LICENCE I: COURS DE PROBABILITE

Prof. Auguste AMAN

UFR Mathématiques et Informatique,

Université Félix H. Boigny

Plan de la présentation

Introduction

Le dénombrement consiste à déterminer le nombre d’éléments d’un ensemble fini. Ce chapitre fournit des méthodes de dénombrement particulirement utiles en probabilités.

Cardinal d'un ensemble fini

Définition

1. Un ensemble E non vide est dit fini s'il existe un entier n et une bijection de $\{1, 2, \ldots, n\}$ sur E. Lorsqu'il existe, l'entier n est unique et est noté $Card(E)$. C'est le cardinal ou le nombre d'éléments de E
2. Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E. Un ensemble E est dit infini non dénombrable s'il n'est ni fini, ni dénombrable.

Cardinal d'un ensemble fini

Proposition

Soit E un ensemble fini et A, B deux parties de E.

1. Si $\bar{A}$ est le complémentaire de A dans E alors
$$Card(\bar{A}) = Card(E) - Card(A).$$
2. $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.
3. Si $A \cap B = \emptyset$ alors $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$
4. $Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$

Principes de comptage additif

Soit E un ensemble fini et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties de E constituant une partition de E, c'est à dire,

1. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$
2. $E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Alors nous avons $Card(E) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Card(A_i)$.

Lorsqu'on veut dénombrer un ensemble fini E, on peut trouver une partition $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de cet ensemble, où les cardinaux des ensembles A_i sont plus faciles à déterminer. Il ne reste alors qu'à faire la somme des différents cardinaux obtenus.

Principes de comptage additif

Exemple
J'ai dans ma bibliothèque 50 livres de mathématiques en franais et 40 livres de mathématiques en anglais (et aucun dans une autre langue). Je peux donc y choisir un livre de mathématiques de $50 + 40 = 90$ façons différentes.

Principes de comptage multiplicatif

Si une situation correspond à p choix successifs ayant chacun respectivement n_1, $n_2, \ldots$,n_p possibilités alors le nombre total de possibilités est

$$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p.$$

Exemple

Une étudiante de Licence 1 de M.I a dans sa garde robe 4 chaussures, 7 pantalons et 13 chemises. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller.

Arrangements avec répétition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de n éléments.

Définition

Un arrangement avec répétition de p éléments (ou p-liste) de E est une partie ordonnée de p éléments de E non nécessairement distincts. Cela revient à prendre p objets dans E en tenant compte de l'ordre dans lequel on les choisit, et en pouvant prendre plusieurs fois le même élémént.

Proposition

Le nombre d'arrangements avec répétition de p objets parmi n est

$$n^p$$

.

Arrangements avec répétition

Démonstration.

En effet, on a n possibilités pour chaque place, soit $n \times n \times \ldots \times n = n^p$ possibilités d'arrangement d'après le principe multiplicatif. $\square$

Exemple

Combien y a-t-il de numéros de téléphone commençant par 08 ?

Un numéro de téléphone est constitué de 8 chiffres. Les 6 numéros qui suivent le $"08"$ sont des arrangements avec répétitions de 6 éléments de l'ensemble

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \}.$$

Il y en a $10^6 = 1000000$ possibilités.

Arrangements sans répétition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de n éléments.

Définition

Un arrangement de p éléments de E est une partie ordonnée de p éléments (distincts) de E.

Proposition

Le nombre d'arrangements de p objets parmi n est

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Arrangements sans répétition

Démonstration.

Nous avons n possibilités pour la première place, $n-1$ possibilités pour la deuxième place, $n-2$ possibilités pour la troisième place,. . . , $(n-(p-1))$ possibilités pour la dernière place. D'après le principe multiplicatif, le nombre total de possibilités est :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

$\square$

Arrangements sans répétition

Exemple (Le tiercé)
Une course de chevaux comporte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles de tiercés dans l'ordre ? Soit E l'ensemble des numéros des chevaux. On a $Card(E) = 20.$ Un tiercé correspond un arrangement de 3 éléments de E, il y en a $A_{20}^{3} = 6840$ possibilités.

Permutation

Soit E un ensemble fini de n éléments.

Définition

Une permutation de E est un arrangement des n éléments de E. Cela revient prendre les n éléments de E en tenant compte de l'ordre dans lequel on les choisit.

Proposition

Le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments est

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1.$$

Permutation

Démonstration.

Nous avons n possibilités pour la première place, $n-1$ possibilités pour la deuxième place, $n-2$ possibilités pour la troisième place,..., 1 possibilités pour la dernière place. D'après le principe multiplicatif, le nombre total de possibilités est :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1 = A_n^n$$

□

Permutation

Exemple

De combien de façons peut-on répartir 7 personnes sur 7 chaises ? Désignons par $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$ les 7 personnes et posons

$$E = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}.$$

Une répartition peut se voir comme une permutation de E, il y en a $7! = 5040$.

Exemple

Une urne contient n boules distinctes. Tirer successivement les n boules en tenant compte de l'ordre de sortie des boules constitue une permutation de n éléments. Il y a $n!$ possibilités.

Combinaison sans répétition

Définition

Une combinaison de p éléments de E est une partie non ordonnée de E formée de p éléments distincts. Cela revient à prendre p objets distincts dans E sans tenir compte de l'ordre dans lequel on les choisit.

Proposition

Le nombre de combinaisons possibles de p objets pris parmi n est

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Combinaison sans répétition

Exemple
Quel est le nombre de comités de 3 personnes que l'on peut élire dans une assemblée de 20 personnes.
Le nombre de comités possibles est le nombre de combinaisons de 3 personnes parmi 20, soit $C_{20}^{3} = 1140$
Exemple
Tirer simultanement p boules parmi n constitue une combinaison de p éléments parmi n éléments. Il y a C_n^p possibilités.

Binôme de Newton

Proposition

Soient a et b deux nombres rels et n un entier naturel non nul, alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Combinaison avec répétition

Définition

Une k-combinaison avec répétition d'un ensemble fini E de cardinal n, est une application f de E dans $\{0, 1, \cdots, k\}$, telle que

$$\sum_{x \in E} f(x) = k.$$

Plus précisément, si $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ alors f vérifie

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) = k.$$

f s'appelle aussi une combinaison de n éléments pris k à k.

Combinaison avec répétition

Remarque

Cette application indique pour chaque élément de E le nombre de fois qu'il est choisi ; et si l'application associe la valeur 0 à un élément de E, alors l'élément n'est pas choisi. De plus la somme des nombres de répétitions doit bien être égale à k, si nous voulons exactement k objets éventuellement répétés.

Combinaison avec répétition

Théorème

Soit E un ensemble fini de cardinal $n, \ (n \in \mathbb{N}^*)$. Alors l'ensemble $K_k(E)$ des k-combinaisons avec répétition de E est fini et son cardinal est égal à

$$\Gamma_n^k = C_{n+k-1}^k$$

qui est le nombre de k-combinaisons sans répétition de $n + k - 1$ éléments.

Le choix d'un modèle

- Si l'énoncé contient le mot successif, il faut tenir compte de tous les ordres dans lesquels on peut obtenir un événement donné. On doit souvent multiplier par le nombre d'ordres possibles le résultat trouvé pour un ordre déterminé.
- Si l'énoncé contient les mots "successif et avec remise", cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété. Le modèle mathématique est la p-liste ou arrangement avec répétition.

Le choix d’un modèle

- Si l’énoncé contient les mots successif et sans remise, cela signifie que l’ordre dans lequel on considère les éléments a de l’importance mais que tous les éléments considérés sont distincts (ou qu’il n’y a pas de répétition d’éléments). Le modèle mathématique est l’arrangement.
- Si l’énoncé contient le mot simultanément sans répétition , cela signifie que l’ordre dans lequel on considère les éléments n’a pas d’importance et les éléments sont distincts deux à deux. Le modèle mathématique est la combinaison classique.

Le choix d’un modèle

- Si l’énoncé contient le mot simultanément avec répétition , cela signifie que l’ordre dans lequel on considère les éléments n’a pas d’importance mais les éléments peuvent se répéter. Le modèle mathématique est la combinaison avec répétition.

Plan de la présentation

Expérience aléatoire

Activité

On lance un dé équilibré à 6 faces numérotés de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé après l'arrêt.

- Quel est l'ensemble de résultats possibles ?
- L'ensemble des résultats possibles est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Peut-on prévoir avant le lancer les résultats possibles ?
- Non, on ne peut pas prévoir d'avance le résultat
- Déterminer l'ensemble des résultats pairs
- L'ensemble des résultats pairs est $\{2, 4, 6\}$.

Expérience aléatoire

Activité

On lance un dé équilibré à 6 faces numérotés de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé après l'arrêt.

- Quel est l'ensemble de résultats possibles ?
- L'ensemble des résultats possibles est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Peut-on prévoir avant le lancer les résultats possibles ?
- Non, on ne peut pas prévoir d'avance le résultat
- Déterminer l'ensemble des résultats pairs
- L'ensemble des résultats pairs est $\{2, 4, 6\}$.

Expérience aléatoire

Activité

On lance un dé équilibré à 6 faces numérotés de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé après l'arrêt.

- Quel est l'ensemble de résultats possibles ?
- L'ensemble des résultats possibles est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Peut-on prévoir avant le lancer les résultats possibles ?
- Non, on ne peut pas prévoir d'avance le résultat
- Déterminer l'ensemble des résultats pairs
- L'ensemble des résultats pairs est $\{2, 4, 6\}$.

Expérience aléatoire

Activité
On lance un dé équilibré à 6 faces numérotés de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé après l'arrêt.

- Quel est l'ensemble de résultats possibles ?
- L'ensemble des résultats possibles est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Peut-on prévoir avant le lancer les résultats possibles ?
- Non, on ne peut pas prévoir d'avance le résultat
- Déterminer l'ensemble des résultats pairs
- L'ensemble des résultats pairs est $\{2, 4, 6\}$.

Expérience aléatoire

Activité

On lance un dé équilibré à 6 faces numérotés de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé après l'arrêt.

- Quel est l'ensemble de résultats possibles ?
- L'ensemble des résultats possibles est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Peut-on prévoir avant le lancer les résultats possibles ?
- Non, on ne peut pas prévoir d'avance le résultat
- Déterminer l'ensemble des résultats pairs
- L'ensemble des résultats pairs est $\{2, 4, 6\}$.

Expérience aléatoire

Activité

On lance un dé équilibré à 6 faces numérotés de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé après l'arrêt.

- Quel est l'ensemble de résultats possibles ?
- L'ensemble des résultats possibles est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Peut-on prévoir avant le lancer les résultats possibles ?
- Non, on ne peut pas prévoir d'avance le résultat
- Déterminer l'ensemble des résultats pairs
- L'ensemble des résultats pairs est $\{2, 4, 6\}$.

Expérience aléatoire

Activité

- Déterminer l'ensemble des possibilités d'avoir le chiffre "2" ?
- L'ensemble est $\{2\}$
- Déterminer l'ensemble des possibilités d'avoir le chiffre "7" ?
- C'est un résultat impossible
- Déterminer l'ensemble de résultats "obtenir un nombre inférieur à 7"
- L'ensemble des résultats est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Expérience aléatoire

Activité

- Déterminer l'ensemble des possibilités d'avoir le chiffre "2" ?
- L'ensemble est $\{2\}$
- Déterminer l'ensemble des possibilités d'avoir le chiffre "7" ?
- C'est un résultat impossible
- Déterminer l'ensemble de résultats "obtenir un nombre inférieur à 7"
- L'ensemble des résultats est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Expérience aléatoire

Activité

- Déterminer l'ensemble des possibilités d'avoir le chiffre "2" ?
- L'ensemble est $\{2\}$
- Déterminer l'ensemble des possibilités d'avoir le chiffre "7" ?
- C'est un résultat impossible
- Déterminer l'ensemble de résultats "obtenir un nombre inférieur à 7"
- L'ensemble des résultats est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Expérience aléatoire

Activité

- Déterminer l'ensemble des possibilités d'avoir le chiffre "2" ?
- L'ensemble est $\{2\}$
- Déterminer l'ensemble des possibilités d'avoir le chiffre "7" ?
- C'est un résultat impossible
- Déterminer l'ensemble de résultats "obtenir un nombre inférieur à 7"
- L'ensemble des résultats est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Expérience aléatoire

Activité

- Déterminer l'ensemble des possibilités d'avoir le chiffre "2" ?
- L'ensemble est $\{2\}$
- Déterminer l'ensemble des possibilités d'avoir le chiffre "7" ?
- C'est un résultat impossible
- Déterminer l'ensemble de résultats "obtenir un nombre inférieur à 7"
- L'ensemble des résultats est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Expérience aléatoire

Activité

- Déterminer l'ensemble des possibilités d'avoir le chiffre "2" ?
- L'ensemble est $\{2\}$
- Déterminer l'ensemble des possibilités d'avoir le chiffre "7" ?
- C'est un résultat impossible
- Déterminer l'ensemble de résultats "obtenir un nombre inférieur à 7"
- L'ensemble des résultats est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Expérience aléatoire

Activité

- Déterminer l'évenement "obtenir un multiple de 2 ou un nombre au moins éggal 4".
- L'ensemble des résultats est $B = \{2, 4, 5, 6\}$.
- Déterminer l'évenement "obtenir un multiple de 2 et un nombre au moins égal à 4".
- L'ensemble des résultats est $\{4, 6\}$.
- Déterminer l'évenement "obtenir un multiple de 2 et un chiffre supérieur à 4".
- L'ensemble des résultats est $\{6\}$.

Expérience aléatoire

Activité

- Déterminer l'évenement "obtenir un multiple de 2 ou un nombre au moins éggal 4".
- L'ensemble des résultats est $B = \{2, 4, 5, 6\}$.
- Déterminer l'évenement "obtenir un multiple de 2 et un nombre au moins égal à 4".
- L'ensemble des résultats est $\{4, 6\}$.
- Déterminer l'évenement "obtenir un multiple de 2 et un chiffre supérieur à 4".
- L'ensemble des résultats est $\{6\}$.

Expérience aléatoire

Activité

- Déterminer l'évenement "obtenir un multiple de 2 ou un nombre au moins éggal 4".
- L'ensemble des résultats est $B = \{2, 4, 5, 6\}$.
- Déterminer l'évenement "obtenir un multiple de 2 et un nombre au moins égal à 4".
- L'ensemble des résultats est $\{4, 6\}$.
- Déterminer l'évenement "obtenir un multiple de 2 et un chiffre supérieur à 4".
- L'ensemble des résultats est $\{6\}$.

Expérience aléatoire

Activité

- Déterminer l'évenement "obtenir un multiple de 2 ou un nombre au moins éggal 4".
- L'ensemble des résultats est $B = \{2, 4, 5, 6\}$.
- Déterminer l'évenement "obtenir un multiple de 2 et un nombre au moins égal à 4".
- L'ensemble des résultats est $\{4, 6\}$.
- Déterminer l'évenement "obtenir un multiple de 2 et un chiffre supérieur à 4".
- L'ensemble des résultats est $\{6\}$.

Expérience aléatoire

Activité

- Déterminer l'évenement "obtenir un multiple de 2 ou un nombre au moins éggal 4".
- L'ensemble des résultats est $B = \{2, 4, 5, 6\}$.
- Déterminer l'évenement "obtenir un multiple de 2 et un nombre au moins égal à 4".
- L'ensemble des résultats est $\{4, 6\}$.
- Déterminer l'évenement "obtenir un multiple de 2 et un chiffre supérieur à 4".
- L'ensemble des résultats est $\{6\}$.

Expérience aléatoire

Activité

- Déterminer l'évenement "obtenir un multiple de 2 ou un nombre au moins éggal 4".
- L'ensemble des résultats est $B = \{2, 4, 5, 6\}$.
- Déterminer l'évenement "obtenir un multiple de 2 et un nombre au moins égal à 4".
- L'ensemble des résultats est $\{4, 6\}$.
- Déterminer l'évenement "obtenir un multiple de 2 et un chiffre supérieur à 4".
- L'ensemble des résultats est $\{6\}$.

Expérience aléatoire

Définition

Une expérience $\mathcal{E}$ est qualifiée d'aléatoire si on ne peut pas prévoir son résultat et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut donner lieu à des résultats différents.

Remarque

Avant toute expérimentation, on peut décrire l'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire.

Définition

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire. On appelle univers, et l'on note souvent Ω, l'ensemble des résultats possibles de $\mathcal{E}$. Si Ω est non vide. On notera $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Dans toute la suite de ce chapitre, on supposera que Ω est fini.

Expérience aléatoire

Définition

On appelle événement associé à une expérience aléatoire, toute partie A de Ω.

Remarque

1. L'événement $A = \Omega$ est appelé événement certain. Il se réalise toujours.
2. L'événement $A = \emptyset$ est appelé événement impossible. Il ne se réalise jamais.
3. L'événement $A = \{\omega\}$ constitué d'un seul élément de Ω est appelé événement élémentaire.

Expérience aléatoire

Les événements étant des ensembles, on utilisera 3 opérateurs définies sur les ensembles :

1. L'union : l'événement $A \cup B$ se réalise si A se réalise ou B se réalise
2. L'intersection : $A \cap B$ se réalise si A se réalise et B se réalise
3. Le complémentaire : $\bar{A}$ se ralise si A ne se réalise pas.

Expérience aléatoire

Exercice

Un sac contient trois boules de couleurs, verte et bleu. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur, on la replace dans le sac puis on retire au hasard une autre boule en notant à nouveau sa couleur.

1. Déterminer l'univers de cette expérience.
2. Citer un événement élémentaire et un événement non élémentaire
3. Soit A l'événement : "les deux boules sont de même couleur", B l'événement : "obtenir une boule bleue et une boule verte ", et C l'événement : "obtenir d'abord une boule rouge". Déterminer le contraire de A ; "A et B " ; "A et C" puis"A ou C". Les événements A et B sont-ils incompatibles ?

Expérience aléatoire

Corrigé Exercice

On note :
R :"la couleur de la boule tire est rouge"
B"la couleur de la boule tire est bleue"
V"la couleur de la boule tire est verte"

- L'événement élémentaire est un couple (C_1, C_2) où C_1 représente la couleur de la première boule tire et C_2 la couleur de la deuxième. L'univers des possibles est

$$\Omega = \{(R,R),(R,V),(V,R),(R,B),(B,R),(V,V),(V,B),(B,V),(B,B)$$

- (R,V) est un événement élémentaire ; $\{(R,R),(R,V)\}$ est un événement non élémentaire.

Expérience aléatoire

Corrigé Exercice

- Nous avons :

$$A = \{(R,R),(V,V),(B,B)\}, B = \{(B,V),(V,B)\},$$

$$C = \{(R,R),(R,V),(R,B)\}$$

- L'événement contraire de A est

$$\bar{A} = \{(R,V),(V,R),(R,B),(B,R),(V,B),(B,V)\}.$$

- Nous avons :
$A \cap B = \emptyset,\ A \cap C = \{(R,R)\}, A \cup C =$
$\{(R,R),(V,V),(B,B),(R,V),(R,B)\}$ Les événements A et B

Expérience aléatoire

Définition

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire, et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de parties de Ω. Alors, le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est appelé espace probabilisable.

Probabilité

Activité

Un sac contient trois boules de couleurs différentes ; une boule rouge, une boule verte et une boule bleue. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur. On replace la boule dans le sac et on retire en notant à nouveau sa couleur. Chaque boule a la même chance d'être tirée.

- Quel est le nombre de résultats possibles ?
- Le nombre de résultats possible est : $card(\Omega) = 9$
- Quelle est la fréquence d'apparition du couple (R, B) ?
- La fréquence d'apparition du couple (R, B) est $\frac{1}{card(\Omega)} = \frac{1}{9}$
- Quelle est la fréquence d'apparition de chaque élément de l'univers.

Probabilité

Activité

Un sac contient trois boules de couleurs différentes ; une boule rouge, une boule verte et une boule bleue. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur. On replace la boule dans le sac et on retire en notant à nouveau sa couleur. Chaque boule a la même chance d'être tirée.

- Quel est le nombre de résultats possibles ?
- Le nombre de résultats possible est : $card(\Omega) = 9$
- Quelle est la fréquence d'apparition du couple (R, B) ?
- La fréquence d'apparition du couple (R, B) est $\frac{1}{card(\Omega)} = \frac{1}{9}$
- Quelle est la fréquence d'apparition de chaque élément de l'univers.

Probabilité

Activité

Un sac contient trois boules de couleurs différentes ; une boule rouge, une boule verte et une boule bleue. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur. On replace la boule dans le sac et on retire en notant à nouveau sa couleur. Chaque boule a la même chance d'être tirée.

- Quel est le nombre de résultats possibles ?
- Le nombre de résultats possible est : $card(\Omega) = 9$
- Quelle est la fréquence d'apparition du couple (R, B) ?
- La fréquence d'apparition du couple (R, B) est $\frac{1}{card(\Omega)} = \frac{1}{9}$
- Quelle est la fréquence d'apparition de chaque élément de l'univers.

Probabilité

Activité

Un sac contient trois boules de couleurs différentes ; une boule rouge, une boule verte et une boule bleue. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur. On replace la boule dans le sac et on retire en notant à nouveau sa couleur. Chaque boule a la même chance d'être tirée.

- Quel est le nombre de résultats possibles ?
- Le nombre de résultats possible est : $card(\Omega) = 9$
- Quelle est la fréquence d'apparition du couple (R, B) ?
- La fréquence d'apparition du couple (R, B) est $\dfrac{1}{card(\Omega)} = \dfrac{1}{9}$
- Quelle est la fréquence d'apparition de chaque élément de l'univers.

Probabilité

Activité

Un sac contient trois boules de couleurs différentes ; une boule rouge, une boule verte et une boule bleue. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur. On replace la boule dans le sac et on retire en notant à nouveau sa couleur. Chaque boule a la même chance d'être tirée.

- Quel est le nombre de résultats possibles ?
- Le nombre de résultats possible est : $card(\Omega) = 9$
- Quelle est la fréquence d'apparition du couple (R, B) ?
- La fréquence d'apparition du couple (R, B) est $\dfrac{1}{card(\Omega)} = \dfrac{1}{9}$
- Quelle est la fréquence d'apparition de chaque élément de l'univers.

Probabilité

Acitivité

- La fréquence d'apparition de chaque couple de l'univers est $\frac{1}{9}$.
- Quelle est la fréquence d'apparition de deux boules de même couleur ?
- Les deux boules sont de même couleur est $A = \{(R, R), (V, V), (B, B)\}$. La fréquence d'apparition est $\frac{3}{9}$.

Probabilité

Acitivité

- La fréquence d'apparition de chaque couple de l'univers est $\frac{1}{9}$.
- Quelle est la fréquence d'apparition de deux boules de même couleur ?
- Les deux boules sont de même couleur est $A = \{(R,R),(V,V),(B,B)\}$. La fréquence d'apparition est $\frac{3}{9}$.

Probabilité

Acitivité

- La fréquence d'apparition de chaque couple de l'univers est $\frac{1}{9}$.
- Quelle est la fréquence d'apparition de deux boules de même couleur ?
- Les deux boules sont de même couleur est $A = \{(R,R),(V,V),(B,B)\}$. La fréquence d'apparition est $\frac{3}{9}$.

Probabilité

Définition

On appelle probabilité sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \mathbb{P}(A) \end{aligned}$$

telle que

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- pour tout sous-ensemble $\{A_1, \ldots, A_n, \ldots\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ deux à deux disjoints, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n).$$

Probabilité

Propriétés

1. $$A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

2. $$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

3. si $A \cap B = \emptyset$ alors
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

4. $$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$$

Probabilité

Exercice

On lance un dé truqué numéroté de 1 6 tel que $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = \frac{1}{7}$ et $P_6 = \frac{2}{7}$ où P_i est la probabilit d'apparition du numéro i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Soit A l'événement "obtenir un nombre au moins égale à 4" et B="obtenir un multiple de 2 "

1. Calculer la probabilité des événements A et B.
2. Déterminer les ensembles $A \cap B$ et $A \cup B$ puis calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$
3. Comparer $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$
4. Calculer la probabilité de l'événement C= "obtenir un nombre impair "
5. Calculer $\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$

Probabilité

Corrigé Exercice

1. Nous avons $A = \{4,5,6\} = \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}$. Les événements $\{4\}$, $\{5\}$ et $\{6\}$ tant deux deux disjoints, nous obtenons

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = P_4 + P_5 + P_6 = \frac{4}{7}$$

De même, nous avons $B = \{2,4,6\}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$.

2. $A \cap B = \{4,6\}$ et $A \cup B = \{2,4,5,6\}$ et

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{7} \qquad \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{5}{7}.$$

3. $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cup B)$

Probabilité

Exercice
Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0.45$; $\mathbb{P}(B) = 0.60$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.80$ calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(\bar{A})$

Corrigé Exercice

1. Nous avons

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

   Par suite

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = 0.25.$$

2. $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 0.55$

Probabilité

Remarque

Une expérience se déroule dans les conditions équiprobables si tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser. Dans ce cas, nous avons pour tout événement A,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{card(\Omega)} \sum_{\omega \in A} 1$$

$$= \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} \equiv \text{Probabilité uniforme.}$$

Probabilité

Exercice

Dans un jeu de 32 cartes il y'a 4 As, on tire au hasard 4 cartes de ce jeu.

1. Calculer la probabilité d'obtenir 2 As.
2. Quelle est la probabilité de n'avoir aucun As ?
3. Quelle est la probabilité de tirer au moins un As ?

Probabilité

Corrigé Exercice

L'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de 4 cartes parmi 32 :

$$card(\Omega) = C_{32}^{4}.$$

- Soit l'événement $A =$"obtenir 2 As dans le tirage". Nous avons : C_4^2 possibilités de tirer 2 As parmi 4 et C_{28}^2 possibilités de tirer les 2 cartes restantes parmi 28. D'après le principe multiplicatif, le nombre de possibilités d'obtenir 2 As dans le tirage est $card(A) = C_4^2 \times C_{28}^2$. Par suite La probabilité d'obtenir 2 As est donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{C_4^2 \times C_{28}^2}{C_{32}^4}.$$

Probabilité

- Soit l'événement $B =$"n'avoir aucun As". Nous avons C_{28}^4 possibilités d'obtenir un tirage sans aucun As, soit $card(B) = C_{28}^4$. La probabiliét de n'avoir aucun As est donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{C_{28}^4}{C_{32}^4}.$$

- Soit l'événement $C =$"avoir au moins un As". L'événement contraire de C est B. Ainsi, nous obtenons

$$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(B) = 1 - \frac{C_{28}^4}{C_{32}^4}.$$

Probabilité

Corrigé Exercice

- (Autre méthode) L'événement $C = \cup_{i=1}^{4} C_i$ où l'événement $C_i =$"avoir exactement i As avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Nous avons C_4^i possibilités de tirer i As parmi 4 et C_{28}^{4-i} possibilités de tirer les $4 - i$ cartes restantes parmi 28. D'après le principe multiplicatif, le nombre de possibilités d'obtenir exactement i As dans le tirage est

$$card(C_i) = C_4^i \times C_{28}^{4-i}.$$

Probabilité

Corrigé Exercice(suite)

De plus C_1, C_2, C_3 et C_4 sont deux deux incompatibles. Ce qui implique que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}(C_2) + \mathbb{P}(C_3) + \mathbb{P}(C_4) \\ &= \frac{C_4^1 \times C_{28}^3 + C_4^2 \times C_{28}^2 + C_4^3 \times C_{28}^1 + C_4^4}{C_{32}^4}\end{aligned}$$

Modélisation d'une expérience aléatoire

Lors de la modélisation d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, on est amené à choisir :

1. un univers Ω
2. une famille de parties de Ω. Dans le cas où l'univers Ω est fini, on considère $\mathcal{P}(\Omega)$
3. une probabilité $\mathbb{P}$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

Probabilité conditionnelle

Activité

Dans une classe de Terminale D de 36 élèves, 23 ont 18 ans, 29 sont des filles et 17 filles ont 18 ans. On choisit au hasard un élève de cette classe.

1. Calculer la probabilité des évènements suivants : A="l'élève a 18 ans ", B ="l'élève est une fille", C=" l'élève est une fille de 18 ans"
2. Si l'élève est une fille, quelle est la probabilité pour qu'elle ait 18 ans ?
3. Comparer le résultat de la question 2 et $\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

Probabilité conditionnelle

Corrigé Activité(Première méthode) :

	18 ans	Autres	Total
Filles	17	12	29
Garons	6	1	7
Total	23	13	36

- Nous obtenons

$$\mathbb{P}(A) = \frac{23}{36},\ \mathbb{P}(B) = \frac{29}{36},\ \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{17}{36}.$$

- D'après le tableau, c'est parmi les 29 filles qu'on cherche celles qui ont 18 ans :

$$\mathbb{P}(C) = \frac{17}{29}$$

Probabilité conditionnelle

Corrigé Activité(Deuxième méthode)

- Nous obtenons

$$\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{17}{36}}{\frac{29}{36}} = \frac{17}{29}.$$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Troisième méthode(arbres de choix) : La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est 1. La probabilité de l'événement correspond à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet. En dehors des branches du premier niveau, les probabilités indiquées sont des probabilités conditionnelles .

Probabilité conditionnelle

Théorème

Soit une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ d'univers Ω, $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω et B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B : \mathcal{P} &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{aligned}$$

est une probabilité sur Ω. $\mathbb{P}_B(A)$ se lit probabilité de A sachant B

Définition

L'application $\mathbb{P}_B$ ainsi définie s'appelle "probabilité conditionnelle sachant B". La quantité $\mathbb{P}_B(A)$ est parfois notée $\mathbb{P}(A|B)$.

Probabilité conditionnelle

Exercice

Une urne contient trois boules rouges et deux boules blanches. On tire successivement avec remise deux boules de l'urne en notant leur couleur. Calculer la probabilité d'avoir deux boules de même couleur sachant que la première boule est rouge.

Probabilité conditionnelle

Corrigé Exercice

Le cardinal de l'univers est le nombre d'arrangements avec répétition d'un ensemble 2 éléments dans un ensemble 5 éléments, soit $card(\Omega) = 5^2$.

Soit A l'événement "avoir deux boules de même couleur " ; $A = A_1 \cup A_2$ où A_1"avoir deux boules rouges" et A_2"avoir deux boules blanches ; $card(A_1)$ est le nombre d'arrangements avec réptitions d'un ensemble 2 éléments dans un ensemble 3 éléments soit $card(A_1) = 3^2$; $card(A_2)$ est le nombre d'arrangements avec répétitions d'un ensemble 2 éléments dans un ensemble à 2 éléments soit $card(A_2) = 2^2$; Par suite

$$card(A) = 3^2 + 2^2.$$

Probabilité conditionnelle

Soit B l'événement "la première boule tiré est rouge" ; nous avons 3^1 possibilits de tirer une boule rouge au premier tirage et 5^1 possibilits de tirer une boule au second tirage, soit

$$card(B) = 3^1 \times 5^1.$$

$A \cap B$="les deux boules tires sont rouges" ; $card(A \cap B) = 3^2$.
Nous obtenons

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3^2}{5^2}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{3^1 \times 5^1}{5^2}.$$

Nous déduisons que

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{3^2}{3^1 \times 5^1}.$$

Probabilité conditionnelle

Définition (Système complet d'événement)
On dit qu'une famille $(B_k)_{1\leq k\leq n}$ est un système complet d'évènements lorsque :

1. $\forall\ (i,j) \in \lfloor 1;n\rfloor^2,\ (i \neq j)\ B_i \cap B_j = \emptyset$ (On dit alors que les $(B_k)_{1\leq n}$, sont deux a deux disjoints ou incompatibles)
2. $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \Omega$.

Autrement dit les $B_k,\ k = 1, \cdots, n$, constituent une partition de Ω.
Exemple Soit A une partie non trivial de Ω. Alors la paire $\{A,\ \bar{A}\}$ est un système complet d"événement.

Probabilité conditionnelle

Théorème (Probabilité totale)
Soit $(\Omega, \mathcal{P}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(B_k)_{1\leq n}$ un système complet d"événement. Alors pour tout événement A, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)$$

Corollaire (Formule de Bayes)
Soit $(\Omega, \mathcal{P}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(B_k)_{1\leq n}$ un système complet d"événement. Alors pour tout événement A, on a :$\forall\, j \in \lfloor 1; n \rfloor$,

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}.$$

Indépendance

Définition

Deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants lorsque la réalisation (ou non) de l'un n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation de l'autre :
$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ ou $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

Théorème

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Independance

Exercice

On lance une pièce de monnaie non truqué deux fois de suite et on note le couple de côtés qui apparaît.

1. Les événements : A= "face apparaît au premier lancer " et B="pile apparaît au deuxième lancer" sont-ils indpendants ?
2. Les événements : C="le même côté apparaît deux fois" et D=" le nombre d'apparition de " face" est différent de deux " sont-ils indépendants ?

Independance

Corrigé Exercice

L'univers est

$$\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,F),(F,P)\}$$

- $A = \{(F,F),(F,P)\}$ $B = \{(P,P),(F,P)\}$ $A \cap B = \{(F,P)\}$.
  Nous avons

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} \quad \mathbb{P}(A) = \frac{2}{4} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{2}{4}.$$

  On note que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. On déduit que A et B sont indépendants.

Indépendance

- $C = \{(F,F),(P,P)\}$ $D = \{(P,P),(F,P),(P,F)\}$ $C \cap D = \{(P,P)\}$. Nous avons

$$\mathbb{P}(C \cap D) = \frac{1}{4} \quad \mathbb{P}(C) = \frac{2}{4} \quad \mathbb{P}(D) = \frac{3}{4}.$$

On note que $\mathbb{P}(C \cap D) \neq \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$. On déduit que C et D ne sont pas indépendants.

Plan de la présentation

Généralités

On fait une expérience aléatoire qui est traduite par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Maintenant on s'intéresse à certaines conséquences de cette expérience.

Définitions-Propriétés-Remarques

Définition

Soit Ω l'univers fini ou infini dénombrable d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ et E un ensemble. On considère l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On appelle variable aléatoire toute application X définie sur Ω à valeurs dans E.

Remarque

1. (i) Si $E = \mathbb{R}$, X est une variable aléatoire réelle
2. (ii) Soit X une variable aléatoire réelle. Si $X(\Omega)$ est un sous-ensemble fini ou infini dénombrable de $\mathbb{R}$, alors la v.a.r X est dite discrète. Sinon, elle est dite continue.

Définitions-Propriétés-Remarques

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ valeurs dans E. On appelle loi de probabilité de X, la probabilité $\mathbb{P}_X$ définie sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$ par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \quad \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A).$$

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On appelle fonction de répartition de la v.a.r X, la fonction F définie par :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longrightarrow F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x[). \end{aligned}$$

Définitions-Propriétés-Remarques

Propriété

1. F est une fonction non décroissante
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$
3. F est continue à droite et limité à gauche.

Définition Soit X une variable aléatoire réelle. Supposons que la fonction de répartition F soit continue et strictement croissante. Pour $0 \leq \alpha \leq 1$; on note x_α l'unique nombre réel vérifiant

$$F(x_\alpha) = \mathbb{P}(X < x_\alpha) = \alpha.$$

On dit x_α est le quantile d'ordre α.

Définitions-Propriétés-Remarques

Remarque

Pour connaître la loi d'une variable aléatoire discrète X, il faut connaître l'ensemble de ses valeurs possibles, et la probabilité avec laquelle elle réalise chaque valeur i.e

$$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \subset \mathbb{R} \text{ et } P(X = x_i), \forall i = 1, \cdots, n, \cdots.$$

Définitions-Propriétés-Remarques

Définition

Soit X v.a.r discrète. Pour toute fonction h, on définit l'espérance de $h(X)$ par

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{i=1}^{n} h(x_i)P(X = x_i).$$

En particulier

- si $h(x) = x^p, \quad p \geq 1$ alors on parle de moment d'ordre p de la v.a. X. Le moment d'ordre 1 est appelé l'espérance de X.
- si $h(x) = |x - \mathbb{E}(X)|^p, \quad p \geq 1$ alors on parle de moment centré d'ordre p de la v.a. X. Le moment centré d'ordre 2 est appelé la variance de X.

Définitions-Propriétés-Remarques

Définition

- X une variable aléatoire continue est absolument continue s'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, continue positive, vérifiant $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$, telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

- Dans ce cas, la fonction f est appelée la fonction densité de probabilité de la variable aléatoire X.

Définitions-Propriétés-Remarques

Remarque

La loi d'une variable aléatoire abolument continue est complètement détermine via sa fonction de répartition, ou via sa fonction densité de probabilité

Définitions-Propriétés-Remarques

Définition

Si X et une v.a absolument continue, et pour toute fonction continue h, on définit l'espérance de $h(X)$ par

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx.$$

En particulier

- si $h(x) = x^p, \quad p \geq 1$ alors on parle de moment d'ordre p de la v.a. X. Le moment d'ordre 1 est appelé l'espérance de X.
- si $h(x) = |x - \mathbb{E}(X)|^p, \quad p \geq 1$ alors on parle de moment centré d'ordre p de la v.a. X. Le moment centré d'ordre 2 est appelé la variance de X.

Loi uniforme discrète

Une variable aléatoire discrète X est dite uniforme si $X(\Omega) = \{0; 1; 2; \cdots; n\}$. On note

$$p = \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}, \ \forall k \in \{0; 1; 2; \cdots; n\}$$

Exemple

Tire une lettre de l'alphabet français parmi les 26 lettres si elle ont indiscernable au toucher.

Loi de Bernoulli

C'est la plus simple des lois de probabilité. Une variable aléatoire X est dite de Bernoulli si $X(\Omega) = \{0;1\}$. On note

$$p = \mathbb{P}(X = 1); q = 1 - p = \mathbb{P}(X = 0)$$

Exemple

Le jeu de pile ou face (non truqué, $p = 0,5$, truqué, $p \neq 0,5$).

Loi Binomiale

Une variable aléatoire S suit une loi binomiale de paraemètre (n,p) si $S(\Omega) = \{0;1;2;\ldots,n\}$, et pour $0 \leq k \leq n$, on a

$$\mathbb{P}(S=k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k};$$

où $p \in [0,1],\ q = 1-p$.

- L'espérance d'une variable de Binomiale est $\mathbb{E}(S) = np$.
- La variance est $V(S) = npq = np(1-p)$ et l'écart type est $\sigma(S) = \sqrt{npq}$.

Loi Binomiale

Remarque

C'est la loi d'une somme de n variables X_i de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

Exemple

On joue n fois à pile ou face avec une pièce non truquée. On suppose les lancés indépendants. Soit S la variable "nombre de pile obtenus". Si on note X_i la variable définie par $X_i = 1$ si "pile" au i-ème lancé, on a

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Les variables X_i sont de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$, indépendantes, et S suit une loi Binomiale de paramètre $(n, p = 1/2)$.

Loi géométrique

Une variable aléatoire S suit une loi géométrique de paramètre ($0 \leq p \leq 1$) si $S(\Omega) = \{1; 2; \ldots; n; \cdots + \infty\}$, et pour $k \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(S = k) = (1-p)^{k-1}p.$$

- L'espérance d'une variable géométrique est

$$\mathbb{E}(S) = \frac{1}{p}$$

- La variance est

$$V(S) = \frac{1-p}{p^2}$$

.

Loi géométrique

Remarque

Si on réalise un nombre infini d'épreuves de bernoulli de paramètre p de manière indépendante, le rang du premier succès est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p.

Loi hypergéométrique

Une variable aléatoire S suit une loi hypergéométrique si $S(\Omega) = \{0; 1; 2; \ldots; n\}$, et pour $0 \leq k \leq K$, on a

$$\mathbb{P}(S = k) = \frac{C_K^k \, C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n},$$

où $0 \leq K \leq N$ sont des entiers, avec $n \leq N$.

- L'espérance d'une variable hypergéométrique est

$$\mathbb{E}(S) = n\frac{K}{N}$$

- La variance est $V(S) = n\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\left(\frac{N-K}{N}\right)$.

Loi hypergéométrique

Exemple

Une urne contient N boules avec K blanches et $N-K$ noires. On tire $n \leq N$ boules sans remise. Alors la variable $S =$ "nombre de boules blanches" suit une loi hypergéométrique.

Loi de Poisson

Une variable X suit une loi de Poisson de paramètre μ si $X(\Omega) = \{0; 1; 2; \dots; n; \dots; +\infty\}$ et on a pour $k = \{0; 1; \dots; +\infty\}$

$$P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!}\, e^{-\mu};$$

où $\mu > 0$ est le paramètre de la loi.

L'espérance d'une variable de Poisson est $\mathbb{E}(X) = \mu$.

La variance est aussi $V(X) = \mu$.

Loi de Poisson

Exemple

Le nombre de pannes d'un systême mécanique durant une période donnée : μ est le taux moyen de pannes $\times$ la durée de la période.

Loi uniforme

Une v.a. X continue suit une loi uniforme sur $[a,\ b]$ si sa fonction de répartition a pour densité f où

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \leq u \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- L'espérance d'une variable uniforme est $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.
- La variance est $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.
- L'écart type est $\sigma(X) = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Loi Normale

Une v.a. X continue suit une loi Normal de paramètre (μ, σ^2) si sa fonction densité f est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}), \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

- L'espérance d'une variable de Gauss de paramètre (μ, σ^2) est $\mathbb{E}(X) = \mu$.
- La variance est $V(X) = \sigma^2$.
- L'écart type est $\sigma(X) = \sigma$

Loi Normale

Remarque

La loi Normale $(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ est appelée la loi Normale centrée réduite ou loi de Gauss. Elle admet une table.

Théorème

Si X suit la loi Normale (μ, σ^2) alors $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi de Gauss.