Phénomène de Gibbs

On définit une application f, 2π-périodique et impaire par : $\begin{cases} \forall x \in]0,\pi[,\ f(x)=1 \\ f(0)=f(\pi)=0 \end{cases}$

1. Montrer que le développement en série de Fourier de f est : $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. [S]

2. Pour tout entier $n\geq 1$, on pose : $\forall x\in\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$.

   On sait donc que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est simplement convergente vers f sur $\mathbb{R}$.

   (a) La convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$? [S]

   (b) Montrer que si $x\in\mathbb{R}-\pi\mathbb{Z}$, et $n\in\mathbb{N}^*$, $T_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)x=\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$. [S]

   (c) On se donne un réel a de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Préciser un majorant de $|T_n(x)|$ sur $[a,\pi-a]$. [S]

   (d) Montrer que pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $[a,\pi-a]$, on a : $|f(x)-f_n(x)|\leq\dfrac{4}{n\pi\sin a}$.

   Indication : considérer $f_{n+p}(x)-f_n(x)$ (où $p\geq 2$), remarquer que $\sin(2k+1)x = T_{k+1}(x)-T_k(x)$, majorer en valeur absolue et faire tendre p vers $+\infty$. [S]

   (e) En déduire que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur tout compact de $]0,\pi[$. [S]

3. Dans cette question, on étudie les variations de f_n.

   (a) Montrer que pour l'étude de f_n, on peut se ramener à l'intervalle $I=[0,\dfrac{\pi}{2}]$. [S]

   (b) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}-\pi\mathbb{Z},\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f_n'(x)=\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin 2nx}{\sin x}$. [S]

   (c) Montrer que f_n présente un premier maximum sur I en $x_n=\dfrac{\pi}{2n}$. [S]

   (d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}f_n(x_n)=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

   Indication : utiliser une somme de Riemann pour l'application $\varphi(t)=\dfrac{\sin t}{t}$. [S]

Corrigé du problème

1. L'application f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

   En chaque discontinuité x_0, on a $f(x_0) = \frac{1}{2}(\lim\limits_{x_0^-} f + \lim\limits_{x_0^+} f)$: f est sa propre "régularisée".

   D'après le théorème de Dirichlet, f est la somme sur $\mathbb{R}$ de sa série de Fourier.

   L'application f étant impaire, sa série de Fourier est une série de "sinus".

   On a donc, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin nx$, où $b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$.

   $\forall n \geq 1, b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin nt\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi}\left[-\dfrac{1}{n}\cos nt\right]_0^\pi = \dfrac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$.

   Autrement dit : $\forall n \geq 1, b_{2n}(f) = 0$ et $\forall n \geq 0, b_{2n+1}(f) = \dfrac{4}{(2n+1)\pi}$.

   On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. [Q]

2. (a) La réponse à cette question est négative, car les applications f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ alors que f présente des discontinuités. [Q]

   (b) On constate effectivement que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$:

   $$\begin{aligned} T_n(x)\sin x &= \sum_{k=0}^{n-1}\sin x\sin(2k+1)x = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\cos 2kx - \cos(2k+2)x)) \\ &= \frac{1-\cos 2nx}{2} = \sin^2 nx \end{aligned}$$

   Si x appartient à $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, le résultat s'en déduit par division par $\sin x$. [Q]

   (c) Pour tout x de $[a, \pi - a]$, on a $|T_n(x)| = \dfrac{\sin^2 nx}{\sin x} \leq \dfrac{1}{\sin a}$. [Q]

   (d) Pour tous entiers n et p, et pour tout réel x :

   $$\begin{aligned} \frac{\pi}{4}(f_{n+p}(x) - f_n(x)) &= \sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{1}{2k+1}(T_{k+1}(x) - T_k(x)) \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{T_{k+1}(x)}{2k+1} - \sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{T_k(x)}{2k+1} = \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{T_k(x)}{2k-1} - \sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{T_k(x)}{2k+1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} T_k(x)\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big) + \frac{T_{n+p}(x)}{2(n+p)-1} - \frac{T_n(x)}{2n+1} \end{aligned}$$

On en déduit, pour tous entiers n et p, et pour tout réel x de $[a, \pi - a]$:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}\,|f_{n+p}(x) - f_n(x)| &\le \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |T_k(x)| \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) + \frac{|T_{n+p}(x)|}{2(n+p)-1} + \frac{|T_n(x)|}{2n+1}\\ &\le \frac{1}{\sin a}\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) + \frac{1}{2(n+p)-1} + \frac{1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

Après simplification : $\dfrac{\pi}{4}\,|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \le \dfrac{1}{\sin a}\,\dfrac{2}{2n+1} \le \dfrac{1}{n \sin a}$.

Cette inégalité s'écrit $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \le \dfrac{4}{n\pi \sin a}$.

On fait enfin tendre p vers $+\infty$ (l'entier n et le réel x restant fixé).

On trouve : $\forall n \ge 1, \forall x \in [a, \pi - a], |f(x) - f_n(x)| \le \dfrac{4}{n\pi \sin a}$. [Q]

(e) Soit K un compact inclus dans $]0, \pi[$. Il existe a de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $K \subset [a, \pi - a]$.

Le résultat précédent montre alors que $\sup\limits_{x\in K} |f(x) - f_n(x)|$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.

Autrement dit la suite $(f_n)_{n\ge1}$ est uniformément convergente vers f sur K. [Q]

3. (a) L'application f_n est 2π-périodique et impaire.

L'étude de ses variations peut donc être ramenée à l'intervalle $[0, \pi]$.
Mais d'autre part, pour tout x de $[0, \pi]$, $f_n(\pi - x) = f_n(x)$.
La courbe représentative de f est donc symétrique par rapport à l'axe $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Cette dernière propriété permet de ramener l'étude de f à l'intervalle $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. [Q]

(b) Il faut prouver $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k+1)x = \dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{\sin 2nx}{\sin x}$. Cela résulte du calcul suivant :

$$\begin{aligned}2\sin x \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k+1)x &= \sum_{k=0}^{n-1} 2 \sin x \cos(2k+1)x = \sum_{k=0}^{n-1} (\sin(2k+2)x - \sin 2kx)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \sin 2kx - \sum_{k=0}^{n-1} \sin 2kx = \sin 2nx.\end{aligned}$$ [Q]

(c) On observe que $f_n'(0) = \dfrac{4n}{\pi} > 0$. Sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a :

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sin 2nx}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow x = x_{n,k} = \dfrac{k\pi}{2n}$, avec $1 \le k \le n$.

En chacun de ces n points, f_n' s'annule en changeant de signe : f_n présente donc extrémum relatif en chacun d'eux.

En particulier, f présente un premier extrémum (un maximum) en $x_n = \dfrac{\pi}{2n}$. [Q]

(d) $\forall n \geq 1,\ f_n(x_n) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n} = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2n}{(2k+1)\pi}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}$.

On pose $\varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ (φ est continue sur $\mathbb{R}$) et $x_k = \left(k+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{n} \in \left]\dfrac{k\pi}{n}, \dfrac{(k+1)\pi}{n}\right[$.

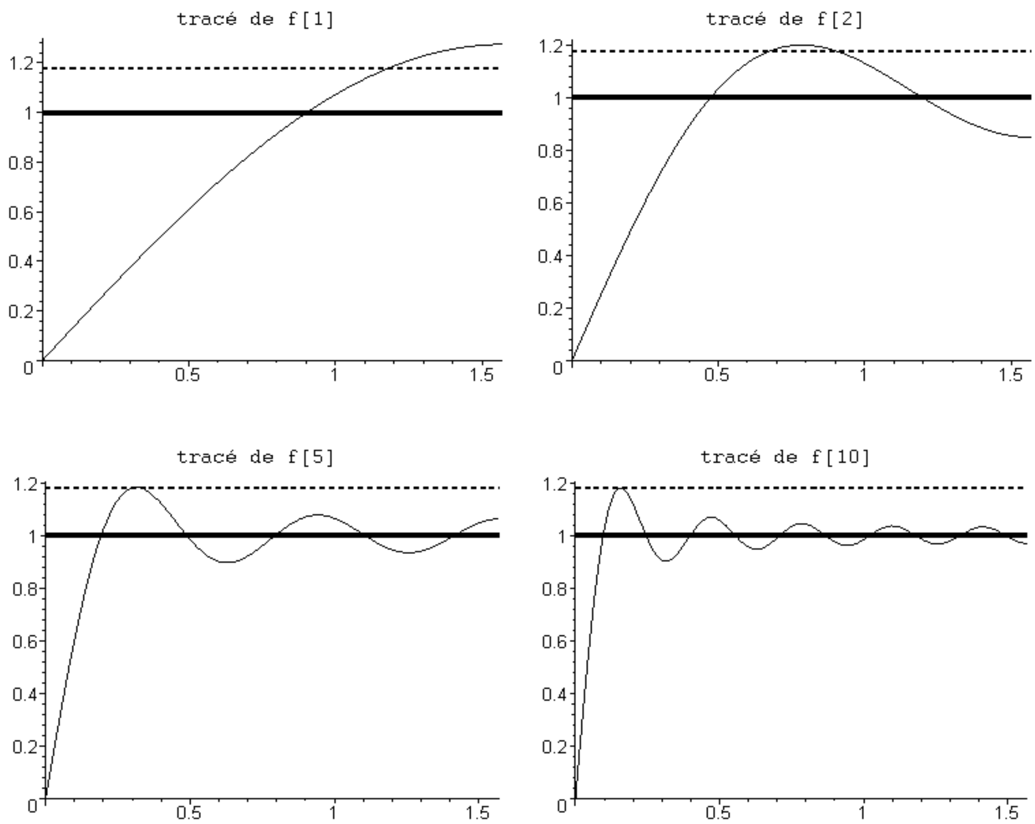
On constate que $f_n(x_n) = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(x_k) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\varphi(x_k)$.

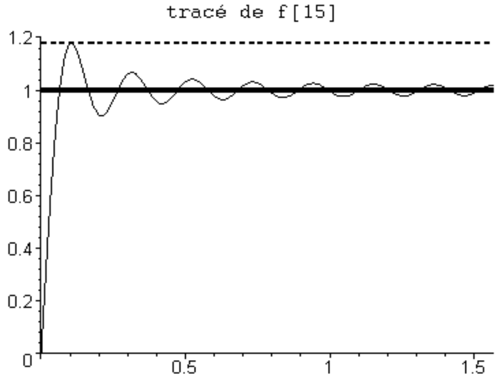
On reconnait une somme de Riemann dont la limite est $\displaystyle\int_0^\pi \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ quand $n \to +\infty$.

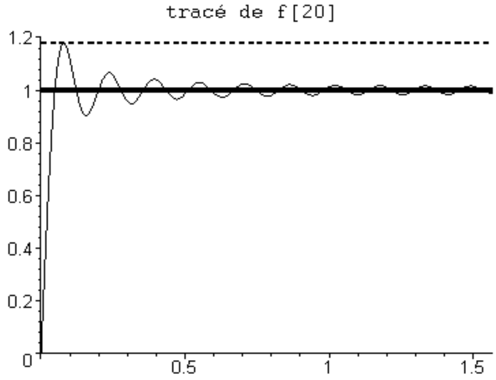
Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. [Q]

Remarques :
On montre que la suite des maximums $\alpha_n = f_n(x_n)$ est décroissante. On trouverait :
$\alpha_1 \approx 1.273239544$, $\alpha_5 \approx 1.182328209$, $\alpha_{10} \approx 1.179814019$ et $\alpha_{20} \approx 1.179188137$.
On montre que $\alpha = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n \approx 1.178979744$.

Ce résultat (c'est-à-dire cette sorte de “résonance” qui ne s'atténue pas au voisinage de la discontinuité de f) est connu sous le nom de *phénomène de Gibbs*.
Pour l'illustrer, voici les courbes représentatives des f_n, pour $n \in \{1, 2, 5, 10, 15, 20\}$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. Sur chaque tracé on a également représenté la fonction f (constante 1) et la valeur constante α (le trait en pointillés.)




tracé de f[15]
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1
1.5


tracé de f[20]
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1
1.5