Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\sum_{n\geq 0} n^3 x^n$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n^2-1}$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{nx^n}{(2n+1)!}$.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+4n-1}{n+2} \frac{x^n}{n!}$.

EXERCICE 6 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{4n}}{4n+1}$.

EXERCICE 7 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{3n+2}$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Le rayon de convergence est 1. Pour calculer la somme , procéder par dérivation de $\sum x^n$.
Décomposer X^3 sur la base $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
En déduire $S(x) = \dfrac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On a $R = +\infty$. Utiliser $n^3 = n + 3n(n-1) + n(n-1)(n-2)$. En déduire $S(x) = (x + 3x^2 + x^3)\mathrm{e}^x$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On a $R = 1$. Utiliser le DSE de $\ln(1-x)$ et la décomposition de $\dfrac{1}{X^2-1}$.
En déduire $S(x) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{x} - x\Big)\ln(1-x) + \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Le rayon est $R = +\infty$. Considérer $T(x) = xS(x^2)$ et calculer $T'(x)$.
En déduire $S(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{ch}\,\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{sh}\,\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Pour obtenir $S(x)$ sur $\mathbb{R}^{-*}$, poser $U(x) = xS(-x^2)$ et calculer $U'(x)$.
On trouve $S(x) = \dfrac{1}{2}\cos\sqrt{-x} - \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}\sin\sqrt{-x}$ sur $\mathbb{R}^{-*}$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On a $R = +\infty$. Poser $T(x) = x^2 S(x)$ et calculer $T'(x)$.
Chercher alors $T(x)$ sous la forme $T(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\mathrm{e}^x - d$.
En déduire $S(x) = \Big(x + 2 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{5}{x^2}\Big)\mathrm{e}^x - \dfrac{5}{x^2}$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Le rayon vaut 1. Poser $T(x) = xS(x)$. Trouver $T'(x)$ puis $T(x)$.
On trouve finalement $S(x) = \dfrac{1}{4x}\ln\dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2x}\arctan x$.

Indication pour l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

On a $R = 1$. Poser $T(x) = x^2 S(x^3)$. Décomposer $T'(x)$ en éléments simples.
On trouve $S(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\Big(-\dfrac{1}{2}\ln(1-\sqrt[3]{x}) + \dfrac{1}{6}\ln(1-x) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\dfrac{2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{3}}\Big) + \dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}\Big)$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Le rayon de convergence est 1 car le coefficient $a_n = n^3$ vérifie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Pour calculer la somme sur $]-1,1[$, on utilise des séries obtenues par dérivation de $\sum_{n\geq 0} x^n$.

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$
$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(n-2)x^{n-3} = \frac{6}{(1-x)^4}$$

On décompose le polynôme X^3 sur la base $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

On pose $X^3 = a + bX + cX(X-1) + dX(X-1)(X-2)$.

On trouve immédiatement $a = 0$ et $d = 1$.

Ensuite les substitutions $X = 1$ et $X = 2$ donnent $\begin{cases} b = 1 \\ 2b + 2c = 8 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$.

On en déduit, pour tout x de $]-1,1[$:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n + 3n(n-1) + n(n-1)(n-2))x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)x^n \\ &= x\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} + 3x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + x^3 \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{6x^2}{(1-x)^3} + \frac{6x^3}{(1-x)^4} = \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Le rayon de convergence est $+\infty$ car le coefficient $a_n = \dfrac{n^3}{n!}$ vérifie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

Comme dans l'exercice précédent, on utilise : $n^3 = n + 3n(n-1) + n(n-1)(n-2)$.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n + 3n(n-1) + n(n-1)(n-2)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} x^n \\ &= x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + 3x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} = (x + 3x^2 + x^3)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Le rayon de convergence est 1 car le coefficient $a_n = \dfrac{1}{n^2-1}$ vérifie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

On sait que $\forall x \in]-1,1[$, $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

D'autre part : $\dfrac{1}{X^2-1} = \dfrac{1}{2(X-1)} - \dfrac{1}{2(X+1)}$.

On en déduit, pour tout x de $]-1,1[$, avec $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{x}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= -\frac{x}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x}\Big(\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x} - x\Big)\ln(1-x) + \frac{1}{2} + \frac{x}{4} \end{aligned}$$

Contraitement aux apparences, la fonction S ne présente pas d'irrégularité en $x = 0$.
En tant que somme d'une série entière elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
D'ailleurs le DL $x = 0$ de $x \mapsto S(x)$ se lit sur les premiers termes de la série entière.
Par exemple : $S(x) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{x} - x\Big)\ln(1-x) + \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^3}{8} + \dfrac{x^4}{15} + \dfrac{x^5}{24} + \mathrm{O}(x^6)$

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Avec $a_n = \dfrac{n}{(2n+1)!}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ donc $R = +\infty$.

Sur tout $\mathbb{R}$, on pose $T(x) = xS(x^2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Par dérivation on trouve, $\forall x \in \mathbb{R}, T'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{2n}}{(2n)!} = \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{x}{2}\operatorname{sh} x$.

Par primitivation, et sachant que $T(0) = 0$, on trouve $\forall x \in \mathbb{R}, T(x) = \dfrac{x}{2}\operatorname{ch} x - \dfrac{1}{2}\operatorname{sh} x$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^*, S(x^2) = \dfrac{1}{2}\operatorname{ch} x - \dfrac{1}{2x}\operatorname{sh} x$, puis $\forall x > 0, S(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{ch}\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x}$.

Pour obtenir $S(x)$ sur $\mathbb{R}^{-*}$, on pose : $\forall x \in \mathbb{R}, U(x) = xS(-x^2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

On trouve $U'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\frac{x}{2}\sin x$.

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, U(x) = \dfrac{x}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x$.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $S(-x^2) = \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{2x}\sin x$.

On en déduit, pour tout $x < 0$: $S(x) = \dfrac{1}{2}\cos\sqrt{-x} - \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}\sin\sqrt{-x}$.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Si on note $a_n = \dfrac{n^2+4n-1}{(n+2)n!}$, alors $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n-1)!}$.

On en déduit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et donc $R = +\infty$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, posons $T(x) = x^2 S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n+2} \frac{x^{n+2}}{n!}$.

Alors, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
T'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+4n-1)\frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n(n-1)+5n-1)\frac{x^{n+1}}{n!}\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\frac{x^{n+1}}{n!} + 5\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{x^{n+1}}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n-2)!} + 5\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}\\
&= x^3\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + 5x^2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n}}{n!}\\
&= (x^3+5x^2-x)\mathrm{e}^x.
\end{aligned}$$

On cherche alors $T(x)$ sous la forme $T(x) = (ax^3+bx^2+cx+d)\mathrm{e}^x - d$ (notons que $T(0) = 0$.)

On trouve $T'(x) = (ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+c+d)\mathrm{e}^x$.

On en déduit $\begin{cases} a = 1 \\ 3a+b = 5 \\ 2b+c = -1 \\ c+d = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -5 \\ d = 5 \end{cases}$

Ainsi, pour tout $x \neq 0$:

$$S(x) = \frac{T(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}((x^3+2x^2-5x+5)\mathrm{e}^x - 5) = \Big(x+2-\frac{5}{x}+\frac{5}{x^2}\Big)\mathrm{e}^x - \frac{5}{x^2}$$

D'autre part, $S(0) = -\dfrac{1}{2}$ comme on le voit sur la définition initiale de S.

Rappelons que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Le développement limité de S à tout ordre en 0 s'obtient en considérant les sommes partielles de la série entière définissant S.

On trouve par exemple : $S(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{3}x + \dfrac{11}{8}x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + \mathrm{O}(x^4)$

Corrigé de l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Considérons $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{4n+1}$. Avec $a_n = \frac{1}{4n+1}$, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$: son rayon vaut 1.

Ainsi $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{4n}}{4n+1}$ CV si $|x| < 1$ et DV si $|x| > 1$. Le rayon R de $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{4n}}{4n+1}$ vaut donc 1.

Sur $]-1,1[$, on pose $T(x) = xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

Par dérivation on trouve, $\forall x \in]-1,1[$, $T'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2}\Big)$.

On en déduit, compte tenu de $T(0) = 0$, : $\forall x \in]-1,1[, T(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\arctan x$.

Enfin pour tout $x \neq 0$ de $]-1,1[$: $S(x) = \frac{1}{4x}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2x}\arctan x$.

La valeur à l'origine est $S(0) = 1$.

Rappelons que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. Les développements limités de S en 0 s'obtiennent en considérant les différentes sommes partielles de la série.

Par exemple : $S(x) = 1 + \frac{x^4}{5} + \frac{x^8}{9} + \frac{x^{12}}{13} + \mathrm{O}(x^{15})$.

Corrigé de l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

Avec $a_n = \frac{1}{3n+2}$, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ donc $R = 1$. Posons $T(x) = x^2S(x^3) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$.

Par dérivation : $\forall x \in]-1,1[, T'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} = x\sum_{n=0}^{+\infty}(x^3)^n = \frac{x}{1-x^3} = \frac{x}{(1-x)(1+x+x^2)}$.

On décompose cette fraction rationnelle en éléments simples :

$$\begin{aligned}
T'(x) &= \frac{1}{3(1-x)} + \frac{x-1}{3(x^2+x+1)} = \frac{1}{3(1-x)} + \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)} - \frac{1}{2(x^2+x+1)}\\
&= \frac{1}{3(1-x)} + \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}.
\end{aligned}$$

Comme $T(0) = 0$, on trouve pour tout x de $]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
T(x) &= -\frac{1}{3}\ln(1-x) + \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\\
&= -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{6}\ln(1-x^3) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Il suffit alors de revenir à l'égalité $S(x^3) = \frac{T(x)}{x^2}$.

On en déduit, pour tout x de $]-1,1[$, avec $x \neq 0$:

$$S(x) = x^{-2/3}T(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\Big(-\frac{1}{2}\ln(1-\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{6}\ln(1-x) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{3}}\Big) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\Big)$$