ALGEBRES BILINEAIRE

Adolphe CODJIA

Edition 2016

Table des matières

Introduction

L'algèbre linéaire, est issue de la méthode des coordonnées cartésiennes pour répérer des points d'une droite, d'un plan, de l'espace $\mathbb{R}^3$.
Cette méthode a été étendu en dimension $n > 3$, quitte à se passer de l'intuition géométrique immédiate. Le rôle de l'algèbre linéaire est de traiter les problèmes linéaires, c'est-à-dire ceux dont l'ensemble des solutions est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel. Ces problèmes sont particulièrement faciles en dimension finie.
L'algèbre bilinéaire emprunte presque tout à l'algèbre linéaire (c'est pourquoi on y retrouvera les notions d'espace vectoriel, de linéairité, de matrice, de noyau, de rang entre autre) et est une porte naturellement ouverte sur les notions d'orthogonalité, isométries et d'espaces euclidiens entre autres.
De façon précise, on se donne un sous-espace F d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et un vecteur $v \in E$, on cherche le vecteur $u \in F$ qui soit le plus proche possible de $v \in E$.
Un tel problème se résoudrait facilement si l'on avait un produit scalaire sur E, ainsi $u = P(v)$ le projeté orthogonal de v sur F.
Or un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive. Afin d'appréhender tous ces termes intéressons nous intellectuellemnt à l'étude ci-dessous.

Chapitre 1

FORMES BILINEAIRES SYMETRIQUES,FORMES QUADRATIQUES(en dimension finie)

Ceci est une étude des propriétés du produit scalaire usuel
(la bilinéairité, la bilinéarité et la symétrie, la bilinéarité définie positive et la symétrie) jusqu'à sa généralisation.

1.1 Matrice d'une forme bilinéaire

Rappel
Etant donné une base $\beta = (e_1 , e_2 , ..., e_n)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, de dimension n.
Il y a un isomorphisme $\varpi : \; E \longrightarrow M_{n \;,1} \; (\mathbb{K})$ qui à

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i \; \in E$$

associe la matrice colonne $X = Mat\,(x, \beta) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle forme bilinéaire sur E, toute application

$$f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$

$(x,y) \longmapsto f(x,y)$

linéaire par rapport à x et linéaire par rapport à y.

Linéarité par rapport à x se traduit par :

$$\begin{cases} f(x+x',y) &= f(x,y)+f(x',y) \\ f(\lambda x,y) &= \lambda f(x,y) \end{cases} \quad \forall x,x',y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

On note $\mathcal{L}_2(E)$ = l'ensemble des formes bilinéaires.

Soit $\beta = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}_2(E)$,

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x,y) = ?,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i\ ,\ y = \sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j\,,$$

on a : $f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(e_i, e_j)\, x_i\, y_j\,.$$

On pose $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ et $A = (a_{ij}) = Mat(f,\beta)$.

Réprésentation matricielle

Soit $\beta = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E, $f \in \mathcal{L}_2(E)$,

$A = Mat(f,\beta)$.

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i\,, \qquad y = \sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j\,, \qquad X = Mat(x,\beta)\,,$$

$Y = Mat(y,\beta)$; $f(x,y) = ({}^tX)\, AY$

Exercice

$E = \mathbb{R}^2$

$E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = 3x_1\, y_1 + x_1\, y_2 + x_2\, y_1 - x_2\, y_2\,.$

$x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in E$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}_2(E)$.
2. Soit $\beta = (e_1, e_2)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$, calculer $A = Mat(f,\beta)$.

Vérifier la formule $f(x,y) = ({}^tX)\, AY$.

Réponse

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

$$({}^tX)\, AY = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= 3x_1\, y_1 + x_1\, y_2 + x_2\, y_1 - x_2\, y_2 = f(x,y)\,.$$

Proposition

Moyennant une base $\beta = (e_1, e_2, ..., e_n)$ de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,

a) L'application $\mathcal{L}_2(E) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$, $\varphi \longmapsto (\varphi(e_i, e_j))_{1 \le i,\, j \le n}$ est un isomorphisme.

b) On en déduit $\dim \mathcal{L}_2(E) = \dim M_n(\mathbb{K}) = n^2$.

c) On a $(\forall X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{K}),\ ({}^tX)\, AY = 0) \Longleftrightarrow A = 0$.

d) $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sont telles que $({}^tX)\, AY = ({}^tX)\, BY$,
$\forall X, Y \in M_{n\ ,1}\ (\mathbb{K})$, alors $A = B$.

Changement de base

Soit $f \in \mathcal{L}_2(E)$. $\left.\begin{array}{l} \beta = (e_1, e_2, ..., e_n) \\ \beta' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n) \end{array}\right\}$ 2 bases de E.

$A = Mat(f, \beta)$, $\quad A' = Mat(f, \beta')$

Soit $P = P_{\beta\beta'}$ = matrice de passage de β à β'. Alors $A' = ({}^tP)\, AP$

En effet,

soit $x, y \in E$, $\quad X = Mat(x, \beta), X' = Mat(x, \beta'), Y = Mat(y, \beta)$, $Y' = Mat(y, \beta')$. On sait que $X = PX'$, $\quad Y = PY'$, on a :

$f(x, y) = ({}^tX')\, A'Y' = ({}^tX)\, AY = ({}^tX')\, ({}^tP)\, APY'$,

$\forall X', Y' \in M_{n\ ,1}\ (\mathbb{k})$. Donc $A' = ({}^tP)\, AP$.

Proposition

L'espace des formes bilinéaires sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, est isomorphe à l'espace des matrices de type $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Proposition

$\mathcal{L}_2(E) \cong \mathcal{L}(E, E^*)$=l'espace des applications linéaires de E dans E^*(son dual)

Preuve

$\forall f \in \mathcal{L}_2(E)$, on construit $f_* \in \mathcal{L}(E, E^*)$ telle que
$\forall x \in E$, $f_*(x) = f(., x) \in E^*$ qui à $y \in E$ associe $f_*(x)(y) = f(y, x)$.
Inversement $\forall \varphi \in \mathcal{L}(E, E^*)$ on définit $f_\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$ tel que $\forall x, y \in E$, $f_\varphi(x, y) = \varphi(x)(y)$.

Remarque

En dimension finie,

Soit $f \in \mathcal{L}_2(E)$ et soit β une base de E et β^* sa base duale, alors $\mathrm{Mat}(f, \beta) = Mat(f_*, \beta, \beta^*)$.

Si $\forall f \in \mathcal{L}_2(E)$, on construit $f'_* \in \mathcal{L}(E, E^*)$ telle que
$\forall x \in E$, $f'_*(x) = f(x, .) \in E^*$ qui à $y \in E$ associe $f'_*(x)(y) = f(x, y)$.
Alors $({}^tMat(f, \beta)) = Mat(f'_*, \beta, \beta^*)$.

En dimension finie, on a $({}^tf_*) = f'_*$.

1.2 Noyau et Isotropie d'une forme bilinéaire réflèxive

1.2.1 Noyau

Définition

1) Une forme bilinéaire f est dite **réflexive** si
$f(x,y)=0 \Longleftrightarrow f(y,x)=0,\ \forall x,y\in E.$

2) $\ker f=\{x\in E \ / \ f(x,y)=0, \ \forall y\in E\}$
$=\{x\in E \ / \ f(y,x)=0, \ \forall y\in E\}$
$=\ker f_{*}\cong \ker f_{*}'$. Où $\forall\ f\in \mathcal{L}_2(E)$,
$f_{*}':E\longrightarrow E^{*},\ x\longmapsto f_{*}'(x)=f(x,.)$ et
$f_{*}:E\longrightarrow E^{*},\ y\longmapsto f_{*}(y)=f(.,y)$.

Remarques

Soit $f\in\mathcal{L}_2(E)$ et soit β une base de E, $X=Mat(x,\beta)$,
$Y=Mat(y,\beta)$, $\forall x,y\in E$, $A=Mat(f,\beta)$.
i) $X\in\ker f \Longleftrightarrow X\in\ker f_{*} \Longleftrightarrow f_{*}(x)(y)=0,\ \forall y\in E$
$\Longleftrightarrow f(y,x)=({}^{t}Y)AX=0,\ \forall Y\in M_{n\ ,1}\ (\mathbb{K}) \Longleftrightarrow AX=0.$
Donc $\ker f=\{X\in M_{n\ ,1}\ (\Bbbk)\ ;\ AX=0\}=\ker f_{*}=\ker A.$
ii) $X\in\ker f \Longleftrightarrow X\in\ker f_{*}' \Longleftrightarrow f_{*}'(x)(y)=0,\ \forall y\in E$
$\Longleftrightarrow f(x,y)=({}^{t}X)AY=0,\ \forall Y\in M_{n\ ,1}\ (\mathbb{K})$
$\Longleftrightarrow ({}^{t}X)A=0 \Longleftrightarrow ({}^{t}A)X=0.$
Donc $\ker f=\ker f_{*}'=\{X\in M_{n\ ,1}\ (\mathbb{K})\ ;\ ({}^{t}A)X=0\}=\ker({}^{t}A).$
Je rappelle que $\ker f_{*}'\cong\ker f_{*}$.

En résumé

Relativement à une base donnée,
~ le noyau de $f\in\mathcal{L}_2(E)$ s'exprime comme le noyau de la matrice de f relativement à la base en question.
~ En fait $\ker f_{*}$ est différent de $\ker f_{*}'$, en effet cela revient à considérer le noyau d'une matrice et celui de sa transposée.

Définition

i) f est dite :
– **dégénérée** si $\ker f\neq\{0_E\}$.
– **non dégénérée** si $\ker f=\{0_E\}$.
ii) Un vecteur $x\in E$ est dit **isotrope** si $f(x,x)=0$(0 est isotrope).
Sinon il est dit anisotrope(i.e. $f(x,x)\neq 0$).

Définition

i) Une forme bilinéaire f est non dégénérée ssi f_{*} ou f_{*}' est injectif.
Elle est dite dégénérée dans le cas contraire.

ii) On appelle **rang** d'une forme bilinéaire $f \in \mathcal{L}_2(E)$ le rang de f_* ou f'_* .

iii) Une forme bilinéaire f est dite **symétrique** si
$f(x,y) = f(y,x)$, $\forall x, y \in E$.

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaire symétriques.

iv) Une forme bilinéaire f est dite **antisymétrique** si $f(x,y) = -f(y,x)$, $\forall x, y \in E$.

On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaire antisymétriques.

v) Une forme bilinéaire f est dite **alternée** si $f(x,x) = 0$, $\forall x \in E$.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et f une forme bilinéaire sur E. Alors f est non dégénérée si et seulement si le **déterminant** de sa matrice dans une base quelconque est **non nul**.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et f une forme bilinéaire sur E. Alors le rang de f est **égal** au rang de sa matrice dans une base quelconque.

Proposition

On suppose que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique différente de 2.
Les ensembles $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{L}_2(E)$ i.e. $\mathcal{L}_2(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E)$.

Lemme

i) Une forme bilinéaire alternée est antisymétrique

ii) On suppose que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique différente de 2.
Alors une forme bilinéaire antisymétrique est alternée.

Preuve

i) $\forall x, y \in E$, on a :
$0 = f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y)$
$= f(x,y) + f(y,x) = 0 \Longrightarrow f(x,y) = -f(y,x)$.

ii) $f(x,x) = -f(x,x) \Longrightarrow 2f(x,x) = 0 \Longrightarrow f(x,x) = 0$. $\forall x \in E$.

Rémarques

~ Forme symétrique ou antisymétrique est réflexive.

~ Toute forme bilinéaire réflexive est soit symétrique ou antisymétrique.

Lemme

Une forme bilinéaire non identiquement nulle est une application surjective.

Preuve

Soit f une forme bilinéaire non identiquement nulle,
alors il existe $(x,y) \in E^2$ tel que $f(x,y) = a \neq 0$.
$\forall \alpha \in \mathbb{K}$, on a $f(\alpha x, a^{-1}y) = \alpha a^{-1} f(x,y) = \alpha$.

1.3 ORTHOGONALITE D'UNE FORME BILINEAIRE REFLEXIVE

Soit $f \in \mathcal{L}_2(E)$ réflèxive
Deux vecteurs x et y sont dits **orthogonaux** relativement à f,
si $f(x,y) = 0$, on écrit $x \perp y$.

Remarques

1) $0 \perp x, \ \forall x \in E, \ car \ \ f(0,x) = 0.$
2) $\ker f = \{x \in E \ \ / \ \ f(x,y) = 0, \ \ \forall y \in E\} = E^{\perp}, \forall \ f \in \mathcal{L}_2(E).$

Définition

Soit $A \subset E$, on pose : $A^{\perp} = \{x \in E \ \ / \ \ x \perp a, \ \ \forall a \in A\}$
est l'orthogonal de A.

Montrer que l'orthogonal de A est un sous-espace vectoriel.

Théorème

Si F et G sont des sous-ensembles non vides de (E, f) espace vectoriel sur lequel est définie la forme bilinéaire f, alors on a :
i)$F \subset G \Rightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$
ii) $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$
iii) $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$
iv) $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$
v) $dimF + dimF^{\perp} = dimE + dim(F \cap Kerf)$,
si F est un sous-espace vectoriel de E.

Dans le cas où f est non dégénérée et que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a :
1) $dimF + dimF^{\perp} = dimE$
2) $F = (F^{\perp})^{\perp}$
3) $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$

Remarques
i) $f(x,x)=0 \Longleftrightarrow x \perp x \Longleftrightarrow x$ est isotrope.
ii) Avoir $\dim A+\dim A^{\perp}=n$ ne signifie pas que $A\cap A^{\perp}=\{0_E\}$, avec A est un sous-espace vectoriel de E.

1.3.1 Cône isotrope

Définition
Le cône isotrope est :
$C(f)=\{x\in E,\quad f(x,x)=0\}.$
Définition
f est **définie** sur E ssi $C(f)=\{0_E\}$.
Remarques
i) Généralement on a : $\ker(f)\subseteq C(f)$.
ii) Un vecteur est isotrope signifie qu'il est orthogonal à lui-même.
iii) La dénomination de "**Cône**" vient du fait que si $x\in C(f)$ alors pour tout scalaire $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda x\in C(f)$. Ainsi $C(f)$ est stable par toute homothétie de rapport $\lambda\in\mathbb{K}$.
Proposition
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors
$$\forall f\in\mathcal{L}_2(E),\ \dim E=\dim(\ker f)+rang(f)$$
$$=\dim(\ker f_*)+rang(f_*)$$
$$=\dim(\ker f'_*)+rang(f'_*).$$

1.4 Adjoint d'une application linéaire relativement à une forme bilinéaire

Soit $f\in\mathcal{L}_2(E)$, on suppose f non dégénérée.
Définition
Soit $u:E\longrightarrow E$ une application linéaire. On dit que v est adjoint de u si $v:E\longrightarrow E$ est une application linéaire vérifiant pour tout $x,y\in E$, $f(u(x),y)=f(x,v(y))$.
Proposition
Avec f non dégénérée, si v existe alors il est unique. On le note alors $u^*=v$.
Remarque
Si $\dim E$ n'est pas finie il existe des exemples pour lesquels un adjoint n'existe pas toujours.
Proposition
Si $\dim E$ est finie et que $f\in\mathcal{L}_2(E)$ est non dégénérée, alors tout

endomorphisme u de E admet un adjoint u^*(unique).
Preuve
Puique E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}_2(E)$ est non dégénérée,
f_* et $g_* = f'_* = ({}^t(f_*))$ sont des isomorphismes. (ici, $E \cong E^*$).
$\forall x, y \in E$, $f(u(x), y) = f(x, u^*(y)) = f_*(x)(u^*(y))$
or on sait que,

$$\begin{aligned} f(u(x), y) &= f_*(u(x))(y) = (f_* \circ u)(x)(y) \\ &= (f_* \circ u \circ (f_*^{-1} \circ f_*))(x)(y) = (f_* \circ u \circ f_*^{-1}) \circ f_*(x)(y) \\ &= f_*(x)({}^t(f_* \circ u \circ f_*^{-1})(y)) \\ &= f(x, {}^t(f_* \circ u \circ f_*^{-1})(y)) = f(x, u^*(y)). \end{aligned}$$

Ainsi $u^* = ({}^t(f_* \circ u \circ f_*^{-1}))$.
Soit $f(u(x), y) = f(x, u^*(y)) = g_*(u^*(y))(x)$, or on sait que

$$\begin{aligned} f(u(x), y) &= g_*(y)(u(x)) = ({}^tu) \circ g_*(y)(x) \\ &= (g_* \circ g_*^{-1}) \circ ({}^tu) \circ g_*(y)(x) \\ &= g_*((g_*^{-1} \circ ({}^tu) \circ g_*)(y))(x) = g_*(u^*(y))(x). \end{aligned}$$

Ainsi $u^* = g_*^{-1} \circ ({}^tu) \circ g_*$.
En clair,

$$\begin{aligned} u^* &= ({}^t(f_* \circ u \circ f_*^{-1})) = ({}^tf_*^{-1}) \circ ({}^tu) \circ ({}^tf_*) = ({}^tf_*)^{-1} \circ ({}^tu) \circ ({}^tf_*) \\ &= f'^{-1}_* \circ ({}^tu) \circ f'_* = g_*^{-1} \circ ({}^tu) \circ g_*. \end{aligned}$$

Corollaire
Etant donnée une base β de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n
$f \in \mathcal{L}_2(E)$ non dégénérée, un endomorphisme u de E dont
l'adjoint est u^*,
$A = Mat(f_*, \beta, \beta^*) = Mat(f, \beta) = ({}^tMat(f'_*, \beta, \beta^*) = ({}^tB))$
$U = Mat(u, \beta)$, $U^* = Mat(u^*, \beta)$. Alors :
$U^* = ({}^t(AUA^{-1})) = ({}^tA^{-1})({}^tU)({}^tA) = ({}^tA)^{-1}({}^tU)({}^tA) = B^{-1}({}^tU)B.$

1.4.1 Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques

Définition
Une forme bilinéaire $f \in \mathcal{L}_2(E)$ est dite symétrique si $f(x, y) = f(y, x)$,
$\forall x, y \in E$.

Ecriture matricielle d'une Forme bilinéaire

Soit $\beta = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E, $f \in \mathcal{L}_2(E)$,

$$A = Mat(f, \beta),\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i,\ y = \sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j,\ X = Mat(x, \beta),$$

$$Y = Mat(y, \beta).$$

$f(x,y) = ({}^tX)\,AY = f(y,x) = ({}^t(({}^tX)\,AY)) = ({}^tY)\,({}^tA)\,X.$

Proposition

La forme bilinéaire f est symétrique$\Longleftrightarrow$il existe une base β de E telle que $A = Mat(f,\beta)$ soit symétrique

(une matrice A est symétrique ssi $A ={}^t A$.)

Preuve

En effet si : $A = (a_{ij}) = Mat(f,\beta)$,
$$\begin{aligned} a_{ij} &= f(e_i, e_j) \\ &= f(e_j, e_i) = a_{ji}. \end{aligned}$$

Notation

On note $\mathcal{S}_2(E)$ = l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E.

Proposition

$\mathcal{S}_2(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_2(E)$.

Remarque

1)Soit $\beta = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E et soit $f \in \mathcal{S}_2(E)$.

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j$

alors $$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j \text{ où } a_{ij} = f(e_i, e_j).$$

2)Si $y = x$ alors $$f(x,x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

$f(x,x)$ est appélée une forme quadratique si $f \in \mathcal{S}_2(E)$.

1.5 Formes quadratiques

Définition

On appelle forme quadratique sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, toute application $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle qu'il existe une base β dans laquelle $q(x)$ est un polynôme de degré 2 par rapport aux variables coordonnées $x_1, x_2, ..., x_n$ de x, c'est-à-dire si
$$\begin{cases} x \in E,\ \forall \alpha \in K,\ q(\alpha x) = \alpha^2 q(x). \\ E^2 \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,y) \longmapsto q(x+y) - q(x-y) \\ \text{est une forme bilinéaire symétrique.} \end{cases}$$

Remarque

Avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ on a

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j \text{ où } a_{ij} \in \mathbb{K}, \forall i,\ j.$$

Notation

On note $\mathcal{Q}(E) =$ l'ensemble des formes quadratiques sur E.

Proposition

$\mathcal{Q}(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Désormais $\mathbb{K}$ est de caractéristique $\neq 2$. i.e. $(2.1 \neq 0)$.
(Dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $2.\bar{1} = \bar{0}$. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{1}, \bar{0}\}$).

Proposition

Soit $f \in \mathcal{S}_2(E)$, soit $\beta = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E,
alors $x \longmapsto f(x,x) = q(x)$ est une forme quadratique sur E.

$$\theta : \mathcal{S}_2(E) \longrightarrow \mathcal{Q}(E)$$
$$f \longmapsto q \text{ telle que } q(x) = f(x,x)\,;\ x \in E.$$

θ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Preuve

$\theta(f+g) = \theta(f) + \theta(g)\,; \qquad \theta(\lambda f) = \lambda\theta(f)\,; \qquad \forall f, g \in \mathcal{S}_2(E)$,
$\forall \lambda \in \mathbb{K}$. $\forall q \in \mathcal{Q}(E), \exists!\ f \in \mathcal{S}_2(E)\ /\ \theta(f) = q$. Soit q une forme quadratique, s'il existe $f \in \mathcal{S}_2(E)$ telle que $\theta(f) = q$ alors $\forall x \in E$,
$q(x) = f(x,x)$; on a alors $q(x+y) = f(x+y, x+y)$
$= q(x) + q(y) + 2f(x,y) \Longrightarrow$
$f(x,y) = \dfrac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$ d'où l'unicité de f.

Pour l'existence de f, posons $\forall x, y \in E$,

$$f(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)],$$
$$\text{ou } f(x,y) = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)]$$

on vérifie que $f \in \mathcal{S}_2(E)$ telle que $f(x,x) = q(x)$. Donc $\theta(f) = q$.
Dans la proposition précedente la forme quadratique q est dite associée à la forme bilinéaire symétrique f. f est appelée **forme polaire** de la forme quadratique q.

Remarque

Il y a aussi un isomorphisme entre $\mathcal{S}_2(E)$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices symétriques sur $\mathbb{K}$ le corps de base de E, espace vectoriel de dimension n. Alors $\dim \mathcal{S}_2(E) = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{1}{2}n(n+1)$
$= \dim \mathcal{T}_n^s(\mathbb{K}) = \dim \mathcal{T}_n^i(\mathbb{K})$

où $\mathcal{T}_n^s(\mathbb{K})$ (resp.$\mathcal{T}_n^i(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures(resp.inférieures).
La dimension de $\dim \mathcal{T}_n^s(\mathbb{K})$ est égale à la somme des entiers de 1 à n en comptant les éléments au-dessus ou sur la diagonale principale de $\mathcal{T}_n^s(\mathbb{K})$ de bas en haut.

En résumé

Si la forme quadratique est donnée alors sa forme polaire est :

$f(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right], \ \forall x, y \in E.$

On peut, à partir de q, retrouver f par la règle de dédoublement : connaissant

$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}\, x_i\, x_j$ où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$,

on obtient : $f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, x_i\, y_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}\, (x_i\, y_j + x_j\, y_i)$

où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j$

en dédoublant $\begin{cases} x_i^2 \ \text{ en } x_i\, y_i & (1 \leq i \leq n) \\ 2x_i\, x_j \ \text{ en } x_i\, y_j + x_j\, y_i & (1 \leq i < j \leq n) \end{cases}$

Si la forme bilinéaire symétrique f est donnée alors la forme quadratique associée est définie par : $f(x,x) = q(x)$.

Exercice

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\beta = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$,par :

$q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1\, x_2 + 2x_1\, x_3 + 6x_2\, x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$.

1) Déterminer la matrice $A = Mat(q, \beta)$.

2) Déterminer la forme polaire f de q.

3) On pose $e_1' = e_1$; $e_2' = 3e_1 - e_2$; $e_3' = e_1 - e_2 - e_3$.

On pose $\beta' = (e_1', e_2', e_3')$.

a) Montrer que β' est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice $A' = Mat(q, \beta')$.

c) Donner l'expression de q dans β'.

Remarque

Soit $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$ la forme quadratique associée à $f \in \mathcal{S}_2(E)$.

$$q(x) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, x_i^2}\ + 2 \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}\, x_i\, x_j}$$

Termes carrés, Termes rectangulaires

Ecriture matricielle d'une forme quadratique

Soit $\beta = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$.

Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$, f la forme polaire de q, alors on a $f(x,y) = ({}^tX)\, AY$, donc $q(x) = ({}^tX)\, AX$.

Définition
i) Le noyau de q est égal au noyau de la forme polaire associé.
ii) q est non dégénérée ssi f est non dégénérée,
q est définie ssi f est définie.
iii) On dit que q est **isotrope** lorsqu'elle admet un vecteur isotrope non nul. Dans le cas contraire, on dit que q est **anisotrope**.
iv) Un sous-espace vectoriel F de E est dit *isotrope* s'il contient un vecteur isotrope non nul. Il est dit *anisotrope* dans le cas contraire.
v) Un sous-espace vectoriel F de E est dit *totalement isotrope* si la restriction de q à F est nulle.
vi) Un sous-espace vectoriel F de E est dit *non dégénéré* si la restriction de q à F est non dégénérée.
vii) On appelle **indice** de q l'entier $\mathbf{ind}(q)$, le maximum des dimension des sous-espaces totalement isotropes.
viii) Si $\mathbf{ind}(q) = 0$, on dit que q est anisotrope.
ix) un plan hyperbolique est un sous-espace vectoriel F de E isotrope, non dégénéré et de dimension 2.
x) On appelle **lagrangien** de (E, q) tout sous-espace vectoriel totalement isotrope de E(de dimension finie) de dimension $\dfrac{\dim E}{2}$.
Exemple
Sur $\mathbb{R}^2$, soit la forme quadratique $q\,(x, y) = x^2 - y^2$.
Les vecteurs (x, x) et $(x, -x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ sont isotropes.
On a deux sous-espaces totalement isotropes, les droites vectorielle $x = y$ et $x = -y$. Ainsi $\mathbf{ind}(q) = 1$.
Proposition
Soit q une forme quadratique anisotrope de dimension finie(on note $\dim(q) = \dim E$, E est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie sur lequel est définie la forme q), alors q est nécessairement non dégénérée.
Preuve : Procéder par l'absurde.
Lemme
Tous les plans hyperboliques sont isomorphes et ont des bases où la matrice de la forme quadratique q est $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
Preuve
Soit $x \in F$ tel que $q\,(x) = 0$ et $x \neq 0$, comme F est non dégénéré, il existe $y \in F$ et $y \neq 0$ tel que $f\,(x, y) \neq 0$.
On pose $z = -\dfrac{q\,(y)}{2f\,(x, y)}x + y$ et $t = \dfrac{z}{f\,(x, z)}$, on a $q\,(z) = O$ et

$f(x,z) = f\left(x, -\dfrac{q(y)}{2f(x,y)}x + y\right) = f(x,y) \neq 0 \Longrightarrow z \neq 0$, donc
$t \neq 0$ et $f(x,t) = 1$, aussi $\{x,t\}$ est une base de F,
$q(t) = q\left(\dfrac{z}{f(x,z)}\right) = 0$. D'où la thèse.Cette base est dite base hyperbolique de F.

Proposition

Si $\{x,y\}$ est une base hyperbolique d'un plan hyperbolique F, alors toutes les autres bases hyperboliques sont de la forme $\left\{\lambda x, \dfrac{1}{\lambda}y\right\}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$ le corps de base de E l'espace vectoriel qui est en question.

Remarque

Un plan quadratique est dit **hyperbolique** lorqu'il est isomorphe à $\mathbb{K}^2$ muni de $(x,y) \longmapsto xy = \dfrac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right]$.

Proposition

Une forme quadratique q sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non dégénérée et isotrope est surjective.

Preuve

q étant isotrope, il existe $x \in E$, tel que $q(x) = 0$ et comme q est non dégénérée, alors il existe $y \in E$, $f_q(x,y) \neq 0$(f_q forme polaire de q), Ainsi il existe un plan hyperbolique F orthogonal à E, donc admettant une base hyperbolique $\{x,t\}$. $\forall a \in \mathbb{K}^*$, soit $z = \dfrac{a}{2}x + t$, $q(z) = a$.

Proposition

Une forme quadratique q sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n non dégénérée et x non nul isotrope. On note f_q la forme polaire de q. Alors il existe $z \in E$ tel que $f_q(x,z) \neq 0$ et il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $(x, z+kx)$ est libre et $q(z+kx) = 0$.

Preuve

La forme q étant non dégénérée, il n'existe aucun vecteur non nul qui soit orthogonal à tous les autres. Donc il existe $z \in E$ tel que $f_q(x,z) \neq 0$. Pour trouver k on résouds
$q(z+kx) = 0 \Longrightarrow q(z) + 2kf_q(x,z) = 0 \Longrightarrow k = -\dfrac{q(x)}{2f_q(x,z)}$.
Le fait que $f_q(x,z) \neq 0$ implique (x,z) est libre et donc $(x, z+kx)$ est libre aussi.

Proposition

Une forme quadratique q sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n non dégénérée et x non nul isotrope. On note f_q la forme polaire de q. Alors il existe u_2, u_3, ..., $u_n \in E$ tels que $(x, u_2, u_3, ..., u_n)$ est une

base de E et pour tout $i \in \{2, ..., n\}$, $f_q(x, u_i) \neq 0$.
Preuve
La forme $f_q(x, .)$ étant non nulle, son noyau H est un hyperplan de E (c'est le sous-espace des vecteurs orthogonaux à x). Nous savons que $x \in H$. Soit $(x, a_2, ..., a_{n-1})$ une base de H. Soit $z \in E$ tel que $f_q(x, z) \neq 0$ ($z \notin H$). Il est clair que $(x, a_2, ..., a_{n-1}, z)$ est une base de E. Il s'ensuit que $(x, a_2 + z, ..., a_{n-1} + z, z)$ est aussi une base de E : c'est la base recerchée puisque $f_q(x, a_i + z) = f_q(x, z) \neq 0$ pour tout $i \in \{2, ..., n-1\}$, et alors $u_i = a_i + z$ et $u_n = z$.

Proposition

Une forme quadratique q sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n non dégénérée et x non nul isotrope. On note f_q la forme polaire de q. Alors E possède une base composée exclusivement de vecteurs isotropes.

Preuve
D'après la proposition précédente, E admet une base $(x, u_2, u_3, ..., u_n)$ vérifiant pour tout $i \in \{2, ..., n\}$, $f_q(x, u_i) \neq 0$. Fixons $i \in \{2, ..., n\}$, d'après supra, il existe $k_i \in \mathbb{K}$ tel que $q(u_i + k_i x) = 0$. Le système $(x, u_2 + k_2 x, u_3 + k_3 x, ..., u_n + k_n x)$ est alors une base composée

exclusivement de vecteurs isotropes de E.

Définition

On appelle espace hyperbolique tout espace quadratique (E, q) isomorphes à une somme directe orthogonale de plans hyperboliques.

Remarque

Un espace hyperbolique est de dimension paire et dans un base bien choisie, la forme quadratique s'écrit : $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - x_{i+1}^2\right)$.

Exemple

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et V^* l'espace dual associé. On définit : $q_V : V \times V^* \to \mathbb{K}$, $(x, f) \longmapsto 2f(x)$, qui est une forme quadratique de forme polaire :

$b_{q_V} : (V \times V^*) \times (V \times V^*) \longrightarrow \mathbb{K}$, $((x, f), (y, g)) \longmapsto f(y) + g(x)$

Alors, en identifiant V avec $V \times \{0^*\}$ et V^* avec $\{0\} \times V^*$, on a bien $\forall x \in V \setminus \{0\}$, on a $q_V(x, 0^*) = 0$, donc V est isotrope, voire totalement isotrope, ainsi que V^*. Aussi V et V^* sont deux espaces supplémentaires dans $V \times V^*$ et par concaténation d'une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de V et de sa duale $(e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$, on obtient une base $(e_1, e_2, ..., e_n, e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ de $V \times V^*$ et dans cette base la matrice de q_V s'écrit : $\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$.

Nous dirons que q_V est une **forme hyperbolique** associé à V.

Il s'agit alors de justifier cette appelation en montrant que l'espace $(V \times V^*, q_V)$ est bien hyperbolique.

Soit $P_k = vect(e_k, e_k^*)$, $1 \leq k \leq n$, des plans hyperboliques de $V \times V^*$(car $q_V(e_k, 0^*) = q_V(0, e_k^*)$ et

$$b_{q_V}((e_k, 0^*), (0, e_k^*)) = 1),$$

ils sont deux à deux orthogonaux pour q_V et que $V \times V^* = P_1 \oplus P_2 \oplus ... \oplus P_n$.

En effet, pour tout $i \neq j$ on a :

$$b_{q_V}\left((\alpha_1 e_i, \beta_1 e_i^*), (\alpha_2 e_j, \beta_2 e_j^*)\right) = \alpha_2\beta_1 e_i^*(e_j) + \alpha_1\beta_2 e_j^*(e_i) = 0.$$

Avec de plus :

$vect(e_1, e_1^*) \oplus vect(e_2, e_2^*) \oplus ... \oplus vect(e_n, e_n^*) = V \times V^*$.

Théorème

Tout espace quadratique (E, q) de dimension finie est somme directe orthogonale du noyau, d'un espace hyperbolique et d'un espace anisotrope.

Preuve

Soit f la forme polaire de q. Soit $N = \ker q$ et soit F un supplémentaire de N dans E. Comme $\forall x \in N$, $\forall y \in F$, $f(x, y) = 0$, alors $E = N \overset{\perp}{\oplus} F$.

Si $x \in F$ tel que $\forall y \in F$, $f(x, y) = 0$, alors $f(x, y) = 0$ pour $\forall y \in E$ et par conséquent $x \in N \cap F$, d'où $x = 0$ et ainsi, F est un sous-espace non dégénéré. Si F est anisotrope, c'est fini.

Si F est isotrope, soit $x_1 \in F$ tel que $q(x_1) = 0$. Comme F est non dégénéré, il existe $y \in F$ tel que $f(x_1, y) \neq 0$.

Posons $z = -\dfrac{q(y)}{2f(x_1, y)}x_1 + y$ et $x_2 = \frac{1}{f(x_1, z)}z$.

$P_1 = vect(x_1, x_2)$ est un plan hyperbolique et on a $F = P_1 \overset{\perp}{\oplus} P_1^{\perp}$.

On recommence le même raisonnement pour $P_1^{\perp}$; et ainsi de suite, à la fin : $E = N \overset{\perp}{\oplus} P_1 \overset{\perp}{\oplus} P_2 ... \overset{\perp}{\oplus} P_s \overset{\perp}{\oplus} A$

avec A un espace anistrope.

1.5.1 Rang d'une forme bilinéaire symétrique

Définition

Soit $f \in \mathcal{S}_2(E)$,
q associée $\boxed{rgf \text{ (ou } rgq) = \dim E - \dim \ker f}$
Soit $f \in \mathcal{S}_2(E)$, q associée. Soit $\beta = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E.
Proposition
Soit $A = (a_{ij}) = Mat(f, \beta) = Mat(q, \beta)$ alors $rgf = rgA$
Proposition
Soit f une forme bilinéaire symétrique $(f \in \mathcal{S}_2(E))$.
f est non dégénérée $\Longleftrightarrow \ker f = \{0_E\} \Longleftrightarrow rgf = n = \dim E$
$\Longleftrightarrow rgA = n \Longleftrightarrow A$ est inversible.

1.5.2 Bases orthogonales

Définition
Soit $f \in \mathcal{S}_2(E)$, q associée. Une famille de vecteurs $(e_i)_{i \in I}$ une base est dite orthogonale par rapport à f (resp. q) si $\forall i \neq j$, on a $e_i \perp e_j$ i.e. $(f(e_i, e_j) = 0, \ \forall i \neq j)$.
La famille $(e_i)_{i \in I}$ est dite orthonormale si elle est orthogonale et si $f(e_i, e_i) = 1, \forall i \in I$.

Théorème 1 *(existence d'une base $f-$orthogonale)*

Pour toute forme bilinéaire symétrique f sur E de dimension finie, il existe au moins une base de E orthogonale pour f.
on notera qu'il n'existe pas nécessairement de base orthonormale.
Démonstration
Par récurrence sur $n = \dim(E)$.
– Pour $n = 1$, toute base est orthogonale.
– Supposant le théorème vrai de l'entier n, prouvons le pour l'entier $n+1$.
Si $q = 0$, c'est évident. sinon il existe $e_{n+1} \in E$ tel que $q(e_{n+1}) \neq 0$.
(Si pour tout $x \in E$, $q(x) = 0$, la forme polaire f de q est nulle car pour tous $x, y \in E$,
$f(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = 0$ et toute base est orthogonale).
Soit F le sous-espace, de dimension1, engendré par e_{n+1}.
L'orthogonal $F^{\perp}$ de F est l'ensemble des $y \in E$ tels que $f(e_{n+1}, y) = 0$.
C'est donc le noyau de la forme linéaire non nulle $f(e_{n+1}, .)$ sur l'espace E de dimension $(n+1)$. Il en résulte que $F^{\perp}$ est de

dimension n, et puisque $q\left(e_{n+1}\right) \neq 0$, on ne peut avoir $F \subset F^{\perp}$.
Donc F n'est pas isotrope, et on a $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.
Donc E est somme directe de F et $F^{\perp}$. Mais par hypothèse de récurrence, il existe une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ *de* $F^{\perp}$, orthogonale pour la restriction de q à $F^{\perp}$

(dont la forme polaire est la restriction de f à $F^{\perp} \times F^{\perp}$)

Il est alors clair que $(e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1})$ est une base de E, orthogonale pour q.

Forme matricielle du théorème précédent :

$\forall S \in S_n\ (\mathbb{K}),\ \exists (P, D) \in GL_n\ (\mathbb{K}) \times D_n\ (\mathbb{K});\quad S = ({}^tP)\, DP$,

où P=Pass(β' à β) avec β' base orthogonale et β base telle que $S = Mat\,(f, \beta)$ et $D = Mat\,(f, \beta')$.

En somme $\left({}^tP_{\beta\beta'}\right) Mat\,(f, \beta)\, P_{\beta\beta'} = Mat\,(f, \beta')$.

Exercice

1) Soit $f\,(x, y) = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3 - x_4\, y_4$.

La base canonique de $\mathbb{R}^4$ est orthogonale par rapport à f.

2) Soit $f\,(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i\,,\quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j\,.$$

dans $\mathbb{R}^n$; $\beta = (e_1\,, e_2\,, ..., e_n\,)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

La base β est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ relativement à f.

1.5.3 Matrice d'une forme bilinéaire symétrique dans une base orthogonale

Soit $f \in \mathcal{S}_2\,(E)$, q associée.

$\beta = (e_1\,, e_2\,, ..., e_n\,)$ est une base orthogonale de E, relativement à f.

$A = (a_{ij}\,) = Mat\,(f, \beta)$ donc $a_{ij} = f\,(e_i\,, e_j\,) = 0$ si $i \neq j$ donc

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$f\,(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, x_i\, y_i\,,\quad q\,(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, x_i^2\,.$$

Soit $r = rgf$, on suppose que $f \neq O$, $\quad r \neq O \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tel que $a_{kk} \neq 0$.

Supposons que $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, ..., p$ et que $a_{ii} = 0$,
$\forall i = p+1, ..., n$.
Alors

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{pp} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc $p = r =$ le nombre d'indices i tels que $a_{ii} \neq 0$.
Ce nombre ne dépend donc pas de la base orthogonale choisie, donc dans une telle base, on a : $f(x, y) = \sum_{i=1}^{r} a_{ii}\, x_i\, y_i$ et $q(x) = \sum_{i=1}^{r} a_{ii}\, x_i^2$, où $r = rgf = rgq$.

Théorème
Soit φ une forme bilinéaire symétrique d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, q la forme quadratique associée. Il existe une base orthogonale(e_i) telle que, si r est le rang de φ,
$q(e_i) = 1$, pour $1 < i < r$, $q(e_i) = 0$, pour $i > r$.

Remarque
Les formes bilinéaires symétriques complexes sont classées par leur rang.

1.5.4 Formes bilinéaires symétriques réelles

Désormais $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition
Une forme bilinéaire symétrique sur E (la forme quadratique) est dite réelle. Une telle forme f (resp q) est dite :
(i) **positive** si $q(x) \geq 0, \quad \forall x \in E$.
(ii) **négative** si $q(x) \leq 0, \quad \forall x \in E$.
(iii) **définie positive** si elle est positive et non dégénérée.

i) $\quad f: \quad \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto f(x, y) \end{array}$

La forme f (resp. q) est **définie positive**

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (i) & q(x) \geq 0 \quad \forall x \in E \\ (ii) & q(x) = 0 \Longrightarrow \quad x = 0 \end{cases}.$$

ii) $\ker(f) = C(q)$ ssi $\forall x \in E,\ q(x) \geq 0$ ou $q(x) \leq 0$.
Autrement l′inclusion est stricte.

1.5.5 Décomposition d'une forme quadratique en carrés

Soit $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$ une forme quadratique écrite dans une base quelconque.
Les termes de la forme $a_{ii}\, x_i^2$ sont dits " termes carrés".
Les termes de la forme $a_{ij}\, x_i\, x_j$ sont dits " termes rectangles".
Il est toujours possible d'écrire la forme quadratique comme suit :
$q(x) = d_1\, l_1^2\ (x) + d_2\, l_2^2\ (x) + ... + d_p\, l_p^2\ (x)$
On a $d_1\,, d_2\,, ..., d_p\ \in \mathbb{R}^*$ et où $l_1\,, l_2\,, ..., l_p$
sont des formes linéaires sur E, linéairement indépendantes.
Avec $(*) \Longleftrightarrow q(x) = d_1\, l_1^2\ (x) + d_2\, l_2^2\ (x) + ... + d_p\, l_p^2\ (x)$,
on peut remarquer que la formule :

$$\forall x, y \in E \quad f(x, y) = \sum_{i=1}^{p} d_i\ l_i\ (x)\, l_i\ (y)\,,$$

s'obtient par le dédoublement de $(*)$
et que $\ker(f) = \bigcap_{i=1}^{p} \ker(l_i\ )$ pour trouver cela il faut résoudre
le système $l_i\ (x) = 0\ \ \forall i \in \{1, 2, ..., p\}\ \ x \in E$.

1.5.6 Les formes quadratiques équivalentes

Définition
Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$.
Soient q et $q\prime$ deux formes quadratiques sur E. La forme q est dite **équivalente** à $q\prime$ s'il existe un automorphisme linéaire
$u : E \to E$ tel que pour tout $x \in E$, $q(x) = q\prime(u(x))$.
On note $q \sim q\prime$.
Remarque
La relation $q \sim q\prime$ est une relation d'équivalence.
Pour caractériser une classe d'équivalence de cette relation d'équivalence, dans E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel nous avons besoin de la notion suite :

1.5.7 Signature d'une forme quadratique

Théorème d'inertie de Sylvester

On suppose $dim(E) = n < +\infty$.
Soit q une forme quadratique. Soient B et $B\prime$ deux bases orthogonales.
Alors $card\{e \in B;\ q(e) > 0\} = card\{e\prime \in B\prime;\ q(e\prime) > 0\}$,
et
$card\{e \in B;\ q(e) < 0\} = card\{e\prime \in B\prime;\ q(e\prime) < 0\}$.
De plus si on note r et s ces deux nombres alors $rg(q) = r + s$.
Preuve
Notons $B_{>0} = \{e \in B;\ q(e) > 0\}$ et $B\prime_{>0} = \{e \in B\prime;\ q(e) > 0\}$.
Notons r et $r\prime$ leur cardinal respectif.
Notons $B_{<0} = \{e \in B;\ q(e) < 0\}$ et $B\prime_{<0} = \{e \in B\prime;\ q(e) < 0\}$.
Notons s et s' leur cardinal respectif.
Montrons pour commencer que
$r + s = rg(q) = r\prime + s\prime$.
B étant une base orthogonale, le rang de q est donné par le nombre de $e \in B$ tels que $q(e) \neq 0$. Ce nombre est donc $r + s$.
Il en est de même pour $B\prime$et on a $r + s = rg(q) = r\prime + s\prime$.
Notons $B\prime_{\leq 0} = \{e\prime \in B\prime;\ q(e\prime) \leq 0\}$
(c'est le complémentaire de $B\prime_{>0}$ dans $B\prime$).
Montrons que $Vect(B_{>0}) \cap Vect(B\prime_{\leq 0}) = \{0\}$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \neq 0$ dans cette intersection.
Comme $x \in Vect(B_{>0})$, on peut écrire $x = \sum_i c_i e_i$ avec $c_i \in \mathbb{R}$ et $e_i \in B_{>0}$. De plus comme $x \neq 0$, l'un des c_i est nécessairement non nul.On a $q(x) = \sum_i (c_i)^2 q(e_i)$.
Dans cette somme, tous les $q(e_i)$ sont > 0 et l'un (au moins) des c_i est non nul donc $q(x) > 0$.
D'un autre côté, $x \in Vect(B\prime_{\leq 0})$ donc on peut écrire

$$x = \sum_i d_i e\prime_i \text{ avec } d_i \in \mathbb{R} \text{ et } e\prime i \in B\prime_{\leq 0}.$$

On obtient $q(x) = \sum_i d_i q(e\prime_i)$. Ici tous les $q(e\prime_i)$ sont ≤ 0 donc $q(x) \leq 0$. Contradiction. Ainsi $x = 0$.
En conséquence, les espace vectoriels $Vect(B_{>0})$ et $Vect(B\prime_{\leq 0})$ sont en somme directe. Consid´erons le sous-espace vectoriel de E :
$Vect(B_{>0}) + Vect(B\prime_{\leq 0}) = Vect(B_{>0}) \oplus Vect(B\prime_{\leq 0}) \subseteq E$.
Sa dimension est $r + (n - r\prime)$ et inférieure ou égale à n.
On en déduit que $r \leq r\prime$.
Les bases B et $B\prime$ jouent un rôle symétrique. Par symétrie, on a $r\prime \leq r$.
Ainsi $r = r\prime$. Or $r + s = rg(q) = r\prime + s\prime$ d'où $s = s\prime$.

Ceci nous permet de définir correctement la signature d'une forme :
Soient r le nombre de d_i positifs, $i \in \{1, 2, ..., p\}$ et s le nombre de d_i negatifs, $i \in \{1, 2, ..., p\}$,dans :
$q\,(x) = d_1\, l_1^2\ (x) + d_2\, l_2^2\ (x) + ... + d_p\, l_p^2\ (x)$.
On a $r + s = p$.

Définition
Soit q une forme quadratique sur E (avec $dim(E) < +\infty$). On définit la **signature** de q, notée $sign(q)$ comme le couple (s, t) tel que : pour toute base orthogonale B, $s = card\{e \in B \mid q(e) > 0\}$ et $t = card\{e \in B \mid q(e) < 0\}$.

Définition
L'indice de $q = card\{e \in B \mid q(e) = 0\}$, pour toute base orthogonale B relativement à q.

Remarques
1) Avec $q\,(x) = d_1\, l_1^2\ (x) + d_2\, l_2^2\ (x) + ... + d_p\, l_p^2\ (x)$.
La signature de q : $sign\,(q)$ est le couple dont la première composante r est le nombre de d_i positifs, $i \in \{1, 2, ..., p\}$ et la seconde composante est s le nombre de d_i negatifs, $i \in \{1, 2, ..., p\}$. Ainsi $sign\,(q) = (r, s)$.
2) Les formes bilinéaires symétriques réelles sont classées par leur signature.

Remarque
Vu le théorème d'inertie de Sylvester, la signature d'une forme est indépendante de toutes bases orthogonales. On pourra dire que la signature est une notion intrinsèque.

Proposition
A) Soient q et $q\prime$ deux formes quadratiques sur un espace vectoriel **complexe** E. Alors :
$q \sim q\prime \Longleftrightarrow rg(q) = rg(q\prime)$.
B) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et q et $q\prime$ deux formes quadratiques sur E. On a :
$q \sim q\prime \Longleftrightarrow sign(q) = sign(q\prime)$.

Définition
Deux matrices carrées de même ordre n sont **congruentes** ssi il existe une matrice P inversible d'ordre n, telle que $B = ({}^tP)\,AP$.

Proposition
Soient q et $q\prime$ deux formes quadratiques sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes.
(1) q et $q\prime$sont équivalentes.
(2) Pour toute base $B \subset E$ il existe une base $B\prime \subset E$ telle que $Mat(q, B) = Mat(q\prime, B\prime)$.
(3) Pour toute base $B \subset E$, les matrices $Mat(q, B)$ et $Mat(q\prime, B)$

sont congruentes.

(4) Il existe une base $\mathcal{B} \subset E$ telle que les matrices $Mat(q, \mathcal{B})$ et $Mat(q\prime, \mathcal{B})$ soient congruentes.

Démonstration

Notons n la dimension de E.

(1) $\Rightarrow$ (2). Soient b et $b\prime$ les formes polaires associées. Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. Notons $B = Mat(q, \mathcal{B})$, $B\prime = Mat(q\prime, \mathcal{B})$ et $U = Mat(u, \mathcal{B})$.

Soient X, Y deux vecteurs quelconques de $\mathbb{k}^n$. Soient x et y les vecteurs de E dont X et Y sont les vecteurs des coordonnées dans $\mathcal{B}$. Par hypothèse on a $b(x, y) = b\prime(u(x), u(y))$ ce qui entraine

$({}^tX)\, BY = ({}^t(UX))\, B\prime(UY) = ({}^tX)\, ({}^tUB\prime U)Y$.

Soit alors $\mathcal{B}\prime$ l'unique base de E telle que la matrice de passage $Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}\prime)$ soit ´egale ‘a U. On obtient $Mat(b\prime, \mathcal{B}\prime) = ({}^tU)\, B\prime U$ ce qui donne $({}^tX)\, BY = ({}^tX)\, Mat(b\prime, \mathcal{B}\prime)Y$.

Cette égalité ayant lieu pour tout X, Y , on en conclut que $Mat(b, \mathcal{B}) = Mat(b\prime, \mathcal{B}\prime)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Par hypothèse, il existe $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}\prime_0$ deux bases telles que $Mat(q, \mathcal{B}_0) = Mat(q\prime, \mathcal{B}\prime_0)$.

Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. On sait que $Mat(q, \mathcal{B})$ et $Mat(q, \mathcal{B}_0)$ sont congruentes. De même $Mat(q\prime, \mathcal{B})$ et $Mat(q, \mathcal{B}\prime_0)$ sont congruentes.

La congruence étant une relation d'équivalence, on peut conclure.

(3) $\Rightarrow$ (4). C'est immédiat.

(4) $\Rightarrow$ (1). Par hypothèse il existe une base $\mathcal{B}$ telles que $Mat(q, \mathcal{B})$ et $Mat(q\prime, \mathcal{B})$ sont congruentes. Notons B et $B\prime$ ces matrices.

Il existe donc P inversible telle que $B = ({}^tP)\, B\prime P$.

On définit alors $u : E \to E$ comme l'unique endomorphisme de E tel que $Mat(u, \mathcal{B}) = P$. La matrice P étant inversible, u est un isomorphisme. Soit alors $x \in E$ pour lequel on note X le vecteur coordonnées dans $\mathcal{B}$. Alors l'égalité $B = ({}^tPB\prime P)$ entraine

$q(x) = ({}^tX)\, BX = ({}^tX)\, ({}^tPB\prime P)\, X = ({}^t(PX))\, B\prime(PX) = q\prime(u(x))$.

1.5.8 Méthode de Gauss

La méthode de Gauss permet, dans le cas d'une forme bilinéaire symétrique, d'obtenir de façon automatique (plus précisément algorithmique) une base orthogonale(qui ne soit pas forcement constituée de vecteurs propres) et la signature de la forme.

Elle n'est que la systématisation de la méthode dite de la « forme canonique » pour les polynômes du second degré.

Remarque
Ce que la méthode de Gauss permet d'avoir(dans le cas réel), est aussi obtenu, en **diagonalisant** la matrice associée à une forme quadratique, puisqu'elle est **symétrique**.

Exemplarité
q contient des termes carrés. Par exemple soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$, par : $q(x,y,z) = x^2 - y^2 + 3z^2 + 4xy + 6xz + 8yz$
Décomposons cette forme quadratique en carrés de formes linéairement indpendantes.

$$\begin{aligned}
q(x,y,z) &= x^2 + 2x(2y+3z) + 3z^2 - y^2 + 8yz \\
&= (x+2y+3z)^2 - (2y+3z)^2 + 3z^2 - y^2 + 8yz \\
&= (x+2y+3z)^2 - (4y^2 + 9z^2 + 12yz) + 3z^2 - y^2 + 8yz \\
&= (x+2y+3z)^2 - 5y^2 - 4yz - 6z^2 \\
&= (x+2y+3z)^2 - 5\left(y^2 + \frac{4}{5}yz\right) - 6z^2 \\
&= (x+2y+3z)^2 - 5\left[\left(y + \frac{2}{5}z\right)^2 - \frac{4}{25}z^2\right] - 6z^2 \\
&= (x+2y+3z)^2 - 5\left(y + \frac{2}{5}z\right)^2 - \frac{26}{5}z^2 \\
&= l_1^2\,(x,y,z) - 5l_2^2\,(x,y,z) - \frac{26}{5}l_3^2\,(x,y,z),\ \text{ où}
\end{aligned}$$

$l_1\ (x,y,z) = x + 2y + 3z;\ l_2\ (x,y,z) = y + \frac{2}{5}z;\ l_3\ (x,y,z) = z.$
Montrons que $l_1\,, l_2\,, l_3$ sont des formes linéairement indpendantes.
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha l_1 + \beta l_2 + \gamma l_3 = 0$, donc
$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \alpha l_1\ (x,y,z) + \beta l_2\ (x,y,z) + \gamma l_3\ (x,y,z) = 0$. donc
(*) $\alpha(x+2y+3z) + \beta\left(y + \frac{2}{5}z\right) + \gamma z = 0, \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$
Par exemple si $y = z = 0$ et $x = 1$, $(*) \Longrightarrow \alpha = 0$ Si $z = 0$ alors $\beta y = 0$, $\forall y \in \mathbb{R} \Longrightarrow \beta = 0$.Il reste $\gamma z = 0, \forall z \in \mathbb{R} \Longrightarrow \gamma = 0$.

Exercice
soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par : $q(x,y,z) = xy + yz + xz$.
Décomposer cette forme quadratique en carrés de formes linéairement indpendantes.

Réponse
Astuce : $\forall u, v \in \mathbb{R},\ uv = \frac{1}{4}\left[(u+v)^2 - (u-v)^2\right]$.
$\frac{\partial q(x,y,z)}{\partial x} = y + z,\ \frac{\partial q(x,y,z)}{\partial y} = x + z,$
on a : $q(x,y,z) = (x+z)(y+z) - z^2$, avec

$\forall a, b \in \mathbb{R},\ ab = \dfrac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]$, on a :
$q(x,y,z) = \dfrac{1}{4}\left[(x+y+2z)^2 - (x-y)^2\right] - z^2.$
Ici $l_1\ (x,y,z) = x+y+2z,\ \ l_2\ (x,y,z) = x-y,\ \ l_3\ (x,y,z) = z.$
Alors $q(x,y,z) = \dfrac{1}{4} l_1^2\ (x,y,z) - \dfrac{1}{4} l_2^2\ (x,y,z) - l_3^2\ (x,y,z).$

Exercice
Soit β_0 la base canonique de $\mathbb{R}^4$ avec $u_{\beta_0} = (x,y,z,t)$
et la forme quadratique suivante :
$q(u) = (x-y+z+t)^2 + (y+z)^2 - (y-z-2t)^2 + 4t^2$
Trouver une base β de $\mathbb{R}^4$ orthogonale relativement à q.

Réponse
En effet, on peut trouver une base orthogonale β relativement à q telle qu'avec $u = (x', y, z', t')$ dans β, on a :
$q(u) = (x')^2 + (y')^2 - (z')^2 + 4(t')^2$ il en résulte :

$$\begin{cases} x' &= x - y + z + t \\ y' &= y + z \\ z' &= y - z - 2t \\ t' &= t \end{cases} \iff \begin{cases} x &= x' + z' + t' \\ y &= \dfrac{1}{2}(y' + z' + 2t') \\ z &= \dfrac{1}{2}(y' - z' - 2t') \\ t &= t' \end{cases}$$

$$\iff u_{\beta_0} = P_{\beta_0\beta} u_\beta \text{ où } P_{\beta_0\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ d'où}$$

$\beta = \left\{(1,0,0,0), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), (1,1,-1,1)\right\}$
dans la base β_0 qui est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Remarque
Une telle base orthogonale relativement à une forme bilinéaire symétrique(une forme quadratique) dépend de la décomposition en carrés de Gauss qui, elle ne s'opère pas de façon unique.

1.5.9 Inégalité avec les formes bilinéaire symétrique réelle

On peut majorer la valeur du produit scalaire, c'est la célèbre inégalité de Cauchy-Schwarz, qu'on peut d'ailleurs énoncer dans un cadre un peu plus général.

Inégalité de Schwarz(Cauchy-Bunyakovski-Schwarz)

Proposition

soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.Soit f une forme bilinéaire symétrique positive sur E. Alors $\forall (x, y) \in E^2$,

on a (*) $[\ f(x,y)]^2 \leq f(x,x)\, f(y,y)$.

Quand f est définie, il y a égalité si et seulement si les vecteurs sont liés.

Preuve

Soit $x, y \in E$ fixés. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0$,
$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \ f(x+\lambda y, x+\lambda y) = \lambda^2 f(y,y) + 2\lambda f(x,y) + f(x,x)$,
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

1^{er} cas $f(y,y) = 0$, alors $2\lambda f(x,y) + f(x,x) \geq 0$,
$\forall \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow f(x,y) = 0$.
Donc la forme $(*)$ est vraie (c'est une égalité).

$2^{ème}$ cas $f(y,y) \neq 0$,
soit $H(\lambda) = \lambda^2 f(y,y) + 2f(x,y) + f(x,x) = f(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0$,
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\triangle' = [\ f(x,y)]^2 - f(x,x)\, f(y,y) \leq 0$.

$3^{ème}$ cas

Supposons de plus f définie. Alors en supposant y non nul,et $q(y) \neq 0$ alors le polynôme en λ a un discriminant nul ; il a une racine double, λ_0, donc $q(x+\lambda_0 y) = 0$ ce qui implique $x + \lambda_0 y = 0$, x et y sont liés.
Si $y = 0$, bien sûr, x et y sont liés, et, par ailleurs, si x et y sont liés, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.

Remarque

Un produit scalaire est forcément non dégénéré : comme il n'y a pas de vecteur isotrope, le noyau est réduit au vecteur nul. Et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on va montrer qu'une forme bilinéaire positive non dégénérée est un produit scalaire.

Corollaire

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
Alors : f définie et positive $\Longleftrightarrow$ f non dégénérée positive

Démonstration

Si f est définie, elle est forcément non dégénérée car $\ker f \subset C(f) = \{0_E\}$.
Si par contre x est dans le cône isotrope et y quelconque, l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que$|f(x,y)| \leq q(x)q(y) = 0$, donc x est orthogonal à y et est dans le noyau de f(en clair $\ker f = C(f)$).

Remarques

1) Il y a égalité entre le noyau et le cône isotrope d'une forme bilinéaire positive ou négative.
2) Une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est l'inégalité de

Minkowski.

Inégalité de Minkowsky

Proposition
Soit q une forme quadratique positive sur E.
Alors $q(x+y) \leq \left(\sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}\right)^2, \qquad \forall x, y \in E.$
Preuve
$q(x+y) = f(x+y, x+y) = q(x) + q(y) + 2f(x,y)$.
D'après (*) Schwarz
$f(x,y) \leq |f(x,y)| \leq \sqrt{[f(x,y)]^2} \leq \sqrt{f(x,x)\, f(y,y)}.$
Donc
$q(x+y) \leq q(x) + q(y) + 2\sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)} = \left(\sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}\right)^2.$
Remarque
Ces propriétés font que l'application $x \longmapsto \|x\|$ a bien les propriétés d'une norme quand elle est définie par le biais d'un produit scalaire, c'est la **norme euclidienne** associée au produit scalaire.
Définition
Moyennant un produit scalaire($<;>$) sur E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on a $\cos(\widehat{u,v}) = \dfrac{< u,v >}{\|u\|\,\|v\|}$, $u, v \in E$ avec $\|u\| = \sqrt{< u,u >}$.
Remarque
$\cos(\widehat{u,v})$ est indépendant de l'orientation du plan (u,v).
Définition
Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, muni d'une forme bilinéaires symétrique et non dégénérée, est dit *pré-euclidien*.

1.6 Espaces euclidiens

Les formes bilinéaires symétriques réelles positives et non dégénérées et les formes quadratiques associées sont les bonnes généralisations du produit scalaire usuel dans les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
Définition
On appelle produit scalaire sur E, toute forme bilinéaire symétrique définie positive f sur E. On convient de noter :
$$f(x,y) = \langle x,y\rangle, \;\; q(x) = \langle x,x\rangle.$$
Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, de dimension finie muni d'un produit scalaire.(il est dit préhilbertien réel)
Proposition

Tout espace euclidien possède une base orthonormale.
Remarque
Dans une base $\beta = (e_1 , e_2 , ..., e_n)$ orthonormale de E,
$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i$, avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j \, e_j$

$$\text{et } q(x) = \langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

Proposition

Soit E un espace euclidien , alors

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto ||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{aligned}$$ est une norme.

Définition
Un espace euclidien, muni de la norme induite de sa forme quadratique, est un hilbertien ssi toute suite de Cauchy y est convergente.
Définition
Soient F un sous-espace vectoriel de E un espace euclidien, $x \in E$.
On appelle **distance** de x *à* F, et on note $d(x, F)$, le réel défini par :
$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

1.7 GEOMETRIE EUCLIDIENNE

1.7.1 Projections et symétries orthogonales

Définition
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un préhilbertien réel E.
On a alors $E = F \oplus F^{\perp}$ et le projecteur p $(p \circ p = p)$ de noyau $F^{\perp}$ et d'image F est appelé **projection orthogonale** sur F.
Proposition
Étant donné un projecteur p de E, les propositions suivantes sont équivalentes
(i) $\mathrm{Im}\, p$ et $\ker p$ sont orthogonaux
(ii) $\ker p = (\mathrm{Im}\, p)^{\perp}$
(iii) $\mathrm{Im}\, p = (\ker p)^{\perp}$
Lorsqu'il vérifie l'une de ces trois propositions, le projecteur p est dit orthogonal
Définition
Une symétrie $s\,(s \circ s = e = \textit{identité})$ est **orthogonale**
quand le projecteur $p = \frac{1}{2}(e + s)$ est orthogonal.

Remarques

A une décomposition de E en somme directe orthogonale : $E = F \oplus F^{\perp}$, on peut associer deux projections orthogonales et donc deux symétries orthogonales.

p_F : projection d'image F et de noyau $F^{\perp}$: $p_F = Id_E - p_{F^{\perp}}$

$p_{F^{\perp}}$: projection d'image $F^{\perp}$ et de noyau F : $p_{F^{\perp}} = Id_E - p_F$

s_F : symétrie orthogonale par rapport à F :

$$s_F = 2p_F - Id_E = Id_E - 2p_{F^{\perp}}$$

$s_{F^{\perp}}$: symétrie orthogonale par rapport à $F^{\perp}$:

$$s_{F^{\perp}} = 2p_{F^{\perp}} - Id_E = Id_E - 2p_F .$$

Définition

Une **réflexion** est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H de E.

Proposition

Soit p un projecteur d'un $\mathbb{K}$-préhilbertien $(E, \langle , \rangle)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) p est projecteur orthogonal

(ii) $\forall x, y \in E$, $\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$

(iii) $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Preuve

$(i) \Longrightarrow (ii)$ p étant un projecteur orthogonal, on a :

$$\begin{aligned}\langle p(x), y\rangle &= \langle p(x), y - p(y)\rangle + \langle p(x), p(y)\rangle \\ &= \langle p(x), p(y)\rangle\end{aligned}$$

car $p(y - p(y)) = p(y) - p(y) = 0$, ainsi

$$(y - p(y)) \in \ker p = (\operatorname{Im} p)^{\perp}$$

donc $\langle p(x), y - p(y)\rangle = 0$. De même $\langle p(y), x\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ On applique (ii) avec $y = p(x)$, ce qui donne alors $p(y) = p^2(x) = p(x)$.

Il vient $\|p(x)\|^2 = \langle p(x), p(x)\rangle = \langle x, p(x)\rangle$, donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$\|p(x)\|^2 \leq \|x\| \|p(x)\|$, et pour $p(x) \neq 0$, par simplication par $\|p(x)\|$, on obtient $\|p(x)\| \leq \|x\|$. Pour $p(x) = 0$, cette inégalité est encore vérifiée.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Supposons que le projecteur p ne soit pas orthogonal, il existe alors $y \in \operatorname{Im} p$ et $x \in \ker p$ tels que $\langle x, y\rangle \neq 0$, donc $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Avec $\lambda = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2} \neq 0$, on obtient :

$$\langle x, y + \lambda x\rangle = \langle x, y\rangle + \lambda\langle x, x\rangle = \langle x, y\rangle + \lambda \|x\|^2$$

$$= \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2}\|x\|^2 = 0 \ (*)$$

puis, d'après le théorème de Pythagore :

$\|y\|^2 = \|y + \lambda x - \lambda x\|^2 = \|y + \lambda x\|^2 + \|\lambda x\|^2$

car $(\lambda x) \perp (y + \lambda x)$ d'après $(*)$.

Donc $\|y\|^2 > \|y + \lambda x\|^2 \Longrightarrow \|y\| > \|y + \lambda x\|$(Puisque $\lambda x \neq 0$)

$\Longleftrightarrow \|p(y + \lambda x)\| > \|y + \lambda x\|$ car $p(y + \lambda x) = p(y) = y$

Ce qui est en contradiction avec (iii) qui entrainerait $\|p(y + \lambda x)\| \leq \|y + \lambda x\|$. Donc on a bien $(iii) \Longrightarrow (i)$.

Proposition

Soit s une symétrie d'un $\mathbb{K}$-préhilbertien $(E, \langle , \rangle)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) s est une symétrie orthogonale

(ii) $\forall x, y \in E$, $\langle s(x), y\rangle = \langle x, s(y)\rangle$

(iii) $\forall x \in E$, $\|s(x)\| = \|x\|$.

Preuve

$(i) \Longrightarrow (ii)$ le projecteur p associée à s étant orthogonal, il vient :

$\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$

donc $\langle s(x), y\rangle = 2\langle p(x), y\rangle - \langle x, y\rangle = 2\langle x, p(y)\rangle - \langle x, y\rangle$

$= \langle x, 2p(y) - y\rangle = \langle x, s(y)\rangle$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ On applique (ii) avec $y = s(x) \Longrightarrow s(y) = s^2(x) = x$

et alors $\langle x, x\rangle = \langle s(x), s(x)\rangle$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ supposons que la symétrie s n'est pas orthogonale, il existe $x \in \ker(s - id_E)$ et $y \in \ker(s + id_E)$ tels que $\langle x, y\rangle \neq 0$, donc $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Avec $\lambda = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} \neq 0$, on obtient :

$$\langle y, x + \lambda y\rangle = \langle x, y\rangle + \lambda\langle y, y\rangle = \langle x, y\rangle + \lambda\|y\|^2$$
$$= \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}\|y\|^2 = 0 \ (*).$$

puis, d'après le théorème de Pythagore :

$\|x - \lambda y\|^2 = \|\lambda y + x - \lambda y - \lambda y\|^2 = \|\lambda y + x\|^2 + \|2\lambda y\|^2$

car $(\lambda y) \perp (\lambda y + x)$ d'après $(*)$.

Donc $\|x - \lambda y\|^2 \neq \|\lambda y + x\|^2$(Puisque $\lambda y \neq 0$) et

alors $\|x - \lambda y\| \neq \|\lambda y + x\|$

et $s(\lambda y + x) = x - \lambda y$ d'où $\|s(\lambda y + x)\| \neq \|\lambda y + x\|$

ce qui est en contradiction avec (iii), et en conclusion $(iii) \Longrightarrow (i)$.

Théorème(Distance d'un vecteur à un sous-espace)

Soit $x \in E$ un $\mathbb{K}$-préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E :

a) L'ensemble $\{y \in F \ / \ d(x, F) = \|x - y\|\}$ a au plus un élément,

b) Soit $x_0 \in F$, on a $d(x, F) = \|x - x_0\|$ si et seulement si $x - x_0 \in F^{\perp}$

c) $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ où p_F est la projection orthogonale sur F.

Théorème
Si $\eta = (e_1, e_2, ..., e_P)$ est une base orthonormale de F (s.e.v de E), la projection orthogonale p_F sur F est définie par :

$$\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, x\rangle e_i \ .$$

Le théorème suivant est à caractère affine.

Théorème
Soit E_n un espace euclidien de dimension n, et F un sous-espace affine de E_n. Quel que soit le point a de E_n il existe un point $p(a)$ et un seul, tel que $p(a) \in F$ et que $d(a, F) = \|a - p(a)\| = d(a, p(a))$. Ce point $p(a)$ est appelé la **projection orthogonale** de a sur F, car c'est l'unique point b de F tel que $(b - a)$ soit orthogonal à F. Enfin l'application qui à a associe $p(a)$, de E_n sur F, est une application affine, surjective, appelée projection orthogonale sur F.

Preuve
Soit F_0 la direction de F, et $(e_1, e_2, ..., e_P)$ une base orthonormale de F_0.
Cherchons d'abord un point $x \in F$ tel que $(x - a) \in F_0^{\perp}$. posont

$x = h + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\ e_i$, $(x - a) \in F_0^{\perp}$ est équivalent à

$$\left(h - a + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\ e_i \right) .e_j\ = 0$$

pour $1 \leq j \leq p$. soit $e_j\ .(a - h) + \alpha_j\ = 0,\ \alpha_j\ = (h - a).e_j$.

Le point qui convient est $x = p(a) = h + \sum_{i=1}^{p} [(a - h).e_i\ ]\, e_i$.

Sinon soit $x = p(a) + x_0$, où $x_0\ \in F_0$.

$$[d(a, x)]^2 = \|a - x\|^2 = \|a - p(a) - x_0\ \|^2$$
$$= \|a - p(a)\|^2 + \|x_0\ \|^2$$

car $(a - p(a)) \perp x_0$ .Donc $[d(a, x)]^2 > \|a - p(a)\|^2$ puisque $x_0\ \neq O_{E\ n}$.

Et alors $d(a, x)$ est minimum lorque $x = p(a)$. Et enfin la formule

$p(a) = h + \sum_{i=1}^{p} [(a - h).e_i\ ]\, e_i$, montre que $a \longmapsto p(a)$ est une application affine.

Si $a \in F,\ p(a) = a$ donc p est bien surjective.

Remarque
Pour tout sous-espace vectoriel F de E euclidien,
Avec une **symétrie orthogonale par rapport à** F

s_F de E on a évidemment $s_F \circ s_F = Id_E$ (on dit que s_F est involutif), $\ker(s_F - Id_E) = F$, $\ker(s_F + Id_E) = F^{\perp}$.

Exercices

1) Soit E un espace euclidien, montrer que $x, y \in E$ alors

$$x \perp y \Longleftrightarrow ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

$$\left(||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\langle x, y\rangle\right).$$

2) Dans un espace euclidien, si $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une famille orthogonale avec $e_i \neq 0, \forall i$, montrer que cette famille est libre.

Réponse

2) Supposons $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_p e_p = 0$. $\forall j \in \{1, 2, ..., p\}$,

$$\begin{aligned}
&\langle e_j, \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_p e_p \rangle \\
&\quad = \lambda_1 \underbrace{\langle e_j, e_1 \rangle} + \lambda_2 \underbrace{\langle e_j, e_2 \rangle} + ... + \lambda_j \underbrace{\langle e_j, e_j \rangle} + ... + \lambda_p \underbrace{\langle e_j, e_p \rangle} \\
&\quad = \lambda_j ||e_j||^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_j = 0, \qquad \forall j \in \{1, 2, ..., p\}.
\end{aligned}$$

1.7.2 Méthode d'orthogonalisation de Schmidt

Problème 2 *Dans un espace euclidien E, construire une base orthogonale*

$\beta' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ à partir d'une base quelconque
$\beta = (e_1, e_2, ..., e_n)$ de E.

Méthode de Schmidt

Posons $e'_1 = e_1$

$$\begin{aligned}
e'_2 &= \lambda_{21} e'_1 + e_2 \\
&\vdots \\
e'_k &= \lambda_{k1} e'_1 + \lambda_{k2} e'_2 + ... + \lambda_{kk-1} e'_{k-1} + e_k \\
&\vdots \\
e'_n &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{ni} e'_i + e_n .
\end{aligned}$$

On choisit λ_{21} pour que $e'_1 \perp e'_2 \Longrightarrow$

$$\langle e'_1, e'_2 \rangle = \lambda_{21} ||e'_1||^2 + \langle e'_1, e_2 \rangle = 0 \Longrightarrow \lambda_{21} = -\frac{\langle e'_1, e_2 \rangle}{||e'_1||^2}.$$

On choisit λ_{kk-1} pour que $e'_{k-1} \perp e'_k \Longrightarrow$

$$\langle e'_{k-1}, e'_k \rangle = \lambda_{kk-1} \left||e'_{k-1}\right||^2 + \langle e'_{k-1}, e_k \rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_{kk-1} = -\frac{\langle e'_{k-1}, e_k \rangle}{\left||e'_{k-1}\right||^2}.$$

Si $\beta' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ une base orthogonale de E alors

$\beta'' = \left(\frac{e'_1}{||e'_1||}, \frac{e'_2}{||e'_2||}, ..., \frac{e'_n}{||e'_n||} \right)$
est une base orthonormale de E.

1.8 Endomorphisme orthogonaux de $\mathbb{R}^n$

Définition
On considère $\mathbb{R}^n$ muni de $\langle \ , \ \rangle$ euclidien.
Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\ (\mathbb{R}^n)$, u est dit orthogonal si $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,
$\langle u(x)\ , u(y) \rangle = \langle\ x, y\ \rangle$.
On note $\mathbb{O}(\mathbb{R}^n) =$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux
(ou isométries vectorielles).
Proposition
Soit$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\ (\mathbb{R}^n)$, les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :
(i) $f \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$
(ii) Pour toute base orthonormée β de $\mathbb{R}^n$, $f(\beta)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
(iii) Il existe une base orthonormée β de $\mathbb{R}^n$ telle que $f(\beta)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ est orthogonal$\Longleftrightarrow ||u(x)|| = ||x||, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
Conséquence
$(\mathbb{O}(\mathbb{R}^n), \circ)$ est un groupe qui est le groupe orthogonal de $\mathbb{R}^n$.

1.8.1 Matrices orthogonales réelles

Soit $\beta = (e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ alors il existe $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\ (\mathbb{R}^n)$ tel que $M = Mat(u, \beta)$
La matrice M est dite orthogonale si l'endomorphisme $u \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$.
On note $\mathbb{O}_n(\mathbb{R}) =$ l'ensemble des matrices orthogonales.
Proposition
Soient $U \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R})$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $< ., . >$ un produit scalaire sur E
les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :
(i) $U \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R})$
(ii) $({}^tU)\,U = U\,({}^tU) = I_n$
(iii) Pour toute base orthonormée β de E, l'endomorphisme représenté par U dans cette base β est orthogonal.
(iv) Il existe une base orthonormée β de E dans laquelle l'endomorphisme représenté par U est orthogonale
(v) U est la matrice de passage entre deux bases orthonormales d'un

espace euclidien de dimension n.

(vi) Les colonnes de U forment une base orthonormée de E pour le produit scalaire canonique.

(vii) Les lignes de U forment une base orthonormée de E pour le produit scalaire canonique.

Remarque

Une projection orthogonale p n'est pas un endomorphisme orthogonal par compte une symétrie orthogonale s est un endomorphisme orthogonal.

Rappel

Dans $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est: $f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$

Remarque

Si $M \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det({}^t(M)\, M) = (\det M)^2 = \det I_n$
$= 1 \Longrightarrow \det M \in \{-1, 1\}$.

Proposition

L'ensemble $\mathbb{SO}(\mathbb{R}^n)$ des endomorphismes orthogonaux de determinant égal à 1 est un sous-groupe distingué de $\mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$, et est appelé le groupe spécial orthogonal.

Définition

On note $\mathbb{SO}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R})$, telle que $\det M = 1$. Les éléments de $\mathbb{SO}_n(\mathbb{R})$ s'appellent les rotations

Exemples de rotations en différentes dimensions.

$\mathbb{SO}_1(\mathbb{R}) = \{-1, 1\}$,

$$\mathbb{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;/\; a^2 + b^2 = 1 \right\}$$
$$= \left\{ M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \;/\; \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.8.2 Automorphismes orthogonaux et sous-espaces stables d'un espace euclidien E

Définition

1) On appelle rotation ou déplacement tout automorphisme orthogonal de déterminant égal à 1.La matrice orthogonale dont le déterminant est égal à 1 est appelée matrice de rotation.

2) On appelle antidéplacement tout automorphisme orthogonal de déterminant égal à -1.

3) On appelle réflexion ou réflexion d'hyperplan H ou symétrie hyperplane toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H. Les réflexions sont des antidéplacements.

Proposition

Soit F un sous-espace de E et u un automorphisme orthogonal.Si F est stable par u, alors :

(i) $u(F) = F$

(ii) $F^{\perp}$ est stable par u et $u\left(F^{\perp}\right) = F^{\perp}$

(iii) $sp(u) \subset \{-1, 1\}$

(iv) $\ker(u - Id_E) \perp \ker(u + Id_E)$

(v) L'endomorphisme u est diagonalisble ssi u est une symétrie orthogonale.

(vi) Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une base orthonormée de F,

p_F la projection orthogonale sur F est telle que :

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < e_i, x > e_i .$$

Proposition

Soit a et b deux vecteurs unitaires distints d'un espace euclidien E. Alors il existe une unique réflexion $S_{a,b}$ échangeant a et b, telle que :

$$S_{a,b}(x) = x - 2 < x, e > e, \quad \text{où } e = \frac{a-b}{\|a-b\|}.$$

Tableaux d'automorphismes orthogonaux en dimension 2 **et** 3.

En dimension 2, $E_1 = \ker(f - Id_E)$ et $E_{-1} = \ker(f + Id_E)$, où $f \in \mathbb{O}(\mathbb{E})$

Sp(f)	sous-espace propre de f	nature de f	det(f)
$\varnothing$	Pas de sous-espace propre	f est une rotation d'angle $\theta \neq 0\,[\pi]$	1
$\{1\}$	$E_1 = E$	$f = Id_E$	1
$\{-1\}$	$E_{-1} = E$	$f = -Id_E$	1
$\{1, -1\}$	E_1 et E_{-1} sont deux droites vectorielles orthogonales	f réflexion par rapport à E_1	-1

En dimension 3, $f \in \mathbb{O}(E)$

Sp(f)	sous-espace propre de f	nature de f	det(f)
$\{1\}$	$E_1 \ = E$	$f = Id_E$	1
$\{1\}$	E_1 est une droite	f est une rotation d'axe E_1	1
$\{-1\}$	$E_{-1} \ = E$	$f = -Id_E$	-1
$\{-1\}$	E_{-1} est une droite	f est la composée d'une rotation d'axe E_{-1} et de la réflexion par rapport à $E_{-1}^{\perp}$	-1
$\{1,-1\}$	E_1 est un plan et $E_{-1} \ = E_1^{\perp}$	f est la réflexion par rapport à E_1	-1
$\{1,-1\}$	E_1 est une droite et $E_{-1} \ = E_1^{\perp}$	f est le demi-tour d'axe E_1	1

1.8.3 Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien$(E, < .,. >)$ et son dual E^*

Soit $j : E \longrightarrow E^*$,

$a \longmapsto j\,(a)$ qui à $x \in E$ associe $(j\,(a))\,(x) =< a, x >$,

c'est un isomorphisme canonique de E sur E^*.

1.9 L'adjoint d'une application linéaire sur un espace euclidien

Définition

$(E, < .,. >)$ est espace (euclidien ou préhilbertien réel).Soit $f \in L\,(E)$;
on dit que f admet un adjoint ssi il existe $g \in L\,(E)$ tel
que $\forall\,(x, y) \in E^2, \ \ < f\,(x)\,, y >=< x, g\,(y) >$. Un tel g de $L\,(E)$
est appelé **un adjoint** de f.

En effet $\forall x \in E$; $\Gamma_x : E \longrightarrow K, y \longmapsto < f\,(y)\,, x >$ est une forme linéaire,
donc il existe un unique $f^*\,(x) \in E$ telle que $\Gamma_x : y \longmapsto < y, f^*\,(x) >$
avec $< f\,(y)\,, x >=< y, f^*\,(x) >$

Accessoirement *on peut se munir d'une base de E,*
$\beta \ = (e_1\,, e_2\,, ..., e_n\,)$ *orthonormale,*
supposons f^* existante, $\forall y \in E$, $\forall 1 \leq i \leq n$,
on a $< f\,(e_i)\,, y >=< e_i, f^*\,(y) >$; alors en posant :

$f^*\,(y) = \sum_{i=1}^{n} < f\,(e_i\,)\,, y > e_i$ *ceci est unique et*

on montre aisément que l'application

$$f^* : E \longrightarrow E,\ y \longmapsto \sum_{i=1}^{n} < f\,(e_i\,)\,, y > e_i \ \ \textit{est linéaire.}$$

Proposition
Soit $f \in L(E)$ avec E euclidien, Si f admet un adjoint, alors f en admet un seul, et cet unique adjoint est appelé l'adjoint de f et noté f^*.
Preuve
Soient $g,\ h \in L(E)$ des adjoints de f. On a:
$\forall (x,y) \in E^2, \quad < f(x), y >=< x, g(y) >=< x, h(y) >\Longrightarrow$
$$< x, g(y) - h(y) >= 0;$$
$\forall (x,y) \in E^2$ d'où $g(y) - h(y) = 0\ \forall y \in E$, donc $h = g$.cqfd.

Définition
1) Un endomorphisme u de E qui vérifie $u^* = u$ est dit auto-adjoint ou endomorphisme symétrique. (Toute projection orthogonale et toute symétrie orthogonale sont des endomorphismes symétriques).
2) Un endomorphisme u de E qui vérifie $u^* = -u$ est dit anti-auto-adjoint ou endomorphisme antisymétrique.
3) Un automorphisme u de E qui vérifie $u^* = u^{-1}$ est dit automorphisme orthogonal.

Remarque
Soient l'ensemble des formes antisymétriques
$\mathcal{A}_2(E) = \{\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}\,;\, \forall x, y \in E,\ \varphi(x,y) = -\varphi(y,x)\}$ avec
E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et
$\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques
(i.e. $\forall A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}),\ A = -({}^tA)$).
On a un isomorphisme entre $\mathcal{A}_2(E)$ entre $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et alors
$\dim \mathcal{A}_2(E) = \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = n^2 - \dfrac{1}{2}n(n+1) = \dfrac{1}{2}n(n-1)$
car $\mathcal{M}_n = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ où $\mathcal{M}_n$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

Proposition
Soient $\lambda \in \mathbb{R},\ g,\ f \in L(E)$ admettant des adjoints, alors :
i) $\lambda f + g$ admet un adjoint et $(\lambda f + g)^* = \lambda f^* + g^*$
ii) Id_E admet un adjoint et $(Id_E)^* = Id_E$
iii) $g \circ f$ admet un adjoint et $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
iv) f^* admet un adjoint et $(f^*)^* = f$.
v) $\ker f^* = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ et $\operatorname{Im} f^* = (\ker f)^{\perp}$
vi) Si f est un automorphisme, $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$
Preuve
$\forall (x,y) \in E^2$,
i $< x, (\lambda f^* + g^*)(y) >= \lambda < x, f^*(y) > + < x, g^*(y) >$
$$= \lambda < f(x), y > + < g(x), y >$$
$$=< (\lambda f + g)(x), y > .$$

ii) $< x, Id_E^* \ (y) >=< x, y >=< Id_E \ (x), y >$
iii) $< x, (f^* \circ g^*)(y) >=< x, f^*(g^*(y)) >=< f(x), g^*(y) >$
$=< g(f(x)), y >=< (g \circ f)(x), y > .$
iv) $< x, f(y) >=< f(y), x >=< y, f^*(x) >=< f^*(x), y >$
$. =< x, (f^*)^* (y) > .$
Proposition
Si F est un sous-espace de E stable par $f \in L(E)$, alors son orthogonal $F^{\perp}$ est stable par f^*.
Preuve
Soit $y \in F^{\perp}$. $\forall x \in F$, on a $f(x) \in F$ et donc
$0 =< f(x), y >=< x, f^*(y) >$ ce qui montre que $f^*(y) \in F^{\perp}$.
Proposition
Etant donnée une base β de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n
$f \in \mathcal{S}_2(E)$ non dégénérée, un endomorphisme u de E dont
l'adjoint est u^*,
$B = Mat(f_*, \beta, \beta^*) = Mat(f, \beta) = Mat(f'_*, \beta, \beta^*)$
$U = Mat(u, \beta)$, $U^* = Mat(u^*, \beta)$. Alors :
$U^* = B^{-1}({}^tU)B$.
Proposition
$(E, < .,. >)$ est espace euclidien(ou préhilbertien réel) de dimension finie.
Tout endomorphisme de E admet un adjoint. De plus, pour tout f
de $L(E)$ et toute base orthonormale β de E : $Mat_\beta \ (f^*) =^t (Mat_\beta \ f)$.
Soit $f \in L(E)$. *On a :* $rang(f) = rang(f^*)$, $trace(f) = trace(f^*)$,
$\det(f) = \det(f^*)$, $Sp_{\mathbb{R}} \ (f^*) = Sp_{\mathbb{R}} \ (f)$.

1.10 Endomorphisme symétrique sur un espace euclidien

Proposition
Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien.
Le polynôme caractéristique P_f d'un endomorphisme symétrique $f \in \mathcal{S}(E)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
Preuve
Soit β une base orthonormale de E et $M = mat_\beta \ (f)$
Le polynôme caractéristique P_M de M est **scindé** sur $\mathbb{C}[X]$
(car c'est un corps algébriquement clos).
Soit λ une racine de P_M et $X = [x_j] \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, non nulle, telle que
$MX = \lambda X$. M étant symétrique réelle, on a ${}^t\overline{M} = M$, donc
$MX = \lambda X = \left({}^t\overline{M}\right) X \Longrightarrow \left({}^t\overline{X}\right) MX = \left({}^t\overline{X}\right)\left({}^t\overline{M}X\right) = \left({}^t\overline{MX}\right) X \Longrightarrow$

$\left({}^t\overline{X}\right)(\lambda X) = \overline{\lambda}\left({}^t\overline{X}\right)X$. D'où $\lambda^t\overline{X}X = \overline{\lambda}^t\overline{X}X$ puisque

${}^t\overline{X}X = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2$ est non nul, il vient alors que $\lambda = \overline{\lambda}$,

ce qui prouve que la valeur propre λ est réelle et P_f est scindé sur $\mathbb{R}[X]$.

Théorème

Tout endomorphisme symétrique f d'un $\mathbb{R}$-espace euclidien E est diagonalisable.

Plus précisement, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de E.

Preuve

Il se démontre par récurrence.

La proposition ci-dessus montre que f admet un vecteur propre e_1 que l'on peut supposer normé.

L'orthogonal F de e_1 est stable par $f^* = f$ qui induit sur F un endomorphisme symétrique g.

Il existe donc une base orthonormale $(e_2, e_3, ..., e_n)$ de F formée de vecteurs propres de g, donc de f. On constate que $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f.

Proposition

Soit β une base orthonormale d'un espace euclidien $(E, <, >)$. Alors :

f est auto-adjoint$\Longleftrightarrow Mat(f, \beta) = B$ est symétrique.

Dem :

$< f(x), y >=< x, f(y) >\Longleftrightarrow$

$\left({}^t(BX)\right)Y = \left({}^tX\right)\left({}^tB\right)Y = \left({}^tX\right)(BY) = \left({}^tX\right)BY$

Pour $\forall x, y \in E$ avec $X = Mat(x, \beta)$ et $Y = Mat(y, \beta)$ de là on a bien $\left({}^tB\right) = B$.

Lemme

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable et ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux(pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$).

Corollaire

Tout endomorphisme f auto-adjoint d'un espace euclidien $(E, <, >)$ est diagonalisable et ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux (pour $(E, <, >)$).(Mieux il existe une base de vecteurs propres orthonormale pour $(E, <, >)$).

Théorème

Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien et soit q une forme quadratique sur E. Il existe une base de E qui est à la fois orthonormale pour $<, >$ et orthogonale pour q.

Dem :

Soit β une base orthonormale de $(E, <,>)$, b la forme polaire de q et $B = Mat(b, \beta)$ c'est une matrice symétrique,enfin f un endomorphisme de E tel que $B = Mat(f, \beta)$ d'après proposition(supra) f est auto-adjoint pour $<,>$. Pour $\forall x, y \in E$ avec $X = Mat(x, \beta)$ et $Y = Mat(y, \beta)$,
on a : $b(x, y) = ({}^tX)\, BY = ({}^tX)(BY) =< x, f(y) >$.
Comme f est auto-adjoint pour $<,>$, il est diagonalisable. Soit donc $(b_1, ..., b_n)$ une base de vecteurs propres pour f et qui est orthonormale pour $<,>$.
Pour Conclure, $b(b_i, b_j) =< b_i, f(b_j) >=< b_i, \lambda_j b_j >= \lambda_j < b_i, b_j >= 0$
Si $i \neq j$, on rappelle que λ_j est valeur propre de f de vecteur propre b_j.
Proposition
Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique :
Il existe une matrice P orthogonale $P \in \mathcal{O}_n\ (\mathbb{R})$, telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

1.11 Produit mixte et produit vectoriel

Définition
Le **produit mixte** de n vecteurs : V_1, V_2, ...,V_n de $(E, < .,. >)$ espace euclidien(ou préhilbertien réel) de dimension finie, orienté
(i.e. le déterminant d'une matrice de passage d'une base à une autre garde un signe constant($+$ ou $-$)) est le **déterminant** des composantes (v_{ij}) des V_j dans une base orthonormale directe
(i.e. le déterminant d'une matrice de passage d'une base à une autre est positif, mieux c'est égal à 1 car on ira de base orthonormale à une base orthonormale de E).
Il sera noté $(V_1, V_2, ..., V_n)$ ou $[V_1, V_2, ..., V_n]$ ce nombre est unique, car quand on change de base orthonormale à une autre orthonormale, le déterminant de la matrice de passage est 1.
Théorème
Etant donné $n - 1$ vecteurs V_1, V_2, ...,V_{n-1} de l'espace euclidien orienté E_n (de dimension n), il existe un vecteur W unique tel que, pour tout vecteur V de E_n , on ait :
$< V, W >= (V, V_1, V_2, ..., V_{n-1}) = [V, V_1, V_2, ..., V_{n-1}]$.
Ce vecteur est appelé **produit vectoriel** des $n - 1$ vecteurs V_1, V_2, ...,V_{n-1}
et noté $V_1 \wedge V_2 \wedge ... \wedge V_{n-1}$. Il est remplacé par son opposé si on change l'orientation de E_n .
Preuve
L'application $\varphi : V \longmapsto (V, V_1, V_2, ..., V_{n-1})$ est une forme linéaire de

E_n dans $\mathbb{R}$; à cette forme φ on peut donc associer un vecteur W unique tel que $\varphi(V) = < V, W >$.Car $<,>$ est une forme bilinéaire symétrique définie et positive sur E_n un espace vectoriel de dimension finie.

Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs u et v de l'espace euclidien E, noté $u \wedge v$, est l'unique vecteur défini par :

(i) $u \wedge v = 0$ si u et v sont colinéaires ;

(ii) $u \wedge v = (\|u\| \, \|v\| \, sin(\widehat{u,v}))\, w$ sinon, où w désigne le vecteur unitaire orthogonal à u et v tel que le trièdre (u, v, w) soit direct.

Remarque

$sin(\widehat{u,v})$ dépend de l'orientation du plan(u, v).

Proposition

(i) Étant donné deux vecteurs u et v, $u \wedge v$ est orthogonal à u et v.

(ii) u et v sont colinéaires si et seulement si $u \wedge v = 0$.

(iii) Si u et v sont deux vecteurs unitaires non nuls orthogonaux, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe.

(iv) Soient u et v deux vecteurs. Alors $u \wedge v = -v \wedge u$

(v) le produit vectoriel est une forme bilinéaire alternée.

(vi) Soit l'endomorphisme de E $f_u : v \longmapsto u \wedge v$ pour $u \in E$ non nul,
$f_u = h_{\|u\|} \circ r_{\left(u, \frac{\pi}{2}\right)} \circ P_{u^\perp}$, où $h_{\|u\|}$ est l'homothésie vectorielle de rapport $\|u\|$, $r_{\left(u, \frac{\pi}{2}\right)}$ une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de u, et
$P_{u^\perp}$ une projection orthogonale sur la droite engendrée par $u^\perp$ dans le plan (u, v).

Fiche de T.D.

Exercice 1

$u = (x, y, z)\,,\ q(u) = 5x^2 + 7y^2 + 6z^2 - 4xz - 4yz.$

$u = (x, y, z, t)\,,\ q(u) = x^2+y^2+z^2+t^2-2xy+2xz+2xt+2yz.+2yt-2zt.$

1°) Décomposer chacune de ces formes en carrées de Gauss.

Donner la signature, le noyau, le rang, le cône isotrope de chacune.

2°) Montrer que pour chaque forme, il existe une base orthonormale de vecteurs propres pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel à base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$,
et $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f(x, y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 56x_3y_3 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) + 7(x_1y_3 + x_3y_1) - 18(x_2y_3 + x_3y_2)$$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base B.
   La forme bilinéaire f est-elle dégénerée ?
2. Déterminer la forme quadratique q associée à f dans la base B.
3. Décomposer q en somme de carrés indépendants.
   Préciser la signature et le rang de q.
4. Déterminer une base de E orthogonale pour f (ou q),
   et préciser l'expression de q dans cette base.
5. Soit $\varepsilon_1 = e_1$; $\varepsilon_2 = 2e_1 + e_2$; $\varepsilon_3 = -3e_1 + 2e_2 + e_3$.

Déterminer la matrice de f dans la base $B' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Exercice 3

Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels muni de sa base canonique $B = (E_1, E_2, E_3, E_4)$

où : $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(A, B) = \frac{1}{2}\left[(trA)(trB) - tr(AB)\right], \forall (A, B) \in E \times E.$$

a) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.

b) Déterminer la matrice de φ dans la base B.

Montrer que φ est non dégénerée.

2. a) Rappeler pourquoi l'on a $A^2 - (trA)A + (\det A) I_2 = 0$ pour tout $A \in E$.

b) Déduire de a) que la forme quadratique q associée à φ est donnée par : $q(A) = \det A$ pour tout $A \in E$.

Quel est l'ensemble des éléments isotropes pour q?

c) Démontrer la relation suivante :

$$(trA)\,(trB) - tr\,(AB) = \det\,(A+B) - \det A - \det B\ ,\ \ \forall\,(A,B) \in E \times E.$$

3. On appelle M la matrice $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de M, et montrer qu'on peut la choisir orthonormale
(pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$).

Déterminer la signature de q.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de base $B = (e_1, e_2, e_3)$.
On considère la forme quadratique q sur E définie par :

$$x = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i \longmapsto q\,(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

1.Définir la forme polaire β associée à q.Ecrire la matrice A de β dans la base B.

2. Préciser la signature et le rang de q.La forme β est-elle dégénerée ?

3. Déterminer une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E orthogonale pour β, et préciser l'expression de q dans cette base.

4. Déterminer une base $E^{\perp}$. Déterminer le noyau de β et un vecteur de E isotrope pour β.

5. Soit u un endomorphisme de E et φ une forme bilinéaire symétrique non dégénerée tels que $\forall\,(x,y) \in E^2 \ \ \beta\,(x,y) = \varphi\,(u\,(x)\,,y)$.

a) Déterminer la matrice A de u dans la base B en fonction des matrices M de β et N de φ dans cette même base.

b) Montrer que les vecteurs propres de u associés à des valeurs propres de u sont orthogonaux pour β et φ à la fois.

Exercice 5

Soit $E = C\,([-1,1]\,,\mathbb{R})$ structuré en espace préhilbertien réel à l'aide du produit scalaire

$$(f,g) \in E \times E \longmapsto < f,g > = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\,(x)\,g\,(x)\,dx.$$

Pour $i = \overline{0,3}$ on considère le polynôme $P_i\,(x) = x^i$.

1. Montrer que $\{P_0, P_1, P_2\}$ est une famille libre mais non orthogonale de E.

2. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par P_0, P_1 et P_2.

a) Construire par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, une base orthonormée $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$ de F.

b) Soit $\overline{P_3}$ la projection orthogonale de P_3 sur F.
Exprimer $\overline{P_3}$ dans la base $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$ de F, et calculer la distance de P_3 à F.

Exercice 6

Soit $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire :$(M,N) \longmapsto < M,N >= tr\left({}^tMN\right)$.
tr est la trace d'une matrice et $({}^tM)$ est la transpoée de M.

1. Montrer que $(. \mid .)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre n, $E = M_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel V_1 des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$.
3. a) Déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel V_2 des matrices scalaires de $M_n(\mathbb{R})$.

b) Etant donné $M \in M_n(\mathbb{R})$, trouver la projection orthogonale de M sur V_2 et sur $V_2^{\perp}$.

Exercice 7

Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré ≤ 2.
On munit E du produit scalaire suivant :

$$(P,Q) \in E \times E \longmapsto < P,Q >= \int_0^1 P(x)\,Q(x)\,dx.$$

Soit u l'endomorphisme de E défini par $\forall P \in E,\ \ u(P) = P'$.
Déterminer l'endomorphisme adjoint u^* de u relativement au produit scalaire $< .,. >$.
Préciser $u^*(P)$ lorsque $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

Exercice 8

Soit $(E, < .,. >)$ un espace euclidien et u un endomorphisme orthogonal de E.

1. Vérifier que les seules valeurs propres réelles possibles de u sont -1 et 1.
2. On suppose $\dim E$ impair.

a) Montrer que si $\det u = 1$, alors u admet la valeur propre 1 avec un ordre de multiplicité impair.
b) Montrer que si $\det u = -1$, alors u admet la valeur propre -1 avec un ordre de multiplicité impair.

3. On suppose $\dim E$ pair.

a) Donner un exemple où $\det u = 1$ et où ni -1 ni 1 ne sont valeurs propres de u.
b) Montrer que si $\det u = -1$, alors u admet les valeurs propres -1 et 1 avec des ordres de multiplicité impairs.

Exercice 9

I. Soit $\mathbb{R}^3$ structuré en espace euclidien réel à l'aide du produit scalaire usuel.
On considère une rotation de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un automorphisme orthogonal u de $\mathbb{R}^3$de déterminant égal à 1. On suppose $u \neq id_{\mathbb{R}^3}$.

1. Montrer que l'ensemble D des points invariants par u est une

droite vectorielle(D est dit axe de rotation). Soit P le plan vectoriel orthogonal à D.

Montrer que P est stable par u et que la restriction de u à P est une rotation(P est dit plan de rotation).

2. Ecrire la matrice de u dans une base orthonormée $B' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in P$ et $\varepsilon_3 \in D$.

En déduire que le cosinus de l'angle θ de la rotation induite sur P par u est donné par $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(tru - 1)$.

II. On suppose maintenant que u est une symétrie de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un automorphisme orthogonal u de $\mathbb{R}^3$ de déterminant égal à -1 et $u \neq id_{\mathbb{R}^3}$.

1. Montrer que l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $u(x) = -x$ est une droite vectorielle.

Soit P le plan vectoriel orthogonal à D. Montrer que P est stable par u et que la restriction de u à P est une rotation.

2. Ecrire la matrice de u dans une base orthonormée $B' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in P$ et $\varepsilon_3 \in D$.

En déduire que u est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une rotation dont le cosinus de l'angle θ est donné par $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(tru + 1)$.

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, on considère les endomorphismes u et v dont les matrice dans la base canonique sont :

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad V = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{3} & \sqrt{2} & 2+\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Précicer la nature de u et v ainsi que leurs éléments caractéristiques.

Exercice 11

Soit $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ une famille de k vecteurs d'un espace préhilbertien réel $(E, <.,.>)$. On désigne par $G(v_1, v_2, ..., v_k)$ la matrice de $M_k(\mathbb{R})$ dont le terme général est $< v_i, v_j >$.

1. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $v_1, v_2, ..., v_k$ soient linéairement indépendants est $G(v_1, v_2, ..., v_k) \neq 0$.

Dans la suite les $v_1, v_2, ..., v_k$ sont linéairement indépendants et on désigne par V le sous-espace vectoriel de E engendré par $v_1, v_2, ..., v_k$.

2. Montrer que $\det G(v_1, v_2, ..., v_k) > 0$.

3. Soit $v \in E \backslash V$.

a) Montrer que la projection orthogonale $\bar{v}$ de v sur V s'exprime sous la forme $\bar{v} = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$ où $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ est solution du système linéaire suivant

$$G(v_1, v_2, ..., v_k)\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}<v, v_1>\\ <v, v_2>\\ \vdots\\ <v, v_k>\end{bmatrix}.$$

En déduire que $\|v-\bar{v}\| = d_V^2(v) = \dfrac{\det G(v_1, v_2, ..., v_k, v)}{\det G(v_1, v_2, ..., v_k)}$.

Exercice 12

Soit $\mathbb{R}[x]$(resp. $\mathbb{R}_n[x]$) l'espace vectoriel des polynômes à coéfficients réels de degré quelconque(resp. inférieur ou égal à n)

0n définit par P_i la fonction $x \longmapsto P_i(x) = x^i$, pour $i \in \mathbb{N}$.

1. On pose $\forall P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $<P, Q>= \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} P(x) Q(x)\, dx$.

Montrer que $<.,.>$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.

2. On se propose de calculer la projection orthogonale de P_3 sur $\mathbb{R}_2[x]$ et la distance de P_3 à $\mathbb{R}_2[x]$, par trois méthodes différentes.

a) Calculer les déterminants de Gram suivants : $G(P_{0,}P_1, P_2)$ et $G(P_{0,}P_1, P_2, P_3)$.

En déduire la projection orthogonale $\overline{P_3}$ de P_3 sur $\mathbb{R}_2[x]$ et $\|P_3 - \overline{P_3}\|$.

b) Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[x]$ à partir de $\{P_{0,}P_1, P_2\}$ par la méthode d'orthonormalisation de **Schmidt**. En déduire $\overline{P_3}$ et $\|P_3 - \overline{P_3}\|$.

c) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $f(a, b, c) = \|P_3 - aP_2 - bP_1 - cP_0\|^2$.

Montrer que f est une fonction quadratique sur $\mathbb{R}^3$ et calculer $\nabla f(a, b, c)$.

En déduire que le minimun global sur $\mathbb{R}^3$ est atteint et déterminer :

$$\bar{f}(a, b, c) = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} f(a, b, c).$$

Exercice 13

I.Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que $B = e^A$ est orthogonal avec $\det B = 1$ $(B \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}))$.

2. Soit λ_1, λ_2, ...,λ_n les valeurs propres complexes de A. Montrer que les valeurs propres de B sont e^{λ_1}, e^{λ_2}, ..., e^{λ_n}, et $\det B = 1$ $(B \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}))$.

3. On suppose $n = 3$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{bmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Calculer $B = e^A$ et déterminer les éléments caractéristiques de la rotation B.

II. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique.

1. Montrer que $B = e^A$ est symétrique définie positive et préciser les valeurs propres de B en fonction de celles de A.
2. Inversement, soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Montrer qu'il existe $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $B = e^A$.

Exercice 14

On considère une rotation u de l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, $u \neq id_{\mathbb{R}^3}$. On oriente l'axe D(de la rotation u) par le choix d'un vecteur unitaire $v \in D$.
1. Montrer que le sinus de l'angle θ de u est déterminé par $\sin\theta = \dfrac{1}{\|x\|^2} \det[x, u(x), v]$.
2. Soit U la matrice u dans une base orthonormale directe.
   a) Quelles sont les rotations pour lesquelles $({}^tU) = U$?
   b) On suppose $({}^tU) = U$.
   Montrer que $A = \dfrac{1}{2}(U - ({}^tU))$ est de la forme :
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix},$$ où (a, b, c) est un vecteur directeur de l'axe D de la rotation u.
   c) Montrer que $A = (\sin\theta) \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}$, où (α, β, γ) est un vecteur directeur unitaire orientant D et θ l'angle de la rotation u.

Exercice 15

Soit E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie n muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée φ.
1. Montrer que si $n = 1$, E ne possède pas de vecteur isotrope non nul.

Dans la suite, on suppose $n \geq 2$ et que E possède un vecteur isotrope non nul v_1.

On se propose de montrer que E possède une base formée de vecteurs isotropes.
2. a) Montrer que si (v_1, u) est une base de E, alors u n'est pas orthogonal à v_1. En déduire $(v_1)^{\perp}$.
   b) Montrer qu'il existe un vecteur isotrope v_2 de E tel que $\varphi(v_1, v_2) = 1$. Déterminer alors l'ensemble des vecteurs isotropes de E.
3. Réciproquement, montrer que si E est un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\beta = (e_1, e_2)$, alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique non dégénérée φ telle

que e_1 et e_2 soient isotropes et $\varphi(e_1, e_2) = 1$.
4. On suppose $n \geq 3$.
On dit qu'un sous ensemble F de E est non singulier si la restriction de φ à F est non dégénérée.

a) Monter que si $u \in E$ n'est pas orthogonal à v_1, alors (v_1, u) est libre et le plan engendré par (v_1, u) est non singulier.

b) Soit P un plan non singulier contenant v_1. Montrer qu'il existe un vecteur isotrope v_2 de P tel que $\varphi(e_1, e_2) = 1$.

c) Soit $F = P^{\perp}$ et $(e_3, e_2, ...e_n)$ une base de F. Montrer que $\forall i \in \overline{3, n}$, le vecteur $u_i = v_2 + e_i$ n'est pas orthogonal à v_1. En déduire une base de E formée de vecteurs isotropes.

Bibliographie

[1] Algèbre-Géométrie 1 H Prépa Maths Collection Hachette Supérieur

[2] Algèbre de J. Lelong-Ferrand et J.M.Arnaudiès Dunod

[3] Toute l'algèbre de la licence de Jean-Pierre Escofier Dunod

[4] Algèbre et Géométrie de D. Guinin et B.Joppin Précis Bréal

[5] Algèbre 2 de Jean-Marie Monier Dunod

[6] Memory of A concrete Introduction to classical Lie groups
via the exponential map of Jean Gallier, university of Pennsylvania
Philadelphia, USA