Convergence et valeur d'un produit infini

Soit $(u_n)_{n\geq q}$ une suite de nombres réels ou complexes.

Pour tout $m \geq q$, on pose $P_m = \prod_{n=q}^{m} u_n = u_q u_{q+1} \cdots u_m$.

On dit que les $(P_m)_{m\geq q}$ sont les produits partiels du produit infini $\prod_{n\geq q} u_n$.

Si $(P_m)_{m\geq q}$ converge vers une limite non nulle, on dit que le produit infini $\prod_{n\geq q} u_n$ converge.

Cette limite est alors notée $\prod_{n=q}^{\infty} u_n$. On l'appelle la *valeur* du produit infini.

Si $(P_m)_{m\geq q}$ est divergente ou de limite nulle, on dit que le produit infini $\prod_{n\geq q} u_n$ est divergent.

Par abus de langage, on pourra cependant noter $\prod_{n=q}^{\infty} u_n = 0$ si $\lim_{m\to\infty} P_m = 0$.

Partie 1

Dans cette partie, on établit une condition nécessaire de convergence et on calcule quelques produits infinis.

1. Montrer que si $\prod_{n\geq q} u_n$ converge, alors les u_n sont tous non nuls et $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$. [S]
2. Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ est divergent, et que $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0$.

   Remarque : cet exemple prouve que la réciproque du résultat vu en 1.1 est fausse. [S]
3. Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ est convergent et de valeur $\frac{1}{2}$. [S]
4. Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 2}\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$ est convergent et de valeur $\frac{1}{3}$. [S]
5. Montrer que le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ est convergent et de valeur 1. [S]

Partie 2

Dans cette partie, on étudie les produits infinis de réels strictement positifs.

On note $(u_n)_{n\geq q}$ une suite de $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Prouver que le produit infini $\prod_{n\geq q} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ la série $\sum_{n\geq q} \ln u_n$ converge.

   Préciser alors la relation entre les valeurs $\prod_{n=q}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=q}^{\infty} \ln u_n$. [S]

2. Dans cette question, on suppose que les u_n sont tous dans $]0,1]$ ou tous dans $[1,+\infty[$.
   Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq q} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ la série $\sum_{n\geq q}(u_n-1)$ converge.
   Indication : on commencera par supposer que la suite $(u_n)_{n\geq q}$ ne converge pas vers 1. [S]
3. Dans cette question uniquement, on pose $u_n = 1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{2n}$ pour $n\geq 1$.
   Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}(u_n-1)$ diverge mais que le produit infini $\prod_{n\geq 1} u_n$ converge.
   Remarque : cet exemple montre l'importance des hypothèses de la question 2.2. [S]
4. Dans cette question, on suppose que la série $\sum_{n\geq q}(u_n-1)$ est convergente.
   Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq q}^{\infty} u_n$ a même nature que la série $\sum_{n\geq q}(u_n-1)^2$.
   Indication : on pourra noter que $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$ et développer $\ln(1+v_n)$ avec $v_n = u_n - 1$. [S]
5. Déduire de ce qui précède un exemple où $\sum_{n\geq q}(u_n-1)$ converge mais où $\prod_{n\geq q} u_n$ diverge. [S]

Partie 3

On désigne par $(u_n)_{n\geq q}$ une suite de $\mathbb{C}$, et on suppose que tous les u_n sont non nuls.

On suppose que la série $\sum_{n\geq q}|u_n-1|$ est convergente et donc que $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

L'objectif de cette partie est de montrer que le produit infini $\prod_{n\geq q} u_n$ est convergent.

On pose $v_n = u_n - 1$, $P_n = \prod_{k=q}^{n} u_k$, et $Q_n = \prod_{k=q}^{n}(1+|v_k|)$.

1. Pour tous nombres complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$, montrer que $\left|\prod_{k=1}^{n}(1+z_k)-1\right| \leq \prod_{k=1}^{n}(1+|z_k|)-1$.
   Indication : Raisonnement par récurrence sur n. [S]
2. Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq q}(1+|v_n|)$ est convergent. [S]
3. Montrer que pour tous entiers n et m tels que $n > m \geq q$, on a : $|P_n - P_m| \leq Q_n - Q_m$. [S]
4. Déduire de la question précédente que la suite $(P_n)_{n\geq q}$ est convergente. [S]
5. Il reste à montrer que la limite de la suite $(P_n)_{n\geq q}$ est non nulle.
   (a) Montrer que pour complexe z tel que $|z| < 1$, on a $\Big|\ln|1+z|\Big| \leq -\ln(1-|z|)$. [S]
   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geq q}\ln|u_n|$ est absolument convergente. [S]
   (c) En déduire que la limite de la suite $(P_n)_{n\geq q}$ ne peut pas être nulle. [S]
6. Conclure... [S]

Partie 4

Cette partie est consacrée à l'expression de $\dfrac{\sin t}{t}$ sous la forme d'un produit infini.
Cette expression est dûe à Euler. La première question est indépendante des suivantes.

1. Calcul du produit infini $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{4n^2}\Big)$
   (a) Justifier la convergence de ce produit infini sans chercher à calculer sa valeur. [S]
   (b) Exprimer le produit partiel $P_m = \displaystyle\prod_{n=1}^{m}\Big(1-\frac{1}{4n^2}\Big)$ à l'aide de factorielles. [S]
   (c) Utiliser la formule de Stirling et en déduire que $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{4n^2}\Big)=\frac{2}{\pi}$. [S]
2. On établit ici une première factorisation de $\sin(2p+1)\theta$. Soit $p\in\mathbb{N}$, et $\theta\in\mathbb{R}$.
   (a) Prouver $\sin(2p+1)\theta = A_p(\sin\theta)$, où $A_p(\mathrm{X}) = (-1)^p\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\mathrm{C}_{2p+1}^{2k+1}\,\mathrm{X}^{2k+1}\,(\mathrm{X}^2-1)^{p-k}$ [S]
   (b) Montrer que A_p est un polynôme de degré $2p+1$, de coefficient dominant $(-4)^p$. [S]
   (c) Montrer que les racines de A_p sont les $x_k=\sin\theta_k$, où $\theta_k=\dfrac{k\pi}{2p+1}$ et $-p\le k\le p$. [S]
   (d) En déduire que $\sin(2p+1)\theta = 4^p\sin\theta\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(\sin^2\theta_k-\sin^2\theta)$. [S]
   (e) En utilisant $\theta\to 0$ montrer que : $\sin(2p+1)\theta=(2p+1)\sin\theta\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\Big(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_k}\Big)$ [S]
3. On établit maintenant une deuxième factorisation de $\sin(2p+1)\theta$.
   Soit p un entier naturel, et θ un réel compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$.
   (a) Montrer $\sin(2p+1)\theta=\sin\theta\,\cos(\theta)^{2p}\,B_p(\tan\theta)$ où B est un polynôme de degré $2p$.
   Indication : ré-utiliser les calculs fait en 4.2.a [S]
   (b) Montrer que les racines de B_p sont les $t_k=\tan\theta_k$ où $\theta_k=\dfrac{k\pi}{2p+1}$ et $0<|k|\le p$. [S]
   (c) En déduire la factorisation : $B_p(\tan\theta)=\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(\tan^2\theta_k-\tan^2\theta)$. [S]
   (d) En faisant tendre θ vers 0, prouver que : $B_p(\tan\theta)=(2p+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\Big(1-\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta_k}\Big)$. [S]
   (e) En déduire la factorisation : $\sin(2p+1)\theta=(2p+1)\sin\theta\,\cos(\theta)^{2p}\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\Big(1-\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta_k}\Big)$. [S]

4. Développement de $\sin t$ en produit infini.

   (a) Montrer que si $0 \le x \le y < \dfrac{\pi}{2}$, alors $\dfrac{\tan x}{\tan y} \le \dfrac{x}{y} \le \dfrac{\sin x}{\sin y}$. [S]

   (b) On rappelle la notation $\theta_k = \dfrac{k\pi}{2p+1}$, avec $k \in \{1, \cdots, p\}$.

   Montrer que si $0 \le \theta < \theta_1$: $\sin(2p+1)\theta \le (2p+1)\sin\theta \displaystyle\prod_{k=1}^{p}\Big(1-\dfrac{\theta^2}{\theta_k^2}\Big) \le \dfrac{\sin(2p+1)\theta}{\cos^{2p}\theta}$. [S]

   (c) On pose maintenant $\theta = \dfrac{t}{2p+1}$ avec $0 \le t < \pi$, et on fait tendre p vers $+\infty$.

   En déduire le résultat suivant, dû à Euler : $\forall t \in]-\pi, \pi[,\quad \dfrac{\sin t}{t} = \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1-\dfrac{t^2}{k^2\pi^2}\Big)$ [S]

5. Retrouver le résultat de la question 4.1. [S]

Corrigé du problème

Partie 1

1. Pour tout $m \geq q$, soit $P_m = \prod_{n=q}^{m} u_n$. Si l'un au moins des u_n était nul, alors la suite $(P_m)_{m\geq q}$ serait stationnaire en 0. Le produit infini $\prod_{n\geq q} u_n$ serait donc divergent.
   Inversement supposons que ce produit infini converge, et soit P sa valeur non nulle.
   Par définition $\lim_{m\to\infty} P_m = P$. Or $u_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}}$ pour $n > q$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} u_n = \dfrac{P}{P} = 1$. [Q]

2. On a : $P_m = \prod_{n=2}^{m}\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big) = \prod_{n=2}^{m}\dfrac{n-1}{n} = \prod_{n=2}^{m}(n-1)\cdot\prod_{n=2}^{m}\dfrac{1}{n} = \prod_{n=1}^{m-1} n\cdot\prod_{n=2}^{m}\dfrac{1}{n} = 1\cdot\dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{m}$
   Donc, quand $m\to\infty$: $\prod_{n=2}^{\infty}\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big) = 0$. Ce produit infini est donc divergent. [Q]

3. Comme précédemment, pour tout entier $m \geq 2$:
$$P_m = \prod_{n=2}^{m}\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big) = \prod_{n=2}^{m}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \prod_{n=2}^{m}(n-1)\cdot\prod_{n=2}^{m}(n+1)\cdot\prod_{n=2}^{m}\frac{1}{n^2}$$
$$= \prod_{n=1}^{m-1} n\cdot\prod_{n=3}^{m+1} n\cdot\prod_{n=2}^{m}\frac{1}{n^2} = 2\cdot m(m+1)\cdot\frac{1}{4}\frac{1}{m^2} = \frac{m+1}{2m} \to \frac{1}{2}$$
   Le produit infini $\prod_{n\geq 2}\Big(1-\dfrac{1}{n^2}\Big)$ est donc convergent, et sa valeur est $\prod_{n=2}^{\infty}\Big(1-\dfrac{1}{n^2}\Big) = \dfrac{1}{2}$. [Q]

4. Pour tout entier $m \geq 2$:
$$P_m = \prod_{n=2}^{m}\Big(1-\frac{2}{n(n+1)}\Big) = \prod_{n=2}^{m}\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$$
$$= \prod_{n=2}^{m}(n-1)\cdot\prod_{n=2}^{m}(n+2)\cdot\prod_{n=2}^{m}\frac{1}{n}\cdot\prod_{n=2}^{m}\frac{1}{n+1} = \prod_{n=1}^{m-1} n\cdot\prod_{n=4}^{m+2} n\cdot\prod_{n=2}^{m}\frac{1}{n}\cdot\prod_{n=3}^{m+1}\frac{1}{n}$$
$$= 6\cdot m(m+1)(m+2)\cdot\frac{1}{6}\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{3}\frac{1}{m(m+1)} = \frac{m+2}{3m} \to \frac{1}{3}$$
   Le produit infini $\prod_{n\geq 2}\Big(1-\dfrac{2}{n(n+1)}\Big)$ est donc convergent, et $\prod_{n=2}^{\infty}\Big(1-\dfrac{2}{n(n+1)}\Big) = \dfrac{1}{3}$. [Q]

5. Posons $u_n = 1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. On a : $u_{2n-1} = 1+\dfrac{1}{2n-1} = \dfrac{2n}{2n-1}$ et $u_{2n} = 1-\dfrac{1}{2n} = \dfrac{2n-1}{2n}$.
   Ainsi $u_{2n-1}u_{2n} = 1$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit, pour tout $m \geq 1$:
$$P_{2m} = \prod_{n=1}^{2m} u_n = \prod_{n=1}^{m}(u_{2n-1}u_{2n}) = 1 \text{ et } P_{2m+1} = P_{2m}\,u_{2m+1} = 1+\frac{1}{2m+1}.$$
   La suite $(P_m)_{m\geq 1}$ converge donc vers 1. Autrement dit $\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\Big) = 1$. [Q]

Partie 2

1. On pose $P_m = \prod_{n=q}^{m} u_n$ et $S_m = \sum_{n=q}^{m} \ln u_n$ pour tout $m \geq q$.

   Par hypothèse, la suite $(P_m)_{m\geq q}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

   Par définition, et pour tout $m \geq q$, on a les égalités : $\begin{cases} S_m = \ln P_m \\ P_m = \exp S_m \end{cases}$

   Sachant que les P_m sont strictement positifs, on a les équivalences suivantes :

   $$\begin{cases} \text{Le produit infini } \prod u_n \text{ est convergent} \\ \Leftrightarrow \text{La suite de terme général } P_m = \exp S_m \text{ est convergente dans } \mathbb{R}^{+*} \\ \Leftrightarrow \text{La suite de terme général } S_m = \ln P_m \text{ est convergente dans } \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \text{La série } \sum \ln u_n \text{ est convergente.} \end{cases}$$

   Le produit infini $\prod_{n\geq q} u_n$ et la série $\sum_{n\geq q} \ln u_n$ sont donc de même nature.

   En cas de convergence, $P_m = \exp S_m$ donne quand $m \to \infty$: $\prod_{n=q}^{\infty} u_n = \exp\Bigl(\sum_{n=q}^{\infty} \ln u_n\Bigr)$.

   [Q]

2. – Supposons que la suite $(u_n)_{n\geq q}$ ne soit pas convergente vers 1.

   Alors le produit infini $\prod_{n\geq q} u_n$ diverge (contraposée du résultat de 1.1).

   Cette même hypothèse implique aussi la divergence (grossière) de la série $\sum_{n\geq q}(u_n - 1)$.

   Dans ce premier cas, $\prod_{n\geq q} u_n$ et $\sum_{n\geq q}(u_n - 1)$ sont donc de même nature.

   – Supposons que la suite $(u_n)_{n\geq q}$ soit convergente vers 1.

   Il en découle que $\ln u_n$ est équivalent à $u_n - 1$ quand n tend vers $+\infty$.
   L'hypothèse sur le placement des u_n signifie que $u_n - 1$ garde un signe constant.

   La série $\sum_{n\geq q}(u_n - 1)$ a donc même nature que $\sum_{n\geq q} \ln u_n$, donc que $\prod_{n\geq q} u_n$.

   Conclusion : Si tous les u_n sont tous dans $]0, 1]$ ou s'ils sont tous ≥ 1, alors le produit infini $\prod_{n\geq q} u_n$ et la série $\sum_{n\geq q}(u_n - 1)$ ont même nature. [Q]

3. – Pour tout $n \geq 1$, $u_n - 1 = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2n}$ est le terme général d'une série divergente.

   En effet $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (critère spécial) et $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{2n}$ diverge (série harmonique.)

   – On effectue un développement aysmptotique de $\ln u_n$ quand $n \to +\infty$:

   $$\ln u_n = \ln\Bigl(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\Bigr) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\Bigl(\frac{1}{n^{3/2}}\Bigr) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\Bigl(\frac{1}{n^{3/2}}\Bigr)$$

Le terme $\ln u_n$ apparait ainsi comme la somme du terme général d'une série alternée convergente et du terme général d'une série absolument convergente (par comparaison avec une série de Riemann.)

On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} \ln u_n$ converge.

D'après la question 2.1, il en est de même du produit infini $\prod_{n\geq 1} u_n$.

Ici $\prod_{n\geq q} u_n$ et $\sum_{n\geq q}(u_n-1)$ sont de natures différentes (hypothèses de 2.2 non vérifiées). [Q]

4. Puisque $\sum_{n\geq q}(u_n-1)$ converge, on a : $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$ (condition nécessaire de convergence).

   Dans ces conditions en posant $v_n = u_n - 1$ on a : $\ln u_n = \ln(1+v_n) = v_n - \dfrac{1}{2}\, v_n^2 + \mathrm{o}(v_n^2)$.

   $\sum_{n\geq q} v_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq q} \ln u_n$ a même nature que $\sum_{n\geq q} w_n$ avec $w_n = -\dfrac{1}{2}\, v_n^2 + \mathrm{o}(v_n^2) \sim -\dfrac{1}{2}\, v_n^2$.

   Mais ce dernier terme a un signe constant : les séries $\sum_{n\geq q} \ln u_n$ et $\sum_{n\geq q} v_n^2$ ont même nature.

   Ainsi $\prod_{n\geq q}^{\infty} u_n$ a même nature que $\sum_{n\geq q} \ln u_n$ donc que $\sum_{n\geq q} v_n^2$ c'est-à-dire que $\sum_{n\geq q}(u_n-1)^2$.
   [Q]

5. Il suffit de choisir $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$.

   D'une part $\sum_{n\geq q}(u_n-1)$ converge (critère spécial).

   D'autre part $(u_n-1)^2 = \dfrac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n\geq q}(u_n-1)^2$ diverge. Donc $\prod_{n\geq q} u_n$ diverge. [Q]

Partie 3

1. Pour alléger les notations, posons $\delta_n = \prod_{k=1}^{n}(1+z_k)$ et $\Delta_n = \prod_{k=1}^{n}(1+|z_k|)$ pour tout $n \geq 1$.

   Il s'agit de montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $|\delta_n - 1| \leq \Delta_n - 1$.
   Le résultat est évident si $n = 1$ car $|\delta_1 - 1| = \Delta_n - 1 = |z_1|$.
   On suppose donc que le résultat est établi au rang $n-1$, où $n \geq 2$ est fixé.
   On se donne alors n nombres complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

   On a : $|\delta_n - 1| = |(1+z_n)\delta_{n-1} - 1| = |(1+z_n)(\delta_{n-1}-1) + z_n| \leq |1+z_n|\, |\delta_{n-1}-1| + |z_n|$

   On en déduit, en appliquant l'hypothèse de récurrence :

   $$|\delta_n - 1| \leq (1+|z_n|)\, |\delta_{n-1}-1| + |z_n| \leq (1+|z_n|)(\Delta_{n-1}-1) + |z_n| = (1+|z_n|)\Delta_{n-1} - 1 = \Delta_n - 1$$

   On a ainsi démontré la propriété au rang n, ce qui achève la récurrence. [Q]

2. Les $w_n = 1 + |v_n|$ étant tous supérieurs ou égaux à 1, on peut utiliser la question 2.2 :
Le produit infini $\prod_{n\geq q} w_n$ a donc même nature que $\sum_{n\geq q}(w_n - 1)$, c'est-à-dire que $\sum_{n\geq q}|v_n|$.
Par hypothèse cette série converge. Le produit infini $\prod_{n\geq q}(1+|v_n|)$ converge donc aussi. [Q]

3. Soient n et m deux entiers tels que $n > m \geq q$.
On a $P_n - P_m = \prod_{k=q}^{n} u_k - \prod_{k=q}^{m} u_k = \prod_{k=q}^{m} u_k \Big(\prod_{k=m+1}^{n} u_k - 1\Big) = \prod_{k=q}^{m}(1+v_k)\Big(\prod_{k=m+1}^{n}(1+v_k) - 1\Big)$
D'abord on majore le module de $\prod_{k=q}^{m}(1+v_k)$ par $\prod_{k=q}^{m}(1+|v_k|)$.
Puis on majore le module $\Big|\prod_{k=m+1}^{n}(1+v_k) - 1\Big|$ par $\prod_{k=m+1}^{n}(1+|v_k|) - 1$ (utiliser 3.1)
On en déduit : $|P_n - P_m| \leq \prod_{k=q}^{m}(1+|v_k|)\Big(\prod_{k=m+1}^{n}(1+|v_k|) - 1\Big)$
C'est-à-dire : $|P_n - P_m| \leq \prod_{k=q}^{n}(1+|v_k|) - \prod_{k=q}^{m}(1+|v_k|)$, c'est-à-dire : $|P_n - P_m| \leq Q_n - Q_m$.
[Q]

4. On sait que le produit infini $\prod_{n\geq q}(1+|v_k|)$ est convergent.
Cela signifie que la suite $(Q_n)_{n\geq q}$ (positive croissante) est convergente (de limite > 0.)
Cette suite est donc de Cauchy.
En particulier : $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n > m \geq N \Rightarrow |Q_n - Q_m| \leq \varepsilon$.
Mais la question précédente montre qu'alors $n > m \geq N \Rightarrow |P_n - P_m| \leq \varepsilon$.
La suite $(P_n)_{n\geq q}$ est donc également de Cauchy ce qui prouve qu'elle est convergente (dans $\mathbb{C}$, il y a identité entre suites convergentes et suites de Cauchy.) [Q]

5. (a) Il s'agit de montrer $\ln|1+z| \leq -\ln(1-|z|)$ et $-\ln|1+z| \leq -\ln(1-|z|)$.
   - La première inégalité équivaut à $|1+z|\,(1-|z|) \leq 1$:
     Cette inégalité résulte de $|1+z|\,(1-|z|) \leq (1+|z|)(1-|z|) = 1 - |z|^2 \leq 1$.
   - La deuxième inégalité équivaut à $1 - |z| \leq |1+z|$:
     C'est une conséquence classique de l'inégalité triangulaire.

   [Q]

   (b) Avec la notation $u_n = 1 + v_n$, on sait que la série $\sum_{n\geq q}|v_n|$ est convergente.
   En particulier $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ et donc $|v_n| < 1$ à partir d'un certain rang n_0.
   On en déduit $0 \leq |\ln|u_n|| = |\ln|1+v_n|| \leq -\ln(1-|v_n|)$ pour $n \geq n_0$.
   Or $-\ln(1-|v_n|) \sim |v_n|$ quand $n \to \infty$.

On en déduit la convergence de $\sum_{n\geq n_0} -\ln(1-|v_n|)$ puis celle de la série $\sum_{n\geq q}|\ln|u_n||$.

[Q]

(c) Supposons par l'absurde que la suite $(P_n)_{n\geq q}$ converge vers 0.

Alors il en est de même de la suite de terme général $|P_n|$.

Ainsi le produit infini $\prod_{n\geq q}|u_n|$ est divergent.

Il en découle (en utilisant 2.1) que la série $\sum_{n\geq 0}\ln|u_n|$ diverge, ce qui contredit 3.5.b.

[Q]

6. On déduit de ce qui précède que le produit infini $\prod_{n\geq q} u_n$ est convergent.

   On a ainsi démontré le résultat suivant :

   Soit (u_n) une suite de nombres complexes non nuls.
   Si la série $\sum_{n\geq q}|u_n-1|$ est convergente, alors le produit infini $\prod_{n\geq q} u_n$ est convergent. [Q]

Partie 4

1. (a) On peut utiliser la question 2.2 car u_n est toujours dans $]0,1[$.

   Le produit infini a donc la même nature que $\sum_{n\geq 1}(u_n-1)=\sum_{n=1}-\dfrac{1}{n^2}$, qui converge. [Q]

   (b) Pour tout entier $m\geq 1$:

$$\begin{aligned}P_m &= \prod_{n=1}\Big(1-\frac{1}{4n^2}\Big)=\prod_{n=1}^{m}\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}=\prod_{n=1}^{m}\frac{(2n-1)2n}{(2n)^2}\prod_{n=1}^{m}\frac{2n(2n+1)}{(2n)^2}\\ &=\frac{(2n)!}{(2^n\,n!)^2}\,\frac{(2n+1)!}{(2^n\,n!)^2}=(2n+1)\frac{(2n)!^2}{4^{2n}\,n!^4}.\end{aligned}$$

[Q]

   (c) La formule de Stirling $n!\sim n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$ donne aussi $(2n)!\sim(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{4\pi n}$.

   On en déduit : $P_n\sim 2n\dfrac{(2n)^{4n}\mathrm{e}^{-4n}4\pi n}{4^{2n}n^{4n}\mathrm{e}^{-4n}(2\pi n)^2}=\dfrac{2}{\pi}$. Conclusion : $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{4n^2}\Big)=\frac{2}{\pi}$.

   [Q]

2. (a) On applique l'égalité de Moivre :

$$\mathrm{e}^{i(2p+1)\theta}=(\mathrm{e}^{i\theta})^{2p+1}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{2p+1}=\sum_{k=0}^{2p+1}\mathrm{C}_{2p+1}^{k}\,i^k\,\sin(\theta)^k\,\cos(\theta)^{2p+1-k}$$

On prend la partie imaginaire (dans la somme on ne garde que les indices k impairs.)

$$\begin{aligned}\sin(2p+1)\theta &= \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_{2p+1}^{2k+1}\,(-1)^k\,\sin(\theta)^{2k+1}\,\cos(\theta)^{2p-2k}\\ &= \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_{2p+1}^{2k+1}\,(-1)^k\,\sin(\theta)^{2k+1}\,(1-\sin^2\theta)^{p-k}\\ &= (-1)^p\sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_{2p+1}^{2k+1}\,\sin(\theta)^{2k+1}\,(\sin^2\theta-1)^{p-k}.\end{aligned}$$

On constate que $\sin(2p+1)\theta = A_p(\sin\theta)$, où :

$A_p(\mathrm{X}) = (-1)^p\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_{2p+1}^{2k+1}\,\mathrm{X}^{2k+1}\,(\mathrm{X}^2-1)^{p-k}$. [Q]

(b) Le polynôme A_p est effectivement de degré $2p+1$, comme tous les $\mathrm{X}^{2k+1}\,(\mathrm{X}^2-1)^{p-k}$

Son coefficient dominant est $\lambda = (-1)^p\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\mathrm{C}_{2p+1}^{2k+1}$.

Or $2^{2p+1} = (1+1)^{2p+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p+1}\mathrm{C}_{2p+1}^{k}$ et $0 = (1-1)^{2p+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^k\,\mathrm{C}_{2p+1}^{k}$.

Par demi-différence, il vient : $2^{2p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}\mathrm{C}_{2p+1}^{2k+1}$.

Le coefficient dominant du polynôme A_p est donc $(-1)^p 2^{2p} = (-4)^p$. [Q]

(c) Comme le suggère l'énoncé, on va chercher les racines x de A_p dans $]-1,1[$.

Posons $x = \sin\theta$, avec $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ (et donc $-1 < x < 1$).

$A_p(x) = 0 \Leftrightarrow A_p(\sin\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin(2p+1)\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \dfrac{k\pi}{2p+1}$ avec $-p \le k \le p$.

Cette dernière condition exprime que $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

Si on pose $\theta_k = \dfrac{k\pi}{2n+1}$, on a ainsi obtenu les $2p+1$ racines $x_k = \sin\theta_k$.

Ces racines sont dans $]-1,1[$, et elles sont distinctes deux à deux. [Q]

(d) Les deux questions précédentes donnent la factorisation de A_p :

$A_p(\mathrm{X}) = (-4)^p\displaystyle\prod_{k=-p}^{p}(X-x_k)$, ou encore $\sin(2p+1)\theta = (-4)^p\displaystyle\prod_{k=-p}^{p}(\sin\theta-\sin\theta_k)$.

Dans ce produit, on "sort" le facteur $\sin\theta$, qui correspond à $k=0$, et on note que les $\sin\theta_k$ qui correspondent à deux valeurs opposées de k sont eux aussi opposés.

On en déduit : $\sin(2p+1)\theta = (-4)^p\sin\theta\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(\sin\theta-\sin\theta_k)\prod_{k=1}^{p}(\sin\theta+\sin\theta_k)$.

Et finalement : $\sin(2p+1)\theta = 4^p \sin\theta \prod_{k=1}^{p}(\sin^2\theta_k - \sin^2\theta)$. [Q]

(e) Le résultat précédent s'écrit : (1) $\dfrac{\sin(2p+1)\theta}{\sin\theta} = 4^p \prod_{k=1}^{p}(\sin^2\theta_k - \sin^2\theta)$.

Quand on fait tendre θ vers 0, on trouve : (2) $2p+1 = 4^p \prod_{k=1}^{p} \sin^2\theta_k$.

En divisant terme à terme, on trouve : $\dfrac{\sin(2p+1)\theta}{2p+1} = \sin\theta \prod_{k=1}^{p}\Bigl(1 - \dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_k}\Bigr)$. [Q]

3. (a) On trouve :

$$\begin{aligned}\sin(2p+1)\theta &= \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_{2p+1}^{2k+1}\,(-1)^k\,\sin(\theta)^{2k+1}\,\cos(\theta)^{2p-2k}\\ &= \sin\theta\,\cos(\theta)^{2p} \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_{2p+1}^{2k+1}\,(-1)^k\,\tan(\theta)^{2k}.\end{aligned}$$

Ainsi $\sin(2p+1)\theta = \sin\theta\cos(\theta)^{2p} B_p(\tan\theta)$ avec $B(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_{2p+1}^{2k+1}\,(-1)^k\,\mathrm{X}^{2k}$.

B est effectivement un polynôme de degré $2p$, et son coefficient dominant est $(-1)^p$. [Q]

(b) On cherche des racines de B_p sous la forme $t = \tan\theta$, $0 < |\theta| < \dfrac{\pi}{2}$.

Compte tenu de $\sin(2p+1)\theta = \sin\theta\,\cos(\theta)^{2p}\,B_p(\tan\theta)$ et de la condition sur θ :

$B_p(\tan\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin(2p+1)\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \dfrac{k\pi}{2p+1}$ avec $0 < |k| \le p$.

Les $t_k = \tan\theta_k$ sont distincts deux à deux. On ainsi trouvé toutes les racines de B_p. [Q]

(c) On connait les racines de B_p et ont sait que son coefficient dominant est $(-1)^p$.

On en déduit $B_p(\mathrm{X}) = (-1)^p \prod_{k=-p,\,k\neq 0}^{k=p} (X - \tan(\theta_k))$.

Dans ce produit on peut regrouper $\tan(\theta_k)$ et $\tan(\theta_{-k})$ qui sont opposées.

On en déduit : $B_p(\mathrm{X}) = (-1)^p \prod_{k=1}^{p}(X^2 - \tan^2\theta_k) = \prod_{k=1}^{p}(\tan^2\theta_k - \mathrm{X}^2)$.

Le résultat en découle en remplaçant X par $\tan\theta$. [Q]

(d) On observe que le coefficient constant du polynôme B_p est $2p+1$.

Quand $\theta \to 0$ dans la factorisation précédente, il vient : $\prod_{k=1}^{p} \tan^2\theta_k = B_p(0) = 2p+1$.

Autrement dit :

$$\begin{aligned} B_p(\tan\theta) &= \prod_{k=1}^{p}(\tan^2\theta_k - \tan^2\theta) = \prod_{k=1}^{p}\tan^2\theta_k \prod_{k=1}^{p}\Bigl(1-\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta_k}\Bigr) \\ &= (2p+1)\prod_{k=1}^{p}\Bigl(1-\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta_k}\Bigr) \end{aligned} .$$ [Q]

(e) C'est une conséquence immédiate de :
- La relation $\sin(2p+1)\theta = \sin\theta\,\cos(\theta)^{2p}\,B_p(\tan\theta)$
- La factorisation de $B_p(\tan\theta)$.

[Q]

4. (a) C'est évident si $x=0$.

Pour $0<x\le y<\dfrac{\pi}{2}$ on doit montrer $\dfrac{\sin x}{x}\ge\dfrac{\sin y}{y}$ et $\dfrac{\tan x}{x}\le\dfrac{\tan y}{y}$.

Il faut montrer que $\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ est décroissante et que $\psi(x)=\dfrac{\tan x}{x}$ est croissante.

Or $\varphi(x)$ est la pente de la corde joignant $(0,0)$ à $(x,\sin x)$ et $\psi(x)$ est la pente de la corde joignant $(0,0)$ à $(x,\tan x)$. La concavité de $x\mapsto\sin x$ et la convexité de $x\mapsto\tan x$ sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ montrent que φ est décroissante et que ψ est croissante. [Q]

(b) Par hypothèse, on a $0\le\theta<\theta_k<\dfrac{\pi}{2}$ pour tout k de $\{1,\cdots,p\}$.

On applique donc ce qui précède : $\forall k\in\{1,\cdots,p\},\ 0\le\dfrac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta_k}\le\dfrac{\theta^2}{\theta_k^2}\le\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_k}<1$

Donc $0<\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\Bigl(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_k}\Bigr)\le\prod_{k=1}^{p}\Bigl(1-\frac{\theta^2}{\theta_k^2}\Bigr)\le\prod_{k=1}^{p}\Bigl(1-\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta_k}\Bigr)$ après produit.

On multiplie terme à terme par la quantitté $(2p+1)\sin\theta$ (qui est ≥ 0).
On trouve :

$$\begin{aligned} (2p+1)\sin\theta\prod_{k=1}^{p}\Bigl(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_k}\Bigr) &\le (2p+1)\sin\theta\prod_{k=1}^{p}\Bigl(1-\frac{\theta^2}{\theta_k^2}\Bigr) \\ &\le (2p+1)\sin\theta\prod_{k=1}^{p}\Bigl(1-\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta_k}\Bigr) \end{aligned}$$

C'est-à-dire, en utilisant 4.2.e et 4.3.e :

$$\sin(2p+1)\theta\le(2p+1)\sin\theta\prod_{k=1}^{p}\Bigl(1-\frac{\theta^2}{\theta_k^2}\Bigr)\le\frac{\sin(2p+1)\theta}{\cos^{2p}\theta}.$$

[Q]

(c) Avec cette nouvelle notation, on a bien $0\le\theta\le\theta_1$.

On peut donc appliquer la question précédente, en remarquant que $\dfrac{\theta}{\theta_k}=\dfrac{t}{k\pi}$.

On obtient : $\sin t \le (2p+1)\sin\dfrac{t}{2p+1}\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\Bigl(1-\dfrac{t^2}{k^2\pi^2}\Bigr) \le \dfrac{\sin t}{\cos^{2p}\frac{t}{2p+1}}$

D'une part : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}(2p+1)\sin\dfrac{t}{2p+1} = t$.

D'autre part, quand p tend vers $+\infty$:

$$\ln\cos^{2p}\frac{t}{2p+1} = 2p\,\ln\cos\frac{t}{2p+1} \sim 2p\Bigl(\cos\frac{t}{2p+1}-1\Bigr) \sim \frac{-2p\,t^2}{2(2p+1)^2} \to 0$$

On en déduit $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\cos^{2p}\dfrac{t}{2p+1} = 1$.

Le passage à la limite dans l'encadrement donne donc :

$$\sin t \le t\prod_{k=1}^{\infty}\Bigl(1-\frac{t^2}{k^2\pi^2}\Bigr) \le \sin t$$

Ainsi cet encadrement se réduit à une égalité, valable à priori pour pour $0 \le t < \pi$.

Par parité, le résultat est encore valable si $-\pi < t \le 0$.

On a donc prouvé le résultat suivant : $\forall t \in]-\pi,\pi[,\quad \dfrac{\sin t}{t} = \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\Bigl(1-\dfrac{t^2}{k^2\pi^2}\Bigr)$.

(Pour $t=0$, les deux expressions sont égales à 1.) [Q]

5. On pose $t=\dfrac{\pi}{2}$ et on retrouve : $\dfrac{\sin t}{t} = \dfrac{2}{\pi} = \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\Bigl(1-\dfrac{t^2}{k^2\pi^2}\Bigr) = \prod_{k=1}^{\infty}\Bigl(1-\dfrac{1}{4k^2}\Bigr)$.

   Remarque : on peut bien sûr donner d'autres valeurs à t.

   Par exemple, Avec $t=\dfrac{\pi}{6}$: $\dfrac{\sin t}{t} = \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\Bigl(1-\dfrac{t^2}{k^2\pi^2}\Bigr) \Rightarrow \prod_{k=1}^{\infty}\Bigl(1-\dfrac{1}{36k^2}\Bigr) = \dfrac{3}{\pi}$. [Q]