# Cours et exercices d'Algèbre linéaire
# Première année
# Mathématiques et Informatique

Prof. Assohoun ADJE

Le 15 octobre 2010

# Chapitre 1

# Espaces vectoriels

## 1.1 Définition et Exemples

### 1.1.1 Défintion

Dans toute cette section, sauf une mention explicite du contraire, $K$ est un corps commutatif et $E$ est un ensemble non vide.

**Définition 1.** *On dit que $E$ est un espace vectoriel sur $K$ si $E$ est muni d'une loi de composition interne, l'addition + telle que :*

$(ev)_1$ $(E, +)$ *est un groupe commutatif,*

*et d'une loi externe (non notée) $(\alpha, x) \in K, \times E \to \alpha x \in E$, vérifiant les axiomes :*

$(ev)_2$ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \;\; \forall \alpha, \beta \in K, \; \forall x \in E$

$(ev)_3$ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \;\; \forall \alpha, \beta \in K, \; \forall x \in E$

$(ev)_4$ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \;\; \forall \alpha \in K, \;\; \forall x, y \in E.$

$(ev)_5$ $1x = x \;\; \forall x \in E$

Si $E$ est un espace vectoriel sur $K$, les éléments de $K$ sont appelés des scalaires, ceux de $E$ sont appelés des vecteurs.

### 1.1.2 Exemples

**Exemple 1.** *Si $K$ est un corps commutatif et $n$ est un entier naturel non nul, $K^n$ est un espace vectoriel sur $K$.*

Les lois faisant de $K^n$ un $K$-espace vectoriel sont :

**Addition :** Pour $x = (x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_n) \in K^n$, on pose :

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n);$$

**Loi externe :** Pour $x = (x_1, ..., x_n) \in K^n$ et $\alpha \in K$, on pose :

$$\alpha x = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n).$$

**Exemple 2.** *Soient $X$ un ensemble non vide, $\mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble des applications $f : X \to E$. $\mathcal{F}(X, E)$ est un espaces vectoriels sur $K$ pour les lois suivantes :*

$$(f, g) \to f + g, \quad x \in X \to (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

*et*

$$(\alpha, f) \in K \times \mathcal{F}(X, E) \to \alpha f, \quad x \to (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

**Exemple 3.** *Soient $(E_k)_{1 \le k \le n}$ un nombre fini d'espaces vectoriels, $F = \prod_{1 \le k \le n} E_k$. Alors $F$ est un espace vectoriel sur $K$ appelé espace vectoriel-produit des espaces vectoriels $E_k, 1 \le k \le n$.*

Les lois qui forment la structure vectoriel de $F$ sont :

**Addition :** Pour $x = (x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_n) \in F$, on pose :

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n);$$

**Loi externe :** Pour $x = (x_1, ..., x_n) \in F$ et $\alpha \in K$, on pose :

$$\alpha x = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n).$$

## 1.2 Propriétés et règles de calcul

Soit $E$ un espace vectoriel sur le corps commutatif $K$. Notons :

**(i)** $0_K$ : le zéro de $K$, c'est-à-dire, l'élément neutre du groupe additif $(K, +)$.

**(ii)** $0_E$ : le vecteur nul, c'est-à-dire, l'élément neutre du groupe additif $(E, +)$.

**(iii)** $1 = 1_K$ : l'élément unité du corps $K$.

**Propriété 1** :

$$\forall x \in E, \quad \boxed{0_K.x = 0_E}$$

En effet :

$$(\alpha + 0_K).x = \alpha x + 0_K x$$

d'après l'axiome $(ev)_3$, soit :

$$\alpha x = \alpha x + 0_K x.$$

Comme dans un groupe, tout élément est simplifiable (régulier), on obtient, en simplifiant par $\alpha x$ :

$$0_K x = 0_E.$$

**Propriété 2** :

$$\forall \alpha \in K, \quad \boxed{\alpha\, 0_E = 0_E.}$$

En effet :

$$\alpha(x + 0_E) = \alpha x + \alpha 0_E$$

d'après l'axiome $(ev)_4$, soit

$$\alpha x = \alpha x + \alpha 0_E$$

et, en simplifiant par $\alpha x$, on obtient :

$$\alpha 0_E = 0_E.$$

**Propriété 3** :

$$\forall \alpha \in K \ \text{ et } \ x \in E, \quad \boxed{[\alpha x = 0_E] \Rightarrow [\alpha = 0_K \ \text{ ou } \ x = 0_E].}$$

Supposons $\alpha x = 0_E$ avec $\alpha \neq 0_K$. Alors :

$$\alpha \neq 0_K \Rightarrow \alpha^{-1} \in K.$$

Donc :

$$x = \alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1} 0_E = 0_E.$$

**Propriété 4** :

$$\forall \alpha \in K \ \text{ et } \ x \in E, \quad \boxed{(-\alpha)x = -(\alpha x) = \alpha(-x)}$$

En effet, d'après la propriété 1 :

$$\alpha + (-\alpha) = 0_K \quad \Rightarrow [\alpha + (-\alpha)]x = 0_E.$$

En appliquant l'axiome $(ev)_3$, on obtient :

$$\alpha x + (-\alpha)x = 0_E$$

c'est-à-dire :

$$-(\alpha x) = (-\alpha)x.$$

On en déduit, en particulier :

$$-(1x) = (-1)x = -x.$$

La seconde relation à démontrer va s'en déduire :

$$\alpha(-x) = \alpha[(-1)x] = [a(-1)]x = (-\alpha)x.$$

**Exercice 1.** *Soit $E$ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe un réel $A > 0$ et des applications $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissantes telles que :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (|x| \geq A \quad \Rightarrow \quad f(x) = u(x) - v(x)).$$

*Montrer que $E$ que, muni des lois usuelles, $E$ est un espacve vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

## 1.3 Sous espaces vectoriels

### 1.3.1 Définition et caractérisation

**Définition 2.** *Une partie non vide $F$ d'un $K$-espaces vectoriels $E$ est appelée sous espacevectoriel de $E$ si, muni des lois de l'espace vectoriel $E$, $F$ est un espace vectoriel sur $K$.*

En d'autres termes, une partie $F$ d'un $K$-espace vectoriel $E$ est dite sous-espace vectoriel de $E$ si les deux conditions suivantes sont réalosées :

1. $F$ est un sous-groupe du groupe additif $(E, +)$.
2. la restriction à $K \times F$ de la loi externe définie sur $K \times E$ est une application à valeurs dans $F$.

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $F$ une partie non vide de $E$.

**Proposition 1.** *Pour que $F$ soit un sous-espace vectoriel de $E$, il faut et il suffit que :*

$$\forall \alpha, \beta \in K,\ \ [x \in F \quad et \quad y \in F] \quad \Rightarrow \alpha x + \beta y \in F \tag{1.1}$$

**Démonstration.** La condition (1.1) est évidemment nécessaire. Porouvons qu'elle est suffisante, c'est-à-dire, qu'une partie non vide $F$ qui vérifie (1.1) est sous espace vectoriel de $E$. D'ailleurs, pour $\alpha = 1$ et $\beta = -1$, on a :

$$[x \in F \text{ et } \ y \in F] \Rightarrow x - y \in F.$$

Par conséquent, $F$ est un sous-groupe du groupe additif $(E, +)$.
Prenant ensuite $\beta = 0_K$ dans (1.1), on obtient :

$$[\alpha \in K \ \text{ et } \ x \in F] \Rightarrow \quad \alpha x \in F.$$

Par conséquent, la loi externe $(\alpha, x) \to \alpha x$ applique $K \times F$ dans $F$. La proposition est donc démontrée.

**Remarque 1.** *Si $F$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$, alors le vecteur nul $0_E$ est dans $F$.*

Ce fait pourra être utilisé pour prouver qu'une partie $F$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

### 1.3.2 Exemples de sous-espaces vectoriels

**Exemple 4.** *D'après les exemples 1 et 3, $E = \mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit*

$$F = \{(x, y) \in E \quad tel\ que \quad x - 2y = 0\}.$$

*Alors, $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$. Le prouver à titre d'exercice.*

**Exemple 5.** *D'après les exemples 1 et 3, $E = \mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit*

$$F = \{(x, y, z) \in E \quad tel\ que \quad x - y + Z - 1 = 0\}.$$

*Alors, $F$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $E$.*

En effet, le vecteur nul $0_E = (0, 0, 0)$ n'est pas dans $F$.

**Exemple 6.** *Si $E$ est un $K$-espace vectoriel, alors la partie $\{0_E\}$ contenant le seul élément neutre du groupe additif $(E, +)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*

**Exemple 7.** *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $x \in E$. Alors la partie*

$$F = \{\alpha x : \alpha \in K\}$$

*est un sous-espace vectoriel de $E$.*

### 1.3.3 Intersection de sous-espaces vectoriels

**Proposition 2.** *Soit $E$ un $K$-espace vectoriel. Alors l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $E$ est un sous-espaces vectoriel de $E$.*

**Démonstration.** Soient $F_1$ et $F_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ et $G = F_1 \cap F_2$ leur intersection. Montrons que $G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
D'ailleurs, si $x, y \in G$, alors ils appartiennent à la fois à $F_1$ et à $F_2$. Par suite, quels que soient les scalaires $\alpha$ et $\beta$ dans $K$, le vecteur $\alpha x + \beta y$ appartient à la fois à $F_1$ et à $F_2$, donc à $F_1 \cap F_2 = G$.

De manière générale, on a :

**Proposition 3.** *Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$, alors leur intersection $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*

## 1.4 Combinaisons linéaires

$E$ est un espace vectoriel sur un corps commutatif $K$.

### 1.4.1 Combinaisons linéaires d'une famille finie.

**Définition 3.** *Soit $\{x_1, ..., x_p\}$ une famille de $p$ vecteurs de $E$. On appelle combinaison linéaire de ces vecteurs tout vecteur $x \in E$ possédant la propriété suivante : il existe des scalaires $a_1, a_2, ..., a_p$ tels que :*

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_px_p.$$

*les scalaires $a_i \in K$ sont appelés coefficients de la combinaison linéaire $x$.*

### 1.4.2 Exemples.

**Exemple 8.** *Dans $E$, le vecteur $0_EE$ est combinaison linéaire de toute famille finie de vecteurs, les coefficients étant tous nuls.*

**Exemple 9.** *Tout vecteur $x$ est combinaison linéaire de toute famille finie de vecteurs contenant $x$, le coefficient de $x$ étant égal à 1, tous les autres égaux à $0_K$.*

**Exemple 10.** *Dans l'espace vectoriel $K^3$ sur $K$, soient :*

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0) \\ e_3 &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

*Tout vecteur $v = (a, b, c) \in K^3$ est combinaison linéaire de la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ car :*

$$v = ae_1 + be_2 + ce_3.$$

### 1.4.3 Sous-espace vectoriel engendré par une famille.

**Théorème 1.** *Soit $\{x_1, x_2..., x_p\}$ une famille de $p$ vecteurs de $E$. L'ensemble $F$ des combinaisons linéaires de cette famille est un sous-espace vectoriel de $E$ ; c'est le plus petit sous-espace vectoriel de $E$ qui contient la famille donnée.*

**démonstration**. Soient

$$\begin{aligned} x &= a_1x_1 + ... + a_px_p \\ y &= b_1x_1 + ... + b_px_p \end{aligned}$$

deux éléments de $F$. Quels que soient les scalaires $\alpha$ et $\beta$, on a

$$\alpha x + \beta y = (\alpha a_1 + \beta b_1)x_1 + ... + (\alpha a_p + \beta b_p)x_p$$

qui est bien une combinaison linéaire de la famille donnée. Donc $\alpha x+\beta y \in F$. Par conséquent $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
$F$ contient clairement chacun des éléments $x_i$ de la famille donnée. Pour s'en rendre compte, pour chaque $i$, prendre $a_i = 1$ et $a_j = 0_K$ pour $j \neq i$.

D'autre part, tout sous-espace vectoriel de $E$ qui contient la famille $\{x_1, x_2..., x_p\}$, doit contenir $a_1x_1, ..., a_px_p$ quels que soient les coefficient $a_1, ..., a_p$ et contient aussi la somme $a_1x_1+...+a_px_p$. Un tel sous-espace contient donc $F$ qui est, par conséquent , le plus petit sous-espace vectoriel de $E$ qui contient $\{x_1, x_2..., x_p\}$.

**Définition 4.** *Le sous espace $F$, ensemble des combinaisons linéaires de $\{x_1, x_2..., x_p\}$ est dit engendré par la famille $\{x_1, x_2..., x_p\}$. Inversement, $\{x_1, x_2..., x_p\}$ est appelé famille de générateurs de $F$.*

## 1.5 Famille libre. Famille liée.

### 1.5.1 Famille libre.

**Définition 5.** *On dit qu'une famille $\{x_1, x_2..., x_p\}$ de vecteurs d'un espace vectoriel $E$ est libre (ou que les vecteurs $x_i$ sont linéairement indépendants) si la relation*

$$a_1x_1 + ... + a_px_p = 0_E$$

*entraîne :*

$$a_1 = a_2 = ... = a_p = 0_K.$$

### 1.5.2 Exemples

**Exemple 11.**

Dans l'espace vectoriel $K^4$, les trois vecteurs :

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & (1, 0, 0, 0) \\ x_2 & = & (0, 1, 0, 0) \\ x_3 & = & (0, 0, 1, 0) \end{array}$$

constituent une famille libre. En effet :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = (a_1, a_2, a_3, 0)$$

et :

$$(a_1, a_2, a_3, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0_K.$$

**Exemple 12.**

Dans $K^4$, les trois vecteurs

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & (1, 0, 0, 0) \\ x_2 & = & (0, 1, 0, 0) \\ x_3 & = & (1, 1, 1, 0) \end{array}$$

sont linéairement indépendants. En effet l'égalité :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = (a_1 + a_3, a_2 + a_3, a_3, 0) = 0_{K^4}$$

implique que $a_1 = a_3 = a_3 = 0_{\mathbb{K}}$.

### 1.5.3 Famille liée.

**Définition 6.** *On dit qu'une famille $\{x_1, x_2..., x_p\}$ de vecteurs d'un espace vectoriel $E$ est liée (ou que les vecteurs $x_i$ ne sont pas linéairement indépendants) si elle n'est pas libre.*

Si la famille $\{x_1, x_2..., x_p\}$ est liée, il existe des scalaires $a_1, a_2, ..., a_p$ non tous nuls tels que

$$a_1x_1 + ... + a_px_p = 0_E.$$

**Remarque 2.** *Si dans la famille $\{x_1, x_2..., x_p\}$, il existe un rang $k$,$(1 \leq k \leq p)$ tel que $x_k = 0_E$, alors cette famille est liée.*

En effet, on satisfait à :

$$a_1x_1 + ... + a_px_p = 0_E,$$

en prenant tous les $a_i$ nuls sauf $a_k$. Par conséquent :

*Une famille est liée dès qu'elle contient le vecteur nul.*

**Théorème 2.** *Soit $F$ un sous-espace engendré par $p$ vecteurs de l'espace vectoriel $E$. Alors, toute famille d'au moins $p+1$ vecteurs de $F$ est liée.*

**Démonstration.** Soit $F$ le sous-espace engendré par la famille :

$$\{x_1, x_2..., x_p\}$$

d'éléments dans $E$. Il suffit de prouver que toute famille de $p+1$ vecteurs de $F$, soit

$$\{y_1, y_2, ..., y_p, y_{p+1}\} \subset F$$

est liée. Toute famille de $F$, dont le cardinal est supérieur à $p+1$, sera alors liée à fortiori.
Raisonnons par récurrence sur $p$.

1° Pour $p = 1$, $F$ est engendré par un vecteur $x_1$ : $F = Vect(x_1)$. On a :

$$[y_1 \in F \text{ et } y_2 \in F] \Rightarrow \exists (a_1, a_2) \in K^2 \text{ tels que } y_1 = a_1x_1 \text{ et } y_2 = a_2x_1.$$

En éliminant $x_1$, on obtient :

$$a_2y_1 - a_1y_2 = 0_E.$$

Si les scalaires $a_1$ et $a_2$ ne sont pas simultanément nuls, la famille $F = \{y_1, y_2\}$ est liée par définition.
Si les deux scalaires $a_1$ et $a_2$ sont nule, c'est que $y_1 = y_2 = 0_E$ et la famille est liée. Par connséquent le théorème est prouvé pour $p = 1$.

2° Supposons le théorème vrai pour $p-1$ et démontrons-le pour $p$. Si $F'$ est le sous-espace engendré par la famille :

$$\{x_1, x_2 ..., x_{p-1}\}$$

constituée par les $p-1$ premiers vecteurs de la famille proposée, l'hypothèse de récurrence s'applique à $F'$ : toute famille de $p$ vecteurs de $F'$ est liée. Tout vecteur $y \in F$, c'est-à-dire toute combinaison linéaire des vecteurs $x_1, x_2 ..., x_p$ peut s'écrire sous la forme :

$$y = z + a x_p \text{ avec } \ z \in F' \text{ et } \ a \in K.$$

En particulier, pour tout $1 \leq j \leq p+1$, il existe $z_j \in F'$ et $a_j \in K$ tels que :

$$y_j = z_j + a_j x_p \tag{1.2}$$

On a ainsi $p+1$ relations. Envisageons deux cas.

**Cas 1** : *tous les $a_j$ sont nuls.* Alors :

$$\forall \ 1 \leq j \leq p+1, \quad y_j = z_j \in F'.$$

Par l'hypothèse de récurrence, $p$ vecteurs quelconques de $F'$ (et à fortiori les $p+1$ vecteurs $y_j$) constituent une famille liée. Le théorème est prouvé dans ce cas.

**Cas 2 :** *il existe des $a_i$ non nuls.*

Supposons, par exemplle, $a_{p+1} \neq 0_K$ (en changeant au besoin l'ordre de la numérotation des $y_j$). Alors, de la dernière des relation (1.2), $(j = p+1)$, on tire, puisque $a_{p+1}$ a un inverse $a_{p+1}^{-1} \in K$ :

$$x_p = a_{p+1}^{-1}(y_{p+1} - z_{p+1}).$$

En portant dans les p autres relations (1.2), on élimine $x_p$ :

$$\forall \ 1 \leq j \leq p+1, \quad y_j = z_j + a_{p+1}^{-1} a_j (y_{p+1} - z_{p+1})$$

d'où l'on tire :

$$y_j - a_{p+1}^{-1} a_j y_{p+1} = z_j - a_{p+1}^{-1} a_j z_{p+1},$$

ce qui prouve que les $p$ vecteurs des premiers membres appartiennent, comme ceux des seconds membres, à $F'$. Par hypothèse de récurrence, ces $p$ vecteurs constituent une famille liée. Il existe par conséquent des scalaires $b_1, ..., b_p \in K$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{j=1}^{p} b_j (y_j - a_{p+1}^{-1} a_j y_{p+1}) = 0_E.$$

Si l'on pose :

$$b_{p+1} = -a_{p+1}^{-1}(\sum_{j=1}^{p} a_j b_j),$$

on obtient :

$$\sum_{j=1}^{p+1} b_j y_j = 0_E,$$

les scalaires $b_j$, $1 \leq j \leq p+1$ n'étant pas tous nuls. La famille $\{y_1, ..., y_{p+1}\}$ est donc liée. Le théorème est donc démontré.

**Exemple 13.** *Soient, dans un espace vectoriel $E$ sur un corps commutatif $K$, la famille $\{x_1, x_2, x_3\}$. Prenons :*

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 & = & x_1 - x_2 + x_3 \\ y_3 & = & x_1 + x_2 - x_3 \\ y_4 & = & -x_1 + x_2 + x_3 \end{array}$$

*Quelques soient $x_1, x_2, x_3$, la famille $F = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ est liée. La relation de dépendance s'obtient facilement en ajoutant membre les quatre égalité définissant les $y_i$ :*

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2y_1$$

*d'où*

$$-y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0_E.$$

**Corollaire 1.** *Pour que la famille $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ soit liée, il faut et il suffit qu'il existe un indice $1 \leq i \leq p$ tel que $x_i$ appartienne au sous espace vectoriel engendré par les $x_j$, $i \neq j$.*

**Démonstration.** En effet, s'il existe un tel indice $i$, on applique le théorème 2, pour voir que la famille $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ soit liée.

Réciproquement, supposons que la famille $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ soit liée. Alors, il existe des scalaires $a_1, ..., a_p \in \mathbb{K}$non tous nuls tels que

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_p x_p = 0_E.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer $a_1 \neq 0_K$ (en changeant au besoin l'ordre de la numérotation). On en déduit alors :

$$x_1 = -a_1^{-1}(a_2 x_2 + ... + a_p x_p) = -a_1^{-1} a_2 x_2 - ... - a_1^{-1} a_p x_p.$$

Cette dernière relation prouve que $x_1$ appartient au sous espace vectoriel engendré par $\{x_2, ..., x_p\}$.

On a imméditement la formulation suivante qui est équivalente au corollaire 1.

**Corollaire 2.** *Pour que la famille $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ soit libre, il faut et il suffit que pour tout indice $1 \leq i \leq p$, le vecteur $x_i$ n'appartienne pas au sous-espace vectoriel engendré par les $x_j$, $j \neq i$.*

**Théorème 3.** *Pour que la famille $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ soit libre, il faut et il suffit qu'à tout vecteur $x$ du sous-espace qu'elle engendre corresponde une unique famille $\{a_1, a_2, ..., a_p\}$ de scalaires tels que :*

$$x =_1 x_1 + a_2x_2 + ... + a_px_p \tag{1.3}$$

**Démonstration.** Soit $F$ le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$. Supposons qu'à un vecteur $x \in F$ correspondent deux familles de scalaires $\{a_1, a_2, ..., a_p\}$ et $\{b_1, b_2, ..., b_p\}$ tels que :

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_px_p = b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_px_p.$$

On obtient, par soustraction,

$$(a_1 - b_1)x_1 + (a_2 - b_2)x_2 + ... + (a_p - b_p)x_p = 0_E. \tag{1.4}$$

Si la famille $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ est libre, la relation (1.4) entraîne :

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = ... = a_p - b_p = 0_K,$$

c'est-à-dire,

$$a_1 = b_1\ ;\ \ ...\ ;\ \ a_p = b_p.$$

Si la famille $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ n'est pas libre, la relation (1.4) est vérifiée avec des scalaires $a_i - b_i$ non tous nuls. Au vecteur $x$ correspondent deux familles disctintes de scalaires $\{a_1, a_2, ..., a_p\}$ et $\{b_1, b_2, ..., b_p\}$ vérifiant la relation (1.3). Ainsi est donnée la preuve du théorème 3.

## 1.6 Base - Dimension - Coordonnées

Soit $E$ un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$.

**Définition 7.** *On dit que $E$ est de **dimension finie** sur le corps $K$ s'il existe une famille finie de généraateurs de $E$.*

**Définition 8.** *On appelle **base** de $E$, toute famille libre de générateurs de $E$.*

Si la famille $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ engendre l'espace $E$ tout entier, alors, pour tout vexteur $x \in E$, il existe au moins une famille $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ de scalaires tels que :

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n.$$

Si, de plus, la famille $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est libre, c'est-à-dire si elle est une base de $E$, alors, pour tout $x \in E$, la famille de scalaires $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ est unique en vertu du théorème 3.
Les scalaires $x_1, x_2, ..., x_p$ sont appelés **coordonnées de $x$ dans la base $B$.**

### 1.6.1 Exemples

**Exemple 14.** *Soit* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. *Alors* $\mathbb{K}$ *est un espace vectoriel sur lui-même. Si 1 est l'élément unité du corps* $\mathbb{K}$, *alors la famille* $B = \{1\}$ *formée du seul élément 1 est une base de l'espace vectoriel* $\mathbb{K}$.

**Exemple 15.** *Pour* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, *nous savons que* $E = \mathbb{K}^3$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$. *Dans* $E$, *considérons les vecteurs :*

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,0), \\ e_2 & = & (0,1,0), \\ e_3 & = & (0,0,1). \end{array}$$

*Quel que soit le vecteur* $x = (a,b,c) \in E$, *on a :*

$$x = ae_1 + be_2 + c_3$$

*de telle sorte que la famille* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *est une famille de générateurs de* $E$. *Donc* $E$ *est de dimension finie sur* $\mathbb{K}$.
*De plus, la famille* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *est libre car :*

$$ae_1 + be_2 + c_3 = 0_E \quad \Rightarrow \quad a = b = c = 0_K.$$

*Par suite la famille* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *est une base.*

**Exemple 16.** $\mathbb{K}$ *étant un corps commutatif, l'espace vectoriel* $\mathbb{K}[X]$ *des polynômes à l'indéterminée* $X$ *et à coefficients sur* $\mathbb{K}$ *n'est pas de dimension finie.*

Montrons que toute famille finie incluse dans $\mathbb{K}[X]$ ne peut pas être famille de générateurs de $\mathbb{K}[X]$. D'ailleurs, l'ensemble des degrés des polynômesd'une telle famille est une partie finie de $\mathbb{N}$ ; elle admet donc un plus petit élément $m$.
Tout polynôme de degré supérieur à $m$ (et il en existe dans $\mathbb{K}[X]$) ne peut s'obtenir comme combinaison linéaire de polynômes de degré au plus égal à $m$. $\mathbb{K}[X]$ n'est donc pas de dimension finie.

**Exemple 17.** *Soientt* $n$ *un entier naturel et* $\mathbb{K}_n[X]$ *la partie formée des éléments de* $\mathbb{K}[X]$ *qui sont de degré au plus égaux à* $n$ *:*

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] : deg(P) \leq n\}.$$

*Alors* $\mathbb{K}_n[X]$ *est un sous-espace de* $\mathbb{K}[X]$ *qui est de dimension finie.*

Prouvons d'abord que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. En effet, soient $\alpha \in \mathbb{K}$, $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$. On a :

$$deg(P) \leq n \text{ et } deg(Q) \leq n$$

de telle sorte que :

$$deg(\alpha P + Q) \leq max\{deg(P), deg(Q)\} \leq n.$$

Donc $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Montrons que la famille

$$B = \{1, X, X^2, ..., X^n\}$$

des puissance successives, de 0 à $n$ de l'indéterminée $X$, est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. D'ailleurs :

*$B$ est une partie génératrice de* $\mathbb{K}_n[X]$. En effet, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, il existe des scalaires $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n.$$

Donc tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ est combinaison linéaire d'éléments de $B$ qui est de ce fait une partie génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. Comme $B$ a exactement $n+1$ éléments, $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie.

*La famille $B$ est libre.* D'ailleurs, la relation

$$a_0 + a_1X + ... + a_nX^n = 0$$

signifie que le polynôme du premier membre est le polynôme nul ; donc tous ses coefficients sont nuls :

$$a_0 = a_1 = ... = a_n = 0_K.$$

Par conséquent, $B$ est bien une famille libre et est dès lors une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

### 1.6.2 Exercices

**Exercice 2.** *Dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}^4$, étudier si les familles suivantes sont libres ou liées :*

**(a)** $F_1 = \{x, y, z\}$ *avec :*

$$x = (2, 3, 0, 5), \;\; y = (0, 1, 0, 4), \;\; z = (1, 1, 0, 2);$$

**(b)** $F_2 = \{x, y, z\}$ *avec :*

$$x = (-5, 2, 8, -16), \;\; y = (-5, 3, 17, -14), \;\; z = (1, 1, 11, 6);$$

**(iii)** $F_3 = \{x, y, z, t\}$ *avec :*

$$x = (0, 1, 2, -1), \;\; y = (1, 2, -1, 0), \;\; z = (0, 2, -1, 1), \;\; t = (4, 6, 1, 3).$$

### 1.6.3 Existence de bases

Il va être prouver dans cette partie que tout espace vectoriel de dimension finie admait des bases.
Remaequons que dans tout espace vectoriel $E$ non réduit à $\{0\}$, il existe des familles libres et finies ; par exemple, pour tout vecteur non nul $x \in E$, le singleton $\{x\}$ est une partie libre et finie de $E$.

**Théorème 4.** *Pour toute famille libre et finie $L$ d'un espace vectoriel de dimension finie $E \neq \{0\}$, il existe une base finie $B$ de $E$ telle $L \subset B$.*

**Démonstration.** Puisque $E$ est de dimension finie, il existe une famille génératrice finie $G$ de $E$. La réunion de $G$ avec une famille quelconque de vecteurs de $E$ est une partie génératrice de $E$.
Soit donc $L$ une famille libre et finie de $E$. La réunion

$$F = G \cup L$$

est encore une famille génératrice de $E$. De plus, $F$ est finie et

$$L \subset F.$$

Considérons $\mathcal{L}$, l'ensemble de toutes les parties libres de $E$ qui contiennent $L$ :

$$\mathcal{L} = \{X \in \mathcal{P}(E) : X \text{ est libre et } L \subset X\}.$$

Alors :
– L'ensemble $\mathcal{L}$ n'est pas vide, puisqu'il contient $L$.
– L'ensemble $\mathcal{L}$ est fini puisque, $F$ étant fini, $\mathcal{P}(F)$ est fini et $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(F)$.
L'ensemble des cardinaux des éléments de $\mathcal{L}$ une partie non vide finie de $\mathbb{N}$ qui admet par conséquent un plus grand élémént $n$.
Soit $B$ un élément de $\mathcal{L}$ ayant ce nombre $n$ d'éléments :

$$L \subset B \subset F \quad \Rightarrow \quad cardL \leq n \leq cardF.$$

Envisageons deux cas :

**Cas 1** :$n = cardF$.
Alors, $B = F$. La famille génératrice $F$ de $E$ est libre. Elle constitue par conséquent une base de $E$. Le théorème est prouvé dans ce cas. **Cas 2** :

$n < cardF$. Par définition de l'élément maximum $n$, pour tout $x \in F - B$, la famille $Bcup\{x\}$ n'est pas libre, puisqu'elle est une partie de $F$ ayant $n + 1$ éléments. Si :

$$B = \{e_1, ..., e_n\},$$

il existe alors des scalaires non tous nuls $a_1, ..., a_n, b$ tels que

$$a_1 e_1 + ... + a_n e_n + bx = 0_E.$$

Evidemment $b \neq 0_K$. Le contraire impliquerait que les vecteurs de $B$ seraient linéairement dépendants. Soit $b^{-1} \in \mathbb{K}$ l'inverse de $b$. Alors

$$x = -b^{-1}(a_1 e_1 + ... + a_n e_n).$$

Tout vexteur $x$ de la famille génératrice $F$ de $E$ est combinaison linéaire de vecteurs de $B$ ; donc, $B$ est elle-même une famille génératrice de $E$. Ainsi $B$ est une base de $E$. Le thérème est donc démontré.

**Remarques 1.** *Le théorème 4 exprime deux propriétés importantes :*

1. ***Existence de bases.****Dans tout espace vectoriel de dimension finie, il existe des bases.*
2. ***Complétion d'une famille libre pour obtenir une base****. Soit $L$ une famille libre donnée dans un espace vectoriel de dimension finie $E$ et $G$ une famille génératrice quelconque de $E$. Alors, $L$ peut être compléter par des vecteurs de $G$pour obtenir une base $B$ de $E$.*

**Théorème 5.** *Si dans un espace vectoriel $E$, une base $B$ possède $n$ éléments, alors pour toute famille libre $L$ de $E$, on a : $cardL \leq n$.*

**Démonstration.** Soit $E$ un espace vectoriel ayant une base $B$ possédant $n$ élément. Appliquons le théorème 2 : puisque $B$ engendre $E$, une famille de $n+1$ vecteurs (ou plus) est liée.Il ne peut donc pas exister dans $E$ de famille libre ayant plus de $n$ élément. Ainsi est prouvé le théorème.

**Théorème 6.** *Dans un espace vectoriel finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.*

**Démonstration.**

Soient $B_1$ et $B_2$ deux bases de $E$. En appliquant le théorème 5 à la base $B_1$ et à la famille libre $B_2$, on obtient :

$$cardB_2 \leq cardB_1.$$

De même, en appliquant le théorème 5 à la base $B_2$ et à la partie libre $B_1$, on obtient :

$$cardB_1 \leq cardB_2.$$

Par conséquent :

$$cardB_2 = cardB_1.$$

Le théorème est donc prouvé.

Puisque toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre d'élément, la définition suivante est justifiée.

**Définition 9.** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. On appelle dimension de $E$ sur $\mathbb{K}$, le cardinal d'une base de $E$.*

La dimension de $E$ sur $\mathbb{K}$ se note :

$$dim_{\mathbb{K}}(E).$$

Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on note simplement : $dimE$.

**Exemple 18.** *$\mathbb{K}$ étant un corps commutatif et $n$ étant un enier naturel non nul, l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie égale à $n$ :*

$$dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n.$$

**Théorème 7.** *Tout sous-espace vectoriel $F$ d'un espace vectoriel de dimension finie $E$ est de diemsion finie et $dim_{\mathbb{K}}(F) \leq dim_{\mathbb{K}}(E)$.*

**Démonstration.** Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.
Le théorème est vrai si $F = \{0_E\}$ (on convient que : $dim_{\mathbb{K}}(\{0_E\}) = 0$.)
Supposons $F \neq \{0_E\}$. Soit $A$ l'ensemble des cardinaux de toutes les parties libres qui sont incuses dans $F$. Alors :

1. $A$ n'est pas vide car, pour tout élément $x \in F$, la famille $\{x\}$ est libre ; donc $1 \in A$.
2. Toute famille libre incluse dans $F$ est une famille libre de $E$ ;de ce fait (par le théorème 5), $A$ est majoré par $n = dim_{\mathbb{K}}(E)$.

$A$ étant une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément $p$ :

$$p = maxA \leq n.$$

Cela veut dire qu'une famille quelconque d'au moins $p+1$ vecteurs de $F$ est liée.
Soit $B'$ une famille libre incluse dans $F$ et ayant un $p$ éléments. Désignos par $F'$ le sous-espace vectoriel engendré par $B'$. Comme $B'$ est finie, $F'$ est de dimension finie, et comme $B'$ est libre, on alors :

$$dim(F') = card(B') = p,$$

ce qui entraîne :

$$dim(F') \leq dim(E).$$

Nous allons prouver que $F = F'$ ; ce qui établira complètement le théorème 7. D'ailleurs, $F'$ étant le plus petit sous-espace vectoriel de $E$ qui contient $B'$, on a :

$$F' \subset F.$$

D'autrepart, pour tout $x \in F - B'$, la famille $B'$, de cardinal $p+1$, est liée ; dons $x$ appartient au sous-espace vectoriel $F'$ engendré par $B'$.Par conséquent :

$$F \subset F'.$$

Donc :

$$F = F';$$

ce qu'il fallait prouver.

**Exercice 3.** *Dans le R-espace vectoriel $E = R^4$, on donne les vecteurs $u$, $v$, $w$, $t$ :*

$$u = (1, 2, -1, -2)\,; \quad v = (2, 3, 0, -1)\,; \quad w = (1, 2, 1, 4)\,; \quad t = (1, 3, -1, 0).$$

1.1 *Montrer que $U = (u, v, w, t)$ est une base de $E$.*

1.2 *Donner les coordonnées du vecteur $x = (7, 14, -1, 2)$ dans la base $U$.*

**Exercice 4.** *Dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}^3$, mpontrer que les vecteurs :*

$$e_1 = (1, 1, 1), \quad e_2 = (1, 1, 2), \quad e_3(2, 3, -1)$$

*constituent une base. Déterminer les coordonnées des vecteurs $x$ et $y$ ci-dessous dans cette base :*

$$x = (5, -1, 3), \quad et \quad y = (2, 3, -1).$$

**Exercice 5.** *Montrer que la partie $F$ de $\mathbb{C}^3$ définie par :*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3; \quad x + y + z = 0 \quad et \quad x + iy - z = 0\}$$

*est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$. Déterminer une base et la dimension de $F$.*

**Exercice 6.** **(a)** *Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :*

$$x = (1, 2, 0, 1), \quad y = (2, 1, 3, 1), \quad z = (2, 4, 0, 2).$$

*Déterminer une base du sous-espace vectoriel $F$ engendré par ces vecteurs.*

**(b)** *Même question pour la famille des quatre vecteurs, ci-dessous, $G$ étant le sous-espace engendré :*

$$u = (1, 2, 1, 0), \quad v = (-1, 1, 1, 1), \quad w = (2, -1, 0, 1), \quad z = (2, 2, 2, 2).$$

**(c)** *Déterminer une base de la somme $F + G$ et une base de l'intersection $F \cap G$.*

**Exercice 7.** *Soit $\mathcal{P}'_n[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée $X$ de coefficients réels, de degré épale à l'entier positif $n$. On définit sur $\mathcal{P}'_n[X]$ l'addition et la multiplication par un scalaire par :*

$$(P,Q) \to P{+}Q \;\; (P{+}Q)(X) = P(X){+}Q(X) \;\; et \;\; (\lambda, P) \to \lambda P \;\; (\lambda P)(X) = \lambda P(X).$$

**(i)** *Examiner si ,muni de ces deux lois, $\mathcal{P}'_n[X]$ est un espacve vectoriel.*

**(ii)** *Même question pour l'ensemble $\mathcal{P}_n[X]$ des polynômes à une indéterminée $X$, de degré inférieur ou égal à l'entier positif $n$.*

**(iii)** *Montrer que l'ensemble $\mathcal{I}_n$ des polynômes de $\mathcal{P}_n[X]$ qui sont tels que : $P(X) + P(-X) = 0$ est un espace vectoriel dont on de dimension finie dont on déterminera la dimension et une base.*

# Chapitre 2

# Applications linéaires

Dans toute cette section, $E$, $F$ et $G$ sont des espaces vectoriels sur le même corps comutatif $K$.

## 2.1 Définition et exemples

**Définition 10.** *Soit $f$ une application de $E$ dans $F$. On dit que $f$ est linéaire si :*

**(i)** $\forall x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ *;*

**(ii)** $\forall \alpha \in K, \forall x \in E,\ f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

**Remarque 3.** *Pour une raison de simplification des écritures, nous avons noté indifférament $+$ les additions de $E$ et de $F$ qui en réalités peuvent être différentes.*

**Remarque 4.** *L'assertion $(i)$ de la définition ci-dessous exprime que $f$ est un morphisme du groupe additif $(E, +)$ dans le groupe $(F, +)$.*

**Définition 11** (Vocabulaire)**.** **(i)** *Une application linéaire de $E$ dans lui-même est appelée endomorphisme de $E$.*

**(ii)** *Un endomorphisme de $E$ qui est bijectif est appelé automorphisme de $E$.*

**(iii)** *Une application linéaire bijective est appelée isomorphisme (d'espaces vectoriels).*

**Notation :** On note :

**(i)** $\mathcal{L}(E; F)$, l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$.

**(ii)** $End(E)$, l'ensemble des endomorphismes de $E$.

**(iii)** $Aut(E)$, l'ensemble des automorphismes de $E$.

**(iii)** $Isom(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes de $E$ dans $F$.

### 2.1.1 Exemples

**Exemple 19.** *Les projections sont applications linéaires*

En effet, soient $E_1$ et $E_2$ des espaces vectoriels sur un corps $K$, $E = E_1 \times E_2$, $P_1$ et $P_2$ les applications définies sur $E$ et à valeurs dans $E_1$ (respectivement $E_2$) par :

$$P_1(x_1, x_2) = x_1 \quad P_2(x_1, x_2) = x_2.$$

Alors $P_1$ et $P_2$ sont linéaires. $P_1$ (respectivement $P_2$) est la projection sur $E_1$ (respectivement $E_2$) parallèlement à $E_2$ (respectivement $E_1$).

**Exemple 20.** *Si $F$ est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$, l'application $f : E \to \frac{E}{F}$ définie par $x \to f(x) = cl(x)$ où $cl(x)$ désigne la classe d'équivalence de $x$ modulo $F$ est une application linéaire surjectif, appelée homomorphisme canonique de $E$ sur $\frac{E}{F}$.*

**Exemple 21.** *Soit $E$ l'ensemble des applications numériques indéfiniment dérivables sur l'intervalle $[0, 1]$. Alors :*

**(a)** *$E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

**(b)** *L'application de $E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \to x'(t_0)$ où $t_0$ est une valeur fixée de l'intervalle $[0, 1]$, est une application linéaire.*

**Exemple 22.** *Soit $E$ l'ensemble des fonctions numériques continues dans $[0, 1]$. Alors $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

**(a)** *La fonction $P_0 : E \to E$ définie par :*

$$P_0(x)(t) = \int_0^t x(s)ds$$

*est un endomorphisme de $E$.*

**(b)** *L'application $P : E \to \mathbb{R}$ définie par*

$$P(x) = \int_0^1 x(t)dt$$

*est une application linéaire.*

**Exemple 23** (homototie)**.** *Soit $a$ un élément fixé du corps $\mathbb{K}$ des scalaires de l'espace vectoriel $E$. L'application $h_a : E \to E$ définie par $h_a(x) = ax$ est linéaire. On l'appelle l'homothétie vectorielle de rapport $a$.*

Si $a \neq 0$, l'application $h_a$ est un automorphisme de $E$. On déduit de ce qui précède que l'identité de $E$ est un automorphisme de $E$ ; il suffit de prendre $a = 1$.

### 2.1.2 Caractérisation des applications linéaires

Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels sur $K$.

**Théorème 8.** *Une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si : $\forall x, y \in E$ et $\forall \alpha, \beta \in K$ :*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

**Démonstration.** Supposons $f$ linéaire. Alors pour tous scalaires $\alpha$ et $\beta$ et pour tous vecteurs $x$ et $y$ de $E$, on a :

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \quad f(\beta y) = \beta f(y), \quad f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x) + f(\beta y)$$

de telle sorte que

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Réciproquement, supposons que pour tous $x$, $y$ dans $E$ et pour tous $\alpha$ et $\beta$ dans $K$, on ait

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Alors, d'une part, en prenant $\alpha = \beta = 1$, on obtient

$$f(x + y) = f(x)) + f(y)$$

et d'autre part, en prenant $\beta = 0$, on obtient

$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

## 2.2 Propriétés fondamentales

### 2.2.1 Composition d'applications linéaires

**Théorème 9.** $(i)$ *La composition de deux applications linéaires est une application linéaire.*

$(ii)$ *La composition de deux isomorphismes est un isomorphisme.*

### 2.2.2 Image, Image directe et Image inverse d'une application linéaire

Soient $E$ et $F$ des $K$-espaces vectoriels, $A$ (respectivement $B$) une partie de $E$ (rspectivement de $F$), $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

**Définition 12.** $(i)$ *On appelle image de $A$ par $f$ l'ensemble $f(A) = \{y = f(x) \mid x \in A\}$ noté $f(A)$.*

$(ii)$ *On appelle image de $f$ l'ensemble $f(E)$. On note $Imf$ l'image de $f$.*

$(iii)$ *On appelle image inverse de $B$ par $f$ l'ensemble des éléments $x$ de $E$ qui sonts tels que, $f(x) \in B$. Il est noté $f^{-1}(B)$.*

*(iv) On appelle noyau de $f$, l'ensemble $f^{-1}(o_F)$.On note $Kerf$ le noyau de $f$.*

**Théorème 10.** *Soient $E$ et $F$ des $K$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E;F)$. Alors :*

*(i)* $f(o_E) = o_F$;

*(ii)* $\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)$

*(iii) Pour tout sous-espace vectoriel $A$ de $E$, $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de $F$ ;*

*(iv) Pour tout sous-espace vectoriel $B$ de $F$, $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.En particulier, le noyau de toute application linéaire est un sous espace vectoriel de son espace de départ.*

**Démonstration**
$(i)$ : On a $f(o_E) = f(0.o_E) = 0.f(o_E) = o_F$.

$(ii)$ : Pour tout $x \in E$, on a $x+(-x) = o_E$ de telle sorte que par linéarité et par $(i)$,

$$f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(o_E) = o_F;$$

d'où la thèse $(i)$ du théorème.

$(iii)$ : Soient $\alpha, \alpha \in K$ et $y_1, y_2 \in f(A)$. Il existe $x_1, x_2 \in A$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Comme $A$ est un sev de $E$, le vecteur $\alpha x_1+\beta x_2 \in A$ de telle sorte que : $\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \in f(A)$.

$(iv)$ Soient $\alpha, \beta \in K$ et $x_1, x_2 \in f^{-1}(B)$. Prouvons que $\alpha x_1 + \beta x_2 \in f^{-1}(B)$. D'ailleurs $x_1 \in f^{-1}(B)$ et $x_2 \in f^{-1}(B)$ signifient que $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont dans $B$. Comme $B$ est un sev, il contient naturellement $f(\alpha x_1)+ \alpha f(x_1) + \beta f x_2)$. Mais alors $f \alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f x_2)$ est dans $B$, d'où découle la relation $\alpha x_1 + \beta x_2 \in f^{-1}(B)$.

**Théorème 11.** *Soient $E$ et $F$ des $K$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E;F)$. Alors, $f$ est injective si et seulement si son noyau $Ker(f)$ est réduit au singleton $o_E$.*

**Démonstration** Soient $x$ et $y$ des vecteurs de $E$. Comme $f$ est linéaire, on a :

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(x - y) = o_F \Leftrightarrow x - y \in Ker(f).$$

D'où l'assertion du théorème.

### 2.2.3 Image d'une famille de générateurs

**Théorème 12.** **(i)** *Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E;F)$ applique toute famille génaratrice de tout sous-espace $E_1$ de $E$ sur une famille génératrice de $f(E_1)$.*

**(ii)** *Si $f \in \mathcal{L}(E;F)$ est injective, elle applique toute famille libre de $E$ sur une famille libre de $F$.*

**Démonstration**.
Soit

$$L = \{x_1, ..., x_p\}$$

une partie libre de $E$. L'image de $L$ par l'application linéaire $f$ est :

$$f(L) = \{f(x_1), ..., f(x_p)\}.$$

*Partie (i)*. Désignons par $E_1$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par $L$. Montrons que $f(L)$ engendre $f(E_1)$. D'ailleurs :

$$y \in f(E_1) \Rightarrow \exists x \in E_1 : y = f(x).$$

Puisque $L$ est une famille génératrice de $E_1$, à tout vexteur $x \in E_1$ correspond une famille de scalaires $a_1, ..., a_p \in K$ telle que :

$$x = a_1x_1 + ... + a_px_p.$$

Par la linéarité de $f$, on obtient :

$$y = f(x) = a_1f(x_1) + ... + a_pf(x_p).$$

Ainsi, tout vecteur $y$ de $f(E_1)$ est combinaison linéaire de vecteurs de $f(L)$. Aisi est prouvée la première partie du théorème.
*Partie (ii)*. Supposons de plus la famille $L$ libre et l'application $f$ injective. Prouvons que $f(E_1)$ est libre. D'ailleurs

$$a_1f(x_1) + ... + a_pf(x_p) = 0_F \Rightarrow f(x) = 0_F \Rightarrow x \in Ker(f).$$

Comme $f$ est injective $x \in Ker(f) \Leftrightarrow x = 0_E$. Comme $L$ est libre, on a :

$$x = a_1x_1 + ... + a_px_p = 0_E \Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_p = 0_K.$$

Ainsi se trouve démontrée la seconde partie du théorème.

### 2.2.4 Image d'un espace vectoriel de dimension finie

Supposons l'espace vectoriel $E$ de dimension finie. Alors, pour toute $f \in \mathcal{L}(E;F)$, le sous-espace vectoriel $f(E)$ est de dimension finie.
En effet, $E$ de dimension finie veut dire qu'il existe une famille finie $L$ de générateurs de $E$. Mais alors $f(L)$ est une famille de générateurs de $f(E)$ (théorème 2.3.2). Comme $L$ finie entraîne $f(L)$finii, le sous-espace vectoriel $f(E)$ est de dimension finie.

### 2.2.5 Détermination des applications linéaires

**Théorème 13.** *Soient $B = \{e_1, ..., e_n\}$ une base d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$ sur $K$ et $C = \{c_1, ..., c_n\}$ une famille de $n$ vecteurs d'un espace vectoriel $F$ sur le même corps commutatif $K$.*
*Il existe une application linéaire $f$ et une seule de $E$ dans $F$ telle que :*

$$f(e_i) = c_i \quad 1 \leq i \leq n.$$

*De plus, si la famille $C$ est libre, alors $f$ est injective.*

**Démonstration**. *Existence de $f$.* Pour tout vecteur $x \in E$, il existe une unique famille de scalaires $a_i, 1 \leq i \leq n$ telle que :

$$x = x_1e_1 + ... + x_ne_n.$$

A cet $x$, faisons correspondre le vecteur $y \in F$ défini comme suit :

$$y = f(x) = x_1c_1 + ... + x_nc_n.$$

Le champ de définition de $f$ est bien $E$ tout entier et l'image $f(E)$ est bien incluse dans $F$.
Prouvons que $f$ ainsi définie est bien linéaire. D'ailleurs, soient

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_ie_i$$

deux vecteurs de $E$. Pour deux scalaires $\alpha$ et $\beta$, on a :

$$\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_ie_i + \sum_{i=1}^{n} \beta y_ie_i = \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta y_i)e_i.$$

Par définition de $f$, on a :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_ic_i \quad \text{et} \quad f(y) = \sum_{i=1}^{n} y_ic_i$$

et

$$f(\alpha x + \beta y) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_ic_i + \beta y_ic_i)$$

De plus, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_ic_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_ic_i$$

de telle sorte que

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

L'application$f$ est bien linéaire.

*Unicité de $f$.* Toute apllication linéaire $g$ de $E$ dans $F$ envoie le vecteur

$$x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$$

sur le vecteur

$$g(x) = x_1g(e_1) + ... + x_ng(e_n).$$

Par conséquent, si on fixe dans $F$ :

$$g(e_1) = c_1 \ , \ ..., \ \ g(e_n) = c_n,$$

on obtient une application $g$ qui vérifie :

$$\forall x \in E \quad g(x) = f(x),$$

de telle sorte que

$$g = f.$$

L'application $f$ ci-dessus contruite est donc unique.

*Montrons que si $C$ est libre alors $f$ est injective.* D'ailleurs si $C$ est libre, la relation

$$f(x) = x_1c_1 + ... + x_nc_n = 0_F \Rightarrow x_i = 0_K, 1 \leq i \leq n \Rightarrow x = 0_E.$$

Par conséquent $Ker(f) = \{0_E\}$ et dons $f$ est injective.

**Corollaire 3.** *Pour qu'une application $f \in \mathcal{L}(E; F)$ soit injective, il faut et il suffit que l'image d'une base de $E$ soit une base de $f(E)$.*

## 2.3 Applications linéaires en dimensions finies

### 2.3.1 Base canonique de $K^n$

Soit $K$un corps commutatif et $n$ un entier naturel non nul. Nous savons que l'ensemble $K^n$ des $n$-uplets $(a_1, ..., a_n)$ constitué chacun de $n$ éléments $a_n \in K$, est un espace vectoriel sur $K$.

**Définition 13.** *On appelle base canonique de $K^n$, la base $\mathcal{U} = \{u_1, ..., u_n\}$ avec :*

$$\begin{array}{ccc} u_1 & = & (1, 0, ..., 0) \\ u_2 & = & (0, 1, ..., 0) \\ ...... & ... & .......... \\ u_n & = & (0, , ..., 1). \end{array}$$

*Pour tout $1 \leq j \leq n$, le vecteur $u_j$ est le n-uplet dont tous les termes sont nuls sauf, celui de rang $j$ qui vaut 1.*

Dans toute la suite, nous supposons que $K^n$ est muni de sa base canonique :

$$(a_1, ..., a_n) = a_1u_1 + ..... + a_nu_n.$$

### 2.3.2 Isomorphisme fondamental

**Théorème 14.** *Pour qu'un espace vectoriel $E$ soit de dimension finie $n$, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à $K^n$. L'isomorphisme et déterminé de façon unique dès que l'on se fixe une base de $E$ comme image de la base canonique de $K^n$.*

**Démonstration.** ***Etape 1.*** Supposons que $E$ soit de dimension finie égale à $n$ et soit $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ une base de $E$. Soit $\mathcal{C} = \{u_1, ..., u_n\}$ la base canonique de $K^n$. D'après le théorème 13, il existe une application linéaire $f$ et une seule de $E$ dans $K^n$ telle que :

$$f(e_i) = u_i \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ici, $f$ est injective puique $\mathcal{C}$ est une partie libre. Elle est surjective car $\mathcal{C}$ engendre à la fois $f(E)$ et $\mathcal{C}$. Don $f(E) = \mathcal{C}$.
$f$ étant bijective est bien un isomoorphisme de $E$ sur $K^n$. C'est l'unique application linéaire qui envoie $E$ sur $K^n$. **Etape 2.** Réciproquement, s'ilexiste

un isomorphisme de $E$ sur $K^n$, posons :

$$e_i = f^{-1}(u_i) \quad 1 \leq i \leq n.$$

D'après le théorème , l'application linnéaire $f^{-1}$ envoie la famille libre $\mathcal{C} = \{u_1, ..., u_n\}$ de générateurs de $K^n$ sur la famille $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ libre de générateurs de $f^{-1}(K^n) = E$. Donc $\mathcal{B}$ est une base de $E$ et $dim_K E = n$.

### 2.3.3 Relation entre les dimensions du noyau et de l'image

**Théorème 15.** *Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels de dimensions finies sur le même corps commutatif commutatif $K$. Pour toute $f \in \mathcal{L}(E; F)$, on a :*

$$dim_K Ker(f) + dim_K Im(f) = dim_K E.$$

**Démonstration.** Soient : $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_p\}$ une base de $Ker(f) \subset E$, $\mathcal{C} = \{l_1, ..., l_q\}$ une base de $Im(f) \subset F$. On a donc :

$$dim_K Ker(f) = p \text{ et } dim_K Im(f) = q.$$

Comme $y \in Im(f)$ signifie qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, pour tout $1 \leq i \leq q$, il existe un vecteur de $E$ que nous désignons par $e_{p+i}$ tel que :

$$f(e_{p+i}) = l_i.$$

On obtient ainsi une famille $\mathcal{B}'$ de $q$ vecteurs de $E$ :

$$\mathcal{B}' = \{e_{p+1}, ..., e_{p+q}\}.$$

Démontrons que $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une base de $E$.
Montrons que tout vecteur $x \in E$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$. D'ailleurs :

$$x \in E \Rightarrow f(x) \in f(E) = Im(f).$$

De ce fait, il existe des scalaires $x_1, ..., x_q$ (coordonées de $f(x)$ dans la base de $Im(f)$) tels que :

$$f(x) = x_1 l_1 + ... + x_q l_q = x_1 f(e_{p+1}) + ... + x_q f(e_{p+q}) = f(x_1 e_{p+1} + ... + x_q e_{p+q}).$$

Si on pose :

$$u = x_1 e_{p+1} + ... + x_q e_{p+q},$$

alors $f(x) = f(u)$ de telle sorte que $x - u \in Ker(f)$. Il existe donc des scalaires $u_1, ..., u_p$ tels que :

$$x - u = u_1 e_1 + ... + u_p e_p.$$

En remplaçant $u$ par son expression ci-dessus, il vient :

$$x = u_1 e_1 + ... + u_p e_p + x_1 e_{p+1} + ... + x_q e_{p+q}.$$

Donc $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ engendre $E$. *Montrons que $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une partie libre de $E$.*

Partons de :

$$u_1 e_1 + ... + u_p e_p + x_1 e_{p+1} + ... + x_q e_{p+q} = 0_E \tag{2.1}$$

et montrons que tous les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls. Pour ce faire, commençons par prendre l'image par $f$ des membres de l'équation 2.1. Comme pour tout indice $1 \leq i \leq p$, on a :

$$e_i \in Ker(f) \Rightarrow f(e_i) = 0_F,$$

on obtient :

$$x_1 f(e_{p+1}) + ... + x_q f(e_{p+q}) = 0_F$$

ou

$$x_1 l_1 + ... + x_q l_q = 0_F.$$

Comme $\mathcal{C}$ est libre, cette relation entraîne :

$$x_1 = x_2 = ... = x_q = 0_K.$$

La relation 2.1 s'écrit alors :

$$u_1 e_1 + ... + u_p e_p = 0_E.$$

Comme $\mathcal{B}$, est une famille cette relation entraîne :

$$u_1 = ... = u_p = 0_K.$$

Par conséquent, $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une famille libre de $E$. Le théorème est donc démontré.

### 2.3.4 Cas où $E$ et $F$ sont de même dimension finie

**Corollaire 4.** *Supposons que les espaces vectoriels $E$ et $F$ sont de même dimension finie sur le corps $K$ et que $f \in \mathcal{L}(E; F)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$f$ est bijective ;*
2. *$f$ est surjective ;*
3. *$f$ est injective ;*
4. *$Ker(f) = \{0_E\}$.*

**Démonstration.** Nous savons que les deux dernières assertions sont équivalentes. D'autre part, 1° est la réunion du 2° et du 3°. Il suffit donc d'établir l'équivalence entre l'assertion 2 et l'assertion 4.
D'ailleurs, d'après le théorème 2.3.3,

$$Ker(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow dim_K Im(f) = dim_K E.$$

Comme, par hypothèse, $dim_K E = dim_K F$,il vient

$$Ker(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow dim_K Im(f) = dim_K F \Leftrightarrow Im(f) = F.$$

Par conséquent, les assertions 2 et 3 sont bien équivalentes. Le corollaire est donc prouvé.

### 2.3.5 Exercices

**Exercice 8.** *Soient $E_1$ et $E_2$ des sous-espaces vectorielsd'un $\mathbb{K}$-espaces vectoriel $E$, $f : E_1 \times E_2 \to E$ l'application définie par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.*

**(a)** *Montrer que $f$ est linéaire.*

**(b)** *Démontrer que $Ker(f)$ est décrit par les couples $(x, -x)$, $x$ décrivant $E_1 \cap E_2$.*

**(c)** *Démontrer que $Im(f) = E_1 + E_2$. En déduire que*

$$dim_{\mathbb{K}}(E_1 + E_2) = dim_{\mathbb{K}}(E_1 \cup E_2) = dim_{\mathbb{K}} E_1 + dim_{\mathbb{K}} E_2$$

**Exercice 9.** *$f$ et $g$ étant deux endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$, démontrer que :*

$$Ker(g \circ f) = f^{-1}(Ker(g) \cup Im(f)).$$

**Exercice 10.** *$f$ et $g$ étant deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $E$ tels que $g \circ f = Id_E$, démontrer que $f$ et $g$ sont des automorphismes réciproques de $E$.*

**Exercice 11.** *Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on note $f(P) = (X-1)[P - \frac{1}{6}(X-1)^3 P^{(3)}]$ où $P^{(j)}$ désigne la dérivée d'ordre $j$ de P.*

1. *Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.*
2. *Si $k \in \{0,1,2,3\}$, on note $Q_k = (X-1)^k$. Vérifier que $\mathcal{G} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Ecrire la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{G}$.*
3. *En déduire l'image et le noyau de $f$.*

**Exercice 12.** *On note $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à une indéterminée $X$ et à coefficients réels. On rappelle que :*

**(i)** *$\mathcal{B}_0 = \{1, X, X^2, X^3\}$ est la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$.*

**(ii)** *$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ où $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$.*

*On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4$ définie par*

$$\Phi(P) = (P(-1), P'(-1), P(1), P'(1)).$$

**1.** *Montrer que $\Phi$ est linéaire.*

**2.a** *Déterminer la matrice $A$ de $\Phi$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^4$.*

**2.b** *Préciser le rang de $A$. En déduire que $\Phi$ est un isomorphisme.*

**2.c** *Retrouver le résultat précédent en montrant directement (sans utiliser ni $A$, ni son rang) que $Ker(\Phi) = \{0\}$.*

**3.** *Calculer les polynômes $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, images par $\Phi^{-1}$ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. [Pour $1 \leq j \leq 4$, $P_j = \Phi^{-1}(e_j)$.] Justifier que ces quatre polynômes constituent une base de $\mathbb{R}_3[X]$.*

**4.** *Soit $P$ dans $\mathbb{R}_3[X]$. Quelles sont les cordonnées de $P$ dans la base $\mathcal{B}_1 = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$.*

**Exercice 13.** *Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie égale à $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :*

1. *$[Im(f) \subset Ker(f)] \quad \Leftrightarrow \quad f^2 = 0$.*
2. *$[Im(f) = Ker(f)] \quad \Leftrightarrow \quad [f^2 = 0 \quad et \quad n = 2rg(f)]$.*

**Exercice 14.** *On considère le sous-espace vectoriel $F$ de $\mathbb{R}^4$ définie par le systèmes d'équations linéaires*

$$(S_\lambda) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 2z & + & 7t & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & (\lambda-3)z & + & (\lambda+3)t & = & 0 \end{array} \right.$$

*Discuter suivant les valeurs de $\lambda$ la dimension de F. Préciser dans chaque cas une base de F.*

## 2.4 Espace vectoriel des applications linéaires.

Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels sur le même corps commutatif $K$. L'ensemble $\mathcal{L}(E;F)$ des applications linéaires de $E$ dans $E$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel.

### 2.4.1 Sommes de deux applications linéaires

**Proposition 4.** *Soient $f$ et $g$ deux éléments de $\mathcal{L}(E;F)$. Alors l'application $S : E \to F$ définie par*

$$\forall x \in E, \ \ S(x) = f(x) + g(x)$$

*est linéaire.*

**Démonstration.** En effet, pour tout couple $x$, $y$ de vecteurs de $E$ et pour tout couple de scalaires $\alpha$ et $\beta$ de $K$, on a :

$$S(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x + \beta y) + g(\alpha x + \beta y).$$

Comme $f$ et $g$ sont linéaire et que l'addition est commutative, on a :

$$S(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \alpha g(x) + \beta f(y) + \beta g(y) = \alpha S(x) + \beta S(y).$$

D'où la proposition. La définition suivante est donc justifiée.

**Définition 14** (Somme d'application linéaires)**.** *A tout couple (f,g) d'éléments de $\mathcal{L}(E;F)$ faisons correspondre un élément de $\mathcal{L}(E;F)$, nommé somme de $f$ et $g$, noté $f+g$ et défni par*

$$\forall x \in E \ \ (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

D'après la proposition 4, cette addition est bien une loi de composition interne dans $\mathcal{L}(E;F)$.

**Théorème 16.** *Cette addition confère à $\mathcal{L}(E;F)$ une structure de groupe commutatif.*

**Démonstration.** En effet, elle est associative et commutative, puisqu'il en est ainsi de l'addition dans $F$. Elle admet l'application nulle notée $\theta$ comme élément neutre.Cette fonction est définie par

$$\forall x \in E, \ \ \theta(x) = 0_F.$$

Enfin, toute $f \in \mathcal{L}(E;F)$ a une opposée qui est $-f$, appartenant à $\mathcal{L}(E;F)$ et définie par

$$\forall x \in E, \ \ (-f)(x) = -f(x).$$

### 2.4.2 Produit d'une application linéaire par un scalaire

**Proposition 5.** *Soient $f \in \mathcal{L}(E;F)$ et $\alpha$. Alors l'application $P : E \to F$ définie par*

$$\forall x \in E, \ \ P(x) = \alpha f(x)$$

*est linéaire.*

**Démonstration.** En effet, pour tous vecteurs $x, y \in E$ et pour tous scalaires $u, v \in K$, on a :

$$P(ux+vy) = (\alpha f)(ux+vy) = \alpha f(ux) + \alpha f(vy) = \alpha u f(x) + \alpha v f(y)$$

Puisque $K$ est un corps commutatif, on obtient :

$$P(x) = u\alpha f(x) + v\alpha f(y) = uP(x) + vP(y).$$

Ainsi la proposition 5 est démontrée de telle sorte que la définition suivante est justifiée.

**Définition 15.** *A tout élément $f \in \mathcal{L}(E;F)$ et tout scalire $\alpha \in K$, faisons correspondre un élément de $\mathcal{L}(E;F)$, nommé produit de $f$ par $\alpha$, noté $\alpha f$ et défni par*

$$\forall x \in E, \ \ (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

D'après la proposition 5, la correspondance $(\alpha, f) \to \alpha f$ est application de $K \times \mathcal{L}(E;F)$ dans $\mathcal{L}(E;F)$ ; on défini ainsi une loi de composition externe. Il est facile de vérifier que, quels que soient $f, g \in \mathcal{L}(E;F)$, et $u, v \in K$ :

$$(u+v)f = uf + vf, \ \ u(f+g) = uf + ug \ , \ \ 1.f = f.$$

On peut dès lors énoncer :

**Théorème 17.** *$\mathcal{L}(E;F)$ est un espace vectoriel sur $K$ .*

### 2.4.3 Dual d'un espace vectoriel

Soient $K$ un corps commutatif et $E$ un espace vectoriel sur $K$. Un corps commutatif $K$ étant un espace vectoriel sur lui-même,$\mathcal{L}(E;K)$ est, d'après le théorème 17, un espace vectoriel sur $K$. Toute applcation linéaire $f : E \to K$ se nomme forme linéaire de $E$.

**Définition 16.** *On appelle dual de $E$, l'espace vectoriel sur $K$ $\mathcal{L}(E;K)$ des formes linéaires sur $E$.*

On note :

$$E^* = \mathcal{L}(E;K)$$

## 2.5 Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel

Soit $E$ un espace vectorielsur le corps commutatif $K$. On rappelle qu'un endomorphisme de $E$ est une application linéaire de $E$ dans $E$ et que l'ensemble des endomorphismesde $E$ est noté $\mathcal{L}_K(E)$ ou simplement $\mathcal{L}(E)$ si le corps de base $K$ ressort clairement du contexte. Nous savons que, muni de

l'addition et de la multiplication d'une application linnéaire par un scalaire, $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E;E)$ est un espace vectoriel sur $K$ (cf. Théorème 17) et que la composée de deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ est dans $\mathcal{L}(E)$ (cf. Théorème 9-(i)).

Nous allons montrer que la composition des applications est distributive par rapport à l'addition.
Soient $E$, $F$ et $G$ des espaces vectoriels sur le même corps commutatif $K$.

**Théorème 18.** *1. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E;F)$ et $h \in \mathcal{L}(F;G)$. Alors :*

$$h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g.$$

*2. Soient $h \in \mathcal{L}(E;F)$ et $f, g \in \mathcal{L}(F;G)$. Alors :*

$$(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h.$$

**Démonstration**.

$$\forall x \in E,\ \ (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Par application de la linéairité de $h$, on a :

$$\begin{aligned}[h \circ (f+g)](x) &= h(f(x)+g(x)) = h(f(x)) + h(g(x)) \\ &= (h \circ f)(x) + (h \circ g)(x) = (h \circ f + h \circ g)(x)\end{aligned}$$

ce qui prouve la première partie du théorème.
2. Pour tout $x \in E$, posons :

$$y = h(x).$$

Par définition de la somme de fonctions :

$$\forall y \in F,\ \ (f+g)(y) = f(y) + g(y);$$

ce qui entraîne :

$$\forall x \in E,\ \ (f+g)h(x) = f(h(x)) + g(h(x));$$

c'est-à-dire

$$(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h,$$

achevant ainsi la preuve de la deuxième partie du théorème.

**Théorème 19.** *Soit $E$ un espace vectoriel sur le corps commutatif $K$. Alors $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre unitaire sur $K$.*

**Démonstration.** En effet la loi de composition des application $(f, g) \to g \circ f$ est une loi de composition interne dans $\mathcal{L}(E)$. Le théorème 1montre que cette loi est distributive par rapport à l'addition. De plus elle admet un élément neutre : l'application identité de $E$ $Id_E$ définie par :

$$\forall x \in E, , \;\; Id_E(x) = x.$$

Enfin, pour tout $\alpha \in K$ et pour toutes $f, g \in \mathcal{L}(E)$ :

$$(\alpha g) \circ f = g \circ (\alpha f) = \alpha(g \circ f).$$

Donc le théorème 19 est prouvé.

**Remarque 5.** *Cette algèbre des endomorphismes de E n'est pas commutative.*

## 2.6 Groupes des automorphismes de $E$

### 2.6.1 Exemples de permutations linéaires

Pour tout espace vectoriel $E$, il existe des permutations de $E$ qui sont linéaires : par exemple l'identité $Id_E$ est une permutation linéaire de $E$. Donnons un autre exemple. Si on se donne une base

$$\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$$

de $E$ supposé de dimension finie $n$, toute permutation $g$ de $\mathcal{B}$ définit une autre famille

$$\mathcal{B}' = \{g(e_1), ..., g(e_n)\}$$

des mêmes vecteurs $e_i$, mais dans un autre ordre. Donc $\mathcal{B}'$ est une autre base de $E$. D'après le théorème 13, il existe un isomorphisme $f$ de $E$qui est telle que, pour tout indice $1 \leq i \leq n$, on ait $f(e_i) = g(e_i)$. Par conséquent, $f$ est un automorphisme de $E$.
Rappelons que l'ensemble des automorphisme de $E$ se note $\mathcal{A}ut(E)$.

### 2.6.2 Groupe linéaire

**Théorème 20.** *L'ensemble $\mathcal{A}ut(E)$ des automorphismes de $E$ est un sous-groupe des permutations de $E$.*

**Démonstration.** Rappelons que, pour qu'une permutation de $E$ appartienne à $\mathcal{A}ut(E)$, il faut et il suffit qu'elle soit linéaire. Prouvons que :

$$[f \in \mathcal{A}ut(E) \;\text{ et }\; g \in \mathcal{A}ut(E)] \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{A}ut(E).$$

En effet $g \circ g$ est linéaire si $f$ et $g$sont linéaires en vertu du théorème 9. Prouvons que :

$$f \in \mathcal{A}ut(E) \Rightarrow f^{-1} \in \mathcal{A}ut(E).$$

D'ailleurs la réciproque d'une bijection étant une bijection, il suffit de montrer que si $f \in \mathcal{A}ut(E)$ alors sa réciproque $f^{-1}$ est linéaire. Soient donc $\alpha, \beta \in K$ et $u, v \in E$. Comme $f$ est surjective, il existe une paire unique d'éléments $x, y \in E$ tels que

$$u = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(u) \text{ et } v = f(y) \Leftrightarrow y = f^{-1}(v).$$

On a, en utilisant la linéarité de f et le fait que $f \circ f^{-1} = Id_E$ :

$$f^{-1}(\alpha u + \beta v) = f^{-1}(\alpha f(x) + \beta f(y)) = f^{-1}(f(\alpha x) + f(\beta y))$$

$$= (f^{-1} \circ f)(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha f^{-1}(u) + \beta f^{-1}(v).$$

Ce qui exprime la linéarité de $f^{-1}$.

**Définition 17.** *Le groupe $\mathcal{A}ut(E)$ se nomme groupe linéaire de $E$ et se note aussi $GL(E)$.*

## 2.7 Projecteurs

### 2.7.1 Définitions

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels d'un $K$-espace vectoriel $E$. Nous savons que $F$ et $G$ sont supplémentaires s'ils sont linéairement indépendants [c'est-à-dire $F \cap G = \{\theta\}$] et si, de plus, leur somme directe vaut l'espace $E$ tout entier :

$$F \oplus G = E.$$

Dans ce cas, pour tout $z \in E$, il existe un unique $x \in F$ et un unique $y \in G$ tels que :

$$z = x + y.$$

Ceci met en évidence deux applications

$$P : E \to F \text{ et } Q : E \to G$$

définies par :

$$\forall z \in E, \; P(z) = x \text{ et } Q(z) = y. \tag{2.2}$$

Par analogie avec la géommétrie euclidienne, $x$ se nomme projection de $z$ sur $F$, parallèlement à $G$, tandis que $y$ se nomme projection de $z$ sur $G$, parallèlement à $F$.

**Définition 18.** *F et G étant deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, les deux applications P et Q définies sur E par 2.2 se nomment respectivement projecteur de sur F (parallèlement à G) et projecteur de E sur G (parallèlment à F).*

Les applications $P$ et $Q$ vérifient

$$\forall z \in E, \ \ z = P(z) + Q(z)$$

de telle sorte que $P$ associe à tout vecteur $z \in E$, l'unique vecteur $P(z)$ de $F$ vérifiant :

$$P(z) - z \in G.$$

De même, le projecteur $Q$ de $E$ sur $G$ associe à tout vecteur $z \in E$, l'unique vecteur $Q(z)$ de $G$ qui vérifie

$$Q(z) - z \in F.$$

**Proposition 6.** *Tout projeceur est une application linéaire.*

**Démonstration.** Soient $E = F \oplus G$, $P$ et $Q$ les projecteurs définis comme ci-dessus. Montrons que $P$ est une application linéaire. Pour tout couple de scalaires $\alpha, \beta \in K$ et pour tout couple de vecteurs $x, y \in E$, on a :

$$P(\alpha x + \beta y) - (\alpha x + \beta y) \in G \tag{2.3}$$

Or les relation :

$$P(x) - x \in G \ \text{ et } \ P(y) - y \in G$$

entraîne, puisque $G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ :

$$\alpha(P(x) - x) + \beta(P(y) - y) \in G,$$

soit :

$$\alpha(P(x) + \beta P(y) - (\alpha x + \beta y) \in G \tag{2.4}$$

Comme, pour tout $z \in E$, $P(z)$ est l'unique vecteur de $F$ tel que $P(z) - z \in G$, en comparant (2.3) et (2.4), on obtient :

$$P(\alpha x + \beta y) = \alpha P(x) + \beta P(y).$$

**Proposition 7.** *Si P et Q sont les projecteurs de E respectivement sur les sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G, parallèlement à l'autre, alors :*

$$Ker(P) = G \ \ \textit{et} \ \ Ker(Q) = F.$$

**Démonstration.** Puisque, pour tout $z \in E$, $P(z)$ est l'unique vecteur de $F$ tel que $P(z) - z \in G$, alors, la condition nécessaire et suffisante pour que $P(z) = 0_E$ est que : $0_E - z \in G$, soit $z \in G$. Donc $Ker(P) = G$.

**Proposition 8.** *Tout projeceur est un endorphisme vérifiant $P \circ P = P$.*

**Démonstration.** En effet si $E = F \oplus G$ et si $P$ est le projecteur de $E$ sur $F$, alors :

$$P(z) - z \in G \quad \text{et} \quad Ker(P) = G$$

entraînent :

$$\forall z \in E, \quad P[P(z) - z] = 0_E.$$

Comme $P$ est linéaire, on en déduit :

$$\forall z \in E, \quad (P \circ P)(z) = P(),$$

soit

$$P \circ P = P.$$

### 2.7.2 Exercices

**Exercice 15.** *Soient $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications numériques qui sont de classe $C^\infty$ dans $\mathbb{R}$, $\varphi : E \to E$, $f \to \varphi(f) = f'$ et $\Psi : E \to E$ définie par : $\forall f \in E$, $\forall x \in \mathbb{R}$,*

$$\Psi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

**(a)** *Vérifier que $\varphi$ et $\Psi$ sont linéaires.*

**(b)** *Exprimer $\Psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \Psi$.*

**(c)** *Etudier : l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de $\varphi$ et $\Psi$.*

**Exercice 16.** *Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, $p$ son indice de nilpotence (le plus petit entier naruel non nul $p$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$). Montrer que la famille*

$$\{Id_E, f, ..., f^{p-1}\}$$

*est libre.*

**Exercice 17.** *Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynôme à une indéterminée $X$ à coefficients réels et de degrés inférieurs ou égaux à 3, $\Phi$ l'application définie sur $E$ par :*

$$\Phi(P)(X) = Q(X) = 2P(X) + (2 - 3X)P'(X) + (2X^2 - X + 1)P''(X).$$

**(a)** *Montrer que $\Phi$ est un endomorphisme de $E$.*

**(b)** *Déterminer le noyau et l'image de $\Phi$.*

**Exercice 18.** *Les nombres complexes $p$ et $q \neq 0$ étant donnés, on considère l'ensembles $S$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que :*

$$u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}.$$

*On pose ($r \in \mathbb{C}$) :*

$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n), \quad r(u_n) = (ru_n).$$

**(a)** *Démontrer que $S$ est un sous-espace vectoriel, sur $\mathbb{C}$, de toutes les suites complexes.*

**(b)** *On considère l'application $T : S \to \mathbb{C}^2$ qui, à toute suite $(u_n)$ fait correspondre le couple $(u_0, u_1)$. Montrer que $T$ est un isomorphisme de $S$ sur $\mathbb{C}^2$.*

**(c)** *Montrer qu'il existe une suite unique de $(a_n \in S$ telle que $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ et une unique suite $(b_n) \in S$ telle que $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$. En déduire que, pour toute suite $(u_n)$ de $S$, il existe un couple unique de nombres complexes $(\alpha, \beta)$ tel que,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; u_n = \alpha a_n + \beta b_n.$$

*Quelle est la dimension de $S$ sur $\mathbb{C}$ ?*

**(d)** *Démontrer que si $p^2 - 4q \neq 0$, il y a dans $S$ deux suites linéairement indépendantes de la forme $s^n$, $s \in \mathbb{C}$. Calculer $u_n$ en fonction de $n$, $u_0$, $u_1$, $p$ et $q$.*

Application numérique *: 1. $p = q = -1$ et $u_0 = u_1 = 1$. 2. $p = -2kcos\phi$, $q = k^2$, $u_0 = 1$ et $u_1 = kcos\phi$, [$k$ et $\phi$ étant des nombres réels.]*

**(e)** *On suppose $p^2 - 4q = 0$ ; montrer qu'il n'y a dans $S$ qu'une seule suite de la forme $s^n$ avec $s \in \mathbb{C}$. Quelle relation vérifie la suite $(v_n)$ définie par $u_n = s^n v_n$ pour tout $n$ ? Déduire de cette étude deux suites de $S$ linéairement indépendantes. Calculer $u_n$ en fonction de $n$, $u_0$, $u_1$, $p$ et $q$.*

**Exercice 19.** *Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, $f : E \to F$ une application linéaire. Démontrer que l'application $\varphi : E \times F \to E \times F$ définie par*

$$\varphi(x, y) = (x, y - f(x))$$

*est un automorphisme de $E \times F$.*

# Chapitre 3

# Matrices

## 3.1 Définitions

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $n$ et $p$ des entiers naturels.

### 3.1.1 Définition d'une matrice

**Définition 19.** *On appelle matrice de type $(p, n)$ un tableau rectangulaire $M$ de $np$ éléments de $\mathbb{K}$ de la forme :*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{1j} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & .. & a_{2j} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{i1} & .. & a_{ij} & .. & a_{in} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{p1} & .. & a_{pj} & .. & a_{pn} \end{pmatrix}$$

*De manière condensée et consacrée par l'usage, on note $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$.*

L'élément $a_{ij}$ se trouvre à l'intersection de la ligne $i$ et de la colonne $j$. Pour tout $i$, $1 \leq i \leq p$, $l_i = (a_{i1}, ..., a_{ij}, ..., a_{in})$ est le $i$-ème vecteur ligne de la matrice $M$.

Pour tout $j$, $1 \leq j \leq p$, $c_j = (a_{1j}, ..., a_{ij}, ..., a_{pj})$ est le $j$-ème vecteur colonne de $M$.
On note $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type $(p, n)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. C'est l'ensemble des matrices dites carrées d'ordre $n$.
Si $p = 1$, on dit que la matrice $M$ est **uniligne**.
Si $n = 1$, on dit que la matrice $M$ est **unicolonne**.
On appelle **sous-matrice** ou **matrice extraite** de $M$ toute matrice dont les lignes (resp. les colonnes) sont des lignes (resp. colonnes) de $M$.

**Définition 20** (Diagonale)**.** *$A = (a_{ij})$ étant un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle diagonale de $A$, la ligne formée par les coefficients $a_{ii}, 1 \leq i \leq n$. Les coefficients $a_{ii}$ sont appelés éléments diagonaux de $A$.*

**Définition 21** (Transposée)**.** *Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de $M$ l'élement de $M^t = (b_{ij})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ défini par $b_{ij} = a_{ji}$.*

Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & ..., & x_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}.$$

La transposition $A \to A^t$ est une application de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui est visiblement bijective. De plus :

$$(A^t)^t = A \quad \forall A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}).$$

**Définition 22** (Trace d'une matrice)**.** *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de $A$, le scalaire noté $Tr(A)$ égale à la somme des éléments de la diagonale de $A$ :*

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

**Définition 23** (Matrices complexes)**.** *Les éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ sont dits complexes. Lorsque $A = (a_{ij})$, on appelle :*

**(i)** ***conjuguée*** *de $A$, la matrice notée $\overline{A}$ et définie par $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$, où $\overline{a_{ij}}$ est le complexe conjugué de $a_{ij}$.*

**(ii)** ***adjointe*** *de $A$ la matrice $A^*$ définie par $A^* = \overline{A}^t$*

**Définition 24.** *On dit qu'une matrice carrée complexe $A$ est hermitienne si elle est égale à son adjointe : $A = A^*$.*

### 3.1.2 Matrices particulières de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- $A$ est dite triangulaire inférieure si, et seulement si, $a_{ij} = 0_K$ pour $i < j$.
- $A$ est dite triangulaire supérieure si, et seulement si, $a_{ij} = 0_K$ pour $i > j$.

- $A$ est dite diagonale si, et seulement si, $a_{ij} = 0_K$ pour $i \neq j$. En particulier la matrice $I_n = (\delta_{ij})$ où $\delta_{ij}$ est symbole de Kronecker, est diagonale et est appelée, matrice unité d'ordre $n$.
- $A$ est dite scalaire si, et seulement s'il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que $A = aI_n$.
- $A$ est dite symmétrique si $A^t = A$. Ce qui se traduit au niveau des coefficients par : $a_{ji} = a_{ij}$.
- $A$ est dite antisymétrique si $A^t = -A$. ce qui se traduit au niveau des coefficients par : $a_{ji} = -a_{ij}$.

## 3.2 Matrices et applications linéaires

### 3.2.1 Matrice associée à une application linéaire

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimensions respectives $n$ et $p$ sur le corps commutatif $\mathbb{K}$ :

$$dim_{\mathbb{K}}(E) = n, \;\; dim_{\mathbb{K}}(F) = p.$$

Soient $B$ une base de $E$ :

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

et $C$, une base de $F$ :

$$C = \{u_1, u_2, ..., u_p\}.$$

Tout vecteur $x \in E$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire des éléments de la base $B$ :

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n = \sum_{j=1}^{n} x_je_j. \tag{3.1}$$

De même, tout vecteur $y \in F$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire des éléments de la base $C$ :

$$y = y_1u_1 + y_2u_2 + ... + y_pu_p = \sum_{i=1}^{n} y_iu_i. \tag{3.2}$$

Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$ :

$$f \in \mathcal{L}(E; F).$$

D'après le théorème 13, $f$ est déterminée de manière unique par la donnée des images des vecteurs de la base $B$ :

$$f(e_1),\ f(e_2), ...,\ f(e_n).$$

Donnons-nous ces images par leursexpressions dans la base $C$ :

$$\forall 1 \leq j \leq n, \;\; f(e_j) = a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + ... + a_{ij}u_i + ... + a_{pj}u_p = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}u_i. \quad (3.3)$$

Supposons que $y$ soit l'image par $f$ de $x$. Alors :

$$y = f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + ... + x_n f(e_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j).$$

En remplaçant $f(e_j)$ par son expression (cf. (3.3)) dans la base $C$, il vient :

$$y = \sum_{j=1}^{n} x_j (\sum_{i=1}^{p} a_{ij}u_i). \quad (3.4)$$

En utilisant les propriétés d'associativité et de commutativité de l'addition et celles de la multiplication externe, on obtient :

$$y = \sum_{i=1}^{p} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j) u_i. \quad (3.5)$$

Par unicité des coordonnées de $y$ dans la base $C$, on arrive à :

$$\forall 1 \leq i \leq p, \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j. \quad (3.6)$$

En détaillant la relation (3.9), on obtient :

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n \\ ..... & = & ............................................................ \\ y_p & = & a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + ... + a_{pj}x_j + ... + a_{pn}x_n \end{array} \quad (3.7)$$

Ces $p$ équations (3.7) sont appelées équations de $f$ par rapport aux bases $B$ de $E$ et $C$ de $F$. La matrice $M_{B,C}(f)$ ci-dessous qui en est issue est appelée **matrice de $f$ dans les bases $B$ et $C$** :

$$M_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1j} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2j} & .. & a_{2n} \\ ...... & ...... & .. & ...... & .. & ...... \\ a_{i1} & a_{i2} & .. & a_{ij} & .. & a_{in} \\ ...... & ...... & .. & ...... & .. & ...... \\ a_{p1} & a_{p2} & .. & a_{pj} & .. & a_{pn} \end{pmatrix}$$

La j-ième colonne $C_j$ de la matrice $M_{B,C}(f)$ est obtenue à partir de l'expression (3.3) de $f(e_j)$ dans la base $C$.

Ainsi les bases $B$ de $E$ et $C$ étant données, nous pouvons associer, à toute application linéaire $f$ de $E$ dans $F$, une matrice $M_{B,C}(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Les $np$ scalaires $a_{ij}$ sont les coefficients de cette matrice. Pour tout indice $1 \leq j \leq n$, la colonne de rang $j$ est constituée par les coordonnées dans la base $C$ de $F$, de l'image $f(e_j)$ du vecteur $e_j \in B$.

Réciproquement, si une matrice $M = (a_{ij})$ de $p$ lignes et $n$ colonnes est donnée, les formules (3.9) définissent une application $f$ de $E$ dans $F$. En effet, à tout vecteur $x$ de coordonnées $x_1, ..., x_n$, dans la base $B$, les formules (3.9) font correspondre un vecteur $y \in F$ de coordonnées $y_1, ..., y_p$, dans la base $C$. Ce vecteur $y$ est donné par la relation (3.5) d'où l'on déduit (3.3)

A partir de cette relation (3.3), on peut prouver que cette application $f$ est linéaire. En effet, pour tout $1 \leq j \leq n$, posons :

$$c_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} u_i.$$

Alors :

$$c_j = f(e_j),$$

et les relations (3.4) s'écrivent :

$$y = f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j c_j.$$

En outre, pour tous scalaires $a$ et $b$ et pourv tous vecteurs $x$ et $x'$ de $E$, on a :

$$af(x) + bf(x') = a\sum_{j=1}^{n} x_j c_j + b\sum_{j=1}^{n} x'_j c_j = \sum_{j=1}^{n} (ax_j + bx'_j) c_j = f(ax + bx').$$

Le résultat suivant est donc justifié.

**Théorème 21.** *Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels de dimensions respectives $n$ et $p$ sur un corps commutatifs $\mathbb{K}$, $B$ une base de $E$ et $C$ une base de $F$. Alors, il existe une unique application bijective $f \rightarrow M_{B,C}(f)$ de $\mathcal{L}(E;F)$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.*

**Exercice 20.**

Soit $f : R^3 \rightarrow R^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x + y + z, y - z, x + y)$. On pose $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $R^3$ : $e_1 = (1, 0, 0)$ , $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

**(a)** Donner la matrice $A = Mat(f, B)$ de $f$ par rapport à la base $B$.

**(b)** Déterminer le noyau $Ker(f)$ et l'image $Im(f)$ de $f$. On précisera dans chaque cas une base.

**(c)** Soit $i_E$ l'application identité de $R^3$. Pour $\lambda \in C$, on pose $f_\lambda = f - \lambda i_E$. Déterminer les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles $f_\lambda$ n'est pas surjective.

**(d)** Soient $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ les valeurs de $\lambda$ trouvées dans la question $(c)$. Pour chaque $1 \leq i \leq 2$, déterminer le rang et le noyau de $f_{\lambda_i}$. En déduire une base et la dimension de $Kerf_{\lambda_i}$.

**(e)** Pour chaque $1 \leq i \leq 2$ choisir un vecteur $v_i$ dans $Kerf_{\lambda_i}$. Montrer que $V = (v_0, v_1, v_2)$ est une base de $R^3$.

**(f)** Donner la matrice $B = Mat(f, V)$ de $f$ dans la base $V$.

## 3.3 Opérations sur les matrices

Sauf mention explicite du contraire, toutes les matrices considérées ont leurs coefficients dans un corps commutatifs $\mathbb{K}$.

### 3.3.1 Espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

#### Addition de matrices

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

**Définition 25.** *On appelle somme de $A$ et $B$ l'élément $S = (s_{ij}$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ défini par :*

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq n.$$

**Proposition 9.** *Muni de cette addition, $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est un groupe commutatif.*

Dans ce groupe additif, l'élément neutre est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont tous égaux à $0_{\mathbb{K}}$ appelé matrice nulle et noté $0_{\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})}$ ou simplement 0 si aucune confusion n'est à craindre. L'opposée de la matrice $A = (a_{ij})$ est la matrice $-A = (-a_{ij})$.

#### Multiplication par un scalaire

**Définition 26.** *A toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et à tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$, on associe une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée $\alpha A$, appeléé produit de $A$ par $\alpha$, définie par*

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}$$

**Proposition 10.** *Muni de l'addition matricielle et de cette multiplication par un scalaire, $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.*

### 3.3.2 Multiplication des matrices

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{jl} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

**Définition 27.** *On appelle produit de $A$ par $B$, la matrice notée $AB = (c_{ij})$ de type $(p, q)$ définie par :$\forall 1 \leq i \leq p$ et $\forall 1 \leq j \leq q$ :*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}. \tag{3.8}$$

**Remarques 2.**

1. Pour que le produit $AB$ soit possible il faut que le nombre de colonnes de $A$ soit égal au nombre de ligne de $B$.
2. Le coefficient $c_{ij}$ de $AB$ défini par larelation (3.8) est obtenu en multipliant la ligne $i$ de $A$ par la colonne $j$ de $B$.

**Exemple 24.**

On considère $A$ et $B$ respectivement dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 11** (Propriétés)**.** *On a :*

**(a)** *Le produit matriciel n'est pas commutatif.*

**(b)** *Le produit matriciel est asociatif : $\forall M_1 \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $M_2 \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $M_3 \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{K})$, on a :*

$$(M_1M_2)M_3 = M_1(M_2M_3).$$

**(c)** *Le produit matriciel est distributif par rapport àl'addition matricielle : $\forall M_1, M_2 \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $\forall M_3 \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, on a :*

$$(M_1 + M_2)M_3 = M_1M_3 + M_2M_3.$$

*$\forall M_1 \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $\forall M_2, M_3 \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on a :*

$$(M_2 + M_3)M_1 = M_2M_1 + M_3M_1.$$

### 3.3.3 Ecriture matricielle des applications linéaires.

Revenons aux équations (3.9) d'une application $f \in \mathcal{L}(E; F)$ par rapport au couple de bases $(B, C)$ :

$$\forall 1 \leq i \leq p, \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j. \tag{3.9}$$

Ces formules peuvent être interpréter de la manière suivante. Soient :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_j \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ y_i \\ .. \\ y_p \end{pmatrix},$$

les matrices unicolonnes des coordonnées du vecteur $x \in E$ dans la base $B$ et du vecteur $y \in F$ dan la base $C$. D'après la définition du produit matriciel, on a :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1j} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2j} & .. & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & .. & \ldots\ldots & .. & \ldots\ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & .. & a_{ij} & .. & a_{in} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & .. & \ldots\ldots & .. & \ldots\ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & .. & a_{pj} & .. & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ce qui s'écrit de façon condensée :

$$Y = MX;$$

ce qui est l'expression matricielle de la relation $y = f(x)$.

### 3.3.4 L'algèbre des matrice carrées d'ordre $n$.

On rappelle qu'une matrice carrée est une matrice dont le nombre de lignes est égale à celui des colonnes et que si $n$ est un entier naturel non nul, l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ et à coeffficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On sait que, muni de l'addition matricielle et de la multiplication par un scalaire, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. En outre :

**Théorème 22.** **(i)** *Muni de l'addition et du produit matriciel, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un annau unitaire admettant des diviseurs de zéro.*

**(ii)** *$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une algèbre unitaire sur le corps $\mathbb{K}$.*

**Remarques 3.**

**(i)** Cette algèbre n'est pas commutative, puisque le produit matriciel n'est pas commutatif.

**(ii)** L'élément unité de cette algèbre est la matrice unité d'ordre $n$ : $I_n$.

## 3.4 Matrices inversibles. Changement de bases.

### 3.4.1 Matrices inversibles

**Définition 28.** *On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ou régulière s'il existe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée $M^{-1}$, telle que :*

$$MM^{-1} = M^{-1}M = I_n.$$

Soient $E$ un espace vectoriel de dimnsion $n$ sur le corps $\mathbb{K}$ et $B$ une base de $E$.

**Théorème 23.** *L'anneau des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe multiplicatif, isomorphe au groupe $\mathcal{A}ut(E)$ des autorphismes de $E$.*

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, le groupe des matrices carrés d'ordre $n$ inversibles à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Ce groupe est aussi nommé : groupe **linéaire à $n$ variables sur le corps** $\mathbb{K}$ et encore noté $GL(n, \mathbb{K})$.

### 3.4.2 Action d'un changement de bases sur les coordonnées d'un vecteurs.

Considérons, dans un espace vectoriel de dimension finie et égale à $n$ sur le corps $\mathbb{K}$, deux bases :

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}, \quad C = \{u_1, u_2, ..., u_n\}.$$

**Problème : *Connaissant les coordonnées $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ du vecteur $x$ de $E$ dans la base $B$, déterminer les coordonnées $\{x'_1, x'_2, ..., x'_n\}$ de ce même vecteur dans la base $C$.***

Les $n$ vecteurs $u_i$ $1 \leq i \leq n$ de $F$ étant donnés, il existe une unique application linéaire $f : E \to E$ telle que

$$f(e_i) = u_i \;\; 1 \leq i \leq n.$$

Cette application $f$ est en outre bijective de telle sorte que sa matrice dans toute base de $E$ est inversible.
Donnons-nous la matrice de $f$ dans la base $B$. D'ailleurs, $B$ étant une base de $E$, pour tout $1 \leq j \leq n$, le vecteur $u_j = f(e_j)$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $B$ :

$$u_j = f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i. \tag{3.10}$$

**Définition 29.** *On appelle matrice de passage de la base $B$ à la base $C$, la matrice notée $P_{B,C}$ et définie par*

$$P_{B,C} = (a_{ij}).$$

Soit $x \in E$ de coordonnées dans la base $B$, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i. \tag{3.11}$$

Cherchons les coordonnées $(x'_1, ..., x'_n)$ dans la base $C$ :

$$x = x'_1 u_1 + x'_2 u_2 + .... + x'_n u_n = \sum_{j=1}^{n} x'_j u_j. \tag{3.12}$$

Remplaçons dans (3.12), les $u_j = f(e_j)$ par leurs valeurs données en (3.10) ; il vient :

$$x = \sum_{j=1}^{n} x'_j (\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j) e_i.$$

En comparant avec 3.11, on obtient :

$$\forall 1 \leq i \leq n \quad x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j. \tag{3.13}$$

Ces $n$ relations expriment les cordonnées de $x$ dans la base $B$ en fonction des coordonnées de $x$ dans la base $C$. Introduisons les matrices colonnes $X$ et $X'$ comme suit :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Alors les relations (3.13) expriment l'égalité entre $X$ et $PX'$ :

$$\boxed{X = PX'}$$

où $P = P_{B,C}$ est la matrice de passage de la base $B$ à la base $C$. Cette matrice étant inversible d'inverse $P^{-1}$, on a :

$$\boxed{X' = P^{-1} X}$$

relation qui exprime les coordonnées de $x$ dans la base $C$ en fonction des coordonnées de $x$ dans la base $B$.

### 3.4.3 Action d'un changement de bases sur la matrice d'un endomorphisme.

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie, $B$ et $C$ deux base de $f$.

**Problème :** ***Connaissant la matrice*** $M$ ***de*** $f$ ***dans la base*** $B$***, trouver la matrice*** $M'$ ***de*** $f$ ***dans la base*** $C$***.***

Soient $\in E$ et $y = f(x)$ son image par $f$. Désignons par $X$ et $Y$ respectivement les matrices colonnes des coordonnées de $x$ et $y$ dans la base $B$. On sait alors que :

$$Y = MX.$$

Soit $P$ la matrice de passage de la base $B$ à la base $C$. Désignons respectivement par $X'$ et $Y\prime$ les matrices colonnes de $x$ et $y$ dans la base $C$. Alors :

$$X = PX' \quad \text{et} \quad Y = PY'.$$

La matrice $P$ étant inversible d'inverse $P'$, la dernière relation est équivalente à

$$Y' = P^{-1}Y.$$

Dans cette relation, en remplaçant $Y$ par $MX = M(PX')$, nous obtenons :

$$Y' = (P^{-1}MP)X';$$

ce qui prouve que la matrice de $f$ dans la base $C$ est :

$$M' = P^{-1}MP.$$

### 3.4.4 Action d'un changement de bases sur la matrice d'un élément de $\mathcal{L}(E; F)$.

Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels de dimensions finies, $B$ et $B'$ deux bases de $E$ $C$ et $C'$ deux bases de $F$, $f \in \mathcal{L}(E; F)$. Posons :

$$M = Mat_{B,C}(f) \qquad M' = Mat_{B',C'}(f),$$

les matrices de $f$ respectivement par rapport aux couples de bases $(B, C)$ et $(B', C')$.

**Problème :** ***Connaissant la matrice*** $M$ ***de*** $f$ ***par rapport au couple de bases*** $(B, C)$***, trouver la matrice*** $M'$ ***de*** $f$***par rapport aux couples de bases*** $(B', C')$***.***

Soient, respectivement, $P$ et $Q$, les matrices de passage de la base $B$ à la base $C$ et de la base $B'$ à la base $C'$. Si $X$ et $X'$ sont respectivement les matrices unicolonnse des coordonnées du vecteur $x \in E$ dans les bases $B$ et $B'$, on a :

$$X = PX'.$$

De même, si $Y$ et $Y'$ sont respectivement les matrices unicolonnes du vecteur $y \in F$ dans les bases $C$ et $C'$, nous avons :

$$Y = QY'.$$

Comme $y = f(x)$, on a :

$$Y = MX \quad \text{et} \quad Y' = M'X'.$$

Les matrices de passage $P$ et $Q$ étant inversibles, on déduit des relations précédentes :

$$Y' = Q^{-1}Y = Q^{-1}(MY) = (Q^{-1}M)(PX') = (Q^{-1}MP)X'.$$

Les bases étant choisies, la matrice associée à $f$ est unique. Donc :

$$M' = Q^{-1}MP.$$

Le théorème suivant est donc justifié.

**Théorème 24.** *Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels de dimensions finies, $B$ et $B'$ deux bases de $E$, $C$ et $C'$ deux bases de $F$, $P$ la matrice de passage de la base $B$ à la base $B'$, $Q$ la matrice de passage de la base $C$ à la base $'$, et $f \in \mathcal{L}(E; F)$. Posons :*

$$M = Mat_{B,C}(f) \quad \textit{et} \quad M' = Mat_{B',C'}(f).$$

*Alors :*

$$M' = Q^{-1}MP.$$

**Exercice 21.** *Soient $I$ la matrice unité d'ordre 3 à coefficients réels et $A$ définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *On se propose de montrer que $A$ est inversible.*

   **1.a.** *Exprimer $A^2$ en fonction de $A$ et $I$.*

   **1.b.** *Montrer que $A$ est inversible et préciser son inverse $A^{-1}$.*

2. *Onconsidère l'équation matricielle d'inconnue $X$ apparatenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ :*

$$(E) : \quad AX + XA = I.$$

**2.a.** *Si $X$ est solution de $(E)$, montrer que $A^2$ et $X$ commutent ; puis que $A$ et $X$ commutent.*

**2.b.** *En déduire que $(E)$ admet une unique solution que l'on précisera.*

**Exercice 22.** *On désigne par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que $f$ est un automorphisme de $E$.*
2. *On pose $\mathcal{C} = (e_1, f(e_2), f(e_3))$.*

   **(i)** *Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $E$.*

   **(ii)** *Donner la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{C}$.*

# Chapitre 4

# Déterminants

## 4.1 Déterminant d'une matrice carrée

Dans toute cette section, les matrices considérées sont des matrices carrées.

### 4.1.1 Définition et exemples

**Déterminants de matricse carrées d'ordre 1 et 2 respectivement**

**Définition 30.** *Le déterminant de la matrice carrée d'ordre 1 à coefficient dans $K$ $A = (a_{11})$ est $a_{11}$.*

**Définition 31.** *Le déterminant de la matrice carrée d'ordre 2 à coefficient dans $K$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est le scalaire $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.*

Soit $A = \left(a_{ij}\right) \in M_n(K)$, une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans le corps commutatif $K$.Pour tout couple $(i, j) \in 1, ..., n^2$, soit $A_{ij}$ la matrice extraite de $A$ par élimination dans $A$ de la ligne et la colonne qui contiennent le coefficient $a_{ij}$.

**Proposition 12.** *Avec les notation précédentes,*

$$C = \sum_{j=1}^{j=n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}) = L.$$

**Définition 32.** *On appelle déterminant de $A$ l'élément de $K$ noté $det(A)$ défini par :*

$$det(A) = \sum_{j=1}^{j=n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}).$$

## 4.2 Propriétés du déterminant

Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels sur le corps commutatif $K$, $n$ un entier naturel non nul.

**Définition 33** (Application bilinéaire)**.** *Une application $f : E \times E \longrightarrow F$ est dite bilinéaire si :*

**(i)** *$\forall x \in E$ fixé, l'application $f(x, .) : E \longrightarrow F$, $y \to f(x, y)$ est linéaire et*

**(ii)** *$\forall y \in E$ fixé, l'application $f(., y) : E \longrightarrow F$, $x \to f(x, y)$ est linéaire.*

**Définition 34** (Application bilinéaire alternée)**.** *Une application bilinéaire $f : E \times E \longrightarrow F$ est dite alternée si*

$$\forall x \in E, \quad f(x, x) = 0_F.$$

**Proposition 13.** *Si $f : E \times E \longrightarrow F$ est une application bilinéaire alternée, alors,*

$$\forall x, y \in E, \quad f(y, x) = -f(x, y).$$

Démonstration. En effet, $f$ étant bilinéaire, on :

$$f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y).$$

Puisque $f$ est alternée, on obtient :

$$f(x, y) + f(y, x) = 0_F.$$

**Remarque 6.** *La réciproque de la proposition 13 n'est pas toujours vraie.*

En effet si une application bilinéaire $f : E \times E \longrightarrow F$ est telle

$$f(x, y) + f(y, x) = 0_F,$$

alors, en prenant $y = x$, on arrive à

$$2f(x, x) = 0_F,$$

où 2 est l'élément 1+1 du corps $K$. Or, il existe des corps dans lesquels cet élément coïncide avec le zéro $0_K$ de l'addition. C'est le cas du corps $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ des entiers modulo 2. Dans un tel corps, la relation $2f(x, x) = 0_F$ n'implique pas $f(x, x) = 0_K$.

Examinons les applications bilinéaires alternées, dans le cas où $E$ est de dimension égale à 2.

**Théorème 25.** *Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec $dim_{\mathbb{K}}E = 2$. Pour toute base $B = \{e_1, e_2\}$ et tout vecteur $v \in F$, il existe une et une seule application bilinéaire alternée $f : E \times E \longrightarrow F$ telle que*

$$f(e_1, e_2) = v.$$

**Démonstration.** [A insérer].

En prenant $F = \mathbb{K}$ et $v = 1_{\mathbb{K}}$ dans le théorème 25, on est assuré de l'existence d'une unique forme bilinéaire alternée $f$ telle que $f(e_1, e_2) = 1_{\mathbb{K}}$. Pour une telle forme, le scalaire $f(x, y)$ se nomme déterminant des vecteurs $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2$ par rapport à la base $B = \{e_1, e_2\}$.

La définition suivante est donc justifiée.

**Définition 35.** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps commutatif $\mathbb{K}$, $B = \{e_1, e_2\}$ une base de $E$. On appelle déterminant des vecteurs $x$ et $y$ dans la base $B$, l'image $D(x, y)$ par l'unique forme bilinéaire alternée $D : E \times E \to \mathbb{K}$, telle que $D(e_1, e_2) = 1 = 1_{\mathbb{K}}$. On note*

$$D(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

## 4.3 Applications multiliéaires

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$ et $p$ un entier naturel ($p \geq 2$).

### 4.3.1 Définition

**Définition 36.** *Une application $f : E^p \to F$, $(x_1, x_2, ..., x_p) \to f(x_1, x_2, ..., x_p)$ est dite $p$-linéaire si elle est linéaire en chacune des $p$ vecteurs $x_1, x_2, ..., x_p$.*

En d'autres termes, $f$ est dite $p$-linéaire si, pour tout indice $1 \leq i \leq p$ et pour tout choix des $p - 1$ vecteurs

$$x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_p,$$

l'application partielle :

$$x_i \to f(x_1, ..., x_i, ..., x_p)$$

est linéaire en $x_i$.

### 4.3.2 Propriétés.

**Proposition 14.** *Quels que soient les vecteurs $x_1, x_2, ..., x_p$ et quels que soient les scalaires $a_1, a_2, ..., a_p$, on a :*

$$f(a_1x_1, a_2x_2, ..., a_px_p) = a_1a_2...a_pf(x_1, x_2, ..., x_p).$$

**Proposition 15.** *Si $f : E^p \to F$ est une application p-linéaire, alors :*

$$(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}u_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}u_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{pj}u_j) = \sum a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{pj_p}f(u_{j_1}, u_{j_2}, ..., u_{j_p})$$

*où la sommation est étendue aux $n^p$ systèmes d'indices $\{j_1, j_2, ..., j_p\}$ tels que $1 \leq j_i \leq n$, pour $1 \leq i \leq p$.*

## 4.4 Applications multiliéaires alternées.

**Définition 37.** *Une application p-linéaire $f : E^p \to F$, $(x_1, x_2, ..., x_p) \to f(x_1, x_2, ..., x_p)$ est dite alternée si :*

$$x_i = x_j \quad avec \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad f(x_1, x_2, ..., x_p) = 0_F.$$

**Proposition 16.** *Soient $A$ et $B$ et $I_n$ des éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(K)$, $I_n$ étant la matrice identité d'ordre $n$. Alors :*

**(i)** $det(I_n) = 1$.

**(ii)** $det(AB) = det(A)det(B)$.

**(iii)** *Si $A$ est inversible d'inverse $A^{-1}$, alors $det(A^{-1}) = [det(A)]^{-1}$.*

**(iii)** $det(^tA) = det(A)$.

## 4.5 Déterminant d'un endomorphisme

Soient $E$ un espace vectoriel de dimension égale à n sur un corps commutatif $K$, $f$ un endomorphisme de $E$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$ deux bases de $E$ et $P$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{F}$. Si $A$ (respectivement $M$) est la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{F}$), alors :

$$M = P^{-1}AP$$

de telle sorte que :

$$det(M) = det(P^{-1}AP) = det(P^{-1})det(P)det(A) = det(A).$$

**Définition 38.** *Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif $K$, et $f$ un endomorphisme de $E$. On appelle déterminant de l'endormorphisme $f$ le déterminant de sa matrice dans une base quelconque de $E$.*

On note $det(f)$ le déterminant de l'endomorphisme $f$.

**Exercice 23.** *Soient $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$.*

1. *On pose : $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ où $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (1,1,0)$, $f_3 = (1,0,1)$.*
   - **(a)** *Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
   - **(b)** *On note $P$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{F}$. Déterminer $P$ et son inverse $P^{-1}$.*
2. *On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

   *On désigne par $u$ et $v$ les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement $A$ et $B$ : $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ ; $B = Mat_{\mathcal{B}}(v)$.*

   *Soient $D$ et $\triangle$ les matrices respectives de $u$ et de $v$ dans la base $\mathcal{F}$. Calculer $D$ et $\triangle$. Ce sont des matrices diagonales !*
3. *On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices $X$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient :*
   $$(S1) \left\{ \begin{array}{lcl} AXB & = & 0 \\ BXA & = & 0. \end{array} \right.$$
   - **(i)** *Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.*
   - **(ii)** *Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $Y = P^{-1}XP$. Montrer que $X$ est solution de $(S1)$ si et seulement si $Y$ est solution du système*
   $$(S2) \left\{ \begin{array}{lcl} DY\triangle & = & 0 \\ \triangle YD & = & 0. \end{array} \right.$$
   - **(iii)** *Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}'$ des matrices $Y$ qui vérifient $(S2)$.*
   - **(iv)** *En déduire l'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices $X$ qui vérifient $(S1)$. Donner une base de $\mathcal{C}$.*

# Chapitre 5

# Systèmes d'équations linéaires

## 5.1 Théorie du rang

### 5.1.1 Rang d'une famille de vecteurs

Soient $K$ un corps commutatif et $E$ un espace vectoriel sur $K$.

**Définition 39.** *On appelle rang d'une famille $\mathcal{F} = \{x_1, x_{2;...,x_n}\}$ de vecteurs de $E$, la dimension sur $K$ du sous-espace vectoriel de $E$ engendré par $\mathcal{F}$.*

Le rang de la famille $\mathcal{F} = \{x_1, x_{2,...,x_n}\}$ est donc égale au cardinal d'une base du sous-espace vectoriel engendré par les vecteur $x_1, x_2, ..., x_n$.

### 5.1.2 Rang d'une application linéaire

Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps commuatatif $K$, $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$.

**Définition 40.** *On appalle rang de $f$ l'entier naturel noté $rg(f)$ et qui est égal à la dimension de l'image $Im(f) = f(E)$.*

$$rg(f) = dim_K Im(f).$$

Si on considère une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de $E$, alors $Im(f)$ est engendré par la famille $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$. De cette famille, on peut extraire une base de $Im(f)$ qui a exactement un nombre de vecteurs égale à $rg(f)$, d'après la définition de $rg(f)$. En outre, on a :

$$rg(f) \leq dim_K E \quad \text{et} \quad rg(f) \leq dim_K F.$$

### 5.1.3 Rang d'une matrice

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$,

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & ... & a_{pj} & ... & a_{pn} \end{pmatrix}$$

**Définition 41.** *On appelle rang de $M$ l'entier naturel noté $rg(M)$ et qui est égal au rang de la famille formée par les $n$ vecteurs colonnes de $M$.*

Autrement dit si $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ est la famille des vecteurs colonnes de $M$, alors :

$$rg(M) = dim_K Vect(\mathcal{C})$$

où $Vect(\mathcal{C})$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{C}$.

### 5.1.4 Critère de l'indépendance linéaire

**Théorème 26.** *Dans un espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$ sur un corps commutatif $K$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

**(i)** *La famille $\mathcal{F} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est libre ;*

**(ii)** *La matrice $M$ des coordonnées des vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ dans une base de $E$ est inversible ;*

**(iii)** *Le rang de $M$ est égal à $n$ : $rg(M) = n$.*

## 5.2 Calcul du rang d'une matrice

### 5.2.1 Matrice extraite

Soit :

$$M = (a_{ij}), \quad 1 \leq i \leq p \quad 1 \leq j \leq n$$

une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(K)$.

**Définition 42.** *On appelle matrice extraite de $M$ toute matrice dont les lignes sont des parties de lignes de $M$ et les colonnes des parties de colonnes de $M$.*

Nous portons notre attention sur les matrices carrées extraites de $M$. L'ordre $q$ d'une telle matrice vérifie évidemment :

$$q \leq min\{n, p\}.$$

Soit $M_q$ une matrice carrée d'ordre $q$ extraite de $M$. On sait que $M_q$ est inversible si et seulement si $det(M_q) \neq 0$.

Pour toute matrice carrée non nulle $M \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, il existe des matrices carrées extraites de $M$ qui sont inversibles. Par exemple, la matrice $M_1$ à une ligne et une colonne constituée d'un coéfficient nul de $M$.
Désignons par $R(M)$ l'ensemble des entiers naturels $q$ tels qu'il existe une matrice carrée $M_q$ d'ordre $q$ inversible extraite de $M$. Alors :

**(i)** $R(M)$ n'est pas vide, puisque $1 \in R(M)$.

**(ii)** $R(M)$ est majoré par $min\{n, p\}$.

Par conséquent, $M_q$ admet un plus grand élément $r$ :

$$r = max\{s \in R(M)\}.$$

Ce nombre $r$ possède les les propriétés suivantes :

1. $r \leq min\{n, p\}$ ;
2. Il existe une matrice carrée $M_r$ extraire de $M$ qui est inversible.
3. Pour tout entier $q > r$, si $M_q$ est une matrice carrée d'ordre $q$ qui est extraite de $M$, alors $M_q$ n'est pas inversible.

**Remarque 7.** *Ce entier $r$ est indépendant de l'ordre des lignes ou des colonnes de $M$ ; il ne change pas si on modifie cet ordre.*

### 5.2.2 Calcul du rang d'une matrice

En fait on a le résultat suivant qui certifie que l'entier naturel $r$ mis en évidence est égal au rang de la matrice $M$ :

$$r = rg(M).$$

**Théorème 27.** *Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, le rang de $M$ est le plus grand entier $r$ tel qu'il existe une matrice carrée d'ordre $r$ inversible qui est extraite de $M$.*

### 5.2.3 Critère de l'indépendance linéaire

Soient $F$ un espace vectoriel de dimension $p$ sur le corps commutatif $K$, $\mathcal{F} = \{u_1, ..., u_p\}$, une base de $F$. Considérons $X = \{x_1, ..., x_n\}$, une famille de $n$ vecteurs de $F$ et soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, la matrice des coordonnées de ces vecteurs dans la base $\mathcal{F}$.
Pour que la famille $X$ soit libre, il faut et il suffit que son rang soit égal au nombre $n$ de ces vecteurs, c'est-à-dire (théorême ), que $rg(M) = n$.
En appliquant le théorème 27, on obtient le critèe général suivant :

**Théorème 28.** *Soient $F$ un espace vectoriel de dimension $p$ sur le corps commutatif $K$. Pour qu'un famille de $n$ vecteurs de $F$ soit libre, il faut et il suufit que l'on puisse extraire de la matrice de ces vecteurs dans une base quelconque de $F$, une matrice carrée d'ordre $n$ inversible.*

**Exemple 25.**

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $F = \mathbb{R}^4$, considérons les trois vecteurs :

$$x_1 = (1, 0, 1, 0)\,; \quad x_2 = (0, 1, 0, 1)\,; \quad x_3 = (1, -1, 0, 2).$$

La matrice $M$ de ces vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Désignons par $M_3$ la matrice formée par les trois premières lignes de $M$. Un calcul aisé donne $det(M_3 = -1 \neq 0$. Par conséquent $rg(M) = 3$ de telle sorte que la famille $\{x_1, x_2, x_3\}$ est libre.

## 5.3 Systèmes d'équations linéaires

Dans toute cette section, $K$ désignera un corps commutatif.

**Définition 43** (Equation linéaire)**.** *On appelle équation linéaire à n inconnues $x_1$,$x_2$, ..., $x_n$, à coefficients dans $K$, une égalité de la forme :*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b \tag{5.1}$$

*où, les éléments $a_j \in K$ (resp. b)sont appelés coefficients (resp. second membre) de l'équation 5.1.*

**Définition 44.** *On appelle solution de l'équation 5.1, tout n-uplet $(x_1, ..., x_n) \in K^n$ constitué de n éléments $x_1$,..., $x_n$ qui vérifie l'égalité 5.1.*

Résoudre l'équation 5.1, c'est déterminer l'ensemble de ses solutions (qui peut être vide).

**Définition 45** (Système d'équations linéaires)**.** *] On appelle système de p équations linéairse à n inconnues $x_1$,$x_2$, ..., $x_n$, à coefficients dans $K$, un système de la forme :*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ ... & . & . & . & . & . & . & . & ... \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & ... & + & a_{pn}x_n & = & b_p \end{array} \tag{5.2}$$

Les éléments $a_{ij} \in K$ sont appelés coefficients.
Les éléments $b_j \in K$ sont nommés seconds membres.
Les éléments $x_j$ sont appelés inconnues.

**Définition 46.** *On appelle solution du système 5.2, tout n-uplet* $(x_1, ..., x_n) \in K^n$ *constitué de n éléments* $x_1$,..., $x_n$ *qui vérifie les p égalités de 5.2.*

Résoudre le système 5.2, c'est déterminer l'ensemble de ses solutions (qui peut être vide).

On appelle matrice du système 5.2, la matrice des coefficients (de p lignes et n colonnes) :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{1j} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & .. & a_{2j} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{i1} & .. & a_{ij} & .. & a_{in} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{p1} & .. & a_{pj} & .. & a_{pn} \end{pmatrix}$$

### 5.3.1 Interprétation matricielle du système

Considerons les matrices unicolonnes :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_p \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}.$$

D'après la définition du produit matriciel, le système donné est équivalent à :

$$MX = B. \tag{5.3}$$

Résoudre le système, c'est résoudre cette équation matricielle. Les matrices $M \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ étant donées, il s'agit de trouver l'ensemble des matrices $X$ de $\mathcal{M}_{n,1}$ vérifiant (5.6).

### 5.3.2 Interprétation vectorielle du système

Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels, de dimensions respectives $n$ et $p$, sur le corps $K$ et :

$$\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\} \quad , \quad \mathcal{F} = \{u_1, ..., u_n\}$$

des bases respectives de $E$ et $F$.

Soit, relativement à ces bases, $\mathcal{F}$, l'application linéaire de $E$ dans $F$ qui a pour matrice $M$ :

$$M = \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(f).$$

Désignons par $x$ le vecteur de $E$ qui a pour cordonnées dans $\mathcal{B}$ les inconnues $x_1, ..., x_n$ et par $b$ le vecteur de $F$ qui a pour coordonnées dans $\mathcal{F}$ les seconds membres $b_1, ..., b_p$. Le système s'écrit alors :

$$f(x) = b. \tag{5.4}$$

**Résoudre le système** revient à déterminer l'ensemble des vecteurs $x \in E$ qui ont pour image le vecteur $b \in F$.

Dans cette interprétation, il est aisé de délimiter les grandes lignes de la discussion portant sur la résolution du système (5.2).

1. Supposons que $b$ n'appartienne pas à l'image de $f$ :

$$b \notin Im(f).$$

Alors , l'équation 5.12 n'a pas de solution.L'ensemble $S$ de ses solutions est vide.

2. Supposons que $b$ appartienne à l'image de $f$ :

$$b \in Im(f).$$

Alors, il existe au moins un vecteur $x_0 \in E$ tel que :

$$f(x_0) = b. \tag{5.5}$$

Pour toute solution $x$ de (5.12), on aura, en rétranchant membre à membre et en utilisant la linéarité de $f$ :

$$f(x - x_0) = f(x) - f(x_0) = 0.$$

Par conséquent, $x - x_0 \in Ker(f)$.
Réciproquement, tout vecteur $x \in E$ tel que :

$$x = x_0 + y \quad \text{avec} \quad y \in Ker(f)$$

est une solution du problème. D'ailleurs :

$$f(x) = f(x_0 + y) = f(x_0) + f(y) = f(x_0) = b.$$

Par suite, si $x_0$ est une solution de (5.12), l'ensemble des solutions est :

$$S = \{x \in E | \exists\ y \in Ker(f) : x = x_0 + y\}.$$

En résumé :

**(Resume 1) :** Si $b \notin Im(f)$, le système n'admet pas de solution.

**(Resume 2) :** si $b \in Im(f)$, le système admet au moins une sulution $x_0$ . Dans ce ca, l'ensemble des solutions est :

$$S = \{x \in E | \exists\ y \in Ker(f) : x = x_0 + y\}.$$

### 5.3.3 Remarques

1. Si $f$ est surjective (ce qui exige que $p = dim_K F \leq n = dim_K E$), alors :

$$Im(f) = F.$$

   Tout vecteur $b \in F$ appartient à $Im(f)$. Le système admet des solutions.

2. S $f$ est injective, alors $dim_K Im(f) = dim_K E = n$, par conséquent $n \leq p$ car $Im(f) \subset F$. Si $b \in Im(f)$, le système admet une solution unique puique $Ker(f) = \{0\}$.

3. Si $f$ est bijective, ce qui exige $n = p$, le système admet une solution puisque $f$ est surjective et une seule car $f$ est injective. On dit alors que le système est de Crammer.

## 5.4 Système de Cramer.

### 5.4.1 Définition

**Définition 47.** *Le système est dit de Cramer si les deux conditions suivantes sont réalisées :*

**(i)** $n = p$ *;*

**(ii)** $M$ *est inversible.*

### 5.4.2 Résolution du système de Cramer

Considérons l'équation matricielle :

$$MX = B. \tag{5.6}$$

Comme la matrice $M$ est inversible, en multipliant à gauche par $M^{-1}$, les deux membres de l'équation (5.6), on obtient :

$$X = M^{-1}B. \tag{5.7}$$

qui est la solurtion matricielle du système (5.6)

### 5.4.3 Calcul explicite de la solution

$M^*$ et $det(M)$ étant respectivement la transposée de la comatrice et le déterminant de $M$, on a :

$$M^{-1} = \frac{M^*}{det(M)}$$

de telle sorte que l'équation (5.7) s'écrit :

$$det(M)X = M^*B. \tag{5.8}$$

Or, $M^*$, la transposée de la comatrice de $M$ a pour terme général :

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ji})$$

où $M_{ji}$ est la transposée de ma matrice $M_{ij}$ qui est de $M$ par suppression de la ligne $j$ et de la colonne $i$. Le produit matriciel $M^*B$ a pour terme général de rang $j$ :

$$\sum_{i=1}^{j} c_{ij} b_i.$$

En identifiant terme à terme les deux matrices unicolonnes [de type $(n, 1)$] qui interviennent dans la relation 5.8, on obtient :

$$\forall 1 \leq j \leq n \ , \quad det(M).x_j = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} b_i det(M_{ji}).$$

Or, le second membre est le développement de la matrice $M_j$ déduite de $M$ en remplaçant la colonne de rang $j$ par les seconds membres $b_1, ..., b_n$. On obtient ainsi les formules de Cramer donnant les solutions du système :

$$\forall \ \ 1 \leq j \leq n \ , \ \ x_j = \frac{M_j}{det(M)}. \tag{5.9}$$

### 5.4.4 Exemple

Soit à résoudre le système :

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & -1 \end{array} \tag{5.10}$$

Dans cet exemple, $n = p = 3$. La matrice des coefficients est :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Un calcul simple donne $det(M) = 7$. Comme $det(M) \neq 0$, le système est de Cramer. Les formules de Cramer donnent :

$$7x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad 7y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 7, \quad 7z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 7.$$

L'unique solution du système est donc :

$$x = 0 \ , \quad y = z = 1.$$

## 5.5 Système général

### 5.5.1 Etude du cas général

Considérons le système (5.2) de $p$ équations linéaires à $n$ inconnues. Désignons par $r$ le rang de ce système :

$$r = rang(M)$$

où $M$ est la matrice des coefficients du système.
On sait qu'il existe une matrice carrée d'ordre $r$, $M_r$, inversible extraite de $M$. Sans perte de généralité, nous supposons que $M_r$ est formée à partir de $r$ premières lignes et des $r$ premières colonnes de $M$ ; pour y parvenir, il suffit, au besoin de changer la numérotation des inconnues et celle des équations.
Le système est donc :

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & ... & + & a_{1r}x_{1r} & + & ... & + & a_{1n}x_{1n} & = & b_1 \\ ... & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{r1}x_1 & + & ... & + & a_{rr}x_{rr} & + & ... & + & a_{rn}x_{rn} & = & b_r \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{p1}x_1 & + & .. & + & a_{pr}x_{pr} & + & ... & + & a_{pn}x_{pn} & = & b_p \end{array} \tag{5.11}$$

en faisant apparaître la matrice carrée inversible $M_r$. On a :

$$det(M_r) = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1r} \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ a_{r1} & ... & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Les inconnues $x_1, ..., x_r$ se nomment **inconnues principales**.
Les $r$ premières équations se nomment **équations principales**.

Envisageaons deux cas.

**Cas n°1** : $r = p$.
*Le rang de la matrice est égale au nombre d'équations du système.*
Du point de vue vectoriel, le système s'écrit :

$$f(x) = b. \tag{5.12}$$

Ici, on a :

$$r = dimIm(f) = dimF = p,$$

c'est-à-dire :

$$Im(f) = F.$$

Par conséquent, $f$ est surjective : quel que soit le vecteur $b \in F$, l'équation (5.12) a des solutions. Si $x_0$ est l'une d'elles, toutes les autres sont de la forme

$x = x_0 + y$ avec $y \in Ker(f)$.
Comme

$$n = dimE = dim_K Im(f) + dimKer(f),$$

il vient que :

$$dimKer(f) = n - p.$$

Par conséquent, les vecteurs $x = x_0 + y$, solutions de (5.12), dépendent de $n - p$ scalaires arbitraires, par exemples les coordonnées de $y$ dans une base de $ker(f)$. [Si $r = n$, la surjection $f$ est aussi une injection de telle sorte qu'on a un système de Cramer.]

### 5.5.2 Calcul effectif des solutions

On attribue des valeurs arbitraires dans $K$ aux $n - r$ inconnues non principales $x_j$, $r + 1 \leq j \leq n$. On fait passer dans les seconds membres du système (5.2) les termes correspondants :

$$a_{ij}x_i \text{ avec } r + 1 \leq j \leq n.$$

Pour tout $1 \leq i \leq p$, on écrit, par suite, l'équation de rang $i$ comme suit :

$$a_{i1}x_1 \quad + \quad ... \quad + \quad a_{ir}x_r \quad = \quad b_i \quad - \quad a_{i,r+1}x_{r+1} \quad - \quad ... \quad - \quad a_{in}x_n.$$

Comme $r = p$ est le nombre d'équations du système (5.2), on obtient de ce fait un système de Cramer que l'on sait résoudre.

**Cas 2 : $r < p$.** Dans l'équation 5.12, $f$ n'est plus surjective puisque :

$$r = dimIm(f) < dimF = p.$$

L'équation (5.12) a des solutions ou non selon que $b \in Im(f)$ ou $b \notin Im(f)$. Or $Im(f)$ est engendré par $f(e_1), ..., f(e_r)$, c'est-à-dire, les $r$ premiers vecteurs colonnes de $M$. Pour que $b \in Im(f)$, il faut et il suffit que la famille $\{f(e_1), ..., f(e_r), b\}$ soit liée dans $F$. D'après le critère général de l'indépendance linéaire, il faut et il suffit que la matrice de coordonnées de ces vecteurs dans une base de $F$ soit de rang strictement inférieur à $r + 1$. Or cette matrice est :

$$M' = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1r} & b_1 \\ ... & ... & ... & .. \\ a_{r1} & ... & a_{rr} & b_r \\ ... & ... & ... & .. \\ a_{p1} & ... & a_{pr} & b_p \end{pmatrix}$$

On sait qu'il existe une matrice carrée $M_r$ extraite de $M'$ qui est inversible. Donc $rg(M') \geq r$. Par conséquent, pour que $b \in Im(f)$, il faut et il suffit que $rg(M') = r$, c'est-à-dire, que toutes les matrices carrées d'ordre $r+1$ extraites ne soient pas inversibles :

$$\forall r+1 \leq k \leq p, \quad D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1r} & b_1 \\ ... & ... & ... & .. \\ ... & ... & ... & .. \\ a_{r1} & ... & a_{rr} & b_r \\ a_{k1} & ... & a_{kr} & b_k \end{vmatrix} = 0.$$

Ces $p-r$ déterminants sont appelés **déterminants caractéristiques**.
En résumé, pour que l'équation (5.12) ait des solutions, il faut et il suffit que tous les déterminants caractéristiques soient nuls. Dans ce cas, si $(x_1, ..., x_r)$ est une solution du système aux $r$ équations principales du système 5.2, elle est solution de toute équation non principale.
En conclusion de cette étude, on peut énoncer

**Théorème 29** (Fontené-Rouché)**.** *Soit un système de $p$ équations linéaires à $n$ inconnues, de rang $r$.*

1. *Si $r = p$, le système a des solutions obtenues en attribuant des valeurs arbitraires aux $n-r$ inconnues non principales.*
2. *Si $r < p$ et si l'un des déterminants caractéristiques n'est pas nul, le système n'a pas de solution.*
3. *Si $r < p$ et si tous les déterminants caractéristiques sont nuls, le système se réduit aux $r$ équations principales. On le résout comme au 1.*

### 5.5.3 Un exemple

Soit à résoudre, dans $\mathbb{R}$, le système suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} ax & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & az & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & z & + & at & = & 1. \end{array}$$

Le déterminant de la matrice du système est :

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Le second est déduit du premier en ajoutant les trois dernières colonnes à la première. Dans le dernier déterminant, retranchons la première colonne successivement des trois suivants ; on obtient :

$$D = (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3.$$

Différentes situations renseignées par l'expression du détermainant sont à envisager.

**1er Cas :** $(a+3)(a-1) \neq 0$. Le système est un système de Cramer. La solution peut être obtenue par l'utilisation des formules de Cramer.Cependent, il serait fastidieux d'utiliser cet moyen (calculer quatre autres déterminants !). En ajoutant membre à membre les quatre équations du système,nous obtenons une autre équation :

$$(a+3)(x+y+z+t) = 4,$$

et, puisque $(a+3) \neq 0$,

$$(x+y+z+t) = \frac{4}{a+3}.$$

Enretranchant successivement cette équation de chaque équation du système, nous obtenons :

$$(a-1)x = (a-1)y = (a-1)z = (a-1)t = 1 - \frac{4}{a+3}$$

et, puisque $a - 1 \neq 0$ :

$$x = y = z = t = \frac{1}{a+3}.$$

Le système admet cette solution unique.

**2ième cas** : $a = -3$. Le système est de rang 3. D'ailleurs le déterminant de la matrice extraite de $M$ :

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

L'unique déterminant caractéristique est non nul :

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -16 \times 4.$$

Le deuxième déterminant est déduit du premier en ajoutant à la quatrième colonne les autres colonnes. En développant le développant le déterminant obtenu suivant la 4ième colonne, nous obtenons immédiatement le résultat. Comme ce détermiant caractéristique n'est pas nul, le système n'admet pas de solution.
3ième cas : $a = 1$. Le système est alors formée quatre équations identiques :

$$x + y + z + t = 1.$$

On fixe arbitrairement les valeurs de trois inconnues (non principales) et on en déduit la valeur de l'inconnue principale. La matrice $M$ du système a tous ses éléments égaux à 1. Son rang est donc égal à 1.

### 5.5.4 Exercices

**Exercice 24.** *Résoudre le système d'équations linéaires $S(a,b)$ suivant où $a$ et $b$ sont des paramètrs réels.*

$$S(a,b) \left\{ \begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1. \end{array} \right.$$

*On calculera le déterminant du système et on fera une discussion suivant des valeurs de $a$ et $b$ mises en relief par l'expression factorisée du déterminant.*

**Exercice 25.** *Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les systèmes d'équations linéaires suivants :*

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x & - & y & + & z & = & 5 \\ x & + & y & - & z & = & -2 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 3. \end{array} \right. \quad (S_2) \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & z & = & 4 \\ -x & + & 3y & - & 5z & = & 1 \\ 8x & - & 9y & + & 13z & = & 2. \end{array} \right.$$

$$S_3 \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 3 \\ 5x & + & 2y & - & z & = & 5 \\ -3x & - & 4y & + & 3z & = & 1. \end{array} \right. \quad (S_4) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 3x & + & 4y & + & z & + & 2t & = & 3 \\ 6x & + & 8y & + & 2z & + & 5t & = & 7 \\ 9x & + & 12y & + & 3z & + & 10t & = & 13 \end{array} \right.$$

$$(S_5) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 3x & - & 5y & + & 2z & + & 4t & = & 2 \\ 7x & - & 4y & + & z & + & 3t & = & 5 \\ 5x & + & 7y & - & 4z & - & 6t & = & 3 \end{array} \right. \quad (S_6) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 8x & + & 6y & + & 5z & + & 2t & = & 21 \\ 3x & + & 3y & + & 2z & + & t & = & 10 \\ 4x & + & 2y & + & 3z & + & t & = & 8 \\ 7x & + & 4y & + & 5z & + & 2t & = & 18 \\ 3x & + & 5y & + & z & + & t & = & 15 \end{array} \right.$$

**Exercice 26.** *Soit $j \in \mathbb{C}$ tel que $j^3 = 1$ et $j \neq 1$. On considère le système :*

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & jy & + & j^2z & = & b \\ x & + & j^2y & + & jz & = & c. \end{array} \right.$$

**(i)** *Résoudre, dans $\mathbb{C}$, le système $(S)$.*

**(ii)** *Comment choisir a, b et c pour que x,y et z soient réels ?*

**Exercice 27.** *Discuter les systèmes suivants, selon les valeurs des paramètres supposés complexes ou réels.*

$$(S_1)\left\{\begin{array}{ccccccc} (1-m)x & + & (2m+1)y & + & (2m+2)z & = & m \\ mx & + & my & + & & = & m+2 \\ 2x & + & (m+1)y & + & (m-1)z & = & m^2-2m+9 \end{array}\right.$$

$$(S_2)\left\{\begin{array}{ccccccc} (m-2)x & + & 2y & - & z & = & a \\ 2x & + & my & + & 2z & = & b \\ 2mx & + & 2(m+1)y & + & (m+1)z & = & c \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & my & + & z & = & 1 \\ mx & + & y & + & (m-1)z & = & m \\ x & + & y & + & z & = & m+1 \end{array}\right. \quad (S_4)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a^2x & + & b^2y & + & c^2z & = & d^2 \end{array}\right.$$

$$(S_4)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a(a-1)x & + & b(b-1)y & + & c(c-1)z & = & d(d-1) \end{array}\right.$$

$$(S_5)\left\{\begin{array}{ccccccc} y & + & z & + & mt & = & a \\ z & + & t & + & mx & = & b \\ t & + & x & + & my & = & c \\ x & + & y & + & mz & = & d \end{array}\right. \quad (S_6)\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & m(y+z+t) & = & a \\ y & + & m(z+t+x) & = & b \\ z & + & m(t+x+y) & = & c \\ t & + & m(x+y+z) & = & d \end{array}\right.$$