Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Exercice 1.

Résoudre

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x + 4 \quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Résoudre

$$y'' - 3y' = 2 \quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Résoudre

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-x} \quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Résoudre

$$y'' - 3y' + 2y = 36xe^{-x} \quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Résoudre

$$y'' - 3y' + 2y = xe^{x}$$

Allez à : **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**

Exercice 6.

Résoudre

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x} \quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Résoudre

$$y'' + 2y' + 5y = 5\cos(2x) - 3\sin(2x) \quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Résoudre

$$y'' + 2y' + 5y = (4x + 6)\cos(x) + (-2x + 6)\sin(x) \quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Résoudre

$$y'' + y = \sin(x) \quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Résoudre

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(6\cos(x) - 3\sin(x)) \quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Résoudre

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(2\cos(2x) + 4\sin(2x))$$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Résoudre

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + 6x$$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Résoudre

$$y'' + 4y = \cos^2(x)$$

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Soit $k \in \mathbb{R}$

1. Selon les valeurs de k résoudre

$$y'' - (1+k)y' + ky = 0$$

2. Selon les valeurs de k résoudre

$$y'' - (1+k)y' + ky = e^{2x}$$

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

Soit $k \in \mathbb{R}$

1. Selon les valeurs de k résoudre

$$y'' - (1+k)y' + ky = 0$$

2. Selon les valeurs de k résoudre

$$y'' - (1+k)y' + ky = e^{2x}$$

Allez à : Correction exercice 15

CORRECTIONS

Correction exercice 1.

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad (E')$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \text{ ou } r = 2$$

Donc la solution générale de (E') est $\varphi(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$

On cherche une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$\varphi_P'(x) = 2Ax + B$$

$$\varphi_P''(x) = 2A$$

On remplace cela dans (E), pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi_P''(x) - 3\varphi_P'(x) + 2\varphi_P(x) = 2x^2 - 6x + 4 \Leftrightarrow 2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 6x + 4$$

$$\Leftrightarrow 2Ax^2 + (-6A + 2B)x + 2A - 3B + 2C = 2x^2 - 6x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 2 \\ -6A + 2B = -6 \\ 2A - 3B + 2C = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ -6 + 2B = -6 \\ 2 - 3B + 2C = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases}$$

On en déduit que $\varphi_P(x) = x^2 + 1$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + x^2 + 1$$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

$$y'' - 3y' = 0 \quad (E')$$

L'équation caractéristique de (E') est : $r^2 - 3r = 0 \Leftrightarrow r = 0$ ou $r = 3$

La solution générale de (E') est :

$$\varphi(x) = \lambda_1 + \lambda_2 e^{3x}$$

0 est une solution simple de l'équation caractéristique et le degré du polynôme 2 est 0 donc il existe une solution particulière de (E) de la forme

$$\varphi_P(x) = Ax$$

$$\varphi_P'(x) = A \quad \text{et} \quad \varphi_P''(x) = 0$$

On remplace cela dans (E)

$$\varphi_P''(x) - 3\varphi_P'(x) = 2 \Leftrightarrow -3A = 2 \Leftrightarrow A = -\frac{2}{3}$$

Donc

$$\varphi_P(x) = -\frac{2}{3}x$$

Et la solution générale de (E)

$$\varphi(x) = \lambda_1 + \lambda_2 e^{3x} - \frac{2}{3}x$$

Remarque :

Si on pose $z' = y$ alors (E) devient

$$z' - 3z = 2$$

Il s'agit d'une équation du premier ordre dont la solution est :

$$\psi(x) = \mu e^{3x} - \frac{2}{3}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer cette équation pour retrouver la solution générale ci-dessus.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad (E')$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \text{ ou } r = 2$$

Donc la solution générale de (E') est $\varphi(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$

Le second membre est le produit d'une constante 1 (donc d'un polynôme de degré 0) par une exponentielle avec $\alpha = -1$, -1 n'est pas solution de l'équation caractéristique de (E') donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = Ae^{-x}$$

$$\varphi'_P(x) = -Ae^{-x} \quad \text{et} \quad \varphi''_P(x) = Ae^{-x}$$

On remplace cela dans (E)

$$\varphi''_P(x) - 3\varphi'_P(x) + 2\varphi_P(x) = e^{-x} \Leftrightarrow Ae^{-x} - 3(-e^{-x}) + 2Ae^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow 6A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{6}$$

Donc

$$\varphi_P(x) = \frac{1}{6}e^{-x}$$

Et la solution générale de (E) est

$$\varphi(x) = \lambda_1 e^{x} + \lambda_2 e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x}$$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \ \ (E')$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \ \text{ ou } \ r = 2$$

Donc la solution générale de (E') est $\varphi(x) = \lambda_1 e^{x} + \lambda_2 e^{2x}$

Le second membre est le produit d'un polynôme de degré 1 par une exponentielle avec $\alpha = 2$, or -1 n'est pas solution de l'équation caractéristique de (E') donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = (Ax + B)e^{-x}$$

$$\varphi'_P(x) = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x} = (-Ax + A - B)e^{-x}$$

$$\varphi''_P(x) = -Ae^{-x} - (-Ax + A - B)e^{-x} = (Ax - 2A + B)e^{-x}$$

On remplace cela dans (E)

$$\begin{aligned}
&\varphi''_P(x) - 3\varphi'_P(x) + 2\varphi_P(x) = 36xe^{-x} \\
&\Leftrightarrow (Ax - 2A + B)e^{-x} - 3(-Ax + A - B)e^{-x} + 2(Ax + B)e^{-x} = 36e^{-x} \\
&\Leftrightarrow (6Ax - 5A + 6B)e^{-x} = 36xe^{-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 6A = 36 \\ -5A + 6B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 6 \\ B = 5 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_P(x) = (6x + 5)e^{-x}$$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x) = \lambda_1 e^{x} + \lambda_2 e^{2x} + (6x + 5)e^{-x}$$

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \ \ (E')$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \text{ ou } r = 2$$

Donc la solution générale de (E') est $\varphi(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$

Le second membre est le produit d'un polynôme de degré 1 par une exponentielle avec $\alpha = 1$, or 1 est solution de l'équation caractéristique de (E') donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x$$

$$\varphi_P'(x) = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x = (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x$$

$$\begin{aligned}\varphi_P''(x) &= (2Ax + 2A + B)e^{-x} + (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^{-x}\\ &= (Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)e^{-x}\end{aligned}$$

On remplace cela dans (E)

$$\begin{aligned}&\varphi_P''(x) - 3\varphi_P'(x) + 2\varphi_P(x) = xe^x\\ &\Leftrightarrow (Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)e^{-x} - 3(Ax^2 + (2A + B)x + B)e^{-x}\\ &+ 2(Ax^2 + Bx)e^{-x} = xe^x\\ &\Leftrightarrow (A - 3A + 2A)x^2 + (4A + B - 6A - 3B + 2B)x + 2A + 2B - 3B = x\\ &\Leftrightarrow -2Ax + 2A - B = x \Leftrightarrow \begin{cases} -2A = 1 \\ 2A - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = -1 \end{cases}\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_P(x) = x\left(-\frac{1}{2}x - 1\right)e^x = \left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^x$$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^x = \lambda_2 e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \lambda_1\right)e^x$$

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad (E)$$

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -1$$

-1 est une racine double de l'équation caractéristique de (E') donc la solution générale de (E') est :

$$\varphi(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{-x}$$

Le second membre est le produit d'une constante 2 (donc d'un polynôme de degré 0) par une exponentielle avec $\alpha = -1$, -1 est solution double de l'équation caractéristique de (E') donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = Ax^2 e^{-x}$$

$$\varphi_P'(x) = 2Ax - Ax^2 e^{-x} = A(-x^2 + 2x)e^{-x}$$

$$\varphi_P''(x) = A\big((-2x + 2)e^{-x} - (-x^2 + 2x)e^{-x}\big) = A(x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

On remplace cela dans (E)

$$\varphi_P''(x)+2\varphi_P'(x)+\varphi_P(x)=2e^{-x}\Leftrightarrow A(x^2-4x+2)e^{-x}+2A(-x^2+2x)e^{-x}+Ax^2e^{-x}$$
$$=2e^{-x}\Leftrightarrow (A-2A+A)x^2+(-4A+4A)x+2A=2\Leftrightarrow A=1$$

Donc

$$\varphi_P(x)=x^2e^{-x}$$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x)=(\lambda_1+\lambda_2x)e^{-x}+x^2e^{-x}=(\lambda_1+\lambda_2x+x^2)e^{-x}$$

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

$$y''+2y'+5y=0\quad (E')$$

$$r^2+2r+5=0\Leftrightarrow r=-1+2i\quad \text{ou}\quad r=-1-2i$$

La solution générale de (E') est :

$$\varphi(x)=e^{-x}(\lambda_1\cos(2x)+\lambda_2\sin(2x))$$

Ici $\omega=2$ et $2i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x)=A\cos(2x)+B\sin(2x)$$

$$\varphi_P'(x)=-2A\sin(2x)+2B\cos(2x)$$

$$\varphi_P''(x)=-4A\cos(2x)-4B\sin(2x)$$

On remplace cela dans (E)

$$\varphi_P''(x)+2\varphi_P'(x)+5\varphi_P(x)=5\cos(2x)-3\sin(2x)$$
$$\Leftrightarrow -4A\cos(2x)-4B\sin(2x)+2(-2A\sin(2x)+2B\cos(2x))$$
$$+5(A\cos(2x)+B\sin(2x))=5\cos(2x)-3\sin(2x)$$
$$\Leftrightarrow (-4A+5A+4B)\cos(2x)+(-4B-4A+5B)\sin(2x)$$
$$=5\cos(2x)-3\sin(2x)\Leftrightarrow \begin{cases} A+4B=5\\ -4A+B=-3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} A=1\\ B=1\end{cases}$$

Donc $\varphi_P(x)=\cos(2x)+\sin(2x)$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x)=e^{-x}(\lambda_1\cos(2x)+\lambda_2\sin(2x))+\cos(2x)+\sin(2x)$$

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

$$y''+2y'+5y=0\quad (E')$$

$$r^2+2r+5=0\Leftrightarrow r=-1+2i\quad \text{ou}\quad r=-1-2i$$

La solution générale de (E') est :

$$\varphi(x)=e^{-x}(\lambda_1\cos(2x)+\lambda_2\sin(2x))$$

Ici $\omega = 1$ et i n'est pas une racine de l'équation caractéristique, est un polynôme de degré 1, donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = (Ax + B)\cos(x) + (Cx + D)\sin(x)$$

$$\begin{aligned}\varphi_P'(x) &= A\cos(x) - (Ax + B)\sin(x) + C\sin(x) + (Cx + D)\cos(x)\\ &= (Cx + D + A)\cos(x) + (-Ax - B + C)\sin(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_P''(x) &= C\cos(x) - (Cx + D + A)\sin(x) - A\sin(x) + (-Ax - B + C)\cos(x)\\ &= (-Ax - B + 2C)\cos(x) + (-Cx - D - 2A)\sin(x)\end{aligned}$$

On remplace cela dans (E)

$$\begin{aligned}\varphi_P''(x) + 2\varphi_P'(x) + 5\varphi_P(x) &= (4x + 6)\cos(x) + (-2x + 6)\sin(x)\\ &\Leftrightarrow (-Ax - B + 2C)\cos(x) + (-Cx - D - 2A)\sin(x)\\ &+ 2\big((Cx + D + A)\cos(x) + (-Ax - B + C)\sin(x)\big)\\ &+ 5\big((Ax + B)\cos(x) + (Cx + D)\sin(x)\big)\\ &= (4x + 6)\cos(x) + (-2x + 6)\sin(x)\\ &\Leftrightarrow \big((-A + 2C + 5A)x - B + 2C + 2D + 2A + 5B\big)\cos(x)\\ &+ \big((-C - 2A + 5C)x - D - 2A - 2B + 2C + 5D\big)\sin(x)\\ &= (4x + 6)\cos(x) + (-2x + 6)\sin(x)\\ &\Leftrightarrow \big((4A + 2C)x + 2A + 4B + 2C + 2D\big)\cos(x)\\ &+ \big((-2A + 4C)x - 2A - 2B + 2C + 4D\big)\sin(x)\\ &= (4x + 6)\cos(x) + (-2x + 6)\sin(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 4A + 2C = 4\\ 2A + 4B + 2C + 2D = 6\\ -2A + 4C = -2\\ -2A - 2B + 2C + 4D = 6\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2A + C = 2\\ A + 2B + C + D = 3\\ -A + 2C = -1\\ -A - B + C + 2D = 3\end{cases}\end{aligned}$$

Résolvons d'abord

$$\begin{matrix} L_1\\ L_2\end{matrix}\begin{cases} 2A + C = 2\\ -A + 2C = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1\\ L_1 + 2L_2\end{matrix}\begin{cases} 2A + C = 2\\ 5C = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1\\ C = 0\end{cases}$$

On remet cela dans les deux autres équations

$$\begin{aligned}&\begin{cases} A + 2B + C + D = 3\\ -A - B + C + 2D = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2B + D = 3\\ -1 - B + 2D = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1\\ L_2\end{matrix}\begin{cases} 2B + D = 2\\ -B + 2D = 4\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1\\ L_1 + 2L_2\end{matrix}\begin{cases} 2B + D = 2\\ 5D = 10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2B + D = 2\\ D = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0\\ D = 2\end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\varphi_P(x) = x\cos(x) + 2\sin(x)$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x) = e^{-x}(\lambda_1\cos(2x) + \lambda_2\sin(2x)) + x\cos(x) + 2\sin(x)$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

$$y'' + y = 0 \quad (E')$$

$$r^2+1=0 \Leftrightarrow r=-i \quad \text{ou} \quad r=i$$

La solution générale de (E') est $\varphi(x)=\lambda_1\cos(x)+\lambda_2\sin(x)$

$\omega=1$ et $i\omega=i$ est solution de l'équation caractéristique de (E') donc (E) amet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x)=x(A\cos(x)+B\sin(x))$$

$$\begin{aligned}\varphi_P'(x)&=A\cos(x)+B\sin(x)+x(-A\sin(x)+B\cos(x))\\&=(Bx+A)\cos(x)+(-Ax+B)\sin(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_P''(x)&=B\cos(x)-(Bx+A)\sin(x)-A\sin(x)+(-Ax+B)\cos(x)\\&=(-Ax+2B)\cos(x)+(-Bx-2A)\sin(x)\end{aligned}$$

On remplace cela dans (E)

$$\begin{aligned}&\varphi_P''(x)+\varphi_P(x)=\sin(x)\\&\Leftrightarrow(-Ax+2B)\cos(x)+(-Bx-2A)\sin(x)+x(A\cos(x)+B\sin(x))\\&=\sin(x)\Leftrightarrow 2B\cos(x)-2A\sin(x)=\sin(x)\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{1}{2}\\ B=0\end{cases}\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_P(x)=-\frac{x}{2}\cos(x)$$

Et la solution générale de (E) est

$$\varphi(x)=\lambda_1\cos(x)+\lambda_2\sin(x)-\frac{x}{2}\cos(x)$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

$$y''+2y'+5y=0 \quad (E')$$

$$r^2+2r+5=0\Leftrightarrow r=-1+2i \quad \text{ou} \quad r=-1-2i$$

La solution générale de (E') est :

$$\varphi(x)=e^{-x}(\lambda_1\cos(2x)+\lambda_2\sin(2x))$$

$\alpha=-1$ et $\omega=1$ donc $\alpha+i\omega=-1+i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique de (E'), donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x)=e^{-x}(A\cos(x)+B\sin(x))$$

$$\begin{aligned}\varphi_P'(x)&=-e^{-x}(A\cos(x)+B\sin(x))+e^{-x}(-A\sin(x)+B\cos(x))\\&=e^{-x}\big((-A+B)\cos(x)+(-A-B)\sin(x)\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_P''(x)&\\&=-e^{-x}\big((-A+B)\cos(x)+(-A-B)\sin(x)\big)\\&\quad+e^{-x}(-(-A+B)\sin(x)+(-A-B)\cos(x))\end{aligned}$$

$$=e^{-x}(-2B\cos(x)+2A\sin(x))$$

On remet cela dans (E)

$$\begin{aligned}
\varphi_P''(x)+2\varphi_P'(x)+5\varphi_P(x)=e^{-x}(6\cos(x)-3\sin(x))\\
\Leftrightarrow e^{-x}(-2B\cos(x)+2A\sin(x))\\
+2e^{-x}\big((-A+B)\cos(x)+(-A-B)\sin(x)\big)+5e^{-x}(A\cos(x)+B\sin(x))\\
=e^{-x}(6\cos(x)-3\sin(x))\\
\Leftrightarrow(-2B-2A+2B+5A)\cos(x)+(2A-2A-2B+5B)\sin(x)\\
=6\cos(x)-3\sin(x)\Leftrightarrow 3A\cos(x)+3B\sin(x)=6\cos(x)-3\sin(x)\\
\Leftrightarrow\begin{cases}3A=6\\3B=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_P(x)=e^{-x}(2\cos(x)-\sin(x))$$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x)=e^{-x}(\lambda_1\cos(2x)+\lambda_2\sin(2x))+e^{-x}(2\cos(x)-\sin(x))$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

$$y''+2y'+5y=0\quad(E')$$

$$r^2+2r+5=0\Leftrightarrow r=-1+2i\quad\text{ou}\quad r=-1-2i$$

La solution générale de (E') est :

$$\varphi(x)=e^{-x}(\lambda_1\cos(2x)+\lambda_2\sin(2x))$$

$\alpha=-1$ et $\omega=2$ donc $\alpha+i\omega=-1+2i$ est une racine de l'équation caractéristique de (E'), donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x)=xe^{-x}(A\cos(2x)+B\sin(2x))$$

Là, on a un problème, φ_P est un produit de trois termes, la dérivée est la somme de trois termes qui eux-mêmes sont le produit de trois termes, la dérivée la somme de neuf termes qui eux-mêmes sont le produit de trois termes, certes on pourrait arranger φ_P' et φ_P'' en regroupant des termes et en mettant e^{-x} en facteur mais il vaut mieux utiliser l'exponentielle complexe.

$$\begin{aligned}
\varphi_P(x)=xe^{-x}(A\cos(2x)+B\sin(2x))=xe^{-x}\left(A\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}+B\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)\\
=x\frac{e^{-x}}{2}\left(e^{2ix}(A-iB)+e^{-2ix}(A+iB)\right)=\\
=x\frac{1}{2}\left(e^{(-1+2i)x}(A+iB)+e^{(-1-2i)x}(A-iB)\right)=x\frac{1}{2}Re\left(e^{(-1+2i)x}(A+iB)\right)
\end{aligned}$$

On pose alors $C=A+iB$

$$\varphi_P(x)=x\frac{1}{2}Re(e^{z_0x}C)$$

$$\varphi_P'(x)=x\frac{1}{2}Re(z_0e^{z_0x}C)+\frac{1}{2}Re(e^{z_0x}C)$$

$$\begin{aligned}\varphi_P''(x) &= x\frac{1}{2}Re(z_0^2e^{z_0x}C)+\frac{1}{2}Re(z_0e^{z_0x}C)+\frac{1}{2}Re(z_0e^{z_0x}C)\\ &= x\frac{1}{2}Re(z_0^2e^{z_0x}C)+\frac{1}{2}\times 2Re(z_0e^{z_0x}C)\end{aligned}$$

On remet cela dans (E)

$$\begin{aligned}&\varphi_P''(x)+2\varphi_P'(x)+5\varphi_P(x)=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))\\ &\Leftrightarrow x\frac{1}{2}Re(z_0^2e^{z_0x}C)+2\times\frac{1}{2}Re(z_0e^{z_0x}C)\\ &+2\left(x\frac{1}{2}Re(z_0e^{z_0x}C)+\frac{1}{2}Re(e^{z_0x}C)\right)+5\left(x\frac{1}{2}Re(e^{z_0x}C)\right)\\ &=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}Re\big(xz_0^2e^{z_0x}C+2z_0e^{z_0x}C+2\big(xRe(z_0e^{z_0x}C)+Re(e^{z_0x}C)\big)+5xe^{z_0x}C\big)\\ &=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}Re(xe^{z_0x}C(z_0^2+2z_0+5)+2z_0e^{z_0x}C+2e^{z_0x}C)\\ &=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))\end{aligned}$$

Comme $z_0^2+2z_0+5=0$

$$\begin{aligned}&\varphi_P''(x)+2\varphi_P'(x)+5\varphi_P(x)=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))\Leftrightarrow \frac{1}{2}Re(2z_0e^{z_0x}C+2e^{z_0x}C)\\ &=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))\Leftrightarrow \frac{1}{2}Re\big(2e^{z_0x}C(z_0+1)\big)\\ &=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))\Leftrightarrow Re\big(e^{z_0x}C(z_0+1)\big)\\ &=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))\end{aligned}$$

Il reste à calculer la partie réelle de

$$\begin{aligned}2e^{z_0x}C(z_0+1)&=2e^{(-1+2i)x}(A+iB)\big((-1+2i)+1\big)=2e^{-x}e^{2ix}(A+iB)2i\\ &=4ie^{-x}(\cos(2x)+i\sin(2x))(A+iB)\\ &=4ie^{-x}\big(\mathrm{A}\cos(2x)-B\sin(2x)+i(B\cos(2x)+A\sin(2x))\big)\\ &=e^{-x}\big(-4B\cos(2x)-4A\sin(2x)+i(4\cos(2x)-4B\sin(2x))\big)\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}&\varphi_P''(x)+2\varphi_P'(x)+5\varphi_P(x)=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))\Leftrightarrow \frac{1}{2}Re\big(e^{z_0x}C(2z_0+1)\big)\\ &=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))\Leftrightarrow \frac{1}{2}(-4B\cos(2x)-4A\sin(2x))\\ &=2\cos(2x)+4\sin(2x)\Leftrightarrow -2B\cos(2x)-2A\sin(2x)\\ &=2\cos(2x)+4\sin(2x)\Leftrightarrow \begin{cases}-2B=2\\-2A=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=-1\\A=-2\end{cases}\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_P(x)=xe^{-x}(-2\cos(2x)-\sin(2x))$$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi_P(x) = e^{-x}(A\cos(2x) + B\sin(2x)) + xe^{-x}(-2\cos(2x) - \sin(2x))$$
$$= e^{-x}\big((A-2x)\cos(2x) + (B-x)\sin(2x)\big)$$

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

On appelle φ_{P_1} une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$

On appelle φ_{P_2} une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = 6x$

-1 n'est pas solution de l'équation caractéristique donc il existe une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$ de la forme

$$\varphi_{P_1}(x) = Ae^{-x}$$

Ce qui entraine que $\varphi'_{P_1}(x) = -Ae^{-x}$ et $\varphi''_{P_1}(x) = Ae^{-x}$ ce que l'on remplace dans l'équation

$$\varphi''_{P_1}(x) - 3\varphi'_{P_1}(x) + 2\varphi_{P_1}(x) = e^{-x} \Leftrightarrow Ae^{-x} - 3(-Ae^{-x}) + 2Ae^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow 6A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$\varphi_{P_1}(x) = \frac{1}{6}e^{-x}$$

$6x$ est un polynôme de degré 1 donc il existe une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = 6x$ de la forme

$$\varphi_{P_2}(x) = Ax + B$$

Ce qui entraine que $\varphi'_{P_2}(x) = A$ et $\varphi_{P_2}(x) = 0$, ce que l'on remplace dans l'équation

$$\varphi''_{P_2}(x) - 3\varphi'_{P_2}(x) + 2\varphi_{P_2}(x) = 6x \Leftrightarrow 0 - 3A + 2(Ax+B) = 6x \Leftrightarrow 2Ax - 3A + 2B = 6x$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 6 \\ -3A + 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

$$\varphi_{P_2}(x) = 3x + \frac{9}{2}$$

On solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + 6x$ est

$$\varphi_P(x) = \varphi_{P_1}(x) + \varphi_{P_2}(x) = \frac{1}{6}e^{-x} + 3x + \frac{9}{2}$$

Et la solution générale de $y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + 6x$ est

$$\varphi(x) = \lambda_1 e^{x} + \lambda_2 e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x} + 3x + \frac{9}{2}$$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

L'équation caractéristique de $y'' + 4y = 0$ est $r^2 + 4 = 0$, ses racines est $r_1 = -2i$ et $r_2 = 2i$, la solution générale de $y'' + 4y = 0$ est

$$\varphi(x) = \lambda_1\cos(2x) + \lambda_2\sin(2x)$$

$\cos^2(x)$ n'est pas de la forme $e^{\alpha x}(P(x)\cos(\omega x)+Q(x)\sin(\omega x))$ donc il faut linéariser $\cos^2(x)$, c'est-à-dire $\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)$

On pose $f_1(x)=\frac{1}{2}$ et $f_2(x)=\frac{1}{2}\cos(2x)$

On appelle φ_{P_1} une solution particulière de $y''+4y=\frac{1}{2}$, la théorie veut qu'il existe une solution particulière de la forme $\varphi_{P_1}(x)=A$, mais il est clair que

$$\varphi_{P_1}(x)=\frac{1}{8}$$

Est une solution particulière.

On appelle φ_{P_2} une solution particulière de $y''+4y=\frac{1}{2}\cos(2x)$

Ici $\alpha+i\omega=0+2i=2i$ est solution de l'équation caractéristique de $y''+4y=0$, donc il existe une solution particulière de $y''+4y=\frac{1}{2}\cos(2x)$ de la forme

$$\varphi_{P_2}(x)=x(A\cos(2x)+B\sin(2x))$$

Ce qui entraine que

$$\begin{aligned}\varphi'_{P_2}(x)&=A\cos(2x)+B\sin(2x)+x(-2A\sin(2x)+2B\cos(2x))\\&=(2Bx+A)\cos(2x)+(-2Ax+B)\sin(2x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi''_{P_2}(x)&=2B\sin(2x)-2(2Bx+A)\sin(2x)-2A\sin(2x)+2(-2Ax+B)\cos(2x)\\&=(-4Ax+4B)\cos(2x)+(-4Bx-4A)\sin(2x)\end{aligned}$$

Ce que l'on remplace dans l'équation

$$\begin{aligned}&\varphi''_{P_2}(x)+4\varphi_{P_2}(x)=\frac{1}{2}\cos(2x)\\&\qquad\Leftrightarrow(-4Ax+4B)\cos(2x)+(-4Bx-4A)\sin(2x)+4x(A\cos(2x)+B\sin(2x))\\&\qquad=\frac{1}{2}\cos(2x)\Leftrightarrow 4B\cos(2x)-4A\sin(2x)=\frac{1}{2}\cos(2x)\Leftrightarrow\begin{cases}-4A=0\\4B=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\B=\frac{1}{8}\end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\varphi_{P_2}(x)=\frac{x}{8}\sin(2x)$, par conséquent une solution particulière de $y''+4y=\cos^2(x)$ est :

$$\varphi_P(x)=\varphi_{P_1}(x)+\varphi_{P_2}(x)=\frac{1}{8}+\frac{x}{8}\sin(2x)$$

Et la solution générale est :

$$\varphi(x)=\lambda_1\cos(2x)+\lambda_2\sin(2x)+\frac{1}{8}+\frac{x}{8}\sin(2x)$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. L'équation caractéristique est $r^2-(1+k)r+k=0$, le discriminant vaut
$$\Delta=(1+k)^2-4k=1+2k+k^2-4k=1-2k+k^2=(1-k)^2$$
Si $k=1$ alors il y a une racine réelle double $r_0=1$, la solution de l'équation est :

$$y = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^x$$

Si $k \neq 1$ alors il y a deux racines réelles distinctes

$$r_1 = \frac{1 + k - (1 - k)}{2} = k \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1 + k + (1 - k)}{2} = 1$$

La solution de l'équation est

$$y = \lambda_1 e^{kx} + \lambda_2 e^x$$

2. Si $k \neq 2$, il existe une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = Ae^{2x}$$

Donc

$$\varphi_P'(x) = 2Ae^{2x} \quad \text{et} \quad \varphi_P''(x) = 4Ae^{2x}$$

En remplaçant dans l'équation

$$\varphi_P''(x) - (1 + k)\varphi_P'(x) + k\varphi_P(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 4Ae^{2x} - (1 + k)2Ae^{2x} + kAe^{2x} = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow A(4 - 2(1 + k) + k) = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2 - k}$$

Par conséquent

$$\varphi_P(x) = \frac{1}{2 - k} e^{2x}$$

Si $k = 1$ la solution générale est

$$y = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^x + e^{2x}$$

Si $k \neq 1$ et $k \neq 2$ la solution générale est

$$y = \lambda_1 e^{kx} + \lambda_2 e^x + \frac{1}{2 - k} e^{2x}$$

Si $k = 2$, il existe une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = Axe^{2x}$$

Donc

$$\varphi_P'(x) = 2Axe^{2x} + Ae^{2x} = (2Ax + A)e^{2x} \quad \text{et} \quad \varphi_P''(x) = 2Ae^{2x} + 2(2Ax + A)e^{2x} = (4Ax + 4A)e^{2x}$$

Par conséquent

$$\varphi_P''(x) - 3\varphi_P'(x) + 2\varphi_P(x) = e^{2x} \Leftrightarrow (4Ax + 4A)e^{2x} - 3(2Ax + A)e^{2x} + 2Axe^{2x} = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 4Ax + 4A - 3(2Ax + A) + 2Ax = 1 \Leftrightarrow (4A - 6A + 2A)x + 4A - 3A = 1 \Leftrightarrow A = 1$$

Dans ce cas la solution générale est

$$y = \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^x + xe^{2x}$$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

3. L'équation caractéristique est $r^2 - (1 + k)r + k = 0$, le discriminant vaut

$$\Delta = (1 + k)^2 - 4k = 1 + 2k + k^2 - 4k = 1 - 2k + k^2 = (1 - k)^2$$

Si $k = 1$ alors il y a une racine réelle double $r_0 = 1$, la solution de l'équation est :

$$y = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^x$$

Si $k \neq 1$ alors il y a deux racines réelles distinctes

$$r_1 = \frac{1 + k - (1 - k)}{2} = k \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1 + k + (1 - k)}{2} = 1$$

La solution de l'équation est

$$y = \lambda_1 e^{kx} + \lambda_2 e^x$$

4. Si $k \neq 2$, il existe une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = Ae^{2x}$$

Donc

$$\varphi_P'(x) = 2Ae^{2x} \quad \text{et} \quad \varphi_P''(x) = 4Ae^{2x}$$

En remplaçant dans l'équation

$$\varphi_P''(x)-(1+k)\varphi_P'(x)+k\varphi_P(x)=e^{2x}\Leftrightarrow 4Ae^{2x}-(1+k)2Ae^{2x}+kAe^{2x}=e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow A(4-2(1+k)+k)=1\Leftrightarrow A=\frac{1}{2-k}$$

Par conséquent

$$\varphi_P(x)=\frac{1}{2-k}e^{2x}$$

Si $k=1$ la solution générale est

$$y=(\lambda_1+\lambda_2 x)e^x+e^{2x}$$

Si $k\neq 1$ et $k\neq 2$ la solution générale est

$$y=\lambda_1 e^{kx}+\lambda_2 e^x+\frac{1}{2-k}e^{2x}$$

Si $k=2$, il existe une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x)=Axe^{2x}$$

Donc

$\varphi_P'(x)=2Axe^{2x}+Ae^{2x}=(2Ax+A)e^{2x}$ et $\varphi_P''(x)=2Ae^{2x}+2(2Ax+A)e^{2x}=(4Ax+4A)e^{2x}$

Par conséquent

$$\varphi_P''(x)-3\varphi_P'(x)+2\varphi_P(x)=e^{2x}\Leftrightarrow(4Ax+4A)e^{2x}-3(2Ax+A)e^{2x}+2Axe^{2x}=e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow 4Ax+4A-3(2Ax+A)+2Ax=1\Leftrightarrow(4A-6A+2A)x+4A-3A=1\Leftrightarrow A=1$$

Dans ce cas la solution générale est

$$y=\lambda_1 e^{2x}+\lambda_2 e^x+xe^{2x}$$

Allez à : Exercice 15