Université de Poitiers | **L1 SPIC, Module 2L02**
Mathématiques | **2010/2011**

Feuille 4 : Quelques rappels, corrections et exercices supplémentaires.

Rappels :

1. *Matrice d'une application linéaire.*

   Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in L(E,F)$, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \dots f_p)$ une base de F. La matrice de f dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$ dans la base $(f_1, \dots f_n)$.
   Si on a
   $$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{1,1}f_1 + a_{2,1}f_2 + \cdots + a_{p,1}f_p \\ f(e_2) &= a_{1,2}f_1 + a_{2,2}f_2 + \cdots + a_{p,2}f_p \\ &\vdots \\ f(e_n) &= a_{1,n}f_1 + a_{2,n}f_2 + \cdots + a_{p,n}f_p, \end{aligned}$$
   alors :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) = \begin{array}{c c} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{array} \\ \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \end{array} & \end{array}$$

2. *Composition de fonctions et produit matriciel.*

   Rappel : Soient E, F, G trois espaces vectoriels et $f \in L(E,F)$, $g \in L(F,G)$ des applications linéaires Soient $\mathcal{E}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une base de F et $\mathcal{G}$ une base de G. Alors on a
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f).$$

3. *Formules de changement de bases.*

   Définition . *Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases d'un ev E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.*

   Proposition . $\mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}$ *et* $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I$.

Théorème . *Soient E un espave vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux bases de E. On a*

$$Mat_{\mathcal{F}}(f) = (\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}})^{-1} \times Mat_{\mathcal{E}}(f) \times \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}.$$

Démonstration : On note $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$.

$$\begin{tikzcd}
E \text{ muni de la base } \mathcal{E} \arrow[r, "f"] & E \text{ muni de la base } \mathcal{E} \\
E \text{ muni de la base } \mathcal{F} \arrow[r, "f"] \arrow[u, "id_E"] & E \text{ muni de la base } \mathcal{F} \arrow[u, "id_E"']
\end{tikzcd}$$

On a $id_E \circ f = f \circ id_E$. Or $id_E \circ f = f \circ id_E$: E muni de la base $\mathcal{F} \to E$ muni de la base $\mathcal{E}$. On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(id_E \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f \circ id_E).$$

En utilisant la formule rappelée au 2., on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(id_E) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(id_E). \quad (\star)$$

Or $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(f)$, et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$. D'autre part

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(id_E) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix} \\ id_E(f_1) \ \ \cdots \ \ id_E(f_n) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix} \\ f_1 \ \ \cdots \ \ f_n \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} = \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}.$$

La relation $(\star)$ devient donc

$$\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) \times \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}.$$

En multipliant à gauche par $(\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}})^{-1}$, on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(f) = (\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}})^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) \times \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}.$$

4. Rappel 2 : Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{E}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une base de F et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors l'application f est un isomorphisme de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ est inversible, et dans ce cas la matrice de f^{-1} dans les bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f))^{-1}.$$

Exercice 5 :

1. voir TD

2. (a) Soit $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$. On a :

$$\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ f(X) = 2X - (X-1) = 1 + X \\ f(X^2) = 2X^2 - 2X(X-1) = 2X \\ f(X^3) = 2X^3 - 3X^2(X-1) = 3X^2 - X^3. \end{array}$$

La matrice de f est donc

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) On échelonne M :

$$\begin{array}{c|c|c|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline \frac{1}{2}f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) \end{array}$$

$$\underset{(C_2 \leftarrow C_2 - C_1)}{\longrightarrow} \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline \frac{1}{2}f(1) & f(X) - \frac{1}{2}f(1) & f(X^2) & f(X^3) \end{array}$$

$$\underset{(C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2)}{\longrightarrow} \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline \frac{1}{2}f(1) & f(X) - \frac{1}{2}f(1) & f(X^2) - 2f(X) + f(1) & f(X^3) \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c|c|c|c} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 3 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & -1 & \mathbf{0} \\ \hline \frac{1}{2}f(1) & f(X) - \frac{1}{2}f(1) & f(X^3) & f(X^2) - 2f(X) + f(1) \end{array}$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) \\ & = & \mathrm{Vect}(\frac{1}{2}f(1), f(X) - \frac{1}{2}f(1), f(X^3), f(X^2) - 2f(X) + f(1)) \\ & = & \mathrm{Vect}(1, X, 3X^2 - X^3, 0) = \mathrm{Vect}(1, X, 3X^2 - X^3). \end{array}$$

La famille $(1, X, 3X^2 - X^3)$ est donc génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Elle est également libre puisque échelonnée. On en déduit que $(1, X, 3X^2 - X^3)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Déterminons maintenant une base de $\ker(f)$. D'après l'échelonnement précédent, on a $f(X^2) - 2f(X) + f(1) = 0$ c'est à dire, puisque f est linéaire $f(X^2 - 2X + 1) = 0$.

On en déduit que $X^2-2X+1 \in \ker(f)$. Ainsi, $X^2-2X+1=(X-1)^2$ forme une famille libre (car un seul vecteur non nul) de $\ker(f)$.
Or d'après le théorème du rang, $\dim(\ker f)+\dim(\mathrm{Im} f)=\dim(\mathbb{R}[X]_{\leq 3}))=4$. On a vu que $\dim(\mathrm{Im}(f))=3$ (puisqu'on a trouvé une base de $\mathrm{Im}(f)$ formée de 3 vecteurs), on en déduit que $\dim(\ker f)=1$. Ainsi

$$\left.\begin{array}{r} (X-1)^2 \text{ forme une famille libre de 1 vecteur de } \ker(f) \\ \dim(\ker f)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow (X-1)^2 \text{ est une base de } \ker(f).$$

Exercice supplémentaire corrigé :
Soient $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in L(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$.

> Rappel 1 : Soit E un espace vectoriel et $f : E \to E$. On dit que f est un *isomorphisme de E* si
>
> 1. f est une application linéaire,
> 2. f est bijective.

Ici $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est linéaire (dit dans l'énoncé). Il ne reste donc qu'à montrer que f est bijective.

Pour montrer que f est bijective, il suffit de prouver que A est inversible (voir rappels). On peut le faire en montrant que $\mathrm{rg}(A)=3$ (méthode à privilégier si on ne doit pas calculer A^{-1} ensuite), ou directement en calculant A^{-1}.

Ici, on nous demande de calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$. Or d'après le rappel précédent, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1}=A^{-1}$. On aura donc besoin de calculer A^{-1}. On utilise donc la deuxième méthode (calculer directement A^{-1}) :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3x+y+4z=a \\ 2y=b \\ -2x+y+3z=c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \ \ldots \ \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-3a-\frac{1}{2}b+4c \\ y=\frac{1}{2}b \\ z=-2a-\frac{1}{2}b+3c \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On en déduit que A est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} -3 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$.

Conclusion : f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 :

1. • Montrons que $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0$, c'est à dire que

$$x(1,0,1) + y(1,1,1) + z(2,0,1) = (0,0,0),$$

ce qui équivaut au système

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \underset{(L_3 \leftarrow L_3 - L_1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

la famille $\mathcal{U}$ est donc libre. Il s'agit ainsi d'une famille libre formée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3. On en déduit que $\mathcal{U}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

• On dispose de 2 méthodes pour déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}(f)$:

(a) on fait les calculs "à la main" : on calcule les coordonnées de $f(u_1), f(u_2)$ et $f(u3)$ dans la base $\mathcal{U}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u_1)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f).\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}((1,0,1)).$$

Où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(X)$ désigne le vecteur coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$.
On en déduit que $f(u_1) = (1,0,1) = u_1$.
De même, $f(u_2) = (2,2,2) = 2(1,1,1) = 2u_2$ et $f(u_3) = (-2,0,-1) = -(2,0,1) = -u_3$. Ainsi

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) on utilise les formules de changement de bases.
Ici, cela donne ($\mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathcal{B}$ et $\mathcal{E}' = \mathcal{F}' = \mathcal{U}$) :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}(f) = \left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}\right)^{-1}.\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f).\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}.$$

Or

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcul de $\left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}\right)^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = a \\ y = b \\ x + y + z = c \end{cases}$$

$$\underset{(L_3 \leftarrow -L_3+L_1)}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} x+y+2z=a \\ y=b \\ z=a-c \end{array} \right. \underset{(L_3 \leftarrow -L_3+L_1)}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} x=-a-b+2c \\ y=b \\ z=a-c \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$B = (\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}})^{-1}.A.\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.

<ins>Rappel</ins> : quand on a une matrice diagonale et un entier $k \in \mathbb{Z}$, $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

On aurait aussi pu démontrer cela par récurrence sur n : pour $n=0$, l'égalité précédente est vraie. On la suppose vraie au rang $(n-1)$. Alors $B^n = B.B^{n-1}$, ce qui donne, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

En vertu du principe de récurrence, cette relation est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Calculons $f^n(e_1)$, $f^n(e_2)$ et $f^n(e_3)$.
On commencer par exprimer les vecteurs e_1, e_2 et e_3 dans la base $\mathcal{U}$.
On veut écrire e_1 sous la forme $e_1 = xu_1 + yu_2 + zu_3$. On doit donc résoudre $x(1,0,1) + y(1,1,1) + z(2,0,1) = (1,0,0)$, c'est à dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y+2z=1 \\ y=0 \\ x+y+z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2z=1 \\ y=0 \\ x+z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x+2z=1 & \\ y=0 & \\ -z=-1 & (L_3-L_1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-1 \\ y=0 \\ z=1 \end{array} \right. .$$

Ainsi $e_1 = -u_1 + u_3$. De même, on trouve que $e_2 = -u_1 + u_2$ et $e_3 = 2u_1 - u_3$.
On en déduit que $f^n(e_1) = f^n(-u_1 + u_3) = -f^n(u_1) + f^n(u_3)$ car f^n est linéaire. Or d'après la matrice $B^n = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}(f))^n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}(f^n)$, $f^n(u_1) = u_1, f^n(u_2) = 2^n u_2$ et $f^n(u_3) = (-1)^n u_3$, donc $f^n(e_1) = -u_1 + (-1)^n u_3 = -(1,0,1) + (-1)^n(2,0,1) = (2(-1)^n - 1, 0, (-1)^n - 1)$. On retrouve de même que $f^n(e_2) = (2^n - 1, 2^n, 2^n - 1)$ et $f^n(e_3) = (2 - 2(-1)^n, 0, 2 - (-1)^n)$.
Remarque : On peut aussi trouver les expressions des vecteurs e_1, e_2 et e_3 dans la base $\mathcal{U}$ en utilisant les matrices de passage. En effet, par définition de matrice de passage, la matrice $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{B}}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs e_1, e_2 et e_3 dans la base $\mathcal{U}$. Or $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{B}} = \left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}\right)^{-1}$ et on a calculé que

$$\left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ ce qui donne directement } \begin{cases} f(e_1) = -u_1 + u_3 \\ f(e_2) = -u_1 + u_2 \\ f(e_3) = 2u_1 - u_3 \end{cases}$$

puis on termine comme ci-dessus.

3. On a $A^n = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n)$, et donc, avec ce qu'on a fait au 2.

$$A^n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 1 & 2^n - 1 & 2 - 2(-1)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ (-1)^n - 1 & 2^n - 1 & 2 - (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 :

1. On a
$$f^2 = f \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$
Or d'après ce qu'on a rappelé sur le produit matriciel et la composition de fonctions :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A^2.$$
On est donc ramené à montrer que $A^2 = A$. Or
$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix} = A.$$
On a donc bien $f^2 = f$, et f est un projecteur.
2. Il faut commencer par déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. On échelonne la matrice A :

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix} \\ f(e_1) \quad f(e_2) \quad f(e_3) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -4 & -7 & 4 \\ 6 & 10 & -5 \end{pmatrix} \\ f(e_3) \quad f(e_2) \quad f(e_1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & -7 & 4 \\ -3 & 10 & -5 \end{pmatrix} \\ -\frac{f(e_3)}{2} \quad f(e_2) \quad f(e_1) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\ -\frac{f(e_3)}{2} \quad f(e_2) - 2f(e_3) \quad f(e_1) + \frac{3}{2}f(e_3) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ -\frac{f(e_3)}{2} \quad f(e_2) - 2f(e_3) \quad f(e_1) + 2f(e_2) - \frac{5}{2}f(e_3) \end{array}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathrm{Vect}\left(\tfrac{f(e_3)}{2}, f(e_2)-2f(e_3), f(e_1)+2f(e_2)-\tfrac{5}{2}f(e_3)\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\tfrac{f(e_3)}{2}, f(e_2)-2f(e_3)\right) = \mathrm{Vect}((1,2,-3),(0,1,-2)).
\end{aligned}$$

La famille $((1,2,-3),(0,1,-2))$ est donc génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Elle est également libre, car échelonnée. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Pour déterminer $\ker(f)$, on considère la colonne nulle de la matrice échelonnée. On a $f(e_1)+2f(e_2)-\frac{5}{2}f(e_3)=0$, c'est à dire, puisque f est linéaire $f(e_1+2e_2-\frac{5}{2}e_3)=0$. On en déduit que $e_1+2e_2-\frac{5}{2}e_3 \in \ker(f)$, c'est à dire que $(1,2,-\frac{5}{2}) \in \ker(f)$. D'autre part, comme $(1,2,-\frac{5}{2}) \neq 0$, il constitue une famille libre de $\ker(f)$.

Or d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\Im(f)) = 3-2 = 1$.

Ainsi $(1,2,-\frac{5}{2})$ est une famille libre de $\ker(f)$ qui est de dimension 1, c'est donc une famille libre maximale, c'est à dire une base de $\ker(f)$.

On montre maintenant que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires de la manière habituelle.

- On a bien $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$ (théorème du rang).
- Il reste à montrer que $\ker(f)\cap\mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Soit $X \in \ker(f)\cap\mathrm{Im}(f)$. Comme $X \in \ker(f) = \mathrm{Vect}(1,2,-\frac{5}{2})$, X s'écrit $X = x(1,2,-\frac{5}{2})$ avec $x\in\mathbb{R}$. De même, comme $X \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(((1,2,-3),(0,1,-2))$, $X = y(1,2,-3)+z(0,1,-2)$ avec $y,z\in\mathbb{R}$. On en déduit que $x(1,2,-\frac{5}{2}) = y(1,2,-3)+z(0,1,-2)$, ce qui nous donne le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x-y=0\\ 2x-2y-z=0\\ -\frac{5}{2}x+3y+2z=0\end{array}\right. \Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=0\\ z=0\end{array}\right.$$

Ainsi $X = x(1,2,-\frac{5}{2}) = 0$ et $\ker(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}$.

Conclusion : $E = \ker(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.

3. On cherche une base $\mathcal{U} = (u_1,u_2,u_3)$ telle que

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}(f) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 0&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3)\end{array}\end{array} \begin{array}{c} u_1\\ u_2\\ u_3 \\ \end{array}$$

On doit donc avoir $f(u_1)=0$, c'est à dire $u_1\in\ker(f)$. Comme on a vu que $(1,2,-\frac{5}{2})$ forme une base de $\ker(f)$, on prend donc $u_1 = (1,2,-\frac{5}{2})$.

On doit également avoir $f(u_2)=u_2$ et $f(u_3)=u_3$. Puisqu'on a vu que $E=\ker(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$, l'idée est de prendre u_2 et u_3 dans $\mathrm{Im}(f)$. Si $x\in\mathrm{Im}(f)$, alors $x=f(y)$ pour un certain $y\in\mathbb{R}^3$. Alors on a $f(x) = f\circ f(y) = f^2(y) = f(y)$ puisque $f^2=f$. Or $f(y)=x$. On a donc $f(x)=x$. Ainsi, pour tout élément x de $\mathrm{Im}(f)$, on a $f(x)=x$. On a vu que $((1,2,-3),(0,1,-2))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$, donc on prend $u_2=(1,2,-3)$ et $u_3=(0,1,-2)$. Comme u_2 et u_3 sont dans $\mathrm{Im}(f)$, on a $f(u_2)=u_2$ et $f(u_3)=u_3$. Comme u_1 forme une base de $\ker(f)$, (u_2,u_3) est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $E=\ker(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$, alors $\mathcal{U}=(u_1,u_2,u_3)$ est une base de E, et on a bien

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}(f) = \left(\begin{array}{ccc} 0&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{array}\right).$$