Exercice 1 - Ordre et $\mathbb{R}$ - *L1/Math Sup* - $\star$

1. Supposons que $a \neq 0$ et posons $\varepsilon = |a|/2 > 0$. Alors on a $|a| < \varepsilon = |a|/2$, soit en simplifiant par $|a|$ qui est positif, $1 < 1/2$. Ceci est absurde, et donc $a = 0$.
2. On raisonne là aussi par l'absurde, et on suppose que $a > b$. Mais alors, on peut trouver un réel $x \in]b, a[$. Ce réel x satisfait $b < x$ et pourtant $x < a$, ce qui contredit ce que l'on sait sur a et b. C'est donc que $a \leq b$.

Valeur absolue - Partie entière

Exercice 2 - Partie entière et somme - *L1/Math Sup* - $\star$

Des inégalités $E(a) \leq a < E(a) + 1$ et $E(b) \leq b < E(b) + 1$, on en déduit

$$E(a) + E(b) \leq a + b < E(a) + E(b) + 2.$$

Or, $E(a+b)$ est le plus grand entier n tel que $n \leq a + b$. Puisque $E(a) + E(b) \leq a + b$, on en déduit qu $E(a) + E(b) \leq E(a+b)$. De même, $E(a+b) + 1$ est le plus petit entier m tel que $m > a + b$. Puisque $E(a) + E(b) + 2 > a + b$, on en déduit $E(a) + E(b) + 2 \geq E(a+b) + 1$, ce qui est l'autre inégalité demandée.

Exercice 3 - Produit et division - *L1/Math Sup* - $\star\star$

D'une part on a $E(nx) \leq nx$ donc

$$\frac{E(nx)}{n} \leq x$$

et puisque la fonction partie entière est croissante :

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) \leq E(x).$$

D'autre part, on a $E(x) \leq x$ donc $nE(x) \leq nx$ ou encore

$$E\big(nE(x)\big) \leq E(nx).$$

Maintenant, puisque $nE(x)$ est un entier, $E\big(nE(x)\big) = nE(x)$ et donc

$$E(x) \leq \frac{E(nx)}{n}.$$

En reprenant la partie entière de cette inégalité, on trouve

$$E(x) \leq E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)$$

ce qui est l'autre inégalité désirée.

Exercice 4 - Somme de parties entières - *L1/Math Sup* - $\star\star\star$

On sait que $E(x) \leq x < E(x) + 1$. Plus précisément, soit $p \in \{0, \dots, n\}$ l'unique entier tel que

$$E(x) + \frac{p}{n} \leq x < E(x) + \frac{(p+1)}{n}.$$

Pour $0 \leq k \leq n-p-1$, on a

$$E(x) \leq x + \frac{k}{n} < E(x) + \frac{p+1+n-p-1}{n} = E(x)+1.$$

En particulier, pour ces valeurs de k, $E(x+k/n) = E(x)$. D'autre part, pour $k \in [n-p, n]$, on a

$$E(x)+1 = E(x) + \frac{p}{n} + \frac{n-p}{n} \leq E(x) + \frac{k}{n} \leq x + \frac{k}{n} < E(x) + 1 + \frac{k}{n} \leq E(x) + 2.$$

Ainsi, pour ces valeurs de k, on a $E(x+k/n) = E(x)+1$. On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} E(x+k/n) = (n-p)E(x) + p(E(x)+1) = nE(x) + p.$$

Or, de l'inégalité $E(x) + p/n \leq x < E(x) + (p+1)/n$, on déduit

$$nE(x) + p \leq nx < nE(x) + p + 1.$$

Autrement dit, on a $E(nx) = nE(x) + p$, ce qui achève la preuve.

Exercice 5 - Une somme - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

L'idée est très simple. Entre deux carrés parfaits consécutifs, la valeur de $E(\sqrt{k})$ est connue. Plus précisément, si $n^2 \leq k < (n+1)^2$, alors $E(\sqrt{k}) = n$. De plus, entre deux carrés parfaits consécutifs, il y a exactement $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ entiers. On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2010} E(\sqrt{k}) &= \sum_{n=1}^{4} 3 \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} E(\sqrt{k}) + \sum_{k=1936}^{2010} E(\sqrt{k}) \\ &= \sum_{n=1}^{4} 3n(2n=1) + (2010-1936+1) \times 44.\end{aligned}$$

On calcule ces sommes, sachant que $\sum_{n=1}^{p} n^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$ et on trouve finalement que la somme fait 59144.

Exercice 6 - Egalités et inégalités avec des valeurs absolues - *L1/Math Sup* - ⋆

1. On cherche les réels qui sont à une distance exactement égale à 5 de -3. On trouve $\mathcal{S} = \{2, -8\}$.
2. On cherche les réels qui sont à une distance inférieure ou égale à 5 de -3. On trouve $\mathcal{S} = [-2, 8]$.
3. On cherche les réels qui sont à une distance strictement supérieure à 7 de -2. On trouve $\mathcal{S} =]-\infty, -9[\cup]5, +\infty[$.
4. $2x-4$ change de signe en 2, et $x+2$ change de signe en -2. On distingue alors 3 cas :
   – Si $x \leq -2$, alors $|x+2| = -x-2$ et $|2x-4| = -2x+4$. L'équation est alors équivalente à
   $$-2x+4 \leq -x-2 \iff x \geq 6$$
   ce qui est incompatible avec $x \leq -2$.

– Si $x \in [-2, 2]$, alors $|x+2| = x+2$ et $|2x-4| = -2x+4$. L'équation est alors équivalente à

$$-2x + 4 \leq x + 2 \iff 3x \geq 2 \iff x \geq 2/3.$$

L'intervalle qui nous intéresse ici est donc $[2/3, 2]$.

– Si $x \geq 2$, alors $|x + 2| = x + 2$ et $|2x - 4| = 2x - 4$, et donc l'équation est équivalente à

$$2x - 4 \leq x + 2 \iff x \leq 6.$$

L'intervalle qui nous intéresse ici est donc $[2, 6]$.

Finalement, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [2/3, 6]$.

5. On factorise $x^2 - 8$ en $(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})$. On discute alors comme dans la question précédente, mais suivant 4 cas, si $x < -12$, si $x \in [-12, -2\sqrt{2}]$, si $x \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ et si $x \in [2\sqrt{2}, +\infty[$. On trouve que l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-4, 5\}$.
6. On applique exactement le même raisonnement, et on trouve que l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty, -4[\cup]5, +\infty[$.

Exercice 7 - Avec des racines carrées - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Calculons $S = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. On trouve

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}\sqrt{3}^k + \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}(-1)^k\sqrt{3}^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}(1 + (-1)^k)\sqrt{3}^k. \end{aligned}$$

Maintenant, si $k = 2p$ est pair, alors $(1+(-1)^k)\sqrt{3}^k = 2.3^p$ est un entier pair, et si k est impair, $(1 + (-1)^k)\sqrt{3}^k = 0$. On en déduit que S est bien un entier pair, comme somme d'entiers pairs. De plus, on a $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$ et donc $0 < (2 - \sqrt{3}) < 1$. On en déduit que

$$S - 1 \leq (2 + \sqrt{3})^n < S$$

ce qui prouve que la partie entière de $(2 + \sqrt{3})^n$ est $S - 1$. C'est donc un entier impair.

Exercice 8 - Inégalités avec des valeurs absolues - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. On écrit $2x = (x + y) + (x - y)$ et $2y = (x + y) - (x - y)$. Par l'inégalité triangulaire, on obtient
$$2|x| \leq |x + y| + |x - y| \text{ et } 2|y| \leq |x + y| + |x - y|.$$
Il suffit de sommer ces deux inégalités pour trouver le résultat voulu.
2. Posons $u = x - 1$ et $v = y - 1$. Alors
$$1+|xy-1| = 1+|uv+u+v| \leq 1+|u|+|v|+|uv| = (1+|u|)(1+|v|) = (1+|x-1|)(1+|y-1|).$$

3. Une rapide étude montre que la fonction $u \mapsto \frac{u}{1+u}$ est croissante sur $[0,+\infty[$. Puisque $|x+y|\leq|x|+|y|$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{|x+y|}{1+|x+y|} &\leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}\\ &\leq \frac{|x|}{1+|x|+|y|}+\frac{|y|}{1+|x|+|y|}\\ &\leq \frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}\end{aligned}$$

Borne inférieure - Borne supérieure

Exercice 9 - En pratique - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Dans la suite, on notera A l'ensemble considéré.

1. Les éléments de A sont a, $a+b$, $a+2b,\dots$. On a alors que A est minoré par a, et puisque $a\in A$, c'est la borne inférieure de A. A n'est pas majoré : on ne peut avoir $a+bn\leq M$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, sinon on aurait $n\leq(M-a)/b$ et $\mathbb{N}$ serait majoré.
2. Si n est pair, $a+(-1)^nb=a+b$ et si n est impair, $a+(-1)^nb=a-b$. L'ensemble est donc constitué des deux élements $a+b$ et $a-b$. Il est donc majoré, minoré, avec $\sup(A)=a+b$ et $\inf(A)=a-b$.
3. Les éléments successifs de A sont $a+b, a+b/2, a+b/3, \dots.$ On voit facilement que A est majoré par $a+b$ et que A est minoré par a (on a bien $a\leq a+b/n\leq a+b$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$). De plus, $a+b$ est élément de A, et donc $\sup(A)=a+b$. Enfin, prouvons que a est la borne inférieure de A. Si c est un minorant de A strictement supérieur à a, alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a
$$a+\frac{b}{n}\geq c \iff n\leq\frac{b}{c-a}.$$
Comme $\mathbb{N}$ n'est pas majoré, c n'est pas un minorant de A. a est donc le plus grand des minorants de A, c'est sa borne inférieure.
4. Les éléments successifs de A sont $-a+b, a+b/2, -a+b/3, a+b/4,\dots$. On remarque que $-a$ est un minorant de A, et en utilisant le raisonnement précédent (mais en se limitant aux entiers impairs), on prouve que $-a=\inf(A)$. De plus, on a $-a+b\geq -a+b/n$ pour tout entier n impair et $a+b/2\geq a+b/n$ pour tout entier n pair. $\max(-a+b,a+b/2)$ est donc un majorant de A. C'est aussi un élément de A, donc c'est sa borne supérieure.
5. Les éléments successifs de A sont $a-b, a+b/2, a-b/3,\dots$. On prouve alors que $a-b$ est un minorant de A et que $a+b/2$ est un majorant de A. Comme ils sont tous les deux élements de A, ce sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de A.

Exercice 10 - Atteint ou non ? - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Commençons par A. On a, pour tout $n,m\in\mathbb{N}^*$,

$$0\leq\frac{n}{nm+1}\leq\frac{n}{nm}\leq\frac{1}{m}\leq 1.$$

A est donc minorée par 0 et majorée par 1. Montrons que $\inf(A)=0$. Si $c>0$ est un minorant de A, alors pour tout couple $(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}$, on a

$$c\leq\frac{n}{nm+1}.$$

Prenons $n=1$, on obtient

$$c\leq\frac{1}{m+1}\iff m\leq\frac{1}{c}-1.$$

Comme ceci doit être vrai pour tout entier $m\geq 1$, c'est une contradiction car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. Ainsi, 0 est le plus grand des minorants de A, et $\inf(A)=0$. Démontrons de même que $1=\sup(A)$. Si $d<1$ est un majorant de A, alors pour tout couple $(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}$, on a

$$d\geq\frac{n}{nm+1}.$$

Pour $m=1$, on obtient

$$d\geq\frac{n}{n+1}\iff d\geq n(1-d)\iff n\leq\frac{d}{1-d}.$$

Cette inégalité est impossible à réaliser pour tout entier n, et donc $\sup(A)=1$. De plus, 0 n'est pas un élément de A -c'est trivial, et 1 non plus car on a toujours $nm+1>n$ pour $n,m\geq 1$. Étudions désormais B. 0 est toujours un minorant de B, mais cette fois il est aussi élément de B. On a donc $\inf(B)=\min(B)=0$. De plus, on a $\mathbb{N}\subset B$ (choisir $m=0$). Ainsi, B n'est pas majoré.

Exercice 11 - Borne sup non atteinte - *L1/Math Sup* - ⋆

On raisonne par l'absurde, et on suppose que $]M-\varepsilon,M[\cap A$ est fini. Soit $\{a_1,\dots,a_p\}=]M-\varepsilon,M[$. Posons $a=\max(a_1,\dots,a_p)$. Alors $a<M$. On pose $\delta=M-a$. On a $\delta>0$, donc il existe $a_{p+1}\in A$ tel que $M-\delta<a_{p+1}\leq M$. On a même $a_{p+1}<M$ car $M\notin A$. De plus, $a_{p+1}>M-\delta=a\geq M-\varepsilon$. On en déduit que $a_{p+1}\in]M-\varepsilon,M[$ et que $a_{p+1}\neq a_i$, $i=1,\dots,p$. Ceci contredit l'hypothèse initiale.

Exercice 12 - Diverses opérations - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. Soit $m=\inf(A)$ et notons $M=-m$. Alors, pour tout $a\in A$, on a $m\leq a$ ce qui implique $-a\leq M$. Ainsi, M majore $-A$. De plus, soit $\varepsilon>0$. Alors il existe $a\in A$ tel que $m\leq a\leq m+\varepsilon$. Multipliant cette inégalité par -1, on trouve que
$$M-\varepsilon\leq -a\leq M.$$
C'est bien que $M=\sup(-A)$.
2. Notons $M=\sup(A)+\sup(B)$. Soit $x\in A+B$, x s'écrit $x=a+b$ avec $a\in A$ et $b\in B$. Alors $a\leq\sup(A)$, $b\leq\sup(B)$ et donc en effectuant la somme, on trouve
$$a+b\leq M.$$
M est donc un majorant de $A+B$. De plus, soit $\varepsilon>0$. Alors il existe $a\in A$ tel que $\sup(A)-\varepsilon/2\leq a\leq\sup(A)$, et il existe $b\in A$ tel que $\sup(B)-\varepsilon/2\leq b\leq\sup(B)$. Faisant la somme de ces deux inégalités, on trouve
$$M-\varepsilon\leq a+b\leq M.$$
Ceci achève la preuve que $M=\sup(A+B)$.

3. On peut reprendre le raisonnement précédent, ou tout simplement appliquer le résultat précédent avec $B = \{x\}$.
4. Le raisonnement utilisé aux questions précédentes ne marche pas ici, car le produit de deux nombres négatifs est un nombre positif. Prenons par exemple $A = \{-1, 0\}$ et $B = \{-2\}$. Alors $AB = \{0, 2\}$ et $\sup(AB) = 2 \neq \sup(A) \times \sup(B) = 0$. Le résultat est cependant vrai si $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+$. La preuve est tout à fait similaire à celle produite un peu plus haut.

Exercice 13 - Application à l'existence d'un point fixe d'une application croissante de $[0,1]$ **dans** $[0,1]$ - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

1. E est une partie non-vide (car elle contient 0), et majorée (par 1) de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure que l'on note b.
2. On va raisonner par l'absurde pour démontrer que $f(b) = b$.
   – Si $f(b) < b$, comme b est le plus petit des majorants de E, $f(b)$ ne majore pas E. Il existe donc un élément c de E tel que $f(b) < c \leq b$. Mais alors $f(c) \geq c > f(b)$ alors que $c \leq b$. Ceci contredit que f est croissante.
   – Si $f(b) > b$, comme f est croissante, on a $f(f(b)) \geq f(b)$, et donc $f(b) \in E$, ce qui est impossible puisque $f(b)$ est strictement supérieur à la borne supérieure de E.

Exercice 14 - Plus petit et plus grand - *L1/Math Sup* - ⋆

Fixons $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$. Alors, pour tout $b \in B$, on a $a_0 \leq b$ et donc a_0 est un minorant de B. De même, b_0 est un majorant de A. Ainsi, B admet une borne inférieure et A admet une borne supérieure. Supposons par l'absurde que $\sup(A) > \inf(B)$, et posons $u = \frac{\sup(A)+\inf(B)}{2}$. Alors on a $\inf(B) < u < \sup(A)$. En particulier, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a > u$ et $b < u$. On obtient $a > b$, une contradiction avec les hypothèses.

Exercice 15 - Écart - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. Soient $(x, y) \in A^2$ et soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \in A \implies |x| \leq M$. Alors on a
$$|x - y| \leq |x| + |y| \leq 2M,$$
ce qui prouve que B est majoré.
2. Posons $m = \inf(A)$ et $M = \sup(A)$. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors on a
$$m \leq x \leq M \text{ et } -M \leq -y \leq -m \implies -(M - m) \leq x - y \leq M - m$$
d'où on tire $|x - y| \leq M - m$. On en déduit donc que $M - m$ est un majorant de B et que $\delta(A) \leq M - m$. Pour prouver l'autre inégalité, on fixe $\varepsilon > 0$, et on construit un élement $b \in B$ tel que $b > M - m - \varepsilon$. Pour cela, on sait qu'il existe $(x, y) \in A^2$ tels que
$$x \geq M - \varepsilon/2 \text{ et } y \leq m + \varepsilon/2.$$
Alors $x - y \geq M - m - \varepsilon$, ce qui est le résultat voulu. On a donc bien $\delta(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 16 - Avec n **termes** - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. La première égalité est claire. Pour la seconde, on remarque que
$$(x_i-x_j)^2\geq 0 \iff x_i^2+x_j^2-2x_ix_j\geq 0\iff \frac{x_i^2+x_j^2}{x_ix_j}\geq 2.$$
2. Prenons $x_1,\dots,x_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors, en développant le produit, on obtient :
$$(x_1+\dots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)=n+\sum_{i<j}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}\right).$$
Chaque terme de la somme est minorée par 2 d'après la question précédente, et il y a $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ éléments dans la somme. On en déduit que
$$(x_1+\dots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n+2\binom{n}{2}=n+2\times\frac{n(n-1)}{2}=n^2.$$
Ainsi, n^2 est un minorant de l'ensemble. Mais c'est aussi un élément de l'ensemble. Il est atteint en choisissant $x_1=x_2=\dots=x_n=1$. Ainsi, n^2 est la borne inférieure (et même le minimum) de l'ensemble considéré.

Rationnels et irrationnels

Exercice 17 **- Irrationnels !** - *L1/Math Sup* - ⋆

1. Imaginons que $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ soit un rationnel (non nul). Alors, on a
$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$
et donc $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ est aussi un rationnel. Écrivant
$$2\sqrt{x}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})+(\sqrt{x}-\sqrt{y}),$$
on trouve que $\sqrt{x}$ est rationnel, une contradiction.
2. Imaginons que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ soit un rationnel $r>0$. Alors on a
$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=r-\sqrt{5}\implies 2+2\sqrt{6}+3=r^2+5-2r\sqrt{5}$$
et donc $r\sqrt{5}+\sqrt{6}$ est un rationnel. On raisonne alors comme à la question précédente pour prouver que la quantité conjuguée
$$r\sqrt{5}-\sqrt{6}=\frac{5r^2-6}{r\sqrt{5}+\sqrt{6}}$$
est aussi rationnel et donc que $\sqrt{6}$ l'est aussi. C'est la contradiction que l'on recherchait !

Exercice 18 - Intervalles et rationnels - *L1/Math Sup* - ⋆

Supposons qu'il existe a dans $I \cap J$. Puisque $a \in I$, intervalle ouvert, il existe $r_1 > 0$ tel que $]a - r_1, a + r_1[\subset I$. De même, puisque $a \in J$, intervalle ouvert, il existe $r_2 > 0$ tel que $]a - r_2, a + r_2[\subset J$. Posons $r = \min(r_1, r_2)$. Alors :

$$]a - r, a + r[\subset I \cap J.$$

Mais dans l'intervalle ouvert $]a - r, a + r[$, il existe toujours un autre rationnel.
Une autre façon de rédiger les choses est de dire que l'intersection de deux intervalles ouverts est ou bien vide, ou bien un intervalle ouvert (question : quelles sont ses bornes ?). Dans un intervalle ouvert non réduit à un point, il y a toujours un rationnel.

Exercice 19 - Homographie - *L1/Math Sup* - ⋆

Supposons que $\frac{ax+b}{cx+d}$ soit un rationnel q. Alors on obtient

$$ax + b = qcx + dq \iff (a - qc)x = dq - b.$$

Si $a - qc \neq 0$, on obtient que $x = (dq - b)/(a - qc)$ est un rationnel comme quotient de rationnels, ce qui est une contradiction. Si $a - qc = 0$, puisque $x \neq 0$, on a $dq - b = 0$ et donc $ad - bc = 0$, ce qui est là-aussi une contradiction.

Exercice 20 - Suite de rationnels - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. Notons $M = \max(q_n \times q_m;\ n, m \geq 0)$ et posons $\varepsilon = \frac{1}{2M}$. Si on applique la définition d'une suite convergente à (u_n) pour cette valeur de ε, alors on trouve qu'il existe $n_0 \geq 1$ tel que, pour $n \geq n_0$, on a
$$|u_n - l| < \varepsilon.$$
En particulier, pour $n, p \geq n_0$, on a
$$|u_n - u_m| \leq |u_n - l| + |u_m - l| < \varepsilon + \varepsilon \leq \frac{1}{M}.$$
Or,
$$u_n - u_m = \frac{p_n q_m - p_m q_n}{q_n q_m}.$$
Ainsi, si $u_n \neq u_m$, on a
$$|u_n - u_m| \geq \frac{1}{q_n q_m} \geq \frac{1}{M}.$$
Ceci contredit ce que l'on a obtenu plus tôt, et donc, pour $n, m \geq p$, on a $u_n = u_m$: la suite est bien stationnaire.
2. Si (q_n) ne tend pas vers $+\infty$, la suite est stationnaire, et a est égal à un des termes de la suite : c'est donc un rationnel. Par contraposée, si $a \notin \mathbb{Q}$, c'est que (q_n) tend vers $+\infty$.

Divers

Exercice 21 - Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

1. Puisque H est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à $\{0\}$, il possède un élément $h \neq 0$. Puisque $-h$ est aussi élément de H, H possède toujours un élément strictement positif. Autrement dit, G est une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et minorée : G admet une borne inférieure.
2. Si $\alpha \notin H$, alors, par définition de la borne inférieure, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $\beta \in]\alpha, \alpha+\varepsilon[$. Prenons $\varepsilon = \alpha$. Alors $\beta - \alpha \in H$, car $(H,+)$ est un groupe. De plus, $\beta - \alpha > 0$. On a donc $\beta - \alpha \in G$. Mais on a aussi $\beta - \alpha \geq \alpha$, puisque α est la borne inférieure de G, ce qui contredit que β est dans l'intervalle $]\alpha, 2\alpha[$.
   On a donc $\alpha \in H$, et puisque $(H,+)$ est un groupe, on a automatiquement $\alpha\mathbb{Z} \in H$. Si l'inclusion était stricte, on pourrait trouver $x \in H \backslash \alpha\mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que
   $$k\alpha < x < (k+1)\alpha.$$
   On a alors
   $$x - k\alpha \in H \text{ et } 0 < x - k\alpha < \alpha,$$
   contredisant à nouveau la définition de α.
3. Il s'agit de prouver que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $h \in H \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.
   - Si $0 \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, alors puisque $\alpha = 0$, il existe $h \in H$ dans $]0, a+\varepsilon[$, donc dans $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.
   - Sinon, puisque $(H,+)$ est un groupe et est donc symétrique par rapport à 0, on peut supposer que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset]0, +\infty[$. Soit $\beta \in H$ tel que $0 < \beta < \varepsilon$. On introduit
     $$A = \{n \in \mathbb{N};\ n\beta \leq a - \varepsilon\}.$$
     Alors A est une partie de $\mathbb{N}$ non-vide (elle contient 0) et majorée. Soit N son plus grand élément, et posons $h = (N+1)\beta$. Puisque $N+1$ n'est pas élément de A, on a $h > a - \varepsilon$. De plus,
     $$h \leq N\beta + \beta \leq a - \varepsilon + \varepsilon \leq a < a + \varepsilon.$$
     Ainsi, $h \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, achevant la preuve de la densité de H dans $\mathbb{R}$.