Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

A l'aide d'une série alternée, montrer que e est un irrationnel.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$, où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(n!)^{1/n}}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit $\sum u_n$ une série réelle, convergente mais non absolument convergente.
Pour tout n, on pose $u_n^+ = \sup(u_n, 0)$ et $u_n^- = \sup(-u_n, 0)$.
Montrer que les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont divergentes.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}}\right)$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit z un nombre complexe de module 1, mais tel que $z \neq 1$.

1. Pour tout entier n, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$. Montrer que $|T_n| \leq \dfrac{2}{|1-z|}$.
2. En déduire que pour $N \geq 1$ et $p \geq 1$, on a : $\displaystyle\Big|\sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{z^n}{n}\Big| \leq \frac{4}{(N+1)\,|1-z|}$.
3. Montrer que la série $\sum \dfrac{z^n}{n}$ est convergente.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Pour tout complexe z vérifiant $|z| < 1$, calculer $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, avec $u_n = nz^n$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ avec $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Encadrer $\frac{1}{\mathrm{e}}$ en supposant qu'il est rationnel.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $\ln(n!^{1/n}) \sim \frac{n}{\mathrm{e}}$, et que la suite $n \mapsto \ln|u_n|$ est décroissante.
En déduire qu'on peut appliquer le critère spécial des séries alternées.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $\begin{cases} u_n^+ - u_n^- = u_n \\ u_n^+ + u_n^- = |u_n| \end{cases}$ et raisonner par l'absurde.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Montrer que $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{\alpha+1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente si $\alpha = -1$, et divergente sinon.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. Utiliser $T_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ et $|1 - z^{n+1}| \leq 2$.
2. Pour $N \geq 1$ et $p \geq 1$, prouver que $\sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=N+1}^{N+p-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) T_n + \frac{T_{N+p}}{N+p} - \frac{T_N}{N+1}$.

   En déduire $\left| \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{z^n}{n} \right| \leq \frac{4}{(N+1)|1-z|}$.
3. Montrer que la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{z^n}{n}$ est de Cauchy.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Montrer que $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n = zS_{N-1} + z\frac{1-z^N}{1-z}$.

Faire tendre N vers $+\infty$, et en déduire $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Il suffit de prouver que $\frac{1}{\mathrm{e}}$ est irrationnel. Supposons par l'absurde $\frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. En particulier $\frac{1}{\mathrm{e}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$.

Cette série étant alternée, $\frac{1}{\mathrm{e}}$ est strictement compris entre deux sommes partielles consécutives.

Plus précisément avec notre hypothèse : $\forall N \in \mathbb{N}^*, S_{2N-1} < \frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{p}{q} < S_{2N} = S_{2N-1} + \frac{1}{(2N)!}$

Il est clair que $A_N = (2N)!S_{2N-1}$ est entier.

L'encadrement s'écrit donc $A_N < (2N)!\frac{p}{q} < 1 + A_N$.

Mais il suffit de choisir N tel que $2N \geq q$ pour constater que $(2N)!\frac{p}{q}$ est un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui est absurde.

Conclusion : $\frac{1}{\mathrm{e}}$ et donc e sont des irrationnels.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On a : $\ln(n!^{1/n}) = \frac{1}{n}\ln(n!) \sim \frac{1}{n}\ln(n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}) = \frac{n}{\mathrm{e}} + \frac{1}{2n}\ln(2\pi n) \sim \frac{n}{\mathrm{e}}$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$.

Puisque $\sum u_n$ est alternée, il reste à prouver que la suite $n \to |u_n|$ est décroissante.

Pour cela on va montrer que la suite $n \mapsto \ln|u_n|$ est décroissante.

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\ln|u_{n+1}| - \ln|u_n| &= \frac{1}{n}\ln(n!) - \frac{1}{n+1}\ln(n+1)! = \frac{(n+1)\ln n! - n\ln(n+1)!}{n(n+1)} \\
&= \frac{\ln n! - n\ln(n+1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k}{n+1} < 0
\end{aligned}$$

Ce résultat prouve donc que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(n!)^{1/n}}$ est convergente.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Pour tout entier n, on a : $u_n^+ - u_n^- = u_n$ et $u_n^+ + u_n^- = |u_n|$.

Si l'une des séries $\sum u_n^+$ ou $\sum u_n^-$ convergeait, l'autre convergerait aussi car $u_n^+ = u_n^- + u_n$ et $\sum u_n$ converge.

Mais dans ce cas la série de terme général $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ serait convergente, ce qui n'est pas.

Conclusion : les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont divergentes.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On effectue un développement asymptotique de u_n.

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(\sqrt{n}+(-1)^n) - \frac{1}{2}\ln(n+\alpha) = \ln\Bigl(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Bigr) - \frac{1}{2}\ln(1+\frac{\alpha}{n}) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\Bigl(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Bigr) - \frac{\alpha}{2n} + \mathrm{O}\Bigl(\frac{1}{n^2}\Bigr) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{\alpha+1}{2n} + \mathrm{O}\Bigl(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Bigr)\end{aligned}$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente (critère spécial des séries alternées).

Toute série dont le terme général est un $\mathrm{O}(\frac{n}{\sqrt{n}})$ est absolument convergente.

De ces remarques et du calcul précédent, il résulte que $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \frac{\alpha+1}{2n}$.

Conclusion : la série $\sum u_n$ est convergente si $\alpha = -1$, et divergente sinon.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. On sait que $T_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Or $|1-z^{n+1}| \le 1 + |z|^{n+1} = 2$. Le résultat en découle.
2. Pour tout entier $N \ge 1$ et tout entier $p \ge 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{z^n}{n} &= \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{1}{n}(T_n - T_{n-1}) = \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{1}{n}T_n - \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{1}{n}T_{n-1} \\ &= \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{1}{n}T_n - \sum_{n=N}^{N+p-1} \frac{1}{n+1}T_n = \sum_{n=N+1}^{N+p-1} \Bigl(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Bigr)T_n + \frac{T_{N+p}}{N+p} - \frac{T_N}{N+1}.\end{aligned}$$

   On en déduit, en utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned}\Bigl|\sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{z^n}{n}\Bigr| &\le \sum_{n=N+1}^{N+p-1} \Bigl(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Bigr)|T_n| + \frac{|T_{N+p}|}{N+p} + \frac{|T_N|}{N+1} \\ &\le \frac{2}{|1-z|}\Bigl(\sum_{n=N+1}^{N+p-1} \Bigl(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Bigr) + \frac{1}{N+p} + \frac{1}{N+1}\Bigr)\end{aligned}$$

   Il reste $\Bigl|\sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{z^n}{n}\Bigr| \le \frac{4}{(N+1)|1-z|}$, qui tend vers 0 si $N \to \infty$, indépendamment de p.
3. Soit (S_N) la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{z^n}{n}$.

   La question précédente donne : $\forall N \ge 1, \forall p \ge 1, |S_{N+p} - S_N| \le \frac{4}{(N+1)|1-z|}$.

   On en déduit que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0$ tel que : $(N \ge N_0$ et $p \ge 1) \Rightarrow |S_{N+p} - S_N| \le \varepsilon$.

   La suite des sommes partielles S_N est donc de Cauchy.

   Conclusion : la série $\sum \frac{z^n}{n}$ est convergente.

Corrigé de l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Puisque $|z| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} n^3 |z|^n = 0$. La série $\sum u_n$ est donc convergente.

Posons $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} u_n$. Alors on a : $S_N = z\sum\limits_{n=1}^{N}(n-1)z^{n-1} + \sum\limits_{n=1}^{N} z^n = zS_{N-1} + z\frac{1-z^N}{1-z}$.

Quand on fait tendre N vers ∞, on trouve $S = zS + \frac{z}{1-z}$. On en déduit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$.