COURS DE CALCUL MATRICIEL "LIGHT"

Adolphe CODJIA

1ère Année, Sciences &Techniques, Edition 2013

Table des matières

INTRODUCTION

Au commencement était La Géométrie des Grecs, puis vint René Descartes qui, avec son système de repère et de coordonnées, a donné un autre aspect de la géométrie en terme d'algèbre voire d'algèbre linéaire quitte à se passer de l'intuition géométrique immédiate.L'algèbre est la science des équations, au sens de la recherche de l'ensemble des solutions de certaines équations et de la façon dont on peut structurer ou non cet ensemble des solutions.
Le rôle de l'algèbre linéaire est de traiter les problèmes linéaires, c'est-à-dire ceux dont l'ensemble des solutions est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel. Ces problèmes sont particulièrement faciles en dimension finie.
En ce qui concerne ce cours, c'est un véritable survey du calcul matriciel des premières années de mathématiques. Pour plus de profondeur et d'approfondissement, le lecteur est vivement invité à surfer sur le net, afin d'étancher sa soif d'aller plus loin en calcul matriciel. Je vous y encourage.

Chapitre 1

MATRICES

1.1 L'espace vectoriel des matrices de type (p, q) sur un corps K commutatif

Soit K un corps commutatif.
1 Définition 1. p et q étant deux entiers, $p \geq 1, q \geq 1$,
une **matrice** $p \times q$ ou de type (p, q) est, par définition, un tableau :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix}$$

à p lignes et q colonnes d'éléments $a_{ij} \in K$; l'élément a_{ij} s'appelle un terme, ou **coefficient** de la matrice A; l'indice i correspond à la ligne, l'indice j à la colonne.
On emploie aussi la notation

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}.$$

Ceci est la $2^{ème}$ ligne : $a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2q}$; la $2^{ème}$ colonne est : $\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{matrix}$.

<u>Différents types de matrices</u>
a) Matrice uniligne : $p = 1$
$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \end{bmatrix}$.

b) Matrice unicolonne : $q = 1$, $M = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{bmatrix}$.

c) Matrice nulle de type (p, q)
C'est la matrice à p lignes et q colonne dont les composantes sont toutes nulles.
d) Matrice carrée d'ordre n
C'est une matrice à n lignes et n colonnes, les termes $a_{i\ i}$ forment
la diagonale principale

e) Matrice diagonale
C'est une matrice carrée telle que tous les termes en dehors de la diagonale principale sont nuls.
Exemples :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} ; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} .$$

f) Matrice unité d'ordre n
C'est la matrice diagonale d'ordre n telle que tous les termes de la diagonale principale sont égaux à 1 (et les autres nuls). On la note I_n .
Exemple

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

g) Matrice triangulaire supérieure :
C'est une matrice carrée telle que tous les termes en-dessous de la diagonale principale sont nuls.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

h) Matrice triangulaire inférieure :
C'est une matrice carrée telle que tous les termes au-dessus de la diagonale principale sont nuls

Exemple : $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & -1 & -9 \end{bmatrix}$.

i) Transposée d'une matrice :
On appelle transposée de la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p \\ 1\leq\ j\ \leq\ q}}$ la matrice $A' = \left(a'_{ij}\right)_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ q \\ 1\leq\ j\ \leq\ p}}$ où $a'_{ij} = a_{ji}$.
La transposée de A est notée ${}^tA$; c'est la matrice dont les colonnes sont les lignes de A et vice versa.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1+i \\ 4 & -6 & -8 \end{bmatrix}$; $\qquad {}^tA = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -6 \\ 1+i & -8 \end{bmatrix}$.

j) Opposée d'une matrice :
C'est la matrice obtenue en prenant l'opposée de chaque terme :

$$si\ A = (a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p \\ 1\leq\ j\ \leq\ q}} \quad (-A) = (-a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p \\ 1\leq\ j\ \leq\ q}}.$$

Deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p \\ 1\leq\ j\ \leq\ q}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p \\ 1\leq\ j\ \leq\ q}}$, de type (p, q) sont **égales** si leurs coefficients a_{ij} et b_{ij} sont égaux, quels que soient $i = 1, 2, ..., p$ et $j = 1, 2, ..., q$.

2. Somme.
On définit la matrice $C = A + B$, de type (p, q) , **somme** des deux matrices de

type (p, q), par ses coefficients : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq p, \ 1 \leq j \leq q$.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1-i \\ -3 & -1+i & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1+i \\ -3 & 1 & i \end{bmatrix}$,

$A + B = \begin{bmatrix} 2+3 & -1+1 & 1-i+(-1+i) \\ -3+(-3) & -1+i+1 & 2+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -6 & i & 2+i \end{bmatrix}$

$A + (-A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1-i \\ -3 & -1+i & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -(-1) & -(1-i) \\ -(-3) & -(-1+i) & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

On a ainsi une loi de composition interne, **l'addition** qui fait de **l'ensemble** $M_{pq}(K)$ **des matrices** $p \times q$ **un groupe commutatif.** L'élément neutre est la matrice dont tous les coefficients a_{ij} sont nuls dite **matrice nulle** 0.

La matrice opposée à $A = (a_{ij})$ est la matrice $-A$ de coefficients $-a_{ij}$.

3.Multiplication par un scalaire. Soit $\lambda \in K$; la matrice λA est par définition, la matrice de coefficient λa_{ij}, où $A = (a_{ij})$.

C'est le produit de la matrice A par le scalaire λ notée λA.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1+2i & 1-i \\ -3 & -1+i & 0 \end{bmatrix}$;

$2A = \begin{bmatrix} 2 \times 2 & 2 \times (-1+2i) & 2(1-i) \\ 2 \times (-3) & 2(-1+i) & 2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2+4i & 2-2i \\ -6 & -2+2i & 0 \end{bmatrix}$.

4. Produit de deux matrices

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m,n}(K)$ $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(K)$,

on pose : $AB = C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{m,p}(K)$, où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$

(on dit que l'on fait li-col, c'est-à-dire ligne par colonne) est le produit de la matrice A par B, produit possible si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. En fait pour obtenir le terme $c_{i\ j}$ de la matrice $A \times B = AB$, on multiplie les composantes de la $i^{ème}$ ligne de A par celles de la $j^{ème}$ colonne de B dans l'ordre et on fait la somme des différents produits.

On a symboliquement du point de vu des types de matrices

$(m, n)(n, p) = (m, p)$.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$;

$A \times B = AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 \times 3 + 3 \times 1 & -1 \times (-1) + 3 \times (-3) & -1 \times 2 + 3 \times 4 & -1 \times 1 + 3 \times 7 \\ -4 \times 3 + 1 \times 1 & -4 \times (-1) + 1 \times (-3) & -4 \times 2 + 1 \times 4 & -4 \times 1 + 1 \times 7 \\ 0 \times 3 + 2 \times 1 & 0 \times (-1) + 2 \times (-3) & 0 \times 2 + 2 \times 4 & 0 \times 1 + 2 \times 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -8 & 10 & 20 \\ -11 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & -6 & 8 & 14 \end{bmatrix}.$$

$B \times A$ n'est pas un produit possible car le nombre de colonnes de B égalant 4 n'est pas égal au nombre de lignes de A qui est 3.

Propriétés

1. $A(B+C) = AB + AC, \ \forall A \in M_{m,n}(K), \ \forall B, C \in M_{n,p}(K)$.
2. $(A+B)C = AC + BC, \ \forall A, B \in M_{m,n}(K), \forall C \in M_{n,p}(K)$.
3. $\forall \lambda \in K, \forall A \in M_{m,n}(K), \forall B \in M_{n,p}(K)$,
$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.
4. $\forall A \in M_{m,n}(K), \forall B \in M_{n,p}(K), \forall C \in M_{p,r}(K)$,
$(AB)C = A(BC) = ABC$.

Remarque

$(M_n(K), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif .
L'élément unité se note I_n . $M_n(K)$ est l'ensemble des matrices de type (n,n), dites aussi matrices carrée d'ordre n.

Définition

$A \in M_n(K)$ est dite inversible s'il existe $B \in M_n(K)$ telle que $AB = BA = I_n$.

Proposition

L'ensemble $\mathbf{GL}_n(K)$ des matrices carrées d'ordre n inversibles est un groupe multiplicatif appelé le groupe linéaire.

Proposition

L'ensemble $M_{pq}(K)$ des matrices $p \times q$ est un espace vectoriel sur K, par rapport aux deux opérations sus-mentionnées. La dimension de $M_{pq}(K)$ sur K est pq; une base est constituée par les matrices E_{ij} tels que $a_{ij} = 1$ et $a_{rs} = 0$, si $r \neq i$ ou $s \neq j$.

Exemples. a°) Une base de l'espace vectoriel $M_{23}(\mathbb{R})$ est constitué par les matrices :

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ appartenant à $M_{23}(\mathbb{R})$ s'écrit :

$$A = 2E_{11} + 5E_{12} - 7E_{13} + 9E_{21} + 8E_{22} + 4E_{23}.$$

b°) Une matrice $1 \times q$ a la forme $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \end{pmatrix}$.
on l'appelle **matrice ligne ou uniligne** l'espace $M_{1q}(K)$ est isomorphe à K^q.

c°) Une matrice $p \times 1$ a la forme $B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}$.

On l'appelle **matrice colonne ou unicolonne** ; l'espace $M_{p1}(K)$ est isomorphe à K^p.

d°) Une matrice $n \times n$ est dite **matrice carrée d'ordre** n; l'espace vectoriel de ces matrices est notée $M_n(K)$; il est de dimension n^2 sur K.

5. Vecteurs colonnes, vecteurs lignes.

On appelle j-ème vecteur colonne de $A = (a_{ij}) \in M_{pq}(K)$, le vecteur de K^p dont les coordonnées, dans la base canonique de K^p, sont les coefficients $a_{1j}, ..., a_{pj}$ de la j-ème colonne de A. On appelle i-ème vecteur ligne de $A = (a_{ij}) \in M_{pq}(K)$, le vecteur de K^q dont les coordonnées, dans la base canonique de K^q, sont les coefficients $a_{i1}, ..., a_{iq}$ de la i-ème ligne de A.

Chapitre 2

DÉTERMINANTS

2.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. On appelle **déterminant de A** le nombre $\mathbf{ad} - \mathbf{bc}$.

On note **dét A** ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Exemple

$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 3 \times 4 = -14$

2.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. On appelle déterminant de A le nombre

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$.

On note $\det A$ ou $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

2.2.1 Calcul d'un déterminant d'ordre 3

Par la méthode de Sarrus

On complète par les deux premières colonnes à droite
(ou par les deux premières lignes en bas) et on fait les produits 3 à 3 ceux parallèles à la diagonale principale sont comptés positivement et les autres perpendiculaires à la diagonale principale sont comptés négativement.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}).$$

Remarque : La méthode de Sarrus ne s'applique qu'au déterminant d'ordre 3.

Méthode par le développement suivant une ligne ou une colonne.

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ le déterminant de A s'obtient par développement suivant la première ligne $a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}$, en multipliant chaque $a_{i\ j}$ par $(-1)^{i+j}$ et

par le déterminant obtenu en éliminant la ligne et la colonne de $a_{i\ j}$ et en faisant la somme des différents produits :

Quand on élimine la ligne et la colonne de $a_{1\ 1}$ il reste $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$;

quand on élimine la ligne et la colonne de $a_{1\ 2}$ il reste $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$;

quand on élimine la ligne et la colonne de $a_{1\ 3}$ il reste $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Ainsi de suite.

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+1} a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+3} a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12} (a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\ &\quad + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ &\quad - (a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}) . \end{aligned}$$

Le déterminant s'obtient aussi par le développement suivant une colonne, développons $\det A$ suivant la $2^{ième}$ colonne de A $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+2} a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+2} a_{32} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ &\quad - (a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}) . \end{aligned}$$

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ développons suivant la $2^{ème}$ ligne.

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+2} \times 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -3 (-2 \times 5 - 4 \times 3) - 1 \times (-1 \times 4 - (-1) \times (-2)) \\ &= -3 (-22) - (-6) = 72. \end{aligned}$$

Développons $\det B$ suivant la $1^{ère}$ ligne :

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \times (-5) \times \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= -5 \times (-4 \times (-2) - (-1) \times 2) = -50.$$

Développons $\det B$ suivant la $1^{ère}$ colonne

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{1+2} \times (-4) \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \times 2 \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -(-4) \times (0 \times 0 - (-2) \times (-5)) + 2\,(0 \times 2 - (-1) \times (-5))$$
$$= -40 - 10 = -50.$$

2.3 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n supérieur ou égal à 3

On se ramène à des calculs de déterminants d'ordre inférieur à n en développons suivant une ligne ou une colonne.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ développons suivant la } 4^{ème} \text{ colonne :}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+4} \times 4 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 4\left[2 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}\right]$$
$$= 4\,[2\,(1-8) - 5\,(1+6)] = 4\,(-14-35)$$
$$= 4\,(-49) = -196.$$

Remarque

Pour développer suivant les lignes ou les colonnes, il vaut mieux choisir celles qui renferment le plus de zéros pour réduire le nombre de calculs.

4) Propriétés des déterminants

1) Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Alors on a :
$\det(AB) = \det A \times \det B$. $\forall \lambda \in K, \forall A \in M_n(K)$, alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
2) Le déterminant d'une matrice unité est égale à 1.
3) Le déterminant d'une matrice triangulaire, en particulier celui d'une matrice diagonale, est égal au produit des éléments diagonaux
(c'est-à-dire des éléments de la diagonale principale)

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times (-2) = -6.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix};$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times (-1) \times (-5) = 30.$$

4) Le déterminant ne change pas quand on **ajoute** à une *ligne* une combinaison des **autres** *lignes* ; en particulier, on peut remplacer une ligne par la somme de toutes les lignes ou encore ajouter à une ligne λ multiplié par une autre ligne où λ est un scalaire.

(Dans la propriété 4) en remplacant ligne(s) par colonne(s), on a le même résultat).

Exemple

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, en ajoutant à la $3^{ème}$ ligne, deux fois la $1^{ère}$ ligne, on a :

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$, je développe par rapport à la $2^{ème}$ colonne,

$$\det A = -(-2) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} = 2(33+3) = 72.$$

Remarque

Il est plus intéressant de faire des manipulations (légitimes) qui font apparaître des zéros.

5) Le déterminant d'une matrice dont une ligne ou une colonne est formée de zéros est un déterminant nul. Le déterminant d'une matrice dont une ligne(resp. une colonne) est une combinaison des autres lignes (resp. des autres colonnes) est un déterminant nul.

Exemple

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0$, car la $2^{ème}$ colonne est égale à deux fois la $1^{ère}$ colonne.

6) Lorsqu'on permute deux lignes (ou deux colonnes) dans un déterminant le déterminant est changé en son opposé.

2.4 Inverse d'une matrice carrée

1) Définition

Une matrice carrée A d'ordre n est **inversible** s'il existe une matrice (carrée d'ordre n) B telle que $A \times B = B \times A = I_n$.

B est alors appelée **inverse** de la matrice A.

Exemple

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. On vérifie que pour $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$,
on a : $AB = BA = I_2$.
Donc A est inversible et B est inverse de la matrice A.
2 Théorème
Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
Si A est inversible, son inverse est unique. On la note A^{-1} et on a : $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.
Exemple
$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\det A = -2 \neq 0$ donc A est inversible.

2.4.1 Calcul de l'inverse d'une matrice

Par la méthode des cofacteurs

* **Comatrice**
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq \ i, \ j \ \leq \ n}$. On appelle **cofacteur** de l'élément $a_{i \ j}$ le nombre $(-1)^{1+J} X_{i \ j}$ où $X_{i \ j}$ est le déterminant obtenu en éliminant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de A.
La matrice des cofacteurs est appelée la **comatrice** de A. $X_{i \ j}$ est appelé le mineur de $a_{i \ j}$.
Exemple
$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$. Notons $A = (a_{ij})_{1 \leq \ i, \ j \ \leq \ 3}$.
Le cofacteur de $a_{1 \ 1} = 1$ est $(-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 9$, on a $X_{1 \ 1} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$
Le cofacteur de $a_{3 \ 2} = -5$ est $(-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$, on a $X_{3 \ 2} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$.
Ainsi de suite.
La comatrice de A est donc $comA = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.
Théorème
Si A est une matrice inversible alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \times com\,({}^tA) = \dfrac{1}{\det A} \times ({}^t com\,(A))$
où ${}^tA$ désigne la transposée de A, $com\,({}^tA)$ désigne la comatrice de la transposée de A et $({}^t com\,(A))$ désigne la transposée de la comatrice de A.
Remarque
Soit une matrice inversible A, son inverse est notée $A^{-1} \neq \dfrac{1}{A}$ qui n'existe pas.
Exemple
Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, A est -elle inversible ?
$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2$, à la $1^{ère}$ colonne, j'ai fait la $1^{ère}$ colonne plus la $3^{ème}$ colonne afin d'avoir plus de zéro dans mon déterminant pour ne pas avoir beaucoup de termes à développer. Comme $\det A = 2 \neq 0$, alors A est inversible.

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \times com\left({}^tA\right) = \dfrac{1}{\det A} \times \left({}^tcom\left(A\right)\right).$

${}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 6 \end{bmatrix},$

$com\left({}^tA\right) = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & -2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

$= \left({}^tcom\left(A\right)\right).$

$A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & -2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \\ -4 & 2 & -1 \\ \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$

2.4.2 Solution par la résolution de systèmes

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq\ i,\ j\ \leq\ n}$ une matrice inversible, $B = (x_{ij})_{1\leq\ i,\ j\ \leq\ n}$ son inverse, alors $AB = I_n$.

Pour trouver la $1^{ère}$ colonne de B, on résoud le système :

$$A\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pour trouver la $j^{ème}$ colonne de B,on résoud le système :

$$A\begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{jj} \\ x_{(j+1)j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{seule la } j^{ème} \text{ coordonnée est égale à 1.}$$

Exemple :

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Réponse

$\det A = 3;\qquad$ soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};\qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$

$AX = Y \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & y_1 \\ x_1 - x_2 & = & y_2 \\ x_1 - x_3 & = & y_3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 & = & \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_3 & = & \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$

Rang d'une matrice

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$. $rgA =$ le nombre maximun de vecteurs colonnes de A linéairement indépendantes. On a $rgA \leq \min(n, m)$.
Si $m = n$, et que $rgA = n \Longleftrightarrow \det A \neq 0$.
Remarque
En dimensions finies, étant donnée une application linéaire f à laquelle est associée la matrice A dans certaines bases,

$$rgA = rgf.$$

Proposition
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ alors rgA est le plus grand entier naturel s qui est tel qu'on puisse extraire de A une matrice d'ordre s de déterminant $\neq 0$.
Exemple
$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer le rang de A. $rgA = 2$.
Corollaire
$rg\left({}^tA\right) = rgA$.

Chapitre 3

RÉSOLUTION D'UN SYSTEME LINÉAIRE

Définition
Soient $n, m \geq 1$.
On appelle système de m équations à n inconnues tout système (S) de la forme

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 \ + a_{12}\,x_2 \ + ... + a_{1n}\,x_n & = \ b_1 \\ a_{21}\,x_1 \ + a_{22}\,x_2 \ + ... + a_{2n}\,x_n & = \ b_2 \\ \vdots & \vdots \ \ \vdots \\ a_{m1}\,x_1 \ + a_{m2}\,x_2 \ + ... + a_{mn}\,x_n & = \ b_m \end{cases},$$

où a_{ij} , b_i sont des scalaires donnés. $x_1 , x_2 , ..., x_n$ sont des inconnues.
La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ m \\ 1\leq\ j\ \leq\ n}}$ = la matrice de (S). Les b_i sont les seconds membres de (S) , et (S) est dit homogène si $b_i = 0$.

Ecriture matricielle de (S).

Soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$. Alors $(S) \Longleftrightarrow AX = B$.

Ecriture vectorielle de (S)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ m \\ 1\leq\ j\ \leq\ n}}$, la matrice de (S). Soient $\beta = (e_1 , e_2 , ..., e_n)$ la base canonique de K^n; et $\beta' = (e'_1 , e'_2 , ..., e'_m)$ la base canonique de K^m.
Soit $f : K^n \longrightarrow K^m$ l'application linéaire telle que $A = Mat\,(f, \beta, \beta')$.
Alors $(S) \Longleftrightarrow AX = B \Longleftrightarrow f\,(x) = b$; où $x = (x_1 , x_2 , ..., x_n)$;
$b = (b_1 , b_2 , ..., b_n)$.

3.1 Résolution du système S

Définition
Le système (S) est dit de Cramer si $m = n$ et si $\det A \neq 0$.
Tout système de Cramer (S) admet une solution unique $X = A^{-1}B$.

3.1.1 Système quelconque

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ m \\ 1\leq\ j\ \leq\ n}}$, la matrice de (S), et soit $r = rgA$.
1^{er} cas : $m = r < n$,

$(S) \Longleftrightarrow (S\,') \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 \;+a_{12}\,x_2 \;+ ... + a_{1r}\,x_r & = \underbrace{b_1 \;-(a_{1r+1}\,x_{r+1} \;+a_{1r+2}\,x_{r+2} \;+ ... + a_{1n}\,x_n\,)}_{c_1\;(x_{r+1}\,,x_{r+2}\,,...,x_r\,)} \\ a_{21}\,x_1 \;+a_{22}\,x_2 \;+ ... + a_{2r}\,x_r & = \underbrace{b_2 \;-(a_{2r+1}\,x_{r+1} \;+a_{2r+2}\,x_{r+2} \;+ ... + a_{2n}\,x_n\,)}_{c_2\;(x_{r+1}\,,x_{r+2}\,,...,x_r\,)} \\ \vdots & \vdots \;\; \vdots \\ a_{m1}\,x_1 \;+a_{m2}\,x_2 \;+ ... + a_{mr}\,x_r & = \underbrace{b_m \;-(a_{mr+1}\,x_{r+1} \;+a_{mr+2}\,x_{r+2} \;+ ... + a_{mn}\,x_n\,)}_{c_m\;(x_{r+1}\,,x_{r+2}\,,...,x_r\,)} \end{cases}$$

Soit $A' = (a_{ij}\,)_{1\leq\, i,j\,\leq\, r}$, $r = rgA'$ donc $\det A' \neq 0$
$(s\,')$ est un système de Cramer qu'on doit résoudre.
$2^{ème}$ cas : $r < m$ Il y a deux solutions possibles , l'ensemble vide ou une infinité de solutions.

3.1.2 Systèmes homogènes

$$(S_0\,) \Longleftrightarrow \begin{cases} a_{11}\,x_1 \;+a_{12}\,x_2 \;+ ... + a_{1n}\,x_n & = \;0 \\ a_{21}\,x_1 \;+a_{22}\,x_2 \;+ ... + a_{2n}\,x_n & = \;0 \\ \vdots & \vdots \;\; \vdots \\ a_{m1}\,x_1 \;+a_{m2}\,x_2 \;+ ... + a_{mn}\,x_n & = \;0 \end{cases}.$$

Soit $A = (a_{ij}\,)_{\substack{1\leq\, i\,\leq\, m \\ 1\leq\, j\,\leq\, n}}$, la matrice de $(S_0\,)$. Soient $\beta = (e_1\,, e_2\,, ..., e_n\,)$ la base canonique de K^n; et $\beta' = (e'_1\,, e'_2\,, ..., e'_m\,)$ la base canonique de K^m.
Soit $f : K^n \longrightarrow K^m$ l'application linéaire telle que $A = Mat\,(f, \beta, \beta')$.
Alors $(S_0\,) \Longleftrightarrow AX = 0 \Longleftrightarrow f\,(x) = 0$; où $x = (x_1\,, x_2\,, ..., x_n\,)$.
Les solutions sont $\ker f$.
Si $(S_0\,)$ est de Cramer alors la solution de $(S_0\,)$ est $\{0_E\,\}$.
Soit $r = rgA = rgf$.
alors $\dim\ker f = n - r$. L'ensemble solutions est $\ker f$.

3.2 Méthode de résolution d'un système de Cramer par les déterminants

$$\text{Soit } (\Sigma) \Longleftrightarrow \begin{cases} a_{11}\,x_1 \;+a_{12}\,x_2 \;+ ... + a_{1n}\,x_n & = \;b_1 \\ a_{21}\,x_1 \;+a_{22}\,x_2 \;+ ... + a_{2n}\,x_n & = \;b_2 \\ \vdots & \vdots \;\; \vdots \\ a_{n1}\,x_1 \;+a_{n2}\,x_2 \;+ ... + a_{nn}\,x_n & = \;b_n \end{cases},$$

un système de n équations à n inconnues de Cramer.
On appelle déterminant du système (Σ) le nombre $\Delta = \det A$, où A est la matrice associée a (Σ) .
On appelle déterminant de x_i le nombre Δ_{x_i} égal au déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans A la $i^{ème}$ colonne par les éléments respectifs des seconds membres c'est-à-dire $b_1\,, b_2\,, ..., b_n$.

Théorème

(Σ) étant de Cramer, l'unique solutin dans $\mathbb{k}^n$ est : $\left(\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; ....; \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}\right)$.

Exemple

$$(\Sigma) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + z & = & 3 \\ 2x - y + z & = & 1 \\ -x - y + z & = & 0 \end{array} \right. .$$

La matrice associée à (Σ) est $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \text{ (je rappelle que j'ai fait } \mathrm{col}_3 + \mathrm{col}_2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{3}; \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-7}{3}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-6}{3} = -2$$

Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(\frac{1}{3}; \frac{-7}{3}; -2\right)\right\}$. Maintenant voyant que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

on a bien $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-7}{3} \\ -2 \end{bmatrix}$.

Chapitre 4

TRAVAUX DIRIGÉS

Série A

EXERCICE 1

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 2x\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et déterminer une base de E.

EXERCICE 2

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$.
Soient $\overrightarrow{u} = e_1 + 2e_2 + e_3$, $\overrightarrow{v} = -2e_1 + e_2 - e_3$, $\overrightarrow{w}_m = me_2 - e_3; m \in \mathbb{R}$

1) Pour quelles valeurs de m, $S_m = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_m\}$ est-il une base de $\mathbb{R}^3$?
En déduire que S_1 est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer la matrice de passsage de la base β à la base S_1.
3) Déterminer la matrice de passage de la base S_1 à la base β.
4) Soit $\overrightarrow{H} = (-5; 1; 2)$. Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{H}$ dans la base S_1?
5) On considère l'application linéaire
$f_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x; y; z) \mapsto (x + 2y + z; -2x + y - z; my - z)$.
a) Quelle est la matrice de f_m dans la base β?
b) Dans quels cas f_m est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
En déduire que f_0 et f_1 sont des automorphismes de $\mathbb{R}^3$.
c) Trouver $(x; y; z)$ tel que $f_1(x; y; z) = (0; 1; 7)$ et calculer $(f_1)^{-1}(2; 5; 0)$.

EXERCICE 3

Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -i & 2 \\ -i & 2 & 0 \end{pmatrix}$;
$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -5 & 11 & -2 \end{pmatrix}$.

1°) Calculer si possible les matrices suivantes : $E = AB$ et $E' = BA$
que peut-on conclure ?
2°) Calculer si possible les matrices : F=AD et F'=DA.
3°) Calculer C^3. En déduire que C n'est pas inversible.

EXERCICE 4

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

et $T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1°) Montrer que A et B Sont inversible et déterminer leur inverse.
Mêmes questions pour C=AB.

2°) Résoudre dans IR^3l'équation matricielle $CT = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$.

EXERCICE 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $A^2 = A - I_2$.
b) Calculer A^3
c) Montrer que, si p est un entier positif, on a :
$A^{3p} = (-1)^p I_2$, $A^{3p+1} = (-1)^p A$, $A^{3p+2} = (-1)^p (A - I_2)$.
d) Les suites réelles (u_n) et (v_n) sont définies par les relations de récurrence :
$u_{n+1} = u_n + v_n$, $v_{n+1} = -u_n$ et par la donnée de u_1 et v_1.
Calculer u_n et v_n en fonction de u_1, v_1 et n, en particulier
pour $n = 3p$; $n = 3p + 1$; $n = 3p + 2, p \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 6

Soit E un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension 3 et $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère l'application $\mathbb{R}$ - linéaire $u : E \to E$ définie par :
$u(e_1) = e_1 + e_2 + 2e_3$, $u(e_2) = -u(e_1)$, $u(e_3) = e_1 - e_2$.
Soit M la matrice de u dans la base β. On pose :
$f_1 = e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_3$, $f_3 = e_1 + e_2$ et $\varsigma = (f_1, f_2, f_3)$.
1) Écrire la matrice M.
2) Calculer la dimension de $Ker(u)$, le rang de u et le rang de M.
3) Montrer que ς est une base de E.
4) Soit P la matrice de passage de la base β à la base ς et
N la matrice de u dans la base ς.
4-a) Déterminer les matrices P, P^{-1} et N.
4-b) Pour tout entier $k \geq 1$, calculer N^k et en déduire M^k.

EXERCICE 7

1°) Inverser si possible la matrice : $A_m = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -m \\ m-4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

2°) Résoudre dans IR^3 en discutant éventuellement suivant les valeurs de m
le système :

$$(\textstyle\sum_1) \begin{cases} 3x + y - z = -m \\ 3x + y - mz = -3 \\ (m-4)\, x - 2y - z = -1 \end{cases} \quad \text{et}$$

$$(\sum_2)\left\{\begin{array}{r} 3x + y - z = 1 \\ 3x + \ y + z = -3 \\ -\,5\ x - 2y - z = -1 \end{array}\right.$$ avec les formules de Cramer $(\sum_2)$.

Série B

EXERCICE 1

Sur l'ensemble $\mathcal{P}'_n$ des polynômes à une indéterminée X de coéfficients réels, de degré égal à l'entier positif n, on définit l'addition de deux polynômes P et Q par :

$$(P+Q)(X) = P(X) + Q(X)$$

et la multiplication par un scalaire réel λ par :

$$(\lambda P)(X) = \lambda P(X).$$

a) Examiner si l'ensemble $\mathcal{P}'_n$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel.

b) Même question pour l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des polynômes à une indéterminée X, de degré inférieur ou égal à l'entier n. Montrer que l'ensemble $\mathcal{I}_n$ des polynômes P de $\mathcal{P}_n$ tels que :

$$P(X) + P(-X) = 0$$

est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension et une base.

EXERCICE 2

Sur l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites numériques $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on définit l'addition de deux suites u et v par $u+v = (u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
et la multiplication par un scalaire réel λ par :

$$\lambda u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ des suites de Fibonaci qui vérifient la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

EXERCICE 3

1. On considère les sous-ensembles suivants définis par des conditions sur les composantes d'un vecteur $a = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}^4$.
   Indiquer ceux qui sont des sous-espaces vectiriels et préciser alors leur dimension.
   $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 0\}$; $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 \geq 0\}$;
   $E_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + x_3\}$; $E_4 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 x_4 = 0\}$;
   $E_5 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \in \mathbb{Q}\}$; $E_6 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_1^2\}$.

EXERCICE 4

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:
$E_1 = \{f \in E \mid f^2 = f'\}$; $E_2 = \{f \in E \mid f(x) = xf'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$.

EXERCICE 5

I) Montrer que les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants et préciser leur relation de dépendance :

a) $u = (1, 2, -1);\ v = (1, 0, 1);\ w = (-1, 2, -3)$

b) $u = (-1, 2, 5);\ v = (2, 3, 4);\ w = (7, 0, -7)$.

II) Préciser si les familles constituées des vecteurs suivants sont liés ou libres.

a) $u = (7, 12);\ v = (18, -13);\ w = (-4, 17)$

b) $u = (-1, 0, 2);\ v = (1, 3, 1);\ w = (0, 1, -1)$

c) $u = (15, -27, -6, 12);\ v = (-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1, -2)$.

III) Déterminer tous les vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que le système suivant soit libre :

$$\{(1, 0, 0);\ (0, 1, 1);\ (x, y, z)\}$$

.

IV) A partir du système libre $\{e_1, ..., e_n\}$ d'un espace vectoriel E, on construit les vecteurs :

$\epsilon_j = e_1 + e_2 + ... + e_j$ *pour* $j = 1, 2, ..., n$. *Montrer que* $\{\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n\}$ *est aussi un système libre.*

V) Si $b_1 = (1, 1, 1; 1);\ b_2 = (1, 1, -1, -1);\ b_3 = (1, -1, 1, -1);\ b_4 = (1, -1, -1, 1)$ constitient une base de $\mathbb{R}^4$,

déterminer les coordonnées du vecteur $x = (1, 2, 1, 1)$ *dans cette base.*

VI) Montrer que le sous-ensemble E, ci-après est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ dont on déterminera la dimension et une base.

$$E = \{(\alpha - \beta, 2\alpha, \alpha + 2\beta, -\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$$

.

VII) Montrer que les polynômes $P_1,\ P_2,\ P_3$ définis ci-après forment une base de l'espace vectoriel des polynômes
à une indéterminée X, de degré inférieur ou égal à deux :

$$P_1(X) = X^2;\quad P_2(X) = (X-1)^2;\quad P_3(X) = (X+1)^2.$$

Exprimer les polynômes Q et R suivants dans cette base :

$$Q(X) = 12;\quad R(X) = 3X^2 - 10X + 1.$$

VIII) Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et F l'ensemble des fonctions numériques f définies par :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{si} \quad x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ \gamma x + \delta & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}.$$

Exprimer les constantes réelles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en fonction des trois réels $a,\ b,\ c$ pour que F soit un sous-espace vectoriel de E. Déterminer alors la dimension et une base de F.

IX) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs :

$$u = (2, 1, 0);\ v = (-1, 0, 1);\ w = (4, 1, -2)$$

a) Déterminer la dimension et une base de F et écrire la forme générale d'un élément de F.

b) Montrer que $G = \{(0, \alpha + \beta, -\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera la dimension et une base.

c) Déterminer la dimension et une base de la somme et de l'intersection des sous-espaces vectoriels F et G.

d) Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la nouvelle base de $F + G$.

X) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on considère les polynômes suivants de l'indéterminée X :

$$P_1(X) = 5+X+X^2+X^3;\ P_2(X) = -1+6X+3X^2+X^3;\ P_3(X) = -16+3X-2X^3;$$

$$P_4(X) = 3+4X+4X^2+X^3;\ P_5(X) = 6+3X+X^2;\ P_6(X) = -3+6X+10X^2+3X^3;$$

$$P_7(X) = 3 - X - 3X^2 - X^3.$$

Déterminer la dimension et une base des espaces vectoriels F et G engendré respectivement par les familles $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ et $\{P_5, P_6, P_7\}$, puis des espaces vectoriels $F \cap G$ et $F + G$.

XI) Soit F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ engendrés par les familles respectives $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{v_1, v_2\}$, où :

$$u_1 = (1, 0, 4, 2)\,;\ u_2 = (1, 2, 3, 1)\,;\ u_3 = (1, -2, 5, 3)\,;\ v_1 = (4, 2, 0, 1)\,;\ v_2 = (1, 4, 2, 1)\,.$$

a) Déterminer la dimension et une base des espaces vectoriels F et G.

b) Montrer que les sous-espaces F et G sont supplémentaires.

EXERCICE 6

Préciser si les applications $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définies ci-après sont linéaires ou non :

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z, z - 1);\ g(x, y) = (x, y, m) \textit{ où } m \textit{ est un paramètre réel.}$$

EXERCICE 7

Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau soit le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Est-il unique ?

EXERCICE 8

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z,t) = (6x - y + az - 2t, -15x + y + 3z + 5t, 3x - y + 5z - t).$$

Montrer que cette application n'est pas injective et déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles elle est surjective. Donner une base du noyau de f.

EXERCICE 9

Vous répondrez par Vrai ou faux avec justification

a) A un homomorphisme donné f correspond une infinité de matrices qui lui sont associées.

b) L'application identique d'un espace vectoriel E de dimension finie se traduit par la même matrice dans toutes les bases de E.

c) Si le produit matriciel $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.

d) Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre inversibles, alors leur somme est inversible, avec

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}.$$

e) Si A est une matrice inversible, sa transposée admet comme inverse la transposée de A^{-1}.

f) Si $AB = I$, alors A et B sont deux matrices inverses l'une de l'autre.

g) Deux matrices distinctes ont deux déterminants distincts.

h) Pour tout entier n et toute matrice carrée A : $detA^n = (\det A)^n$.

EXERCICE 10

On considère les matrices : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Calculer $A^2 + 2AB + B^2$ *et comparer avec* $(A+B)^2$. *Commenter.*

EXERCICE 11

Si M et N sont deux matrices de types respectifs (m,n) et (n,m) telles que $MN = I$, montrer que la matrice $P = NM$ est idempotente, c'est-à-dire que $P^2 = P$.

En déduire que P est diviseur à droite et à gauche de zéro.

EXERCICE 12

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculer, parmi les produits matriciels suivants, ceux qui ont un sens :

$$AB, \quad BA, \quad A^2, \quad AC, \quad CA, \quad C^2, \quad BC, \quad CB, \quad B^2.$$

EXERCICE 13

Montrer que les vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\epsilon_1 = (1,0,1)\,; \quad \epsilon_2 = (-1,1,0)\,; \quad \epsilon_3 = (2,1,1)\,.$$

On définit alors l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ par les images, exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$f(\epsilon_1) = (1,1,1,0)\,;\quad f(\epsilon_2) = (-1,-1,-1,0)\,;\quad f(\epsilon_3) = (0,1,-1,-1)\,.$$

Déterminer la matrice A qui représente f lorsque $\mathbb{R}^3$ est muni de la base$\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ et la matrice B lorsque $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique.
A-t-on une relation matricielle entre A et B ?

EXERCICE 14

On considère l'homomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(x,y,z,t) = (x+t, x+y+t, y+z+t)\,.$$

Déterminer la matrice de cette application linéaire lorsque $\mathbb{R}^4$ est muni de la base formée des vecteurs :
$u_1 = (1,1,1,1,)\,;\ u_2 = (1,1,1,0)\,;\ u_3 = (1,1,0,0)\,;\quad u_4 = (1,0,0,0)$
et $\mathbb{R}^3$ de la base :

$$v_1 = (0,0,1)\,;\quad v_2 = (0,1,1)\,;\quad v_3 = (1,1,1)\,.$$

Déterminer le noyau et l'image (Imf) de f.

EXERCICE 15

I) Les nombres 204, 527 et 255 étant divisibles par 17, démontrer que le déterminant suivant l'est aussi :

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

.

II) Calculer les déterminants suivants :

$$\triangle_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \triangle_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\triangle_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \triangle_4 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \text{ où } a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$$

III) Exprimer le déterminant d'ordre n suivant en fonction de $\triangle_{n-1}$ et $\triangle_{n-2}$:

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

On en déduira ensuite $\triangle_n - \triangle_{n-1}$, puis $\triangle_n$.

EXERCICE 16

Déterminer le rang des matrices suivantes et inverser celles qui sont inversibles (suivant les valeurs du paramètre réel a).

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2-a & -1 & 3 \\ -1 & 1-a & -2 \\ 2 & 3 & 2-a \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

EXERCICE 17

I) Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

a) $\begin{cases} 2x - y - z &= 4 \\ 3x + 4y - 2z &= 11 \\ 3x - 2y + 4z &= 11 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 3x + y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ x + 3y - 3z &= -3 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} x + y - 3z &= 1 \\ 2x + y - 2z &= 1 \\ x + y + z &= 3 \\ x + 2y - 3z &= 1 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x + y + z + t + u &= 7 \\ 3x + 2y + z + t - 3u &= -2 \\ y + 2z + 2t + 6u &= 23 \\ 5x + 4y + 3z + 3t - u &= 12 \end{cases}$

II) Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m les système suivants :

a) $\begin{cases} 2x + (m-1)\,y - 3mz &= 2 \\ x - 2\,(m-1)\,y + mz &= 1 \\ x + (m-1)\,y - 2mz &= 2m \end{cases}$, b) $\begin{cases} mx + y + t &= m+1 \\ x + my + z &= m-1 \\ y + mz + t &= m+1 \\ x + z + mt &= m-1 \end{cases}$

Bibliographie

[1] Jean-Marie Monier, Algèbre MPSI, Cours et 700 Exercices Corrigés,
3ème édition, DUNOD

[2] J.-P.Lecoutre, P. Pilibossian, Travaux Dirigés, Algèbre,
2ème édition, DUNOD

[3] J.Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès, Cours de Mathématiques, Tome 1, Algèbre,
3ème édition, DUNOD.