Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Montrer que les polynômes $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$ forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Pour quelles valeurs de a et b la série de terme général $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$ est-elle convergente ? Calculer alors la somme de cette série.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Nature et somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, avec $u_n = \dfrac{1}{n}\Big(\mathrm{E}\,(\sqrt{n+1}) - \mathrm{E}\,(\sqrt{n})\Big)$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^3 - n}$, avec $n \geq 2$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Nature et somme de la série $\sum u_n$, où $u_n = \arctan \dfrac{1}{n^2+n+1}$

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Utiliser le fait que $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$ sont à degrés échelonnés.

Vérifier que $x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2)$.

En déduire $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + 3\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 5\mathrm{e}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Montrer que $u_n = \sqrt{n}\left(1 + a + b + \left(\frac{a}{2} + b\right)\frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

En déduire que $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow a = -2$ et $b = 1$.

En cas de convergence, montrer que $\sum\limits_{n=0}^{N} u_n = \frac{1}{\sqrt{N+2}+\sqrt{N+1}} - 1$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $\mathrm{E}\left(\sqrt{n+1}\right) > \mathrm{E}\left(\sqrt{n}\right) \Leftrightarrow n = k^2 - 1$, avec $k \geq 2$.

En déduire $S(N^2-1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2N} - \frac{1}{2(N+1)}$ puis $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \lim\limits_{N\to\infty} S(N^2-1) = \frac{3}{4}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Vérifier l'égalité $\frac{1}{n(2n-1)} = \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{n}$.

En déduire $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)} = 2\ln 2$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Décomposer $\frac{1}{n^3-n}$ en éléments simples.

En déduire $\sum\limits_{n=2}^{N} u_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N}\right)$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Montrer que $\frac{1}{n^2+n+1} = \tan(\theta_{n+1} - \theta_n)$, avec $\theta_n = \arctan n$.

En déduire $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\pi}{2}$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

$1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$ sont à degrés échelonnés, donc linéairement indépendants. Puisqu'ils sont quatre et qu'ils appartiennent à $\mathbb{R}_3[X]$ (qui est de dimension 4), ils en constituent une base.

On cherche à écrire x^3 sous la forme $x^3 = a + bx + cx(x-1) + dx(x-1)(x-2)$.

On trouve $a = 0$ (se placer en $x = 0$) et $d = 1$ (considérer les coefficients dominants.)

Avec $x = 1$ et $x = 2$, on trouve $\begin{cases} 1 = a + b \\ 8 = a + 2b + 2c \end{cases}$ et donc $\begin{cases} b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(n + 3n(n-1) + n(n-1)(n-2)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 5\mathrm{e} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \sqrt{n}\left(1 + a\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} + b\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{1/2}\right)$

A l'origine, on a $(1+x)^m = 1 + mx + \mathrm{O}(x^2)$ et en particulier $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \mathrm{O}(x^2)$.

On en déduit $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ainsi $u_n = \sqrt{n}\left(1 + a + b + \left(\frac{a}{2} + b\right)\frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

La série $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow 1 + a + b = \frac{a}{2} + b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$.

De cette manière $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

On a alors, pour tout $n \geq 0$: $u_n = \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} = v_{n+1} - v_n$ avec $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N}(v_{n+1} - v_n) = v_{N+1} - v_0 = \sqrt{N+2} - \sqrt{N+1} - 1 = \frac{1}{\sqrt{N+2} + \sqrt{N+1}} - 1$.

On fait tendre N vers $+\infty$ et on trouve $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = -1$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Pour tout entier k, $\mathrm{E}(\sqrt{n}) = k \Leftrightarrow k^2 \le n < (k+1)^2$.

Les seuls entiers $n \ge 1$ tes que $\mathrm{E}(\sqrt{n+1}) > \mathrm{E}(\sqrt{n})$ sont donc les $n = k^2 - 1$, avec $k \ge 2$.

Pour ces entiers, on a $\mathrm{E}(\sqrt{n}) = k-1$ et $\mathrm{E}(\sqrt{n+1}) = k$. Posons $S(N) = \sum\limits_{n=1}^{N} u_n$.

Puisque les u_n sont ≥ 0, il suffit de calculer par exemple $\lim\limits_{N\to\infty} S(N^2-1)$.

Or : $S(N^2-1) = \sum\limits_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2-1} = \sum\limits_{k=2}^{N}\left(\frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)}\right) = \sum\limits_{k=1}^{N-1}\frac{1}{2k} - \sum\limits_{k=3}^{N+1}\frac{1}{2k} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2N} - \frac{1}{2(N+1)}$

Par passage à la limite, on en déduit la convergence de $\sum u_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \lim\limits_{N\to\infty} S(N^2-1) = \frac{3}{4}$.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On effectue une décomposition en éléments simples : $\frac{1}{n(2n-1)} = \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{n}$.

Ainsi $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n(2n-1)} = 2\sum\limits_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = 2\sum\limits_{n=1}^{2N}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

On fait tendre N vers $+\infty$ et on trouve $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)} = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 2\ln 2$.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On décompose en éléments simples : $\frac{1}{n^3-n} = \frac{1}{n(n-1)(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-1} + \frac{c}{n+1}$.

On trouve $a = -1$, $b = c = \frac{1}{2}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=2}^{N} u_n = \sum_{n=2}^{N}\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{2(n-1)} + \frac{c}{2(n+1)}\right) = -\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+1}\\
&= -\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+1}\frac{1}{n} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1}\right)\\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N}\right).
\end{aligned}$$

On fait tendre N vers $+\infty$ et on trouve : $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n} = \frac{1}{4}$.

Corrigé de l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Le terme u_n est équivalent à $\frac{1}{n^2}$ quand $n \to \infty$. On en déduit la convergence de $\sum u_n$.

D'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n} = \tan(\theta_{n+1} - \theta_n)$, avec $\theta_n = \arctan n$.

On en déduit $u_n = \theta_{n+1} - \theta_n$, puis $\sum\limits_{n=0}^{N} u_n = \theta_{N+1} - \theta_0 = \theta_{N+1} = \arctan(N+1)$.

En faisant tendre N vers $+\infty$, on trouve $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \arctan\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\pi}{2}$.