier N tel que

$$q > N \Rightarrow \sup_B \left\|g(u) - f''_q(u)\right\| < \varepsilon.$$

Pour q ainsi choisi, il existe $r' \leq r$ tel que

$$\|x - a\| \leq r' \Rightarrow \left\|f_q(x) - f_q(a) - f'_q(a).(x - a)\right\| \leq \varepsilon. \|x - a\|.$$

$$\|f(x) - f(a) - g(a).(x - a)\| \leq \|f(a) - f(a) - (f_q(x) - f_q(a))\| +$$
$$\left\|f_p(x) - f_q(a) - f'_q(a).(x - a)\right\| + \left\|f'_q(a).(x - a) - g(a).(x - a)\right\|$$

les inégalités précédentes montrent que

$$\|f(x) - f(a) - g(a).(x - a)\| \leq \varepsilon. \|x - a\|.$$

dès lors que $\|x - a\| \leq r'$. Ainsi f est différentiable en a et $f'(a) = g(a)$. Comme le raisonnement a été fait avec a arbitrairement pris dans U, f est différentiable dans U et $f' = g$.

Chapitre 3

Théorèmes des fonctions implicites

3.1 Introduction

Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés, $T : E \times F \longrightarrow G$ une fonction. L'ensemble

$$G(f) = \{(x, y) \in domT \ : T(x, y) = 0\} \tag{3.1}$$

est un graphe f de E vers F. L'objet de la théorie des fonctions implicites est d'établir des conditions sous lesquelles le graphe de f est une fonction de E dans F (problème global) ou sous lesquelles la restriction de f à un voisingage $U \times V$ d'un de ses points est une application de $U \subset E$ dans $V \subset F$ (problème local), c'est-à-dire, des conditions sous lesquelles, pour chaque

x$\in dom f$ ou chaque $x \in U$, selon le cas, l'ensemble des $y \in im f$ ou $y \in V$ tels

que $(x, y) \in f$ est formé d'un seul élément. Si on note $f(x)$ cet élément, on

voit que pour tout $(x, y) \in E \times F$ ou tout $(x, y) \in U \times V$ selon le cas, l'équation

$$T(x, y) = 0 \tag{3.2}$$

équivaut à

$$y = f(x) \tag{3.3}$$

En d'autres termes, la relation (3.2) définissait implicitement la

fonction de E dans F donnée par (3.3) qui en est la forme explicite.

Afin de situer la difficulté du problème et de motiver les conditions du théorème qui donnera la solution du problème local (le problème global plus délicat ne sera pas étudié ici) considérons tout d'abord le cas où $E = \mathbb{R}^n$, $F = G = \mathbb{R}^p$ et où $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est une application linéaire qui peut donc s'écrire

$$T(x, y) = Ax + By.$$

Alors, A est une matrice de type (p, n) (p lignes et n colonnes) et B une matrice de type (p, p). L'équation (3.2) définissant le graphe correspondant à f

est donc

$$Ax + By = 0 \tag{3.4}$$

La théorie des équations linéaires nous apprend alors que, si $détB \neq 0$, la relation (3.4) considérée comme équation en y possède la solution unique

$$y = B^{-1}(Ax)$$

qui est la solution du problème global du problème de fonctions implicites donné

par (3.4) et montre qu'en fait le graphe f relatif à (3.4) est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Si par contre $détB = 0$, on sait que l'équation (3.4) n'aura de solution y que pour les $x \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$Ax \in Im(B),$$

et que, pour de tels x, la solution y n'est pas unique puisque y_1+y où $y \in KerB$ est aussi solution. Par conséquent, si $détB = 0$, le graphe f correspondant à (3.4) n'est jamais une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Il est intéressant de noter que dans ce cas, pour tout $(x,\, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$,

$$B = col\left(D_yT_1\left(x,\, y\right),\, D_yT_2\left(x,\, y\right), ..., D_yT_p\left(x,\, y\right)\right)$$

où le second membre désigne la matrice de type (p, p) obtenue en plaçant en colonne les valeurs en $(x,\, y)$ des dérivées partielles de T par rapport aux variables $y_1, ...y_p$. Le problème des fonctions implicites est donc soluble pour (3.4), et il l'est alors globalement, si et seulement si $détB \neq 0$.

Ce qui vient d'être dit vaut également lorsque E, F et G sont des espaces vectoriels quelconque non nécessairement de dimension finie, $A : E \longrightarrow G$ et $B : F \longrightarrow G$ sont des applications linéaires. Dans ce cas le problème de fonctions implicites donné par (3.4) est soluble si et seulement si B est bijective.

Si f n'est plus linéaire, et même dans des cas très simples, le problème global peut ne pas avoir de solution. Considérons par exemple l'application $T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$T\left(x,\, y\right) = x^2 + y^2 - 1.$$

Le graphe correspondant donné par (3.1) n'est pas une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puisque ; à tout $x \in domf = [-1, +1]$ correspond les deux éléments

$$\left(x, \left(1 - x^2\right)^{1/2}\right) \quad \text{et} \quad \left(x, -\left(1 - x^2\right)^{1/2}\right)$$

du graphe qui sont distincts lorsque $x \neq \pm 1$. D'autre part, pour la même raison, la restriction de f à n'importe quel voisinage des points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ du graphe ne définit pas une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; On notera que ces points sont les seuls points de $g\left(f\right)$ en lequels

$$D_yT\left(x,\, y\right) = 2y = 0.$$

Par contre, si $(x,\, y)$ est un point de f tel que $D_yT\left(x,\, y\right) = 2y > 0$ $(resp.D_yT\left(x,\, y\right) < 0)$ alors il est aisé de voir que la restriction de T au voisinage.

$$\left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\} \quad (resp.\ \{(x,\, y) : y < 0\})$$

de $(x_0,\, y_0)$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de domaine de définition $[-1, +1]$ et définie explicitement par

$$f\,(x) = \left(1 - x^2\right)^{1/2} resp. \left(resp.\, f\,(x) = -\,(1-x)^2\right)^{1/2}$$

Donc, dans le cas qui nous concerne, on a une solution locale du problème des fonctions implicites pour les points $(x_0,\, y_0)$ de f tels que $D_y T\,(x_0,\, y_0) \neq 0$.

Nous allons montrer que, pour les applications $T : E \times F \longrightarrow G$ différentiables,

le problème local des fonctions implicites est soluble sous la condition que l'application linéaire continue $T'_y\,(a,b) : F \longrightarrow G$ sont inversible. En fait, nous avons le résultat suivant connu sous le nom du ***théorème des fonctions implicites***.

3.2 Existence et unicité

Théorème 3. *Soient E un espace vectoriel normé, F et G des espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$, $(a,b) \in U$ et $T : U \longrightarrow G$ une application continue en (a,b). Supposons que :*

(i) $T(a,b) = 0$ *;*

(ii) $\frac{\partial T}{\partial y}$ *existe et est continue dans U ;*

(iii) $\frac{\partial T}{\partial y}(a,b) \in \mathcal{L}\,(F\,;G)$ *est inversible.*

Alors, il existe un voisingage A de a, il existe un voisinage B de b tels que quel que soit $x \in A$, l'équation

$$T\,(x,y) = 0$$

ait dans B, une et une seule solution $y = \varphi\,(x)$. En outre, l'application $\varphi : A \rightarrow B$, $x \rightarrow \varphi\,(x)$ est continue en a et est telle que $\varphi\,(a) = b$.

Remarque 2. *F et G étant des espaces de Banach, il résulte d'un théorème important d'analyse que toute application linéaire continue et bijective $K : F \longrightarrow G$ est un isomorphisme (voir par exemple M. Bourbaki, espaces vectoriels topologiques, chapitre ii).*

Au vue de ce résultat, l'hypothèse (iii) du théorème 4 équivaut à dire que $\frac{\partial T}{\partial y}(a,b)$ est un isomorphisme. En conséquence, si nous posons $L = \frac{\partial T}{\partial y}(a,b)$, l'inverse $L^{-1} : G \longrightarrow F$ est continue.

Démonstration.
Elle va se faire en plusieurs étapes.

Etape 1. Un couple $(x,y) \in E \times F$ est solution de (**??**) si et seulement si :

$$y = g\,(x,y)$$

où $g : E \times F \longrightarrow F$ est la fonction définie par

$$g(x,\, y) = y - L^{-1}T(x,\, y)\,. \tag{3.5}$$

En effet,

$$y = g(x,\, y) \Longleftrightarrow y = y - L^{-1}T(x,\, y) \Longleftrightarrow L^{-1}T(x,\, y) = 0 \Longleftrightarrow T(x,\, y) = 0.$$

Autrement exprimé, pour chaque $x \in E$, le couple $(x,\, y)$ est solution de (**??**) si le seulement si y est point fixe de l'application $u \longrightarrow g(x, u)$ de F dans lui-même.

Nous allons montrer qu'il existe un voisinage A de a dans E et un voisinage B de b dans F tels que pour chaque $x \in A$, l'application $g(x, .) : B \longrightarrow F$ soit une contraction.

Etape 2 : Il existe $\alpha_1 > 0$ et $\beta > 0$ **tels que, pour chaque** $x \in B(a\,;\alpha_1)$**,**
l'application $g(x, .) : B(a\,;\alpha_1) \longrightarrow F$ **soit une contraction.**

En effet, $g(a, b) = b$, $g_y^{\cdot}$ existe et $g_y^{\cdot}(a, b) = 1_{\bar{F}}\, L \circ L^{-1} = 1_F - 1_F = 0$. L'application $g_y^{\cdot}$ étant continue en (a, b), il existe $\alpha_1 > 0$ et $\beta > 0$ tels que, pour tout $x \in B(a\,;\alpha_1)$ et pour tout $y \in B(b\,;\beta)$ on ait

$$\left\|g_y^{\cdot}(x, y)\right\| \leq 1/2.$$

Pour tout $x \in B(a\,;\alpha_1)$, le théorème des accroissement finis (plus exactement le corollaire **??** appliqué à la fonction $g(x, .) : B(b\,;\beta) \longrightarrow F$ avec $M = 1/2$ donne

$$\|g(x, y) - g(x, y')\| \leq 1/2 \;\; \|y - y'\|$$

pour y et y' dans $B(b\,;\beta)$; ce qui démontre la thèse.

Montrons qu'en diminuant éventuellement le rayon α_1 , $g(x, .)$ est, pour chaque x correspondant, une application de $B(b\,;\beta)$ dans lui-même.

Etape 3 : Il existe $0 < \alpha \leq \alpha_1$ tel que, pour chaque $x \in B(a\,;\alpha)$ et chaque $x \in B(b\,;\beta)$, on ait

$$\|g(x, y) - b\| \leq \beta.$$

En effet, puisque $g(a, b) = b$ et que g est continue en (a, b), il existe $\alpha_2 > 0$ tel que pour chaque $x \in B(a\,;\alpha_2)$, on ait

$$\|g(x, y) - b\| < \frac{1}{2}\,\beta.$$

Posons $\alpha = \min\,(\alpha_1,\, \alpha_2)$. Alors, pour chaque $(x, y) \in B(a\,;\alpha) \times B(b\,;\beta)$, on a

$$\begin{aligned} \|g(x, y) - b\| &\leq \|g(x, y) - g(x, b)\| + \|g(x, b) - b\| \\ &< \frac{1}{2}\,\|y - b\| + \frac{1}{2}\,\beta < 2.\frac{\beta}{2} = \beta\,; \end{aligned}$$

d'où la thèse.

En vertu des trois étapes ci-dessus et du théorème du point fixe de Banach (Théorème **??**), on obtient, pour chaque $x \in B(a\,;\alpha)$, un point fixe unique dans $B(b\,;\beta)$ pour l'application $y \longrightarrow g(x, y)$. Nous le désignerons par $\varphi(x)$.

Nous définissons de cette manière une application $\varphi : B(a\,;\alpha) \longrightarrow B(b\,;\beta)$ et il, est clair que pour chaque $x \in B(a\,;\alpha)$, $T(x, \phi(x)) = 0$.

Etape 4 : Continuité au point a de l'application φ. Notons d'abord que par unicité du point de Banach, nous avons nécessairement $\varphi(a) = b$. Pour tout $x \in B(a\,;\alpha)$, nous avons

$$\|\varphi(x) - \varphi(a)\| = \|g(x, \varphi(x)) - g(a, \varphi(a))\|$$
$$\leq \|g(x, \varphi(x)) - g(x, \varphi(a))\| + \|g(a, \varphi(a)) - g(x, \varphi(a))\|$$
$$\leq \frac{1}{2}\|\varphi(x) - \varphi(a)\| + \|g(x, b) - g(a, b)\|$$

et dès lors

$$\|\varphi(x) - \varphi(a)\| \leq 2\|g(x, b) - g(a, b)\|$$

La continuité de φ en a résulte trivialement de celle de la fonction $x \longrightarrow g(x, b)$ au point a.

Ainsi, le théorème des fonctions implicites ci-dessus est prouvé avec $A = B(a\,;\alpha)$ et $B = B(a\,;\beta)$.

Exercice 3. *Montrez que sous les hyppothèses du théorème précédent, la fonction implicite $\varphi : A \longrightarrow B$ est unique.*

3.3 Continuité et différentiabilité de la fonction implicite

Dans cette section, nous supposons que toutes les conditions du théorème d'existence **??** sont satisfaites et nous étudierons les hypothèses supplémentaires qu'il faut imposer à T pour que l'application φ introduite par le théorème soit continue, où soit différentiable dans un voisinage de a. Le premier résultat concerne la continuité.

Proposition 17. *Sous les hypothèses et avec les notations du théorème* **??***, si, en outre, pour chaque $y \in B = B(b;\beta)$, la fonction $x \to T(x, y)$ est continue en tout point de $A = B(a;\alpha) =$, alors la fonction implicite φ est continue en tout point de A.*

Démonstration Pour x et $z \in A = B(a;\alpha)$, nous avons

$$\|\varphi(x) - \varphi(z)\| = \|g(x, \varphi(x)) - g(z, \varphi(z))\|$$
$$\leq \|g(x, \varphi(x)) - g(x, \varphi(z))\| + \|g(x, \varphi(z)) - g(z, \varphi(z))\|$$
$$\leq \frac{1}{2}\|\varphi(x) - \varphi(z)\| + \|g(x, \varphi(z)) - g(z, \varphi(z))\|$$

et dès lors

$$\|\varphi(x) - \varphi(z)\| \leq 2\|g(x, \varphi(z)) - g(z, \varphi(z))\|$$

La continuité de φ en z résulte trivialement de celle de la fonction $x \to g(x, \varphi(z))$ en z. CQFD.

Considérons maintenant le problème de la différentiabilité de la fonction implicite φ et le calcul de sa différentielle.

Proposition 18. *Sous leshypothèses et avec les ntotations du théorème d'existence prédédent, si en outre, T est différentiable dans U, alors φ est différentiable dans A et, pour chaque $x_0 \in A$,*

$$\varphi'(x_0) = -\left[T'_y(x_0, \varphi(x_0))\right]^{-1} \circ T'_x(x_0, \varphi(x_0)) \tag{3.6}$$

Démontration Pour nous rassurer que (3.6) *a* un sens, il nous faut nous convaincre que $\frac{\partial T}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0))$ est, pour chaque $x_0 \in A$, inversible dans $\mathcal{L}(F; G)$. D'ailleurs (3.5) donne

$$T(x, y) = L(y) - L \circ (g(x, y))$$

d'où nous tirons

$$T'_y(x, y) = L \circ \left(1_F - g'_y(x, y)\right).$$

Notons que $L = \frac{\partial T}{\partial y}(a, b) \in \mathcal{L}(F; G)$ est inversible et que $g'_y(x, y) \in \mathcal{L}(F; F)$ pour chaque $x \in A$. Comme F est un espace de Banach, $\mathcal{L}(F; F)$ est une algèbre de Banach et $1 - u$ est inversible pour tout $u \in \mathcal{L}(F; F)$ tel que $\|u\| < 1$ (théorème **??**). Comme $\left\|g'_y(x, y) \leq \frac{1}{2}\right\|$ pour tout $(x, y) \in A \times B$, $i_F - g'_y(x, y)$ est inversible. Par conséquent $T'(x, y)$, composé de deux applications inversibles est une application inversible.

Soit $x_0 \in A$. La fonction φ étant continue en x_0, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $h \in E$ vérifiant $\|h\| \leq r$, nous ayons

$$x_0 + h \in A \quad \text{et} \quad \varphi(x_0 + h) \in B[y_0; \beta] \quad \text{où} \quad y_0 = \varphi(x_0).$$

Dès lors, par le théorème d'existence et d'unicité de la fonction implicite, nous avons, pour tout $h \in B(0; r)$,

$$T(x_0 + h,\, \varphi(x_0 + h)) = 0$$

Comme

$$T(x_0,\, \varphi(x_0)) = 0,$$

il vient, par soustraction,

$$T(x_0 + h,\, \varphi(x_0 + h)) - T(x_0,\, \varphi(x_0)) = 0 \tag{3.7}$$

Posons, pour simplifier les notations : $L = T'_y(x_0,\, \varphi(x_0))$ et $K = T'_x(x_0,\, \varphi(x_0))$. Il résulte de la différentiabilité de T en $(x_0,\, \varphi(x_0))$ l'existence d'une fonction $R : E \times F \longrightarrow G$ telle que

$$\lim_{(h,k) \to 0} \frac{R(h, k)}{\|h\| + \|k\|} = 0 \tag{3.8}$$

et, pour tout h "assez petit",

$$T(x_0 + h,\, \varphi(x_0 + h)) - T(x_0,\, \varphi(x_0))$$
$$= K(h) + L(\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)) + R(h, \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0))$$

De (3.7) nous déduisons que, pour tout $h \in B[0; r]$,

$$0 = K(h) + L(\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)) + R(h, \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0))$$

Puisque $L^{-1} = T'_y(x_0, \varphi(x_0))$ existe, (**??**) peut encore s'écrire,

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) - \left((L^{-1}K(h)\right) = -S(h) \tag{3.9}$$

où $S(h) = L^{-1}(R(h, \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)))$.

La proposition sera démontrée si nous prouvons que

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(h)}{\|h\|} = 0,$$

puisqu'alors nous aurons, par (3.9),

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) - \left(-L^{-1}K(h)\right)}{\|h\|} = 0 \ ;$$

ce qui exprime la différentiabilité de φ en x_0 et donne la formule (3.6).

La propriété (3.7)* de R, la linéarité et la continuité de L^{-1} certifient l'existence de $0 < r_1 \leq r$ tel que, pour tout $(h, k) \in E \times F$ vérifiant

$$\|h\| \leq r_1 \quad , \quad \|k\| \leq r_1,$$

nous ayons

$$\left\|L^{-1}K(h, k)\right\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)(\|h\| + \|k\|) \tag{3.10}$$

Par continuité de φ en x_0, il existe $0 < r_2 \leq r_1$ tel que, pour tout $h \in E$ vérifiant $\|h\| \leq r_2$, nous ayons

$$\|\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)\| \leq r_1, \tag{3.11}$$

En conséquence, si $m \geq 0$ est tel que pour tout $u \in E$,

$$\left\|L^{-1}R(u)\right\| \leq m\|u\|, \tag{3.12}$$

nous déduisons de (3.9), (3.10), (3.11) et (3.12) que pour tout $h \in E$ tel que nous avons

$$\|h\| \leq r_2$$

$$\|\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)\| \leq m\|h\| + (1/2)\ (\|h\| + \|\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)\|)$$

et dès lors

$$\|\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)\| \leq (2m + 1)\|h\| \tag{3.13}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$; par la propriété (**??**) de R et la linéarité et la continuité de L^{-1}, il existe $0 < r_3 \leq r_2$ tel que, pour tout $(h, k) \in E \times F$ vérifiant

$$\|h\| \leq r_3, \ \|k\| \leq r_3,$$

nous ayons

$$\left\|L^{-1}R(h, k)\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2(m + 1)}(\|h\| + \ \|k\|) \tag{3.14}$$

Par conséquent, si $h \in E$ vérifie $\|h\| \leq \delta = \frac{r_3}{2m+1}$, ce qui implique $\|h\| \leq r_3 \leq r_2$ et donc, par (3.14),

$$\|\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)\| \leq (2m + 1)\|h\| \leq r_3,$$

il vient, en utilisant (3.14),

$$\|S(h)\| = \left\|L^{-1}R\left(h, \varphi\left(x_0+h\right) - \varphi\left(x_0\right)\right)\right\|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2(m+1)}\left(\|h\| + \ (2m+1)\|h\|\right) = \varepsilon\|h\|,$$

et le théorème est démontré. En faisant des hypothèses de différéntiabilité plus forte sur T, on obtient des propriétés de différentiabilité plus fortes sur φ.

Proposition 19. *Sous les hypothèses et avec les notations de la proposition* **??**, *si, en outre, les dérivées partielles sont continues en chaque point de $A \times B$, alors φ est de classe C^1 sur A. Plus généralement, si les dérivées partielles de T sont de classe C^k dans $A \times B$, alors φ est de classe C^k dans A.*

Démonstration

En effet, si les dérivées partielles T'_x et T'_y sont continues dans $A \times B$, il en est de même de $\left[T'_y\left(x_0, \varphi\left(x_0\right)\right)\right]^{-1}$. La formule (3.6)montre alors que φ est continue dans A. Par récurrence, nous voyons que si T'_x et T'_y sont de classe C^k, φ est de classe C^k.

3.3.1 Le cas où les espaces E,F et G sont des dimensions finies

Supposons maintenant que les espaces vectoriels normés E, F et G sont de dimensions finies. L'inversibilité de $T'_y(a,b)$ entraîne que $\dim F = \dim G$. Supposons que : $\dim E = m$ et $\dim F = \dim G = n$. L'équation

$$T(x,y) = 0$$

se traduit par le système de n équations aux n inconnues y_1,..., y_n suivantes

$$T_i\left(x_1, ..., x_m,\ y_1, ..., y_n\right) = 0 \ \ i = 1,\ 2, ..., n$$

où les T_i sont des fonctions scalaires des variables $x_1, ..., x_m,\ y_1, ..., y_n$.

On souhaite résoudre ce système sous la forme :

$$y_j = \varphi_j(x_1, ..., x_m) \text{ pour } \ 1 \leq j \leq n.$$

Dans ce cas le théorème des fonctions implicites s'énonce comme suit.

Théorème 4. *Si les applications scalaires $T_i\, i = 1..., n$ sont continues en (a,b) et vérifient :*

(i) $T_i(a,b) = 0$

(ii) pour chaque i, les dérivées partielles $\frac{\partial T_i}{\partial y_j}$ de T_i par rapport aux y_j existent et sont continues dans U,

(iii) le jacobien

$$J_T(a,b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial y_1}(a,b) & ... & \frac{\partial T_1}{\partial y_n}(a,b) \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial T_n}{\partial y_1}(a,b) & ... & \frac{\partial T_n}{\partial y_n}(a,b) \end{vmatrix}$$

est non nul.

Alors, on peut résoudre le système ci-dessus par rapport à $y_i, ..., y_n$. *La solution* $y = (y_j)$ *se présente comme suit :*

$$y_j = \varphi_j (x_1, ..., x_m) \ j = 1, ..., n.$$

Remarque 3.

Les noms des variables étant susceptibles de varier d'un problème à un autre, on retiendra que le jacobien à considérer est le déterminant des dérivées partielles des fonctions données par rapport aux inconnues que l'on veut obtenir.

Chapitre 4

Invertion locale d'une fonction de classe C^1

Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, V un ouvert de F et $f : U \longrightarrow V$, une application.

Définition 6. *On dit que f est un C^k- difféomorphisme (ou un difféomorphise de classe C^k) si :*

(i) f est bijective et est de classe C^k ;

(ii) $f^{-1} : V \longrightarrow U$ est de classe C^k.

Nous notons qu'une application de U dans V, bijective et de classe C^1, peut être un homéomorphisme sans être un C^1- difféomorphisme car son inverse peut ne pas être de classe C^1 comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 9. *La fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^3$ est un homéomorphisme de classe C^1, mais son inverse g^{-1} définie par $g^{-1}(y) = y^{1/3}$ n'est pas différentiable en* 0.

En effet, comme $g'(x) = 3x^2$, si $\left(g^{-1}\right)'(0)$ existait, nous aurions

$$1 = \left(g^{-1}\right)'(g(0)) \,.g'(0) = 0.$$

Nous allons appliquer le théorème des fonctins implicites à l'étude de l'existence locale et de la régularité de la fonction réciproque d'une fonction $\varphi : E \longrightarrow F$.

Soit $\varphi : U \longrightarrow F$ une application. Trouver la réciproque de φ si elle existe, c'est résoudre en x l'équation

$$y = \varphi(x) \,. \tag{4.1}$$

Si $T : F \times E \longrightarrow F$ est la fonction définie par

$$T(y, x) = y - \varphi(x) \,, \tag{4.2}$$

le théorème des fonctions implictes nous permet de résoudre l'équation (4.1)

Théorème 5. *Soient E et F des espaces de Banch, U un ouvert de E, φ une application de U dans F, $a \in U$, $b = \varphi(a)$. Supposons que φ soit de classe $C^k\,(k \geq 1)$ et que $\varphi'(a) \in Isom\,(E\,;\,F)$. Alors, il existe unvoisinage U_a de a, un voisinage V_b de b tels que la restriction φ_a de φ à U_a soit un C^k- difféomorphisme sur V_b. De plus, pour tout $y \in V_b$,*

$$\left(\varphi_a^{-1}\right)'(y) = \varphi_a'\left(\varphi_a^{-1}(y)\right) = (\varphi(x))^{-1}$$

où $y = \varphi(x)$.

Démonstration

En effet, l'application T définie dans l'ouvert $F \times U$ par la relation (4.2) vérifie les hypothèses (**??**), puisque

$$T(b,a) = 0 \ \text{ et } \ T_x'(b,a) = \varphi'(a) \in Isom\,(E\,;\,F)\,,$$

Il existe donc un voisinage V_b de b dans F, un voisinage U_a de A tel que $\theta_a' \subset V$ et une application unique $\varphi : \theta_b \longrightarrow \theta_a$ telle que, quel que soit $y \in \theta_b$, $y = \varphi(\psi(y))$.

Autrement dit, pour tout $y \in \theta_a$, il existe $x = \psi(y) \in \theta_a$ unique tel que $y = \varphi(x)$. En d'autres termes, l'application φ est inversible dans $\psi(\theta_b)$ et sa réciproque est ψ. Comme φ est continue en $\psi(V_b) = \varphi^{-1}(V_b)$ est un ouvert qui contient en outre a. Prenons $\theta_a = \varphi(\theta_b)$. Puisque par le théorème des fonctins implicites, l'application ψ est continue dans θ_b, $\varphi_a : \theta_a \longrightarrow \theta_b$.

En effet, par ce que

$$T_y'(a,b) = +1,$$

la formule (4.2)donne

$$\left(\varphi_a^{-1}\right)'(y) = \left[\varphi_a'\left(\varphi_a^{-1}(y)\right)\right]^{-1} = \left[\varphi_a'(x)\right]^{-1}$$

$y = \varphi_a(x)$ pour tout $y \in \theta$. Le formule ci-dessus montre que si φ est de classe C^k, φ^{-1} est aussi de classe C^k.

Chapitre 5

Equations différentielles ordinaires

5.1 Généralités

Soient E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E^{k+1}$ et $f : U \longrightarrow E$ une application. A toute fonction x définie sur un intervalle ouvert $I \subset R, k\,(\geq 1)$ fois différentiable telle que

$$(t, x(t), x'(t), ..., x^k(t)) \in U, \quad \forall t \in I,$$

faisons correspondre la fonction $\widetilde{g}\,(x) : I \longrightarrow E$ défini par :

$$[\widetilde{g}\,(x)]\,(t) = g\left(t, x\,(t)\,,\, x'\,(t)\,, ...,\, x^{(k)}\,(t)\right) \quad t \in J.$$

Définition 7. *L'équation*

$$[\widetilde{g}\,(x)] = 0 \tag{5.1}$$

dont l'inconnu est la fonction x est appelée équation différentielle ordinaire vectorielle (scalaire si $E = \mathbb{R}$).

On l'écrit en général, d'une manière peu correcte mais commode et consacrée par l'usage :

$$g\left(t, x, x', ..., x^{(k)}\right) = 0 \tag{5.2}$$

Définition 8. *Une solution (ou une intégrale) de l'équation différentielle (**??**) ou (5.2) est un couple (J, φ) formé d'un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ et d'une fonction $\varphi : J \longrightarrow E$ k-fois différentiable et telle que*

$$\left(t, \varphi\,(t)\,, \varphi'\,(t)\,, ..., \varphi^{(k)}\,(t)\right) \in U \quad \forall t \in J,$$

et que

$$\widetilde{g}\,(\varphi) = 0 \quad dans \quad J,$$

c'est-à-dire

$$f\left(t, \varphi\,(t)\,, \varphi'\,(t)\,, ..., \varphi^{(k)}\,(t)\right) = 0 \quad \forall t \in J.$$

Une équation de type (**??**) ou (5.2) est dite équation **différentielle** pour insister sur le fait que les dérivées de la fonction inconnue apparaissent dans l'équation contrairement, par exemple, au cas des équations étudiées par le théorème des fonctions implicites où l'inconnues qui, comme ici, est une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé E, intervient seule.

L'adjectif **ordinaire** met l'accent sur le fait que l'inconnue est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et non de $\mathbb{R}^m$, $m > 1$. Il existe des équations différentielles dont l'inconnue est une fonction définie sur $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ et qui font intervenir, outre la fonction inconnue, ses dérivées partielles ; de telles équations sont dites **aux dérivées partielles** et leur étude, en général très difficile, ne sera pas abordée dans ce cours. L'équation (**??**) est dite <u>vectorielle</u> parce que g et la fonction inconnue x prennent leurs valeurs dans l'espace vectoriel E. L'ordre k de l'équation différentielle (**??**) est l'ordre maximum des dérivées de l'inconnue qu'elle fait intervenir

5.2 Equations différentielles régulières, normales

Définition 9. *Une équation différentielle ordinaire d'ordre k est dite régulière si elle est de la forme*

$$x^{(k)} = h\left(t,\, x,\, x',\, ...,\, x^{(k-1)}\right) \tag{5.3}$$

où :

$$\widetilde{U} \subset R \times E^k, \qquad h : \widetilde{U} \longrightarrow E.$$

Elle est dite normale si elle est régulière et d'ordre $k = 1$; c'est-à-dire si elle de la forme

$$x' = h\,(t, x)\,.$$

avec $h : U \longrightarrow E$, U étant un ouvert de $R \times E$.

Dans toute la suite, sauf une mention explicite du contraire, nous ne considérerons que des équations différentielles régulières ; ce qui nous amène à sous-entendre, dans ce qui suit, cet adjectif.

Le résultat suivant permet de simplifier grandement l'exposé de la théorie des équations différentielles ordinaires.

Proposition 20. *Toute équation différentielle régulière d'ordre k peut s'écrire sous la forme d'une équation différentielle normale.*

Démonstration

Si (5.3) est l'équation différentielle d'ordre k considérée, définissons les fonctions u_i par

$$u_1 = x\ ,\ \ u_2 = x'\,, ...,\, u_k = x^{(k-1)} \tag{5.4}$$

où x est la fonction inconnue de l'équation (5.3). De (5.3) et de (5.4), nous déduisons immédiatement que

$$u_1' = u_2$$

$$u'_2 = u_3$$

$$.............. \tag{5.5}$$

$$u'_{k-1} = u_k$$

$$u'_k = h\,(t,\, u_1,\, u_2, ...,\, u_k)\,.$$

Si nous désignons par u la matrice unicolonne d'éléments $u_1,\, u_2, ...,\, u_k$ et par

$$f\,(t,\, u) = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ . \\ . \\ . \\ u_k \\ h\,(t,\, u_1, ...,\, u_k) \end{pmatrix}$$

alors (5.3) s'écrit

$$u' = f\,(t,\, u) \tag{5.6}$$

et u ainsi définie est solution de l'équation différentielle normale (5.6).

Ainsi, du point de vue théorique, il suffit de considérer les équations différentielles normales. Dans certaines applications toutefois, il est utile de considérer explicitement le cas d'équations différentielles régulières d'ordre $k > 1$ et ce sera le cas, de temps à autre, dans la suite.

Exemple 10. *En mécanique, l'équation de Newton régissant dans un système d'inertie, le mouvement d'un point maternel* p *de masse* m *s'écrit :*

$$m\gamma = F \tag{5.7}$$

où γ *et* F *sont respectivement l'accélération et la résultante des forces extétieures appliquées au point matériel. Cette dernière dépendant en général du temps* t *, de la position* x *et de la vitesse* $x' = \frac{dx}{dt}$ *du point matériel* p*, (5.7) est une équation différentielle d'ordre* 2 *de la forme*

$$\frac{dx^2}{dt^2} = F\,(t,\, x,\, x') \tag{5.8}$$

Exemple 11. *Si* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et si* $f : I \longrightarrow E$ *est une application continue, la recherche des primitives de* f *est évidemment équivalente à la recherch des solutions* $(J,\, \varphi)$ *de l'équation différentielle scalaire normale*

$$x' = f\,(t) \tag{5.9}$$

dont le second membre présente la particularité de ne pas dépendre de x*.*

5.3 Problème de Cauchy

Dans toute cette section, E désignera un espace de Banch de norme $\|.\|$, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$.

Soit $f : U \longrightarrow E$ une application. Considérons l'équation différentielle ordinaire

$$x' = f(t, x) \tag{5.10}$$

5.3.1 Problème de conditions initiales ou problème de Cauchy

Le problème de Cauchy pour l'équation différentielle ordinaire normale s'énonce comme suit :

Problème de Cauchy 1. *Etant donné $(t_0, x_0) \in U$, trouver une solution (J, φ) de $x' = f(t, x)$ qui est qui vérifie $\varphi(t_0) = x_0$.*

Ce problème est noté

$$x' = f(t, x) \ , \quad x(t_0) = x_0. \tag{5.11}$$

On dit que t_0 et x_0 sont les conditions initiales de la (ou des) solution(s) cherchées.

De la proposition **??**, nous déduisons aisément que le problème de Cauchy pour une équation différentielle régulière d'ordre k [voir (5.3)] consiste, étant données les conditions initiales

$$t_0 \in I \text{ et } (x_0, x_0^1, ..., x_0^{k-1}) \text{ dans } E\ ,$$

à trouver une solution (J, φ) telle que $t_0 \in J$ et

$$\varphi(t_0) = x_0, \varphi'(t_0) = x_0^1, ..., \varphi^{(k-1)}(t_0) = x_0^{k-1}$$

Dans le cas de l'exemple 1 ci-dessous, les conditions initiales sont donc t_0 (instant initial), x_0 (position initiale) et x_0^1 (vitesse initiale).

Donnons une caractérisation, souvent utile, des solutions du problèmes de Cauchy.

Proposition 21. *Si f est continue, alors, pour tout intervalle $J \subset I$ et tout $t_0 \in J$, $x_0 \in U$, une condition nécessaire et suffisante pour que (J, φ) où φ est continue soit une solution du problème de Cauchy (**??**) est que, quelque soit $t \in J$,*

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds. \tag{5.12}$$

Démonstration

Si (J, φ) est une solution de (**??**), alors φ est différentiable dans J, donc continue dans J, et est telle que

$$\varphi'(t_0) = x_0 \text{ et } \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \qquad \forall t \in J.$$

Il en résulte que φ' est également continue dans φ et dès lors, quel que soit $t \in J$,

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\, ds\,;$$

d'où (**??**). Réciproquement si la fonction φ est continue sur J, alors, pour tout $t_0 \in J$, la fonction $F : J \longrightarrow E$ définie par

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$$

est primitive d'une fonction continue et est, par conséquent, de classe C^1. Dès lors, si φ vérifie (**??**), elle est également de classe C^1 et, en dérivant les deux membres de (**??**), nous obtenons :

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in J.$$

D'autre par (**??**) pris en $t = t_0$ fournit la relation

$$\varphi(t_0) = x_0\,;$$

ce qui démontre la proposition.

5.3.2 Existence et Unicité de solutions du problème de Cauchy pour une équation différentielle normale

Dans toute cette sous section E désignera un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ de norme $\|.\|$, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $f : U \longrightarrow E$ une application continue.

Considérons l'équation différentielle

$$x' = f(t,\, x) \tag{5.13}$$

Définition 10 (Solutions approchées)**.** *Soit* $\varepsilon > 0$. *On dit qu'une fonction* $\varphi : I \longrightarrow E$ *continue est une solution à* ε *près de (**??**) si :*

(i) $(t, \varphi(t)) \in U$ *pour tout* $t \in I$ *;*

(ii) Il existe une partie finie (éventuellement vide) $S \subset I$ *telle que* φ *soit de classe* C^1 *sur* $I \setminus S$ *;*

(iii) $\|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))\| \leq \varepsilon$ *pour tout* $t \in I \setminus S$ *;*

(iv) pour tout $t \in S$, *la dérivée à droite* $\varphi'_d(t)$ *et la dérivée à gauche* $\varphi'_g(t)$ *de* φ *en* t *existent et*

$$\|\varphi'_d(t) - f(t, \varphi(t))\| \leq \varepsilon \;\; ; \;\; \left\|\varphi'_g(t) - f(t, \varphi(t))\right\| \leq \varepsilon$$

Le résultat suivant certifie l'existence de solutions à $\varepsilon-$près.

Proposition 22. *Soient I un intervalle complet de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$ tels que $I \times B[x_0; r] \subset U$ et que $f : I \times B[x_0; r] \longrightarrow E$ soit bornée, c'est-à-dire $\|f(t,x)\| \leq M$ pour tout $(t,x) \in I \times B[x_0; r]$ pour un certain $M > 0$. Soit*

$$J = I \cap \left[t_0 - \frac{r}{M},\ t_0 + \frac{r}{M}\right].$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, l'équation (**??**) admet une solution à $\varepsilon-$près.

Démonstration. Il suffit de contruire séparément φ dans les segments de J définis par $t \geq t_0$ et $t \leq t_0$. Nous allons raisonner pour $t \geq t_0$ et dès lors nous nous trouvons dans la situation où $I = [t_0, T]$ avec $0 < T - t_0 \leq \frac{r}{M}$.

D'ailleurs, l'unique fonction affine φ_0 définie dans I vérifiant

$$\varphi_0(t_0) = x_0 \quad \text{et} \quad \varphi_0'(t_0) = f(t_0, x_0)$$

est telle que

$$\varphi_0(t) = x_0 + (t - t_0) f(t_0, x_0). \tag{5.14}$$

Elle est de classe C^∞ dans I et vérifie

$$\varphi_0(I) \subset B[x_0\,; r].$$

Car, pour tout $t \in I = [t_0\,; T]$,

$$\|\varphi_0(t) - x_0\| = \|(t - t_0) f(t_0, x_0)\| \leq \frac{r}{M} M = r.$$

La fonction φ_0 sera une solution à $\varepsilon-$près dans un segment $[t_0, t_1] \subset I$ pourvu que nous ayons

$$\|f(t_0, x_0) - f(t, x_0 + (t - t_0) f(t_0, x_0))\| \tag{5.15}$$

dans $[t_0, t_1]$. Or la fonction f étant continue dans I, il en est de même de la fonction $g : I \longrightarrow E$ définie par

$$g(t) = f(t, x_0 + (t - t_0) f(t_0, x_0)).$$

Comme $g_0(t_0) = f(t_0, x_0)$, il est clair que $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $t_1 \geq t_0$ tel que

$$\|g(t_0) - g(t)\| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad t \in [t_0, t_1]\ ;$$

ce qui n'est rien d'autre que (5.15).

Si (5.15) est vérifiée dans tout I, alors φ_0 est une solution à $\varepsilon-$près telle que $\varphi_0(t_0) = x_0$ et nous avons obtenu ce que nous cherchons.

Sinon, il existe un plus grans $T > i_1 \geq t_0$ pour lequel (5.15) est satisfaite dans $[t_0, t_1]$: car si t_1 est la borne inférieure des t pour lesquels (**??**) n'est pas satisfaite, (5.15) est vraie pour tout $t \in [t_0, t_1]$ et dès lors, par continuite, elle est vraie pour $t = t_1$.

Posons :

$$\varphi_0(t_1) = x_1.$$

Nous avons

$$x_1 - x_0 = (t_1 - t_0) f(t_0, x_0)$$

et dès lors

$$x_1 \in B\left[x_0\,;\,r\right]$$

puisque

$$\left\|x_1 - x_0\right\| = (t_1 - t_0)\left\|f(t_0, x_0)\right\| < (T - t_0)\left\|f(t_0, x_0)\right\| \leq \frac{r}{M}.M = r.$$

Posons ensuite :

$$r_1 = r - \left\|x_1 - x_0\right\| > 0.$$

Alors

$$T - t_1 \leq \frac{r_1}{M}.$$

En effet

$$\left\|x_1 - x_0\right\| = (t_1 - t_0)\left\|f(t_0, x_0)\right\| \leq (t_1 - t_0).M.$$

Donc

$$-(t_1 - t_0) \leq -\frac{\left\|x_1 - x_0\right\|}{M}$$

et dès lors

$$T - t_1 = (T - t_0) - (t_1 - t_0) \leq \frac{r}{M} - \frac{\left\|x_1 - x_0\right\|}{M} = \frac{r_1}{M}.$$

Comme f est continue sur $[t_1 - T] \times B\left[x_1; r_1\right]$ et que

$$\left\|f(t, x)\right\| \leq M \quad \text{pour tout} \quad (t, x) \in [t_1 - T] \times B\left[x_1; r_1\right]$$

nous nous retrouvons, avec t_1 et x_1, dans des conditions analogues à celles où nous nous trouvions avec t_0 et x_0. Nous recommençons le processus pour obtenir un réel $t_1 < t_2 \leq T$ et une fonction affine $\varphi_1 : [t_1 - T] \longrightarrow B\left[x_1; r_1\right]$ définie par

$$\varphi_1(t) = x_1 + (t - t_1) f(t_1, x_1)$$

et qui vérifie dès lors

$$\left\|f(t_1, x_1) - f(t, x_1) + (t - t_1) f(x_1, x_2)\right\| \leq \varepsilon.$$

Si $t_2 = T$, la fonction φ égale à φ_0 dans $[t_0, t_1]$ et à φ_1 dans $[t_1, x_2]$ est une solution à $\varepsilon-$près de l'équation différentielle étudiée dans l'intervalle $[t_0 - T]$. Si ; au contraire, $t_2 < T$, on recommence le même processus : nous posons $\varphi_1(t_2) = x_2$. ALors, $\left\|x_2 - x_1\right\| < r_1$, puisque $t_2 - t_1 < T - t_1 \leq \frac{r_1}{M}$.

Posons ensuite : $r_2 = r_1 - \left\|x_2 - x_1\right\|$. Alors, $T - t_2 \leq \frac{r_2}{M}$, etc...

Nous obtenons, par recurrence une suite strictement croissante

$$(t_k)_{n \geq k \geq 0} \subset [t_0, T]$$

et une suite

$$(x_k)_{n \geq k \geq 0} \subset E$$

de points de E et des fonctions affines (φ_k)

$$\varphi_k : [t_k, t_{k+1}] \longrightarrow B\left[x_0; r\right] \quad k \geq 0,$$

telles que

$$\varphi_k(t_{k+1}) = \varphi_{k+1}(t_{k+1}) \quad k \geq 0.$$

La fonction $\varphi_k : [t_0, t_0] \longrightarrow B[x_0; r]$ définie par

$$\varphi(t) = \varphi_k(t) \quad \text{si} \quad t \in [t_k, t_{k+1}]$$

est continue, linéaire par morceaux et est en fait une solution à $\varepsilon-$près de l'équation différentielle dans l'intervalle $[t_0, t_n]$. Si $t_n = T$ pour un certain, le théorème est démontré. Prouvons qu'il ne peut en être autrement. Raisonnons par l'absurde.

Supposons que cette suite est infinie. Alors (t_n) étant croissante et majorée par

R admet une borne supérieure t'. Alors $t' = \lim_k t_x$,

$$\|x_{k+1} - x_k\| = |t_{k+1} - t_k| \, \|f(t_k, x_k)\| \leq M(t_{k+1} - t_k),$$

et dès lors $(x_k)_k$ est une suite de Cauchy. E étant complet, cette suite admet une limite $x \in B[x_0; r]$ (puisque $B[x_0; r]$ est fermée).

De l'égalité

$$\varphi_n(t) = x_n + (t - t_n) f(t_n, x_n),$$

valable pour tout $t \in [t_n, t']$, nous déduisons

$$\|\varphi_n(t) = x_n\| \leq (t - t_n) M \leq (t' - t) M$$

pour tout $t \in [t_n, t']$, et dès lors

$$\|\varphi_n(t) - x'\| \leq \|(x' - x_n) + (t' - t)\| M \tag{5.16}$$

dans $[t_n, t']$. Comme f est continue en (t', x'), il existe $\eta > 0$ tel que $|t' - t'| < \eta$ et $\|x - x'\| < \eta$ entraînent

$$\|f(t', x') - f(t, x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, si n est assez grand, nous auront, grâce à (5.16),

$$\|\varphi_n(t) - x'\| < \eta$$

et dès lors,

$$\|f(t', x') - f(t, \varphi_n(t))\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } t \in [t_n, t']$$

et aussi

$$\|f(t', x') - f(t_n, x_n)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, nous avons, pour tout $t \in [t_n, t']$ (n étant assez grand),

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(t) - f(t, \varphi_n(t))\| &= \|f(t_n, x_n) - f(t, \varphi_n(t))\| \\ &\leq \|f(t_n, x_n) - f(t', x')\| + \|f(t', x') - f(t, \varphi_n(t))\| \\ &\leq 2.\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

et par suite, φ_n est une solution à $\varepsilon-$près dans $[t_n, t']$. D'après la définition de t_{n+1}, ceci entraîne que $t_{n+1} \geq t'$. Or cela est impossible, puisque $t' \geq t_{n+2} > t_{n+1}$.

5.3.3 Le cas des équations linéaires

Définition 11. *Une équation différentielle linéaire (du premier ordre) est une équation de la forme*

$$x' = A(t)\,x + B(t) \tag{5.17}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et où

$$A : I \longrightarrow \mathcal{L}(E;E) \quad \textit{et} \quad B : I \longrightarrow E$$

sont des applications continues.

La fonction $(t,x) \to f(t,x) = A(t)x + D(t)$ est définie sur tout $I \times E$ de telle sorte que $U = I \times E$.

Soient donnés $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$. Nous avons la

Proposition 23. *Si l'intervalle I est compact, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, l'équation (**??**) admet une solution à $\varepsilon-$près (I, φ) telle que $\varphi(t_0) = x_0$.*

L'importance de ce résultat réside dans le fait que la solution à $\varepsilon-$près φ est définie sur I tout entier.

Démonstration Les applications $t \to \|A(t)\|$ et $t \to \|B(t)\|$, continues sur le compact I, sont bornées. Posons

$$\alpha = \sup_{t\in I} \|A(t)\| \quad \text{et} \quad \beta = \sup_{t\in I} \|B(t)\|.$$

Pour tout $(t,x) \in I \times B[x_0;r]$, nous avons donc

$$\|f(t,x)\| \le \|A(t)\,x + B(t)\| \le \alpha\,\|x\| + \beta$$

$$\le \alpha\,(\|x - x_0\| + \|x_0\|) + \beta \le \alpha\,(r + \|x_0\|) + \beta = M$$

et dès lors

$$\frac{M}{r} = \frac{\alpha\,\|x_0\| + \beta}{r} + \alpha.$$

Etant donné $x_0 \in E$, choisissons $r > 0$ tel que $\frac{M}{r} \le 2\alpha$; d'après la proposition **??**, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, une solution-approchée φ (linéaire par morceaux) dans l'intervalle compact.

$$J = I \cap \left[t_0 - \frac{1}{2\alpha},\ t_0 + \frac{1}{2\alpha}\right]$$

telle que $\varphi(t_0) = x_0$.

Ce premier résultat permet de trouver une solution $\varepsilon-$approchée, linéaire par

morceaux, dans I tout entier. Il suffit de la construire séparement dans $I' = \{t \in I : t \ge t_0\}$ et dans $I" = \{t \in I : t \le t_0\}$.
Raisonnons pour I'. Soit T l'extrémité droit de I'. Nous avons déjà obtenu dans la première partie, une solution $\varphi_0\varepsilon-$approchée dans $I' \cap \left[t_0, t_0 + \frac{1}{2\alpha}\right]$ telle que $\varphi_0(t_0) = x_0$. Si $\left[t_0 + \frac{1}{2\alpha} \ge T\right]$,

c'est terminé. Soit, $t_1 = t_0 + \frac{1}{2\alpha} < T$ et $x_1 = \varphi_0 (t_1)$. On recommence avec (t_1, x_1) ce que nous avons fait (t_0, x_0) : dans $I' \cap \left[t_1, t_1 + \frac{1}{2\alpha}\right]$ nous obtenons une solution $\varepsilon-$approchée, linéaire par morceaux, telle que $\varphi(t_1) = x_1$. Si $t_1 + \frac{1}{2\alpha} \geq T$, c'est terminé, car la fonction

$$\varphi : [t_0, t_1] \longrightarrow E \quad \text{définie par}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) \quad \text{si} \quad t \in [t_0, t_1]$$

$$\varphi(t) = \varphi(t) \quad \text{si} \quad t \in \left[t_1, t_1 + \frac{1}{2\alpha}\right]$$

répond à la question. Sinon, nous posons :

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{2\alpha} = t_0 + \frac{1}{2\alpha} < T, \qquad \varphi_1(t_2) = x_2$$

Ces opérations ont un sens, puisque $t_n = t_0 + n.\frac{1}{2\alpha}$ est plus grand que T pour n assez grand.

5.3.4 Existence de solutions dans le cas où E est de dimension finie

Soient (E, d) un espace métrique, F un espace de Banach $B(E; F)$ l'ensemble des appalications $\varphi : E \longrightarrow F$ bornées muni de la norme de la convergence uniforme.

Définition 12. *On dit qu'une partie non vide H de $B(E; F)$ est équicontinue en un point $x_0 \in E$ si, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall x \in E, \;\; d(x_0, x) < \delta \Longrightarrow \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| \leq \varepsilon \quad \forall \varphi \in H$$

H est dite équicontinue si H est équicontinue en tout point de E.

Il est aisé de voir que si H est équicontinue (resp. équicontinue en $x_0 \in E$), tout $\varphi \in H$ est continue sur E (resp. en x_0).

Nous admettons, pour la suite, l'important résultat suivant.

Théorème 6 (d'Ascoli)**.** *Avec les notations et les hypothèses ci-dessus H est compact si et seulement si H est équicontinue et, pour tout $x \in E$, l'adhérence de l'ensemble*

$$H(x) = \{\varphi(x) \; ; \; \varphi \in H\}$$

est compact dans F.

Désignons par $S(J, \varepsilon)$ l'ensemble des solutions $\varepsilon-$ approchées $\varphi : J \longrightarrow B[x_0; r]$ de l'équation (**??**). Alors, sous les hypothèses de la proposition **??**, $S(J, \varepsilon)$ n'est pas vide. De plus, par le théorème des accroissements finis, pour tout $\varphi \in S(J, \varepsilon)$,

$$\|\varphi(s) - \varphi(t)\| \leq |s - t| \sup_{\xi \in J} \|\varphi'(\xi)\|$$

pour tout $(s, t) \in J$, sauf en un nombre fini de points $\xi \in J$, en lesquels $\varphi'(\xi)$ n'est pas défini. Il résulte de la définition d'une solution à $\varepsilon-$ près que $\|\varphi'(\xi)\| \leq \varepsilon + M$ et dès lors, pour tout $\varphi \in S(J, \varphi)$,

$$\|\varphi(s) - \varphi(t)\| \leq |s - t| (M + \varepsilon).$$

Ainsi, $S(J, \varepsilon)$ est un ensemble équicontinu.

Théorème 7 (de Peano)**.** *Supposons que E soit de dimension finie. Soient $(t_0, x_0) \in U$, I un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $r > 0$ tels que*

$$(t_0, x_0) \in I \times B[x_0; r] \subset U.$$

*Si $f : U \to E$ est continue, l'équation (**??**) admet au moins une solution (J, φ) telle que $\varphi(t_0) = x_0$.*

Démonstration

L'espace E étant de dimension finie, la boule fermée $B[x_0; r]$ est compact de même que $I \times B[x_0; r]$. L'application f étant continue, $f(i \times B[x_0; r])$ est une partie bornée de E car compact. Soit donc $M > 0$ tel que

$$\|f(t, x)\| \leq M \qquad \forall (t, x) \in I \times B[x_0; r].$$

Alors, I, x_0, f et M vérifient les conditions de la proposition **??**. Pour tout entier $n \geq 1$, soit (J, φ_n) une solution à $\frac{1}{n}$ près de l'équation (**??**) telle que $\varphi_n(t_0) = x_0$. Alors pour tout $n \in M^*$, nous avons

$$\|\varphi_n(t) - \varphi_n(s)\| \leq |t - s| \left(M + \frac{1}{n}\right)$$

de telle sorte que l'ensemble $\{\varphi_n, \ n \in \mathbb{N}^*\}$ est équicontinu. Comme, d'une part, $\forall t \in J$

$$\{\varphi_n(t), \ n \in M^*\} \subset B[x_0; r]$$

et que d'autre part, $B[x_0; r]$ est compact, l'adhérence de $\{\varphi_n(t), \ n \in \mathbb{N}^*\}$ est compact pour tout $t \in J$.

Par le théorème d'Ascoli, $\{\varphi_n, \ n \in M^*\}$ est compact. En conséquence, il existe une suite extraite $(\varphi_{nk})_{nk}$ de (φ_n) qui converge uniformément vers une fonction $\varphi \in c(J.E)$ (puisque la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue). De plus, comme

$$\varphi_{nk}(t) \in B[x_0; r] \qquad \forall t \in J,$$

il est clair que

$$\varphi(t) \in B[x_0; r] \qquad \forall t \in J.$$

D'autre part, quel que soit l'entier $n_k \geq 1$,

$$\|\varphi_{nk}(t) \in f(t, \varphi_{nk}(t))\| \leq \frac{1}{n_k}$$

sauf tout au plus sur un ensemble fini $S \subset J$.

Le théorème des accroissements finis appliqué aux fonctions $g(t) = \frac{1}{n_k}t$ et

$$u_{nk}(t) = \varphi_{nk}(t) - x_0 - \int_{t_o}^{t} f(s, \varphi_{nk}(s))\, ds$$

donne

$$\left\| \varphi_{nk}(t) - x_0 - \int_{t_o}^{t} f(s, \varphi_{nk}(s))\, ds \right\| \leq \frac{1}{n_k} |t - t_0| \tag{5.18}$$

quelque soit $t \in J$. La convergence de φ_{nk} vers φ étant uniforme sur J, nous obtenons, par passage à la limite dans (5.18)

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_o}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \qquad \forall t \in J.$$

Il résulte de la proposition **??** que φ est une solution de (**??**) qui vérifie $\varphi(t_0) = x_0$.

Remarque 4. *L'hypothèse* $\dim E < +\infty$ *est essentiel dans le théorème de Péno.En effet lorsque* $\dim E = +\infty$ *ce théorème tombe en défaut.*

Pour s'en convaincre considérer

$E = \{x_k\} \subset \mathbb{C} : (x_k)_{k \in N} \to 0,\ \|(x_k)\| = sup_{k \in N} |x_k|$, $f : E \longrightarrow E$ définie par

$$x = (x_k) \to f(x) = y = (y_k) \quad \text{avec } y_k = \frac{1}{k+1} + \sqrt{|x_k|}.$$

Alors, f est continue. Cepdnant l'équation $x' = f(x)$ n'admet aucune solution φ telle que $\varphi(0) = 0$.

Le théorème **??** assure l'existence mais non l'unicité comme le montre l'exemple suivant. Soit le problème de Cauchy

$$x' = 2\sqrt{|x|} \quad , \quad x(0) = 0.$$

La fonction $x \to 2\sqrt{|x|}$ est continue. Pour tout couple (α, β) tel que $\alpha > \beta > 0$, la fonction $\varphi_{\alpha\beta}$ définie ci-dessous est une solution du problème de Cauchy.

$$\varphi_{\alpha\beta}(t) = 0 \qquad \text{si} \quad -\beta \leq t \leq \alpha,$$

$$\varphi_{\alpha\beta}(t) = -(\alpha + \beta)^2 \quad \text{si} \quad t < \beta,$$

$$\varphi_{\alpha\beta}(t) = -(t + \alpha)^2 \quad \text{si} \quad t < \alpha.$$

5.4 Existence et unicité dans le cas lipschitzien

Nous aurons besoin du résultat utile suivant

Lemme 3. *Soit $t_0 < t_1$, u et a deux fonctions numériques définies et continues sur $[t_0, t_1]$ telles que, pour tout $t \in [t_0, t_1]$,*

$$u(t) \leq a(t) + k \int_{t_0}^{t} u(s)ds \tag{5.19}$$

où $k > 0$. Alors, pour tout $t \in [t_0, t_1]$,

$$u\left(t\right) \leq a\left(t\right) + ke^{k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} a\left(s\right) e^{-k(s-t_0)} ds \tag{5.20}$$

Démonstration. Posons

$$v\left(t\right) = \int_{t_0}^{t} u\left(s\right) ds.$$

Alors $v\left(t_0\right) = 0$ et $v'\left(t\right) = u\left(t\right)$. La relation (5.19) s'écrit

$$v'\left(t\right) \leq a\left(t\right) + kv\left(t\right). \tag{5.21}$$

C'est une inégalité différentielle que nous allons résoudre. En posant

$$w\left(t\right) = e^{-k(t-t_0)} v\left(t\right)$$

nous avons $v\left(t_0\right) = v\left(t_0\right) = 0$ et $w'\left(t\right) = \left(v'\left(t\right) - kv\left(t\right)\right) e^{-k(t-t_0)}$ de telle sorte que (5.21) implique

$$w\left(t\right) \leq a\left(t\right) e^{-k(t-t_0)}$$

Une intégration entre t_0 et donne

$$w\left(t\right) \leq \int_{t_0}^{t} a\left(s\right) e^{-k(s-t_0)} ds.$$

D'où

$$v\left(t\right) = w\left(t\right)^{k(t-t_0)} \leq e^{k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} a\left(s\right) e^{-k(s-t_0)} ds$$

et dès lors par (5.21),

$$u\left(t\right) \leq a\left(t\right) + kv\left(t\right) \leq a\left(t\right) + ke^{k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} a\left(s\right) e^{-k(s-t_0)} ds$$

Remarque 5. *. Le lemme , lorsque $a(t) = a > 0$ est connu sous le nom du* ***lemme de Gronwall****. Son importance est qu'il remplace une inégalité où intervient $u(t)$ au premier comme au second membre, par une majoration de $u(t)$.*

Soient E un espace de Banach, U une partie non vide de $\mathbb{R}\times E$ et $f : U \longrightarrow E$ une application.

Définition 13. *f est dite $k-$lipschitzienne par rapport à la deuxième variable x s'il existe $k > 0$ tel que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k\|x-y\|$$

chaque fois que $(t,x) \in U$ et $(t,y) \in U$.

Le lemme 3 va nous servir à montrer que lorsque f est lipschitzienne, nous pouvons majorer $\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|$ pour deux solutions approchées de l'équation

$$x' = f(t,x) \tag{5.22}$$

Proposition 24. *Supposons que f soit $k-$lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et continue. Si $\varphi_1 : I \longrightarrow E$ est une solution ε_1-approchée, $\varphi_2 : I \longrightarrow E$ est une solution ε_2-approchée de l'équation (5.22) et si $t_0 \in I$, $x_1 = \varphi_1(t_0)$ et $x_2 = \varphi_2(t_0)$, alors quel que soit $t \in I$ (**??**)*

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq \|x_1 - x_2\| e^{k(t_-t_0)} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_1)\frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}$$

Démonstration Nous allons faire la démonstration dans le cas où $t \in \{t_0, t_1\}$; le cas où $t \leq t_0$ se démontre de la même manière. Posons $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Les fonctions φ_i $i = 1,2$ étant des solutions ε_i-approchées, nous avons

$$\|\varphi_1'(s) - f(f, \varphi(s))\| \leq \varepsilon_1 \qquad i = 1,2 \tag{5.23}$$

sauf, peut-être, sur un ensemble fini de points. Pour $i = 1,2$, posons

$$v_i(t) = \varphi_i(t) - x_i - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_i(s))\, ds.$$

La relation (5.23) s'écrit

$$\|v_i'(s)\| \leq \varepsilon_i$$

et dès lors, par le théorème des accroissements

$$\|v_i(t)\| = \|v_i(t) - v_i(t_0)\| \leq \varepsilon_i(t - t_0) \qquad i = 1,2$$

puisque

$$v_i(t_0) = 0. \text{ Donc, pour } t \in [t_0 - t_1],$$

$$\|v_1(t) - v_2(t)\| \leq \|v_1(t)\| + \|v_2(t)\| \leq \varepsilon(t - t_0)$$

c'est-à-dire

$$\left\| (v_1 (t) - v_2 (t)) - (x_1 - v_2) - \int_{t_0}^{t} [f (s, \varphi_1 (s))] \, ds \right\| \leq \varepsilon (t - t_0) .$$

La fonction définie sur $[t_0, t]$ par $u (t) = \|\varphi_1 (t) - \varphi_2 (t)\|$
vérifie, grâce à l'inégalité précédente,

$$u (t) \leq u (t_0) + k \int_{t_0}^{t} u (s) \, ds + \varepsilon (t - t_0)$$

qui s'écrit

$$u (t) \leq a (t) + \int_{t_0}^{t} u (s) \, ds$$

$$a (t) = u (t_0) + \varepsilon (t - t_0) = \|x_1 - x_2\| + \varepsilon (t - t_0) .$$

Nous sommes dans les conditions d'application du lemme 3. Nous avons donc, pour tout $t \in [t_0 - t_1]$,

$$u (t) \leq a (t) + k e^{k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} a (s) \, e^{-k(s-t_0)} ds.$$

Un calcul explicite du deuxième membre de cette inégalité achève la démonstration.

Chapitre 6

Exercices

Exercice 4. *Soient $n \geq 1$ un entier naturel, E_n l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. Etudier la différentiabilité des applications F et G définies sur E_n par :*

$$G(P) = P' - P^2 \,; \quad F(P) = \int_0^1 (P^3(t) - P^2(t))dt$$

où P' est la dérivée de P. Pour tout couple (P, h) d'élements de E_n, donner les expressions de $G'(P).h$ et de $F'(P).h$

Exercice 5. *Soient $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et C_0 l'espace vectoriel réel des suites numériques convergeant vers 0, muni de la norme $x = (x_n) \to \|x\| = sup\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\}$. On définit F sur C_0 par*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\phi(x_n).$$

Montrer que F est différentiable. Pour $x = (x_n)$ et $h = (h_n)$, on donnera l'expression de $F'(x).h$.

Exercice 6. *Soient E un espace de Banach et $F = \mathcal{L}(E)$ l'espace de Banach des endomorphismes continus de E, et $D \in F$. On consdère l'application $f : F \times F \to F$ définie par*

$$f(X, Y) = X + XDX - Y$$

1. *Montrer que f est de classe C^1.*
2. *Montrer qu'il existe un voisinage V de 0_F tel que , pour tout $B \in V$, l'équation*

   $$X + XDX = B$$

   admet une solution unique dans F.

Exercice 7. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x,y,z) = (x^2-y^2+z^2, xyz-1)$. *Soit* $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $f(x_0,y_0,z_0) = 0_{\mathbb{R}^2}$. *Montrer qu'il existe un intervalle* I *contenant* x_0 *et une application* $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ *telle que* $f(x,\varphi(x)) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Exercice 8.

1. **(i)** *Enoncer le théorème des accroissements finis pour les fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
   (ii) *Montrer, en utilisant la fonction* $v : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ *définie par* $v(t) = exp(it)$, *que ce résultat ne subsiste plus pour les fonctions à valeurs vectorielles.*
2. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *la fonction définie par* $f(x,y) = (x^2 - y^2, x^2 + y^2)$ *et* $g = f \circ f$.
   (a) *Montrer que* f *et* g *sont de classe* C^1.
   (b) *Calculer, en tout point* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *la matrice jacobienne* $Jf(x,y)$ *de* f *en* (x,y). *Calculer la matrice jacobienne* $Jg(0,0)$ *de* g *au point* $(0,0)$.
   (c) *Montrer qu'il existe* $\rho > 0$ *tel que pour tout* $(x,y) \in \overline{B((0,0),\rho)}$ *(la boule fermée de centre* $(0,0)$ *et de rayon* ρ*), on a :* $\|Jg(x,y)\| \leq \frac{1}{2}$. *On remarquera que* g *étant de classe* C^1, *l'application* $(x,y) \to Jg(x,y)$ *est continue.*
   (d) *Montrer que la fonction* g *admet un unique point fixe dans* $\overline{B((0,0),\rho)}$.

Exercice 9. .

1. *Soient* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, $\mathcal{L}(E)$ *l'espace vectoriel normé des applications linéaires de* E *dans* E *qui sont continues. Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on considère l'application*

   $$\varphi_n : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$

   définie par

   $$\varphi_n(f) = f^n$$

   (a) *Démontrer que, pour* $1 \leq i \leq 3$, φ_i *est différentiable et calculer la différentielle* $\varphi_i^{'}(f).h$ *pour tout* $f, h \in \mathcal{L}(E)$. *On pourra écrire* φ_i *comme une composition d'applications différentiables.*
   (b) *Déduire de ce qui précède que, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, φ_n *est différentiable. Calculer, pour* $f, h \in \mathcal{L}(E)$, *le vecteur* $\varphi_n^{'}(f).h$
2. *Démontrer qu'une norme n'est jamais différentiable à l'origine.*
3. *Soit* $(E, <,>)$ *un espace euclidien.*
   (a) *On pose* $g(u,v) = <u,v>$, $f(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 = \frac{1}{2} <u,u>$ *et* $\eta(u) = \|u\|$.
   Démontrer que g *est différentiable en tout point de* $E \times E$. *Déduisez-en que* f *est différentable en tout point de* E *et de ce dernier résultat, déduisez que* η *est différentiable sur* $E \setminus \{0\}$. *Dans chaque cas, on donnera l'expression de la différentielle.*

(b) *Soient* $(F, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé réel,* U *un ouvert de* F *et* $\varphi : U \longrightarrow E$ *une application différentiable dans* U*. On pose*

$$\Phi(u) = \|\varphi(u)\|.$$

Etudier la différentiabilité de l'application Φ*. Calculer le vecteur* $\Phi'(u).h$ *lorsqu'il existe.*

Exercice 10. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une application différentiable. Pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, on pose* $\varphi(t) = f(t, f(t, f(t,t)))$*. Montrer que* φ *est différentiable et calculer* $\varphi'(t)$ *en fonction des dérivées partielles de* f*. Vérifier la formule que vous avez trouvé en prenant* $f(s,t) = st^2$*.*

Exercice 11. *Soit* C_0 *l'espace des suites réels convergentes vers* 0*, muni de la norme* $x = (x_n)_{n\in N} \to \|x\| = sup_{n\in N}|x_n|$*, et une fonction* $\varphi \in \mathcal{C}^1(R,R)$ *telle que* $\varphi(0) = 0$*. Soit* Φ *définie dans* C_0 *par* $\Phi(x) = \Phi((x_n)_{n\in N}) = (\varphi(x_n))_{n\in N}$*. Montrer que* Φ *est une application de* C_0 *dans* C_0 *qui est différentiable. Pour* $x = (x_n)_{n\in N}$ *et* $h = (h_n)_{n\in N}$ *dans* C_0*, donner l'expression de* $\Phi^{'}(x).h$*.*

Exercice 12. *On considère* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = 1 + x\left(y^2+2\right)$*. Montrer que* f *est deux fois différentiable sur* $\mathbb{R}^2$ *et déterminer, pour* (a,b)*,* (h,k)*,* $(u,v) \in \mathbb{R}^2$*,* $f''(a,b)(h,k).(u,v)$*.*

Exercice 13. *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels normés,* Ω *un ouvert dans* E*,* $f : \Omega \longrightarrow F$ *une application de classe* C^1 *sur* Ω*. Démontrer que si* E *est de dimension finie, alors* f *est localement Lipschitzienne sur* Ω*.*

Exercice 14. *On considère le système* (S) *d'inconnues* x *et* y *:*

$$(S) \quad \begin{cases} x - \dfrac{1}{4}\sin(x+y) = 0 \\ y - 1 - \dfrac{2}{3}\arctan g\,(x-y) = 0 \end{cases}$$

En utilisant un théorème de point fixe et le théorème des accroissements finis, montrer que le système (S) *admet une solution unique.*

Exercice 15. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach sur le corps* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$*,* $\mathcal{V}$ *un ouvert non vide de* E *et* $f : \mathcal{V} \longrightarrow F$ *une application de classe* C^1*.*

1- Quand dit-on que f *est un* C^1 *difféomorphisme de* V *sur* $f(\mathcal{V})$ *?*

2- Démontrer que f *est un* C^1 *difféomorphisme de* $\mathcal{V}$ *sur* $f(\mathcal{V})$ *si et seulement si :*

(i) f *est injective ;*

(ii) $\forall u \in \mathcal{V}, f'(u)$ *est un isomorphisme de* E *dans* F*.*

Exercice 16. *1. Enoncer le théoruème des fonctions implicites.*

2. Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach réel ou complexe. On considère l'application

$$f : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$

définie par

$$f(A, B) = B - \frac{1}{2}\left(1_E - A + B^2\right).$$

En appliquant le théorème des fonctions implicites, démontrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 1_E dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $\forall A \in \mathcal{V}$, A s'écrit :

$$A = (1_E - \varphi(A))^2$$

où φ est défini différentiable dans $\mathcal{V}$ et vérifie $\varphi(1_E) = O_E$. Calculer $\varphi'(1_E) X$ pour $X \in \mathcal{L}(E)$.

On notera que :
$\mathcal{L}(E)$ désigne l'espace des applications linéaires continues, I_E (resp. O_E) désigne l'identité (resp. le vecteur nul) de E.

Exercice 17. *Soit E un espace vectoriel normé et $g : EE$ une application différentiable vérifiant :*

$$\exists\, k \in \left]0, 1\right[\in, \ \ \forall x \in \|g'(x)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq k.$$

Montrer que :

1. *$f = I_E + g$ est injective.*
2. *Démontrer que l'image réciproque par f d'une partie bornée de E est une partie bornée de E.*

Exercice 18. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$\begin{cases} f(0,0) &= & 0 \\ f(s,t) &= & \frac{st\left(s^2 - t^2\right)}{s^2 + t^2} \quad si \quad (s,t) \neq (0,0). \end{cases}$$

(i) Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, puis que les dérivées partielles secondes existent en tout point (s,t) de $\mathbb{R}^2$.

(i) Comment expliquer (eu égard au théorème de Schwarz que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(0,0)?$$

Exercice 19. *Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, U un ouvert de E, α une application différentiable de U dans $\mathbb{R}$. On défini l'application $\varphi : U \longrightarrow E$ par :*

$$\varphi(x) = \alpha(x)\, x.$$

Montrer que φ *est différentiable et calculer sa différentielle* $\varphi'(a)$ *pour* $a \in U$.

Soit E *un espace de Hilbert réel,* $\langle . \mid . \rangle$ *son produit scalaire et* $\|.\|$ *sa norme associée. Posons* $\mathcal{V} = E \setminus \{O_E\}$ *et considérons l'application* $f : \mathcal{V} \longrightarrow E$ *définie par*

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

Montrer que f *est différentiable en tout point* $x \in \mathcal{V}$ *et calculer* $f'(x)$.

Calculer f^{-1} *et montrer que* f *est un* C^1*- difféomorphisme de* $\mathcal{V}$ *sur* $\mathcal{V}$.

On considère le cas particulier où $E = \mathbb{R}^2$ *et* f *définie par :*

$$\forall\ (x, y) \in \mathcal{V} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Montrer que f *es* C^1*- difféomorphisme de* $\mathcal{V}$ *sur* $\mathcal{V}$ *et calculer les matrices jacobiennes*

$$Jf(x, y) \quad et \quad Jf^{-1}(u, v)$$

pour (x, y) *et* (u, v) *dans* $\mathcal{V}$.

Exercice 20. *Soient* $E = \mathbb{R}^n$ *muni du produit scalaire ordinaire* $\langle , \rangle$, $f : E \longrightarrow E$ *une application de classe* C^1 *qui est telle que :*

$$\forall x \in E,\ \forall h \in E,\ \|f'(x)\, h\| = \|h\|.$$

Montrer que : $\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$. *Montrer que :* $\forall a \in E,\ \exists\ U_a$ *voisinage de* a *tel que* $f_{|U_a}$ *est un* C^1*-difféomorphisme de* U_a *sur* $f(U_a)$. *En considérant* $\left(f_{|U_a}\right)^{-1}$, *déduire de ce qui précède que :* $\exists\ V_a$ *voisinage ouvert de* a *inclus dans* U_a *tel que* $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|, \forall x, y \in V_a$.

Soit $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $\phi(x, y) = \|f(x) - f(y)\|^2$.

Montrer que $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x, y)$ *existe et appartient à* $L_2(E, \mathbb{R})$.

En déduire que : $\forall x, y \in V_a, \forall h, k \in E,\ \langle f'(x)\, h, f'(y)\, k \rangle = \langle h, k \rangle$.

En développant $\|f'(x)\, h - f'(y)\, h\|^2$, *montrer que :* $\forall\, x, y \in V_a, \quad f'(x) = f'(y)$.

En utilisant un argument de connexité, montrer que : $\forall x \in E, \quad f'(x) = f'(a)$. *En déduire que* f *est une isométrie affine c'est-à-dire qu'il existe* $L : E \to F$ *linéaire telle que :*

$\forall h, k \in E, \langle L(h), L(k) \rangle = \langle h, k \rangle$ *et,* $\forall x \in E,\ f(x) = f(a) + L(x - a)$.

Exercice 21. *Soit* n *un entier naturel non nul et* $f : R^n \to R^n$ *une application continue telle que :*

$$\forall (x, y) \in R^n \times R^n,\ \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\|.$$

où $u \to \|u\|$ *est une norme de* R^n. *Montrer que :*

3.1 f *est injective ;*

3.2 $f(R^n)$ *est fermé ;*

3.3 $f(R^n)$ *est ouvert ;*

3.4 *f est surjective.*

Exercice 22. *Soient E et F des espaces de Banach, U un ouvert de E contenant l'origine o_E et soit $A : U \to L(E,F)$ une application de classe C^1. Soit $B : U \to F$ définie par*

$$B(x) \quad = \quad A(x).x$$

1.1 *Montrer que $B = \Phi \circ T$ où :*

(1.1.i) *$T : U \to L(E,F) \times U$ est de classe C^1,*

(1.1.ii) *$\Phi : L(E,F) \times U \to F$ est bilinéaire et continue.*

On précisera les applications Φ et T.

1.2. *Montrer que l'application B est de classe C^1 dans U.*

1.3. *Quels que soient u_0, u dans $L(E,F)$, x_0 dans U, x et h dans E, déterminer : $T^{'}(x_0).h$, $\Phi^{'}(u_0,x_0).(u,x)$, et $B^{'}(x).h$*

1.4. *Déduire de ce qui précède que si $A(o_E)$ est un isomorphisme de E dans F, il existe un voisinage V de o_E dans E et un voisinage W de o_F dans F tels que la restriction de B à V soit un diphéomorphisme sur W.*

Exercice 23. *Soit $f : R^n \to R^n$ une application de classe C^1. On considère l'application g de R^n dans lui-même définie par : $g(x) = x + f(x)$.*

1. *Soient $0 < k < 1$ et $\|.\|$ une norme de R^n . On suppose que*

$$\|f^{'}(x)\|_{L(R^n,R^n)} \leq k$$

pour tout $x \in R^n$.

1.a. *Montrer que : pour tout $(x_1, x_2) \in R^n \times R^n$,*

$$(1-k)\|x_1 - x_2\| \leq \|g(x_1) - g(x_2)\| \leq (1+k)\|x_1 - x_2\|$$

1.b. *Montrer que g est injective et que, pour tout $x \in R^n$, $g^{'}(x)$ est un isomorphisme. On admettra alors que g est un difféomorphisme de classe C^1 de R^n sur $g(R^n)$.*

2. *Soit $s = (x_m)_{m\in N}$ une suite de R^n telle que son image par g converge vers un élément z de R^n. Montrer que la suite s est aussi convergente et que l'image de sa limite est z. En déduire que $g(R^n)$ est fermée.*

3. *Déduire des deux questions précédentes que g est un difféomorphisme de R^n sur R^n. (On pourra utiliser un argument de connexité).*

2.4. *Le résultat ci-dessus est-il vrai si $k = 1$?*

Exercice 24. *En supposant les conditions convenables, différentier l'application $f : L(E) \times Isom(E) \to L(E)$ définie par*

$$f(A,B) = g(A \circ B^{-1}).$$

Exercice 25. *Soient E et F des espaces de Banach sur le corps $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $U \neq \phi$ une partie ouverte de F. On considère les deux applications $\Phi : U \to L(E)$ et $\Psi : U \to Isom(E)$ qu'on suppose différentiables dans U. On pose :*

$$F(u) = \Psi(u)^{-1} \circ \Phi(u) \circ \Psi(u).$$

Montrer que F est différentiable dans U et, pour tout $v \in U$, déterminer $F'(v)$.

Cas particuliers :

1. *$\Psi(u) = A$ où $A \in Isom(E)$;*
2. *$U = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$, et*

$$\Psi(u) = \begin{pmatrix} cosu & -sinu \\ sinu & cosu \end{pmatrix}.$$

Calculer $\Psi(u)^{-1}$, puis la différentielle au point v de $u \to \Psi(u)^{-1}$ de deux façons différentes.
Soit $\Phi(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $F(u)$ et $F'(u)$.
On pourra remarquer et utiliser le fait que $\Psi(u)$ est une rotation et que les relations trigonométriques permettent des simplifications.

Exercice 26. *Soient $(E, \|.\|_E$ et $(F, \|.\|_F$ des e.v.n. sur le même corps $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ et soit U un ouvert non vide et connexe de E. On suppose que f est une application différentiable de U dans F et que $Df = f'$ est constante sur U. Démontrer que f est application affine sur U.*

Exercice 27. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts non vides et $f : \Omega \to \Omega'$ une bijection telle que f et f^{-1} soient différentiables. Montrer, en utilisant la dérivée d'une fonction composée, que $m = n$.*

Exercice 28. *Soient U un ouvert convexe d'un espace de Banach E et f une application différentiable de U dans $\mathbb{R}$.*

(*a*) *Montrer que f est convexe dans U si et seulement si*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

pour tout couple de points $x, x_0 \in U$.

(*b*) *On suppose $E = \mathbb{R}^n$ et f de classe C^2. Pour $x \in U$, soit φ_x la forme quadratique définie par :*

$$\varphi_x(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j, \text{ où } h = (h_1, ..., h_n).$$

Montrer que f est convexe dans U si et seulement si φ_x est positive pour tout $x \in U$, c'est-à-dire, $\varphi_x(h) \geq 0$, pour $x \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 29 (Théorème des accroissements finis classique)**.** *Soient $a < b$ deux nombres réels.*

(*a*) *Soit f une fonction numérique définie et continue sur le segment $[a, b]$, dérivable dans $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$ [Théorème de Rolle].*

(*b*) *Soit f une fonction numérique définie et continue sur le segment fermé et borné $[a, b]$, dérivable dans $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

[Téoréme des acroissements finis classiques]

(*c*) *Montrer que, pour a et b réels, $a \neq b$, il n'existe aucun réel $c \in]a, b[$ tel que*

$$e^{ib} - e^{ia} = i(b - a)e^{ic}.$$

En déduire que le théorème des accroissements finis classique ne s'applique pas aux fonctions à valeurs vectorielles.

Exercice 30. *Soient $a < b$ deux nombres réels, $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ lespacede Banach des applications numériques continues sur le segment fermé et borné $[a, b]$ muni de la norme*

$$\|f\| = sup_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2. Montrer que l'application $f \to G(f) = \int_b^b \varphi(f(x))dx$ est différentiable dans E. Cette application est-elle toujours de classr C^1?

Exercice 31. *Soient E un espace de Hilbert réel et f une application de classe C^1 de E dans lui-même telle que*

$$(f'(x).h|h) \geq \alpha(h|h), \ \forall x, h \in E, \ \text{et } \alpha > 0$$

(*a*) *En appliquant le théorème des accroissements finis classique à la fonction φ définie par :*

$$\varphi(t) = (f(tb + (1 - t)a|b - a),$$

montrer que, pour $a, b \in E$, on a :

$$(f(b) - f(a)|b - a) \geq \alpha(b - a|b - a).$$

En déduire que f est fermée.

(*b*) *Montrer que, pour tout $x \in E$, $f'(x)$ est d'image dense dans E, puis bijective dans E. En déduire que f est ouverte.*

(*c*) *Montrer que f est un difféomorphisme de classe C^1 de E sur E.*

Exercice 32. *Soit $\gamma > 0v$ et g une fonction numérique impaire définie dans l'intervalle $[-\gamma, \gamma]$ admettant des dérivées continues, avec une dérivée à droite en $-\gamma$ et une dérivée à gauche en γ, jusqu'à l'ordre 5 inclus. Démontrer que,* *pour tout* $t \in [-\gamma, \gamma]$*, il existe* ξ *dans l'interval ouvert d'extrémités* 0 *et* t *tel que :*

$$g(t) = \frac{t}{3}[g'(t) + 2g'(0)] - \frac{t^5}{180}g^5(\xi).$$

En déduire que, pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, de classe* C^5 *sur* $[a, b]$*, on a :*

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6}[f'(a) + f'(b) + 4f'(\frac{a+b}{2})] - \frac{(b-a)^2}{2880}f'(\xi)$$

où $\xi \in]a, b[$*. C'est la formule de* Simpson*.*

Exercice 33. $(E, \|.\|_E)$ *un espace de Banach sur* $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *et soit* U *un ouvert non vide de* E*. Soit* f *une application différentiable sur* U*. Soit* V *une partie de* U *qui est convexe et fermée dans* E *et qui vérifie* $f(V) \subset V$*. On suppose que* $\sup \|f'(u)\| < 1$*. Démontrer que* f *possède un point fixe dans* U*.*

Exercice 34. *Soient* $\mathcal{M}_n(K)$ *l'espace vectoriel sur* $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *des matrices carrées d'odre* n *à coefficients dans* K*,* U *l'ensemble (ouvert : pourquoi ?) des mes éléments inversibles de* $\mathcal{M}_n(K)$*. Démontrer que l'application déterminant* $det : U \to K$*,* $A \to det(A)$ *est différentiable dans* U *et qu'on a, pour tout* $A \in U$*,*

$$(det)'(A).H = det(A).tr(A^{-1}.H)$$

où $tr(M)$ *désigne la trace de la matrice* M*.*

Suggestion : Considerez le déterminant d'une matrice comme le déterminant du système de vecteurs constitué par les colonnes de la matrice.