DETERMINANTS - COMPLEMENTS SUR LES MATRICES - SYSTEMES D'EQU

Dans ce chapitre, $\mathbb{k}$ *est un corps commutatif (en général* $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{k} = \mathbb{C}$*),* E *est un* $\mathbb{k}$*-espace vectoriel de dimension finie* n*,* $\mathcal{L}(E)$ *est l'ensemble des endomorphisme de* E*,* $M_n(\mathbb{k})$ *est l'ensemble des matrices carrées d'ordre* n *à coefficients dans* $\mathbb{k}$ *et* $M_{m,n}(\mathbb{k})$ *est l'ensemble des matrices de format* (m,n) c.à.d de m *lignes* n *colonnes à coefficients dans* $\mathbb{k}$.

1 DETERMINANTS

1.1 Outils de base

1.1.1 Signature d'une permutation

Nous exposons sommairement ici les notions et résultats de la théorie des groupes symétriques utiles à la définition, à la compréhension et au calcul du déterminant. L'approfondissement de ces notions et la preuve des résultats produits se font en 3$^{\text{ème}}$ *année de licence dans le cours de Théorie des Groupes et Anneaux.*

Le groupe symétrique d'indice n

Définition 2.1: *Soit* $\emptyset \neq X$ *un ensemble fini; on apelle permutation de* X *toute bijection de* X *dans* X.

On note $S(X)$ l'ensemble des permutations de X.

Proposition 2.1: Soit $\emptyset \neq X$ un ensemble fini de n éléments; alors on a:
- $Card(S(X)) = n!$
- $(S(X), \circ)$ est un groupe.

Définition 2.2: *le groupe* $(S(X), \circ)$ *avec* $X = \{1, 2, ..., n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *est appelé le groupe symétrique d'indice* n *et noté* S_n

Notation: un élément σ de S_n est noté

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & . & n \\ i_1 & i_2 & . & . & . & i_n \end{pmatrix} \text{ avec } \forall k \in X = \{1, 2, ..., n\},\ i_k = \sigma(k).$$

Exemple 2.1: $S_1 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$; $S_2 = \{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\}$; $S_3 = \{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Dans le reste de cette section (jusqu'à l'exemple 2.2) on suppose $n > 1$

Cycles -transpositions **Définitions 2.3:** - *Un cycle de longueur* p $(2 \leq p \leq n)$ *ou un p-cycle de* S_n *est un élément* ρ *de* S_n *pour lequel il existe une partie* $F = \{i_1, i_2, ...i_p\}$ *de* X *appelée support de* ρ *vérifiant:*

$$\rho(i_j) = i_{j+1} \text{ pour } 1 \leq j \leq p-1;\ \rho(i_p) = i_1 \text{ et } \rho(k) = k, \text{pour } k \notin F.$$

(on prend $p \neq 1$ car un cycle de longueur 1 serait simplement égal à Id_X et serait de support vide).

On note alors $\rho = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix}$

(exemple: le cycle $\rho = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ de S_5 est la permutation de $\{1,2,3,4,5\}$ définie par: $\rho(2) = 3$; $\rho(3) = 5$; $\rho(5) = 2$; $\rho(1) = 1$; $\rho(4) = 4$ qui pouvait donc être notée: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

- *une transposition est un 2-cycle.*

Proposition 2.2: *un p-cycle est un produit de* $p-1$ *transpositions. Plus précisément on a:*

$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_2 & i_3 \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} i_{p-i} & i_p \end{pmatrix}.$

Proposition 2.3: *Toute permutation* $\neq Id_X$ *s'écrit de manière unique comme produit de cycles de supports disjoints (modulo une permutation des cycles).*

Corollaire: *Toute permutation est produit de transpositions*

Proposition 2.4 (et définition) *La parité du nombre de transpositions dans la décomposition d'une permutation en produit de transpositions est indépendante de la décomposition choisie.*

Une permutation est dite paire (resp. impaire) si elle est produit d'un nombre pair (resp impair) de transpositions

Signature d'une permutation *Soit* σ *un élément de* S_n. *On apelle signature de* σ *l'entier*

$$Sgn\sigma = \begin{cases} 1 \text{ si } \sigma \text{ est une permutation paire} \\ -1 \text{ si } \sigma \text{ est une permutation impaire} \end{cases}$$

Proposition 2.5: *L'application* $\varepsilon : \begin{array}{c} S_n \longrightarrow \{-1,1\} \\ \sigma \longmapsto Sgn\sigma \end{array}$ *est un morphisme de groupe.*

Corollaire et définition : *L'ensemble des permutations paires est un sous groupe de* S_n *appelé le groupe alterné d'indice* n *et noté* A_n.

Pour toute transposition τ *de* S_n, *l'application* $\sigma \longmapsto \sigma \circ \tau$ *(resp* $\tau \circ \sigma$*) réalise une bijection de l'ensemble des permutations paires dans l'ensemble des permutations impaires.*

En conséquence, il y a autant de permutations paires.que de permutations impaires.dans S_n.

Exemple 2.2: Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 2 & 8 & 10 & 7 & 5 & 12 & 3 & 11 & 1 & 9 & 6 \end{pmatrix}$

Décomposer σ en produit de cycles de supports disjoints, en produit de transpositions et calculer sa signature.

σ en produit de cycles de supports disjoints:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 & 12 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 11 \end{pmatrix}$

σ en produit de transpositions:

$\sigma = (\ 1 \quad 4\ )(\ 4 \quad 10\ )(\ 3 \quad 8\ )(\ 5 \quad 7\ )(\ 7 \quad 12\ )(\ 12 \quad 6\ )(\ 9 \quad 11\ )$

σ est produit de 7 transpositions, donc elle est impaire; alors $Sgn\sigma = -1$

1.2 Forme p-linéaire

1.2.1 Définitions

- *une forme p-linéaire sur E $(p \in \mathbb{N}^*)$ est une application f :* $\begin{array}{c} E^p \longrightarrow \mathbb{k} \\ (v_1, v_2, ..., v_p) \longmapsto f(v_1, v_2, ..., v_p) \end{array}$ *linéaire par rapport à chaque composante c.à.d telle que pour chaque $j \in \overline{1,p}$, si on fixe v_i pour $i \neq j$, alors la fonction f_j :* $\begin{array}{c} E \longrightarrow \mathbb{k} \\ v \longmapsto f_j(v) = f(v_1, ..., v_{j-1}, v, v_{j+1}, ..., v_p) \end{array}$ *est linéaire.*

En d'autres termes $f : E^p \longrightarrow \mathbb{k}$ est p-linéaire si pour chaque $j \in \overline{1,p}$ et $\forall v_i \in E$, $i \in \overline{1,p} \setminus \{j\}$, $\forall v, w \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{k}$ on a:

$f(v_1, ...v_{j-1}, v + w, v_{j+1}, ..., v_p) = f(v_1, ...v_{j-1}, v, v_{j+1}, ..., v_p) + f(v_1, ...v_{j-1}, w, v_{j+1}, ..., v_p)$;

$f(v_1, ...v_{j-1}, \lambda v, v_{j+1}, ..., v_p) = \lambda f(v_1, ...v_{j-1}, v, v_{j+1}, ..., v_p)$

- *Une forme p-linéaire f sur E est dite alternée si $f(v_1, v_2, ..., v_p) = 0$ dès que deux termes quelconques de la suite $(v_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont identiques c.à.d dès qu'il existe $i \neq j$ tel que $v_i = v_j$.*

1.2.2 Propriétés

Soient f une forme p-linéaire alternée sur E, $(v_1, v_2, ..., v_p) \in E^p$; alors:

a) $f(v_1, v_2, ..., v_p) = 0$ dès que l'un des v_i est nul;

b) $f(v_1, v_2, ..., v_p) = 0$ dès que deux termes quelconques de la suite $(v_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont colinéaires;

c) $f(v_1, v_2, ..., v_p) = 0$ si un terme de la suite $(v_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une combinaison linéaire des autres;

d) $f(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_p) = -f(v_1, v_2, ..., v_p)$, (étant entendu que dans $(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_p)$, v_j est la $i^{\grave{e}me}$ composante et v_i la $j^{\grave{e}me}$);en d'autres termes, lorsqu'on échange deux termes de la suite $(v_i)_{1 \leq i \leq p}$, l'image est transformée en son opposé.

e) $\forall \sigma \in S_p$, $f\left(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, ..., v_{\sigma(p)}\right) = sgn(\sigma) \times f(v_1, v_2, ..., v_p)$

<u>Preuve</u>

a) Lorsque pour $j \neq i$ v_j est fixé et que v_i seul varie, alors la fonction $\varphi(v_i) = f(v_1, v_2, ..., v_p)$ est une forme linéaire sur E, donc s'annulle en 0_E d'où le résultat.

b) S'il existe $i \neq j \in \overline{1,p}$ et $\lambda \in \Bbbk$ tels que $v_j = \lambda v_i$, alors on a $f(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_p) = f(v_1, ..., v_i, ..., \lambda v_i, ..., v_p) = \lambda f(v_1, ..., v_i, ..., v_i, ..., v_p) = 0$ puisque f est alternée.

c) Pour simplifier on suppose que v_p est une combinaison linéaire de $v_1, v_2, ..., v_{p-1}$ ce qui en réalité n'est pas une restriction; on suppose donc que $v_p = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i v_i$; alors on a $f(v_1, v_2, ..., v_p) = f\left(v_1, v_2, ..., \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i f(v_1, v_2, ..., v_i) = 0$ car chaque p-uplet $(v_1, v_2, ..., v_i)$ comporte deux termes identiques en l'occurrence le $i^{ème}$ et le $p^{ème}$.

d) Par linéarité par rapport à la $i^{ème}$ et à la $j^{ème}$ composante, et étant entendu que dans les expressions qui suivent les termes écrits après les premiers points de suspension et les deuxième points de suspension sont respectivement les $i^{ème}$ et les $j^{éme}$ composantes, on a:

$f(v_1, ..., v_i + v_j, ..., v_i + v_j, ..., v_p) = f(v_1, ..., v_i, ..., v_i, ..., v_p) + f(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_p) + f(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_p) + f(v_1, ..., v_j, ..., v_j, ..., v_p)$. Comme f est alternée, alors les termes $f(v_1, ..., v_i + v_j, ..., v_i + v_j, ..., v_p)$, $f(v_1, ..., v_i, ..., v_i, ..., v_p)$ et $f(v_1, ..., v_j, ..., v_j, ..., v_p)$ sont nuls et le résultat s'ensuit.

e) $\forall \sigma \in S_p$, posons $\sigma[(v_1, v_2, ..., v_p)] = (v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, ..., v_{\sigma(p)})$; d'après le corollaire de la proposition 2.3, on a $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_r$ où $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_r$ sont des transpositions; il s'ensuit $f(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, ..., v_{\sigma(p)}) = f[\sigma(v_1, v_2, ..., v_p)] = f[\tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_r (v_1, v_2, ..., v_p)]$. or d'àprès d), si τ est la tansposition $\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$, on a $f[\tau(v_1, v_2, ..., v_p)] = -f(v_1, v_2, ..., v_p)$; par conséquent on a $f[\sigma(v_1, v_2, ..., v_p)] = (-1^r) f(v_1, v_2, ..., v_p) = sgn(\sigma) f(v_1, v_2, ..., v_p)$.

Théorème 2.1 : *Soient f une forme n-linéaire alternée sur E, $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E, $(v_1, v_2, ..., v_n) \in E^n$; posons pour $1 \leq i \leq n$, $v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$; alors on a :*

$$f(v_1, v_2, ..., v_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} Sgn\sigma \times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}\right) \times f(e_1, e_2, ..., e_n).$$

Par conséquent, f est entièrement déterminée par la donnée de l'image d'une base donnée de E.

Preuve

Par souci de clarté, posons plutôt $v_i = \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} e_{j_i}$ pour associer la variable j (qui est muette) à chaque i; alors on a:

$f(v_1, v_2, ..., v_n) = f\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2} e_{j_2}, ..., \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} e_{j_n}\right)$

$= \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} f\left(e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2} e_{j_2}, ..., \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} e_{j_n}\right)$ (linéarité par rapport à la 1ère composante)

$= \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \times \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2} f\left(e_{j_1}, e_{j_2}, \sum_{j_3=1}^{n} a_{3j_3} e_{j_3}, ..., \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} e_{j_n}\right)$ (linéarité par rapport à la 2ème composante) et de proche en proche on obtient

$f(v_1, v_2, ..., v_n) = \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2} ... \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} f(e_{j_1}, e_{j_2}, ..., e_{j_n})$.

f étant alternée, alors si pour deux indices $p \neq q$ on a $e_{j_p} = e_{j_q}$ dans la suite $(e_{j_1}, e_{j_2}, ..., e_{j_n})$ alors $f(e_{j_1}, e_{j_2}, ..., e_{j_n}) = 0$; Par conséquent on a:

$f(v_1, v_2, ..., v_n) = \sum_{1 \leq j_1 \neq j_2 \neq ... \neq j_n \leq n} a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n} f(e_{j_1}, e_{j_2}, ..., e_{j_n})$.

Du fait que $j_1, j_2, ..., j_n$ sont n éléments distincts de $\overline{1,n}$, on a $\{j_1, j_2, ..., j_n\} = \overline{1,n}$ et par suite $\exists! \sigma \in S_n$ tel que $j_i = \sigma(i)$ pour $1 \leq i \leq n$; réciproquement $\forall \sigma \in S_n$, $\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)$ sont n éléments distincts de $\overline{1,n}$; Par conséquent on a:

$f(v_1, v_2, ..., v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)} f\left(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, ..., e_{\sigma(n)}\right)$; or comme en vertu de la propriété $e)$ on a $f\left(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, ..., e_{\sigma(n)}\right) = Sgn(\sigma) \times f(e_1, e_2, ..., e_n)$, alors le résultat s'ensuit.

NB : Pour l'étude des *formes p-linéaires symétriques* voir TD

1.3 Déterminant d'une matrice

Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i;j \leq n} \in M_n(\Bbbk)$ est constituée de lignes et de colonnes, chaque ligne et chaque colonne étant assimilable à un vecteur de $\Bbbk^n$:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} L_1 \\ \\ L_i \\ \\ L_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} C_1 & C_j & C_n \end{array} \end{array}$$

A ce titre $A \simeq (L_1, L_2, ..., L_n)$ ou $A \simeq (C_1, C_2, ..., C_n)$ peut être identié à un élément de $(\Bbbk^n)^n = \Bbbk^n \times \Bbbk^n \times ... \times \Bbbk^n$.

Alors les applications $\begin{array}{c} M_n(\Bbbk) \longrightarrow (\Bbbk^n)^n \\ A \longmapsto (L_1, L_2, ..., L_n) \end{array}$ et $\begin{array}{c} M_n(\Bbbk) \longrightarrow (\Bbbk^n)^n \\ A \longmapsto (C_1, C_2, ..., C_n) \end{array}$

sont des isomorphismes qui permettent d'identifier $M_n(\Bbbk)$ à $(\Bbbk^n)^n$ respectivement au moyen des lignes et des colonnes.

Alors on a le résultat suivant:

Théorème 2.2: *- Il existe une unique forme n-linéaire alternée f sur $M_n(\Bbbk)$ (identifié à $(\Bbbk^n)^n$ au moyen des lignes ou des colonnes) telle que $f(I_n) = 1$;*

- Si $A = (a_{ij})_{1\leq i;j\leq n} \in M_n(\Bbbk)$, alors $f(A) = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn\sigma \times a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$.

<u>Preuve</u>

Le théo 2.1 affirme l'unicité de f dès qu'une telle f existe. Assurons l'existence de f en montrant que l'application f $\begin{array}{c} M_n(\Bbbk) \longrightarrow \Bbbk \\ A = (a_{ij})_{1\leq i;j\leq n} \longmapsto \sum_{\sigma\in S_n} Sgn\sigma \times a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)} \end{array}$ est une forme n-linéaire alternée sur $M_n(\Bbbk)$. Identifions ici $M_n(\Bbbk)$ à $(\Bbbk^n)^n$ au moyen des lignes. Alors

$f(A) = f(L_1, L_2, ..., L_n)$ avec pour $1 \leq i \leq n$, $L_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$. Montrons la linéarité de f par rapport à la $i^{ème}$ ligne: supposons donc que pour $j \neq i$, L_j est fixée et soient $L_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}), H_i = (b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{in}) \in \Bbbk^n, \lambda \in \Bbbk$; posons $\lambda L_i + H_i = (c_{i1}, c_{i2}, ..., c_{in})$; on a donc pour $1 \leq j \leq n$, $c_{ij} = \lambda a_{ij} + b_{ij}$. Il s'ensuit :

$f(L_1, ..., \lambda L_i + H_i, ...L_n) = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn\sigma \times a_{1\sigma(1)}...c_{i\sigma(i)}...a_{n\sigma(n)}$

$= \sum_{\sigma\in S_n} Sgn\sigma \times a_{1\sigma(1)}...(\lambda a_{i\sigma(i)} + b_{i\sigma(i)})...a_{n\sigma(n)}$

$= \lambda \sum_{\sigma\in S_n} Sgn\sigma \times a_{1\sigma(1)}...a_{i\sigma(i)}...a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in S_n} Sgn\sigma \times a_{1\sigma(1)}...b_{i\sigma(i)})...a_{n\sigma(n)}$

$= \lambda f(L_1, ..., L_i, ..., L_n) + f(L_1, ..., H_i, ..., L_n)$.

Montrons l'alternance: supposons que dans la suite $(L_1, ..., H_i, ..., L_n)$, il existe $1 \leq p < q \leq n$ tels que $L_p = L_q$; il s'ensuit $a_{pj} = a_{qj}$, pour $1 \leq j \leq n$. Maintenant en vertu du corollaire de la proposition 2.5 l'application $\sigma \longmapsto \sigma\circ\tau$, où τ est la transposition $\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$ réalise une bijection de l'ensemble A_n des permutations paires dans l'ensemble des permutations impaires; il s'ensuit :

$f(L_1, ..., L_p, ..., L_q, ..., L_n) = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn\sigma \times a_{1\sigma(1)}...a_{p\sigma(p)}...a_{q\sigma(q)}...a_{n\sigma(n)}$

$= \sum_{\sigma\in A_n} Sgn(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}...a_{p\sigma(p)}...a_{q\sigma(q)}...a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in A_n} Sgn(\sigma\circ\tau) a_{1\sigma\circ\tau(1)}...a_{p\sigma\circ\tau(p)}...a_{q\sigma\circ\tau(q)}...a_{n\sigma\circ\tau(n)}$

$= \sum_{\sigma\in A_n} a_{1\sigma(1)}...a_{p\sigma(p)}...a_{q\sigma(q)}...a_{n\sigma(n)} - \sum_{\sigma\in A_n} a_{1\sigma(1)}...a_{p\sigma(q)}...a_{q\sigma(p)}...a_{n\sigma(n)}$ (car d'une part $\sigma \in A_n \Longrightarrow Sgn(\sigma) = 1$ et $Sgn(\sigma\circ\tau) = -1$, et d'autre part τ permute p et q et laisse les autres indices invariants)

$= 0$ car $a_{p\sigma(p)} = a_{q\sigma(p)}$ et $a_{p\sigma(q)} = a_{q\sigma(q)}$.

Définition 2.4: *L'unique n-forme linéaire alternée définie dans le théorème précédent est appelé le determinant. Pour tout* $A = (a_{ij})_{1 \leq i;j \leq n} \in M_n(\mathbb{k})$, $\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn\sigma \times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}$ *est appelé le déterminant de A.*

<u>$n = 1$</u> $A = (a_{11}) = a \in \mathbb{k}$.
$\det A = \det a = a$

<u>$n = 2$</u> $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\det A = \sum_{\sigma \in S_2} Sgn\sigma \times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} = 1 \times a_{11}a_{22} + (-1) \times a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Ou plus simplement $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

<u>$n = 3$</u> $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\det A = \sum_{\sigma \in S_3} Sgn\sigma \times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} = 1 \times a_{11}a_{22}a_{33} + (-1) \times a_{11}a_{23}a_{32} + (-1) \times a_{12}a_{21}a_{33} + 1 \times a_{12}a_{23}a_{31} + 1 \times a_{13}a_{21}a_{32} + (-1) \times a_{13}a_{22}a_{31}$.

donc $\det A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$ (règle de Sarus)

1.4 Propriétés du déterminant

Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$; *alors:*

a) $|A| = 0$ *dès que:*

- un vecteur ligne (ou colonne) est nul;

- deux vecteurs lignes (ou colonnes) sont colinéaires

- un vecteur ligne (ou colonne) est combinaison linéaire des autres.

b) $|A|$ *ne change pas lorsque:*

- on ajoute à une ligne (ou colonne) un multiple d'une autre

- on ajoute à une ligne (ou colonne) une combinaison linéaire des autres.

c) $$|{}^tA| = |A|.$$

d) - $|B| = \lambda |A|$ *si B s'obtient par la multiplication d'une ligne (ou colonne) de A par* $\lambda \in \mathbb{k}$;

-.$|B| = Sgn\sigma\, |A|$ *si B s'obtient par une permutation* σ *des lignes (ou colonnes) de A. En particulier,*

$|B| = -|A|$ *si B s'obtient par permutation de deux lignes (ou colonnes) de A.*

e) $$|\lambda A| = \lambda^n |A|,\ \lambda \in \mathbb{k};$$

f) Si A est une matrice triangulaire, alors $|A|$ *est égal au produit des éléments de la diagonale.*

<u>Preuve</u>

Les propriétés a), b), d) et e) découlene directement de la définition et des propriétes d'une forme n-linéaire alternée.

c) posons $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$; alors $\forall 1 \leq i, j \leq n$, $b_{ij} = a_{ji}$; Il s'ensuit:

$|{}^tA| = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn\sigma \times b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} ... b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn\sigma \times a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(n)n}$.

Posons $\tau = \sigma^{-1}$; comme σ est une permutation de $\overline{1,n}$, alors on a : $a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(n)n} = a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} ... a_{n\tau(n)}$; en outre du fait que $\sigma \circ \tau = Id$ et donc que $Sgn\sigma \times Sgn\tau = 1$, on a $Sgn\sigma = Sgn\tau$; Il s'ensuit $|{}^tA| = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn\tau \times a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} ... a_{n\tau(n)} = \sum_{\tau \in S_n} Sgn\tau \times a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} ... a_{n\tau(n)}$ (car l'application $\sigma \longmapsto \tau = \sigma^{-1}$ étant une bijection dans S_n, faire varier σ dans S_n revient à faire varier dans S_n) $= |A|$ (la variable de sommation est muette).

f) Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\Bbbk)$; on a $|A| = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn\sigma \times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}$; si $\sigma \neq Id$, alors dans le terme $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}$ il existe au moins un $a_{i\sigma(i)}$ et un $a_{j\sigma(j)}$ de part et d'autre de la diagonale; Par suite si A est une matrice triangulaire, alors l'un au moins des deux termes $a_{i\sigma(i)}$ et $a_{j\sigma(j)}$ est nul et donc $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)} = 0$; donc le seul terme eventuellement non nul est celui obtenu avec c $\sigma = Id$ qui est $a_{11} a_{22} ... a_{nn}$ c.à.d le produit des éléments de la diagonale.

1.5 Mineur, cofacteur, comatrice, matrice adjointe classique

Dans cette section, $A = (a_{ij})_{1 \leq i;j \leq n}$ *est une matrice donnée de* $M_n(\Bbbk)$.

1.5.1 Mineur, cofacteur d'un coefficient

Définition 2.5: *Pour* (p, q) *donné avec* $1 \leq p, q \leq n$, *on apelle miineur de* a_{pq} *le déterminant de la matrice carrée d'ordre* $n - 1$ *obtenue een supprimant la ligne* L_p *et la colonne* C_q *de* A *c.à d. la ligne et la colonne de* a_{pq}. *On note* $\min_{pq}$ *le mineur de* a_{pq}

Définition 2.6: *On appelle cofacteur de* a_{pq} *le scalaire* $cof_{pq} = (-1)^{p+q} \min_{pq}$

Théorème 2.3: **(formules de developpement suivant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne)**

Avec les considérations qui précèdent, on a:

Pour i fixé avec $1 \leq i \leq n$, *on a:* $|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \min_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} cof_{ij}$ *(suivant* L_i*)*

Pour j fixé avec $1 \leq j \leq n$, on a: $|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \min_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} cof_{ij}$ *(suivant C_j)*

<u>Preuve</u>

Soient $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$ et $i \in \overline{1,n}$; dans l'expression $|A| = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn\sigma \times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}$, chaque terme contient un et un seul élément de la $i^{ème}$ ligne de A $L_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$; Donc nous pouvons écrire $|A|$ sous la forme : $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$ où $\forall 1 \leq j \leq n$, A_{ij} est une somme de produits de $n-1$ éléments de A dont aucun n'appartient à L_i; le théorème sera démontré si nous établissons que $A_{ij} = (-1)^{i+j} \min_{ij} (= cof_{ij})$, pour $1 \leq j \leq n$.

Considéons d'abord le cas où $i = j = n$; la somme des termes contenant a_{nn} est $a_{nn}A_{nn} = a_{nn} \sum_{\sigma \in S_n,\ \sigma(n)=n} Sgn\sigma \times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n-1\sigma(n-1)}$. Sommer sur toutes les permutations σ de $\overline{1,n}$ tels que $\sigma(n) = n$ est équivalent à sommer sur toutes les permutations de $\overline{1,n-1}$. Il s'ensuit que $A_{nn} = \min_{nn} = (-1)^{n+n} \min_{nn}$.

Considérons maintenant i et j quelconques; échangeons L_i avec la ligne qui luisuccède et ainsi de suite jusqu'à ce qu'elle soit la dernière; ensuite échangeons la $j^{ème}$ colonne avec la colonne qui lui succède jusqu'à ce qu'elle soit la dernière. Remarquons que $\min_{ij}$ n'est pas modifié par ces opérations car les position relatives des autres lignes et colonnes ne sont pas pas affectées par ces opérations. Cependant d'après la propriété d) du déterminant, $|A|$ est transformé en son opposé à chaque opération; il en est donc de même de A_{ij}. A la fin des opérations $|A|$ aura changé $(n-i)+(n-j)$ fois de signe (de la $i^{ème}$ ligne à la $n^{ème}$, puis de la $j^{ème}$ colonne à la $n^{ème}$). En conséquence:

$$A_{ij} = (-1)^{(n-i)+(n-j)} \min_{ij} = (-1)^{i+j} \min_{ij}.$$

Exemple 2.3: Calculer le determinant de $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ en developpant suivant la $3^{ème}$ colonne.

$|M| = 5 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-4) \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -9.$

1.5.2 Comtrice, matrice adjointe classique

Définition 2.7: *la comatrice de A est la matrice de $M_n(\mathbb{k})$ obtenue en remplaçant chaque coefficient de A par son cofacteur; On note $ComA$ la comatrice de A.*

On a donc $ComA = (cof_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Définition 2.8: *la matrice adjointe classique de A est* $\widetilde{A} =^{t} ComA = Com\left({}^{t}A\right)$.

Théorème 2.4: *On a*: $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|\, I_n$.

<u>Preuve</u>

posons $A = (a_{ij})$ et $A\widetilde{A} = (b_{ij})$; $\forall 1 \leq i, j \leq n$, b_{ij} est le produit de la $i^{\grave{e}me}$ ligne de A par la $j^{\grave{e}me}$ colonne de $\widetilde{A}$. $\widetilde{A}$ étant la transposée de $ComA$, la $j^{\grave{e}me}$ colonne de $\widetilde{A}$ est la $i^{\grave{e}me}$ ligne de $ComA = (cof_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$; en conséquence: $b_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}cof_{jk}$. En particulier $b_{ii} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}cof_{ik} = |A|$.

Maintenant pour $j \neq i$, soit H la matrice obtenue en raplaçant la $j^{\grave{e}me}$ ligne de A par sa $i^{\grave{e}me}$ ligne. Alors $|H| = 0$ puisque H possède deux lignes identiques (la $i^{\grave{e}me}$ et la $j^{\grave{e}me}$). Mais en développant $|H|$ suivant la $j^{\grave{e}me}$ ligne on a $0 = |H| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}cof_{jk} = b_{ij}$. En somme on a:

$$b_{ij} = \begin{cases} |A| \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \quad \text{d'où } A\widetilde{A} = |A|\, I_n.$$

On obtient de façon analogue $\widetilde{A}A = |A|\, I_n$.

Une conséquence de ce résultat est le théorème suivant:

Théorème 2.5: - *A est inversible si et seulement si $|A| \neq 0$*
Dans ce ce cas on a:

$$A^{-1} = \tfrac{1}{|A|}\widetilde{A} = \tfrac{1}{|A|}{}^{t}ComA = \tfrac{1}{|A|}Com\left({}^{t}A\right); \quad \left|A^{-1}\right| = \tfrac{1}{|A|}$$

Théorème 2.6: $\forall A, B \in M_n(\Bbbk)$, *on a:* $|AB| = |A| \times |B|$

Pour démontrer ce théorème nous allons nous servir du lemme suivant qui utilise des notions et des résultats relatifs aux opérations élémentaires sur les matrices que le lecteur trouvera dans le paragraphe suivant:

Lemme : *Soit $A \in M_n(\Bbbk)$; alors pour toute matrice d'opération élémentaire $E \in M_n(\Bbbk)$, on a* $|EA| = |E| \times |A|$

<u>Preuve du lemme</u>

Les trois types de matrice d'opération élémentaire sont $D_i(\lambda)$, $T_{ij}(\alpha)$ et P_{ij} transformées respectives de I_n par les opérations élémentaires $L_i \longleftarrow \lambda L_i$, $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$ et $L_i \longleftrightarrow L_j$ qui transforment respectivement A en $\delta_{(i,\lambda)}(A) =$

$D_i(\lambda) \times A$; $\tau_{(ij,\alpha)}(A) = T_{ij}(\alpha) \times A$; $\pi_{ij}(A) = P_{ij} \times A$ (prop 2.12). Or d'après les propriétés b) et d) du déterminant on a $\left|\delta_{(i,\lambda)}(A)\right| = \lambda |A|$ et $|D_i(\lambda)| = \left|\delta_{(i,\lambda)}(I_n)\right| = \lambda |I_n| = \lambda$ d'où $|D_i(\lambda) \times A| = |D_i(\lambda)| \times |A|$; $\left|\tau_{(ij,\alpha)}(A)\right| = |A|$ et $|T_{ij}(\alpha)| = \left|\tau_{(ij,\alpha)}(I_m)\right| = |I_n| = 1$ d'où $|T_{ij}(\alpha) \times A| = |T_{ij}(\alpha)| \times |A|$; $|\pi_{ij}(A)| = -|A|$ et $|P_{ij}| = |\pi_{ij}(I_n)| = -|I_n| = -1$ d'où $|P_{ij} \times A| = |P_{ij}| \times |A|$.

Preuve du théorème

Soient $A, B \in M_n(\Bbbk)$; - Si A n'est pas inversible alors AB n'est pas inversible (si AB était inversible il existerait une matrice $M \in M_n(\Bbbk)$ tel que $(AB)M = I_n$ d'où $A(BM) = I_n$ et A serait inversible d'inverse BM, contradictoire); dans ce cas on a $|AB| = 0 = |A| \times |B|$.

- Si A est inversible alors en vertu du corollaire de la proposition 2.17, A est produit de matrices d'opérations élémentaires; on a donc $A = E_1E_2...E_k$ où pour $1 \le i \le k$, E_i est une matrice d'opération élémentaire; il s'ensuit $|AB| = |E_1E_2...E_kB| = |E_1 \times (E_2...E_kB)| = |E_1| \times |E_2...E_kB|$ (d'après le lemme) $= |E_1| \times |E_2| \times |E_3...E_kB|$ et de proche en proche on obtient $|AB| = |E_1| \times |E_2| \times ... \times |E_k| \times |B| = |A| \times |B|$.

2 COMPLEMENTS SUR LES MATRICES

2.1 Matrices equivalentes et rang

2.1.1 Rang d'une matrice

Mineur d'une matrice

Définition 2.9: *Soit $A \in M_{m,n}(\Bbbk)$. On appelle mineur d'ordre p de A ($p \le \min\{m,n\}$) le déterminant d'une matrice carrée d'ordre p extaite de A c.à.d obtenue en supprimant des lignes et des colonnes de A.*

Rang d'une matrice

Définition 2.10: *Le rang d'une matrice $A \in M_{m,n}(\Bbbk)$ noté $rg(A)$ est:*
- le nombre maximal de lignes linéairement indépendantes de A.
- le nombre maximal de colonnes linéairement indépendantes de A.
- l'ordre maximal des mineurs non nuls de A.

NB: Pour la preuve de l'égalité des trois éléments de cette définition, voir TD

Propriétés 2.1 *Soit $A \in M_{m,n}(\Bbbk)$. Alors :*
a) $rg(A) \le \min\{m,n\}$;
b) $rg(A) = 0 \Longleftrightarrow A = 0$;
c) $rg(A) = rg({}^tA)$;
d) Le rang de A ne change pas lorsqu'on multiplie A à droite ou à gauche par une matrice inversible.

Preuve

a), b) et c) découlent directement de la définition du rang d'une matrice. d) est une conséquense conjuguée de la définition deux matrices équivalentes et du corollaire du théo 2.9.(voir la prochaine section "*matrices équivalentes*")

Proposition 2.6 : *Soit $A \in M_n(\Bbbk)$. Alors A inversible $\Longleftrightarrow rg(A) = n$.*

Preuve

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A; alors:

A inversible $\Longleftrightarrow f$ inversible $\Longleftrightarrow f$ bijective $\Longleftrightarrow$ les vecteurs colonnes de A sont linéairement indépendants $\Longleftrightarrow rg(A) = n$.

2.1.2 Rang d'une application linéaire

Définition 2.11: *soit $f : E \longrightarrow E'$ linéaire. Le rang de f est $rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$*

Propriété.2.2: soit *$f : E \longrightarrow E'$ linéaire. Alors:*

- le rang de f est le rang de sa matrice relativement à une base quelconque de E et une base queconque de E'.

En effet si A est la matrice de f relativement à une base B de E et une base B' de E', alors la dimension de $\operatorname{Im} f$ est égale au nombre maximal de colonnes linéairement indépendantes de A.

Théorème 2.7: s*oient $f : E \longrightarrow E'$ linéaire et $r \geq 1$. Alors les CSSE:*

i) $rg(f) = r$;

ii) Il existe une base B de E et une base B' de E' relativement auxquelles la matrice de f est la matrice :

$J_r = (\alpha_{ij}) \in M_{m,n}(\Bbbk)$ définie par $\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ pour } 1 \leq i = j \leq r \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ (où $n = \dim E$ et $m = \dim E'$).

c.à.d A est la matrice par blocs $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où I_r est la matrice unité d'ordre r et les 0 sont des matrices nulles.

Preuve

Il est clair en vertu de la propriété 2.2 que $ii) \Longrightarrow i)$ car $rg(J_r) = r$. Montrons $i) \Longrightarrow ii)$: supposons donc que $rg(f) = r$. Alors on a $\dim(\operatorname{Im} f) = r$. Soient $(e'_1, e'_2, ..., e'_r)$ une base de $\operatorname{Im} f$ et pour $1 \leq i \leq r$, e_i un antécédent de e'_i. Alors la famille $(e_1, e_2, ..., e_r)$ est libre. En effet $\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r \in \Bbbk$, $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i = 0_E \Longrightarrow$

$f\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i e_i\right) = 0_{E'} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{r}\alpha_i f(e_i) = 0_{E'} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{r}\alpha_i e'_i = 0_{E'} \Longrightarrow \alpha_i = 0$ pour $1 \leq i \leq r$ car $(e'_1, e'_2, ..., e'_r)$ base de $\operatorname{Im} f \Longrightarrow (e'_1, e'_2, ..., e'_r)$ est une famille libre; alors la famille $(e_1, e_2, ..., e_r)$ est libre. Complétons cette famille en une base $\mathcal{F} = (e_1, e_2, ..., e_r, v_{r+1}, ..., v_n)$ de E..$\forall r+1 \leq j \leq n$, $f(v_j) \in \operatorname{Im} f$ donc on a $f(v_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}e'_i$ $(*)$avec $a_{ij} \in \mathbb{k}$ pour $1 \leq i \leq r$. $\forall r+1 \leq j \leq n$, posons $e_j = v_j - \sum_{i=1}^{r} a_{ij}e_i$. alors la famille $B = (e_1, e_2, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_n)$ est une base de E. En effet la matrice de B dans la base $\mathcal{F}$ est une matrice triangulaire supérieure ayant rien que des 1 sur ladiagonale donc de déterminant égal à 1. Maintenant pour $r+1 \leq j \leq n$, on a:

$$f(e_j) = f\left(v_j - \sum_{i=1}^{r} a_{ij}e_i\right) = f(v_j) - \sum_{i=1}^{r} a_{ij} f(e_i) = f(v_j) - \sum_{i=1}^{r} a_{ij}e'_i = 0_{E'}$$

d'après $(*)$. On a donc :

$$f(e_j) = \begin{cases} e'_j & \text{si } 1 \leq i \leq r \\ 0_{E'} & \text{si } r+1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Alors si on complète $(e'_1, e'_2, ..., e'_r)$ en une base $B' = \left(e'_1, e'_2, ..., e'_r, e'_{r+1}, ..., e'_m\right)$ de E', on a bien $mat_{BB'}(f) = J_r$.

Proposition 2.7 (formule du rang): On a $\dim(\ker f) + rg(f) = \dim E$.

Preuve

La formule de la dimension s'écrit:

$\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim E$ d'où le résultat car $\dim(\operatorname{Im} f) = rg(f)$.

2.1.3 Rang d'un système d'équations linéaires

Définition 2.12: *Le rang d'un système d'équations linéaires est égal au rang de la matrice associée.*

2.1.4 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 2.13: *Le rang d'une famille $\mathcal{F}$de vecteurs de E noté $rg(\mathcal{F})$ est égal à la dimension du sous espace vectoriel de E engendré par cette famille.*

Le rang de $\mathcal{F}$ est aussi le rang de sa matrice dans une base quelconque de E (qui est la matrice dont les colonnes sont les mcc respectives des éléments de $\mathcal{F}$dans B).

Théorème 2.8: *Soit $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs de E (de dimension finie n), B une base de E et $A \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base B. Alors pour l'étude de l'indépendance linéaire des éléments de $\mathcal{F}$ trois cas se présentent:*

$\underline{1^{er}\ cas\ :\ p > n}$
Alors $\mathcal{F}$ est une famille liée;
$\underline{2^{ème}\ cas\ :\ p = n}$
Alors $\mathcal{F}$ est une famille libre $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0. \Longleftrightarrow$ *$\mathcal{F}$ est une base de E.*
$\underline{3^{ème}\ :\ p < n}$
Alors $\mathcal{F}$ est libre si et seulement s'il existe un mineur d'ordre p non nul de A.

Preuve
1^{er} *cas* : $p > n$: on sait que si $\dim E = n$, alors une famille de plus de n vecteurs de E est liée.
$2^{ème}$ *cas* : $p = n$: dans cas $card\mathcal{F} = \dim E$ et A est une matrice carrée ; alors $\mathcal{F}$ est une base de $E \Longleftrightarrow \mathcal{F}$ est une famille libre $\Longleftrightarrow$ les vecteurs colonnes de A sont linéairement indépendants $\Longleftrightarrow rg(A) = n \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.
$3^{ème}$: $p < n$: $\mathcal{F}$ est une famille libre $\Longleftrightarrow rg(A) = p \Longleftrightarrow$ existe un mineur d'ordre p non nul de A (puisque $A \in M_{n,p}(\mathbb{k}) \Longrightarrow rg(A) \leq p$).

2.2 Matrices équivalentes

Définition 2.14: *Deux matrices $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{k})$ sont dites équivalentes s'il existe une matrice $Q \in M_m(\mathbb{k})$ et une matrice $P \in M_n(\mathbb{k})$, inversibles telles que:*

$$B = QAP.$$

Le résultat suivant découle directement du théo 2.7

Théorème 2.9 : *Une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{k})$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à la matrice*

$J_r = (\alpha_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{k})$ *définie par* $\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ pour } 1 \leq i = j \leq r \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

c.à.d A est la matrice par blocs $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *où I_r est la matrice unité d'ordre r et les 0 sont des matrices nulles.*

Corollaire: *Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

2.3 Matrices semblables

Définition: *Deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{k})$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que*

$$B = P^{-1}AP.$$

Exemple 2.4 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, B, B' deux bases de E, $P = P_{BB'}$, $A = mat_B(u)$ et $A' = mat_{B'}(u)$. Alors on a $A' = P^{-1}AP$. Donc A et A' sont semblables. D'où le résultat:

Proposition 2.8 : *Les matrices d'un même endomorhisme dans des bases différentes sont semblables*

Proposition 2.9 : *Soit $A, B \in M_n(\Bbbk)$ deux matrices semblables.Alors on a:*
$tr(A) = tr(B); \quad \det(A) = \det(B)$

<u>Preuve</u>
A et B étant semblables, alors il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$. Il s'ensuit:
$tr(B) = tr\left(P^{-1}AP\right) = tr\left(APP^{-1}\right)$ (car $\forall A, B \in M_n(\Bbbk)$, $tr(AB) = tr(BA)$ voir TD) $= tr(A)$
$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \times \det(A) \times \det(P) = \det(A)$ car $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$.

D'après les deux propositions précédentes, $tr(mat_B(u))$ et $\det(mat_B(u))$ sont indépendantes de la base B choisie d'où les définitions.

Définitions 2.15: (Trace et déterminant d'un endomorphisme). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
- La trace de u est la trace de sa matrice dans une base quelconque de E.
- Le déterminant de u est le déterminant de sa matrice dans une base quelconque de E.

2.4 Matrice par blocs

2.4.1 Description

Définition 2.16: *Soit $A \in M_{m,n}(\Bbbk)$. Une disposition par blocs de A est une écriture:*

$$A = (A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & & A_{rs} \end{pmatrix}$$

où $\forall 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$, $A_{i,j}$ est une matrice, vérifiant:
- Pour chaque $i \in \overline{1, r}$, les matrices $A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{is}$ ont toutes le même nombre de lignes;

- *Pour chaque* $j \in \overline{1,s}$, *les matrices* $A_{1j}, A_{2j}, ..., A_{rj}$ ont toutes le même nombre de colonnes.

Remarque 2.1: Une même matrice peut avoir plusieurs dispositions par blocs comme le montre l'exemple suivant:

$$\text{Soit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors on peut écrire:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

avec $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A_{13} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$; $A_{21} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; $A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$; $A_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ou encore

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

avec $B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; $B_{21} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$; $B_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

et la liste de dispositions par blocs de A peut encore continuer.

Définitions 2.17: -*Une disposition par blocs* $A = (A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}}$ *est dite une disposition carrée par blocs si* $r = s$.

On a alors $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$

- $A \in M_n(\mathbb{k})$ *est dite diagonale par blocs s'il existe une disposition carrée par blocs* $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$. *de* A *telle que* $\forall 1 \leq i \leq r$, $A_{i,i}$ *est une matrice carrée et* $A_{i,j} = 0$ *pour* $i \neq j$.

- $A \in M_n(\mathbb{k})$ *est dite triangulaire supérieure(resp. inférieure) par blocs s'il existe une disposition carrée par blocs* $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$. *de* A *telle que* $\forall 1 \leq i \leq r$, $A_{i,i}$ *est une matrice carrée et* $A_{i,j} = 0$ *pour* $i > j$ *(resp.*$i < j$*).*

Remarque 2.2 : Une matrice peut être diagonale ou triangulaire par blocs sans être diagonale ou triangulaire:

Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ avec $A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; $A_{12} = 0$; $A_{21} = 0$ (matrices nulle) ; $A_{22} = (4)$ est une matrice diagonale par blocs mais elle n'est ni diagonale ni triangulaire.

2.4.2 Opérations par blocs

Combinaison linéaire

Proposition 2.10 : *Soit $A, B \in M_{m,n}(\Bbbk)$ disposées par blocs de même format c.à.d $A = (A_{i,j})_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le s}}$ et $B = (B_{i,j})_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le s}}$. Alors $\forall \alpha, \beta \in \Bbbk$, la matrice $C = \alpha A + \beta B$ admet une disposition par blocs de même format :*

$$C = (C_{i,j})_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le s}} \quad \text{avec } \forall 1 \le i \le r, 1 \le j \le s,\ C_{i,j} = \alpha A_{i,j} + \beta B_{i,j}.$$

Produit

Proposition 2.11 : *Soient $A \in M_{m,n}(\Bbbk)$, $B \in M_{n,p}(\Bbbk)$ disposées par blocs $A = (A_{i,j})_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le s}}$, $B = (B_{k,l})_{\substack{1 \le k \le s \\ 1 \le l \le t}}$.*

On suppose que $1 \le i \le r, 1 \le k \le s, 1 \le l \le t$, le nombre de colonnes de $A_{i,k}$ est égal au nombre de lignes de $B_{k,l}$. Alors le produit $D = AB$ admet une représentation par blocs

$$D = (D_{i,l})_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le l \le t}} \quad \text{avec } 1 \le i \le r, 1 \le l \le t,\ D_{i,l} = \sum_{k=1}^{s} A_{i,k} B_{k,l}.$$

Remarque 2.3 : Les deux propositions précédentes affirment que les opérations par blocs se font comme avec les scalaires.

Par suite;

- Le produit de deux matrices diagonales par blocs est une matrice diagonale par blocs.

- Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) par blocs est une matrice triangulaire (resp. inférieure) par blocs dont les blocs diagonaux sont les produits des blocs diagonaux correspondants.

Exemple 2.5 : Soient les matrices :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On peut calculer AB en utlisant une décomposition par blocs en posant:

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ avec $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $A_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_{12}(\mathbb{R})}$ et $A_{22} = 2$;

$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ avec $B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $B_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_{13}(\mathbb{R})}$ et $B_{22} = 1$.

On vérifie bien que les conditions qui rendent possible la multiplication par blocs sont satisfaites par A, B et les A_{ij} et les B_{kl}. Alors on a:

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + 0_{M_{23}(\mathbb{R})} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times 1 \\ 0_{M_{13}(\mathbb{R})} + 0_{M_{13}(\mathbb{R})} & 0 + 2 \times 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 2 \end{pmatrix}$$

Donc $AB = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 & 4 \\ 19 & 26 & 33 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Théorème 2.10 : *Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$ triangulaire par blocs avec*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{rr} \end{pmatrix}.$$

Alors on a: $\det A = \det A_{11} \times \det A_{22} \times ... \times \det A_{rr}$.

Exemple 2.6 : calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b & a & 0 & \vdots \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{k}).$$

(a sur la diagonale, b sur l'antidiagonale et les autres coefficients nuls).

Soit $B = (e_i)_{1 \leq i \leq 2n}$, la base canonique de $\mathbb{k}^{2n}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Soit B' la base $(e'_1, e'_2, ..., e'_{2n}) = (e_1, e_{2n}, e_2, e_{2n-1}e_3, e_{2n-2}, ..., e_n, e_{n+1})$ (on a pour $1 \leq k \leq n$, $e'_{2k-1} = e_k$; $e'_{2k} = e_{2n+1-k}$). Alors la matrice de f dans la base B' est la matrice diagonale par blocs:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 & 0 \\ & & \cdots & 0 & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

d'où $\det A = (a^2 - b^2)^n$

2.4.3 Représentation matricielle par blocs

Dans cette sous section, u est un endomorphisme de E.

Sous espace vectoriel stable

Définition 2.18: *Un sous espace vectoriel F de E est dit stable par u si $u(F) \subset F$.*

Endomorphisme induit

Définition 2.19: *Soit F un sous espace vectoriel de E stable par u. Alors l'application u_F : $\begin{array}{c} F \longrightarrow F \\ x \longmapsto u(x) \end{array}$ qui est la restriction et la corestriction de u à F est un endomorphisme de F appelé l'endomorphime de F induit par u.*

Base adaptée à un sous espace vectoriel

Définition 2.20: *Soit F un sous espace vectoriel de E de dimension $p < n$. Une base de E adaptée à F est une base $(e_{,1}, e_2, ...e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ de E telle que $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une base de F.*

Théorème 2.11: *Soit F un sous espace vectoriel de E de dimension $p < n$. Les CSSE:*

i) F est stable par u;

ii) Pour toute base $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ de E adaptée à F c.à.d telle que $\mathcal{F} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ est une base de F, la matrice de u dans la base B est une matrice triangulaire par bloc de la forme:

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ *où A_{11} et A_{22} sont des matrices carrées d'ordre respectifs p et $n-p$. (A_{11} est alors la matrice de u_F, l'endomorphisme de F induit par u, dans la base $\mathcal{F}$).*

Preuve

Posons $mat_B(u) = A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. F stable par $u \Longleftrightarrow u(e_j) \in F$, pour $1 \leq j \leq p \Leftrightarrow u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e_i$, pour $1 \leq j \leq p \Longleftrightarrow .a_{ij} = 0$ dans le cadran

$[i > p, 1 \leq j \leq p] \iff A$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ où A_{11} est une matrice carrée d'ordre p dont pour $1 \leq j \leq p$, la $j^{ème}$ colonne est $u(e_j) = u_F(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{ij} e_i$ d'où $A_{11} = mat_{\mathcal{F}}(u_F)$.

Somme directe d'endomorphismes

On suppose $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$ et que $\forall 1 \leq k \leq p$, E_k est stable par u. on note $u_k = u_{E_k}$ l'endomorphisme de E_k induit par u.

Comme $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$, alors $\forall x \in E$, x s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2 + ... + x_p$, avec $x_k \in E_k$, $\forall 1 \leq k \leq p$; alors on a:

$u(x) = u(x_1 + x_2 + ... + x_p) = u(x_1) + u(x_2) + ... + u(x_p) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + ... + u_p(x_p)$.

On dit alors que u est somme directe des u_k et on écrit $u = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} u_i$

Base adaptée à une somme directe

Définition 2.21: *On suppose $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$. une base de E adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$, est une base de E de la forme $B = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_p$ où pour $1 \leq k \leq p$, B_k une base de E_k.*

Théorème 2.12:*On suppose $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$ et que $\forall 1 \leq k \leq p$, E_k est stable par u. on note $u_k = u_{E_k}$ l'endomorphisme de E_k induit par u. Soit $B = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_p$ une base de E adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$, A_k la matrice de u_k dans la base B_k. Alors la matrice de u dans la base B est la matrice diagonale par bloc*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}.$$

Preuve

En procédant comme dans la preuve du théo 2.11, il suffit d'écrire la matrice de u dans la base B en délimitant les bases B_k des u_k.

Corollaire : On suppose $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$ et que $\forall 1 \leq k \leq p$, E_k est stable par u. on note $u_k = u_{E_k}$ l'endomorphisme de E_k induit par u; alors on a

$$\det u = \prod_{k=1}^{p} \det u_k$$

2.5 Opérations élémentaires sur les matrices.

Définitions 2.22: *Soit* $A \in M_{m,n}(\Bbbk)$ *. On apelle opération élémentaire sur les lignes de A, l'une des opérations suivantes:*

1) Multiplier la $i^{\text{ème}}$ *ligne par* $\lambda \in \Bbbk, \lambda \neq 0$*, dite opération élémentaire de dilatation notée* $L_i \longleftarrow \lambda L_i$*;*

2) ajouter à la $i^{\text{ème}}$ *ligne,* α *fois la* $j^{\text{ème}}$ *ligne* $(\alpha \in \Bbbk, i \neq j)$ *dite opération élémentaire de transvection, notée* $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$*;*

3) Echanger la $i^{\text{ème}}$ *et la* $j^{\text{ème}}$ *ligne dite opération élémentaire de transposition notée* $L_i \longleftrightarrow L_j$*.*

Remarque 2.4: La famille des opérations 1 et 2 est équivalente à la famille des opérations:

4) *Remplacer la* $i^{\text{ème}}$ *ligne par* λ *fois la* $i^{\text{ème}}$ *ligne* $(\lambda \neq 0) + \alpha$ *fois la* $j^{\text{ème}}$ *ligne* $L_i \longleftarrow \lambda L_i + \alpha L_j$*.*

Définition 2.23 : *On définit de même les opérations de dilatation, de transvection et de transposition élémentaire sur les colonnes de A notées respectivement:*

$$C_i \longleftarrow \lambda C_i; \;\; C_i \longleftarrow C_i + \alpha C_j; \quad C_i \longleftrightarrow C_j$$

dont les propriétés sont analogues à celles des opérations sur les lignes et s'en déduisent par transposition.

Définition 2.24 et notation : *Soient* $i \neq j \in \overline{1,m}$*,* $\lambda, \alpha \in \Bbbk, \lambda \neq 0$ et $A \in M_{m,n}(\Bbbk)$ *. Alors:*

Les matrices de $M_m(\Bbbk)$ *transformées de A par les opérations* $L_i \longleftarrow \lambda L_i$*,* $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$*,* $L_i \longleftrightarrow L_j$ *sont notées respectivement:*

$$\delta_{(i,\lambda)}(A), \;\; \tau_{(ij,\alpha)}(A), \;\; \pi_{ij}(A).$$

Les matrices de $M_m(\Bbbk)$ *transformées de* I_m *par les opérations* $L_i \longleftarrow \lambda L_i$*,* $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$*,* $L_i \longleftrightarrow L_j$ *sont notées respectivement:*

$$D_i(\lambda), \;\; T_{i,j}(\alpha), \;\; P_{i,j}$$

et dites respectivement matrice élémentaire de dilation, de transvection et de transposition.

Une matrice d'opération élémentaire est une matrice élémentaire soit de dilatation, soit de transvection,soit de transposition.

Proposition 2.12: *Les opétations respectives* $L_i \longleftarrow \lambda L_i$*,* $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$*,* $L_i \longleftrightarrow L_j$ *transforment A en:*

$$D_i(\lambda) \times A, \;\; T_{i,j}(\alpha) \times A, \;\; P_{i,j} \times A.$$

En d'autre termes on a:

$$\delta_{(i,\lambda)}(A) = \delta_{(i,\lambda)}(I_m) \times A;\ \ \tau_{(ij,\alpha)}(A) = \tau_{(ij,\alpha)}(I_m) \times A;\ \ \pi_{ij}(A) = \pi_{ij}(I_m) \times A.$$

Preuve
Simples vérifications.

Remarque 2.5
a) Pour résumer la proposition 2.12, on retiendra que si $e(A)$ désigne la transformée d'une matrice quelconque $A \in M_{m,n}(\Bbbk)$ par une opération élémentaire sur les lignes, alors on a:

$$e(A) = e(I_m) \times A.$$

b) Les opérations $L_i \longleftarrow \lambda L_i$, $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$, $L_i \longleftrightarrow L_j$ sont inversibles d'inverses respectives:

$$L_i \longleftarrow \tfrac{1}{\lambda} L_i,\ L_i \longleftarrow L_i - \alpha L_j,\ L_i \longleftrightarrow L_j$$

donc les matrices d'opération élémentaire sont inversibles et plus précisément on a:

$$[D_i(\lambda)]^{-1} = D_i(\tfrac{1}{\lambda});\ \ [T_{i,j}(\alpha)]^{-1} = T_{i,j}(-\alpha);\ \ P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}.$$

c) Les opérations respectives $C_i \longleftarrow \lambda C_i$; $C_i \longleftarrow C_i + \alpha C_j$; $C_i \longleftrightarrow C_j$ transforment A en

$$A \times D_i'(\lambda),\ \ A \times T_{j,i}'(\alpha),\ \ A \times P_{i,j}'$$

où $D_i'(\lambda)$, $T_{j,i}'(\alpha)$, $P_{i,j}'$ sont les matrices de $M_n(\Bbbk)$ transformées de I_n par les opérations $C_i \longleftarrow \lambda C_i$; $C_i \longleftarrow C_i + \alpha C_j$; $C_i \longleftrightarrow C_j$.

3 SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

3.1 Echelonnement d'une matrice

3.1.1 Matrice échelonnée

Définition 2.25: - *Une Matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\Bbbk)$ est dite échelonnée par ligne si le nombre de zéros précédant le 1^{er} élément non nul d'une ligne augmente de ligne en ligne tant qu'il y a des lignes non nuls c.à.d. s'il existe des coefficients non nuls $a_{1j_1}, ..., a_{rj_r}$ de A ($r \leq m$) avec $j_1 < j_2 < ... < j_r$ tels que:*

$a_{ij} = 0$ pour ($i \leq r$ et $j < j_i$) et $i > r$.

- Les coefficients non nuls $a_{1j_1}, ..., a_{rj_r}$ sont alors appelés les éléments distingués ou pivots de A.

- Une matrice A est dite échelonnée réduite par ligne (en abrégé erl) si elle est échelonnée par ligne et si chaque élément distingué de A est égal à 1 et est le seul élément non nul sur sa colonne.

Exemple 2.7:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A est une matrice échelonnée (non réduite), B est une matrice *erl*.
Les éléments distingués sont ceux qui sont entourés.

Proposition 2.13: *Soit A une matrice échelonnée par ligne; alors le rang de A est égal au nombre de lignes non nulles de A.*

<u>Preuve</u>

Il s'agit de montrer que les lignes non nulles d'une matrice échelonnée par ligne sont linéairement indépendantes ce qu'on vérifie facilement.

3.1.2 Matrices équivalentes ligne

Définition 2.26: *Deux matrices A et B sont dites équivalentes ligne si B s'obtient à partir de A par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes.*

On écrit alors $A\tilde{}B$

Proposition 2.14: S*i A et B sont équivalentes ligne, alors $rg\,(A) = rg\,(B)$.*

<u>Preuve</u>

Si A et B sont équivalentes ligne, alors B s'obtient à partir de A par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes.Par suite d'après la remarque 2.5a), B est égal au produit de A par un nombre fini de matrices d'opération élémentaire. comme chaque matrice d'opération élémentaire est inversible alors la propriété 2.1d) assure le résultat

Proposition 2.15: *Toute matrice est équivalente ligne à une matrice échelonnée par ligne.*

Plus précisément, pour tout $A \in M_{m,n}(\mathbb{k})$, il existe une matrice inversible $P \in M_m\,(\mathbb{k})$ et une matrice échelonnée par ligne $E \in M_{m,n}(\mathbb{k})$ telles que $PA = E$.

<u>Preuve</u>

D'après l'algorithme d'échelonnement d'une matrice (voir un peu plus bas), A est transformée en une matrice échelonnée par ligne E par des opérations élémentaires successives sur les lignes. Soient $e_1, e_2, ..., e_k$ la suite d'opérations élémentaires qui transforme A en E et $E_1, E_2, ..., E_k$ les matrices d'opération élémentaire correspondant. Alors:

e_1 transforme A en $e_1(A) = E_1 \times A$ qui est transformée à son tour par e_2 en $e_2\left[e_1(A)\right] = E_2 \times E_1 \times A$ et ainsi de suite on obtient $E = e_k\left[e_{k-1}...\left[e_2\left[e_1(A)\right]\right]\right] = E_k \times E_{k-1} \times ... \times E_2 \times E_1 \times A$. On pose $P = E_k \times E_{k-1} \times ... \times E_2 \times E_1$; alors P est inversible car produit de matrices d'opérations élémentaires qui d'après la remarque 2.5b), sont inversibles et on a $PA = E$.

Proposition 2.16 (et définition): *Toute matrice A est équivalente ligne à une unique matrice erl appelée la forme ligne canonique de A.*

Plus précisément, *pour tout $A \in M_{m,n}(\mathbb{k})$, il existe une unique matrice inversible $P \in M_m(\mathbb{k})$ et une unique matrice erl $E \in M_{m,n}(\mathbb{k})$ telles que $PA = E$.*

Proposition 2.17: *Une matrice de $M_n(\mathbb{k})$ est inversible si et seulement si sa forme ligne canonique est égale à I_n.*

Preuve

Si la forme ligne canonique de A est égal à I_n, alors en vertu de la proposition 2.14, A et I_n ont le même rang donc A est inversible. Réciproquement si A est inversible, alors pour la même raison que précédemment la forme ligne canonique E de A est inversible. Alors pour achever la preuve il suffit de remarquer que I_n est la seule matrice *erl* inversible de $M_n(\mathbb{k})$. En effet Si une matrice *erl* de $M_n(\mathbb{k})$ est inversible, alors aucune de ses lignes n'est nulle, donc il y a un élément distingué sur chaque ligne. Par conséquent E possède n éléments distingués et la condition $1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_n \leq n$ de la définition 2.24 implique que $j_k = k$ pour $1 \leq k \leq n$ et donc que ces éléments distingués sont les éléments de la diagonale de E. Comme en plus E est réduite, alors ces éléments sont tous égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls sur leurs colonnes respectives. En somme, les coefficients de E sont égaux à 1 sur la diagonale et à 0 ailleurs donc on a $E = I_n$.

Application au calcul de l'inverse d'une matrice

Corollaire 1 : *Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice inversible. Alors A^{-1} est égal au produit des matrices d'opérations élémentaires correspondant à la suite des opérations élémentaires qui transforme A en I_n.*

En conséquence A^{-1} est égale à la transformée de I_n par cette suite d' opérations élémentaires sul les lignes

Preuve

Soient $e_1, e_2, ..., e_k$ la suite d'opérations élémentaires qui transforme A en I_n et $E_1, E_2, ..., E_k$ les matrices d'opération élémentaire correspondant. Alors on a:

$E_k \times E_{k-1} \times ... \times E_2 \times E_1 \times A = I_n$ d'où $A^{-1} = E_k \times E_{k-1} \times ... \times E_2 \times E_1 = e_k\left[e_{k-1} ... \left[e_2\left[e_1(I_n)\right]\right]\right]$.

Exemple 2.8 :
NB : Avant de suivre cet exemple lire d'abord l'algorithme d'échelonnement d'une matrice et l'exemple 2.9

Calculons l'inverse de la matrice suivante en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

On échelonne A et on applique simultanément les mêmes opérations sur les lignes de I_3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 4L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{matrix} L_1 + 2L_3 \\ L_2 - L_3 \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \\ -L_2 \\ -L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Corollaire 2 : *Une matrice est inversible si et seulement si elle est produit fini de matrices d'opération élémentaire.*

Preuve
Si $A \in M_n(\mathbb{k})$ est produit fini de matrices d'opération élémentaire, alors A est inversible puisque toute matrice d'opération élémentaire est inversible. Réciproquement si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et d'après le corollaire 1, A $(= (A^{-1})^{-1})$ est égal au produit des matrices d'opérations élémentaires correspondant à la suite des opérations élémentaires qui transforme A^{-1} en I_n.

Définition 2.27 : *Echelonner une matrice A (par ligne) c'est construire une matrice échelonnée par ligne équivalente ligne à A.*

3.1.3 Algorithme d'échelonnement d'une matrice

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{k})$. On construit une matrice échelonnée par ligne équivalente ligne à A de la manière suivante:

$\cdot$ * Si la j_1 *ème* colonne est la 1 *ère* colonne de A possédant au moins un élément non nul par exemple a_{pj_1} situé sur la p *ème* ligne, alors:

- Si $p = 1$, alors on effectue successivement pour $2 \leq i \leq m$, l'opération $L_i \longleftarrow a_{1j_1} L_i - a_{ij_1} L_1$ pour annuler tous les éléments de la j_1 *ème* colonne à l'exception de a_{1j_1} qui est non nul (c'est le pivot de la $1^{ère}$ ligne).

- Si $p \neq 1$, alors on permute les lignes L_p et L_1 $(L_p \longleftrightarrow L_1)$ avant d'effectuer les opérations.

$\cdot$ Supposons que les opérations ci-avant soient effctuées au rang k $(k \geq 1)$.

* Si la j_{k+1} *ème* colonne est la 1 *ère* colonne après la j_k *ème* colonne possédant au moins un élément non nul en dessous de la k *ème* ligne, par exemple $\alpha_{qj_{k+1}}$ (nouvelle valeur de $a_{qj_{k+1}}$ après les opérations précédentes) situé sur la q *ème* colonne, alors:

- Si $q = k+1$, alors on effectue successivement pour $k+2 \leq i \leq m$ les opérations $L_i \longleftarrow \alpha_{k+1 j_{k+1}} L_i - \alpha_{ij_{k+1}} L_{k+1}$ pour annuler tous les éléments de la j_{k+1} *ème* colonne en dessous de $\alpha_{k+1j_{k+1}}$.

- Si $q \neq k+1$, alors on permute les (nouvelles) lignes L_q et L_{k+1} avant d'effectuer les opérations.

On obtient finalement une matrice échelonnée par ligne équivalente ligne à A.

Exemple 2.9: Echelonner la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ puis donner sa forme ligne canonique.

Echelonnons A :

$$A \sim \begin{array}{r} \\ L_2 + 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \\ L_4 + L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \; L_2 \longleftrightarrow L_3 \; \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{r} \\ \\ \\ L_4 + 4L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} \\ \\ \\ 2L_4 + 3L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a ainsi échelonné la matrice A. Donnons sa forme ligne canonique c.à.d poursuivons l'échelonnement jusqu'à sa forme *erl*.

A partir de la forme obtenue par l'algorithme précédent, on poursuit les combinaisons pour éliminer les éléments non nuls au dessus des éléments distingués de A.

Dans cette phase on opère dans le sens inverse de la $1^{ère}$ phase de l'échelonnement, donc de la dernière ligne à la première, et de bas en haut.

Lorsque la colonne de chaque élément distingué est débarassée des éléments non nuls, on procède à la dernière phase qui consiste à multiplier la ligne de chaque élément distingué a de A par $\frac{1}{a}$ pour rendre les éléments distingués tous égaux à 1 :

L'élément distingué -2 de la 3ème ligne est le seul élément de sa colonne ainsi que l'élément distingué -1 de la 1ère ligne; il reste seulement à éliminer le 2 au dessus de l'élément distingué de la 2ème ligne:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} L_1 + 2L_2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} -L_1 \\ -L_2 \\ -\frac{1}{2}L_3 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La forme ligne canonique de A est donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.2 Résolution des systèmes d'équations linéaires

3.2.1 Méthode de pivot de Gauss

Soit le système linéaire de m équations et à n inconnes $x_1, x_2, ..., x_n$

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

avec $a_{ij} \in \Bbbk$, $\forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

La matrice associée à (S) *est:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\Bbbk).$$

Différentes écritures de (S) **Ecriture matricielle**

On pose :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \Bbbk^n; \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \Bbbk^m.$$

l'écriture matricielle de (S) *est:*

$$AX = B.$$

Ecriture vectorielle

Soient $C_1, C_2, ..., C_n$ les colonnes respectives de A ($\forall 1 \leq j \leq n$, $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^m$).

L'écriture vectorielle de (S) *est*:

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + ... + x_n C_n = B.$$

Ecriture sous forme d'application linéaire:

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. On pose $v = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{k}^n$ et $b = (b_1, b_2, ...b_m) \in \mathbb{k}^m$. Alors:

l'écriture de (S) *sous forme d'application linéaire est*:

$$f(v) = b$$

Définitions et propriétés **Définition 2.28**: *On appelle matrice complète du système* (S) *la matrice*

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in M_{m,n+1}(\mathbb{k})$$

Définition: **2.29-** *Le système* (S) *est dit dit compatible s'il admet au moins une solution; sinon, elle est dite incompatible.*

- (S) *est dit déterminé s'il admet une solution unique et indéterminé sinon.*

Définition 2.30 : (S) *est dite homogène si* $B = 0$ *c.à.d. si* $b_i = 0$, $\forall 1 \leq i \leq m$

NB: Un système homogène est toujours compatible (en effet, $(0, 0, ..., 0)$ est

solution)

Définition 2.31 : *Deux systèmes linéaires sont dits équivalents s"ils ont les mêmes solutions.*

On a les résultats suivants:

Proposition 2.18: (S) *est compatiple si et seulement si* $rg\,(A) = rg\left(\overline{A}\right)$

<u>Preuve</u>

(S) compatible $\Longleftrightarrow$ (S) possède au moins une solution $\Longleftrightarrow$ il existe $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{k}^n$ tel que $x_1 C_1 + x_2 C_2 + ... + x_n C_n = B$ (écriture vectorielle de (S)) $\Longleftrightarrow$ B est une combinaison linéaire de $C_1, C_2, ..., C_n \Longleftrightarrow rg(C_1, C_2, ..., C_n) = rg\,(C_1, C_2, ..., C_n, B) \Longleftrightarrow rg\,(A) = rg\,(\overline{A})$.

Proposition 2.19: *Deux systèmes linéaires sont équivalents si et seulement si leurs matrices complètes sont équivalentes ligne.*

Preuve

Soient (S) et (S') deux systèmes linéaires $\overline{A}$ et $\overline{A'}$ leurs matrices complètes respectives.$\overline{A}\tilde{}\overline{A'} \Longleftrightarrow \overline{A'}$ s'obtient à partir de $\overline{A}$ par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes. Maintenant $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{k}^n$ est solution de (S) équivaut à $x_1C_1 + x_2C_2 + ... + x_nC_n = B$ où $C_1, C_2, ..., C_n, B$ sont les colonnes de $\overline{A}$ (écriture vectorielle de (S)). On vérifie que si $C_1', C_2', ..., C_n', B'$ sont les colonnes de la transformée de $\overline{A}$ par l'un quelconque des trois types d'opération élémentaire sur les lignes alors on a $x_1C_1' + x_2C_2' + ... + x_nC_n' = B'$. En conséquence, toute solution de $\overline{A}$ est solution de $\overline{A'}$ et vice versa par symétrie d'où le résultat.

Résolution des systèmes d'équations linéaires par la méthode de Gauss

Donnons d'abord ce résultat général utile dans toutes les structutes abéliennes en commençant par la définition d'un *Truc:*

Définition 2.32 : *On appelle Truc l'une des structures abéliennes suivantes: un groupe abélien, un anneau commutatif, un corps commutatif, un espace vectoriel sur un corps commutatif, un module sur un anneau commutatif, une algèbre sur un anneau (ou un corps) commutatif.*

NB: Sauf mention contraire, la loi de groupe d'un Truc est notée +, et son élément neutre 0

Lemme : *Soit* $f : T \longrightarrow T'$ *un morphisme de Truc et soit* $b \in T'$.
Soit l'équation (E) $x \in T,\ f(x) = b$. *Alors:*
- Si $b \notin \operatorname{Im} f$, (E) *n'a pas de solution;*
- Si $b \in \operatorname{Im} f$, *l' ensemble des solutions de* (E) *est:* $S_{(E)} = x_0 + \ker f$, *où* x_0 *est une solution particulière de* (E)

Preuve

$\forall x \in T$, x solution de $(E) \Longleftrightarrow f(x) = b \Longleftrightarrow x$ est un antécédent de b.
- Si $b \notin \operatorname{Im} f$, alors b n'a pas d'antécédent, alors (E) n'a pas de solution;
- Si $b \in \operatorname{Im} f$, alors b a au moins un antécédent x_0 qui est donc une solution de (E). Alors $\forall x \in T$, x solution de $(E) \Longleftrightarrow f(x) = b \Longleftrightarrow f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow f(x) - f(x_0) = 0 \Longleftrightarrow f(x - x_0) = 0 \Longleftrightarrow x - x_0 \in \ker f \Longleftrightarrow x \in x_0 + \ker f$ d'où le résultat.

Théorème 2.13

soit (S) $\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$

avec $a_{ij} \in \mathbb{k}$, $\forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, $b_i \in \mathbb{k}$, $\forall 1 \leq i \leq m$, *un système linéaire de* m *équations à* n *inconnes* $x_1, x_2, ..., x_n$.

Soient $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{k})$ *la matrice associée à* (S).

Alors l'ensemble des solutions de (S) *est soit l'ensemble vide, soit un sous espace affine de* $\mathbb{k}^n$ *de dimension* $n - rg(A)$.

Preuve

Soit f l'endomorphisme caqnoniquement associé à A. On pose $v = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{k}^n$ et $b = (b_1, b_2, ...b_m) \in \mathbb{k}^m$.

L'écriture de (S) sous forme d'application linéaire est l'équation : $v \in \mathbb{k}^n$, $f(v) = b$.

D'après le lemme si b admet au moins un antécédent c..à.d si (S) est compatible, alors la solution de (S) est

$S_{\mathbb{k}^n} = v_0 + \ker f$ où v_0 est une solution particulière de (S). D'après la formule du rang, $\ker f$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{k}^n$ de dimension $n - rg(f) = n - rg(A)$; par suite $v_0 + \ker f$ est un sous espace affine de $\mathbb{k}^n$ de dimension $n - rg(A)$.

L'essentiel de notre approche et des résultat de cette section se résume au théorème suivant:

Théorème 2.14:

Soit (S) $\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$

avec $a_{ij} \in \mathbb{k}$, $\forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, $b_i \in \mathbb{k}$, $\forall 1 \leq i \leq m$, *un système linéaire de* m *équations à* n *inconnes* $x_1, x_2, ..., x_n$.

Soient $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{k})$ *la matrice associée à* (S) *et* $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in M_{m,n+1}(\mathbb{k})$ *sa matrice complète.*

On échelonne $\overline{A}$ *pour obtenir une matrice* $\overline{A'}$ *et soit* (S') *le système associé à* $\overline{A'}$, *et* A' *la matrice associée à* (S'). *(Alors d'après les propositions* *ci-avant, d'une part* (S) *et* (S') *sont équivalents, d'autre part* $rg\,(A) = rg\,(A')$ *et* $rg\left(\overline{A}\right) = rg\left(\overline{A'}\right)$.

Trois cas se présentent:

$\underline{1^{er} cas:\ \ rg\left(\overline{A}\right) > rg\,(A)}$

Alors (S) *est incompatible:* $S_{\mathbb{k}^n} = \varnothing$

$\underline{2^{ème} cas:\ \ rg\left(\overline{A}\right) = rg\,(A) = n \text{ (nombre d'inconnues)}}$

Alors (S) *est déterminée et donc admet une solution unique qu'on détermine en résolvant* (S') *en escalier à partir de la dernière ligne.*

$\underline{3^{ème} cas:\ \ rg\left(\overline{A}\right) = rg\,(A) = r < n}$

Alors (S) *admet une infinité de solutions. Les inconnues* $x_{j_1}, ..., x_{j_r}$ *de mêmes colonnes que les* r *éléments distingués de* A'*, appelées les inconnues principales,.sont fonctions affines des* $n - r$ *autres inconnues* $x_{j_{r+1}}, ..., x_{j_n}$*, appelées inconnues secondaires et mises en paramètre.*

L'ensemble des solutions de (S) *est donc de la forme:*

$$S_{\mathbb{k}^n} = \left\{ \begin{pmatrix} x_{j_1}\left(x_{j_{r+1}}, ..., x_{j_n}\right) \\ \vdots \\ x_{j_r}\left(x_{j_{r+1}}, ..., x_{j_n}\right) \\ x_{j_{r+1}} \\ \vdots \\ x_{j_n} \end{pmatrix}, x_{j_{r+1}}, ..., x_{j_n} \in \mathbb{k} \right\}$$ *sous réserve d'une permutation de* S_n *qui remet les composantes à leur place initiale*

<u>Preuve</u>

Ce théorème précise le théo 2.13

1° Si $rg\left(\overline{A}\right) > rg\,(A)$ alors d'après la proposition 2.18, (S) est incompatible;

2° Si $rg\left(\overline{A}\right) = rg\,(A)$ alors (S) est compatible et d'après le théo 2.13, la solution de (S) est un sous espace affine $\mathcal{F}$ de dimension $n - rg(A)$. Par suite:

a) si $rg(A) = n$, alors $\dim \mathcal{F} = 0$ et par suite $\mathcal{F}$ est réduit à un point c.à.d que (S) admet une unique solution;

b) si $rg(A) < n$, alors $\dim \mathcal{F} > 0$ et par suite $\mathcal{F}$ possède une infinité déléments c.à.d que (S) admet une infinité de solutions. En outre la matrice A' étant échelonnée de rang r, alors les r lignes non nulles de A' sont linéairement indépendantes et l'expression de $S_{\mathbb{k}^n}$ dans l'énoncé de ce théo est une écriture paramétrique de $\mathcal{F}$.

Remarque 2.6

1) Le choix des inconnues principales n'est pas unique mais dépend de la façon dont l'échelonnement de A a été effectué.

Plus généralement, on peut prendre comme suite d'inconnues principales toute suite d'inconnues situées sur les colonnes utilisées pour obtenir un mineur non nul de A d'ordre $r = rg\,(A)$.

Exemple 210: Résoudre par la méthode de Gauss le système d'équations linéaires:

$$(S)\ \begin{cases} x+2y-z=3 \\ -2x-y+3z=0 \\ -x+y+2z=3 \end{cases}$$

la matrice associée à (S) est $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et la matrice augmentée est $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Echelonnée $\overline{A}$

$$\overline{A}\sim \begin{array}{c} \\ L_2+2L_1 \\ L_3+L_1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}\sim \begin{array}{c} \\ \\ L_3-L_2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $rg\left(\overline{A}\right)=rg\left(A\right)=2<3$ donc (S) admet une infinité de solutions; x et y sont les inconnues principales et z devient un paramètre.

$(S)\Longleftrightarrow (S')\begin{cases} x+2y=3+z \\ 3y=6-z \end{cases}\Longleftrightarrow \begin{cases} x=-1+\frac{5}{3}z \\ y=2-\frac{1}{3}z \end{cases}$

$S_{\mathbb{R}^3}=\left\{\left(-1+\frac{5}{3}z,2-\frac{1}{3}z,z\right),z\in\mathbb{R}\right\}$

3.2.2 Autres méthodes

Méthode de Cramer La méthode de Cramer n'est pas pratique car longue et fastidieuse (surtout lorsque le nombre d'inconnues est >3) et ne s'applique qu'au cas où le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues. Par contre, son intérêt théorique nécessite son rappel.

Résolution des systèmes d'équations linéaires par la méthode de Cramer

Théorème 2.15

:

Soit $(S)\ \begin{cases} a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+...a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$

un système de n équations linéaires à n inconnues, $A\in M_n(\mathbb{k})$ la matrice associée. Alors

(S) est déterminé c.à.d. (S) admet une solution unique si et seulement si $\triangle=\det A\neq 0$.

Dans ce cas la solution unique $(x_1,...,x_n)$ est donnée par:

$$x_j=\frac{\triangle_j}{\triangle},$$

où $\forall 1\leq j\leq n$, $\triangle_j$ est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la j ème colonne de A par la colonne des constantes $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Cas des systèmes d'équations homogènes Soit $(S)\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+...a_{mn}x_n=0 \end{array}\right.$ un système d'équations homogènes et A la matrice associée.

Dans le cas où $rg(A)=r<n$, il est souvent plus rapide d'effectuer des combinaisons directes de lignes qu'un échelonnement formel en procédant comme suit:

On choisit comme inconnues principales les inconnues situées sur les colonnes utilisées pour calculer un mineur non nul d'ordre r de A qu'on exprime directement en fonction des autres inconnues devenues paramètres, par des combinaisons directes de lignes.

Exemple 2.11: Résoudre le système d'équations homogènes

$$(S)\left\{\begin{array}{c} x+2y-z=0 \\ -2x-y+3z=0 \\ -x+y+2z=0 \end{array}\right.$$

La matrice associée à (S) est $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On a $|A|=0$ car $L_3=L_1+L_2$ donc $rg\,(A)<3$. Par contre le mineur $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ est non nul. Donc $rg\,(A)=2$ et x et z sont des inconnues principales qui s'expriment en fonction du paramètre z.

$L_1+L_3 \Longrightarrow 3y+z=0 \Longrightarrow z=-3y$; $2L_1+L_3 \Longrightarrow x+5y=0 \Longrightarrow x=-5y$

Donc $S_{\mathbb{R}^3}=\{(-5y,y,-3y)\,,y\in\mathbb{R}\}$

Méthodes imaginatives Certaines méthodes imaginatives (changement de variables, combinaisons remarquables de lignes etc...) se révèlent plus rapides et plus efficaces dans la résolution de certaines types de systèmes linéaires.

Exemple 2.12 : Résoudre le système

$$(S)\left\{\begin{array}{c} x_2+x_3+...+x_n=a_1 \\ x_1+x_3+...+x_n=a_2 \\ \vdots \\ x_1+x_2+...+x_{n-1}=a_n \end{array}\right. \quad n\geq 2$$

On a : $L_1+L_2+...+L_n \Longrightarrow (n-1)\,x_1+(n-1)\,x_2+...(n-1)\,x_n = a_1+a_2+...+a_n \Longrightarrow$

$L_0:\ x_1+x_2+...+x_n=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n-1}$

$\forall 1\leq j\leq n,\ L_0-L_j \Longrightarrow x_j=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n-1}-a_j.$

3.3 Application au calcul de l'inverse d'une matrice

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$ inversible. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux suites de variables dans $\mathbb{k}$.

Lorsque Y est donné, l'égalité $AX = Y$ exprime $y_1, y_2, ..., y_n$ en fonction de $x_1, x_2, ..., x_n$. C'est un système linéaire.ayant une unique solution $(x_1, x_2, ..., x_n)$ qu'on exprime en fonction de $(y_1, y_2, ..., y_n)$ en résolvant le système. Or $AX = Y \Longrightarrow X = A^{-1}Y$. Donc A^{-1} est la matrice du système qui exprime $x_1, x_2, ..., x_n$ en fonction de $y_1, y_2, ..., y_n$.

Exemple 2.13 : Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

M est une matrice triangulaire donc $\det(M) = 2 \times (-1) \times 6 = -12 \neq 0$, donc M est inversible.

Maintenant, soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Le système $MX = X'$ s'écrit:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 4z = x' \\ -y + 3z = y' \\ 6z = z' \end{cases}$$

La résolution en cascade du système donne:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' + \frac{5}{2}y' - \frac{11}{12}z' \\ y = -y' + \frac{1}{2}z' \\ z = \frac{1}{6}z' \end{cases}$$

d'où $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{11}{12} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 30 & -11 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4 Exercices du chapitre 2

Exercice 1

1° Parmi les produits donnés, dire ceux qui entrent dans le calcul des déterminants d'ordres correspondants et préciser avec quel signe:

i) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$; ii) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$; iii) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$.

2° Soit la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 12 & 1 & 10 & 9 & 11 & 7 & 3 & 4 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ de S_{12}

Décomposer σ en produits de cycles de supports disjoints puis en produits de transpositions et donner la signature de σ.

3° Soit $\beta \in S_n$ $(n \geq 2)$.

a) comparer $Sgn\,(\beta)$ et $Sgn\,(\beta^{-1})$

b) Montrer que l'application $f : \begin{array}{c} S_n \longrightarrow S_n \\ \sigma \longmapsto \sigma \circ \beta \end{array}$ est bijective.

c) On suppose que β est impaire. Montrer que f induit une bijection du groupe A_n des permutations paires sur l'ensemble I_n des permutations impaires. En déduire $Card\,(A_n)$ et $Card\,(I_n)$.

Exercicice 2

1° Soient E un espace vectoriel réel, f une forme trilinéaire alternée sur E et $u, v, w \in E$.

Calculer $f(2u - v + 5w, u - 3w, 2v + w)$ en fonction de $f(u, v, w)$

2° Soient E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel non nul ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$), p un entier ≥ 2 et f une forme p-linéaire f sur E.

Pour tout élément σ de S_p, on note f_σ l'application : $\begin{array}{c} E^p \longrightarrow \mathbb{k} \\ (x_1, ..., x_p) \longmapsto f_\sigma(x_1, ..., x_p) = f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}) \end{array}$

a) Montrer que f_σ une forme p-linéaire sur E.

f est dit symétrique si on a $f_\sigma = f$, $\forall \sigma \in S_p$. elle est dite antisymétrique si on a $f_\sigma = Sgn(\sigma) \times f$, $\forall \sigma \in S_p$.

b) Montrer f est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.

On appelle symétrisé de f l'application $S(f) = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_p} f_\sigma$. On appelle anti-symétrisé de f l'application $A(f) = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_p} Sgn(\sigma) \times f_\sigma$.

c) Montrer que $S(f)$ est une forme p-linéaire symétrique sur E et $A(f)$ est une forme p-linéaire antisymétrique sur E.

Soient $f_1, ..., f_p$ p formes linéaires sur E, et $\varphi : \begin{array}{c} E^p \longrightarrow \mathbb{k} \\ (x_1, ..., x_p) \longmapsto f_1\,(x_1) \times ... \times f_p\,(x_p) \end{array}$

d) Montrer que f est une forme p-linéaire sur E. Est-elle symétrique? antisymétrique?

On pose $E = \mathbb{R}_2\,[X]$, l'ensemble des polynômes de degré ≤ 2. Soit $\alpha : \begin{array}{c} E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) \longmapsto P(1) \times Q(-1) \end{array}$

e) Montrer que α est une forme bilinéaire sur E et déterminer $S\,(\alpha)$ ainsi que $A\,(\alpha)$.

Exercicice 3

1° Trouver très rapidement les déterminants suivants :

$$A = \begin{vmatrix} -4 & 17 & -9 & 7 \\ -1 & 23 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 11 & 5 & 36 \end{vmatrix} ; B = \begin{vmatrix} 7 & 4 & -5 & -12 \\ 8 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & -2 & 14 & 6 \\ -3 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix} ; C = \begin{vmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$; D = \begin{vmatrix} 3 & -11 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 15 & 27 & -5 & -1 & 1 \\ 7 & 41 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

2° En utilisant la forme la décomposition par blocs après éventuellement quelques opérations de lignes ou de colonnes, calculer les déterminants suivants:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} ; \quad B = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & -2 & -4 & 0 \\ -5 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ -2 & 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

2° Montrer sans le calculer que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -9 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & -7 \\ 4 & 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} \text{ est un entier divisible par 5.}$$

Exercicice 4

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant:

$a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $\forall 1 \leq i, j \leq n$; pour $1 \leq i \leq n$, a_{ii} est impair; pour $1 \leq i < j \leq n$, a_{ij} est pair.

Montrer que A est une matrice inversible.

Exercicice 5

Montrer que les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^5$ sont libres:

$\mathcal{F}_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$;$\mathcal{F}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ avec :

$u_1 = (-1; 0; 0; 1; -1)$, $u_2 = (-2; 1; 0; 1; -1)$, $u_3 = (-3; 1; 1; 1; -1)$, $u_4 = (-3; 0; 1; 2; -1)$, $u_5 = (-3; 0; 1; 3; -2)$; $v_1 = (-1; 0; 2; 2; 1)$, $v_2 = (2; 0; 1; 3; -1)$, $v_3 = (1; 0; 0; 1; 0)$

Exercice 6

1° Réduire à la forme échelonnée puis à la forme ligne canonique les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Si pour $i = 1, 2$, B_i est la forme ligne canonique de A_i, déterminer la matrice P_i telle que $B_i = P_i A_i$.

Exercice 7

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse par trois méthodes différentes.

Exercicice 8

Déterminer le rang de la matrice de $M_n(\mathbb{C})$:

$$M(z) = \begin{pmatrix} 1-z^2 & z & 0 & \cdots & 0 \\ -z & 1-z^2 & z & \ddots & \vdots \\ 0 & -z & 1-z^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & z \\ 0 & \cdots & 0 & -z & 1-z^2 \end{pmatrix}$$

.

Exercice 9

Soit $D_n = |a_{ij}|$ le déterminant d'ordre n tel que $a_{ii} = 0$ et $a_{ij} = 1$ pour $i \neq j$.

On désigne par Δ_n le déterminant d'ordre n obtenu en remplaçant a_{11} par 1 dans D_n.

a) Exprimer D_n et Δ_n en fonction de D_{n-1} et Δ_{n-1}.

b) En déduire le calcul de D_n et Δ_n en fonction de n.

Exercice 10

Pour $n > 0$ fixé, on donne le déterminant d'ordre $p+1$ $(1 \leq p \leq n)$

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^p \\ 1 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 & \cdots & C_{n+1}^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_{n+p}^1 & C_{n+p}^2 & \cdots & C_{n+p}^p \end{vmatrix}$$

dans lequel les C_{n+r}^k sont les coefficients du binôme de Newton. Etablir une relation entre Δ_p et Δ_{p-1}. En déduire Δ_p.

Exercice 11

Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ n réels $(n \geq 2)$. Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$

$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

(Le determinant d'ordre n ci-dessus est appelé le determinant de Van Der Monde associé à la suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$)

b) Discuter suivant les valeurs de a et λ le rang des matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} ; P = \begin{pmatrix} a & 1 & -1+a & 0 \\ a & -a & 0 & 2a \\ a & 2+a & -2+2a & -2a \end{pmatrix}$$

2° a) Résoudre le système homogène suivant :

$$\begin{cases} x + 3y - z + 2t = 0 \\ 11y - 5z - 3t = 0 \\ 2x - 5y + 3z + t = 0 \\ 4x + y + z + 5t = 0 \end{cases}$$

b) Résoudre et discuter suivant les valeurs de a, b et λ les systèmes d'équations linéaires suivantes :

$$\left\{\begin{array}{c} x+\lambda y-z=2 \\ 2x-y+\lambda z=5 \\ x+10y-6z=1 \end{array}\right. \quad ; \left\{\begin{array}{c} x+y+z=0 \\ x+a^2y+b^2z=\lambda \\ x+ay+bz=0 \end{array}\right.$$

Exercice 12

Discuter et résoudre le système:

$$(S):\left\{\begin{array}{c} x_1+x_2=a_1 \\ \cdots \\ x_{n-1}+x_n=a_{n-1} \\ x_n+x_1=a_n \end{array}\right.$$