UFR de Mathématiques et Informatique
Année universitaire 2012−2013

# 1 ANALYSE REELLE

## 1.1 TD

### 1.1.1 Exercice :

A l'aide des sommes de Riemann d'une fonction convenable, calculer la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

1) $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n}$ ; 2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\alpha+k}$ avec $(\alpha > 0)$ 3) $\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ 4) $W_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$

### 1.1.2 Exercice

a) Montrer que si k>o, on a $\int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ et si k>1 on a $\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

b) En deduire que la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ est convergente et que sa limite l vérifie : -2 $\leq l \leq -1$

### 1.1.3 Exercice

1) Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'on a :

$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\right) \geq (b-a)^2$ et que l'égalité a lieu si et seulement si f est constante.

2)Soit f une fonction continue et positive sur $[0,1]$ . Démontrer l'inégalité:

$\left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$

### 1.1.4 Exercice

1) Calculer les intégrales suivantes:

a) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{-x}+1}dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x\left(1+\tan^2 x\right)}{\sin x+cox}dx$ c) $\int_0^{\pi} \sin^5 x \cos^2 x\ dx$ d) $\int_0^{\pi} \frac{\cos^{21} x}{1+\sin^{13} x}dx$

2) Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx$ .Etablir une relation de recurrence entre $I_n$ et $I_{n+1}$ et déduire $I_n$

### 1.1.5 Exercice

Intégrer les équations différentielles suivantes:

a) xy'-$(1+2x)\,y=-x^2e^x$ b) $\left(x^2+1\right)y'-2y=-2\sqrt{y}$ c) y'sinxcosx-3y = -3y$^{\frac{2}{3}}\sin^3 x$ d) y'= -xy$^2+\frac{1}{x}y-\frac{2}{x^3}$

e) y'=2xy$^2-2\,(2+x)\,y+\frac{2x^2+2x-1}{x^2}$ f) y"-2y'+2y=e$^x\left(x^2-x+3\right)$

### 1.1.6 Exercice

1) Calculer le developpement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0

a) e$^{\sqrt{\cos x}}$, b) $\sin(\ln(1+x))$, c) $\sqrt[3]{1+x+x^2}, d)$ $\frac{1}{\ln(1+\sin x)}$, e) $\frac{e^{tgx}}{\cos x-1}$

2) Calculer le developpement limité à l'ordre 4 au voisinage de $+\infty$

a) x$\ln\left(1+\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ b) $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x-1}$

3) Calculer les limites suivantes:

$\underset{0}{lim}\frac{tg^2x-x^2}{(\cos x-1)(e^x-1)^2}$, $\underset{0}{lim}\frac{e^{\frac{\cos x-1}{x}}-e^{-\sin\frac{x}{2}}}{x^3}$ $\underset{+\infty}{lim}\left(cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ $\underset{0}{\lim}\frac{\sin(tgx)+\sin x-2x}{x^5}$

### 1.1.7 Exercice

Etudier la convergence de ces intégrales généralisées

1) $\int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ 2) $\int_0^\infty t^n e^{-t}dt$ 3) $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ 4) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$