Formule de Stirling “améliorée”

L’objet de ce problème est de prouver la formule $n! = n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1+\dfrac{1}{12n}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

1. On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que la suite (I_n) est strictement décroissante et minorée. [S]
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $nI_n = (n-1)I_{n-2}$. [S]
   (c) En déduire I_{2n} et I_{2n+1} à l’aide de factorielles. [S]
   (d) Prouver que $I_{n+1} \sim I_n$ quand $n \to \infty$. [S]
   (e) En déduire la formule de Wallis : $\pi = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}\,(n!)^4}{n\cdot(2n)!^2}$. [S]
2. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = (n+\dfrac{1}{2})\ln n - n - \ln(n!)$.
   (a) Montrer que $S_{n+1} - S_n \sim \dfrac{1}{12n^2}$. [S]
   (b) En déduire que la suite (S_n) converge vers un réel λ. [S]
   (c) Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, $n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{n} \sim \mathrm{e}^{\lambda}\,n!$. [S]
3. A l’aide de la question 1d), montrer que $\lambda = -\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.
   En déduire la formule de Stirling : $n! \sim n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{2\pi n}$. [S]
4. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs, convergentes.
   Pour tout entier n, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.
   (a) On suppose que $u_n \sim v_n$. Montrer que $R_n \sim T_n$. [S]
   (b) En déduire que si $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$, alors $R_n \sim \dfrac{1}{n}$. [S]
   (c) Appliquer ce qui précède à $u_n = 12(S_n - S_{n-1})$, et montrer que $\lambda - S_n \sim \dfrac{1}{12n}$. [S]
   (d) En déduire finalement que $n! = n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}\Big(1+\dfrac{1}{12n}+\mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)$. [S]

Corrigé du problème

1. (a) Pour tout t de $]0,\pi/2[$, et tout n de $\mathbb{N}$: $0<\sin t<1 \Rightarrow 0<(\sin t)^{n+1}<(\sin t)^n$.
On en déduit par intégration de 0 à $\pi/2$: $\forall n\in\mathbb{N}, 0<I_{n+1}<I_n$.
La suite (I_n) est donc strictement décroissante et minorée par 0. [Q]

(b) On procède à une intégration par parties, pour tout $n\geq 2$:
$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin t\,\sin^{n-1}t\,\mathrm{d}t=\underbrace{\Bigl[-\cos t\,\sin^{n-1}t\Bigr]_0^{\pi/2}}_{=0}+(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,\sin^{n-2}t\,\mathrm{d}t.$$
On en déduit $I_n=(n-1)\displaystyle\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 t)\,\sin^{n-2}t\,\mathrm{d}t=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$.
Il en découle effectivement la relation : $\forall n\geq 2, nI_n=(n-1)I_{n-2}$. [Q]

(c) – Calcul de I_{2n} :
La relation précédente donne $2nI_{2n}=(2n-1)I_{2(n-1)}$.
On en déduit $I_{2n}=\dfrac{2n-1}{2n}\,\dfrac{2n-3}{2(n-1)}\cdots\dfrac{3}{4}\,\dfrac{1}{2}\,I_0$. Or $I_0=\dfrac{\pi}{2}$.
Donc $I_{2n}=\dfrac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n n!}\,\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$ (valable si $n=0$).
– Calcul de I_{2n+1} :
La relation de (1-b) donne $I_{2n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}I_{2(n-1)+1}=\dfrac{2n}{2n+1}\,\dfrac{2(n-1)}{2n-1}\cdots\dfrac{4}{5}\,\dfrac{2}{3}\,I_1$.
Or $I_1=1$. Donc $I_{2n+1}=\dfrac{2^n n!}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}=\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ (valable si $n=0$).
[Q]

(d) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $0<I_{n+2}<I_{n+1}<I_n$ et donc $0<\dfrac{I_{n+2}}{I_n}<\dfrac{I_{n+1}}{I_n}<1$.
Or $\dfrac{I_{n+2}}{I_n}=\dfrac{n+1}{n+2}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.
On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=1$, c'est-à-dire $I_{n+1}\sim I_n$. [Q]

(e) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=\dfrac{2^{4n}\,(n!)^4}{(2n+1)\,(2n)!^2}\,\dfrac{2}{\pi}\sim\dfrac{2^{4n}\,(n!)^4}{n\,(2n)!^2}\,\dfrac{1}{\pi}$.
Puisque $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=1$, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}\,(n!)^4}{n\,(2n)!^2}=\pi$. [Q]

2. (a) Pour tout $n\geq 1$,
$$\begin{aligned}S_{n+1}-S_n&=(n+\frac{3}{2})\ln(n+1)-n-1-\ln(n+1)!-(n+\frac{1}{2})\ln n+n+\ln n!\\&=(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})-1=\Bigl(n+\frac{1}{2}\Bigr)\Bigl(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^3}+\mathrm{o}\Bigl(\frac{1}{n^3}\Bigr)\Bigr)-1\\&=\frac{1}{12n^2}+\mathrm{o}\Bigl(\frac{1}{n^2}\Bigr)\end{aligned}$$
On a donc $S_{n+1}-S_n\sim\dfrac{1}{12n^2}$. [Q]

(b) On sait que la série $\sum(S_{n+1}-S_n)$ a la même nature que la suite (S_n).
Puisque la série $\sum(S_{n+1}-S_n)$ est convergente (par comparaison avec une série de Riemann), il en est de même de la suite (S_n). On pose $\lim\limits_{n\to\infty} = \lambda \in \mathbb{R}$. [Q]

(c) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \ln\Big(n^{n+1/2}\,\mathrm{e}^{-n}\,\dfrac{1}{n!}\Big) = \ln\Big(\dfrac{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{n}}{n!}\Big)$.

D'après ce qui précède : $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!} = \mathrm{e}^{\lambda}$ et donc $n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n} \sim \mathrm{e}^{\lambda}\,n!$. [Q]

3. L'égalité précédente donne $n! \sim \mathrm{e}^{-\lambda}\,n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{n}$ et donc aussi $(2n)! \sim \mathrm{e}^{-\lambda}\,(2n)^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n}\,\sqrt{2n}$.
On en déduit $\dfrac{2^{4n}\,n!^4}{n\,(2n)!^2} \sim \dfrac{2^{4n}\,\mathrm{e}^{-4\lambda}\,n^{4n}\,\mathrm{e}^{-4n}\,n^2}{n\,\mathrm{e}^{-2\lambda}\,(2n)^{4n}\,\mathrm{e}^{-4n}(2n)} \sim \dfrac{e^{-2\lambda}}{2}$.
Puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{4n}\,n!^4}{n\,(2n)!^2} = \pi$, on trouve $\dfrac{e^{-2\lambda}}{2} = \pi$ et donc $\lambda = -\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.
Puisque $\mathrm{e}^{-\lambda} = \sqrt{2\pi}$, le résultat $n! \sim \mathrm{e}^{-\lambda}\,n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}$ devient $n! \sim n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{2\pi n}$. [Q]

4. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$.
Il existe donc un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - v_n| \leq \varepsilon v_n$.
Ainsi, pour tout $n \geq n_0$:

$$|R_n - T_n| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty}(u_n - v_n)\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}|u_n - v_n| \leq \varepsilon\sum_{k=n+1}^{\infty} v_n = \varepsilon T_n.$$

Ce résultat signifie que $R_n - T_n = \mathrm{o}(T_n)$, c'est-à-dire $R_n \sim T_n$. [Q]

(b) Supposons $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$. Alors $u_n \sim \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.

Ainsi : $R_n \sim \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\Big) = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\Big) = \lim_{m\to\infty}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\Big) = \frac{1}{n}$.
[Q]

(c) On a bien $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$. On en déduit $R_n \sim \dfrac{1}{n}$.

$$\text{Mais : } R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} 12(S_k - S_{k-1}) = 12\lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m}(S_k - S_{k-1})$$
$$= 12\lim_{m\to\infty}(S_m - S_n) = 12(\lambda - S_n).$$

Ainsi $12(\lambda - S_n) \sim \dfrac{1}{n}$ et donc $\lambda - S_n \sim \dfrac{1}{12n}$. [Q]

(d) On a $\lambda - S_n = \ln\Big(\dfrac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{2\pi n}}\Big) = \dfrac{1}{12n} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$

On en déduit $\dfrac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{2\pi n}} = \exp\Big(\dfrac{1}{12n} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big) = 1 + \dfrac{1}{12n} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

Autrement dit : $n! = n^n\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{2\pi n}\,\Big(1 + \dfrac{1}{12n} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)$ [Q]