COURS COMMUN L1 MI & MIAGE

5 janvier 2013

Table des matières

Chapitre 1

Propriétés du corps des nombres réels

1.1 A propos du corps des réels $\mathbb{R}$

Les nombres réels forment un ensemble noté par $\mathbb{R}$ et muni de deux opérations internes

$$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ et } \cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},$$

appelées respectivement, addition et multiplication, ainsi que d'une relation " $<$ ", « plus petit que », le tout satisfaisant à des propriétés que nous présentons par groupes.

1.1.1 Notion de corps

Soient a, b, c des éléments de $\mathbb{R}$. Nous admettons que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ vérifient les propriétés suivates :

(A) $a+b = b+a$ et $a\cdot b = b\cdot a$ (commutativité)

(B) $(a+b)+c = a+(b+c)$ et $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ (associativité)

(C) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ (distributivité)

(D) *Il existe deux nombres réels notés* 0 *et* 1 *tels* $a+0 = a$ *et* $1\cdot a = a$ *pour tout élément a de* $\mathbb{R}$.

(E) *Pour tout a il existe un nombre réel* $-a$ *tel que* $a+(-a) = 0$ *et si* $a \neq 0$*, il existe un nombre réel* $1/a$ *tel que* $a\cdot(1/a) = 1$.

Au vu de ces propriétés, on appelle $\mathbb{R}$ un corps [1].

Notons que le sous-ensemble $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$, appelé *ensemble des nombres rationnels* et défini par

$$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a\in\mathbb{Z} \text{ et } b\in\mathbb{Z}^*\},$$

où $\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ est l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, muni de l'addition et de la multiplication est aussi un corps.

Dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ on identifie $\frac{a}{b}$ et $\frac{a\times n}{b\times n}$ pour tout $a\in\mathbb{Z}$ et $b, n\in\mathbb{Z}^*$. En identifiant pour tout $a\in\mathbb{Z}$ les nombres $\frac{a}{1}$ et a, nous avons les inclusions

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R},$$

1. Un corps est un ensemble A muni de deux lois de compositions internes (*applications de* $A\times A$ *dans* A) que nous notons encore "$+$" et "$\cdot$" vérifiant les propriétés $(A)-(E)$

où $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble *des entiers naturels*. L'ensemble $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

En effet, un raisonnement géométrique, certainement déjà connu des babyloniens, montre qu'il est possible de construire un carré B de surface double de celle d'un carré initial A que l'on choisit de côté égal à 1. Si l'on note d la longueur du côté du carré B, qui est égale à la longueur de la diagonale du carré A, l'égalité $d^2 = 2$ est alors vérifiée. Mais un tel nombre d, ne peut pas être dans $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.1.1. Le nombre $d = \sqrt{2}$ positif qui vérifie $d^2 = 2$, n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration. Nous allons faire une démonstration par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe alors deux entiers positifs a, b tels que $\sqrt{2} = a/b$. Si a et b sont pairs, on peut simplifier la fraction a/b par 2. En simplifiant par 2 autant que possible, on arrive au cas où au moins un des deux entiers a ou b est impair. En élevant au carré l'égalité $\sqrt{2} = a/b$ et en multipliant les deux membres par l'entiers naturel b^2, on arrive à $2b^2 = a^2$.

Donc a^2 est pair. Si a est impair, on peut écrire $a = 2\alpha + 1$, alors $a^2 = 4\alpha^2 + 4\alpha + 1$ qui est impair. On en déduit donc que a est pair, donc on peut écrire $a = 2\alpha$, ce qui donne $2b^2 = 4\alpha^2$ et en simplifiant par 2, on obtient $b^2 = 2\alpha^2$. Le même raisonnement montre alors que b est aussi pair. On a donc une contradiction avec l'hypothèse que a ou b est impair, et $\sqrt{2}$ ne peut pas être rationnel. □

1.1.2 L'ordre sur $\mathbb{R}$

Nous admettons que l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est ordonné par la relation "$<$" qui a les propriétés suivantes :

(F) *Tout couple (a, b) de réels vérifie exactement une des trois relations suivantes $a = b$, $a < b$ ou $b < a$.*

(G) *Si $a < b$ et $b < c$ alors $a < c$* (transitivité).

(H) *Si $a < b$, alors $a + c < b + c$ pour tout c, et si $0 < c$ alors $ac < bc$.*

Proposition 1.1.2. $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné. [2]

Notation 1.1.1. Pour tout couple de réels (a, b),

1. $a > b$ signifie que $b < a$
2. $a \leq b$ signifie que l'on a soit $a < b$, soit $a = b$
3. $a \geq b$ signifie que l'on a soit $a > b$ soit $a = b$
4. $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$
5. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est aussi un corps totalement ordonné. Donc les propriétés que nous avons vu jusqu'ici ne permettent pas de caractériser l'ensemble $\mathbb{R}$, car $\mathbb{Q}$ est strictement contenu dans $\mathbb{R}$.

Dans un corps ordonné, on peut introduire la notion de la valeur absolue d'un nombre.

2. On appelle corps ordonné un corps $\mathbb{K}$ muni d'opérations "$+$" et "$\cdot$" et d'une relation $<$ t.q. les **(F)-(H)** soient satisfaits.

Définition 1.1.3. La valeur absolue du nombre réel a est le nombre réel noté $|a|$ et défini par

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

De la définition de la valeur absolue, nous avons immédiatement ce qui suit, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

1. $|a| \geq 0$
2. $|a| = 0$ si et seulement si $a = 0$
3. $|-a| = |a|$
4. $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$ si $a \neq 0$
5. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
6. Soit $b > 0$. $|a| < b$ si et seulement si $-b < a < b$
7. Soit $b \geq 0$. $|a| \leq b$ si et seulement si $-b \leq a \leq b$.
8. $|a| \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si $a = 0$.

Proposition 1.1.4 (Inégalité triangulaire)**.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$|a+b| \leq |a| + |b| \tag{1.1.1}$$

Démonstration. Il y a quatre possibilités :

1. Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors $a+b \geq 0$, de sorte que $|a+b| = a+b = |a| + |b|$
2. Si $a \leq 0$ et $b \leq 0$ alors $a+b \leq 0$ et $|a+b| = -(a+b) = -a + (-b) = |a| + |b|$.
3. Si $a \leq 0$ et $b \geq 0$ alors $a+b = -|a| + |b|$ de sorte que $|a+b| = |-|a| + |b|| \leq |a| + |b|$
4. Si $a \geq 0$ et $b \leq 0$ alors $a+b = |a| - |b|$ de sorte que $|a+b| = ||a| - |b|| \leq |a| + |b|$

□

Corollaire 1.1.5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$||a| - |b|| \leq |a+b| \tag{1.1.2}$$

et

$$||a| - |b|| \leq |a-b| \tag{1.1.3}$$

Démonstration. En remplaçant dans (1.1.1) a par $a-b$ nous obtenons

$$|a| \leq |a-b| + |b|,$$

de sorte que

$$|a| - |b| \leq |a-b| \tag{1.1.4}$$

Intervertissons les rôles de a et b, nous obtenons

$$|b| - |a| \leq |b-a| \tag{1.1.5}$$

qui est équivalent à dire que

$$|b| - |a| \leq |a-b| \tag{1.1.6}$$

puisque $|a-b| = |b-a|$. Mais alors, puisque

$$||a|-|b|| = \begin{cases} |a|-|b| & \text{si} \quad |a| \geq |b| \\ |b|-|a| & \text{si} \quad |b| \leq |a| \end{cases}, \tag{1.1.7}$$

le résultat découle des inégalités (1.1.4) et (1.1.6). En remplaçant b par $-b$ dans (1.1.2), nous obtenons 1.1.3 □

Une autre caractéristique importante de $\mathbb{R}$ est que l'on ne peut pas donner des valeurs à deux réels qui se suivent.

Lemme 1.1.6. Entre deux nombres réels $a < b$ il y a toujours une infinité de nombres réels différents.

Démonstration. Nous commençons avec

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

En répétant cette construction on obtient une infinité de nombres entre a et b. □

1.1.3 Propriété de la borne supérieure

Définition 1.1.7. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. Le réel M est un majorant de A si pour tout $a \in A$ on a $a \leq M$. On dit que A est majorée si A a un majorant.
2. Le réel m est un minorant de A si pour tout $a \in A$, on a $m \leq a$. On dit que A est minorée si A a un minorant.
3. Si la partie A est majorée et minorée, on dit que A est bornée.
4. On dit qu'un réel m est une borne inférieure de A et on note $m = \inf A$, si m est un minorant de A et si :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A \text{ tel que } m \leq x \leq m + \varepsilon$$
(ce qui peut se traduire en disant que m est le plus grand des minorants de A).
5. On dit qu'un réel M est une borne supérieure de A et on note $M = \sup A$, si M est un majorant de A et si :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A \text{ tel que } M - \varepsilon < x \leq M$$
(ce qui peut se traduire en disant que M est le plus petit des majorants de A).

(I) *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.* On dit que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure ou est complet.

On admet qu'à un isomorphisme près, il existe un et un seul corps totalement ordonné possédant la propriété de la borne supérieure, c'est-à-dire vérifiant les propriétés $(\mathbf{A})-(\mathbf{I})$. En d'autres termes, deux corps ordonnés complets sont isomorphes : Il existe une bijection entre les deux corps qui respecte les opérations algébrique et la relation d'ordre

Théorème 1.1.8. Si A admet une borne inférieure (resp. supérieure) cette dernière est unique.

Démonstration. Supposons que A admette deux bornes supérieures M et M' avec $M' < M$. Prenant $\varepsilon = M - M'$, on peut alors trouver $x \in A$ tel que $M' = M - \varepsilon < x \leq M$, ce qui contredit l'inégalité $x \leq M'$. L'ensemble A admet donc au plus une borne supérieure. On procède de même pour la borne inférieure. □

La borne inférieure ou supérieure de A quand elle existe n'est pas nécessairement un élément de A. Si $\inf(A)$ (resp. $\sup(A)$) existe et est dans A, on dit alors que $\inf(A)$ (resp. $\sup(A)$) est le plus petit (resp. plus grand) élément de A. Si $\inf(A) \in A$ (resp. $\sup(A) \in A$) on dit aussi que c'est le minimum (resp. maximum) de A et on le note $\min(A)$ (resp. $\max(A)$).

Proposition 1.1.9.

1. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément qui est 0.
2. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
3. Toute partie majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.
4. Toute partie minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément, et toute partie majorée, un plus grand élément.

Définition 1.1.10 (intervalle, segment)**.** Soient a, b deux réels tels que $a \leq b$.

1. On note $[a,b]$ l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$. C'est un intervalle fermé. On dit aussi que $[a,b]$ est un segment.
2. On note $]a,b[$ l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$. C'est un intervalle ouvert. On définit de même les intervalles mixtes ou semi-ouverts $[a,b[$ et $]a,b]$. On introduit aussi le symbole ∞ (appelé l'infini) et on note $[a,+\infty[$ l'ensemble des x réels tels que $a \leq x$ et $]-\infty,a]$ l'ensemble des réels x tels que $x \leq a$.

Exemple 1.1.1.

– 1,13, sont des majorants du segment $A = [-1,1]$. 1 est un majorant de $A = [-1,1[$.

– L'intervalle $[a,+\infty[$ n'a pas de majorant.

Théorème 1.1.11 (Propriété d'Archimède)**.** Soient x et y deux réels > 0, alors il existe un entier n tel que $ny > x$.

Démonstration. Nous faisons la preuve par l'absurde. Si l'affirmation était fausse alors x serait un majorant de

$$S = \{yn | n \in \mathbb{N}\}.$$

Donc, d'après la propriété (**I**) S possède une borne supérieure que nous notons β. Ainsi, $yn \leq \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or si $n \in \mathbb{N}$ alors $n+1 \in \mathbb{N}$. Il vient alors que $(n+1)y \leq \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par conséquent $yn \leq \beta - \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\beta - \varepsilon$ est un majorant de S ; ce qui est absurde car $\beta - \varepsilon < \beta$ et β est le plus petit des majorants. □

Elle dit qu'en faisant assez de pas de longueur y on dépasse x.

Remarque 1.1.12. Toute partie A non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure : en notant $(-A)$ l'ensemble des opposés des éléments de A, $\inf A = -\sup(-A)$.

Théorème 1.1.13. Pour tout réel x il existe un unique entier relatif n tel que :

$$n \leq x < n+1 \tag{1.1.8}$$

Démonstration. Pour x entier relatif, il suffit de prendre $n = x$. On suppose donc que x n'est pas un entier relatif. Supposons d'abord que x est strictement positif. Le théorème 1.1.11 affirme qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m > x$. Par conséquent, l'ensemble des entiers $m > 0$ vérifiant $m > x$ est non vide. Il admet donc un plus petit élément p. Il suffit alors de poser $n = p-1$. Pour $x < 0$ en raisonnant avec $-x$ on aboutit à l'existence d'un entier p vérifiant :

$$p \leq -x < p+1.$$

On a alors $-(p+1) < x < p$ (x n'est pas entier) et $n = -(p+1)$ convient.

Si pour x réel il existe deux entiers n et p vérifiant (1.1.13), on a alors :

$$\begin{cases} n \leq x < n+1 \\ -p-1 < -x \leq -p \end{cases}$$

donc $n-p < 1$, soit $n-p \leq 0$ et $n-p > -1$, soit $n-p \geq 0$. Et nécessairement $n = p$. D'où l'unicité de n vérifiant (1.1.13). □

Définition 1.1.14. Avec les notations du théorème précédent, l'entier n est appelé la partie entière de x. On le note $[x]$ ou $\mathrm{E}(x)$

Nous admettons ce théorème.

1.2 Densité des rationnels et irrationnels

Définition 1.2.1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si A rencontre tout intervalle ouvert $]a,b[$ avec $a < b$.

Théorème 1.2.2. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnel est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soient $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Appliquons le théorème 1.1.11 avec $x = 1$ et $y = b-a$. Il existe un entier positif q tel que $q(b-a) > 1$. Il existe aussi un entier j tel que $j > qa$. Ceci est evident si $a \leq 0$, et découle du théorème 1.1.11 avec $y = 1$ et $x = aq$ si $a > 0$. Soit p le plus petit entier qui vérifie $p > qa$. Nous avons $p-1 \leq qa$, de sorte que nous avons

$$qa < p \leq qa+1.$$

Mais puisque $1 < q(b-a)$ ceci implique $qa < p < qa+q(b-a) = qb$, et par suite $a < \frac{p}{q} < b$. □

Théorème 1.2.3. L'ensemble des nombres irrationnels noté $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit i un nombre irrationnel, par exemple $\sqrt{2}$. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On applique le théorème 1.2.2 à $]a-i, b-i[$, il existe un rationnel r tel que $a-i < r < b-i$. Alors $a < i+r < b$. Le nombre $x = i+r$ est irrationnel, sinon $i = x-r$ serait rationnel contrairement à l'hypothèse. □

Remarque 1.2.4. Il y a beaucoup plus de nombres réels que de nombres rationnels. On peut montrer que les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ peuvent être mis en bijection avec $\mathbb{N}$, c'est-à-dire que l'on peut numéroter avec les entiers naturels les éléments de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$. On dit que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Par contre $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (théorème de Cantor) et pourtant $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Chapitre 2

Suites réelles

Nous nous intéressons dans ce cours aux suites réelles, mais nous donnerons de temps à autres des résultats élémentaires portant sur les suites complexes.

2.1 Convergence d'une suite

2.1.1 Généralités sur les suites numériques

Définition 2.1.1. On appelle suite réelle (resp. complexe), toute application définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). On note usuellement $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $u = (u_n)_{n\geq n_0}$ ou tout simplement (u_n) une telle suite.

u_n est appelé le terme général de la suite (u_n).

Pour simplifier, nous supposerons que les suites sont définies sur $\mathbb{N}$ et on note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles, ($\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites complexes).

Le terme u_n de la suite (u_n) peut être donné sous forme explicite ou sous forme récurrente (ce qui signifie que l'on indique une loi de formation des termes successifs).

Exemple 2.1.1.

1. La suite réelle $e = (e_n)_{n\geq 1}$ définie par $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est sous une forme explicite. Elle commence par $e_1 = 2$, $e_2 = \frac{9}{4}$, $e_3 = \frac{4^3}{3^3}$, etc.
2. La suite (de Fibonacci) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$, est donnée sous une forme récurrente. Elle commence par $v_0 = 0$, $v_1 = 1$, $v_2 = 1$, $v_3 = 2$, etc.
3. Plus généralement on a les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 définies par la formule
$$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$$
avec u_0 et u_1 données.

Définition 2.1.2. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

1. **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \leq M$,
2. **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $m \leq u_n$,
3. **bornée** si elle est majorée et minorée,
4. **non décroissante, ou croissante au sens large** (resp. non croissante, ou décroissante au sens large) si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$),

5. **strictement croissante** (resp. strictement décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} > u_n$ (resp. $u_n > u_{n+1}$),
6. **monotone** si elle est croissante ou décroissante,
7. **périodique** s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_{n+p} = u_n$. L'entier p est la période de la suite.

Une suite complexe (u_n) est dite bornée si la suite réelle $(|u_n|)$ est bornée.

Exemple 2.1.2. La suite de terme générale

1. $u_n = \sin n$ est bornée. Elle n'est ni décroissante ni croissante.
2. $u_n = \frac{1}{n}$ définie pour $n \geq 1$ est strictement décroissante et bornée.
3. $u_n = e^n$ est croissante, minorée mais pas majorée.
4. $u_n = u_0 a^n$ avec $u_0 > 0$ est croissante non majorée si $a > 1$, décroissante et bornée si $0 < a < 1$, constante si $a = 1$.
5. La suite $u_n = \sin(\frac{2\pi n}{17})$ est périodique de période 17.

Remarque 2.1.3. 1. Si la suite réelle (u_n) est une suite décroissante à termes strictement positifs, alors $(\frac{1}{u_n})$ est une suite décroissante à termes positifs. Dans ce cas en effet :

$$u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} < \frac{1}{u_n}.$$

2. Il peut arriver qu'une suite soit rendue monotone quand on en supprime les q premiers termes (q fixé).
3. D'après sa définition, la monotonie se met en évidence en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$. Dans le cas où $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut aussi comparer à 1 le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

2.1.2 Suites convergentes ou divergentes

Définition 2.1.4. Soit (u_n) une suite complexe ou réelle. On dit que (u_n) admet $a \in \mathbb{C}$ pour limite ou que (u_n) converge vers a et on écrit $\lim_{n\to\infty} u_n = a$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - a| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. En formule

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon)$$

Proposition 2.1.5. La limite d'une suite convergente est unique.

Démonstration. Soit (u_n) une suite. Nous faisons la démonstration par l'absurde. Supposons qu'il y a deux limites ℓ et ℓ' avec $\ell \neq \ell'$. Prenons

$$\varepsilon = \frac{|\ell' - \ell|}{4} > 0.$$

Comme ℓ est limite de la suite (u_n) il existe un entier N tel que pour tout $n > N$ on ait $|u_n - \ell| < \varepsilon$, de même ℓ' étant aussi limite, il existe un entier N' tel que pour tout $n > N'$ on ait $|u_n - \ell'| < \varepsilon$. Alors si $n > \max(N, N')$ l'inégalité triangulaire permet d'écrire

$$\left|\ell - \ell'\right| \leq |\ell - u_n| + \left|u_n - \ell'\right| \leq 2\varepsilon = \frac{|\ell' - \ell|}{2}$$

ce qui est absurde. □

Exemple 2.1.3. 1. Montrons que la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{-2n+3}{n+2}$ a pour limite -2. Nous avons

$$|u_n - (-2)| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{7}{n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{7}{\varepsilon} - 2$$

Donc pour $\varepsilon > 0$ si $n > \mathrm{E}(\frac{7}{\varepsilon}) - 1 > \frac{7}{\varepsilon} - 2$ alors $|u_n - (-2)| < \varepsilon$.

2. Considérons la suite définie par $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$. On peut écrire $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ ce qui montre que $|u_n| < \frac{1}{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. *On peut remarquer que la suite* (u_n) *est décroissante*

En utilisant l'inégalité

$$||a| - |b|| \leq |a-b|,$$

qui est valable pour tous réels a et b, on montre que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |u_n| = |\ell|.$$

Théorème 2.1.6. Toute suite (réelle ou complexe) convergente est bornée.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, on ait $|u_n - \ell| < 1$, c'est-à-dire

$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|.$$

Posons

$$M = \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_N|, |\ell| + 1\}.$$

Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. $\square$

Définition 2.1.7. Une suite non convergente est dite divergente.

Exemple 2.1.4. Montrons que la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente.

Si cette suite converge vers un réel ℓ la suite $|u| = (|(-1)^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est constante égale à 1 va converger vers $|\ell|$ et nécessairement $\ell = \pm 1$. En écrivant que pour $\varepsilon = 1$, il existe un entier N tel que :

$$\forall n > N, \ |(-1)^n - \ell| < 1$$

et en prenant $n > N$ impair si $\ell = 1$ et pair si $\ell = -1$, on aboutit à $2 < 1$ qui est impossible. La suite u est donc divergente

Parmi les suites réelles divergentes, on traite à part celles qui tendent vers l'infini.

Définition 2.1.8. Soit (u_n) une suite réelle.

1. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si,

$$\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n > N, u_n > M.$$

On note $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

2. On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ si,

$$\forall m \in \mathbb{R}, \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n > N, u_n < m.$$

On note $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Exemple 2.1.5. Soit (a_n) la suite de terme général $a_n = \frac{n^n}{n!}$. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. En effet, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n}{n}\frac{n}{n-1}\cdots\frac{n}{2}\frac{n}{1} > n.$$

Donc pour tout $K > 0$ si $n > K$ alors on a $a_n > K$. Prendre pour N tout entier supérieur à K, en occurrence $\mathrm{E}(K)+1$.

Une suite qui tend vers $+\infty$ est nécessairement positive à partir d'un certain rang. On peut remarquer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si, et seulement si $\lim_{n\to+\infty} -u_n = +\infty$

Si $u_n = \frac{1}{v_n}$ avec $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ si, et seulement si, $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Dans la définition de la convergence et des limites ci-dessus, les inégalités peuvent être larges ou strictes et on peut se limiter en ce qui concerne les limites infinies, à $M > 0$ et $m < 0$ sans que cela ne soit restrictif.

Une suite qui tend vers l'infini (c'est-à-dire vers $+\infty$ ou $-\infty$) est non bornée donc divergente.

Une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ est divergente puisque non bornée.

2.1.3 Théorèmes généraux sur les suites convergente

Théorème 2.1.9. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes pour laquelle on peut trouver une suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $|u_n - \ell| \leq v_n$ à partir d'un certain rang, où ℓ est un nombre complexe donné, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N_0$, $v_n < \varepsilon$. Par ailleurs, il existe N_1 tel que pour tout $n > N_1$, $|u_n - \ell| \leq v_n$. Maintenant, si $n > \max(N_0, N_1)$, alors $|u_n - \ell| \leq v_n < \varepsilon$. □

Le résultat qui suit se déduit immédiatement de la définition d'une suite convergente.

Théorème 2.1.10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

1. Si $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$) on a alors $u_n > 0$ (resp. $u_n < 0$) à partir d'un certain rang.
2. Si u_n est positif (resp. négatif) à partir d'un certain rang, on a alors $\ell \geq 0$ (resp. $\ell \leq 0$)

Démonstration. 1. Pour $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n > n_0,\ |u_n - \ell| < \frac{\ell}{2},$$

soit :

$$\forall n > n_0,\ \frac{\ell}{2} < u_n < \frac{3}{2}\ell$$

et donc :

$$\forall n > n_0,\ 0 < \frac{\ell}{2} < u_n.$$

Pour $\ell < 0$, on travaille avec la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Se déduit facilement du premier point.

□

Théorème 2.1.11. Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles. Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si d'autre part (v_n) et (w_n) admettent la même limite ℓ, alors (u_n) converge et admet aussi ℓ pour limite.

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. La convergence de (v_n) vers ℓ implique qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N$ alors $|v_n - \ell| < \varepsilon$, c'est-à-dire

$$\ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon. \tag{2.1.1}$$

De même la convergence de (w_n) vers ℓ implique qu'il existe N' tel que si $n > N'$ alors $|w_n - \ell| < \varepsilon$, c'est-à-dire

$$\ell - \varepsilon < w_n < \ell + \varepsilon. \tag{2.1.2}$$

Par ailleurs, il existe d'après l'hypothèse, $M \in \mathbb{N}$ tel que si $n > M$ alors

$$v_n \leq u_n \leq w_n. \tag{2.1.3}$$

Donc si $n > \max(N, N', M)$ alors (2.1.1), (2.1.2) et (2.1.3) sont valides. Par suite,

$$\ell - \varepsilon < v_n \leq u_n \leq w_n < \ell + \varepsilon.$$

Ce qui prouve que la suite (u_n) tend vers ℓ. □

Remarque 2.1.12. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si à partir d'un certain rang on a $v_n \leq u_n$ et si d'autre part

1. $\lim_{n\to\infty} v_n = \infty$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

Démonstration. D'après l'hypothèse, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, on ait $v_n \leq u_n$.

1. Dire que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ signifie pour $K \in \mathbb{R}$ donné, il existe un entier N tel que si $n > N$ alors $v_n > K$. D'autre part on sait que pour tout $n > N_0$, on a $v_n \leq u_n$. Donc si $n > \max(N_0, N)$ on a $K < v_n \leq u_n$, ce qui prouve que u_n tend vers $+\infty$.
2. On fait de même qu'en 1).

□

2.1.4 Valeurs d'adhérence

Définition 2.1.13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

1. On dit que la suite (v_n) est une suite extraite de (u_n) lorsqu'il existe une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}.$$
2. On dit qu'un scalaire a est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il est limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En pratique, on rencontrera souvent les extractions $(u_{n+1})_{n\geq 0}$ (suite décalée d'un indice), $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ (termes pairs et impairs d'une suite).

Exemple 2.1.6. La suite de terme générale $v_n = \frac{1}{n} + \sin\frac{2n\pi}{3}$ admet les valeurs d'adhérences 0, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ces nombres sont les limites respectives des suites extraites (v_{3n}), (v_{3n+1}) et (v_{3n+2}).

Remarque 2.1.14. Si φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

Démonstration. Procédons par récurrence. On a $\varphi(0) \geq 0$ puisque $\varphi(0) \in \mathbb{N}$. Supposons que $\varphi(n) \geq n$. On a $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ puisque φ est strictement croissante. Donc $\varphi(n+1) > n$, soit $\varphi(n+1) \geq n+1$ puisque $\varphi(n+1)$ est un entier. □

Théorème 2.1.15. Soit (u_n) une suite. Alors (u_n) tend vers ℓ si et seulement si toute suite extraite (sous-suite) de (u_n) tend vers ℓ.

Démonstration. $\Leftarrow$) C'est évident puisque la sous-suite (v_n) obtenue en prenant pour φ l'identité de $\mathbb{N}$ est la suite (u_n) elle-même.

$\Rightarrow$) Soit (v_n) la sous-suite associée à l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme la suite (u_n) tend vers ℓ, il existe un entier N tel que si $n > N$ alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Or $n > N$ implique $\varphi(n) \geq n$, d'après la remarque 2.1.14. Donc $|v_n - \ell| = \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \varepsilon$ pour $n > N$, ce qui prouve que (v_n) tend vers ℓ. □

Le théorème ci-dessus nous fait comprendre qu'une suite convergente à exactement une valeur d'adhérence.

Corollaire 2.1.16. Si une suite réelle (u_n) admet deux suites extraites qui tendent vers deux limites différentes, alors (u_n) n'admet pas de limite.

2.2 Critères de convergence d'une suite

2.2.1 Suite réelle monotone ou bornée

Théorème 2.2.1. 1. Toute suite (u_n) croissante et majorée, converge vers $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$

2. Toute suite (u_n) croissante non majorée tend vers $+\infty$.
3. Toute suite (v_n) décroissante et minorée converge vers $\inf\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$
4. Toute suite (v_n) décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration. 1. La partie A de $\mathbb{R}$ formée des u_n pour $n \in \mathbb{N}$ est non vide et majorée. Puisque $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieur, $\sup A = \ell$ existe. Puisque ℓ est un majorant on a $u_n \leq \ell$ pour tout n. Soit $\varepsilon > 0$. Comme ℓ est le plus petit majorant le nombre $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, donc il existe un élément u_N de A tel que $\ell - \varepsilon < u_N$. Comme (u_n) est croissante, on a $u_n \geq u_N$ pour $n \geq N$. On a donc pour $n > N$,

$$\ell - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$$

D'où $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

2. L'assertion (u_n) n'est pas majorée s'écrit

$$\forall K \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_N > K$$

Comme (u_n) est croissante on a alors $u_n \geq u_N > K$ pour tout $n > N$, ce qui est la définition de $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

3. Procéder comme au 3.2.14) en prenant l'infimum à la place du supremum.
4. Procéder comme au 2) en utilisant la décroissance et la définition du inf.

□

Théorème 2.2.2. De toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une suite monotone.

Démonstration. Considérons l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N} | \forall m > n, u_m \leq u_n\}.$$

Si A est finie, il admet un majorant $n_0 \notin A$ (prendre $n_0 = 0$ si A est vide). Il existe alors un entier $n_1 > n_0$ tel que $u_{n_1} > u_{n_0}$.

Comme $n_1 \notin A$, il existe $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} > u_{n_1}$ et ainsi de suite, on construit par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n_{k+1}} > u_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est alors extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et strictement croissante.

Si A est infinie, on peut ranger ses éléments dans l'ordre croissant, soit $A = \{n_k | k \in \mathbb{N}\}$ avec $n_k < n_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et par construction, on a $u_{n_{k+1}} \leq u_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est alors extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et décroissante. □

Théorème 2.2.3 (Bolzano-Weierstrass)**.** De toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration. Résulte immédiatement des deux théorèmes précédents. □

Théorème 2.2.4. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

Démonstration. On sait déjà qu'une suite convergente est bornée et qu'elle n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

Réciproquement, supposons que la suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette ℓ pour seule valeur d'adhérence. Si cette suite ne converge pas vers ℓ, on peut alors trouver un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier n, il existe $p > n$ avec $|u_p - \ell| \geq \varepsilon$. Par récurrence on peut alors construire une suite strictement croissante d'entiers $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|u_{\varphi(n)} - \ell| \geq \varepsilon$ pour tout n. De la suite bornée $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous suite $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ' et par passage à la limite dans l'inégalité $|u_{\psi(n)} - \ell| \geq \varepsilon$, on déduit que $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon > 0$, c'est-à-dire que ℓ' est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ distincte de ℓ, ce qui contredit l'hypothèse de départ. □

Théorème 2.2.5. Une suite réelle est divergente, si et seulement si, elle vérifie l'une des deux conditions suivantes :

– elle est non bornée,
– elle est bornée et admet au moins deux valeurs d'adhérence

2.2.2 Critère de Cauchy

Définition 2.2.6. Une suite de réels (u_n) est dite de Cauchy lorsque les termes de la suite se rapprochent uniformément les uns des autres en l'infini au sens où : $\lim_{n\to\infty} \sup_{p,q>n} |u_p - u_q| = 0$.

Cette dernière condition se récrit classiquement à l'aide de quantificateurs universels et existentiels :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q > N,\ \left|u_p - u_q\right| < \varepsilon\,,$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ \forall k > 0,\ |u_{n+k} - u_n| < \varepsilon$$

Théorème 2.2.7. Toute suite de Cauchy (réelle ou complexe) est bornée.

Démonstration. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe alors un entier naturel $n_0 \geq 1$ tel que :

$$\forall n > n_0, \forall m > n_0,\ |u_m - u_n| < 1;$$

ce qui entraîne que pour tout $n > n_0$,

$$\begin{aligned} |u_n| &= |u_n - u_{n_0+1} + u_{n_0+1}| \\ &\leq |u_n - u_{n_0+1}| + |u_{n_0+1}| < 1 + |u_{n_0+1}|\,. \end{aligned}$$

Posons

$$M = \max\left\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0}|, 1 + |u_{n_0+1}|\right\}.$$

On a $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. □

Théorème 2.2.8. Une suite réelle ou complexe est convergente si, et seulement si, elle est de Cauchy.

Démonstration. Soit (a_n) une suite réelle ou complexe.

$\Rightarrow$) Nous supposons que la suite (a_n) converge vers a.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2.1}$$

Par conséquent,

$$n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon.$$

Ce qui montre que la suite est de Cauchy.

$\Leftarrow$ Nous supposons que la suite (a_n) est de Cauchy.

Elle est bornée d'après le théorème 2.2.7. Donc, admet d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, une sous-suite convergente $(a_{\varphi(n)})$. Notons a la limite de la sous-suite $(a_{\varphi(n)})$.

Soit $\varepsilon > 0$.

La suite (a_n) étant de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$

$$n, m > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2.2}$$

Par ailleurs la sous-suite $(a_{\varphi(n)})$ converge vers a. Donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n > n_1 \Rightarrow \left|a_{\varphi(n)} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.2.3}$$

Si $n > \max(n_0, n_1)$, nous obtenons à partir de (2.2.2) et (2.2.3) que

$$|a_n - a| = \left|a_n - a_{\varphi(n)} + a_{\varphi(n)} - a\right| \leq \left|a_n - a_{\varphi(n)}\right| + \left|a_{\varphi(n)} - a\right| < \varepsilon$$

d'où le résultat. □

Exemple 2.2.1. Montrons que, pour tout nombre complexe z la suite $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$

est convergente. La limite de cette suite est l'exponentielle complexe de z notée $\exp(z)$.

Il suffit de montrer que c'est une suite de Cauchy. En effet, pour $m > n > 2$ nous avons

$$\begin{aligned} |u_m - u_n| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{z^k}{k!}\right| \\ &= \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\left|1+\frac{z}{n+2}+\ldots+\frac{z^{m-n-1}}{(n+2)\ldots(m-1)m}\right| \\ &\leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\frac{|z|}{n+2}+\frac{|z|^2}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{|z|^{m-n-1}}{(n+2)^{m-n-1}}\right) \end{aligned}$$

En désignant par $n_0 > 2$ un entier naturel tel que $n_0+2 > |z|$, on a pour $m > n > n_0$,

$$|u_m - u_n| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{|z|}{n+2}}$$

ce qui implique que $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.

2.3 Opérations sur les suites convergentes

Dans l'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on définit la somme des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u+v = (u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le produit de u par le scalaire λ par $\lambda u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Muni de ces deux lois $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On définit également le produit des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u\cdot v = (u_n\cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui confère à $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une structure d'algèbre [1] commutative sur $\mathbb{C}$

.

Proposition 2.3.1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes. Si (u_n) est une suite bornée et si (v_n) est une suite qui converge vers 0, alors la suite (u_nv_n) converge vers 0.

Démonstration. La suite (u_n) étant bornée, il existe un réel K tel que $|u_n| \leq K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n| < \varepsilon/K$ pour tout $n > N$, grâce à la convergence de (v_n) vers 0. Ainsi, pour $n > N$,

$$|u_nv_n| = |u_n|\cdot|v_n| < \varepsilon.$$

□

1. une algèbre sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, ou simplement une $\mathbb{K}$-algèbre, est une structure algébrique $(A,+,\cdot,\times)$ telle que :

1. $(A,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$
2. la loi $\times$ est définie de $A\times A$ dans A (loi de composition interne)
3. la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$;
4. pour tout (a,b) dans $\mathbb{K}^2$ et pour tout (x,y) dans A^2, $(a\cdot x)\times(b\cdot y) = (ab)\cdot(x\times y)$

elle est commutative si la loi de composition interne $\times$ est commutative.

Théorème 2.3.2. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'$

1. Les suites $u+v$ et $u\cdot v$ convergent respectivement vers $\ell+\ell'$ et $\ell\cdot\ell'$.
2. Dans le cas où les suites u et v sont réelles, les suites $\min\{u,v\} = (\min\{u_n,v_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\max\{u,v\} = (\max\{u_n,v_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\min\{\ell,\ell'\}$ et $\max\{\ell,\ell'\}$.
3. Si $\ell' \neq 0$, il existe alors un entier n_0 tel que la suite $\frac{u}{v} = (\frac{u_n}{v_n})_{n\geq n_0}$ soit définie et cette suite converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.
4. Si $\ell > 0$, il existe un entier n_0 tel que $u_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$ et la suite $\sqrt{u} = (\sqrt{u_n})_{n\geq n_0}$ converge vers $\sqrt{\ell}$

Démonstration. 1. Soit ε un réel strictement positif.

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1, |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_2, \left|v_n - \ell'\right| < \varepsilon,$$

En posant $n_0 = \max\{n_1,n_2\}$, on a :

$$\forall n > n_0,\ \left|(u_n+v_n)-(\ell+\ell')\right| \leq |u_n-\ell| + \left|v_n-\ell'\right| < 2\varepsilon$$

ce qui signifie que la suite $u+v$ converge vers $\ell+\ell'$.

Par ailleurs, comme la suite convergente v est bornée (car convergente), il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leq M$$

et pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|u_nv_n - \ell\ell'\right| &= \left|u_nv_n - \ell v_n + \ell v_n - \ell\ell'\right| \\
&\leq |u_nv_n - \ell v_n| + \left|\ell v_n - \ell\ell'\right| \\
&\leq |v_n|\,|u_n-\ell| + |\ell|\left|v_n-\ell'\right| \\
&\leq (M+|\ell|)\varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui signifie que la suite $u\cdot v$ est convergente vers $\ell\cdot\ell'$.

2. Se déduit de la relation

$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|) \\ \min(a,b) = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|) \end{cases}$$

3. Si $\ell' \neq 0$ alors à partir d'un certain rang n_0, les éléments de la suite v sont non nuls et la suite $\frac{u}{v}$ est définie à partir de ce rang. On peut en fait trouver n_0 tel que $|v_n| > \frac{|\ell'|}{2}$ pour $n \geq n_0$ comme nous le voyons dans le théorème 2.1.10, ce qui entraîne que :

$$\forall n > n_0,\ \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| = \left|\frac{v_n-\ell'}{v_n\ell'}\right| \leq \frac{2}{|\ell'|^2}\left|v_n-\ell'\right|$$

et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{v_n} = \frac{1}{\ell'}$. Le résultat sur le produit nous donne alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\ell}{\ell'}$

4. Si $\ell > 0$, on peut en fait trouver un entier n_0 tel que $u_n \geq \frac{\ell}{4}$ pour tout $n \geq n_0$ et avec :

$$\left|\sqrt{u_n} - \sqrt{\ell}\right| = \left|\frac{u_n - \ell}{\sqrt{u_n} + \sqrt{\ell}}\right| \leq \frac{2}{3\sqrt{\ell}} |u_n - \ell|$$

on déduit que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{\ell}$.

□

Théorème 2.3.3. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $= (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'$.

1. Si $\ell > \ell'$ on a alors $u_n > v_n$ à partir d'un certain rang.
2. Si à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$ alors $\ell \leq \ell'$.
3. Si M est un majorant de la suite u, alors $\ell \leq M$.
4. Si m est un minorant de la suite u, alors $\ell \geq m$.

Démonstration. On applique le théorème 3.3 aux suites $v - u$, $M - u$ et $u - m$. □

Remarque 2.3.4.

1. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et (v_n) est minorée alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$. De même si $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et (v_n) majorée alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = -\infty$
2. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$ alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n v_n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \ell > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad \ell < 0 \end{cases}$$

3. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$ alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n v_n = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad \ell > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad \ell < 0 \end{cases}$$

On a une forme indéterminée pour $u + v$ si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et pour $u \cdot v$ si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Dans ces différents cas, une étude plus approfondie est necessaire pour conclure.

2.4 Suites adjacentes

Définition 2.4.1. Deux suites réelles (a_n) et (b_n) sont dites adjacentes si l'une des suites est croissante (au sens large), l'autre suite décroissante au sens large et si la différence des deux tend vers 0.

Remarque 2.4.2. Si (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes avec (a_n) croissante et (b_n) décroissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq b_n$$

En effet, si (a_n) est croissante et (b_n) décroissante alors $(b_n - a_n)$ est décroissante. Si la suite $(b_n - a_n)$ est décroissante et converge vers 0 alors $(b_n - a_n)$ est une suite à termes positifs. Donc, pour tout n, $b_n - a_n \geq 0$ donc $b_n \geq a_n$.

On peut même observer que pour tous entiers p, q (non nécessairement égaux), $a_p \leqslant b_q$.

En effet, si $p \leq q$ alors $a_p \leq a_q \leq b_q$, et si $p \geq q$ alors $a_p \leq b_p \leq b_q$.

Théorème 2.4.3. Soient (a_n) et (b_n) deux suites adjacentes (où (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante). Alors ces deux suites sont convergentes, et ont la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, pour tout entier naturel n, $a_n \leq \ell \leq b_n$

Démonstration. La suite (a_n) est croissante, et majorée par b_0. Or on déduit de l'hypothèse de la borne supérieure que toute suite croissante et majorée converge. La suite (a_n) admet donc une limite ℓ. Puisque la suite $(b_n - a_n)$ converge vers 0, on en déduit que la suite (b_n) converge également vers ℓ.

De plus, pour tout n, $a_n \leq \ell \leq b_n$: la première inégalité se déduit, par passage à la limite, de $\forall q,\ a_n \leq b_q$, et la seconde se déduit de $\forall p,\ a_p \leq b_n$ □

Exemple 2.4.1. Montrons que les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie respectivement par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

sont adjacentes.

Solution 2.4.1. Il est clair que (u_n) est croissante et pour $n \geq 1$ on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = -\frac{n-1}{(n+1)!} < 0$$

donc $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. De plus avec

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0,$$

on déduit que ces suites sont adjacentes

2.5 Suites particulières

2.5.1 Récurrence homographique

Suites arithméco-géométriques

Définition 2.5.1. Une suite (u_n) réelle ou complexe est :

1. Arithmétique lorsqu'il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + b$. b en est la raison.
2. Géométrique lorsqu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n$. a en est la raison.
3. Arirhmético-géométrique lorsqu'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Proposition 2.5.2. Etant donné une suite arithmétique (v_n) de raison r,

1. pout tout entier $n_0 \leq n$, on a
$$v_n = v_{n_0} + (n - n_0) \cdot r.$$
2. si $r > 0$ sa limite est $+\infty$
3. si $r < 0$ sa limite est $-\infty$.

4. Si la raison est nulle, la suite est constante et converge vers la constante.
5. La somme de termes consécutifs de (v_n) à partir du rang $p \in \mathbb{N}$ est

$$v_p + v_{p+1} + \ldots + v_n = \frac{(n-p+1)(v_n + v_p)}{2}.$$

Proposition 2.5.3. Etant donné une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q,

1. pour tout entiers naturels $n_0 \leq n$

$$u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}.$$

2. Si $q \leq -1$, la suite diverge et ne possède pas de limite. Dans $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ les valeurs d'adhérence sont $+\infty$ et $-\infty$.
3. Si $q = -1$, la suite diverge et possède deux valeurs d'adhérence u_0 et $-u_0$
4. Si $|q| < 1$, la suite converge vers 0
5. Si $q = 1$, la suite est constante et converge vers u_0
6. Si $q > 1$, la suite est divergente mais possède une limite égale à $+\infty$ si $u_0 > 0$ et $-\infty$ pour $u_0 < 0$
7. Pour deux entiers $0 \leq m < n$

$$\sum_{p=m}^{p=n} u_p = u_0 \, q^m \, \frac{1 - q^{n+1-m}}{1-q}$$

pour q différent de 1

Remarque 2.5.4. Etudions la suite $u = (a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $a \in \mathbb{C}$ Si $a = 0$ alors u est constante égale à 0.

Pour $|a| > 1$, la formule du binôme de Newton nous dit que $|a^n| \geq 1 + n(|a| - 1)$ et comme $|a| - 1 > 0$ on a $\lim_{n\to+\infty} n(|a|-1) = +\infty$, ce qui entraîne que $\lim_{n\to+\infty} |a^n| = +\infty$ et la suite u diverge. Pour $0 < |a| < 1$, nous avons $\frac{1}{|a|} > 1$. Ainsi en écrivant que $|a|^n = \frac{1}{\frac{1}{|a|^n}}$ nous avons $\lim_{n\to+\infty} |a^n| = 0$.

Pour $|a| = 1$, on a $a = e^{i\theta}$. Si $\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (soit $a = 1$), alors u est constante égale à 1 : Supposons que $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et montrons par l'absurde que la suite ne converge pas. Nous supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel $\lim_{n\to+\infty} e^{in\theta} = \ell$. Nous avons l'implication

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$$

En effet, si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe N tel que $n > N$ implique $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. il vient alors que $n > N$ implique

$$|u_{n+1} - u_n| = |u_{n+1} - \ell + \ell - u_n| \leq |u_{n+1} - \ell| + |u_n - \ell| < \varepsilon$$

puisque $n + 1 > n > N$. Or

$$\left|a^{n+1} - a^n\right| = \left|e^{i(n+1)\theta} - e^{in\theta}\right| = \left|e^{i\theta} - 1\right| = \sin\frac{\theta}{2}$$

On déduit que $\sin\frac{\theta}{2} = 0$ et par conséquent que $\theta = 2k\pi$ ce qui est contradictoire. La suite u est donc divergente.

Proposition 2.5.5. Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique : $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Si $a = 1$, c'est une suite arithmétique et si c'est $b = 0$ c'est une suite géométrique.
2. Si $a \neq 1$, la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$, est géométrique de raison a.

Suite homographique

Définition 2.5.6. Une suite (u_n) (complexe ou réelle) est dite homographique, lorsqu'il existe des constantes a, b, c et d telles que :

1. $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}. \tag{2.5.1}$$

Proposition 2.5.7. Soit (u_n) une suite homographique définie par la relation (2.5.1). On considère l'équation
$$x = \frac{ax + b}{cx + d}. \tag{2.5.2}$$

1. Si α est une racine de (2.5.2) et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p = \alpha$, alors la suite (u_n) est constante.
2. Si l'equation (2.5.2) a deux racines distinctes α et β, alors la suite (v_n) définie par
$$v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$$
est une suite géométrique ;
3. Si l'equation (2.5.2) a une racine double α, la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$ est une suite arithmétique.

2.5.2 Suites récurrentes linéaires

Nous désignons par $\mathbb{K}$, l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.5.8. Soit $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui satisfait la relation de récurrence pour tout $n \geq 0$
$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Théorème 2.5.9. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $b \neq 0$ et $\mathcal{L}(a, b)$ l'ensemble de suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :
$$\mathcal{L}(a, b) = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \right\}.$$
L'ensemble $\mathcal{L}(a, b)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Démonstration. Pour montrer que $\mathcal{L}(a, b)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel nous montrons que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite nulle est une suite recurrente lineaire d'ordre 2 donc $\mathcal{L}(a, b)$ est non vide. Soit u et v deux suites de $\mathcal{L}(a, b)$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Posons $w = \alpha u + \beta v$. Nous avons alors :
$$\begin{aligned} w_{n+2} &= \alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2} \\ &= \alpha(au_{n+1} + bu_n) + \beta(av_{n+1} + bv_n) \\ &= a(\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) + b(\alpha u_n + \beta v_n) \\ &= aw_{n+1} + bw_n \end{aligned}$$

Donc $w \in \mathcal{L}(a,b)$. Ainsi $\mathcal{L}(a,b)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Considérons l'application φ suivante :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{L}(a,b) & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0,u_1) \end{array}$$

Nous remarquons deux choses :

1. L'application φ est linéaire. En effet pour tout $(u,v) \in \mathcal{L}^2(a,b)$ et tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(\alpha u+\beta v) = (\alpha u_0+\beta v_0, \alpha u_1+\beta v_1) = \alpha\varphi(u)+\beta\varphi(v).$$

2. L'application φ est bijective (en effet un élément u de $\mathcal{L}(a,b)$ est uniquement déterminé par ses deux premiers termes.) Précisons cela. Si $u_0 = u_1 = 0$ alors u est la suite nulle, donc kerφ est réduit a la suite nulle et φ est injective. Enfin, étant donne deux scalaires $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ on peut définir une suite $u \in \mathcal{L}(a,b)$ telle que $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$. L'application φ est surjective. En conclusion φ est un isomorphisme d'espace vectoriel. Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, il en est de même pour $\mathcal{L}(a,b)$.

□

2.5.3 Description des suites récurrentes linéaires

Une suite géométrique $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ non nulle est dans $\mathcal{L}(a,b)$ si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique

$$X^2 - aX - b = 0. \tag{2.5.3}$$

Comme b est suppose non nul (2.5.3) n'admet pas 0 comme solution.

1. (2.5.3) a deux racines distinctes. Notons α et β les deux racines de (2.5.3). Les deux suites géométriques $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $\mathcal{L}(a,b)$. et sont linéairement indépendantes (le vérifier par exemple sur leur image par l'isomorphisme φ), elles forment donc une base de $\mathcal{L}(a,b)$ puisque dim$\mathcal{L}(a,b) = 2$. Ainsi : $u \in \mathcal{L}(a,b)$ si et seulement s'il existe $(\eta,\nu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \eta\alpha^n + \nu\beta^n.$$

2. (2.5.3) a une racine double.
Notons μ la racine de (2.5.3). Les deux suites $(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $\mathcal{L}(a,b)$ et sont linéairement indépendantes, elles forment donc une base de $\mathcal{L}(a,b)$ puisque dim$\mathcal{L}(a,b) = 2$. Ainsi : $u \in \mathcal{L}(a,b)$ si et seulement s'il existe $(\eta,\nu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\eta+\nu n)\mu^n.$$

3. (2.5.3) n'a pas de racines réelles.
L'équation (2.5.3) a deux racines complexes conjuguées ω et $\overline{\omega}$. Posons $r = |\omega|$ et $\theta = \arg\omega$. On vérifie que les suites $(r^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes, elles forment donc une base de $\mathcal{L}(a,b)$ puisque dim$\mathcal{L}(a,b) = 2$. Ainsi : $u \in \mathcal{L}(a,b)$ si et seulement s'il existe $(\eta,\nu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \eta r^n\cos(n\theta) + \nu r^n\sin(n\theta).$$

Exemple 2.5.1. Etudier la suite reelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}$, $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$.

Solution 2.5.1. : l'équation caractéristique (2.5.3) est $X^2+X-2=0$, elle admet deux racines distinctes 1 et -2. Donc il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\alpha+(-2^n)\beta$. Déterminons α et β. Nous avons :

$$\begin{cases} u_0=\alpha+\beta=0 \\ u_1=\alpha-2\beta=3 \end{cases}$$

Donc $\alpha=1$ et $\beta=-1$. Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=1-(-2)^n$.

Chapitre 3

Fonctions numériques d'une variable réelle

3.1 Limite et continuité

3.1.1 Généralités sur les fonctions numériques d'une variable réelle

Soient X et Y deux ensembles non vides.

Définition 3.1.1. Si D est une partie non vide de X, la correspondance f qui à chaque élément x de D associe un élément unique y de Y est appelée application de D dans Y ou fonction définie **sur** D à valeurs dans Y. On dit aussi que f est une fonction définie **dans** X, à valeurs dans Y, dont le domaine de définition est D. La relation entre l'élément x de D et son correspondant y dans Y est notée $y = f(x)$

On note
$$\begin{array}{rccc} f : & D & \to & Y \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

Soit f une fonction définie dans X à valeurs dans Y et de domaine de définition D.

- Si $A \subset D$ alors l'image de A est le sous-ensemble $f(A)$ de Y défini par
$$f(A) = \{f(x)/x \in A\}.$$
$f(D)$ est appelé aussi ensemble image de f.
- Le graphe de f est le sous-ensemble $\mathcal{G}_f$ de $X \times Y$ défini par
$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x))/x \in D\}.$$
- Si $B \subset Y$ alors $f^{-1}(B)$ désigne le sous-ensemble de X défini par
$$f^{-1}(B) = \{x \in D/f(x) \in B\}.$$

Si $Y = \mathbb{R}$, alors f est une **fonction numérique** ; si en plus $D \subset \mathbb{R}$, on dit que f est une **fonction numérique d'une variable réelle, ou encore fonction réelle d'une variable réelle**. L'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle définies sur D est noté $\mathbb{R}^D$.

Dans la suite, $\mathcal{D}_f$ désignera le domaine de définition de la fonction numérique f.

Définition 3.1.2. Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle. Si $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \neq \emptyset$, alors les fonctions $f+g$, $f-g$, fg sont définies sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x),\ (f-g)(x) = f(x)-g(x),\ \ (fg)(x) = f(x)g(x).$$

La fonction quotient $\frac{f}{g}$ est définie par

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ tel que $g(x) \neq 0$.

Exemple 3.1.1. Si $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$ alors $\mathcal{D}_f = [-2,2]$ et $\mathcal{D}_g = [1,+\infty[$. Donc

1. $f+g, f-g$ et fg sont définies sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g = [1,2]$ par
   (a) $(f+g)(x) = \sqrt{4-x^2}+\sqrt{x-1}$
   (b) $(f-g)(x) = \sqrt{4-x^2}-\sqrt{x-1}$
   (c) $(fg)(x) = (\sqrt{4-x^2})(\sqrt{x-1}) = \sqrt{(4-x^2)(x-1)}$
2. $\frac{f}{g}$ est définie sur $]1,2]$ par
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{4-x^2}{x-1}}.$$
   Bien que l'expression $\sqrt{(4-x^2)(x-1)}$ ci-dessus soit définie aussi sur $]-\infty,-2[$, elle ne représente pas fg pour ces valeurs de x, vu que f et g ne sont pas définies sur cet ensemble.

Exemple 3.1.2. Si $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$ alors $\mathcal{D}_f = [-2,2]$ et $\mathcal{D}_g = [1,+\infty[$. Donc

1. $f+g, f-g$ et fg sont définies sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g = [1,2]$ par
   - $(f+g)(x) = \sqrt{4-x^2}+\sqrt{x-1}$
   - $(f-g)(x) = \sqrt{4-x^2}-\sqrt{x-1}$
   - $(fg)(x) = (\sqrt{4-x^2})(\sqrt{x-1}) = \sqrt{(4-x^2)(x-1)}$
2. $\frac{f}{g}$ est définie sur $]1,2]$ par
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{4-x^2}{x-1}}.$$
   Bien que l'expression $\sqrt{(4-x^2)(x-1)}$ ci-dessus soit définie aussi sur $]-\infty,-2[$, elle ne représente pas fg pour ces valeurs de x, vu que f et g ne sont pas définies sur cet ensemble.

Dans la suite de ce cours, nous considérons essentiellement les fonctions numériques d'une variable réelle.

Définition 3.1.3. Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. On dit que f est :
   (a) minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$ on ait $f(x) \geq m$.
   (b) majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$ on a $f(x) \leq M$.
   (c) bornée si f est majorée et minorée.

2. Si f est majorée, on appelle borne supérieure de f le nombre réel

$$\sup_D f = \sup\{f(x) | x \in D\}$$

   On définit de même la borne inférieure.
3. On dit que f admet un maximum en $a \in D$ si $f(a)$ est le maximum de la partie $f(D)$
4. On dit que f admet un maximum local en $a \in D$ s'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(a)$ soit le maximum de $f(D \cap I)$.
   On définit de même la notion de minimum et de minimum local.
5. Un extremum (local) est un maximum (local) ou un minimum (local).

Remarque 3.1.4. Une fonction bornée possède toujours une borne supérieure et une borne inférieure mais pas forcément un maximum et un minimum.

Notation 3.1.1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

1. Si $I =]a,b[$, $]a,b]$, $[a,b[$ ou $[a,b]$ alors on note $\overline{I} = [a,b]$ et $\overset{\circ}{I} =]a,b[$
2. Si $I =]a,+\infty[$ ou $[a,+\infty[$ alors $\overline{I} = [a,+\infty[$ et $\overset{\circ}{I} =]a,+\infty[$
3. Si $I =]-\infty,b[$ ou $]-\infty,b]$ alors $\overline{I} =]-\infty,b]$ et $\overset{\circ}{I} =]-\infty,b[$
4. Si $I =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$ alors $\overline{I} = I = \mathbb{R}$ et $\overset{\circ}{I} = I$

$\overline{I}$ est appelé adhérence de I dans $\mathbb{R}$ et $\overset{\circ}{I}$ est l'intérieur de I.

Dans la suite I désignera un intervalle de l'une des formes ci-dessus.

Définition 3.1.5. Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et $I \subset \mathcal{D}_f$.

1. f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I lorsque

$$\forall (x,x') \in I^2,\ x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x') \text{ (resp.} f(x) > f(x'))$$

2. f est croissante (resp. strictement croissante) sur I lorsque

$$\forall (x,x') \in I^2,\ x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x') \text{ (resp.f(x) < f(x'))}$$

3. f est monotone (resp. strictement monotone) lorsqu'elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).
4. Si le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f est symétrique par rapport à 0 ; c'est-à-dire si $x \in \mathcal{D}_f$ alors $-x \in \mathcal{D}_f$, alors f est :
   (a) paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,
   (b) impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.
5. Si $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est une période de f si $\mathcal{D}_f$ soit stable par translation $x \mapsto x + T$; c'est-à-dire si $x \in \mathcal{D}_f$ alors $x + T \in \mathcal{D}_f$, et

$$f(x+T) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathcal{D}_f.$$

3.1.2 Notion de limite d'une fonction

I est toujours un intervalle de $\mathbb{R}$ (voir notation 3.1.1).

Définition 3.1.6. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{I}$.

1. On dit que f admet ℓ comme limite en a si
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\; |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.
2. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si
$$\forall K \in \mathbb{R}_+^* \; \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > K$$
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
3. On dit que f admet ℓ comme limite quand x tend vers $+\infty$ si
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists K \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \forall x \in I, x > K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
4. On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si
$$\forall K \in \mathbb{R}_+^*,\; \exists M \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \forall x \in I,\; x > M \Rightarrow f(x) > K$$
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On définit de même $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Exemple 3.1.3.
1. $\lim\limits_{x \to 0} x \cos\frac{1}{x} = 0$, car pour tout $\varepsilon > 0$, si $|x| < \varepsilon$ alors $\left|x \cos\frac{1}{x}\right| \le |x| < \varepsilon$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, car pour $K > 0$, si $|x| < \frac{1}{\sqrt{K}}$ alors $\frac{1}{x^2} > K$
3. On montre de même que :
$$\lim_{x \to a} x = a \;\forall a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \;\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair et non nul} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty$$

Proposition 3.1.7. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Si f admet une limite en a, cette limite est unique.

Démonstration. Comme dans le cas des suites, nous procédons par l'absurde. Supposons que f admet deux limites distinctes ℓ et ℓ' en a, avec $\ell < \ell'$. Puisque $\ell < \ell'$ nous prenons dans la définition de la limite $\varepsilon = \frac{\ell' - \ell}{2}$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x-a| < \delta$ implique que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ et $\delta' > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x-a| < \delta'$ implique que $|f(x) - \ell'| < \varepsilon$. On a $\ell' - \ell = |\ell' - f(x) + f(x) - \ell| \le |\ell' - f(x)| + |f(x) - \ell|$ par l'inégalité triangulaire. En prenant $x \in I$ tel que $|x-a| < \min(\delta, \delta')$, on obtient $\ell' - \ell < \ell' - \ell$, ce qui est absurde $\square$

Proposition 3.1.8. Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle définies sur l'intervalle I, a une borne de I ou un élément de I.

1. Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a, alors

– si $a \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha > 0$ tel que f soit bornée sur $I \cap]a-\alpha, a+\alpha[$,
– si $a = +\infty$ alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que f soit bornée sur $I \cap]b, +\infty[$,
– si $a = -\infty$ alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que f soit bornée sur $I \cap]-\infty, b[$

2. Si f et g ont une limite dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers a, alors $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$
3. Si $\lim\limits_{x\to a} f \in \{-\infty, +\infty\}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors
   (a) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ et
   (b) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \begin{cases} -\lim\limits_{x\to a} f(x) & \text{si} \quad \ell < 0 \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) & \text{si} \quad \ell > 0 \end{cases}$.
   (c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$
4. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = +\infty$
5. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = +\infty$
6. Si f admet une limite finie $\ell \neq 0$ quand x tend vers a alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$
7. Si $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.
8. Nous notons J un intervalle de la forme $J = \begin{cases} I \cap]a-\delta, a+\delta[& \text{si} \quad a \in \bar{I} \\ ]b, +\infty[& \text{si} \quad a = +\infty \\ ]-\infty, c[& \text{si} \quad a = -\infty \end{cases}$

   où $\delta > 0, b, c \in \mathbb{R}$.
   (a) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et si g est définie et bornée sur Jalors $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.
   (b) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et si $f(x) \geq 0$ sur Jalors $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
   (c) Si $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle Jalors
      i. $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$
      ii. si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$ alors $\ell \leq \ell'$.
   (d) (gendarmes) Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur Jet si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

Démonstration. Les démonstrations sont les mêmes que dans le cas des suites. □

3.1.3 Fonction continue

Théorème 3.1.9. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$. Alors E est un intervalle si et seulement si E possède la propriété suivante :

$$\forall x, y \in E, \ (x < z < y \Rightarrow z \in E.$$

Démonstration. La condition est nécessaire. Si, par exemple, $E = [a,b[$, les relations

$$a \leq x, y < b \text{ et } x < z < y \text{ impliquent } a \leq z < b \text{ et } z \in E.$$

La condition est suffisante. Supposant E non vide et non réduit à un seul point, posons

$$a = \inf E \geq -\infty \text{ et } b = \sup E \leq +\infty.$$

Soit $a < z < b$. Puisque $z > a$, il existe $x \in E$ tel que $z > x$. De même, puisque $z < b$, il existe $y \in E$ tel que $z < y$. Mais alors $x < z < y$ et donc $z \in E$. □

Définition 3.1.10. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction

1. On dit que f est continue en $a \in I$ si f admet $f(a)$ comme limite en a. Autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

2. On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.
3. On dit que f est uniformément continue sur I lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x,x') \in I^2,\ \left|x - x'\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon$$

Notons qu'une fonction uniformément continue sur I est continue sur I.

Définition 3.1.11. (Prolongement par continuité) Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : J \to \mathbb{R}$ avec $I \subset J$. On dit que g est un prolongement par continuité de f si

1. g est un prolongement de f (c'est-à-dire que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$).
2. g est continue en tout point de J.

Proposition 3.1.12. (Critère séquentiel de continuité) Soient une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. f est continue en a.
2. pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

Démonstration. Supposons f continue en a. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $|x-a| < \delta$ implique $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Or $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N$ alors $|x_n - a| < \delta$. Mais alors $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. Donc la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $f(a)$. Pour montrer la réciproque, nous allons prouver la contraposée : en supposant que f n'est pas continue en a il s'agit de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(a)$.

Dire que f n'est pas continue en a se traduit par

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in I \cap]a-\delta, a+\delta[\text{ avec } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

En prenant par exemple $\delta = \frac{1}{2^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$, la relation ci-dessus implique alors qu'il existe $x_n \in I \cap \left]a - \frac{1}{2^n}, a + \frac{1}{2^n}\right[$ tel que $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$.

On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie

$$|x_n - a| < \frac{1}{2^n} \tag{3.1.1}$$

et

$$|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon \tag{3.1.2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il vient alors de (3.1.1) que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a alors que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $f(a)$ comme le montre (3.1.2). □

Théorème 3.1.13. Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont continues en $x_0 \in I$, alors

1. $f + g$ est continue en x_0,
2. fg est continue en x_0,
3. si $g(x_0) \neq 0$, f/g est continue en x_0.
4. Si $f(I) \subseteq J$ et si $h : J \to \mathbb{R}$ est continue en $f(x_0)$, alors $h \circ f$ est continue en x_0.

Démonstration. Les trois premiers énoncés découlent directement du théorème sur la limite d'une somme, d'un produit et du quotient des suites convergentes. Pour le quatrième, considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers x_0. La fonction f étant continue en x_0,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

La fonction h étant continue en $f(x_0)$,

$$\lim_{n\to+\infty} h(f(x_n)) = h(f(x_0)).$$

□

Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ est ouvert si à chaque $x \in E$ correspond $\delta > 0$ tel que $]x-\delta, x+\delta[\subseteq E$.
Tout intervalle ouvert est un ensemble ouvert. Toute réunion d'intervalles ouverts est un ensemble ouvert. Toute réunion d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.

Théorème 3.1.14. L'image inverse d'un intervalle ouvert par une fonction continue sur un intervalle ouvert $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est un ensemble ouvert.

Démonstration. Soit $x_0 \in f^{-1}(]c,d[) = \{x \in]a,b[\,|\, f(x) \in]c,d[\}$. On a $c < f(x_0) < d$. Posons $\varepsilon = \min(d - f(x_0), f(x_0) - c)$. La fonction f étant continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a,b[$, $|x - x_0| < \delta$ impliquent $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Alors

$$c \leq f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \leq d$$

et

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq f^{-1}(]c,d[).$$

□

On applique souvent le théorème précédent de la façon suivante : si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est continue et si f est strictement positive en x_0, il existe un intervalle ouvert centré en x_0 dans lequel f reste strictement positive.

Théorème 3.1.15 (théorème des valeurs intermédiaires)**.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) \leq f(b)$. Alors pour tout $y \in [f(a), f(b)]$ il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.

Démonstration. Construisons par récurrence les suites (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et pour a_n et b_n construits, poser

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n & \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \quad \text{si} \quad f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq y \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} & \text{et} \quad b_{n+1} = b_n \quad \text{si} \quad f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y \end{cases}$$

Pour les suites (a_n) et (b_n), nous avons

$$f(a_n) \leq y \leq f(b_n),\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.1.3}$$

En effet, d'après l'hypothèse du théorème nous avons $f(a) \leq y \leq f(a)$, ce qui montre que la relation est vraie au rang $n = 0$. Supposons la vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$, et montrons qu'elle l'est aussi au rang $n+1$.

- Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq y$ alors $f(a_{n+1}) = f(a_n) \leq y \leq f(\frac{a_n+b_n}{2}) = f(b_{n+1})$, soit $f(a_{n+1}) \leq y \leq f(b_{n+1})$
- Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y$ alors $f(a_{n+1}) = f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y \leq f(b_n) = f(b_{n+1})$, soit $f(a_{n+1}) \leq y \leq f(b_{n+1})$.

. Donc nous avons dans tous les cas $f(a_{n+1}) \leq y \leq f(b_{n+1})$.

Par définition de a_n et b_n il est immédiat les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, car (a_n) est croissante, (b_n) décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$ car

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} = \ldots = \frac{a-b}{2^{n+1}}.$$

Les suites (a_n) et (b_n) convergent par conséquent vers la même limite que nous notons x et on a $a_n \leq x \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est-à-dire $x \in [a,b]$. Comme f est continue sur $[a,b]$, elle est continue en x et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(x)$. Or $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$. Donc $f(x) = y$. □

A partir de ce théorème et de la caractérisation des intervalles, nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.1.16. L'image directe d'un intervalle par une fonction numérique d'une variable réelle continue est un intervalle.

Théorème 3.1.17. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur un segment. Alors f a un maximum et un minimum sur $[a,b]$.

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour le maximum (pour le minimum, on prend $-f$ à la place de f). Montrons d'abord par l'absurde que f est majorée. Supposons que f n'est pas majorée. Cela implique que pour tout entier n il existe un réel $x \in [a,b]$ tel que $f(x) > n$. Appelons x_n cet élément. On a donc une suite (x_n) à valeurs dans le segment $[a,b]$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une sous-suite convergente (y_n) de la suite (x_n). On obtient ainsi une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $y_n = x_{\varphi(n)}$. Donc $f(y_n) = f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n) \geq n$, ce qui implique que la suite $(f(y_n))$ tend vers $+\infty$. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. Comme f est continue on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = f(\ell)$, ce qui contredit $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = +\infty$. Donc f est majorée et $\sup_{[a,b]} f$ existe. Soit M cette borne supérieure. Il suffit alors de montrer qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = M$. Soit n un entier. Par définition de la borne supérieure, $M - \frac{1}{2n}$ n'est pas un majorant des valeurs de f, donc il existe $x_n \in [a,b]$ tel que

$$M - \frac{1}{2n} < f(x_n) \leq M.$$

On a donc une suite (x_n) dans $[a,b]$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite convergente (y_n) de (x_n) avec $y_n = x_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Soit x la limite de la suite (y_n). On a les inégalités

$$M - \frac{1}{2n} \leq M - \frac{1}{2\varphi(n)} < f(y_n) \leq M.$$

Par le théorème des gendarmes (proposition 3.2.8) on conclut que la suite (f(yn)) tend vers M. Comme f est continue, on a aussi $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = f(x)$. Finalement on obtient $f(x) = M$. □

Théorème 3.1.18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

S'il existe un point x_- où $f(x_-) < 0$, f atteint une valeur minimum finie quelque part sur $\mathbb{R}$ et s'il existe un point x_+ où $f(x_+) > 0$, f atteint une valeur maximum finie quelque part sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Vérifions le deuxième énoncé-la vérification du premier est analogue. Soit $x_0 > |x_+|$ tel que $|x| > x_0$ implique $f(x) < f(x+)/2$. L'intervalle $[-x_0, x_0]$ étant fermé borné, la fonction y atteint son maximum : il existe $x_M \in [-x_0, x_0]$ tel que

$$f(x_M) = \sup\{f(x)|x \in [-x_0, x_0]\}.$$

Mais puisque $\sup\{f(x)|x \in [-x_0, x_0]\} \geq f(x_+) > f(x)$ pour tout x tel que $|x| > x_0$, on a en fait

$$\sup\{f(x)|x \in [-x_0, x_0]\} = \sup\{f(x)|x \in \mathbb{R}\}.$$

□

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est injective si pour tout $x_1, x_2 \in I$ $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$. Une telle fonction établit donc une bijection entre son domaine I et son image $f(I)$ (qui est un intervalle si f est continue). Elle admet une fonction inverse f^{-1},

$$f^{-1} : f(I) \to I,$$

définie par la relation

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Théorème 3.1.19. Une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Démonstration. La condition est évidemment suffisante. Pour montrer qu'elle est nécessaire, supposons par exemple que l'on ait $f(x_1) < f(x_2)$ pour deux points $x_1 < x_2$ et montrons que l'on a $f(x_3) < f(x_4)$ quels que soient $x_3 < x_4$. Considérons pour cela la fonction continue

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}$$

définie par

$$g(t) = f((1-t)x_1 + tx_3) - f((1-t)x_2 + tx_4).$$

On a $g(0) = f(x_1) - f(x_2) < 0$ et $g(1) = f(x_3) - f(x_4)$. Si l'on avait $g(1) = 0$, on devrait avoir $x_3 = x_4$ ce qui est exclu. Si l'on avait $g(1) > 0$, on pourrait trouver $s \in]0,1[$ tel que $g(s) = 0$. Alors, il faudrait avoir $(1-s)x_1 + sx_3 = (1-s)x_2 + sx_4$, c'est-'a-dire $0 > (1-s)(x_1 - x_2) = s(x_4 - x_3) > 0$ ce qui est absurde. Finalement, on a bien $g(1) < 0$. □

Théorème 3.1.20. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. Alors la fonction inverse

$$f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$$

est continue.

Démonstration. Supposons par exemple f strictement croissante. Alors f^{-1} est aussi strictement croissante. Soient $J = f(I)$ et $X_0 = f(x_0) \in \overset{\circ}{J}$, $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ (éventuellement, on peut avoir $X_0 = A = f(a)$ ou $X_0 = B = f(b)$ mais ces cas se traitent de façon similaire). Soit $\varepsilon > 0$. Posons

$$\delta = \inf\{f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)\}.$$

Si $X_0 - \delta < X < X_0 + \delta$, on a

$$f^{-1}(X_0 - \delta) < f^{-1}(X) < f^{-1}(X_0 + \delta).$$

Comme $f(x_0 - \varepsilon) \le X_0 - \delta$ et $X_0 + \delta \le f(x_0 + \varepsilon)$, on a aussi

$$f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon)) < f^{-1}(X) < f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon))$$

c'est-à-dire

$$x_0 - \varepsilon < f^{-1}(X) < x_0 + \varepsilon$$

ou encore

$$f^{-1}(X_0) - \varepsilon < f^{-1}(X) < f^{-1}(X_0) + \varepsilon$$

□

Soit $x_0 \in I$. Posons $I_1 =]x_0, +\infty[\cap I$ et $I_2 =]-\infty, x_0[\cap I$, $I_1' = [x_0, +\infty[\cap I$ et $I_2' =]-\infty, x_0] \cap I$.

Définition 3.1.21. Soit f une fonction réelle définie sur $I \setminus \{a\}$. On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est la limite de à droite (resp. à gauche) en x_0 de f, si la restriction de f à I_1 (resp. à I_2), admet ℓ pour limite en x_0.

Si f admet la même limite à gauche et à droite en x_0, on dit que ℓ est la limite de f en x_0.

Notation 3.1.2.
- Lorsqu'elle existe, la limite à droite de f en x_0 est notée $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$
- Lorsqu'elle existe, la limite à droite de f en x_0 est notée $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$

Exemple 3.1.4. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{\substack{x \to n \\ x > n}} \mathrm{E}(x) = n, \text{ et } \lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} \mathrm{E}(x) = n - 1$$

On déduit que la fonction partie entière n'admet de limite en aucun $n \in \mathbb{Z}$.

On dit que la fonction f définie sur I est continue à droite (resp. à gauche) en x_0, lorsque la restriction de f à I_1' (resp. I_2') est continue en x_0.

3.2 Fonctions dérivables

I désigne toujours un intervalle de $\mathbb{R}$.

3.2.1 Généralité sur les fonctions dérivables

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

Définition 3.2.1. On dit que f est dérivable en a si la limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existe et est finie. On note $f'(a)$ cette limite.

La dérivée $f'(a)$ de f en a donne la pente de la tangente au point $(a, f(a))$ au graphe de f. Notons que si f est dérivable en x_0, en posant $r(x) = f(x) - f(x_0) - (x-x_0)f'(x_0)$, on a

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + r(x) \\ \lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{x-x_0} = 0 \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Proposition 3.2.2. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration. Soit $\ell = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Comme la fonction $x \mapsto x$ est continue en a, on $\lim\limits_{x\to a}(x-a) = 0$. D'où en utilisant la propriété des limites par rapport au produit

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right] \\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}(x-a) = \ell\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ et f est bien continue en a. □

Remarque 3.2.3.
1. La réciproque n'est pas toujours vraie, comme le prouve l'exemple $f(x) = |x|$ en $x = 0$. En effet On a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|x|}{x} = 1$$

   et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{|x|}{x} = -1$$

   Donc f n'est pas dérivable en 0.
2. Il existe même des fonctions continues qui ne sont dérivables en aucun point de leur domaine de définition.

Proposition 3.2.4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un extremum local en a. Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration. Supposons que l'extremum est un maximum (le cas du minimum se traite en remplaçant f par $-f$). Alors par définition il existe un intervalle ouvert $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]a-\alpha, a+\alpha[$ on a $f(x) \leq f(a)$. Si $x > a$, on a $x - a > 0$ et $f(x) - f(a) \leq 0$, donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ et par passage à la limite on obtient $f'(a) \leq 0$. Si $x < a$, on a $x - a < 0$ et $f(x) - f(a) \leq 0$, donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ et par passage à la limite on obtient $f'(a) \geq 0$. En combinant les deux inégalités on obtient $f'(a) = 0$. □

Définition 3.2.5 (fonction dérivée)**.** Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de I, alors f est dérivable sur I et on définit sa fonction dérivée f' par

$$\begin{array}{rcl} f' : I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x). \end{array}$$

Proposition 3.2.6. Soient f et g deux fonctions définies sur I.

1. Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I, alors $f+g$ et fg sont dérivables sur I et
$$(f+g)' = f'+g' \text{ et } (fg)' = f'g+fg'.$$
2. Si f ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I et
$$(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$$

Démonstration. 1. Le cas de l'addition résulte facilement du résultat concernant l'addition des limites. Pour le produit, on écrit
$$f(x)g(x)-f(a)g(a) = (f(x)-f(a))g(x)+f(a)(g(x)-g(a)).$$
On divise par $(x-a)$ et on passe à la limite quand x tend vers a ce qui donne le résultat grâce aux propriétés des limites de produit et de sommes. De plus on sait que $g(x)$ tend vers $g(a)$ par la continuité de g.

2. Pour l'inverse, on écrit :
$$\left(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}\right)\frac{1}{x-a} = -\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\frac{1}{f(x)}\frac{1}{f(a)}$$
qui a un sens pour $|x-a|$ assez petit. Quand x tend vers a, $f(x)$ tend vers $f(a)$, car f est continue. On obtient alors la formule désirée.

□

Proposition 3.2.7. (Dérivée de la composée de deux fonctions) Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$ (pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$). Si f est dérivable en $a \in I$ et g est dérivable en $f(a) \in J$, alors la composée $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a et
$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Démonstration. Soit $a \in I$. Par définition de la dérivée, on a
$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}$$

Distinguons deux cas.

1er cas : $f'(a) \neq 0$, on a $f(x)-f(a) \neq 0$ en tous les points de I qui sont dans un intervalle ouvert contenant a.C'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f(x) \neq f(a)$ pour tout $x \in (]a-\alpha, a+\alpha[\cap I) \setminus \{a\}$. On peut écrire alors :
$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{aligned}$$

Le premier facteur est la composée des fonctions $x \mapsto f(x)$ et $y \mapsto \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)}$. Comme f est continue, $f(x)$ tend vers $f(a)$. Comme g est dérivable en $f(a)$, on a

$$\lim_{y\to f(a)} \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} = g'(f(a)).$$

En composant, on trouve

$$\lim_{x\to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} = g'(f(a)).$$

D'où la formule de la proposition

-2ième cas $f'(a) = 0$. Il faut montrer que

$$\lim_{x\to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe d'après (3.2.1) $\delta_g > 0$ tel que $|g(y)-g(f(a))| < (1+|g'(f(a))|)\,|y-f(a)|$ dès que $y \in J$ satisfait la relation $|y-f(a)| < \delta_g$ et $\delta_f > 0$ tel que

$$|f(x)-f(a)| < \frac{\varepsilon}{1+|g'(f(a))|}\,|x-a|$$

dès que $x \in I$ satisfait la relation $|x-a| < \delta_f$. Alors, si $x \in I$ satisfait la relation

$$|x-a| < \inf\left\{\delta_f, \delta_g \frac{1+|g'(f(a))|}{\varepsilon}\right\}$$

on a

$$|g(f(x))-g(f(a))| < (1+\left|g'(f(a))\right|)\,|f(x)-f(a)| < \varepsilon\,|x-a|.$$

□

Proposition 3.2.8. (Dérivée de la fonction réciproque)Soit $f : I \to J$, où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ avec $a \in I$. Si f est inversible, f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq\neq 0$ auquel cas

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Démonstration. La condition est nécessaire puisque si f^{-1} est dérivable en $f(a)$, la fonction composée $f^{-1}(f(x))$ sera dérivable en a et l'on aura

$$1 = (f^{-1})'(f(a))f'(a).$$

Elle est aussi suffisante puisque si elle est satisfaite, on a

$$\begin{aligned}\lim_{X\to f(a)} \frac{f^{-1}(X)-f^{-1}(f(a))}{X-f(a)} &= \lim_{X\to f(a)} \frac{1}{\frac{X-f(a)}{f^{-1}(X)-a}}\\ &= \lim_{x\to a} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{f'(a)}\end{aligned}$$

□

Proposition 3.2.9. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I. Alors :

1. f est constante si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.
2. f est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pour tout $x \in I$.
3. Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante (resp. décroissante).

Démonstration.

1. Si f est constante, sa dérivée est nulle. Réciproquement, soient $a, b \in I$ avec $a < b$. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction f sur le segment $[a,b]$: il existe un $c \in]a,b[$ tel que
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$
Comme f' est nulle, on obtient $f(b) = f(a)$. Par conséquent f est constante.
2. Si f est croissante, on a $f(x) \geq f(a)$ pour $x > a$ et alors $(f(x) - f(a))/(x-a) \geq 0$. De même si $x < a$, on $f(x) \leq f(a)$ et $(f(x) - f(a))/(x-a) \geq 0$. Comme les inégalités passent à la limite, en faisant tendre x vers a on voit que $f'(a) \geq 0$.
Réciproquement, on procède comme dans la première partie : on obtient $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Donc $f(b) - f(a) \geq 0$ si $b > a$ et $f(b) - f(a) \leq 0$ si $b < a$. Donc f est croissante.
On traite le cas f décroissante en remplaçant f par $-f$.
3. pareil que pour 2) sauf qu'on a des inégalités strictes.

□

3.2.2 Propriété des fonctions dérivables

Théorème 3.2.10 (théorème de Rolle)**.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Comme f est continue sur un segment, f admet un maximum et un minimum d'après le théorème 3.1.17. Soit $M = \max_{[a,b]} f$ et $m = \min_{[a,b]} f$. Si $m \neq f(a)$ ou $M \neq f(a)$ il existe un $c \in]a,b[$ tel que f possède un extremum en c. On sait alors que $f'(c) = 0$ d'après la proposition 4.4.2. Sinon on a $m = f(a) = f(b)$ et $M = f(a) = f(b)$. Donc f est constante sur $[a,b]$ et $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a,b[$. □

Théorème 3.2.11 (théorème des accroissements finis)**.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Démonstration. Considérons la fonction auxiliaire
$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$
On a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. La fonction φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Comme
$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$
on obtient bien la formule annoncée en posant $x = c$. □

Théorème 3.2.12 (Inégalité des accroissements finis)**.** Soient f et g deux fonctions définies sur le segment $[a,b]$, avec $a<b$. On suppose :

1. f et g continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$
2. $|f'(x)|\leq g'(x)$ pour tout $x\in\,]a,b[$.

Alors $|f(b)-f(a)|\leq g(b)-g(a)$

Démonstration. Puisque $|f'(x)|\leq g'(x)$ pour tout $x\in\,]a,b[$, on a $f'(x)\leq g'(x)$ et $-f'(x)\leq g'(x)$ pour tout $x\in\,]a,b[$, soit $(f-g)'(x)\leq 0$ et $(f+g)'(x)\geq 0$ pour tout $x\in\,]a,b[$. Il vient que $f-g$ est décroissante sur $[a,b]$ tandis que $f+g$ y est croissante. Or $a<b$. Donc $(f-g)(a)\geq(f-g)(b)$ et $(f+g)(a)\leq(f+g)(b)$, c'est-à-dire $f(b)-f(a)\leq g(b)-g(a)$ et $f(a)-f(b)\leq g(b)-g(a)$. D'où $|f(b)-f(a)|\leq g(b)-g(a)$ □

Corollaire 3.2.13. Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b]$. Si f' admet une limite ℓ en a, alors f est dérivable en a et $f'(a)=\ell$

Démonstration. $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\ell\Leftrightarrow\forall\varepsilon,\exists c\in\,]a,b]\,,\forall x\in\,]a,c]\,,|f'(x)-\ell|<\varepsilon$ f étant continue sur $[a,c]$ et dérivable sur $]a,c]$ on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis, sur $[a,c]$, à la fonction $g(x)=f(x)-\ell x$:

$$\forall x\in[a,c]\,,|f(x)-f(a)-\ell(x-a)|\leq\varepsilon(x-a)$$

et donc,

$$\forall\varepsilon>0,\forall x\in\,]a,c]\,,\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\ell\right|<\varepsilon.$$

Ainsi, f est dérivable en a et sa dérivée est $f'(a)=\ell$. □

Lemme 3.2.14. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telles que g' ne s'annule pas sur $]a,b[$. On suppose de plus que $g(a)\neq g(b)$. Il existe ξ dans $]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Démonstration. Considérons la fonction φ définie sur $[a,b]$ par

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

On a

$$\varphi(a)=\varphi(b)=0.$$

La fonction φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. D'après le théorème de Rolle, il existe ξ dans $]a,b[$ tel que

$$\varphi'(\xi)=0,$$

ce qui donne

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0.$$

On en déduit

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

□

Proposition 3.2.15 (Règle de l'Hospital)**.** Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, dérivables dans un voisinage pointé de $\alpha \in \bar{I}$; c'est-à-dire dans $V(\alpha) \setminus \{\alpha\}$, où $V(\alpha) =]\alpha - r, \alpha + r[\cap \bar{I}$ pour un certain $r > 0$. On suppose que f et g admettent en α toutes deux la même limite nulle ou toutes deux des limites infinies. Alors si $\frac{f'}{g'}$ possède une limite ℓ en α, il en est de même de $\frac{f}{g}$, et l'on a

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Démonstration. L'existence de la limite de $\frac{f'}{g'}$ suppose qu'il existe un voisinage pointé de α dans lequel g' ne s'annule pas. Soit donc $V'(\alpha)$ un tel voisinage

1. f et g tendent vers 0.
   Les fonctions f et g se prolongent par continuité en α par la valeur 0, et g est strictement monotone sur $V(\alpha)$. D'après le lemme 3.2.14 appliquée dans l'intervalle de bornes α et x, où x appartient à $V'(\alpha)$, il existe $\xi(x)$ compris entre α et x tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}.$$

   Lorsque x tend vers α, il en est de même de $\xi(x)$ et donc

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \ell.$$

   Alors, on a également,

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

2. f et g tendent vers l'infini.
   Quitte à changer les signes de f et g, on peut supposer que f et g tendent vers $+\infty$ en α. Il existe alors un voisinage épointé de α sur lequel f et g ne s'annulent pas.
   (a) Supposons ℓ fini.
   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage $V_1'(\alpha)$ tel que, pour tout x de cet intervalle

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Soit alors a fixé dans $V_1'(\alpha)$. Comme g est strictement monotone, pour tout x compris strictement entre a et α, on a $g(x) \neq g(a)$. On peut donc appliquer le lemme 3.2.14 dans l'intervalle de bornes x et a. Il existe $\xi(x,a)$ compris entre a et x, donc dans $V_1'(\alpha)$, tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi(x,a))}{g'(\xi(x,a))}$$

   et alors

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - \ell \right| = \left| \frac{f'(\xi(x,a))}{g'(\xi(x,a))} - \ell \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Posons

$$\eta(x) = \frac{1 - \frac{g(a)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a)}{f(x)}}$$

On a alors

$$\lim_{x\to\alpha}\eta(x)=1$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right| &= \left|\eta(x)\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-\ell\right|\\ &\leq \eta(x)\left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-\ell\right|+|\ell(1-\eta(x))|\\ &\leq \eta(x)\frac{\varepsilon}{2}+|\ell(1-\eta(x))|.\end{aligned}$$

Mais, le membre de droite tend vers $\frac{\varepsilon}{2}$ lorsque x tend vers α. Il existe donc un voisinage épointé $V_2'(\alpha)$ dans lequel

$$\eta(x)\frac{\varepsilon}{2}+|\ell(1-\eta(x))|<\varepsilon.$$

ce qui donne

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right|<\varepsilon$$

Il en résulte que

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$$

(b) Supposons ℓ infinie.
Comme $\frac{f'}{g'}$ tend vers l'infini, f' ne s'annule pas dans un voisinage épointé de α et on applique ce qui précède à $\frac{g'}{f'}$ qui tend vers 0. Il en résulte que $\frac{g}{f}$ tend vers 0, et puisque g ne s'annule pas, on en déduit que $\frac{f}{g}$ tend vers 0.

□

Exemple 3.2.1. 1. Soit $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ un polynôme de degré n. Calculons $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{e^x}$ Il suffit de déterminer $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x}$ pour $k\in\{0,1,\ldots,n\}$. Or $(x^k)^{(\ell)}(x)=k(k-1)\ldots(k-\ell+1)x^{k-\ell}$ pour tout $\ell\leq k$ et $(e^x)^{(\ell)}=e^x$ nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^k)^{(\ell)}(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x)^{(\ell)}=+\infty$ pour $\ell<k$. D'où

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{k!}{e^x}=0$$

C'est ainsi que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{e^x}=0$

2. Calculer $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{1-\cos x}$ En posant $f(x)=1-\cos\frac{x}{2}$ et $g(x)=1-\cos x$ on a $f(0)=g(0)=0$ et f et g sont dérivable en 0 avec $f'(0)=0$ et $g'(0)=0$ car $f'(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$ et $g'(x)=\sin x$. Les fonctions dérivées étant aussi dérivables en 0 on passe à l dérivée seconde. $f''(x)=\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}$ et $g''(x)=\cos x$. D'où

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}}{\cos x}=\frac{1}{4}$$

3.3 Developpement limité

3.3.1 Fonctions négligeables

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et D une partie de $\mathbb{R}$ telle que
- $a \in \overline{D}$ si $a \in \mathbb{R}$,
- il existe $\alpha > 0$ tel que $[\alpha, +\infty[\subset D$ si $a = +\infty$,
- il existe $\beta < 0$ tel que $]-\infty, \beta] \subset D$ si $a = -\infty$.

Les fonctions $f, g, ...$ sont définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Un sous-ensemble V de D est voisinage pointé de a si
- il existe $\delta > 0$ tel que $]a-\delta, a+\delta[\cap D \setminus \{a\} \subset V$ si $a \in \mathbb{R}$
- il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $]M, +\infty[\cap D \subset V$ si $a = +\infty$
- il existe $M \in \mathbb{R}$ avec $]-\infty, M[\cap D \subset V$ si $a = -\infty$,

Pour ne pas trop alourdir les notations, on convient qu'une égalité entre fonctions sous-entend la restriction à l'intersection des domaines de définition.

Définition 3.3.1. La fonction f est dite négligeable devant g au voisinage de a, si et seulement s'il existe un voisinage pointé V de a et une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ de limite nulle en a, telle que $f = \varepsilon \cdot g$ (dans V). On écrit

$$f \underset{a}{\ll} g \iff f \underset{(a)}{=} o(g) \overset{def}{\iff} \exists \varepsilon : V \to \mathbb{R} \text{ tel que } f = \varepsilon \cdot g \text{ et } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0,$$

On appelle $f = o(g)$ la notation de Landau et $f \ll g$ la notation de Hardy.

Exemple 3.3.1. On a $f \underset{a}{=} o(1) \iff \lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Exemple 3.3.2. La fonction nulle $o : x \mapsto 0$ est négligeable devant toute fonction en tout point a (prendre $\varepsilon = 0$). D'autre part, $f = o(f) \Rightarrow f = \varepsilon \cdot f \iff (1-\varepsilon)f = o \Rightarrow f = o$ (car $\lim \varepsilon = 0 \Rightarrow (1-\varepsilon) \neq 0$) dans un voisinage de a.

Remarque 3.3.2. Alors que la notation de Hardy paraît plus «logique», on utilise dans la pratique plus souvent celle de Landau, car elle permet l'abus de notation très pratique qui consiste à écrire

$$f(x) = g(x) + o(h(x)) \ (x \to a) \text{ au lieu de } f - g \underset{(a)}{=} o(h).$$

Lorsqu'on utilise cette notation, chaque terme $o(h(x))$ représente une fonction quelconque de x, négligeable devant h, mais à priori inconnue et différente d'un éventuel autre terme $o(h(x))$. On prendra aussi garde de toujours préciser le point auquel la relation de négligence s'applique. Ainsi on peut avoir $f \underset{a}{\ll} g$ mais $g \underset{b}{\ll} f$ pour a, b différents.

Exemple 3.3.3. Si f est bornée et g tend vers l'infini, alors $f \underset{(a)}{=} o(g)$.

Exemple 3.3.4. On a $x^m \underset{(\infty)}{=} o(x^n)$ si et seulement si $m < n$ (car alors $\varepsilon = x^{m-n} \to 0$), et l'opposé au voisinage de 0.

Exemple 3.3.5. On a $x^\alpha \underset{(\infty)}{=} o(e^{\beta x})$ et $(\ln x)^\alpha \underset{(\infty)}{=} o(x^\beta)$ $(x \to \infty)$ pour tout $\alpha, \beta > 0$

La proposition suivante permet de trouver autant d'exemples que l'on souhaite :

Proposition 3.3.3. Si la fonction f/g est définie dans un voisinage pointé de a, alors $f \underset{a}{=} o(g) \iff \lim_{x\to a} \frac{(x)}{g(x)} = 0$.

Démonstration. Exercice. (Il suffit d'utiliser $\varepsilon = f/g$). □

Notons que :

– La relation $\ll$ est transitive ; c'est-à-dire

$$f \underset{a}{\ll} g,\ g \underset{a}{\ll} h \Rightarrow f \underset{a}{\ll} h\ ,$$

– compatible avec la multiplication, c'est-à-dire

$$f \underset{a}{\ll} g \Rightarrow f\cdot h \underset{a}{\ll} g\cdot h \text{ et } \left\{ \begin{array}{c} f \underset{a}{\ll} g \\ h \underset{a}{\ll} k \end{array} \right\} \Rightarrow f\cdot h \underset{a}{\ll} g\cdot k$$

pour toutes fonctions $f,g,h,k : V \to \mathbb{R}$.

Attention : la relation $\ll$ n'est pas compatible avec l'addition ! Par exemple, $x \underset{\infty}{\ll} x^3$ et $x^2 \underset{\infty}{\ll} -x^2$, mais $x + x^2 \not\ll x^3 + (-x^2) = o$.

Dans la pratique, on utilise donc la notation $o(g)$ (voire $o(g(x))$) pour représenter une fonction f quelconque, à priori inconnue, telle que $f \ll g$. On écrit ainsi par exemple $x^n o(x^m) = o(x^{n+m})$, $o(x^n) + o(x^m) = o(x^{\max(m,n)})$ $(x\to\infty)$...

Attention : Il convient de garder en mémoire que le symbole $o(\cdot)$ correspond, chaque fois qu'il apparaît, à une **nouvelle** (autre) fonction ε. On a ainsi par exemple $o(\lambda f(x)) = o(f(x))$ $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, mais $o(f(x)) = o(\lambda f(x))$ seulement $\forall\lambda \in \mathbb{R}^*$. Noter aussi que pour $m > n$, $o(x^n) = o(x^m)$ ($x\to\infty$), mais malgré cette «égalité», $o(x^m) \neq o(x^n)$

3.3.2 Fonctions équivalentes

Définition 3.3.4. On dit que f est équivalent à g au voisinage de a ssi $f - g$ est négligeable devant g ; on écrit

$$f \underset{a}{\sim} g \iff f - g \underset{a}{\ll} g\ .$$

Proposition 3.3.5. Si f/g est défini dans un voisinage pointé de a, alors $f \sim g \iff \lim f/g = 1$.

Démonstration. Exercice (utiliser la déf. pour m.q. $f = (1+\varepsilon)g$). □

Notons que la relation $\sim$ est :

– une relation d'équivalence, car elle est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{reflexive} f \sim f \\ \text{symétrique } f \sim g \Rightarrow g \sim f \\ \text{transitive} f \sim g \text{ et } g \sim h\ \Rightarrow\ f \sim h\ . \end{array} \right.$$

Proposition 3.3.6 (limites)**.** Si $f \sim g$, alors $\lim g$ existe ssi $\lim f$ existe, et si elles existent, ces deux limites sont égales.

Proposition 3.3.7 (produit, quotient, puissance)**.** On peut prendre le produit, quotient (lorsqu'il est défini) et une puissance quelconque d'équivalences .

Dans le cas général, on ne peut additionner des équivalences : $f(x) = x^2 - x \underset{0}{\sim} -x, g(x) = x \underset{0}{\sim} x$ mais $f + g \not\sim 0$.

Proposition 3.3.8 (composée)**.** Soit $f \underset{a}{\sim} g$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ t.q. $\lim_b \varphi = a$ alors $f \circ \varphi \underset{b}{\sim} g \circ \varphi$.

3.3.3 Développement limité : Définition et propriétés

Développement limité d'ordre n en x_0

Définition 3.3.9. Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{A}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 (en abrégé $DL_n(x_0)$) si et seulement s'il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que pour tout $x \in A$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On appelle alors le polynôme $P(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$ la partie régulière du DL, et $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ le reste d'ordre n, que l'on note aussi $o((x - x_0)^n)$.

Exemple 3.3.6 (fondamental)**.** $f :]-1,1[\to \mathbb{R}; f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3 \frac{x}{1-x}$, donc f admet un $DL_3(0)$ de partie régulière $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ et de reste $o(x^3) = x^3 \varepsilon(x) = x^3 \frac{x}{1-x}$.

Un développement limité est une stricte égalité mathématique, il ne faut donc jamais «oublier» le reste en faveur de la partie régulière. D'ailleurs, dans certains cas le reste peut être plus intéressant que la partie régulière.

Comme la formule simplifie pour $x_0 = 0$, on se ramène souvent à ce cas en considérant $g(t) = f(x_0 + t)$, en faisant un changement de variables $x = x_0 + t$, puis un $DL(0)$ de $g(t)$, dans lequel on resubstitue finalement $t = x - x_0$.

Corollaire 3.3.10 (Conséquences de la définition.)**.** On se limite ici aux cas ou I est un intervalle, éventuellement privé du point x_0.

- Si f admet un DL en $x_0 \in \bar{I}$, alors f admet une limite en x_0, égale à $a_0 = P(0)$. Si $x_0 \in I$, cela implique que f est continue en x_0 ou bien f admet un prolongement par continuité en x_0 (en posant $\widetilde{f}(x_0) = a_0$), dont le DL coïncide avec celui de f.
- Si f admet $DL_n(x_0)$, $n \geq 1$ et $x_0 \in I$, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a_1 = P'(0)$.

Exemple 3.3.7. Pour $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = x^{n+1} \sin x^{-k}$ n'est pas définie en 0 mais admet un $DL_n(0)$ (de partie régulière nulle et avec $\varepsilon = x \sin x^{-k}$) et donc une limite (nulle) et donc un prolongement par continuité en 0. Pour $n \geq 1$, ce prolongement $\widetilde{f}$ est dérivable en 0 (2^e partie du corrolaire) (avec $\widetilde{f}'(0) = 0$), mais la dérivée n'est pas continue en 0 si $n \leq k$: en effet $f'(x) = (n+1)x^n \sin x^{-k} - k x^{n-k} \cos x^{-k}$ $(x \neq 0)$ n'admet pas de limite en 0 pour $n \leq k$.

Remarque 3.3.11. L'exemple précédent montre que même si f admet un DL à un ordre aussi élevé qu'on veut, cela n'implique jamais que la dérivée soit continue, et donc encore moins que la fonction soit deux fois dérivable ! (Prendre $k = n$ arbitrairement grand dans l'exemple ci-dessus.)

Unicité du D.L.

Lemme 3.3.12 (troncature). Si f admet un $DL_n(x_0)$ de partie régulière P, alors f admet $DL_m(x_0)$ $\forall m \in \{0,...,n\}$, dont la partie régulière sont les termes de degré $\leq m$ de P.

Démonstration. il suffit de montrer que les termes $a_k(x-x_0)^k$ avec $k > m$ peuvent s'écrire comme reste d'ordre m :

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon(x) = (x-x_0)^m \eta(x)$$

avec

$$\eta(x) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k(x-x_0)^{k-m} + (x-x_0)^{n-m}\varepsilon(x) \to 0 \ \ (x \to x_0) \ .$$

□

Théorème 3.3.13 (unicité). Si f admet un DL, il est unique, P et ε sont uniques.

Démonstration. (par récurrence). Pour $n = 0$, $P = a_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ et $\varepsilon(x) = f(x) - a_0$ sont déterminés de façon unique. Supposons que le $DL_n(x_0)$ de f est unique, et que f admet un $DL_{n+1}(x_0)$, $f = \sum_0^{n+1} a_i(x-x_0)^i + (x-x_0)^{n+1}\varepsilon(x)$. D'après le lemme 3.3.12, $a_0 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_n)^n\eta(x)$ avec $\eta(x) = a_{n+1}(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x)$ est un $DL_n(x_0)$ de f. D'après l'hypothèse de récurrence, $a_0, \ldots, a_n$ ainsi que le reste η sont uniques. Or, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{x-x_0}\eta(x) = a_{n+1}$. Ce coefficient, et $\varepsilon(x) = \frac{1}{x-x_0}\eta(x) - a_{n+1}$ sont donc également uniques. □

3.3.4 Existence de *D.L.*-Formules de Taylor

Dans ce paragraphe, on affirme l'existence du *D.L.* pour les fonctions suffisamment dérivables, et on précise en même temps une expression explicite des coefficients de la partie régulière en terme des dérivées de la fonction au point du *D.L.*

Définition 3.3.14. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un intervalle ou plus généralement une union d'intervalles. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

1. On définit par récurrence la dérivée $n^{ième}$ de f notée $f^{(n)}$, par :
$$f^{(0)} = f, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = (f^{(n)})'.$$
2. On définit $\mathcal{C}^n(A)$ comme l'ensemble des fonctions $f : A \to \mathbb{R}$ tel que f peut être dérivée n fois et sa dérivée $n^{ième}$, $f^{(n)}$, est continue.
3. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur A, lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n(A)$.

Exemple 3.3.8. La fonction cos est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et l'on a

$$(\cos x)^{(n)} = \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{si} \quad n = 2k \\ (-1)^{k+1} \sin x & \text{si} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

Proposition 3.3.15. Etant donné deux fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^n(A)$,fg est de classe $\mathcal{C}^n(A)$ et nous avons la formule de Leibniz suivante, qui donne la dérivée $n^{iéme}$ du produit.

$$(fg)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p f^{(p)} g^{(n-p)}.$$

Démonstration. Par récurrence, nous avons $(fg)' = f'g + fg'$. Supposons que pour $u, v \in \mathcal{C}^n(A)$ on a $(fg)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p f^{(p)} g^{(n-p)}$.

Considérons f et g de classe $\mathcal{C}^{n+1}(A)$. fg est de classe $\mathcal{C}^{n+1}(A)$ avec $(fg)^{(n+1)} = ((fg)')^{(n)}$. $(fg)'$ étant de classe $\mathcal{C}^n(A)$ et la dérivation étant linéaire, il vient :

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)')^{(n)} = (f'g)^{(n)} + (fg')^{(n)}$$

Or les fonctions f', g, g' et f sont de classe $\mathcal{C}^n(A)$. L'hypothèse de récurrence donne :

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p f^{(p+1)} g^{(n-p)} + \sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p f^{(p)} g^{(n-p+1)}.$$

Un changement de variable dans le premier terme de la somme permet d'écrire

$$\sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p f^{(p+)} g^{(n-p)} = \sum_{p=1}^{n+1} \mathrm{C}_n^{p-1} f^{(p)} g^{(n+1-p)}$$

de sorte que

$$(fg)^{(n+1)} = f^{(n+1)}g + \sum_{p=1}^{n} \mathrm{C}_n^{p-1} f^{(p)} g^{(n+1-p)} + \sum_{p=1}^{n} \mathrm{C}_n^p f^{(p)} g^{(n-p+1)} + fg^{(n+1)}.$$

Avec $\mathrm{C}_n^{p-1} + \mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n+1}^p$, il vient :

$$(fg)^{(n+1)} = f^{(n+1)}g + \sum_{p=1}^{n} \mathrm{C}_{n+1}^p f^{(p)} g^{(n+1-p)} + fg^{(n+1)} = \sum_{p=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^p f^{(p+1)} g^{(n+1-p)}.$$

□

Remarque 3.3.16.
1. $\mathcal{C}^0(A)$ est l'ensemble des fonctions continues de A dans $\mathbb{R}$.
2. On a une suite d'inclusions strictes
$$\mathcal{C}^{n+1}(A) \subset \mathcal{C}^n(A) \subset \ldots \subset \mathcal{C}^1(A) \subset \mathcal{C}^0(A).$$
3. Si $f \in \mathcal{C}^n(A)$ on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$.
4. $\mathcal{C}^\infty(A)$ l'intersection des $\mathcal{C}^n(A)$ pour $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $\mathcal{C}^\infty(A)$ est l'ensemble des fonctions $f : A \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées de tout ordre. On dit qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Théorème 3.3.17. (formule de Taylor-Lagrange) Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ et $a, b \in I$ avec $a < b$ et $[a, b] \subset I$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Si $n = 0$ on retrouve le théorème des accroissements finis

Démonstration. Soit A la constante qui vérifie

$$f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) - \ldots - \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}A.$$

Comme dans la démonstration du théorème des accroissements finis, on introduit une fonction auxiliaire

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!}f^{(2)}(x) - \ldots - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}A.$$

Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, on a $f^{(n)} \in \mathcal{C}^1(I)$, donc $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$. Le choix de A donne $\varphi(a) = 0$ et on a aussi $\varphi(b) = 0$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle : il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Calculons la dérivée de φ.

termes de φ	dérivée
$f(b)$	0
$-f(x)$	$-f'(x)$
$-(b-x)f'(x)$	$+f'(x) - (b-x)f''(x)$
$\vdots$	$\vdots$
$-\frac{(b-x)^p}{p!}f^{(p)}(x)$	$+\frac{(b-x)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p)}(x) - \frac{(b-x)^p}{p!}f^{(p+1)}(x)$
$-\frac{(b-x)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+1)}(x)$	$+\frac{(b-x)^p}{p!}f^{(p+1)}(x) - \frac{(b-x)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+2)}(x)$
$\vdots$	$\vdots$
$-\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)$	$+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)$
$-\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}A$	$+\frac{(b-x)^n}{n!}A$

Dans la colonne de droite tous les termes sauf deux se simplifient, il reste

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!}(A - f^{(n+1)}(x)).$$

Comme $c \neq b$, l'égalité $\varphi'(c) = 0$ donne $f^{(n+1)}(c) = A$. On a donc obtenu la formule de Taylor. □

Le théorème indique que Si f est $n+1$ fois continûment dérivable sur $[x_0,x]$, alors f admet un $DL_n(x_0)$ de partie régulière

$P = f(x_0) + f'(x_0)X + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}X^n$.

(de coefficient $a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)$), avec le reste de Lagrange d'ordre n,

$$\exists c \in]x_0,x[: \; f(x) - P(x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} .$$

Remarque 3.3.18. On peut montrer que le théorème reste vrai sous la condition moins forte que $f^{(n)}(a)$ existe et f soit $n+1$ fois dérivables sur $]a,b[$.

Par exemple, $f(x) = \sqrt{x}$, admet un $DL_0(0)$ de partie régulière nulle et de reste $R_0(f,0,x) = \sqrt{x} = o(x^0)$. La dérivée $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ n'est pas définie en 0, mais le reste peut néanmoins s'exprimer comme $f'(\xi).x$ avec $\xi = \frac{1}{4}x$.

Remarque 3.3.19. Dans le cas particulier (mais fréquent) où $x_0 = 0$, et en posant $c = \theta x$ avec $\theta \in [0,1]$, la formule de Taylor-Lagrange s'appelle formule de MacLaurin :

$$\exists\theta \in]0,1[: f(x) = f(0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} .$$

Théorème 3.3.20. (formule de Taylor-Young) Soient $f \in \mathcal{C}^n(A)$ et $a \in A$. Alors f admet un développement limité d'ordre n en a donné par

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o((x-a)^n).$$

Démonstration. On a $f \in \mathcal{C}^n(A) = \mathcal{C}^{(n-1)+1}(A)$. On peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n-1$ à f avec x à la place de b. On suppose ici que $x > a$.

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(c),$$

avec $c \in]a,x[$. Ecrivons le dernier terme sous la forme

$$\frac{(x-a)^n}{n!}f^n(c) = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)).$$

Il suffit donc de montrer que

$$\frac{(x-a)^n}{n!}(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)) = o((x-a)^n)$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{x\to a}(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)) = 0.$$

Cela résulte de la continuité de $f^{(n)}$ au point a. □

3.3.5 D.L. de quelques fonctions élémentaires

En utilisant la formule de Taylor, on obtient les $D.L.(0)$ des fonctions élémentaires $\exp, \cos, \sin, (1+x)^\alpha$ donnés ci-dessous, où $o(x^n)$ représente une fonction inconnue de la forme $x^n\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

1. Fonction exponentielle :

$$e^x = \exp x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

En effet pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $f^{(k)}(x) = e^x$, donc $f^{(k)}(0) = 1$. D'o'u

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

2. Fonctions trigonométriques : Puisque la dérivée d'ordre n de cos est donnée par la formule

$$(\cos x)^{(n)} = \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{si} \quad n = 2k \\ (-1)^{k+1} \sin x & \text{si} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

nous déduisons que

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n})$$

3. Fonction $x \mapsto \ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$$

Il suffit de calculer les dérivées successives. On a

$$f^{(k)}(x) = k!(1-x)^{-1-k}, \forall k \in \mathbb{N}$$

donc $f^{(k)}(0) = k!$ et

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

4. Fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \ldots + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\alpha-1}{2} \cdot \frac{\alpha-2}{3} \cdots \frac{\alpha-n+1}{n}x^n + o(x^n)$$

5. Fonctions hyperboliques : Les fonctions ch$x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et sh$x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ ont comme *D.L.* les termes en puissances paires resp. impaires de e^x, ce sont donc ceux de $\cos x$ et $\sin x$, mais avec des signes + partout. (En effet, $\cos x = \Re e^{ix} = \mathrm{ch}(ix)$ et $\sin x = \Im e^{ix} = \frac{1}{i}sh(ix)$.)

3.3.6 Calcul de développements limités

Proposition 3.3.21. (somme et produit de développements limités) Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n en a alors $f+g$ et fg admettent des développements limités d'ordre n en a. Plus précisément si

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o((x-a)^n) \text{ et } g(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

alors

$$(f+g)(x) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k + \beta_k)(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

et

$$(fg)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \beta_{k-i} \right) (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Démonstration. L'assertion concernant l'addition est évidente. Pour le produit on multiplie les polynômes en $(x-a)$ venant de f et g en négligeant les termes de degré $> n$ qui sont des $o((x-a)^n)$. Pour calculer le produit des polynômes on commence par calculer le terme constant, puis le coefficient de $(x-a)$ puis celui de $(x-a)^2$,...

$$(fg)(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)(x-a) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)(x-a)^2 + \dots$$

□

En pratique, connaissant les développements limités des fonctions usuelles en 0, on calcule le développement limité d'une fonction $f(x)$ au voisinage de a de la manière suivante.

1. On se ramène au point 0 par translation, c'est-à-dire en posant $x-a = u$, de sorte que u tend vers 0 quand x tend vers a. Ainsi le développement limité en 0 de la fonction $g(u) = f(u+a)$ correspond au développement limité en a de la fonction f.
2. On utilise les formules donnant le développement limité d'une somme, d'un produit et d'une composée de fonctions usuelles.

Proposition 3.3.22. (composition de développements limités) Soient f et g deux fonctions ayant des développements limités d'ordre n en 0. On suppose que $g(0) = 0$. Alors $f \circ g$ a un développement d'ordre n en 0 qui s'obtient en remplaçant dans le développement de f la variable x par le développement de g et en négligeant les termes de degré $> n$.

Exemple 3.3.9. Calcul du développement limité de $e^{\cos x}$ en 0 à l'ordre 3. On a

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

On a $\cos 0 = 1 \neq 0$. Mais on peut écrire $\cos x = 1 + u(x)$ avec $u(0) = 0$. Alors ecos $x = e^{1+u(x)} = ee^{u(x)}$. On a

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3).$$

Comme $u(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, u^2 va commencer par x^4 et on peut donc négliger toutes les puissances u^k pour $k \geq 2$. Finalement, il reste

$$e^{\cos x} = e(1 - \frac{x^2}{2}) + o(x^3).$$

Proposition 3.3.23. (développement limité de la fonction inverse) Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre n en 0. Si $g(0) \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\frac{1}{g}$ a un développement limité à l'ordre n en 0. Ecrivons le développement limité de g à l'ordre n en 0

$$g(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k x^k + o(x^n)$$

avec $b_0 \neq 0$. Alors

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k x^k + o(x^n)} = \frac{1}{b_0(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{b_0} x^k + o(x^n))} = \frac{1}{b_0}\frac{1}{1-u}$$

avec $u = -(\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{b_0} x^k) + o(x^n)$ On sait que

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \ldots + u^n + o(u^n).$$

Par composition on a un développement limité d'ordre n de la fonction $\frac{1}{g(x)}$. $\square$

Exemple 3.3.10. Calcul du développement limité de $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ en 0 à l'ordre 5.

On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

Il suffit d'avoir le développement à l'ordre 5 de $\frac{1}{\cos x}$. On a

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-u}$$

avec $u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$. On a aussi

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + o(u^5).$$

Comme le premier terme (par ordre croissant des puissances de x) du développement limité de u est en x^2, le premier terme du développement limité de u^2 est en x^4. Celui de u^4 est en x^6, donc négligeable à l'ordre 5, ainsi que celui de u^5. En d'autres mots $u^4 = o(x^5)$ et $u^5 = o(x^5)$. Il reste donc

$$\frac{1}{1-u} = 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \frac{x^4}{4} + o(x^5) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5).$$

En multipliant on obtient

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right)$$

et après simplification

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

3.3.7 Application des développements limités

Calculs des limites

1. Calcul de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

$$e^x - e^{-x} = 1 + x - (1 - x) + o(x) = 2x + o(x)$$

$$\sin x = x + o(x)$$

donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 + \frac{o(x)}{x}}{1 + \frac{o(x)}{x}} = 2$$

2. Calcul de $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e}{e^x-e}-\frac{1}{x-1}$

   Le développement limité de e^x en 1 à l'ordre 2 est
$$e^x = e+e(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2).$$
   Donc
$$\begin{aligned}
\frac{e}{e^x-e}-\frac{1}{x-1} &= \frac{e}{e(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)}-\frac{1}{x-1}\\
&= \frac{1}{(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}+o((x-1)^2)}-\frac{1}{x-1}\\
&= \frac{1}{x-1}\left[\frac{1}{1+\frac{(x-1)}{2}+o((x-1))}-1\right]=\frac{1}{x-1}\left(-\frac{(x-1)}{2}-o((x-1))\right)
\end{aligned}$$
   Donc
$$\lim_{x\to 1}\frac{e}{e^x-e}-\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(-\frac{(x-1)}{2}-o((x-1))\right)=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{2}-\frac{o((x-1))}{x-1}\right)=-\frac{1}{2}$$

3. Prolongeons par continuité en 0 la fonction
$$\begin{array}{lcl} f:]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\end{array}$$
   Le développement limité de $\sin x$ en 0 à l'ordre 4 donne
$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$$
   donc
$$\sin^2 x = x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^5)$$
   et
$$\frac{2}{\sin^2 x}=\frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{3}+o(x^3)}\right)=\frac{2}{x^2}\left(1+\frac{x^2}{3}-o(x^3)\right)$$
   Par ailleurs, le développement limité de $\cos x$ au voisinage de 0 à l'ordre 5 donne
$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$$
   donc
$$\frac{1}{1-\cos x}=\frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{12}+o(x^3)}\right)=\frac{2}{x^2}(1+\frac{x^2}{12}+o(x^3))$$
   d'où
$$\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}=\frac{2}{x^2}(\frac{x^2}{4}+o(x^3))=\frac{1}{2}+o(x)$$
   D'où $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}=\frac{1}{2}$.

Etude locale des fonctions

On considère f définie sur $I =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ admettant un $D.L._p(x_0)$ de partie régulière $P = a_0 + a_1 X + a_p X^p$, $p \geq 2$ t.q. $a_p \neq 0$.

Alors la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f a pour équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$, et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T est donnée par le signe de $a_p(x - x_0)^p$:

1^{er} **cas :** p **pair** le point $P = (x_0, f(x_0))$ est dit ordinaire $a_p > 0 \Rightarrow C_f$ au dessus de T, $a_p < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_f$ en-dessous de T,

Si $a_1 = 0 \Rightarrow$ extremum ; dans ce cas : $a_p > 0 \Rightarrow$ minimum et f convexe, et $a_p < 0 \Rightarrow$ maximum et f concave au voisinage de x_0.

2^e **cas :** p **impair** $P = (x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion, $\mathcal{C}_f$ traverse T en P.

Convexité et concavité à droite et à gauche de P selon le signe de $a_p(x - x_0)^p$.

D.L. en $\pm\infty$

Définition 3.3.24. On dit que $f : I \to \mathbb{R}, I =]a, \infty[$ (resp. $I =]-\infty, a[$), admet un $DL_n(+\infty)$ (resp. $DL_n(-\infty)$) si et seulement si $\exists P \in \mathbb{R}_n[X]$ t.q.

$$\forall x \in I : f(x) = P(\frac{1}{x}) + o(1/x^n) \quad (x \to \pm\infty)$$

(avec toujours $o(1/x^n)$ une fonction de la forme $\varepsilon(x)/x^n$, $\varepsilon \to 0$).

Donc f admet un $D.L._n(\pm\infty)$ si et seulement si $g(t) = f(1/t)$ admet un $D.L._n(\pm 0)$; c'est ainsi qu'on détermine dans la pratique les $D.L.(\pm\infty)$ (même si on n'écrit pas explicitement le changement de variables $t = 1/x$).

Corollaire 3.3.25. Si f admet un $D.L.(\pm\infty)$, alors f admet une limite finie en $\pm\infty$ (comme dans le cas d'un $DL(a)$, $a \in \mathbb{R}$).

Remarque 3.3.26. Si f s'écrit comme différence de deux fonctions qui n'admettent pas une limite finie, f peut quand même admettre un $D.L.(\infty)$ lorsque ces deux fonctions sont équivalentes en l'infini. Pour le trouver, on met en facteur une fonction équivalente (généralement une puissance de x), pour pouvoir faire un $D.L.$ de l'autre facteur (différence de deux $D.L.$). Si suffisamment de termes des deux $D.L.$ s'annulent, il est possible que le produit soit un $D.L.$ au sens strict (sinon c'est un $D.L.$ généralisé).

Exemple 3.3.11. $D.L._2(\pm\infty)$ de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - x}$: Séparément les deux racines n'admettent pas de $DL(\infty)$. Or, $f(x) = |x|.(\sqrt{1 - 1/x^2} - \sqrt{1 - 1/x})$, et en utilisant

$$\sqrt{1 - 1/x} = 1 + \frac{1}{2}(-1/x) - \frac{1}{8}(-1/x)^2 + o(1/x)^2 \ ,$$

on a $f(x) = |x|\,(1 + \frac{1}{2}(-1/x^2) + o(1/x^2) - 1 + \frac{1}{8}\frac{1}{x^2}) = |x|.(\frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{3}{8}\frac{1}{x^2} + o(1/x^2))$, En développant, on a $f(x) = \mathrm{sgn}(x)(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\frac{1}{x} + o(1/x))$, d'où le résultat cherché.

Etude d'une branche infinie en $\pm\infty$

Pour trouver l'asymptote (si elle existe) à la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f, on cherche un $DL_1(\infty)$ de la fonction $g := x \mapsto \frac{1}{x}f(x)$. Si $g(x) = a + b/x + o(1/x)$, alors $f(x) = xg(x) = a.x + b + o(1) \quad (x \to \infty)$, donc la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

Remarque On peut renoncer à l'introduction de la fonction g, et faire le « $DL(\infty)$» directement à partir de la fonction f. Cependant, l'expression $f(x) = a.x + b + o(1) \quad (x \to \infty)$ n'est pas un $DL(\infty)$ au sens strict de la définition, à cause du premier terme qui n'est pas un polynôme en $1/x$.

La position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ au voisinage de l'infini se déduit du signe de $f(x) - (ax + b)$. Pour le connaître, on peut chercher le prochain terme non-nul dans le $DL(\infty)$ de g. Si $g(x) = a + b/x + a_p/x^p + o(1/x^p)$ avec $a_p \neq 0$, alors on a $f(x) = ax + b + a_p/x^{p-1} + o(1/x^{p-1})$. Le signe de a_p indique donc la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ : pour $a_p > 0$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ au voisinage de $+\infty$, sinon en-dessous. Le même raisonnement s'applique au voisinage de $-\infty$, en tenant compte du signe de x^{p-1} : ici c'est $\operatorname{sgn} a_p.(-1)^{p-1}$ qui indique si $\mathcal{C}$ est au-dessus ou en-dessous de Δ.

Notons que $\frac{1}{x}f$ peut ne pas admettre de DL_p avec p assez grand pour déterminer la position par rapport à Δ, comme c'est le cas pour $f = x \mapsto x + \frac{1}{x}\sin^2 x$; ici on peut toutefois affirmer que f est au-dessus de $\Delta : y = x$

Bibliographie

[1] G. Cagnac, E. Ramis, J. Commeau, Traité de mathématiques spéciales, Masson & C^{ie}

[2] William F. Trench,Introduction to real analysis, Free Edition 1, March 2009.

[3] Norbert Hungerbühler Paul Turner, notes de cours d'Analyse 1 (2010), Département de Mathématiques,Université de Fribourg

[4] Guy Laffaille Christian Pauly, Cours d'analyse 1 Licence 1er semestre, (2006).

[5] D. Guinin-B ; Joppin, Précis de Mathématiques (Cours Exercices résolues), Breal.

[6] Maximilian F. Hasler, Cours de Mathématiques 2 première partie : Analyse 2 DEUG MIAS 1e année, 2e semestre version du 21 avril 2002