MÉCANIQUE

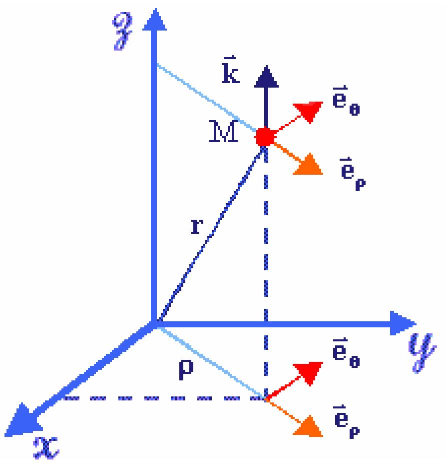
[Retour | Accueil | Cours | Exercices | Examens | Quizz-Qcm | Q-R (tests) | Contact]

- Retour
- Accueil
- Adhérents
- Livre d'or
- Forum
- Recherche
- Contact

Série 3:
CINÉMATIQUE DU POINT MATÉRIEL

EXERCICE 1: exercice récapitulatif des connaissances.

Un point matériel **M** de masse **m** est repéré dans un référentiel fixe **(Oxyz)** par ses coordonnées cylindriques **(ρ, θ, z)** telles que : ρ = **R** , θ = ω **t** et **z** = **h** θ (**R** et ω sont des constantes positives et **t** le temps)**.**



1- Écrire l'expression du vecteur position $\vec{OM}$ en coordonnées cartésiennes **base (** $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ **)**

2- a) quel est le mouvement du point **M** dans le plan **xOy** ?

b) quel est le mouvement du point **M** suivant la direction de l'axe **Oz** ?

c) quel est le mouvement résultant du point **M** ?

3- Déterminer les composantes cartésiennes et le module des vecteurs vitesse et accélération ?

4- Calculer l'abscisse curviligne **s(t)** du point **M** sachant qu'à l'instant initial **t = 0, s(t) = 0**

5- Quelles sont les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération selon les vecteurs unitaires $\vec{T}$ et $\vec{N}$ du trièdre de Serret- Frenet ?

6- Calculer le rayon de courbure R_C de la trajectoire de **M** ?

7- Montrer que la vitesse fait un angle constant **a** avec l'axe **Oz ?,** quel est l'hodographe du mouvement ?

8- Quelles sont les coordonnées cylindriques du mouvement du point **M** ?

9- Déterminer les vecteurs unitaires $\vec{T}$, $\vec{N}$ et $\vec{B}$?

Réponse:

1°) En coordonnées cylindriques,

la position du point M est repérée par $\rho(t)$, $\theta = (t)$ et $z(t)$.

Dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$),le vecteur position s'écrit :

$\vec{OM} = R\cos\omega t + R\sin\omega t + h\,\omega t$ avec $\rho = R$

2°)

a – Dans le plan *xoy*, nous avons : $x = R\cos\omega t$ et $y = R\sin\omega t$

avec $x^2 + y^2 = R^2$, c'est un mouvement circulaire de rayon R

b – Selon la direction de l'axe Oz, on a $z = h\,\omega t$

C'est un mouvement rectiligne uniforme

c – Le mouvement résultant du point M est hélicoïdal simple. La trajectoire est une hélice enroulée sur un cylindre circulaire de rayon R et de pas h constant.

3°). La vitesse $\vec{v}$ s'écrit alors dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sous la forme :

$$\vec{v} = -R\omega \sin\omega t\,\vec{i} + R\omega\cos\omega t\,\vec{j} + h\omega\vec{k} \quad \text{avec } \|\vec{v}\| = \omega\sqrt{R^2+h^2} = \text{cte}$$

L'accélération est égale à :

$$\vec{a} = -R\omega^2\cos\omega t - R\omega^2\sin\omega t \quad \text{avec } \|\vec{a}\| = R\omega^2$$

4°) On écrit $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{T} = v\vec{T}$ d'où $ds = v\,dt$ avec $\|\vec{v}\| = \omega\sqrt{R^2+h^2}$

On obtient $s(t) = \omega\sqrt{R^2+h^2}\;t + C$; C est une constante

Or à $t = 0$; $s(t) = 0$ d'où $C = 0 \Rightarrow \boxed{s(t) = \omega\sqrt{R^2+h^2}\;t}$

5°) Le vecteur accélération est défini par : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\vec{T}\right) = \frac{d}{dt}\left(v\vec{T}\right)$

Puisque $\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{dt}$ et $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{R_C}$, R_C est le rayon de courbure

Alors $\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{\vec{N}}{R_C} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R_C}\vec{N}$

La composante tangentielle de l'accélération est nulle, en effet :

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\omega\sqrt{R^2+h^2}\right)}{dt} = 0 \quad \text{d'où } a_T = 0 \text{ et } \|\vec{a}\| = \|\vec{a}_N\| = \frac{v^2}{R_C} = R\omega^2$$

6°) $\|\vec{a}_N\| = i\frac{v^2}{R_C} = R\omega^2 = \frac{\omega^2(R^2+h^2)}{R_C} \Rightarrow \boxed{R_C = R + \frac{h^2}{R}}$

7°) On a $\vec{v} = -R\omega\sin\omega t\,\vec{i} + R\omega\cos\omega t\,\vec{j} + h\omega\,\vec{k}$; on écrit $\vec{v}.\vec{k} = \|\vec{v}\|\|\vec{k}\|\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{h\omega}{\omega\sqrt{R^2+h^2}} = \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} = \text{cte}$ donc α est un angle constant

Puisque l'angle α et le module de la vitesse sont constants, alors l'hodographe du mouvement est un cercle de rayon $r_1 = R\omega$

8°) $\vec{OM} = R\,\vec{e}_\rho + h\,\omega t\,\vec{k}$; $\vec{V} = R\omega\,\vec{e}_\theta + h\omega\,\vec{k}$ et $\vec{a} = -R\omega^2\,\vec{e}_\rho$

9°) ♦ On a $\vec{T} = \frac{d\vec{OM}}{ds} = \frac{d\vec{OM}}{dt}\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\vec{v}}{v} \Rightarrow \boxed{\vec{T} = \frac{-R\sin\omega t\vec{i} + R\cos\omega t\vec{j} + h\vec{k}}{\sqrt{R^2+h^2}}}$

♦ Pour $\vec{N}$, on écrit $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{R_C} \Rightarrow \vec{N} = R_C\frac{d\vec{T}}{ds} \Rightarrow \vec{N} = R_C\frac{d\vec{T}}{dt}\frac{1}{\frac{ds}{dt}}$

D'où $\boxed{\vec{N} = \cos\omega t\,\vec{i} - \sin\omega t\,\vec{j}}$

♦ Pour $\vec{B} = \vec{T}\wedge\vec{N}$ $\boxed{\vec{B} = \frac{h\sin\omega t\vec{i} - h\cos\omega t\vec{j} + R\vec{k}}{\sqrt{R^2+h^2}}}$

EXERCICE 2:

Un tracteur **T** et une moissonneuse batteuse **M** distants de **L** se trouvent sur un terrain plat. A l'instant initial, le tracteur **T** se trouve en **O** pris pour origine, l'axe des ordonnées **Oy**

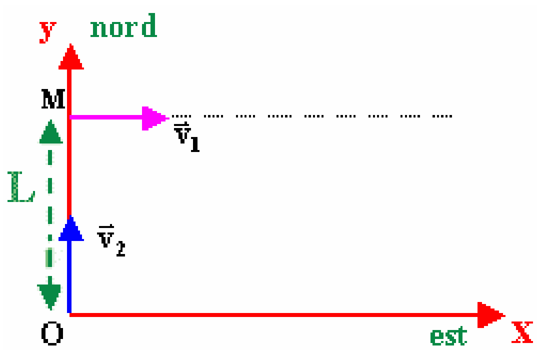
(orienté vers le nord) est celui contenant les deux engins et l'axe des abscisses **Ox** est orienté vers l'est (voir schéma).

1- La moissonneuse batteuse **M** se dirige vers l'est à la vitesse $\vec{v}_1$, alors que le tracteur **T** se dirige vers le nord à la vitesse $\vec{v}_2$. Calculer la distance minimale qui va séparer les deux engins ?

2- On suppose que la moissonneuse batteuse se dirige toujours vers l'est à la même vitesse $\vec{v}_1$. Déterminer la direction que le tracteur **T** doit prendre pour rencontrer **M** dans son parcours ?

Calculer le temps nécessaire pour cette rencontre ?

A.N : $L = 8$ km , $v_1 = 10{,}8$ km/h , $v_2 = 5$ m/s



[**Retour** I Accueil I Cours I Exercices I Examens I Quizz-Qcm I Q-R (tests) I Contact]