Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Montrer que si la suite de fonctions (f_n) est uniformément convergente, il en est de même de la suite de fonctions $(g_n = \sin f_n)$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et telle que $f(1) = 0$.

On définit les applications f_n sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n f(x)$.

Étudier la convergence de la suite (f_n).

Exercice 3 [Indication] [Correction]

On définit une suite de polynômes (P_n) par : $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = P_n + \dfrac{1}{2}(x - P_n^2)$.

1. Montrer que $P_{n+1} - \sqrt{x} = (P_n - \sqrt{x})\left(1 - \dfrac{P_n + \sqrt{x}}{2}\right)$
2. Exprimer de même $P_{n+1} + \sqrt{x}$ en fonction de $P_n + \sqrt{x}$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$ $\sqrt{x} \le P_{n+1}(x) \le P_n(x) \le 1$.
4. Montrer que la suite (P_n) est simplement convergente, sur $[0,1]$ vers $f : x \to \sqrt{x}$.
5. Préciser la monotonie des applications $x \to P_n(x) - \sqrt{x}$ et $x \to P_n(x) + \sqrt{x}$.
6. Montrer que la convergence de la suite (P_n) est uniforme.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit $(P_n)_{n\ge 0}$ une suite de polynômes, tous de degré inférieur ou égal à m.

On suppose que la suite $(P_n)_{n\ge 0}$ est simplement convergente sur un segment $[a,b]$, avec $a < b$, vers une application f. Montrer que f est aussi un polynôme de degré inférieur ou égal à m, et que la convergence de la suite $(P_n)_{n\ge 0}$ est uniforme.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Justifier et utiliser l'inégalité : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Se donner $\varepsilon > 0$, et $\alpha \in]0, 1[$ tel que $x \in [1 - \alpha, 1] \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$.
Montrer que la suite (f_n) est uniformément convergente vers la fonction nulle.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

- On trouve $P_{n+1} + \sqrt{x} = P_n + \sqrt{x}) \left(1 - \dfrac{P_n - \sqrt{x}}{2}\right)$.
- Pour la question 3, procéder par récurrence.
  Si c'est vrai au rang n, vérifier que $P_{n+1}(x) \leq P_n(x) \leq 1$ et $\dfrac{P_n(x) + \sqrt{x}}{2} \leq 1$.
- Utiliser un théorème de convergence des suites monotones.
  Passer à la limite dans la relation de récurrence définissant les P_n.
- Procéder par récurrence.
  Montrer que $x \rightarrow \varphi_n(x) = P_n(x) + \sqrt{x}$ est croissante.
  De même, montrer que $x \rightarrow \psi_n(x) = P_n(x) - \sqrt{x}$ est décroissante.
- Utiliser l'encadrement $0 \leq P_n(x) - \sqrt{x} \leq P_n(0)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

L'idée est d'utiliser l'interpolation de Lagrange pour $m + 1$ points distincts de $[a, b]$.

Se donner $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ distincts dans $[a, b]$.

Noter $L_0, L_1, \ldots, L_m$ les polynômes interpolateurs associés aux λ_k.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} P_n(\lambda_k) L_k(x)$.

Faire tendre n vers $+\infty$, à x fixé, et constater que $f = \lim P_n$ est un polynôme de degré $\leq m$.

Justifier l'existence de $M \in \mathbb{R}^+$, tel que : $\forall k \in \{0, \ldots, m\}, \forall x \in [a, b], |L_k(x)| \leq M$.

En déduire que sur $[a, b]$ on a $|f(x) - P_n(x)| \leq M \displaystyle\sum_{k=0}^{m} |f(\lambda_k) - P_n(\lambda_k)|$.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Soit f la limite uniforme de la suite (f_n). On pose $g = \sin f$.
Pour tous réels x et y, on a $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ (théorème des accroissements finis.)
On en déduit $\|g_n - g\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty$.
Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} \|g_n - g\|_\infty = 0$: la suite (g_n) est uniformément convergente vers la fonction g.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On se donne un réel ε strictement positif.
f est continue sur $[0,1]$ donc bornée : soit $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
Il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $x \in [1-\alpha, 1] \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$ (f continue en 0 et $f(0) = 0$.)
On en déduit que pour tout entier n, et tout x de $[1-\alpha, 1]$, $|f_n(x)| \leq x^n\varepsilon \leq \varepsilon$.
D'autre part, pour tout entier n, et tout x de $[0, 1-\alpha]$, on a :

$$|f_n(x)| \leq (1-\alpha)^n\,|f(x)| \leq (1-\alpha)^n M$$

Puisque $0 \leq 1-\alpha < 1$, il existe un entier n_0 tel que : $n \geq n_0 \Rightarrow (1-\alpha)^n M \leq \varepsilon$.
On en déduit que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout x de $[0,1]$, $|f(x)| \leq \varepsilon$.
Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \leq \varepsilon$.
La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est donc uniformément convergente, sur $[0,1]$, vers la fonction nulle.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. Le fait que les (P_n) sont des polynômes est évident par récurrence.
   On a effectivement, en développant le second membre de l'égalité à démontrer :
   $(P_n - \sqrt{x})\left(1 - \dfrac{P_n + \sqrt{x}}{2}\right) = P_n - \sqrt{x} - \dfrac{1}{2}(P_n^2 - x) = P_n + \dfrac{1}{2}(x - P_n^2) - \sqrt{x} = P_{n+1} - \sqrt{x}$.
2. De la même manière :
   $P_{n+1} + \sqrt{x} = P_n + \dfrac{1}{2}(x - P_n^2) + \sqrt{x} = P_n + \sqrt{x} - \dfrac{1}{2}(P_n^2 - x) = (P_n + \sqrt{x})\left(1 - \dfrac{P_n - \sqrt{x}}{2}\right)$.
3. La double inégalité $\sqrt{x} \leq P_n(x) \leq 1$ est évidente si $n = 0$.
   Soit n un entier naturel fixé. Supposons $\sqrt{x} \leq P_n(x) \leq 1$.
   La définition de P_{n+1} donne d'abord : $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \dfrac{1}{2}(x - P_n^2(x)) \leq P_n(x) \leq 1$.
   La double inégalité $\sqrt{x} \leq P_n(x) \leq 1$ donne aussi $\dfrac{P_n(x) + \sqrt{x}}{2} \leq 1$.
   La question 1 donne alors $P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = (P_n(x) - \sqrt{x})\left(1 - \dfrac{P_n(x) + \sqrt{x}}{2}\right) \geq 0$.
   Ainsi le résultat $\sqrt{x} \leq P_{n+1}(x) \leq P_n(x) \leq 1$ est vrai pour tout entier n, par récurrence.

4. Pour tout x de $[0,1]$, la suite $x \to P_n(x)$ est décroissante, et elle est minorée par $\sqrt{x}$.
   Cette suite est convergente. Notons $f(x)$ sa limite.
   On passe à la limite dans $P_{n+1} = P_n + \dfrac{1}{2}(x - P_n^2)$ et on trouve $f(x) = f(x) + \dfrac{1}{2}(x - f^2(x))$.
   Ainsi $f^2(x) = x$. Or les $P_n(x)$ et donc $f(x)$ sont positifs. On en déduit $f(x) = \sqrt{x}$.
   Conclusion : la suite (P_n) est simplement convergente, sur $[0,1]$, vers $f : x \to \sqrt{x}$.
5. Montrons que $x \to \varphi_n(x) = P_n(x) + \sqrt{x}$ est croissante et que $x \to \psi_n(x) = P_n(x) - \sqrt{x}$ est décroissante.
   Notons tout d'abord que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ 0 \leq \varphi_n(x) \leq 2$ et $0 \leq \psi_n(x) \leq 1$.
   La propriété à démontrer est vraie si $n = 0$. Supposons qu'elle soit établie au rang n.
   La question 1 donne : $\psi_{n+1} = (1 - \dfrac{1}{2}\varphi_n)\psi_n$. L'application ψ_{n+1} est donc le produit de deux fonctions positives et décroissantes : elle est donc elle-même décroissante.
   La question 2 donne : $\varphi_{n+1} = (1 - \dfrac{1}{2}\psi_n)\varphi_n$. L'application φ_{n+1} est donc le produit de deux fonctions positives et croissantes : elle est donc elle-même croissante.
   On a prouvé par récurrence que les φ_n sont croissantes et que les ψ_n sont décroissantes.
6. Pour tout x de $[0,1]$ et tout n de $\mathbb{N}$: $0 \leq P_n(x) - \sqrt{x} \leq P_n(0)$ (décroisssance de ψ_n.)
   Or $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(0) = 0$ (conséquence de la convergence simple).
   On en déduit $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|P_n(x) - \sqrt{x}\right| = 0$: la suite (P_n) est CVU sur $[0,1]$ vers $x \to \sqrt{x}$.

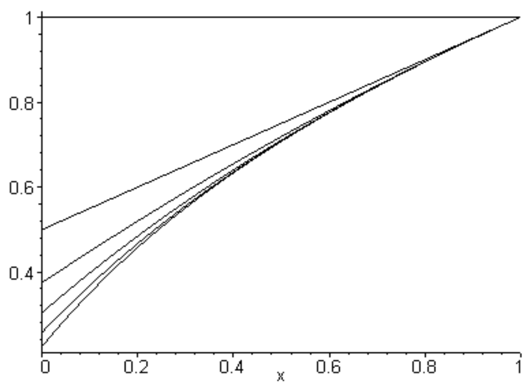
Remarques :

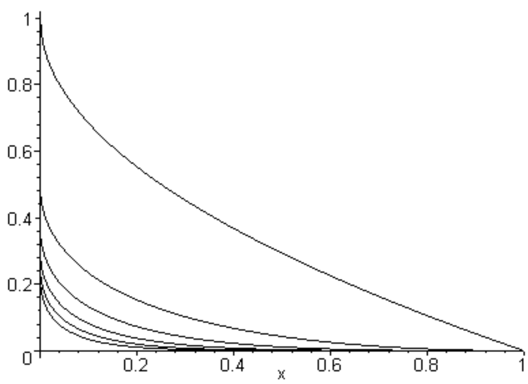
– L'exemple précédent illustre le théorème de Weierstrass (une application continue sur un segment et approchée uniformément sur ce segment par une suite de polynômes).

– On voit ici une suite de fonctions indéfiniment dérivables qui converge uniformément sur un intervalle vers une application qui n'est pas même dérivable une fois sur cet intervalle.

– On a $\deg P_1 = 1$, et la relation entre P_n et P_{n+1} donne : $\deg P_{n+1} = 2\deg P_n$ si $n \geq 1$.
  On a donc $\deg P_n = 2^{n-1}$ si $n \geq 1$. Par exemple, P_{10} est de degré 512...

– Voici les courbes $y = P_n(x)$ (à gauche) et $y = P_n(x) - \sqrt{x}$ (à droite), pour $0 \leq n \leq 5$.
  Pour tout n, la courbe "au rang $n+1$" est située en dessous de la courbe au rang n.





Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On se donne une famille $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ de $m+1$ points distincts de $[a,b]$.

Soit $L_0, L_1, \ldots, L_m$ la famille des polynômes interpolateurs associés aux λ_k.

Pour tout entier k de $\{0,\ldots,m\}$, L_k est l'unique polynôme de degré $\leq m$ tel que $L_k(\lambda_k)=1$ et $L_k(\lambda_j)=0$ si $j\neq k$.

$L_0, L_1, \ldots, L_m$ forment une base de $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$.

Plus précisément, tout polynôme de degré $\leq m$ s'écrit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{m} P(\lambda_k)L_k$.

En particulier : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x_in[a,b],\ P_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{m} P_n(\lambda_k)L_k(x)$.

Si $n\to+\infty$ dans cette égalité, à x fixé, on trouve : $\forall x\in[a,b], f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{m} f(\lambda_k)L_k(x)$

Ainsi la limite f de la suite (P_n) est elle-même un polynôme de degré $\leq m$.

Il reste à montrer que la convergence de la suite (P_n) vers f est uniforme sur $[a,b]$.

Chaque polynôme L_k est une application continue donc bornée sur $[a,b]$.

Il existe donc un réel positif M tel que : $\forall k\in\{0,\ldots,m\}, \forall x\in[a,b], |L_k(x)|\leq M$.

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in[a,b], |f(x)-P_n(x)|=\left|\sum_{k=0}^{m}(f(\lambda_k)-P_n(\lambda_k))L_k(x)\right|\leq M\sum_{k=0}^{m}|f(\lambda_k)-P_n(\lambda_k)|.$$

Mais la quantité $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}|f(\lambda_k)-P_n(\lambda_k)|$ tend vers 0 quand $n\to\infty$ (convergence simple.)

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ \sup_{x\in[a,b]}|f(x)-P_n(x)|=0$.

La suite (P_n) est donc uniformément convergente vers f sur $[a,b]$.