Chapitre 2

Suites réelles

Nous nous intéressons dans ce cours aux suites réelles, mais nous donnerons de temps à autres des résultats élémentaires portant sur les suites complexes.

2.1 Convergence d'une suite

2.1.1 Généralités sur les suites numériques

Définition 2.1.1. On appelle suite réelle (resp. complexe), toute application définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). On note usuellement $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $u = (u_n)_{n\geq n_0}$ ou tout simplement (u_n) une telle suite.

u_n est appelé le terme général de la suite (u_n).

Pour simplifier, nous supposerons que les suites sont définies sur $\mathbb{N}$ et on note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles, ($\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites complexes).

Le terme u_n de la suite (u_n) peut être donné sous forme explicite ou sous forme récurrente (ce qui signifie que l'on indique une loi de formation des termes successifs).

Exemple 2.1.1.

1. La suite réelle $e = (e_n)_{n\geq 1}$ définie par $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est sous une forme explicite. Elle commence par $e_1 = 2$, $e_2 = \frac{9}{4}$, $e_3 = \frac{4^3}{3^3}$, etc.
2. La suite (de Fibonacci) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$, est donnée sous une forme récurrente. Elle commence par $v_0 = 0$, $v_1 = 1$, $v_2 = 1$, $v_3 = 2$, etc.
3. Plus généralement on a les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 définies par la formule

$$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$$

avec u_0 et u_1 données.

Définition 2.1.2. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

1. **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \leq M$,
2. **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $m \leq u_n$,
3. **bornée** si elle est majorée et minorée,
4. **non décroissante, ou croissante au sens large** (resp. non croissante, ou décroissante au sens large) si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$),

5. **strictement croissante** (resp. strictement décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} > u_n$ (resp. $u_n > u_{n+1}$),
6. **monotone** si elle est croissante ou décroissante,
7. **périodique** s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_{n+p} = u_n$. L'entier p est la période de la suite.

Une suite complexe (u_n) est dite bornée si la suite réelle $(|u_n|)$ est bornée.

Exemple 2.1.2. La suite de terme générale

1. $u_n = \sin n$ est bornée. Elle n'est ni décroissante ni croissante.
2. $u_n = \frac{1}{n}$ définie pour $n \geq 1$ est strictement décroissante et bornée.
3. $u_n = e^n$ est croissante, minorée mais pas majorée.
4. $u_n = u_0 a^n$ avec $u_0 > 0$ est croissante non majorée si $a > 1$, décroissante et bornée si $0 < a < 1$, constante si $a = 1$.
5. La suite $u_n = \sin(\frac{2\pi n}{17})$ est périodique de période 17.

Remarque 2.1.3.

1. Si la suite réelle (u_n) est une suite décroissante à termes strictement positifs, alors $(\frac{1}{u_n})$ est une suite décroissante à termes positifs. Dans ce cas en effet :
$$u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} < \frac{1}{u_n}.$$
2. Il peut arriver qu'une suite soit rendue monotone quand on en supprime les q premiers termes (q fixé).
3. D'après sa définition, la monotonie se met en évidence en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$. Dans le cas où $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut aussi comparer à 1 le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

2.1.2 Suites convergentes ou divergentes

Définition 2.1.4. Soit (u_n) une suite complexe ou réelle. On dit que (u_n) admet $a \in \mathbb{C}$ pour limite ou que (u_n) converge vers a et on écrit $\lim_{n\to\infty} u_n = a$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - a| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. En formule
$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon)$$

Proposition 2.1.5. La limite d'une suite convergente est unique.

Démonstration. Soit (u_n) une suite. Nous faisons la démonstration par l'absurde. Supposons qu'il y a deux limites ℓ et ℓ' avec $\ell \neq \ell'$. Prenons
$$\varepsilon = \frac{|\ell' - \ell|}{4} > 0.$$
Comme ℓ est limite de la suite (u_n) il existe un entier N tel que pour tout $n > N$ on ait $|u_n - \ell| < \varepsilon$, de même ℓ' étant aussi limite, il existe un entier N' tel que pour tout $n > N'$ on ait $|u_n - \ell'| < \varepsilon$. Alors si $n > \max(N, N')$ l'inégalité triangulaire permet d'écrire
$$\left|\ell - \ell'\right| \leq |\ell - u_n| + \left|u_n - \ell'\right| \leq 2\varepsilon = \frac{|\ell' - \ell|}{2}$$
ce qui est absurde. $\square$

Exemple 2.1.3. 1. Montrons que la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{-2n+3}{n+2}$ a pour limite -2. Nous avons

$$|u_n - (-2)| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{7}{n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{7}{\varepsilon} - 2$$

Donc pour $\varepsilon > 0$ si $n > \mathrm{E}(\frac{7}{\varepsilon}) - 1 > \frac{7}{\varepsilon} - 2$ alors $|u_n - (-2)| < \varepsilon$.

2. Considérons la suite définie par $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$. On peut écrire $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ ce qui montre que $|u_n| < \frac{1}{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. *On peut remarquer que la suite (u_n) est décroissante*

En utilisant l'inégalité

$$||a| - |b|| \leq |a - b|,$$

qui est valable pour tous réels a et b, on montre que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |u_n| = |\ell|.$$

Théorème 2.1.6. Toute suite (réelle ou complexe) convergente est bornée.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - \ell| < 1$, c'est-à-dire

$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|.$$

Posons

$$M = \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_N|, |\ell| + 1\}.$$

Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. □

Définition 2.1.7. Une suite non convergente est dite divergente.

Exemple 2.1.4. Montrons que la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente.

Si cette suite converge vers un réel ℓ la suite $|u| = (|(-1)^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est constante égale à 1 va converger vers $|\ell|$ et nécessairement $\ell = \pm 1$. En écrivant que pour $\varepsilon = 1$, il existe un entier N tel que :

$$\forall n > N,\ |(-1)^n - \ell| < 1$$

et en prenant $n > N$ impair si $\ell = 1$ et pair si $\ell = -1$, on aboutit à $2 < 1$ qui est impossible. La suite u est donc divergente

Parmi les suites réelles divergentes, on traite à part celles qui tendent vers l'infini.

Définition 2.1.8. Soit (u_n) une suite réelle.

1. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si,

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n > N, u_n > M.$$

On note $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

2. On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ si,

$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n > N, u_n < m.$$

On note $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Exemple 2.1.5. Soit (a_n) la suite de terme général $a_n = \frac{n^n}{n!}$. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. En effet, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n}{n}\frac{n}{n-1}\cdots\frac{n}{2}\frac{n}{1} > n.$$

Donc pour tout $K > 0$ si $n > K$ alors on a $a_n > K$. Prendre pour N tout entier supérieur à K, en occurrence $\mathrm{E}(K)+1$.

Une suite qui tend vers $+\infty$ est nécessairement positive à partir d'un certain rang. On peut remarquer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si, et seulement si $\lim_{n\to+\infty} -u_n = +\infty$

Si $u_n = \frac{1}{v_n}$ avec $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ si, et seulement si, $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Dans la définition de la convergence et des limites ci-dessus, les inégalités peuvent être larges ou strictes et on peut se limiter en ce qui concerne les limites infinies, à $M > 0$ et $m < 0$ sans que cela ne soit restrictif.

Une suite qui tend vers l'infini (c'est-à-dire vers $+\infty$ ou $-\infty$) est non bornée donc divergente.

Une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ est divergente puisque non bornée.

2.1.3 Théorèmes généraux sur les suites convergente

Théorème 2.1.9. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes pour laquelle on peut trouver une suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $|u_n - \ell| \leq v_n$ à partir d'un certain rang, où ℓ est un nombre complexe donné, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N_0$, $v_n < \varepsilon$. Par ailleurs, il existe N_1 tel que pour tout $n > N_1$, $|u_n - \ell| \leq v_n$. Maintenant, si $n > \max(N_0, N_1)$, alors $|u_n - \ell| \leq v_n < \varepsilon$. □

Le résultat qui suit se déduit immédiatement de la définition d'une suite convergente.

Théorème 2.1.10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

1. Si $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$) on a alors $u_n > 0$ (resp. $u_n < 0$) à partir d'un certain rang.
2. Si u_n est positif (resp. négatif) à partir d'un certain rang, on a alors $\ell \geq 0$ (resp. $\ell \leq 0$)

Démonstration.

1. Pour $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n > n_0,\ |u_n - \ell| < \frac{\ell}{2},$$

soit :

$$\forall n > n_0,\ \frac{\ell}{2} < u_n < \frac{3}{2}\ell$$

et donc :

$$\forall n > n_0,\ 0 < \frac{\ell}{2} < u_n.$$

Pour $\ell < 0$, on travaille avec la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Se déduit facilement du premier point.

□

Remarque 2.1.11. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si à partir d'un certain rang on a $v_n \leq u_n$ et si d'autre part

1. $\lim_{n\to\infty} v_n = \infty$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

Démonstration. D'après l'hypothèse, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, on ait $v_n \leq u_n$.

1. Dire que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ signifie pour $K \in \mathbb{R}$ donné, il existe un entier N tel que si $n > N$ alors $v_n > K$. D'autre part on sait que pour tout $n > N_0$, on a $v_n \leq u_n$. Donc si $n > \max(N_0, N)$ on a $K < v_n \leq u_n$, ce qui prouve que u_n tend vers $+\infty$.
2. On fait de même qu'en 1).

□

Théorème 2.1.12. Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles. Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si d'autre part (v_n) et (w_n) admettent la même limite ℓ, alors (u_n) converge et admet aussi ℓ pour limite.

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. La convergence de (v_n) vers ℓ implique qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N$ alors $|v_n - \ell| < \varepsilon$, c'est-à-dire

$$\ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon. \tag{2.1.1}$$

De même la convergence de (w_n) vers ℓ implique qu'il existe N' tel que si $n > N'$ alors $|w_n - \ell| < \varepsilon$, c'est-à-dire

$$\ell - \varepsilon < w_n < \ell + \varepsilon. \tag{2.1.2}$$

Par ailleurs, il existe d'après l'hypothèse, $M \in \mathbb{N}$ tel que si $n > M$ alors

$$v_n \leq u_n \leq w_n. \tag{2.1.3}$$

Donc si $n > \max(N, N', M)$ alors (2.1.1), (2.1.2) et (2.1.3) sont valides. Par suite,

$$\ell - \varepsilon < v_n \leq u_n \leq w_n < \ell + \varepsilon.$$

Ce qui prouve que la suite (u_n) tend vers ℓ. □

2.1.4 Valeurs d'adhérence

Définition 2.1.13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

1. On dit que la suite (v_n) est une suite extraite de (u_n) lorsqu'il existe une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}.$$

2. On dit qu'un scalaire a est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il est limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En pratique, on rencontrera souvent les extractions $(u_{n+1})_{n\geq 0}$ (suite décalée d'un indice), $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ (termes pairs et impairs d'une suite).

Exemple 2.1.6. La suite de terme générale $v_n = \frac{1}{n} + \sin\frac{2n\pi}{3}$ admet les valeurs d'adhérences 0, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ces nombres sont les limites respectives des suites extraites (v_{3n}), (v_{3n+1}) et (v_{3n+2}).

Remarque 2.1.14. Si φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

Démonstration. Procédons par récurrence. On a $\varphi(0) \geq 0$ puisque $\varphi(0) \in \mathbb{N}$. Supposons que $\varphi(n) \geq n$. On a $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ puisque φ est strictement croissante. Donc $\varphi(n+1) > n$, soit $\varphi(n+1) \geq n+1$ puisque $\varphi(n+1)$ est un entier. □

Théorème 2.1.15. Soit (u_n) une suite. Alors (u_n) tend vers ℓ si et seulement si toute suite extraite (sous-suite) de (u_n) tend vers ℓ.

Démonstration. $\Leftarrow$) C'est évident puisque la sous-suite (v_n) obtenue en prenant pour φ l'identité de $\mathbb{N}$ est la suite (u_n) elle-même.

$\Rightarrow$) Soit (v_n) la sous-suite associée à l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme la suite (u_n) tend vers ℓ, il existe un entier N tel que si $n > N$ alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Or $n > N$ implique $\varphi(n) \geq n$, d'après la remarque 2.1.14. Donc $|v_n - \ell| = \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \varepsilon$ pour $n > N$, ce qui prouve que (v_n) tend vers ℓ. □

Le théorème ci-dessus nous fait comprendre qu'une suite convergente à exactement une valeur d'adhérence.

Corollaire 2.1.16. Si une suite réelle (u_n) admet deux suites extraites qui tendent vers deux limites différentes, alors (u_n) n'admet pas de limite.

2.2 Critères de convergence d'une suite

2.2.1 Suite réelle monotone ou bornée

Théorème 2.2.1.
1. Toute suite (u_n) croissante et majorée, converge vers $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$
2. Toute suite (u_n) croissante non majorée tend vers $+\infty$.
3. Toute suite (v_n) décroissante et minorée converge vers $\inf\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$
4. Toute suite (v_n) décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration.
1. La partie A de $\mathbb{R}$ formée des u_n pour $n \in \mathbb{N}$ est non vide et majorée. Puisque $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieur, $\sup A = \ell$ existe. Puisque ℓ est un majorant on a $u_n \leq \ell$ pour tout n. Soit $\varepsilon > 0$. Comme ℓ est le plus petit majorant le nombre $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, donc il existe un élément u_N de A tel que $\ell - \varepsilon < u_N$. Comme (u_n) est croissante, on a $u_n \geq u_N$ pour $n \geq N$. On a donc pour $n > N$,
$$\ell - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$$
D'où $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
2. L'assertion (u_n) n'est pas majorée s'écrit
$$\forall K \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_N > K$$
Comme (u_n) est croissante on a alors $u_n \geq u_N > K$ pour tout $n > N$, ce qui est la définition de $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

3. Procéder comme au 1) en prenant l'infimum à la place du supremum.
4. Procéder comme au 2) en utilisant la décroissance et la définition du inf.
□

Théorème 2.2.2. De toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une suite monotone.

Démonstration. Considérons l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N} | \forall m > n, u_m \leq u_n\}.$$

Si A est finie, il admet un majorant $n_0 \notin A$ (prendre $n_0 = 0$ si A est vide). Il existe alors un entier $n_1 > n_0$ tel que $u_{n_1} > u_{n_0}$.

Comme $n_1 \notin A$, il existe $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} > u_{n_1}$ et ainsi de suite, on construit par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n_{k+1}} > u_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est alors extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et strictement croissante.

Si A est infinie, on peut ranger ces éléments dans l'ordre croissant, soit $A = \{n_k | k \in \mathbb{N}\}$ avec $n_k < n_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et par construction, on a $u_{n_{k+1}} \leq u_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est alors extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et décroissante. □

Théorème 2.2.3 (Bolzano-Weierstrass)**.** De toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration. Résulte immédiatement des deux théorèmes précédents. □

Théorème 2.2.4. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

Démonstration. On sait déjà qu'une suite convergente est bornée et qu'elle n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

Réciproquement, supposons que la suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette ℓ pour seule valeur d'adhérence. Si cette suite ne converge pas vers ℓ, on peut alors trouver un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier n, il existe $p > n$ avec $\left|u_p - \ell\right| \geq \varepsilon$. Par récurrence on peut alors construire une suite strictement croissante d'entiers $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \geq \varepsilon$ pour tout n. De la suite bornée $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous suite $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ' et par passage à la limite dans l'inégalité $\left|u_{\psi(n)} - \ell\right| \geq \varepsilon$, on déduit que $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon > 0$, c'est-à-dire que ℓ' est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ distincte de ℓ, ce qui contredit l'hypothèse de départ. □

Théorème 2.2.5. Une suite réelle est divergente, si et seulement si, elle vérifie l'une des deux conditions suivantes :
- elle est non bornée,
- elle est bornée et admet au moins deux valeurs d'adhérence

2.2.2 Critère de Cauchy

Définition 2.2.6. Une suite de réels (u_n) est dite de Cauchy lorsque les termes de la suite se rapprochent uniformément les uns des autres en l'infini au sens où : $\lim_{n\to\infty} \sup_{p,q>n} \left|u_p - u_q\right| = 0$.

Cette dernière condition se récrit classiquement à l'aide de quantificateurs universels et existentiels :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p,q > N,\ \left|u_p - u_q\right| < \varepsilon\,,$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ \forall k > 0,\ |u_{n+k} - u_n| < \varepsilon$$

Théorème 2.2.7. Toute suite de Cauchy (réelle ou complexe) est bornée.

Démonstration. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe alors un entier naturel $n_0 \geq 1$ tel que :

$$\forall n > n_0, \forall m > n_0,\ |u_m - u_n| < 1;$$

ce qui entraîne que pour tout $n > n_0$,

$$\begin{aligned} |u_n| &= |u_n - u_{n_0+1} + u_{n_0+1}| \\ &\leq |u_n - u_{n_0+1}| + |u_{n_0+1}| < 1 + |u_{n_0+1}|\,. \end{aligned}$$

Posons

$$M = \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_0}|, 1 + |u_{n_0+1}|\}\,.$$

On a $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. $\square$

Théorème 2.2.8. Une suite réelle ou complexe est convergente si, et seulement si, elle est de Cauchy.

Démonstration. Soit (a_n) une suite réelle ou complexe.

$\Rightarrow$) Nous supposons que la suite (a_n) converge vers a.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2.1}$$

Par conséquent,

$$n,m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon.$$

Ce qui montre que la suite est de Cauchy.

$\Leftarrow$ Nous supposons que la suite (a_n) est de Cauchy.

Elle est bornée d'après le théorème 2.2.7. Donc, admet d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, une sous-suite convergente $(a_{\varphi(n)})$. Notons a la limite de la sous-suite $(a_{\varphi(n)})$.

Soit $\varepsilon > 0$.

La suite (a_n) étant de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n,m \in \mathbb{N}$

$$n,m > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2.2}$$

Par ailleurs la sous-suite $(a_{\varphi(n)})$ converge vers a. Donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n > n_1 \Rightarrow \left|a_{\varphi(n)} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.2.3}$$

Si $n > \max(n_0, n_1)$, nous obtenons à partir de (2.2.2) et (2.2.3) que

$$|a_n - a| = \left|a_n - a_{\varphi(n)} + a_{\varphi(n)} - a\right| \leq \left|a_n - a_{\varphi(n)}\right| + \left|a_{\varphi(n)} - a\right| < \varepsilon$$

d'où le résultat. $\square$

Exemple 2.2.1. Montrons que, pour tout nombre complexe z la suite $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$

est convergente. La limite de cette suite est l'exponentielle complexe de z notée $\exp(z)$.

Il suffit de montrer que c'est une suite de Cauchy. En effet, pour $m > n > 2$ nous avons

$$\begin{aligned} |u_m - u_n| &= \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{z^k}{k!} \right| \\ &= \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \left| 1 + \frac{z}{n+2} + \ldots + \frac{z^{m-n-1}}{(n+2)\ldots(m-1)m} \right| \\ &\leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{|z|}{n+2} + \frac{|z|^2}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{|z|^{m-n-1}}{(n+2)^{m-n-1}} \right) \end{aligned}$$

En désignant par $n_0 > 2$ un entier naturel tel que $n_0 + 2 > |z|$, on a pour $m > n > n_0$,

$$|u_m - u_n| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{|z|}{n+2}}$$

ce qui implique que $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.

2.3 Opérations sur les suites convergentes

Dans l'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on définit la somme des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le produit de u par le scalaire λ par $\lambda u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Muni de ces deux lois $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On définit également le produit des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u \cdot v = (u_n \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui confère à $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une structure d'algèbre [1] commutative sur $\mathbb{C}$
.

Proposition 2.3.1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes. Si (u_n) est une suite bornée et si (v_n) est une suite qui converge vers 0, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Démonstration. La suite (u_n) étant bornée, il existe un réel K tel que $|u_n| \leq K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n| < \varepsilon/K$ pour tout $n > N$, grâce à la convergence de (v_n) vers 0. Ainsi, pour $n > N$,

$$|u_n v_n| = |u_n| \cdot |v_n| < \varepsilon.$$

□

1. une algèbre sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, ou simplement une $\mathbb{K}$-algèbre, est une structure algébrique $(A, +, \cdot, \times)$ telle que :

1. $(A, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$
2. la loi $\times$ est définie de $A \times A$ dans A (loi de composition interne)
3. la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$;
4. pour tout (a, b) dans $\mathbb{K}^2$ et pour tout (x, y) dans A^2, $(a \cdot x) \times (b \cdot y) = (ab) \cdot (x \times y)$

elle est commutative si la loi de composition interne $\times$ est commutative.

Théorème 2.3.2. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'$

1. Les suites $u+v$ et $u\cdot v$ convergent respectivement vers $\ell+\ell'$ et $\ell\cdot\ell'$.
2. Dans le cas où les suites u et v sont réelles, les suites $\min\{u,v\} = (\min\{u_n,v_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\max\{u,v\} = (\max\{u_n,v_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\min\{\ell,\ell'\}$ et $\max\{\ell,\ell'\}$.
3. Si $\ell' \neq 0$, il existe alors un entier n_0 tel que la suite $\frac{u}{v} = (\frac{u_n}{v_n})_{n\geq n_0}$ soit définie et cette suite converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.
4. Si $\ell > 0$, il existe un entier n_0 tel que $u_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$ et la suite $\sqrt{u} = (\sqrt{u_n})_{n\geq n_0}$ converge vers $\sqrt{\ell}$

Démonstration.

1. Soit ε un réel strictement positif.

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1, |u_n-\ell| < \varepsilon,$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_2, \left|v_n-\ell'\right| < \varepsilon,$$

En posant $n_0 = \max\{n_1,n_2\}$, on a :

$$\forall n > n_0,\ \left|(u_n+v_n)-(\ell+\ell')\right| \leq |u_n-\ell| + \left|v_n-\ell'\right| < 2\varepsilon$$

ce qui signifie que la suite $u+v$ converge vers $\ell+\ell'$.

Par ailleurs, comme la suite convergente v est bornée (car convergente), il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leq M$$

et pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\begin{aligned} \left|u_nv_n-\ell\ell'\right| &= \left|u_nv_n-\ell v_n+\ell v_n-\ell\ell'\right| \\ &\leq |u_nv_n-\ell v_n| + \left|\ell v_n-\ell\ell'\right| \\ &\leq |v_n|\,|u_n-\ell| + |\ell|\left|v_n-\ell'\right| \\ &\leq (M+|\ell|)\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui signifie que la suite $u\cdot v$ est convergente vers $\ell\cdot\ell'$.

2. Se déduit de la relation

$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|) \\ \min(a,b) = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|) \end{cases}$$

3. Si $\ell' \neq 0$ alors à partir d'un certain rang n_0, les éléments de la suite v sont non nuls et la suite $\frac{u}{v}$ est définie à partir de ce rang. On peut en fait trouver n_0 tel que $|v_n| > \frac{|\ell'|}{2}$ pour $n \geq n_0$ comme nous le voyons dans le théorème 2.1.10, ce qui entraîne que :

$$\forall n > n_0,\ \left|\frac{1}{v_n}-\frac{1}{\ell'}\right| = \left|\frac{v_n-\ell'}{v_n\ell'}\right| \leq \frac{2}{|\ell'|^2}\left|v_n-\ell'\right|$$

et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{v_n} = \frac{1}{\ell'}$. Le résultat sur le produit nous donne alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\ell}{\ell'}$

4. Si $\ell > 0$, on peut en fait trouver un entier n_0 tel que $u_n \geq \frac{\ell}{4}$ pour tout $n \geq n_0$ et avec :

$$\left|\sqrt{u_n} - \sqrt{\ell}\right| = \left|\frac{u_n - \ell}{\sqrt{u_n} + \sqrt{\ell}}\right| \leq \frac{2}{3\sqrt{\ell}}|u_n - \ell|$$

on déduit que $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{u_n} = \sqrt{\ell}$.

□

Théorème 2.3.3. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $= (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'$.

1. Si $\ell > \ell'$ on a alors $u_n > v_n$ à partir d'un certain rang.
2. Si à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$ alors $\ell \leq \ell'$.
3. Si M est un majorant de la suite u, alors $\ell \leq M$.
4. Si m est un minorant de la suite u, alors $\ell \geq m$.

Démonstration. On applique le théorème 3.3 aux suites $v - u$, $M - u$ et $u - m$. □

Remarque 2.3.4.
1. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et (v_n) est minorée alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$. De même si $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et (v_n) majorée alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = -\infty$
2. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$ alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n v_n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \ell > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad \ell < 0 \end{cases}$$

3. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$ alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n v_n = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad \ell > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad \ell < 0 \end{cases}$$

On a une forme indéterminée pour $u + v$ si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et pour $u \cdot v$ si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Dans ces différents cas, une étude plus approfondie est necessaire pour conclure.

2.4 Suites adjacentes

Définition 2.4.1. Deux suites réelles (a_n) et (b_n) sont dites adjacentes si l'une des suites est croissante (au sens large), l'autre suite décroissante au sens large et si la différence des deux tend vers 0.

Remarque 2.4.2. Si (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes avec (a_n) croissante et (b_n) décroissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq b_n$$

En effet, si (a_n) est croissante et (b_n) décroissante alors $(b_n - a_n)$ est décroissante. Si la suite $(b_n - a_n)$ est décroissante et converge vers 0 alors $(b_n - a_n)$ est une suite à termes positifs. Donc, pour tout n, $b_n - a_n \geq 0$ donc $b_n \geq a_n$.

On peut même observer que pour tous entiers p, q (non nécessairement égaux), $a_p \leqslant b_q$.

En effet, si $p \leq q$ alors $a_p \leq a_q \leq b_q$, et si $p \geq q$ alors $a_p \leq b_p \leq b_q$.

Théorème 2.4.3. Soient (a_n) et (b_n) deux suites adjacentes (où (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante). Alors ces deux suites sont convergentes, et ont la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, pour tout entier naturel n, $a_n \leq \ell \leq b_n$

Démonstration. La suite (a_n) est croissante, et majorée par b_0. Or on déduit de l'hypothèse de la borne supérieure que toute suite croissante et majorée converge. La suite (a_n) admet donc une limite ℓ. Puisque la suite $(b_n - a_n)$ converge vers 0, on en déduit que la suite (b_n) converge également vers ℓ.

De plus, pour tout n, $a_n \leq \ell \leq b_n$: la première inégalité se déduit, par passage à la limite, de $\forall q,\ a_n \leq b_q$, et la seconde se déduit de $\forall p,\ a_p \leq b_n$ $\square$

Exemple 2.4.1. Montrons que les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie respectivement par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

sont adjacentes.

Solution 2.4.1. Il est clair que (u_n) est croissante et pour $n \geq 1$ on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = -\frac{n-1}{(n+1)!} < 0$$

donc $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. De plus avec

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0,$$

on déduit que ces suites sont adjacentes

2.5 Suites particulières

2.5.1 Récurrence homographique

Suites arithméco-géométriques

Définition 2.5.1. Une suite (u_n) réelle ou complexe est :

1. Arithmétique lorsqu'il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + b$. b en est la raison.
2. Géométrique lorsqu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n$. a en est la raison.
3. Arirhmético-géométrique lorsqu'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Proposition 2.5.2. Etant donné une suite arithmétique (v_n) de raison r,

1. pout tout entier $n_0 \leq n$, on a
$$v_n = v_{n_0} + (n - n_0) \cdot r.$$
2. si $r > 0$ sa limite est $+\infty$
3. si $r < 0$ sa limite est $-\infty$.

4. Si la raison est nulle, la suite est constante et converge vers la constante.
5. La somme de termes consécutifs de (v_n) à partir du rang $p \in \mathbb{N}$ est

$$v_p + v_{p+1} + \ldots + v_n = \frac{(n-p+1)(v_n + v_p)}{2}.$$

Proposition 2.5.3. Etant donné une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q,

1. pour tout entiers naturels $n_0 \leq n$
$$u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}.$$
2. Si $q \leq -1$, la suite diverge et ne possède pas de limite. Dans $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ les valeurs d'adhérence sont $+\infty$ et $-\infty$.
3. Si $q = -1$, la suite diverge et possède deux valeurs d'adhérence u_0 et $-u_0$
4. Si $|q| < 1$, la suite converge vers 0
5. Si $q = 1$, la suite est constante et converge vers u_0
6. Si $q > 1$, la suite est divergente mais possède une limite égale à $+\infty$ si $u_0 > 0$ et $-\infty$ pour $u_0 < 0$
7. Pour deux entiers $0 \leq m < n$
$$\sum_{p=m}^{p=n} u_p = u_0\, q^m \, \frac{1 - q^{n+1-m}}{1-q}$$
pour q différent de 1

Remarque 2.5.4. Etudions la suite $u = (a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $a \in \mathbb{C}$ Si $a = 0$ alors u est constante égale à 0.

Pour $|a| > 1$, la formule du binôme de Newton nous dit que $|a^n| \geq 1 + n\,(|a| - 1)$ et comme $|a| - 1 > 0$ on a $\lim_{n\to+\infty} n\,(|a| - 1) = +\infty$, ce qui entraîne que $\lim_{n\to+\infty} |a^n| = +\infty$ et la suite u diverge. Pour $0 < |a| < 1$, nous avons $\frac{1}{|a|} > 1$. Ainsi en écrivant que $|a|^n = \frac{1}{\frac{1}{|a|^n}}$ nous avons $\lim_{n\to+\infty} |a^n| = 0$.

Pour $|a| = 1$, on a $a = e^{i\theta}$. Si $\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (soit $a = 1$), alors u est constante égale à 1 : Supposons que $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et montrons par l'absurde que la suite ne converge pas. Nous supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel $\lim_{n\to+\infty} e^{in\theta} = \ell$. Nous avons l'implication

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$$

En effet, si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe N tel que $n > N$ implique $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. il vient alors que $n > N$ implique

$$|u_{n+1} - u_n| = |u_{n+1} - \ell + \ell - u_n| \leq |u_{n+1} - \ell| + |u_n - \ell| < \varepsilon$$

puisque $n + 1 > n > N$. Or

$$\left|a^{n+1} - a^n\right| = \left|e^{i(n+1)\theta} - e^{in\theta}\right| = \left|e^{i\theta} - 1\right| = \sin\frac{\theta}{2}$$

On déduit que $\sin\frac{\theta}{2} = 0$ et par conséquent que $\theta = 2k\pi$ ce qui est contradictoire. La suite u est donc divergente.

Proposition 2.5.5. Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique : $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Si $a = 1$, c'est une suite arithmétique et si c'est $b = 0$ c'est une suite géométrique.
2. Si $a \neq 1$, la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$, est géométrique de raison a.

Suite homographique

Définition 2.5.6. Une suite (u_n) (complexe ou réelle) est dite homographique, lorsqu'il existe des constantes a, b, c et d telles que :

1. $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}. \tag{2.5.1}$$

Proposition 2.5.7. Soit (u_n) une suite homographique définie par la relation (2.5.1). On considère l'équation
$$x = \frac{ax + b}{cx + d}. \tag{2.5.2}$$

1. Si α est une racine de (2.5.2) et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p = \alpha$, alors la suite (u_n) est constante.
2. Si l'equation (2.5.2) a deux racines distinctes α et β, alors la suite (v_n) définie par
$$v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$$
est une suite géométrique ;
3. Si l'equation (2.5.2) a une racine double α, la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$ est une suite arithmétique.

2.5.2 Suites récurrentes linéaires

Nous désignons par $\mathbb{K}$, l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.5.8. Soit $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui satisfait la relation de récurrence pour tout $n \geq 0$
$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Théorème 2.5.9. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $b \neq 0$ et $\mathcal{L}(a, b)$ l'ensemble de suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :
$$\mathcal{L}(a, b) = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \right\}.$$
L'ensemble $\mathcal{L}(a, b)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Démonstration. Pour montrer que $\mathcal{L}(a, b)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel nous montrons que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite nulle est une suite recurrente lineaire d'ordre 2 donc $\mathcal{L}(a, b)$ est non vide. Soit u et v deux suites de $\mathcal{L}(a, b)$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Posons $w = \alpha u + \beta v$. Nous avons alors :
$$\begin{aligned} w_{n+2} &= \alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2} \\ &= \alpha(au_{n+1} + bu_n) + \beta(av_{n+1} + bv_n) \\ &= a(\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) + b(\alpha u_n + \beta v_n) \\ &= aw_{n+1} + bw_n \end{aligned}$$

Donc $w \in \mathcal{L}(a,b)$. Ainsi $\mathcal{L}(a,b)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Considérons l'application φ suivante :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{L}(a,b) & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$

Nous remarquons deux choses :

1. L'application φ est linéaire. En effet pour tout $(u,v) \in \mathcal{L}^2(a,b)$ et tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(\alpha u + \beta v) = (\alpha u_0 + \beta v_0, \alpha u_1 + \beta v_1) = \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v).$$

2. L'application φ est bijective (en effet un élément u de $\mathcal{L}(a,b)$ est uniquement déterminé par ses deux premiers termes.) Précisons cela. Si $u_0 = u_1 = 0$ alors u est la suite nulle, donc $\ker\varphi$ est réduit a la suite nulle et φ est injective. Enfin, étant donne deux scalaires $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ on peut définir une suite $u \in \mathcal{L}(a,b)$ telle que $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$. L'application φ est surjective. En conclusion φ est un isomorphisme d'espace vectoriel. Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, il en est de même pour $\mathcal{L}(a,b)$.

□

2.5.3 Description des suites récurrentes linéaires

Une suite géométrique $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ non nulle est dans $\mathcal{L}(a,b)$ si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique

$$X^2 - aX - b = 0. \tag{2.5.3}$$

Comme b est suppose non nul (2.5.3) n'admet pas 0 comme solution.

1. (2.5.3) a deux racines distinctes. Notons α et β les deux racines de (2.5.3). Les deux suites géométriques $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $\mathcal{L}(a,b)$. et sont linéairement indépendantes (le vérifier par exemple sur leur image par l'isomorphisme φ), elles forment donc une base de $\mathcal{L}(a,b)$ puisque $\dim\mathcal{L}(a,b) = 2$. Ainsi : $u \in \mathcal{L}(a,b)$ si et seulement s'il existe $(\eta,\nu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \eta\alpha^n + \nu\beta^n.$$

2. (2.5.3) a une racine double.
Notons μ la racine de (2.5.3). Les deux suites $(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $\mathcal{L}(a,b)$ et sont linéairement indépendantes, elles forment donc une base de $\mathcal{L}(a,b)$ puisque $\dim\mathcal{L}(a,b) = 2$. Ainsi : $u \in \mathcal{L}(a,b)$ si et seulement s'il existe $(\eta,\nu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\eta + \nu n)\mu^n.$$

3. (2.5.3) n'a pas de racines réelles.
L'équation (2.5.3) a deux racines complexes conjuguées ω et $\overline{\omega}$. Posons $r = |\omega|$ et $\theta = \arg\omega$. On vérifie que les suites $(r^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes, elles forment donc une base de $\mathcal{L}(a,b)$ puisque $\dim\mathcal{L}(a,b) = 2$. Ainsi : $u \in \mathcal{L}(a,b)$ si et seulement s'il existe $(\eta,\nu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \eta r^n\cos(n\theta) + \nu r^n\sin(n\theta).$$

Exemple 2.5.1. Etudier la suite reelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}$, $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$.

Solution 2.5.1. : l'équation caractéristique (2.5.3) est $X^2 + X - 2 = 0$, elle admet deux racines distinctes 1 et -2. Donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha + (-2^n)\beta$. Déterminons α et β. Nous avons :

$$\begin{cases} u0 = \alpha + \beta = 0 \\ u_1 = \alpha - 2\beta = 3 \end{cases}$$

Donc $\alpha = 1$ et $\beta = -1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - (-2)^n$.