

CHAPITRE 1: INTEGRALE INDEFINIE

I. Primitive et intégrale indéfinie

I. 1. Notion de primitive.

L'un des principaux problèmes du calcul différentiel est la recherche de la dérivée d'une fonction donnée. De nombreux problèmes d'analyse mathématique et les innombrables applications de cette dernière à la géométrie, la mécanique, la physique et la technique conduisent au problème inverse, c'est à dire à la détermination d'une fonction $F(x)$ dont la dérivée $F'(x)$ est égale à une fonction $f(x)$ donnée.

La détermination d'une fonction dont on connaît la dérivée est un problème fondamental du calcul intégral.

Définition1.

On dit qu'une fonction $F(x)$ est une primitive d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle X si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$.

Exemples:

1) La fonction $F(x) = \sin x$ est une primitive de la fonction $f(x) = \cos x$ sur la droite numérique tout entière, car $(\sin x)' = \cos x$ pour tout x .

2) La fonction $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ est une primitive de la fonction $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ sur l'intervalle $] -1, 1[$, car $(\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ en tout point x de cet intervalle.

La primitive d'une fonction $f(x)$ donnée n'est pas unique. En effet, si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, il en est de même de toute fonction $F(x) + C$, où C est une constante arbitraire, puisque $(F(x) + C)' = f(x)$. Par exemple, la fonction $f(x) = \cos x$ admet pour primitive aussi bien $\sin x$, que $\sin x + C$, puisque $(\sin x + c)' = \cos x$.

Montrons maintenant que toutes les primitives de $f(x)$ sont de la forme $F(x) + C$, où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.

Lemme 1

Toute fonction dont la dérivée est nulle sur un intervalle X est constante sur X .

Preuve.

Supposons $f'(x) = 0$ sur un intervalle X . D'après le théorème des accroissements finis, pour deux points quelconques $x_1, x_2 \in X$, on a

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2.$$

Puisque $f'(\xi) = 0$, on a $f(x_2) = f(x_1)$. Ce qui prouve que $f(x)$ prend la même valeur sur X , autrement dit $f(x) = C$, où C est une constante ■

Théorème 1.

Si $F(x)$ est une primitive d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle X , toute autre primitive de $f(x)$ peut être mise sous la forme $F(x) + C$, où C est une constante arbitraire.

Preuve.

Soit $\Phi(x)$ une autre primitive de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle X , c'est - à - dire que $\Phi'(x) = f(x)$. Alors pour tout $x \in X$

$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Il résulte du lemme I.1 que la fonction $\Phi(x) - F(x) = C$, où C est une constante arbitraire. Donc $\Phi(x) = F(x) + C$ ■

Ainsi, toutes les primitives de $f(x)$ sont de la forme $F(x) + C$, où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ et C une constante arbitraire.

I.2. Intégrale indéfinie.

Définition 2

Si une fonction $F(x)$ est une primitive d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle X , l'ensemble des fonctions $F(x) + C$, où C est une constante arbitraire, s'appelle intégrale indéfinie de $f(x)$ sur X et se note $\int f(x)dx = F(x) + C$.

La fonction $f(x)$ s'appelle l'intégrant, la variable x , variable d'intégration.

Le symbole $\int f(x)dx$ désigne donc l'ensemble de toutes les primitives de la fonction $f(x)$. On comprendra parfois par ce symbole un élément quelconque de cet ensemble, c'est - à - dire une primitive.

La détermination d'une fonction par sa dérivée s'appelle intégration de cette fonction. L'intégration est l'opération inverse de la dérivation. Pour vérifier qu'une intégration est correcte, il suffit de dériver le résultat obtenu pour obtenir l'intégrant.

Dans ce chapitre, nous glissons volontiers sur le problème de l'existence des primitives (donc des intégrales indéfinies) pour de vastes classes de fonctions. Signalons qu'au chapitre suivant, on prouvera que toute fonction continue sur un segment possède une primitive (donc une intégrale indéfinie) sur ce segment.

Exemples:

- 1) $\int 3x^2 dx = x^3 + C$, car $(x^3 + C)' = 3x^2$.
- 2) $\int \cos x dx = \sin x + C$, car $(\sin x + c)' = \cos x$.

$$3) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, \text{ car } (\ln |x| + C)' = \frac{1}{x}.$$

$$4) \int \exp(-2x) dx = -\frac{1}{2} \exp(-2x) + C, \text{ car } (-\frac{1}{2} \exp(-2x) + C)' = \exp(-2x),$$

ainsi de suite.

II. Propriétés fondamentales de l'intégrale indéfinie.

Les propriétés suivantes de l'intégrale indéfinie sont une conséquence immédiate de sa définition.

P.1. La dérivée d'une intégrale indéfinie est égale à l'intégrant; la différentielle d'une intégrale indéfinie, à l'expression sous le signe somme, c'est - à - dire

$$(\int f(x) dx)' = f(x) \text{ et } d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

En effet, $(\int f(x) dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ et $d \int f(x) dx = (\int f(x) dx)' dx = f(x) dx$.

P.2. L'intégrale indéfinie de la différentielle d'une fonction est égale à la somme de cette fonction et d'une constante arbitraire, c'est - à - dire $\int dF(x) = F(x) + C$.

En effet, puisque $dF(x) = F'(x) dx$, il vient $\int F'(x) dx = F(x) + C$.

P.3. Tout facteur constant peut être sorti du signe somme, c'est - à - dire si $k = \text{const}$, alors $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$.

En effet, soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$: $F'(x) = f(x)$. Alors $kF(x)$ est une primitive de $k f(x)$: $(kF(x))' = kF'(x) = k f(x)$. D'où $k \int f(x) dx = k [F(x) + C] = kF(x) + C_1$, où $C_1 = kC$.

P.4. L'intégrale indéfinie de la somme algébrique de deux fonctions est égale à la somme algébrique des intégrales indéfinies de ces fonctions, c'est - à - dire

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

En effet, soient $F(x)$ et $G(x)$ des primitives de $f(x)$ et $g(x)$: $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. Les fonctions $F(x) \pm G(x)$ sont alors des primitives des fonctions $f(x) \pm g(x)$. Donc

$$\int f(x) dx \pm \int g(x) dx = [F(x) + C_1] \pm [G(x) + C_2] = [F(x) \pm G(x)] + [C_1 \pm C_2] = [F(x) \pm G(x)] + C = \int [f(x) \pm g(x)] dx.$$

Cette propriété reste valable pour tout nombre fini de fonctions.

III. Table des principales intégrales.

Les principales intégrales sont regroupées dans la table suivante. Certaines formules résultent directement de la définition de l'intégration comme l'opération inverse de la dérivation et de la table des dérivées. La véracité des autres formules se vérifie aisément par dérivation.

$$\text{I)} \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1); \quad \text{II)} \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C;$$

$$\text{III)} \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C; \quad \text{IV)} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$\text{V)} \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1); \quad \text{VI)} \int \exp(x) dx = \exp(x) + C$$

$$\text{VII)} \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \text{VIII)} \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\text{IX)} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C; \quad \text{X)} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C;$$

$$\text{XI)} \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0); \quad \text{XII)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln |x + \sqrt{x^2+k}| + C.$$

IV. Principales méthodes d'intégration.

IV.1. Intégration directe.

Le calcul des intégrales par une utilisation directe de la table des intégrales élémentaires et des propriétés fondamentales des intégrales indéfinies s'appelle intégration directe.

Exemples:

$$1) \int (5 \cos x - 3x^2 + \frac{1}{x}) dx = 5 \int \cos x dx - 3 \int x^2 dx + \int \frac{dx}{x} = 5 \sin x - x^3 + \ln |x| + C$$

$$2) \int (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2 dx = \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + C$$

IV.2. Intégration par substitution (changement de variable).

Dans de nombreux cas, l'introduction d'une nouvelle variable d'intégration permet de ramener l'intégration à la recherche d'une intégrale de table, c'est - à - dire de se ramener à une intégration directe. Cette méthode qui s'appelle méthode d'intégration par substitution, ou encore méthode de changement de variable, est basée sur le théorème suivant:

Théorème 2.

Soit $x = \varphi(t)$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle T et soit X son ensemble des valeurs. Soit enfin $f(x)$ une fonction définie sur X . Si la fonction $f(x)$ admet une primitive sur X , alors

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad (1) \text{ sur } T.$$

Preuve.

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$ sur X . Considérons la fonction composée $F[\varphi(t)]$ sur T . La règle de dérivation d'une fonction composée nous donne $(F[\varphi(t)])' = F'_x[\varphi(t)] \varphi'(t) = f[\varphi(t)] \varphi'(t)$, c'est - à - dire que $F[\varphi(t)]$ est une primitive de la fonction $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$ sur T , donc

$$\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] + C.$$

En remarquant que $F[\varphi(t)] + C = (F(x) + C)|_{x=\varphi(t)} = \int f(x) dx|_{x=\varphi(t)}$, on obtient la formule (1).

C'est la formule de changement de la variable d'intégration.

Exemples:

1) Calculer l'intégrale $\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = I$

Posons $x - 1 = t$; alors $x = t + 1$. D'où $dx = dt$. La formule ci-dessus nous donne

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2} dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 3 \ln |t| - \frac{1}{t} + C.$$

En revenant à la variable x , on obtient en définitive

$$I = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3 \ln |x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Remarque. Quand on change la variable d'intégration dans une intégrale indéfinie, on a parfois intérêt à se donner non pas x en fonction de t mais t en fonction de x .

2) Calculer l'intégrale $J = \int \frac{x^4}{x^5+7} dx$

Posons $x^5 + 7 = t$, $dt = 5x^4 dx$; alors $J = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5} \ln |t| + C$, si bien que

$$\int \frac{x^4}{x^5+7} dx = \frac{1}{5} \ln |x^5 + 7| + C.$$

Signalons que le choix convenable de la substitution soulève de sérieuses difficultés. Pour les surmonter, il faut parfois être doué d'une bonne technique de dérivation et bien connaître les intégrales tabulaires.

3) Calculer l'intégrale $K = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$

Posons $\sqrt{x^2+a} + x = t$, d'où $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a}} + 1\right) dx = dt$. Donc $dx = \frac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}+x} dt$, de sorte que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\sqrt{x^2+a} + x| + C.$$

4) Calculer l'intégrale $\int \sin^n x \cos x dx$

Posons $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$. Alors

$$\int \sin^n x \cos x dx = \int t^n dt = \begin{cases} \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C, & \text{si } n \neq -1 \\ \ln |t| + C = \ln |\sin x| + C, & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

5) Calculer l'intégrale $\int \frac{x dx}{(x^2+1)^n}$, $n \neq 1$

Posons $x^2 + 1 = t$, $2x dx = dt$; alors

$$\int \frac{x dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{t^{n-1}} + C = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} + C.$$

Pour $n = 1$ on obtient $\int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$.

IV.3. Méthode d'intégration par parties.

La méthode d'intégration par parties est basée sur la formule de dérivation du produit de deux fonctions.

Théorème 3.

Soient $u(x)$ et $v(x)$ des fonctions définies et dérivables sur un intervalle X . Si la fonction $u'(x)v(x)$ admet une primitive sur X , alors la fonction $u(x)v'(x)$ admet aussi une primitive sur X et $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$.

(2)

Preuve.

La relation $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ entraîne $u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x)$.

La fonction $u(x)v(x)$ est une primitive de la fonction $[u(x)v(x)]'$ sur X . La fonction $u'(x)v(x)$ admet une primitive sur X par hypothèse. Donc la fonction $u(x)v'(x)$ en admet une aussi sur X . Une intégration de la dernière égalité nous donne la formule (2) ■

La formule (2) s'appelle formule d'intégration par parties.

Comme $v'(x)dx = dv$, $u'(x)dx = du$, on peut le mettre sous la forme $\int u dv = uv - \int v du$.

Cette formule permet de ramener le calcul de $\int u dv$ à celui de $\int v du$ qui est parfois plus simple.

Exemples:

1) Calculer $L_1 = \int \arctan x dx$.

Posons $\arctan x = u$, donc $du = \frac{dx}{x^2+1}$; $dv = dx$, donc $v = x$.

Donc $L_1 = x \arctan x - \int x \frac{dx}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$.

2) Calculer $L_2 = \int x \exp(x) dx$.

Posons $u = x$, donc $du = dx$; $dv = \exp(x) dx$, $\int dv = \int \exp(x) dx$, $v = \exp(x)$.

Donc $L_2 = x \exp(x) - \int \exp(x) dx = x \exp(x) - \exp(x) + C$.

3) Calculer $L_3 = \int x \ln x dx$. On trouve $L_3 = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$.

On est parfois amené à se servir plusieurs fois de la formule d'intégration par parties pour calculer une intégrale.

4) Calculer $L_4 = \int x^2 \cos x dx$.

Une double intégration par parties donne $L_4 = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$.

Calculons en conclusion l'intégrale $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Pour $n = 1$, on a l'intégrale tabulaire $I_1 = \arctan x + C$.

Supposons $n > 1$. En représentant 1 au numérateur comme $(x^2 + 1) - x^2$, on obtient

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^n}$. Intégrons la deuxième intégrale par parties:

$u = x$, $du = dx$, $dv = \frac{x dx}{(x^2+1)^n}$, $v = \int \frac{x dx}{(x^2+1)^n} = -\frac{1}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}$, alors

$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^n} = -\frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \int \frac{dx}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}$, donc

$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1}$,

d'où $I_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$. (3)

L'intégrale I_n est donc exprimée en fonction de I_{n-1} . C'est une formule de récurrence.

Si l'on demande calculer $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$, la formule de récurrence (3) donne

$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$, avec $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1}$.

Or $I_1 = \arctan x$, donc

$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8} \arctan x + C$.

V. Intégration des fonctions rationnelles.

Les fractions (ou fonctions) rationnelles, c'est - à - dire les fonctions de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions polynômes, forment une importante classe de fonctions dont

l'intégrale s'exprime toujours par l'intermédiaire de fonctions élémentaires.

Si le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur, on obtient alors $\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ (1), où $W(x)$ est un polynôme appelé partie entière de la fonction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ et $\frac{R(x)}{Q(x)}$, une fraction irréductible.

Exemples:

$$1) \frac{x^5+x^3-x^2+1}{x^3-2x+1} = x^2 + 3 - \frac{2x^2-6x+2}{x^3-2x+1}$$

$$2) \frac{x^3+x+1}{x^2+1} = x + \frac{1}{x^2+1}.$$

En algèbre supérieure on démontre que tout polynôme peut être décomposé en un produit de la forme

$$Q(x) = A(x - \alpha)(x - \beta) \dots (x - \gamma),$$

où A est le coefficient dominant de $Q(x)$, $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ les racines de l'équation $Q(x) = 0$. Les facteurs $(x - \alpha), (x - \beta), \dots, (x - \gamma)$ s'appellent éléments simples. Si les éléments simples sont confondus, on obtient la décomposition $Q(x) = A(x - \alpha)^r (x - \beta)^s \dots (x - \gamma)^t$, (2) où r, s, \dots, t sont des entiers appelés multiplicités des racines $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ respectivement, et tels que $r + s + \dots + t = n$, où n est le degré de $Q(x)$.

Le polynôme $Q(x)$ peut aussi présenter des racines complexes. On démontre en algèbre que si $\alpha = a + ib$ est une racine complexe de multiplicité r d'un polynôme à coefficients réels, il en est de même de sa conjuguée complexe $\bar{\alpha} = a - ib$. En d'autres termes, si la décomposition (2) contient le facteur $(x - \alpha)^r$, où $\alpha = a + ib$ ($b \neq 0$), elle contiendra également le facteur $(x - \bar{\alpha})^r$. En multipliant ces deux facteurs, on obtient $(x - \alpha)^r (x - \bar{\alpha})^r = (x^2 + 2px + q)^r$, où $p = -a$, $q = a^2 + b^2$, $p^2 - q^2 < 0$, p et q sont réels.

En procédant de même avec les autres racines complexes, on peut mettre la décomposition (2) sous la forme

$$Q(x) = A(x - \alpha)^r (x - \beta)^s \dots (x^2 + 2px + q)^t (x^2 + 2ux + v)^n \dots, \quad (3), \text{ où } \alpha, \beta, \dots, p, q, u, v, \dots \text{ sont des réels.}$$

Le théorème suivant est démontré en algèbre supérieure.

Théorème.

Une fraction rationnelle irréductible $\frac{R(x)}{Q(x)}$ dont le dénominateur $Q(x)$ est un polynôme de la forme (3), se décompose de façon unique sous la forme

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - \alpha)^r} + \dots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + 2px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + 2px + q)^2} + \dots + \frac{M_t x + N_t}{(x^2 + 2px + q)^t} + \dots, \quad (4)$$

où $A_1, A_2, \dots, A_r, \dots, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_t, N_t, \dots$, sont des réels.

L'expression (4) s'appelle décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples. Pour déterminer les nombres $A_1, A_2, \dots, A_r, \dots, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_t, N_t, \dots$, on utilise souvent la méthode des coefficients indéterminés ou celle des limites ou une combinaison des deux.

Exemples:

1) Décomposer la fraction rationnelle $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ en éléments simples.

Comme $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$, la formule (4) donne $\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$.

Après multiplication des deux membres de cette égalité par $x^2 - 5x + 6$, on obtient

$2x - 1 = A(x - 2) + B(x - 3)$. Par identification des coefficients suivant les mêmes puissances, on trouve $A = 5, B = -3$.

$$\text{Donc } \frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{5}{x-3} - \frac{3}{x-2}.$$

2) Décomposer la fraction rationnelle $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ en éléments simples.

Les racines du polynôme $x^2 + 1$ étant complexes, la formule (4) donne

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Après multiplication des deux membres de cette égalité par $x(x^2 + 1)^2$ et identification des coefficients suivant les mêmes puissances, on obtient:

$A = -1, B = 1, C = 0, D = 2, E = 0$. Donc la décomposition cherchée est

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Il résulte de ce qui précède que l'intégration d'une fonction rationnelle (1) se ramène à celle d'un polynôme $W(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m$ dont l'intégrale est tabulaire, et à celle d'une fraction rationnelle irréductible $\frac{R(x)}{Q(x)}$; ceci nous conduit au calcul d'intégrales des quatre types suivants:

I) $\int \frac{A}{x-\alpha} dx = A \ln |x - \alpha| + C$

II) $\int \frac{A}{(x-\alpha)^r} dx = -\frac{A}{(r-1)(x-\alpha)^{r+1}} + C \quad (r > 1).$

III) $\int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q} dx;$

IV) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r} dx \quad (r > 1)$

Ceci étant, le trinôme $x^2 + 2px + q$ n'admet pas de racines réelles, c'est - à dire que $p^2 - q < 0$.

Pour calculer l'intégrale III), remarquons que $x^2 + 2px + q = (x+p)^2 + q - p^2$. Posons par la suite $x + p = t; q - p^2 = h > 0$.

On obtient alors $\int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q} dx = \int \frac{At+B-Ap}{t^2+h} dt = \frac{1}{2}A \int \frac{2tdt}{t^2+h} + (B-Ap) \int \frac{dt}{t^2+h}$.

Le calcul de la première intégrale de droite est immédiat: $\int \frac{2tdt}{t^2+h} = \ln |t^2 + h| + C = \ln |x^2 + 2px + q| + C$.

La deuxième intégrale est tabulaire.

Exemple: calculer $\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9} dx$

Complétons le dénominateur à un carré: $x^2 + 4x + 9 = (x+2)^2 + 5$ et faisons la substitution $x + 2 = t$. On obtient:

$$\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9} dx = \int \frac{6x+5}{(x+2)^2+5} dx = \int \frac{6(t-2)+5}{t^2+5} dt = \int \frac{6t-7}{t^2+5} dt = 3 \int \frac{2tdt}{t^2+5} - 7 \int \frac{dt}{t^2+5} = 3 \ln(t^2 + 5) - \frac{7}{\sqrt{5}} \arctan \frac{t}{\sqrt{5}} + C.$$

En revenant à la variable x , on obtient

$$\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9} dx = 3 \ln(x^2 + 4x + 9) - \frac{7}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{5}} + C.$$

Passons à présent au calcul de l'intégrale IV: $\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r} dx, q - p^2 > 0, r > 1$.

Introduisons à cet effet la nouvelle variable z par la formule $z = \frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}$, d'où

$$x = z\sqrt{q-p^2} - p, dx = \sqrt{q-p^2} dz \quad (5)$$

$$\text{On a par ailleurs } z^2 + 1 = \frac{(x+p)^2}{q-p^2} + 1 = \frac{x^2+2px+q}{q-p^2} \quad (6)$$

En faisant la substitution (5) et en tenant compte de (6), on obtient donc

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r} dx = \int \frac{A(z\sqrt{q-p^2}-p)+B}{(z^2+1)^r(q-p^2)^r} \sqrt{q-p^2} dz = \int \frac{Mz+N}{(z^2+1)^r} dz = M \int \frac{zdz}{(z^2+1)^r} + N \int \frac{dz}{(z^2+1)^r},$$

où M et N se déduisent de l'avant - dernière égalité.

La deuxième intégrale peut être calculée à l'aide de la formule de récurrence (3), obtenue au paragraphe IV.3.

En posant $z^2 + 1 = t$ dans la première intégrale, on obtient

$$M \int \frac{zdz}{(z^2+1)^r} = \frac{M}{2} \int \frac{dt}{t^r} = -\frac{M}{2(r-1)} \frac{1}{t^{r-1}} + C = -\frac{M}{2(r-1)} \frac{1}{(z^2+1)^{r-1}} + C.$$

Exemple: Calculer $I = \int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2} dx$.

Posons $z = \frac{x-1}{\sqrt{5-1}} = \frac{x-1}{2}$, d'où $dx = 2dz$ et $x^2 - 2x + 5 = 4(z^2 + 1)$, donc

$$\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2} dx = \int \frac{5(1+2z)+3}{4^2(z^2+1)^2} 2dz = \int \frac{10z+8}{8(z^2+1)^2} dz = \frac{5}{4} \int \frac{zdz}{(z^2+1)^2} + \int \frac{dz}{(z^2+1)^2}.$$

$$\text{Mais } \int \frac{zdz}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{z^2+1}, \int \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \frac{z}{2(z^2+1)} + \arctan z.$$

Donc

$$I = -\frac{5}{8} \frac{1}{z^2+1} + \frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan z + C = \frac{4x-5}{8(z^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan z + C.$$

En revenant à la variable x , on obtient

$$I = \frac{2x-7}{2(x^2-2x+5)} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C.$$

On a ainsi établi que l'intégration de toute fraction rationnelle se ramène à celle d'un polynôme et d'un nombre fini d'éléments simples dont les intégrales s'expriment par des fonctions rationnelles, logarithmes et des arcs tangentes. Autrement dit, toute fraction rationnelle s'intègre par des fonctions élémentaires.

VI. Intégration de certaines fonctions irrationnelles et transcendentes.

Désignons préalablement par $R(u, v)$ une fonction rationnelle de deux variables u et v , c'est-à-dire une fonction obtenue uniquement par des opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication et division) sur les variables u et v . Par exemple: $R(u, v) = \frac{3u^2v+u^5v^4}{u^3+4v^2}$.

Si les variables u et v sont à leur tour fonction de x : $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, la fonction $R[\varphi(x), \psi(x)]$ s'appelle fonction rationnelle de $\varphi(x)$ et $\psi(x)$. Par exemple, la fonction $f(x) = \frac{x+\sqrt{(x^2-1)^2}}{x^2-5\sqrt{x^2-1}}$ est une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{x^2-1}$: $f(x) = R(x, \sqrt{x^2-1})$. Ici $R(u, v) = \frac{u+v^2}{u^2-5v}$, $u = x$, $v = \sqrt{x^2-1}$.

La fonction $f(x) = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^3 x + 2 \cos x}$ est une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$: $f(x) = R(\sin x, \cos x)$.

Considérons maintenant les intégrales de certaines fonctions irrationnelles et transcendentes élémentaires et montrons qu'elles se ramènent à des intégrales de fonctions rationnelles qui peuvent être calculées par les méthodes du paragraphe V.

VI. 1. Intégrales de la forme $\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$, où a, b, c et d sont des nombres arbitraires ($\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$); m , un entier naturel, R une fonction rationnelle de x et $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Montrons que la substitution $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ nous conduit à

l'intégration d'une fonction rationnelle. En effet, $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$, $x = \frac{b-dt^m}{ct^m-a}$, $dx = \frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}dt$, de sorte que

$\int R(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}})dx = \int R(\frac{b-dt^m}{ct^m-a}, t) \frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}dt = \int R_1(t)dt$ où $R_1(t)$ est une fonction de rationnelle de t .

Exemples:

1) Calculer $T = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{1-x}$.

Posons $t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. On obtient $t^2 = \frac{1+x}{1-x}$, soit $x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$, $dx = \frac{4tdt}{(t^2+1)^2}$.

Donc $T = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 2 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2t - 2 \arctan t + C = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2 \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$.

2) Calculer $S = \int \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}$.

En remarquant que $\sqrt{x+\sqrt[3]{x}} = (\sqrt[6]{x})^3 + (\sqrt[6]{x})^2$, posons $t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow x = t^6$, donc $dx = 6t^5 dt$.

On obtient alors $S = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^3+t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6 \int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}) dt = 6(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|) + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C$

VI.2. Intégrale de la forme $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, où a, b et c sont des nombres arbitraires; $a \neq 0$; R une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Si le trinôme ax^2+bx+c possède des racines réelles distinctes x_1 et x_2 et que $a > 0$, alors

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = |x-x_1| \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}. \text{ Donc}$$

$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = R(x, |x-x_1| \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}) = R_1(x, \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}})$. (voir exemple 1)).

Si $x_1 = x_2$, alors $\sqrt{ax^2+bx+c} = |x-x_1| \sqrt{a}$, c'est - à - dire qu'on a une fonction rationnelle de x sous le signe d'intégration.

Il est donc plus intéressant de traiter le cas où le trinôme ax^2+bx+c n'admet pas de racine réelle et $a > 0$. montrons que dans ce cas on se ramène à l'intégration d'une fonction rationnelle par la substitution d'Euler $t = \sqrt{ax^2+bx+c} + x\sqrt{a}$ (on peut aussi poser $t = \sqrt{ax^2+bx+c} - x\sqrt{a}$).

En élevant les deux membres de l'égalité $t - x\sqrt{a} = \sqrt{ax^2+bx+c}$ au carré, on obtient $bx+c = t^2 - 2\sqrt{a}tx$, de sorte que

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{at^2+bt+c\sqrt{a}}}{2\sqrt{a}t+b}, dx = 2 \frac{\sqrt{at^2+bt+c\sqrt{a}}}{(2\sqrt{a}t+b)^2} dt.$$

Donc $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \frac{\sqrt{at^2+bt+c\sqrt{a}}}{2\sqrt{a}t+b}) 2 \frac{\sqrt{at^2+bt+c\sqrt{a}}}{(2\sqrt{a}t+b)^2} dt = \int R_1(t)dt$,

où $R_1(t)$ est une fonction rationnelle de t .

Si $a < 0$ et $c > 0$, on utilise une autre substitution d'Euler: $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$.

Exemples:

1) Calculer $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = M$.

Les racines du trinôme $x^2 + x + 1$ étant complexes, faisons la substitution $\sqrt{x^2 + x + 1} = t - x$. En élevant au carré, on obtient

$$x^2 + x + 1 = t^2 - 2tx + x^2, \text{ d'où } x = \frac{t^2-1}{1+2t}, dx = 2 \frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2} dt.$$

$$\text{Alors } \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = 2 \int \frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2} dt.$$

Par ailleurs, $\frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} + \frac{D}{(1+2t)^2}$. On obtient $A = 2, B = -3, D = -3$.

$$\text{Soit } \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \int \left[\frac{2}{t} - \frac{3}{1+2t} - \frac{3}{(1+2t)^2} \right] dt = 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |1+2t| + \frac{3}{2(1+2t)} + C.$$

$$\text{Donc } M = 2 \ln |\sqrt{x^2+x+1} + x| - \frac{3}{2} \ln |1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}| + \frac{3}{2(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})} + C$$

2) Calculer $P = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.

Les racines de $1+x-x^2$ étant complexes et $a < 0, c > 0$, on utilise la substitution $\sqrt{1+x-x^2} = tx - 1$.

En élevant les deux membres au carré, on obtient après simplification $x = \frac{1+2t}{t^2+1}$.

$$\text{Soit } dx = \frac{2(1-t-t^2)}{(t^2+1)^2} dt, \sqrt{1+x-x^2} = \frac{t^2+t-1}{t^2+1}.$$

$$\text{Donc } P = \int \frac{2(1-t-t^2)}{(1+\frac{1+2t}{t^2+1}) \frac{t^2+t-1}{t^2+1} (t^2+1)^2} dt = -2 \int \frac{dt}{1+(t+1)^2} = -2 \arctan(t+1) + C.$$

$$\text{En définitive, } P = -2 \arctan \frac{\sqrt{1+x-x^2}+x+1}{x} + C.$$

Signalons que le calcul des intégrales par la substitution d'Euler conduit généralement à des calculs laborieux et des expressions volumineuses, aussi n'y recourt-on que dans les cas où il est impossible de calculer ces intégrales par un procédé plus court.

VI. 3. Intégrale de la forme $\int R(\sin x, \cos x) dx$, où R est une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$.

Montrons que la substitution $t = \tan \frac{x}{2}$ nous ramène à l'intégration d'une fonction rationnelle. En effet,

$$\sin x = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

de sorte que

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt, \text{ où } R_1(t) \text{ est une fonction rationnelle de } t.$$

Exemple: Calculer $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

La substitution $t = \tan \frac{x}{2}$ nous donne $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, x = 2 \arctan t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\text{Donc } \int \frac{dx}{1+\sin x} = 2 \int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+\tan \frac{x}{2}} + C.$$

Remarque: le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ conduit souvent à des calculs trop compliqués. Il est parfois préférable d'avoir recours à d'autres méthodes menant plus rapidement au but.

1) Si $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (c'est le cas si l'intégrale est de la forme $\int R(\sin x) \cos x dx$), poser $\sin x = t$.

Exemple: $\int \frac{\cos^3 x + \cos x}{\sin^4 x + 1} dx$

2) Si $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (c'est le cas si l'intégrale est de la forme $\int R(\cos x) \sin x dx$), poser $\cos x = t$.

Exemple: $\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$

3) Si $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ (c'est le cas si l'intégrale est de la forme $\int R(\tan x) dx$), poser $\tan x = t$.

Exemple: $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$

VI.4. Intégrale de la forme $\int R(\exp x) dx$

Montrons que la substitution $t = \exp x$ nous conduit à l'intégration d'une fonction rationnelle. En effet, vu que $x = \ln t$ et $dx = \frac{dt}{t}$, on obtient

$$\int R(\exp x) dx = \int R(t) \frac{dt}{t}, \text{ où } R(t) \text{ est une fonction rationnelle de } t.$$

Exemple: calculer $\int \frac{\exp x - 1}{\exp x + 1} dx$

Posons $t = \exp x$, d'où $dx = \frac{dt}{t}$. Donc

$$\int \frac{\exp x - 1}{\exp x + 1} dx = \int \frac{t-1}{t+1} \frac{dt}{t} = \int \frac{2t-(t+1)}{t(t+1)} dt = 2 \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t} = 2 \ln |t+1| - \ln |t| + C = 2 \ln(\exp x + 1) - x + C.$$

Signalons en conclusion que les méthodes d'intégration envisagées n'épuisent pas toutes les classes de fonctions élémentaires analytiquement intégrables. On a pu se rendre compte que l'intégration est plus compliquée que la dérivation. Il importe donc de résoudre un grand nombre d'exercices.

Notons par ailleurs que si la dérivation est une opération stable, il en va autrement de l'intégration. Il existe des fonctions élémentaires (par exemple $\exp(-x^2)$, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\sin x}{x}$, etc...) dont les primitives ne sont pas des fonctions élémentaires. Ces primitives existent bien pourtant et jouent un rôle important tant en analyse mathématique que dans ses applications. Ces primitives sont bien étudiées et leurs tables et graphiques permettent de les utiliser fréquemment en pratique.