

# Cours d'Electromagnétisme

Pr. O. K. OBROU

Université FHB Cocody

Département de Physique

Copyright © 2015 O. K. Obrou

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

Toute reproduction partielle ou intégrale de ce document sans l'autorisation de l'auteur est en contradiction flagrante des droits de la propriété intellectuelle. Tout usage à des fins commerciales est strictement interdite et passible de poursuites judiciaires.

*First printing, October 2013*

# Contents

<b>1</b>	<b>Outils mathématiques magnétostatique</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Champ électromagnétique et ses propriétés</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Symétrie de distribution de courant et symétrie des champs</b>	<b>7</b>
3.1	Introduction . . . . .	7
3.2	Distribution de courant ayant un plan de symétrie . . . . .	7
3.2.1	Rapels mathématiques sur la symétrie des vecteurs . . . . .	7
3.2.2	Définition . . . . .	8
3.2.3	Potentiel vecteur en deux points symétriques . . . . .	8
3.2.4	Champ magnétique en deux points symétriques . . . . .	9
3.2.5	Champ et potentiel en tout point d'un plan de symétrie . . . . .	10
3.3	Distribution de courant ayant un plan d'antisymétrie . . . . .	10
3.3.1	Définition . . . . .	10
3.4	Invariance des sources . . . . .	11
3.4.1	Invariance des sources par translation le long d'un axe . . . . .	11
3.4.2	Invariance des sources par rotation autour d'un axe . . . . .	11
3.5	Application . . . . .	12
3.5.1	Etude du champ crée par une feuille conductrice plane d'épaisseur $e$ . . . . .	12
3.5.2	Analyse de la symétrie . . . . .	12
3.5.3	Expressions du potentiel vecteur et du champs magnétique . . . . .	13
3.6	Conclusion . . . . .	13



## **Chapter 1**

# **Outils mathématiques magnétostatique**

## **Chapter 2**

# **Champ électromagnétique et ses propriétés**

## Chapter 3

# Symétrie de distribution de courant et symétrie des champs

### 3.1 Introduction

Le champ magnétique et le potentiel vecteur sont liés à la distribution de courant qui les engendrent. Pour rappel, en tout point de l'espace, le champ magnétique et le potentiel vecteur qui lui est associé sont données par les expressions ci-après

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_v \vec{J} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3} d\vartheta$$

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}(P)}{PM} d\vartheta$$

où  $\vec{J}$  est le vecteur densité volumique de courant source du champ. Le calcul de  $\vec{B}$  et  $\vec{A}$  peut être facilité par la prise en compte des symétries particulières des distributions de courant (polaire, cylindrique, sphériques, etc ..). Il est alors possible de prévoir que  $\vec{B}(M)$  et  $\vec{A}(M)$  ne dépendent pas explicitement de certaines coordonnées de M et qu'une ou deux composantes de  $\vec{B}(M)$  et  $\vec{A}(M)$  dans une base appropriée sont nulles.

### 3.2 Distribution de courant ayant un plan de symétrie

#### 3.2.1 Rapels mathématiques sur la symétrie des vecteurs

Soit  $\vec{A}$  et  $\vec{A}'$  deux vecteurs symétriques (ou antisymétriques) par rapport à un plan  $\Pi$ .

Si :

- les coordonnées de  $\vec{A}$  sont  $(\alpha, \beta, \gamma)$
- les coordonnées de  $\vec{A}'$  son symétrique ou (antisymétrique) sont  $\varepsilon(-\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta, \varepsilon\gamma)$

$\varepsilon = 1$  pour symétrique ou  $-1$  pour antisymétrique

$$\vec{A}' + \vec{B}' = \text{sym}(\vec{A}) + \text{sym}(\vec{B}) = \text{sym}(\vec{A} + \vec{B})$$

$$\lambda \cdot \text{sym}(\vec{A}) = \text{sym}(\lambda \cdot \vec{A})$$

$$\text{sym}(\vec{A}) \wedge \text{sym}(\vec{B}) = -\text{sym}(\vec{A} \wedge \vec{B})$$

et donc

$$(\varepsilon \text{sym}(\vec{A})) \wedge \text{sym}(\vec{B}) = -\varepsilon \cdot \text{sym}(\vec{A} \wedge \vec{B})$$

### 3.2.2 Définition

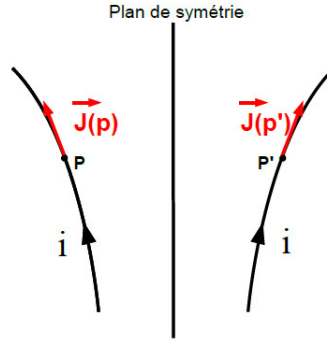
On dit qu'une distribution de courant possède un plan de symétrie  $\Pi$ , si les courants volumiques en deux points  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport à  $\Pi$  sont eux-même symétriques:

$$\vec{J} = \text{Sym} \vec{J}$$

$$\vec{J}_n(P') = -\vec{J}_n(P)$$

$$\vec{J}_t(P') = \vec{J}_t(P)$$

où les indices  $n$  et  $t$  désignent respectivement les composantes normales et tangentiels de  $\vec{J}$



### 3.2.3 Potentiel vecteur en deux points symétriques

Considérons une distribution de courant ayant un plan de symétrie  $\Pi$  et deux points  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport à  $\Pi$ . Exprimons les contributions au potentiel vecteur  $\vec{A}$  en deux points symétriques  $M$  et  $M'$  par rapport à  $\Pi$ . On a

- au point  $M$

$$d\vec{A}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \left( \frac{\vec{J}}{PM} + \frac{\vec{J}'}{P'M} \right) d\vartheta = \frac{\mu_o}{4\pi} \left( \frac{\vec{J}}{PM} + \frac{\text{sym}\vec{J}}{P'M} \right) d\vartheta \quad (3.1)$$

-au point  $M'$

$$d\vec{A}(M') = \frac{\mu_o}{4\pi} \left( \frac{\vec{J}}{PM'} + \frac{\vec{J}'}{P'M'} \right) d\vartheta = \frac{\mu_o}{4\pi} \left( \frac{\vec{J}}{PM'} + \frac{\text{sym}\vec{J}}{PM} \right) d\vartheta \quad (3.2)$$

Puisse que,  $P'M' = PM$ ,  $PM' = P'M$ ,  $\vec{J}' = \text{Sym} \vec{J}$

$$d\vec{A}(M') = \frac{\mu_o}{4\pi} \left( \frac{\text{sym}(\text{sym}\vec{J})}{PM'} + \frac{\text{sym}\vec{J}}{PM} \right) d\vartheta = \frac{\mu_o}{4\pi} \text{sym} \left( \frac{\text{sym}\vec{J}}{PM'} + \frac{\vec{J}}{PM} \right) d\vartheta \quad (3.3)$$

On a

$$d\vec{A}(M') = \text{sym} \left( d\vec{A}(M) \right) \quad (3.4)$$



$$A(\vec{M}') = \text{sym}(\vec{A}(M)) \quad (3.5)$$

Soit

$$\vec{A}_n(M') = -\vec{A}_n(M) \quad (3.6)$$

$$\vec{A}_t(M') = \vec{A}_t(M) \quad (3.7)$$

*Les potentiels vecteurs en deux points symétriques d'une distribution possédant un plan de symétrie sont eux même symétriques.*

### 3.2.4 Champ magnétique en deux points symétriques

On considère une distribution de courant ayant un plan de symétrie  $\Pi$  et deux points  $P$  et  $P'$  de cette distribution symétriques par rapport à  $\Pi$ . Soient deux points  $M$  et  $M'$  symétriques par rapport à  $\Pi$ . Le champ magnétique aux point  $M$  et  $M'$  sont respectivement

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \left( \frac{\vec{J} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} + \frac{\vec{J}' \wedge \overrightarrow{P'M}}{P'M^3} \right) d\vartheta \quad (3.8)$$

$$d\vec{B}(M') = \frac{\mu_o}{4\pi} \left( \frac{\vec{J} \wedge \overrightarrow{PM'}}{PM'^3} + \frac{\vec{J}' \wedge \overrightarrow{P'M'}}{P'M'^3} \right) d\vartheta \quad (3.9)$$

Comme

$$\vec{J}' \wedge \overrightarrow{P'M} = -\text{sym}(\vec{J} \wedge \overrightarrow{PM'}) \quad (3.10)$$

$$\vec{J}' \wedge \overrightarrow{P'M'} = -\text{sym}(\vec{J} \wedge \overrightarrow{PM}) \quad (3.11)$$

On a

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \left( \frac{\vec{J} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} - \frac{\vec{J}' \wedge \overrightarrow{PM'}}{PM'^3} \right) d\vartheta \quad (3.12)$$

et

$$d\vec{B}(M') = \frac{\mu_o}{4\pi} \left( \frac{\vec{J} \wedge \overrightarrow{PM'}}{PM'^3} - \frac{\vec{J}' \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \right) d\vartheta \quad (3.13)$$

d'où

$$\vec{B}(M') = -\text{sym}\vec{B}(M) \quad (3.14)$$

*Les champs magnétiques en deux points symétriques d'une distribution possédant un plan de symétrie sont eux même antisymétriques*

### 3.2.5 Champ et potentiel en tout point d'un plan de symétrie

En un point S du plan de symétrie  $\Pi$  ( $M'=M$ ), on a

$$\vec{A}_n(S) = -\vec{A}_n(S) = \vec{0}$$

et

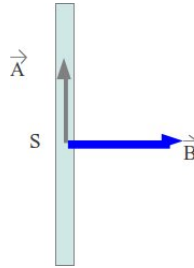
$$\vec{B}_t(S) = -\vec{B}_t(S) = \vec{0}$$

d'où

$$\vec{A}(S) = \vec{A}_t(S)$$

et

$$\vec{B}(S) = \vec{B}_n(S)$$



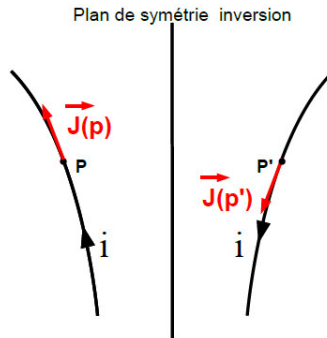
## 3.3 Distribution de courant ayant un plan d'antisymétrie

### 3.3.1 Définition

Une distribution de courant possède un plan d'antisymétrie  $Q$  si en deux points symétriques  $P$  et  $P'$  par rapport à ce plan on a

$$\vec{J}' = -\text{sym} \vec{J}$$

En adoptant une démarche analogue à celle adoptée au paragraphe précédent, on obtient les relations suivantes entre les champs en deux points  $M$  et  $M'$  symétriques par rapport à  $Q$ .



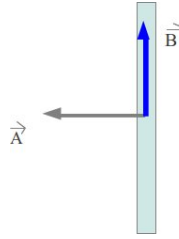
$$\vec{A}(M') = -\text{sym}(\vec{A}(M)) \quad (3.15)$$

$$\vec{B}(M') = \text{sym}(\vec{B}(M)) \quad (3.16)$$

Lorsque le point est situé dans le plan d'antisymétrie  $Q$ , ( $M=M'=T$ ) alors

$$\vec{A}_t(T) = -\vec{A}_t(T) = \vec{0}$$

$$\vec{B}_n(T) = -\vec{B}_n(T) = \vec{0}$$



En tout point appartenant au plan d'antisymétrie, le potentiel vecteur est perpendiculaire à  $Q$  et le champ magnétique est contenu dans le plan.

### 3.4 Invariance des sources

#### 3.4.1 Invariance des sources par translation le long d'un axe

Lorsqu'une distribution de courant est invariante par une translation parallèle à un vecteur  $\vec{u}$ , on a  $\alpha$  étant un réel

$$\vec{J}(\vec{r} + \alpha\vec{u}) = \vec{J}(\vec{r})$$

Exemple : Si la translation se fait le long de l'axe des  $z$ ,  $\vec{u} = u\vec{e}_z$ , alors  $\vec{J}$  ne dépend pas de  $z$  et  $\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}(x, y)$  Lorsque les sources sont invariantes par translation, le potentiel vecteur et par conséquent le champ le sont aussi. Ainsi

$$\vec{J}(\vec{r} + \alpha\vec{u}) = \vec{J}(\vec{r})$$

entraîne

$$\vec{A}(\vec{r} + \alpha\vec{u}) = \vec{A}(\vec{r})$$

et

$$\vec{B}(\vec{r} + \alpha\vec{u}) = \vec{B}(\vec{r})$$

#### 3.4.2 Invariance des sources par rotation autour d'un axe

Lorsqu'une distribution de courant est invariante par rotation autour d'un axe  $Oz$ , on a en coordonnées cylindriques quel que soit  $\varphi'$  comprise en 0 et  $2\pi$ . On a

$$\vec{J}(\rho, \varphi + \varphi', z) = \vec{J}(\rho, \varphi, z)$$

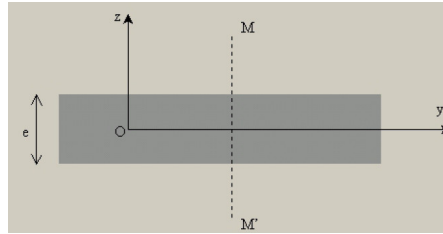
Exemple : Fil rectiligne infini

Une telle distribution présente à la fois un plan de symétrie et d'antisymétrie et qu'elle est invariante par translation le long de l'axe  $Oz$  du fil. En outre elle est invariante par rotation autour de  $Oz$ . On a

$$\vec{A}(M) = A_z(\rho)\vec{e}_z$$

et

$$\vec{B}(M) = B_\varphi(\rho)\vec{e}_\varphi$$



## 3.5 Application

### 3.5.1 Etude du champ créé par une feuille conductrice plane d'épaisseur $e$

On considère une feuille conductrice comme l'indique la figure ci-après. A faible distance devant les dimensions latérales de cette distribution, la distribution  $\Sigma$  est invariante par translations selon  $(Ox)$  et  $(Oy)$  :

- $\vec{J} = J_0 \vec{e}_y$  pour  $|z| < \frac{e}{2}$
- $\vec{J} = \vec{0}$  pour  $|z| > \frac{e}{2}$

### 3.5.2 Analyse de la symétrie

La configuration du vecteur densité de courant indique que le potentiel vecteur et le champ magnétique ne dépendent que de la variable  $z$ .

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(z)$$

et

$$\vec{A}(M) = \vec{A}(z)$$

Le plan  $\mathcal{P}$  passant par M et parallèle à  $(Oyz)$  est plan de symétrie : le champ magnétique lui est donc perpendiculaire alors que le potentiel vecteur est contenu dans ce plan :

$$\vec{B}(M) = B_x(z) \vec{e}_x$$

et

$$A_x(z) = 0$$

Le plan  $\mathcal{Q}$  passant par M et parallèle à  $(Oxz)$  est plan d'antisymétrie pour la distribution  $\Sigma$ . On a

1.  $\vec{B}$  qui est contenu dans ce plan
2.  $\vec{A}$  lui est perpendiculaire

Le potentiel vecteur au point M est de la forme

$$\vec{A}(M) = A_y(z) \vec{e}_y$$

Pour deux points  $M_1(x, y, z)$  et  $M_2(x, y, -z)$  symétriques par rapport au plan  $(Oxy)$ , on a les relations

$$\vec{B}_t(M_2) = -\vec{B}_t(M_1)$$

soit

$$B_x(-z) = -B_x(z)$$

et

$$\vec{A}_t(M2) = \vec{A}_t(M1)$$

soit

$$A_y(-z) = A_y(z)$$

Il suffira donc d'effectuer les calculs dans le demi-espace  $z > 0$  les résultats dans l'autre demi-espace s'en déduisant par la caractère impair de  $\vec{B}$  et le caractère pair de  $\vec{A}$

### 3.5.3 Expressions du potentiel vecteur et du champs magnétique

Utilisons la forme locale du théorème d'Ampère, c'est à dire

$$\vec{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_o} \right) = \vec{J}$$

On a en définitive

$$\vec{B}_{in} = \mu_o J_o z \vec{e}_x$$

et

$$\vec{B}_{ex} = \frac{\mu_o J_o}{2} \text{sgn}(z) \vec{e}_x$$

$$\vec{A}_{in} = -\frac{\mu_o J_o}{2} z^2 \vec{e}_y$$

$$\vec{A}_{ex} = -\frac{\mu_o J_o e}{2} \left( \frac{|z| - e}{4} \right) \vec{e}_y$$

## 3.6 Conclusion

Les considerations de symétrie et d'invariance permettent de simplifier considerablement le calcul des champs  $\vec{B}$  et  $\vec{A}$  en limitant respectivement le nombre des composantes à déterminer et le nombre des variables. Le champ magnétique qui est axial, est normal aux plans de symétrie de la distribution de courants alors que le potentiel vecteur est normal aux plans d'antisymétrie.