Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = \dfrac{n(x^3+x)}{nx+1}\,\mathrm{e}^{-x}.$

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions (f_n) définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = n^k x^2 \mathrm{e}^{-nx}$, où k est un réel donné.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = \dfrac{n^3 x}{n^4+x^4}.$

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, lipschtiziennes de même rapport $M \geq 0$.

On suppose que la suite (f_n) est simplement convergente sur $[a,b]$, vers une application f.

Montrer que la convergence est uniforme.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+x^n)}.$

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

– Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : x \mapsto \begin{cases} (x^2+1)\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

– Il n'y a pas CVU sur $[0, a]$, pour tout $a > 0$.

Montrer qu'il y a CVU sur $[a, +\infty[$.

On montrera que $\forall x \geq a > 0,\ 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{\mathrm{e}(na+1)}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

– Se limiter à $x \geq 0$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers 0.

– Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer que si $k < 2$, il y a CVU sur $\mathbb{R}^+$ vers 0.

Si $k \geq 2$, montrer qu'il y a CVU sur tout intervalle $[a, +\infty[$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

– Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est simplement convergente, sur $\mathbb{R}^+$, vers la fonction nulle.

– Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer qu'il y a CVU vers 0 sur tout intervalle $[0, a]$, avec $a > 0$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

– On traite le cas particulier $f = 0$.

Se donner $\varepsilon > 0$ et une subdivision (x_k) de $[a, b]$ de pas inférieur à ε.

En déduire qu'il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x)| \leq (M+1)\varepsilon$.

– Dans le cas général, montrer que f est M-lispchitzienne sur $[a, b]$.

Considérer alors les applications $g_n = f - f_n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Sur $[0, 1]$, minorer $1 + x^n$ par 1. Sur $[1, +\infty[$, minorer $1 + x^n$ par x^n.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

- **Convergence simple** :

  Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n(0)=0$. Pour tout $x\neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} (x^2+1)\mathrm{e}^{-x}$ quand $n\to\infty$.

  Ainsi $(f_n)_{n\geq 1}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : x \mapsto \begin{cases}(x^2+1)\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

- **Convergence uniforme** :

  Les applications f_n sont continues en 0, mais pas l'application f.

  La convergence de $(f_n)_{n\geq 1}$ n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$, ni même sur $[0,a]$ avec $a>0$.

  On va montrer qu'il a convergence uniforme sur $[a,+\infty[$, où $a>0$ est donné.

  Pour tout $x>0$, on a $f(x)-f_n(x)=\left(x^2+1-n\frac{x^3+x}{nx+1}\right)\mathrm{e}^{-x}=\frac{x^2+1}{nx+1}\mathrm{e}^{-x}=\frac{f(x)}{nx+1}$.

  Remarque :

  $f(\frac{1}{n})-f_n(\frac{1}{n})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+1\right)\exp(-\frac{1}{n})$ tend vers $\frac{1}{2}$ et non vers 0 quand $n\to\infty$.

  Cela confirme que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ n'est pas CVU vers f sur $\mathbb{R}^+$.

  On a $f'(x)=(2x-x^2-1)\mathrm{e}^{-x}=-(x-1)^2\mathrm{e}^{-x}\leq 0$: f est décroissante et ≥ 0 sur $\mathbb{R}$.

  En particulier sur $\mathbb{R}^+$ on a : $0\leq f(x)\leq f(0)=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

  On en déduit : $\forall x\geq a>0,\quad 0\leq f(x)-f_n(x)=\frac{f(x)}{nx+1}\leq\frac{1}{\mathrm{e}(na+1)}$.

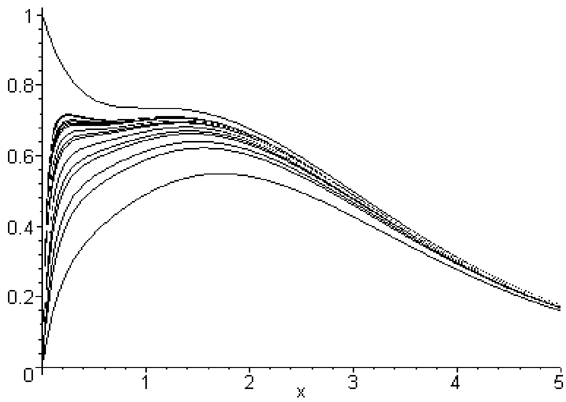
  Ainsi $\sup\limits_{x\geq a}|f(x)-f_n(x)|$ tend vers 0 quand $n\to+\infty$.

  Conclusion : la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est uniformément convergente vers f sur $[a,+\infty[$.

  Remarque :

  Ici il est maladroit d'étudier les variations de $f-f_n$ sur $\mathbb{R}^+$ (la dérivée n'est pas simple.)

Voici les courbes de f (au dessus des autres) et des trente premières f_n. On vérifie facilement que $f_n\leq f_{n+1}$ pour tout n : la courbe de f_{n+1} est donc toujours "au-dessus" de celle de f_n.



CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

- **Convergence simple** :

  On constate que si $x < 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$. On se limitera donc à $x \geq 0$.

  Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f_n est nulle en $x = 0$.

  Si $x > 0$, alors $0 < \mathrm{e}^{-x} < 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \mathrm{e}^{-nx} = \lim\limits_{n\to\infty} n^k (\mathrm{e}^{-x})^n = 0$ (croissance comparée).

  La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est donc simplement convergente, sur $\mathbb{R}^+$, vers la fonction nulle.

- **Convergence uniforme** :

  On étudie les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$.
  On constate que $f_n'(x) = n^k x(2 - nx)\mathrm{e}^{-x}$ s'annule en $x_n = \dfrac{2}{n}$.

  En ce point la fonction positive f_n atteint son maximum $M_n = f_n(x_n) = n^{k-2}\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$.

  - Si $k < 2$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$: La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est CVU sur $\mathbb{R}^+$ vers 0.

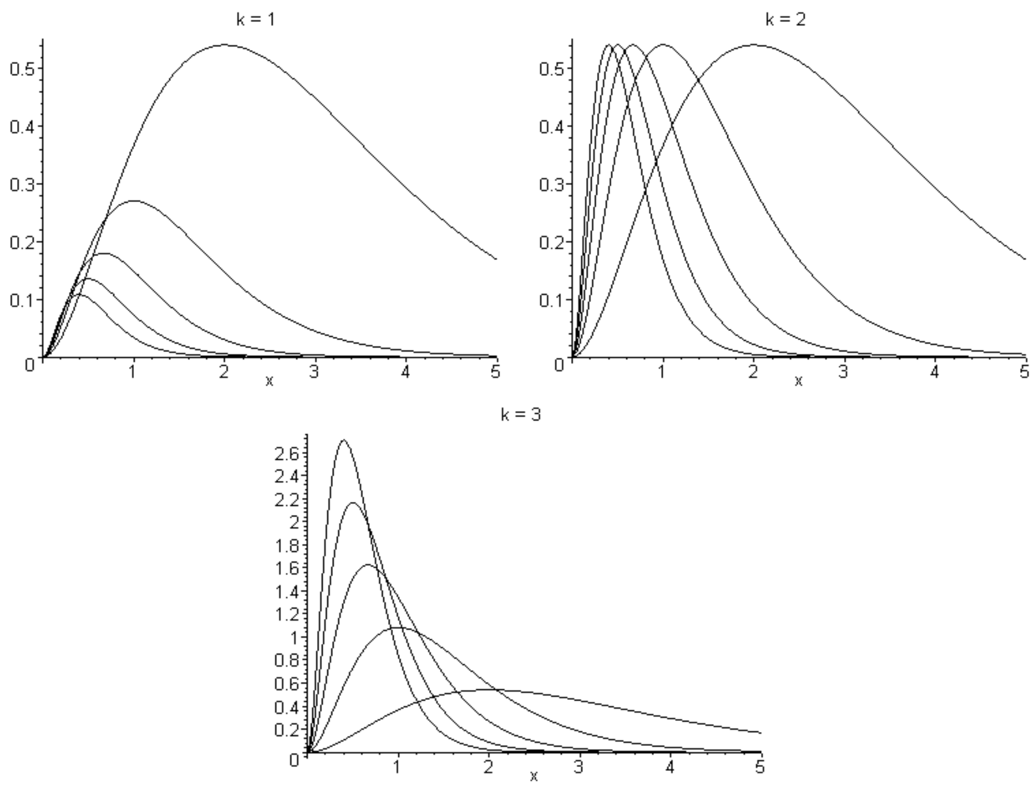
  - Si $k \geq 2$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} M_n \neq 0$: Il n'y a plus convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

    Il y a cependant convergence uniforme sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.

    En effet, dès que $\dfrac{2}{n} \leq a$, c'est-à-dire dès que $n \geq \dfrac{2}{a}$, alors f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$.

    Dans ces conditions, $\sup\limits_{x\geq a} |f_n(x)| = f_n(a)$, qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

On a représenté $f_1, f_2, \cdots, f_5$, sur le segment $[0, 5]$, pour les trois valeurs $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$.



Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

– **Convergence simple** :

Notons tout d'abord que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$.

Pour tout $x > 0$, on constate que $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{x}{n}$, qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est donc simplement convergente, sur $\mathbb{R}^+$, vers la fonction nulle.

– **Convergence uniforme** :

On a $f_n(n) = \frac{1}{2}$. Cela suffit à prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est cependant CVU vers 0 sur tout intervalle $[0, a]$, avec $a > 0$.

Sur cet intervalle on peut en effet majorer n^3x par n^3a et minorer $n^4 + x^4$ par n^4.

On en déduit : $\sup\limits_{0\leq x\leq a} |f_n(x)| \leq \frac{a}{n}$, quantité qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

– **Autre méthode** (moins rapide ici) :

On vérifie facilement que $f_n'(x) = -\frac{n^3(3x^4-n^4)}{(n^4+x^4)^2}$.

L'application positive f_n trouve son maximum M_n en $x_n = \frac{n}{\sqrt[4]{3}}$, et $M_n = \frac{1}{4}3^{3/4} \approx 0.57$.

Le fait que M_n ne tende pas vers 0 quand $n \to \infty$ confirme qu'il n'y a pas CVU sur $\mathbb{R}^+$.

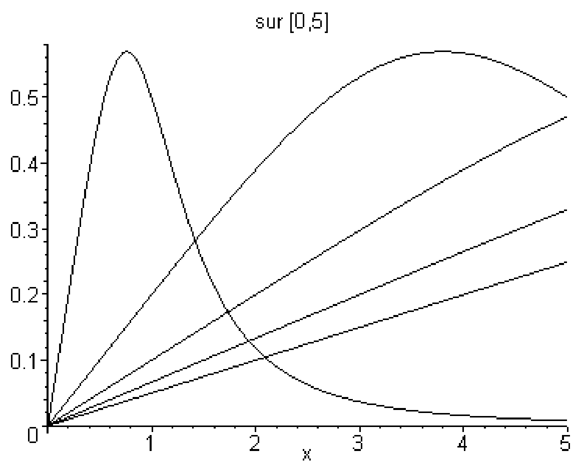
Fixons $a > 0$: dès que $x_n \geq a$, donc dès que $n \geq a\sqrt[4]{3}$, f_n est croissante sur $[0, a]$.

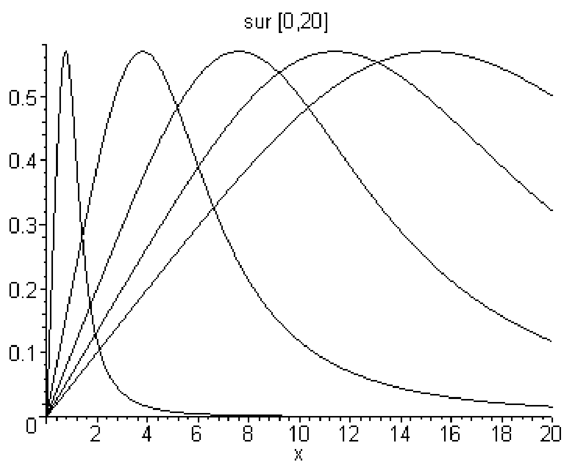
Dans ces conditions $\sup\limits_{0\leq x\leq a} |f_n(x)| = f_n(a)$ qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Cela prouve la convergence uniforme sur $[0, a]$.

On a représenté les fonctions $f_1, f_5, f_{10}, f_{15}, f_{20}$, sur le segment $[0, 5]$ puis sur le segment $[0, 20]$.

On doit imaginer que quand n augmente, la courbe $y = f_n(x)$ se “déforme” vers la droite.





Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

– Cas particulier $f = 0$:

On se donne un réel ε strictement positif.

On considère une subdivision $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_p = b$ telle que $x_{k+1} - x_k \leq \varepsilon$ pour tout entier k.

Soit x un élément quelconque de $[a, b]$. Il existe un indice k tel que $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

Avec ces notations, et pour tout entier n :

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |f_n(x) - f_n(x_k) + f_n(x_k)| \leq |f_n(x) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k)| \\ &\leq M\,|x - x_k| + |f_n(x_k)| \leq M\varepsilon + |f_n(x_k)| \end{aligned}$$

Pour chaque entier k, la suite de terme général $f_n(x_k)$ converge vers 0 (hypothèse de convergence simple.)

Il en est donc de même de la suite de terme général $\lambda_n = \sup\limits_{0 \leq k \leq p} |f_n(x_k)|$.

En particulier, il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \lambda_n \leq \varepsilon$.

On en tire, pour tout entier $n \geq n_0$ et pour tout x de $[a, b]$: $|f_n(x)| \leq M\varepsilon + \lambda_n \leq (M + 1)\varepsilon$.

Autrement, dit, $n \geq n_0 \Rightarrow \sup\limits_{x \in [a,b]} |f_n(x)| \leq (M + 1)\varepsilon$. On en déduit $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = 0$.

Conclusion : la suite (f_n) est uniformément convergente, sur $[a, b]$, vers la fonction nulle.

– Cas général :

Pour tout entier n et pour tous réels x et y de $[a, b]$, on a $|f_n(x) - f_n(y)| \leq M\,|x - y|$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette inégalité, on trouve : $|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$.

L'application f est donc M-lispchitzienne sur $[a, b]$.

Il en est alors de même des applications $g_n = f - f_n$.

Par hypothèse, la suite g_n converge simplement vers la fonction nulle. L'étude précédente montre que cette convergence est uniforme.

Ainsi la suite (f_n) est uniformément convergentesur $[a, b]$ vers f : c'est ce qu'il fallait démontrer.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Sur le segment $[0, 1]$, on minore $1 + x^n$ par 1, et on trouve $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Sur l'intervalle $[1, +\infty[$, on minore $1 + x^n$ par x^n, et on trouve $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{nx^{n-1}} \leq \frac{1}{n}$.

On constate donc que $\sup\limits_{x\geq 0} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$.

Conclusion : la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est uniformément convergente, sur $\mathbb{R}^+$, vers la fonction nulle.