RAPPELS ET COMPLEMENTS D'ALGEBRE LINEAIRE

Dans ce cours, $\mathbb{k}$ *est un corps commutatif (*$\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{k} = \mathbb{C}$), E *est un* $\mathbb{k}$*-espace vectoriel*, $\mathcal{L}(E)$ *est l'ensemble des endomorphismes de* E, $M_n(\mathbb{k})$ *est l'ensemble des matrices carrées d'ordre* n *à coefficients dans* $\mathbb{k}$ *et* $M_{m,n}(\mathbb{k})$ *est l'ensemble des matrices à coefficients dans* $\mathbb{k}$ *de format* (m,n) *c.à.d de* m *lignes et* n *colonnes.*

Dans le présent chapitre, nous rappelons quelques notions sur les espaces vectoriels et les applications linéaires étudiées en première année de licence, et nous en donnons quelques compléments utiles à une bonne compréhension de ce cours. Nous ne donnerons que les démonstrations des compléments, les résultats rappelés étant supposés démontrés en première année.

1 Base - Dimension

1.1 Combinaison linéaire

Définition 1.1: *Soient* $u_1, u_2, ..., u_n$ *des éléments de* E. *On appelle combinaison linéaire de* $u_1, u_2, ..., u_n$ *tout vecteur* w *de* E *de la forme*

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n \text{ avec } \alpha_i \in \mathbb{k}, \forall 1 \leq i \leq n.$$

Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ *une famille infinie d'éléménts de* E. *On appelle combinaison linéaire d'éléments de* $\mathcal{F}$ *toute combinaison linéaire d'une partie finie non vide de* $\mathcal{F}$.

Sous espace vectoriel engendré

Proposition 1.1 et définition: *Soit* $\mathcal{F}$ *une famille non vide d'éléments de* E. *L'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de* $\mathcal{F}$ *est un sous espace vectoriel de* E *appelé le sous espace vectoriel de* E *engendré par* $\mathcal{F}$ *et noté* $Vect(\mathcal{F})$ *ou* $< \mathcal{F} >$.

1.1.1 Famille génératrice, famille libre

Définitions 1.2

Soit $\mathcal{F}$ une partie non vide d'éléments de E.

Famille génératrice

$\mathcal{F}$ est dite une famille génératrice de E ou un système générateur de E si on a $E = Vect(\mathcal{F})$ c.à.d si tout vecteur de E est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$.

Famille libre

- Si $\mathcal{F}$ est finie avec $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, $\mathcal{F}$ est dite libre si, $\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \Bbbk$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, c.à.d si une combinaison linéaire nulle d'éléments de $\mathcal{F}$ s'obtient uniquement avec des coefficients touts nuls;
- Si $\mathcal{F}$ est infinie, $\mathcal{F}$ est dite libre si toute partie finie de $\mathcal{F}$ est libre.

Proposition 1.2: *Soit $\mathcal{F}$ une famille non vide d'éléments de E.*

Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E, alors toute partie de E contenant $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E;

Si $\mathcal{F}$ est une famille libre, alors toute sous famille non vide de $\mathcal{F}$ est une famille libre.

Théorème 1.1: Soit $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ $(n \geq 2)$, une famille de vecteurs de E; on suppose que la famille $(u_1, u_2, ..., u_{n-1})$ est libre.

Alors $\mathcal{F}$ est une famille libre si et seulement si $u_n \notin Vect(u_1, u_2, ..., u_{n-1})$.

<u>Preuve</u>

$\Longleftarrow$: Supposons que $u_n \in Vect(u_1, u_2, ..., u_{n-1})$; alors u_n est une combinaison linéaire de $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$ et alors $\mathcal{F}$ n'est pas une famille libre, d'où le résultat par contraposition.

$\Longrightarrow$: Supposons que $u_n \notin Vect(u_1, u_2, ..., u_{n-1})$ et soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \Bbbk$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0_E$ (1). Si on avait $\alpha_n \neq 0$, alors on aurait $u_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_n} u_i$ ce qui contredit l'hypothèse $u_n \notin Vect(u_1, u_2, ..., u_{n-1})$, donc on a $\alpha_n = 0$ d'où (1) $\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i = 0_E$; mais comme par hypothèse la famille $(u_1, u_2, ..., u_{n-1})$ est libre, alors on a $\alpha_i = 0$, pour $1 \leq i \leq n-1$; En somme, on a montré que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0_E \Longrightarrow \alpha_i = 0$, $\forall 1 \leq i \leq n$, donc $\mathcal{F}$ est une famille libre.

Exemple 1.1: Montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ de polynômes non nuls de degrés distincts est libre.

Soit $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ une sous famille finie de $\mathcal{F}$ rangée de sorte que $\deg P_1 < \deg P_2 < ... < \deg P_n$. Montrons de proche en proche que $\forall 1 \leq k \leq n$, $\{P_1, P_2, ..., P_k\}$ est une famille libre. Pour $k = 1$, P_1 étant non nul, $\{P_1\}$ est libre. Soit $2 \leq k \leq n$; supposons l'assertion verifiée au rang $k-1$ c.à.d que $\{P_1, P_2, ..., P_{k-1}\}$ est une famille libre Tous les polynômes $P_1, P_2, ..., P_{k-1}$ sont de degré $\leq \deg P_{k-1}$. Donc si on pose $r = \deg P_{k-1}$, alors $Vect(P_1, P_2, ..., P_{k-1}) \subset \Bbbk_r[X]$. Or on a $\deg P_k > r$ donc $P_k \notin \Bbbk_r[X]$. d'où $P_k \notin Vect(P_1, P_2, ..., P_{k-1})$. Alors d'après le théorème 1, $\{P_1, P_2, ..., P_k\}$ est une famille libre. Par suite la famille $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ est libre.d'où le résultat.

1.2 Base

Définition 1.3: *une base de E est une famille libre et génératrice de E.*

Théorème 1.2: *Soit B une famille d'éléments de E. Les conditions suivantes sont équivalentes (les CSSE):*

i) B est une base de E;

ii) B est une famille génératrice minimale de E; (c.à.d si on retire un élément de B, la famille n'est plus génératrice.)

iii) B est une famille libre maximale de E; (c.à.d si on ajoute un élément à B, la famille n'est plus libre).

iv) Tout élément de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'éléméns de B.

Théorème 1.3: *Tout espace vectoriel non nul admet une base.*

Théorème 1.4: *Toute famille libre non maximale de E peut être complétée pour obtenir une base de E.*

De toute famille génératrice non minimale de E on peut extraire une sous famille qui est une base de E.

Base adaptée à un sous espace vectoriel

Définition 1.4: *On suppose E de dimension finie n et soit F un sous espace vectoriel non nul de E de dimension $p < n$. On appelle base de E adaptée à F toute base de E de la forme $B = (u_1, u_2, ..., u_p, u_{p+1}, ..., u_n)$, où $\mathcal{F} = (u_1, u_2, ..., u_p)$ est une base de F.*

Théorème 1.5: *Si E admet une base finie (c.à.d comportant un nombre fini d'éléments) alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.*

1.3 Dimension

Définition 1.5: - S*i E admet une base finie, on appelle dimension de E le nombre d'éléments d'une base quelconque de E, noté* $\dim E$.

- Si E non nul n'admet pas de base fini, on dit que E est de dimension infinie et on écrit $\dim E = +\infty$.

- Si $E = \{0\}$, alors on pose $\dim E = 0$.

Théorème 1.6: *On suppose* $\dim E = n$ *finie et soit B une famille d'éléments de E. Les CSSE:*

i) B est une base de E;

ii) $CardB = n$ et B est une famille libre de E;

iii) $CardB = n$ et B est une famille génératrice de E.

Proposition 1.3: *E étant toujours supposé de dimension finie, soit F un sous espace vectoriel de E.Alors on a:*

$0 \leq \dim F \leq \dim E$.

En outre on a: $\dim F = 0 \iff F = \{0\}$; $\dim F = \dim E \iff F = E$.

1.4 Exemples de bases

1.4.1 Base canonique de $\mathbb{k}^n$

$E = \mathbb{k}^n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

La famille $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ telle que$\forall 1 \leq i \leq n$, $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ...0)$ dont toutes les composantes sont nuls sauf la i-ème qui vaut 1, est une base de E appelée la base canonique de $\mathbb{k}^n$.

On a $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E$, $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Par conséquent, $\qquad \dim \mathbb{k}^n = n$.

1.4.2 Base canonique de $M_{m,n}(\mathbb{k})$

$E = M_{m,n}(\mathbb{k})$, l'ensemble des matrices m lignes n colonnes à coefficients dans $\mathbb{k}$.

$\forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, soit $E_{i,j} = \begin{array}{cc} & C_j \\ L_i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ la matrice de E dont tout les coefficients sont nuls sauf celui situé sur la i-ème et la j-ème colonne qui vaut 1.

Alors $B = (E_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est une base de E appelée la base canonique de $M_{m,n}(\mathbb{k})$.

$\forall A = (a_{ij}) \in E$, on a $A = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} E_{ij}$.

On a donc $\qquad \dim M_{m,n}(\mathbb{k}) = mn$.

1.4.3 Base canonique de $\mathbb{k}_n[X]$

$E = \mathbb{k}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients dans $\mathbb{k}$.

$B = (P_0, P_1, ..., P_n) = (1, X, ..., X^n)$ est une base de E appelée la base canonique de $\mathbb{k}_n[X]$.

$\forall P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n \in E$, on a $P = a_0 + a_1 P_1 + ... + a_n P_n$.

Par conséquent $\qquad \dim \mathbb{k}_n[X] = n + 1.$

1.4.4 Base d'interpolation de Lagrange

Théorème 1.7 (d'interpolation de Lagrange): *Soient* $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$, $n+1$ *éléménts distincts de* $\mathbb{k}$. *Alors* $\forall (b_1, b_2, ..., b_{n+1}) \in \mathbb{k}^{n+1}$, *il existe un unique polynôme* P *de* $\mathbb{k}_n[X]$ *tel que* $P(a_k) = b_k$, *pour* $1 \leq k \leq n+1$.

Plus précisément, ce polynôme s'écrit:

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i \prod_{1 \leq j \leq n+1}^{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

<u>Preuve</u>

On cherche $P \in \mathbb{k}_n[X]$ tel que $P(a_k) = b_k$, *pour* $1 \leq k \leq n+1$. Posons donc $P = \sum_{i=0}^{n} \beta_i X^i$; déterminer P revient à déterminer la suite $(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n)$ .On a $P(a_k) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i a_k^i$; alors l'égalité $P(a_k) = b_k$, *pour* $1 \leq k \leq n+1$ est équivalent au système:

$$(S) \left\{ \begin{array}{c} \beta_0 + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_1^2 + ... + \beta_n a_1^n = b_1 \\ \beta_0 + \beta_1 a_2 + \beta_2 a_2^2 + ... + \beta_n a_2^n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_0 + \beta_1 a_{n+1} + \beta_2 a_{n+1}^2 + ... + \beta_n a_{n+1}^n = b_{n+1} \end{array} \right. \quad \text{qui est un système linéaire}$$

dont la matrice associée est $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$; le déterminant de cette matrice est le déter minant de Van der Monde de la suite $(a_1, a_2, ..., a_{n+1})$; donc $\det A = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i) \neq 0$ car les a_i sont deux à deux distincts.d'où l'existence et l'unicité de la solution $(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n)$ et donc de P.

Enfin, montrons que le polynôme $P = \sum_{i=1}^{n+1} b_i \prod_{1 \leq j \leq n+1}^{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$ vérifie les conditions du théorème: P est de degré $\leq n$ car pour $1 \leq i \leq n+1$, $\prod\limits_{1\leq j\leq n+1}^{j\neq i} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$ est un polynôme de degré n; alors $P(X) \in \mathbb{k}_n[X]$. Maintenant, *pour* $1 \leq k \leq n+1$, $P(a_k) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} b_i \prod\limits_{1\leq j\leq n+1}^{j\neq i} \frac{a_k-a_j}{a_i-a_j}$. Pour $i \neq k$, le terme $\prod\limits_{1\leq j\leq n+1}^{j\neq i} \frac{a_k-a_j}{a_i-a_j}$ est nul car j prend toutes les valeurs de $\overline{1, n+1}$ à l'exeption de i, donc j prendra la valeur k donc le produit $\prod\limits_{1\leq j\leq n+1}^{j\neq i} \frac{a_k-a_j}{a_i-a_j}$ comporte le facteur $a_k - a_k = 0$. Pour $i = k$, le terme $\prod\limits_{1\leq j\leq n+1}^{j\neq i} \frac{a_k-a_j}{a_i-a_j}$ vaut $\prod\limits_{1\leq j\leq n+1}^{j\neq k} \frac{a_k-a_j}{a_k-a_j} = 1$; par suite $\sum\limits_{i=1}^{n+1} b_i \prod\limits_{1\leq j\leq n+1}^{j\neq i} \frac{a_k-a_j}{a_i-a_j}. = b_k$ d'où le résultat.

Corollaire et définition: *Soient* $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$, $n+1$ *éléménts distincts de* $\mathbb{k}$; la famille $\mathcal{L} = (L_1, L_2, ..., L_{n+1})$ définie pour $1 \leq i \leq n+1$ par

$$L_i = \prod_{1\leq j\leq n+1}^{j\neq i} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$$

est une base de $\mathbb{k}_n[X]$ appelée la base d'interpolation de Lagrange associée à la suite $(a_1, a_2, ..., a_{n+1})$.

En outre pour tout polynôme P de $\mathbb{k}_n[X]$, on a:

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n+1} P(a_i)L_i.$$

Preuve

Montrons d'abord le second point du corollaire: Soit $P \in \mathbb{k}_n[X]$; posons pour $1 \leq k \leq n+1$, $b_k = P(a_k)$; alors P vérifie les conditions du théo d'interpolation de Lagrange; d'après le second point de ce théorème, on a $P = \sum\limits_{i=1}^{n+1} b_i \prod\limits_{1\leq j\leq n+1}^{j\neq i} \frac{X-a_j}{a_i-a_j} = \sum\limits_{i=1}^{n+1} P(a_i)L_i$. Ce résultat montre que tout élément de $\mathbb{k}_n[X]$ est une combinaison linéaire de $L_1, L_2, ..., L_{n+1}$; donc $\mathcal{L}$ est une famille génératrice de $\mathbb{k}_n[X]$ et comme $Card(\mathcal{L}) = n+1 = \dim \mathbb{k}_n[X]$, alors $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{k}_n[X]$.

Exemple 1.2: Déterminer la base d'interpolation de Lagrange associée à la suite $(-1, 0, 1)$ et écrire $Q = 2X^2 + 5X + 3$ dans cette base.

En posant $a_1 = -1$; $a_2 = 0$; $a_3 = 1$, on a $L_1 = \frac{X(X-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{X(X-1)}{2}$; on trouve de même: $L_2 = -(X+1)(X-1)$; $L_3 = \frac{X(X+1)}{2}$.

$Q = Q(-1)L_1 + Q(0)L_2 + Q(1)L_3 = 3L_2 + 10L_3.$

1.5 Applications linéaires en dimension finie

Dans ce paragraphe et le suivant, E et E' sont des espaces vectoriels de dimension finie avec $\dim E = n$ *et* $\dim E' = m$.

1.5.1 Noyau, image

Soit $f : E \longrightarrow E'$ linéaire. On a:

$\ker f = \{x \in E, f(x) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de E.

$\operatorname{Im} f = f(E) = \{y \in E', \exists x \in E / f(x) = y\}$ est un sous espace vectoriel de E'.

Proposition 1.4 : *Soit* $f : E \longrightarrow E'$ *linéaire. Alors:*
f *injective* $\Longleftrightarrow \ker f = \{0\}$
f *surjective* $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = E'$.

Proposition 1.5 (détermination d'une application linéaire): *Soit* $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ *une base de* E*. Alors pour tout* n*-uplet* $(v_1, v_2, ..., v_n)$ *d'éléments de* E'*, il existe une unique application linéaire* $f : E \longrightarrow E'$ *telle que* $f(e_i) = v_i$, $\forall 1 \leq i \leq n$.

f *est définie par:* $\forall x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$

Proposition 1.6: *Soit* $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ *une base de* E *et* $f : E \longrightarrow E'$ *linéaire. on pose* $B' = (f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$*. Alors:*

f *est injective (resp surjective, resp bijective) si et seulement si* B' *est une famille libre (resp génératrice, resp une base) de* E'.

<u>Preuve</u>

- Supposons f injective et montrons que B' est une famille libre; soit $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{k}$; alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = 0_{E'} \Longrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = 0_{E'} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0_E$ (car f injectif $\Longrightarrow \ker f = \{0_E\}) \Longrightarrow \alpha_i = 0, \forall 1 \leq i \leq n$ (car B est une base donc une famille libre); donc B' est une famille libre.

Réciproquement, supposons que B' est une famille libre et montrons que f est injective: Pour cela déterminons $\ker f$; soit $v \in \ker f$; ($v \in E$ et B base de E) $\Longrightarrow v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ avec $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{k}$; il s'ensuit $f(v) = f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = 0_{E'}$; comme B' est une famille libre, alors on a $\alpha_i = 0, \forall 1 \leq i \leq n$, d'où $v = 0_E$, par suite on a $\ker f = \{0_E\}$ d'où f est injective.

- Supposons f surjective et montrons que B' est une famille génératrice de E' : soit $w \in E'$; f injective $\Longrightarrow \exists v \in E$ tel que $f(v) = w$; comme B est une base E, alors on a $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ avec $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \Bbbk$; il s'ensuit $w = f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i)$; le derniier terme de cette suite d'égalités exprime que w est une combinaison linéaire des $f(e_i)$ donc B' est une famille génératrice de E'.

Réciproquement, supposons que B' est une famille génératrice de E' et montrons que f est surjective: Soit $w \in E'$; B' famille génératrice de E' $\Longrightarrow$ $\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \Bbbk$ tels que $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)$; on a trouvé $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in E$ tel que $f(v) = w$; alors f est surjective.

- Le dernier point est une conséquense directe des deux premiers points

Corollaire 1: *Deux espaces vectoriels isomorphes ont la même dimension.*

Corollaire 2 *On suppose* $\dim E = \dim E'$ *et soit* $f : E \longrightarrow E'$ *linéaire. Alors les CSSE:*

i) f *est injective.*

ii) f *est surjective;*

iii) f *est bijective*

Théorème 1.8 (de la dimension):*soit* $f : E \longrightarrow E'$ *linéaire.Alors:*

$$\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim E$$

1.5.2 Matrice d'une application linéaire

Matrice colonne de coordonnées (mcc)

Définition1.6*: Soit* $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ *une base de* E*.Tout vecteur* x *de* E *s'écrit de manière unique* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$*. Alors la matrice* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *est appelée la matrice colonne de coordonnées (mcc) ou vecteur colonne de coordonnées (vcc) de* x *dans la base* B*.*

Matrice d'une application linéaire

Définition 1.7 : *Soient* $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ *une base de* E*,* $B' = (e'_1, e'_2, ..., e'_m)$ *une base de* E'*.* $f : E \longrightarrow E'$ *linéaire. Alors la matrice de* f *relativement aux bases* B *et* B' *est:*

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\
mat_{BB'}(f) = & \left(\begin{array}{cccc} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right) \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_m \end{array} \in M_{m,n}(\mathbb{k})
\end{array}
$$

qui est la matrice de format (m, n) dont pour $1 \leq j \leq n$, le vecteur colonne C_j est la mcc de $f(e_j)$ dans la base B'.

Proposition 1.7: *Les considérations étant celles qui précèdent, on pose $A = mat_{BB'}(f)$.*

Alors $\forall x \in E$ de mcc X dans B, $f(x)$ a pour mcc AX dans B'.

Exemple 1.3 Soit $f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ v = (x, y, z,) \longmapsto v' = (x', y', z', t') \end{array}$ avec :

$$
(S) \left\{ \begin{array}{r} x' = 2x - y - 9z \\ y' = 4y + z \\ z' = 5x - y + 3z \\ t' = 6z \end{array} \right. .
$$

Montrer que f est linéaire et déterminer sa matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

Les applications coordonées $x'(v), y'(v), z'(v)$ et $t'(v)$ sont des formes linéaires car d'expression de la forme $g(x, y, z) = ax + by + cz$ donc f est linéaire.

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ et $B' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ les base canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$. Alors on a

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\
mat_{BB'}(f) = & \left(\begin{array}{ccc} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ e'_4 \end{array} \in M_{4.3}(\mathbb{R}) .
\end{array}
$$

On trouve: $f(e_1) = (2; 0; 5; 0)$; $f(e_2) = (-1; 4; -1; 0)$; $f(e_3) = (-9; 1; 3; 6)$. d'où

$$
mat_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -9 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} .
$$

On remarque que $mat_{BB'}(f)$ est égale à la matrice du système linéaire (S) définie par l'expression analytique de f. C'est ce qu'on obtient généralement lorsqu'une application linéaire est définie par une expression analytique relativement à des bases données.

Matrice d'un endomorphisme

Définition 1.8:: *soient* $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ *une base de* E *et* f *un endomorphisme de* E*. la matrice de* f *dans la base* B *est:*

$$\begin{array}{c} \\ mat_B(f) = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \in M_n(\mathbb{k})$$

qui est la matrice carrée d'ordre n *dont pour* $1 \leq j \leq n$*, le vecteur colonne* C_j *est la mcc de* $f(e_j)$ *dans la base* B

Théorème 1.9 : *soit* h *une base de* E

L'application $\begin{array}{c} \mathcal{L}(E) \longrightarrow M_n(\mathbb{k}) \\ f \longmapsto mat_h(f) \end{array}$ *. est un isomorphisme d'algèbres qui permet d'assimiler* $\mathcal{L}(E)$ *à* $M_n(\mathbb{k})$*.*

On a donc $\forall f, g \in \mathcal{L}E), \forall \lambda \in \mathbb{k}$, en posant $A = mat_h(f)$ et $B = mat_h(g)$,:

$mat_h(f + g) = A + B$; $mat_h(\lambda f) = \lambda A$; $mat_h(f \circ g) = AB$

Corollaire 1: *un endomorphisme de* E *est bijectif si et seulement si sa matrice dans une base quelconque de* E *est une matrice inversible c.à.d de déterminant non nul.*

Corollaire 2: *L'ensemble des automorphisme de* E *muni de la composition des applications est un groupe appelé le groupe linéaire de* E *et noté* $GL(E)$*, isomorphe au groupe multiplicatif* $GL_n(\mathbb{k})$ *des matrices carrées d'ordre* n *inversibles à coefficients dans* $\mathbb{k}$*.*

endomorphisme canoniquement associé à une matrice

Définition 1.9: *Soit* $A \in M_n(\mathbb{k})$*. L'endomorphisme* f_A *canoniquement associé à* A *est l'endomorphisme de* $\mathbb{k}^n$ *dont la matrice dans la base canonique de* $\mathbb{k}^n$ *est égale à* A*.*

Alors le noyau $\ker A$ *et l'image* $\operatorname{Im} A$ *de* A *sont respectivement l'image et le noyau de* f_A*.*

On a donc $\ker A = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{k}^n, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{k}^n}\}$.

Plus généralement, on définit l' application linéaire canoniquement associée à une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{k})$ comme étant l'application linéaire $f_A : \mathbb{k}^n \longrightarrow \mathbb{k}^m$ dont la matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{k}^n$ et de $\mathbb{k}^m$ est A.

1.6 Produit, somme, somme directe d'espaces vectoriels

1.6.1 Produit d'espaces vectoriels

Définition 1.10 : Soient E_1, E_2, ...,E_p des $\mathbb{k}$-espaces vectoriels. On définit sur le produit cartésien $\prod_{i=0}^{p} E_i$ l'addition et la multiplication externe par: $\forall x = (x_1, x_2, ...x_p), y = (y_1, y_2, ..., y_p) \in \prod_{i=0}^{p}, \forall \lambda \in \mathbb{k}$,

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_p + y_p); \;\; \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_p).$$

Alors $\left(\prod_{i=0}^{p} E_i, +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{k}$-espace vectoriel appelé espace vectoriel produit de E_1, E_2, ...et E_p.

Théorème 1.10 : *Soient E_1, E_2, ...,E_p des $\mathbb{k}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors on a:*

$$\dim\left(\prod_{i=0}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$$

Projection canonique

Définition 1.11: *Soient E_1, E_2, ...,E_p des $\mathbb{k}$-espaces vectoriels. Pour $1 \leq k \leq p$, fixé, l'application:*

$$\pi_k : \begin{array}{ccc} \prod_{i=0}^{p} E_i & \longrightarrow & E_k \\ (x_1, x_2, ...x_p) & \longmapsto & x_k \end{array}$$

est une application linéaire surjective appelée la k-ième projection canonique de $\prod_{i=0}^{p} E_i$ sur E_k.

Proposition 1.7 *Soit E_1, E_2, ...,E_p et G des $\mathbb{k}$-espaces vectoriels et $f : G \longrightarrow \prod_{i=0}^{p} E_i$ une application. Alors f est linéaire si et seulement si les applications $\pi_k \circ f$, $1 \leq k \leq p$, le sont.*

1.6.2 Somme de sous espaces vectoriels

Soient E_1, E_2, ...,E_p des sous espaces vectoriels de E. On pose

$$\sum_{i=1}^{p} E_i = E_1 + E_2 + ... + E_p = \{x_1 + x_2 + ... + x_p,\ x_k \in E_k,\ \forall 1 \leq k \leq p\}.$$

$\sum_{i=1}^{p} E_i$ est un sous espace vectoriel de E contenant les E_k.

Théorème 1.11 (formule de Grassmann): *Soient F, G deux sous espaces vectoriels de E de dimensions finies . Alors:*

$$\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G)$$

1.6.3 Somme directe de sous espaces vectoriels

Somme directe de deux sous espaces vectoriels

Définition 1.12: *Soient F, G deux sous espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F + G$ est directe si F et G vérifient l'une des conditions équivalentes suivantes:*

i) $F \cap G = \{0\}$;

ii) $\forall (x, y) \in F \times G,\ x + y = 0 \Longrightarrow x = y = 0$

Remarque 1.1 : Si F et G sont de dimensions finies, ces conditions sont équivalentes à:

iii) $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.

La somme $F + G$ s'écrit alors $F \oplus G$.

Somme directe de p sous espaces vectoriels

Définition 1.13: *Soient E_1, E_2, ...,E_p des sous espaces vectoriels de E. On dit que la somme $E_1 + E_2, +... + E_p$ est directe si*

$$\forall (x_1, x_2, ...x_p) \in \prod_{i=0}^{p} E_i,\ x_1 + x_2 + ... + x_p = 0 \Longrightarrow x_k = 0,\ \forall 1 \leq k \leq p.$$

On note alors $E_1 + E_2 + ... + E_p = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$

Théorème 1.12: *Soient E_1, E_2, ...,E_p des sous espaces vectoriels de E. $\forall 1 \leq k \leq p$, on pose $F_k = \sum_{i=1}^{k} E_i = E_1 + E_2, +... + E_k$. Alors les CSSE.*

i) la somme $E_1 + E_2 + ... + E_p$ est directe;

ii) l'application linéaire θ*:* $\begin{array}{c}\prod_{i=0}^{p} E_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{p} E_i \\ (x_1, x_2, ...x_p) \longmapsto x_1 + x_2 + ... + x_p\end{array}$ *est injective;*

iii) l'application linéaire θ*:* $\begin{array}{c}\prod_{i=0}^{p} E_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{p} E_i \\ (x_1, x_2, ...x_p) \longmapsto x_1 + x_2 + ... + x_p\end{array}$ *est bijective;*

iv) $\forall 2 \leq k \leq p$, *la somme* $F_{k-1} + E_k$ *est directe;*

v) Pour toute partie $\{k_1, k_2, ..., k_r\}$ *de* $\{1, 2, ..., p\}$, *si pour* $1 \leq j \leq r$, B_{k_j} *est une famille libre de* E_{k_j}, *alors* $\bigcup_{j=1}^{r} B_{k_j}$ *est une famille libre.*

Si E_1, E_2, ...,E_p *sont de dimensions finies, ces conditions sont équivalentes à:*

vi) $\dim(\sum_{i=1}^{p} E_i) = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$;

Preuve

Pour simplifier la preuve de ce théorème, nous ignorerons la condition de dimension finie pour l'équivalence du *vi*) avec les autres assertions, ce qui n'est qu'une restriction mineure car en pratique pour les applications du théorème, nous travaillerons toujours avec des espaces vectoiels de dimensions finies.

$i) \Longleftrightarrow \forall (x_1, x_2, ...x_p) \in \prod_{i=0}^{p} E_i, (x_1 + x_2 + ... + x_p = 0 \Longrightarrow x_k = 0, \ \forall 1 \leq k \leq p) \Longleftrightarrow$ $\ker \theta = \{0\} \Longleftrightarrow \theta$ est injective: on a donc $i) \Longleftrightarrow ii)$. On a aussi $ii) \Longleftrightarrow iii)$ car θ est surjective: en effet par définition, tout élément $x \in \sum_{i=1}^{p} E_i$ s'écrit $x = x_1 + x_2 + ... + x_p$, avec $x_k \in E_k$, $\forall 1 \leq k \leq p$ d'où $x = \theta(x_1, x_2, ..., x_p)$. Maintenant $iii) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{p} E_i$ et $\prod_{i=0}^{p} E_i$ sont isomorphes $\Longrightarrow$

$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) = \dim\left(\prod_{i=0}^{p} E_i\right) \Longrightarrow \dim(\sum_{i=1}^{p} E_i) = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$ d'après théo 1.10: on a donc $iii) \Longrightarrow vi)$; réciproquement d'après le théo 1.10, $vi) \Longrightarrow$ $\dim\left(\prod_{i=0}^{p} E_i\right) = \dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right)$; Par suite, θ étant surjective comme on l'a montré dans $iii) \Longleftrightarrow iv)$, alors θ est bijective en vertu du corollaire 2 de la proposition 1.6 d'où $vi) \Longrightarrow iii)$: on a donc $vi) \Longleftrightarrow iii)$. Montrons $i) \Longleftrightarrow v)$: supposons $i)$ et soit $\{k_1, k_2, ..., k_r\}$ une partie de $\{1, 2, ..., p\}$, telle que pour $1 \leq j \leq r$, B_{k_j} est une famille libre de E_{k_j}, *et* soit $B = \bigcup_{j=1}^{r} B_{k_j}$. *Soit* w une combinaison linéaire nulle des éléments de B; par définition de B, on peut écrire $w = v_1 + v_2 + ... + v_r = 0$, où *pour* $1 \leq j \leq r$, v_j est une combinaison linéaire des éléments de B_{k_j}; en particulier, $v_j \in E_{k_j}$; alors $i) \Longrightarrow v_j = 0$; mais comme B_{k_j} est une famille libre de E_{k_j}, alors tous les coefficients de la combinaison linéaire nulle v_j sont nuls; par suite, tous les coefficients de la combinaison linéaire nulle w sont nuls d'où B est une famille libre: donc on a $i \Longrightarrow v)$; réciproquement, $v)$ implique que si pour $1 \leq k \leq p$, B_k est une base de E_k, alors $B = \bigcup_{k=1}^{p} B_k$ est une famille libre de $\sum_{i=1}^{p} E_i$ d'où on a $\dim(\sum_{i=1}^{p} E_i) \geq \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$ et par suite $\dim(\sum_{i=1}^{p} E_i) = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$ car on a toujours $\dim(\sum_{i=1}^{p} E_i) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$: on a donc $v \Longrightarrow vi)$ et comme on a déjà montré $vi \Longrightarrow iii) \Longrightarrow i)$, on a $v) \Longrightarrow i)$: on a bien $i) \Longleftrightarrow v)$. Montrons $iv) \Longrightarrow vi)$: $v) \Longrightarrow E_1 + E_2$ est directe d'où $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$; il implique aussi que la somme $(E_1 + E_2) + E_3$ est directe; d'où $\dim(E_1 + E_2 + E_3) = \dim(E_1 + E_2) + \dim E_3 = \dim E_1 + \dim E_2 + \dim E_3$; de proche en proche, on obtient $\dim(\sum_{i=1}^{p} E_i) = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$ c.à.d $vi)$. Enfin, montrons $i) \Longrightarrow iv)$: $i)$ implique que si pour $1 \leq k \leq p$, $x_k \in E_k$ sont tels que $x_1 + x_2 + ... + x_k = 0$, alors on a $x_1 = x_2 = ... = x_k = 0$; ce qui exprime que la somme $\sum_{i=1}^{k-1} E_i + E_k$ est directe c.à.d que la somme $F_{k-1} + E_k$ est directe d'où $iv)$.

Définition 1.14: *E est dite somme directe de ses sous espaces vectoriels E_1, E_2, ...,E_p si on a $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$*

Corollaire: *Soient E_1, E_2, ...,E_p des sous espaces vectoriels non nuls de E. Les CSSE:*

i) $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$;

ii) $E = E_1 + E_2 + ... + E_p$ *et* $\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$;

iii) Tout élément de E s'écrit de manière unique sous la forme: $x = x_1 + x_2 + ... + x_p$, avec $x_k \in E_k$, $\forall 1 \leq k \leq p$;

iv) *Pour toute base B_k de E_k, avec $1 \leq k \leq p$, $\bigcup_{k=1}^{p} B_k$ est une base de E.*

v) Il existe une base B_k de E_k, avec $1 \leq k \leq p$, telle que *$\bigcup_{k=1}^{p} B_k$ est une base de E.*

<u>Preuve</u>

$i) \Longleftrightarrow ii)$ découle directement de l'équivalence de $i)$ et $vi)$ du théo précédent. $i) \Longleftrightarrow iii)$ découle directement de l'équivalence de $i)$ et $iii)$ du théo précédent. $ii) \Longrightarrow iv)$ découle directement de $ii) \Longrightarrow v)$ du théorème précédent. Maintenant comme tout espace vectoriel non nul admet une base, $iv)$ implique trivialement $v)$; enfin, $v)$ implique d'une part que tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de $\bigcup_{k=1}^{p} B_k$, donc d'éléments de $E_1, E_2, ..., E_p$ d'où $E = E_1 + E_2 + ... + E_p$; $iv)$ implique d'autre part que $\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$; on a donc $v) \Longrightarrow ii)$ et ceci achève la preuve.

Base adaptée à une somme directe

Définition 1.15: On suppose que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$. Une base de E adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$ est une base de E de la forme $B = \bigcup_{k=1}^{p} B_k$, où pour $1 \leq k \leq p$, B_k est une base de E_k

Supplémentaire d'un sous espace vectoriel

Définition.1.16: Deux sous espace vectoriels F et G de E sont dits supplémentaires ou que G est un supplémentaire de F dans E (et vice-versa) si on a $E = F \oplus G$.

Théorème 1.13: *Tout sous espace vectoriel de E admet au moins un supplémentaire.*

Hyperplan

Définition 1.17: *Un hyperplan de E est le supplémentaire d'une droite de E.*

Remarque 1.1: Si E est de dimension finie, alors un sous espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si $\dim H = \dim E - 1$.

.

Sous espace vectoriel stable - somme directe d'endomorphisme

Dans cette sous section, u est un endomorphisme de E.

Sous espace vectoriel stable

Définition 1.18: *Un sous espace vectoriel F de E est dit stable par u si $u(F) \subset F$.*

Endomorphisme induit

Définition 1.19: *Soit F un sous espace vectoriel de E stable par u. Alors l'application u_F : $\begin{array}{c} F \longrightarrow F \\ x \longmapsto u(x) \end{array}$ qui est la restriction et la corestriction de u à F est un endomorphisme de F appelé l'endomorphime de F induit par u.*

Base adaptée à un sous espace vectoriel

Définition: *Soit F un sous espace vectoriel de E de dimension $p < n$. Une base de E adaptée à F est une base $(e_{,1}, e_2, ...e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ de E telle que $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une base de F.*

Somme directe d'endomorphismes

On suppose $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$ et que $\forall 1 \leq k \leq p$, E_k est stable par u. on note $u_k = u_{E_k}$ l'endomorphisme de E_k induit par u.

Comme $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$, alors $\forall x \in E$, x s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2 + ... + x_p$, avec $x_k \in E_k$, $\forall 1 \leq k \leq p$; alors on a:

$u(x) = u(x_1 + x_2 + ... + x_p) = u(x_1) + u(x_2) + ... + u(x_p) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + ... + u_p(x_p)$.

On dit alors que u est somme directe des u_k et on écrit $u = \bigoplus_{i=1}^{p} u_i$

1.7 Endomorphismes particuliers

1.7.1 Endomorphisme nilpotent

Définitions 1.20 : *Un endomorphisme u de E est dit nilpotent s'il existe un entier $p > 0$ tel que $u^p = 0$.*

Si r est le plus petit entier non nul tel que $u^r = 0$, alors on dit que u est nilpotent d'ordre r.

De même une matrice $A \in M_n(\Bbbk)$ est dit nilpotente s'il existe un entier $p > 0$ tel que $A^p = 0$.

Si r est le plus petit entier non nul tel que $A^r = 0$, alors on dit que A est nilpotente d'ordre r.

Il est clair qu'un endomorphisme de E est nilpotent si et seulement si sa matrice dans une base quelconque de E est une matrice nilpotente, auquel cas les deux ont le même ordre de nilpotence.

1.7.2 Projecteur

Définition 1.21 : *Un projecteur de E est un endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.*

Théorème 18: Soit p un projecteur de E. Alors on a:

1) $\operatorname{Im} p = Inv(p) = \{x \in E, p(x) = x\}$

2) $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$

Preuve

1): $y \in \operatorname{Im} p \Longrightarrow \exists x \in E$ tel que $p(x) = y \Longrightarrow p[p(x)] = p(y) \Longrightarrow p \circ p(x) = p(y) \Longrightarrow p(x) = p(y)$ (car $p \circ p = p$) $\Longrightarrow y = p(y) \Longrightarrow y \in Inv(p)$; donc on a $\operatorname{Im} p \subset Inv(p)$; réciproquement, soit $y \in Inv(p)$; alors $y = p(y)$ d'où $y \in \operatorname{Im} p$; donc $Inv(p) \subset \operatorname{Im} p$; en somme on a $\operatorname{Im} p = Inv(p)$.

2): $\forall x \in E$, on a $x = p(x) + (x - p(x))$; on a $p(x) \in \operatorname{Im} p$ et $x - p(x) \in \ker p$ car $p\,(x - p(x)) = p(x) - p\,[p\,(x)] = p(x) - p(x) = 0$, donc on a $E = \operatorname{Im} p + \ker p$; En outre on a $\operatorname{Im} p \cap \ker p = \{0\}$ car $x \in \operatorname{Im} p \cap \ker p \Longrightarrow p(x) = x$ et $p(x) = 0$ d'où $x = 0$: on a bien $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$.

Eléments caractéristique d'un projecteur

Définition 1.22 : *Avec les considérations du théorème, p est appelé le projecteur sur* $\operatorname{Im} p$ *de direction* $\ker p$.

$\operatorname{Im} p$ *appelé la base de p, et* $\ker p$ *appelé la direction de p,sont les éléments caractéristiques de p.*

1.7.3 Symétrie ou involution

Définition 1.23 : *Une symétrie ou une involution de E est un endomorphisme s de E tel que $s \circ s = Id_E$.*

Théorème 19: Soit s une involution de E. On pose:

$Inv(s) = \ker(Id_E - s) = \{x \in E,\ s(x) = x\}$, l'ensemble des vecteurs de E invariants par s.

$D(s) = \ker(Id_E + s) = \{x \in E,\ s(x) = -x\}$. Alors on a:

$E = Inv(s) \oplus D(s)$.

<u>Preuve</u>

$Inv(s)$ et $D(s)$ sont des noyaux d'endomorphismes de E donc ce sont des sous espaces vectoriels de E. Maintenant, $\forall x \in E$, on a $x = \frac{1}{2}(x + s(x)) + \frac{1}{2}(x - s(x))$; on a $s\left[\frac{1}{2}(x + s(x))\right] = \frac{1}{2}(s(x) + s\,[s(x)]) = \frac{1}{2}(s(x) + s \circ s(x)) = \frac{1}{2}(s(x) + x)$ (car $s \circ s = s$), d'où $\frac{1}{2}(x + s(x)) \in Inv(s)$; on montre de même que $\frac{1}{2}(x - s(x)) \in D(s)$; on a donc $E = Inv(s) + D(s)$; en outre on a $\cancel{E =}\ Inv(s) \cap D(s) = \{0\}$ car $x \in Inv(s) \cap D(s) \Longrightarrow s(x) = x$ et $s(x) = -x$, d'où $x = -x$ puis $x = 0$: en somme, on a $E = Inv(s) \oplus D(s)$.

Eléments caractéristiques d'une involution

Définition 1.24 : Avec les considérations du théorème, s est appelée la symétrie par rapport à $Inv(s)$ de direction $D(s)$.

$Inv(s)$ et $D(s)$ sont les éléments caractéristiques de s.

Exemple 1.4: Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la nature de f et donner ses éléments caractéristiques.

On a:

$$A^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3,$$

donc $fof = Id_{\mathbb{R}^3}$ par suite f est une involution.Alors ses éléments caractéristiques sont:

l'ensemble des invariants $Inv(f) = \ker(f - Id_{\mathbb{R}^3})$ et sa direcrtion $D(f) = \ker(f + Id_{\mathbb{R}^3})$

$Inv(f) = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3/(A - I_3).v = \overrightarrow{0}\}$ solution du système:

$$\begin{cases} -x - 2y - z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

$Inv(f)$ est le plan vectoriel d'équation: $x + 2y + z = 0$.

On trouve de même $D(f) = \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{v} = (1.1.1)$.

2 Exercices du chapitre 1

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel ; on note i_E l'identité sur E. un endomorphisme u de E est un projecteur si $u \circ u = u$.

1. Montrer que si u est un projecteur alors $i_E - u$ est un projecteur. vérifier aussi que $\operatorname{Im} u = \{x \in E;\ u(x) = x\}$ et que $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.

Un endomorphisme u de E est appelé involutif si $u \circ u = i_E$.

2. Montrer que si u est involutif alors u est bijectif et $E = \operatorname{Im}(i_E + u) \oplus \operatorname{Im}(\ i_E - u)$.

Soit $E = F \oplus G$ et soit $x \in E$ qui s'écrit de la façon unique $x = f + g$, $f \in F$, $g \in G$. soit $u : E\ \ni x \longmapsto f - g \in E$.

3. Montrer que u est involutif, $F = \{u \in E \mid u(x) = x\}$ de direction $G = \{u \in E \mid u(x) = -x\}$.

4. Montrer que si u est un projecteur, $2u - i_E$ est involutif et que tout endomorphisme involutif peut se mettre sous cette forme.

Exercice 2

Soient $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\}$ et $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$ $2x - 2y + z = 0,\ x - y - z = 0\}$. On désigne par ε la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner une base $\{e_1,\ e_2\}$ de P et $\{e_3\}$ de D. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ puis que $\varepsilon' = \{e_1, e_2,\ e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.

Déterminer $mat_{\varepsilon'}(p)$ puis $A = mat_\varepsilon(p)$.

Vérifier que $A^2 = A$.

3.Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à P parallèlement à D.
Déterminer $mat_{\varepsilon'}(s)$ puis $B = mat_{\varepsilon}(s)$.
Vérifier que $B^2 = I$, $AB = A$ et $BA = A$.

Exercice 3

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E : $E = F \oplus G$. On suppose $s(u) = u_F - u_G$ où $u = u_F + u_G$ est la décomposition (unique) obtenue grace à $E = F \oplus G$. s est la symétrie par rapport à F de direction G.
1. Montrer que $s \in L(E)$, que $u \in F \Longleftrightarrow s(u) = u$, $u \in G \Longleftrightarrow s(u) = -u$, donner $\ker(s)$ et calculer s^2.
2. Réciproquement si $f \in L(E)$, vérifie $f^2 = id_E$. On pose $p = \frac{f+id_E}{2}$.
calculer $f(u)$ en fonction de $p(u)$ et u. vérifier que p est un projecteur, calculer son noyau et son image.
Montrer que f est la symétrie par rapport à $F = \{u \in E \mid f(u) = u\}$ de direction $G = \{u \in E \mid f(u) = -u\}$.

Exercice 4

soient p et q deux projecteurs de E, espace vectoriel, tels que $pq = qp$ (p et q commutent). Montrer que pq et $(p + q - pq)$ sont des projecteurs de E, et que :
$\mathrm{Im}(pq) = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$;
$\mathrm{Im}(p + q - pq) = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$.

Exercice 5

soit $E = K^3$, $F = \{\overrightarrow{X} = (x, y, z)$ tel que $x + 2y + z = 0\}$ et
$G = vect(\overrightarrow{U} = (1, 1, 1))$.
1. Vérifier que $F \oplus G = E$.
soit s la symétrie de base F de direction G et $\overrightarrow{X} = (x, y, z)$.
déterminer $s(\overrightarrow{X})$.

Exercice 6

soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{C}-$espace vectoriel E.
Montrer que ($p+q$ projecteur) $\Longleftrightarrow$ $(p \circ q = q \circ p = 0)$ $\Longleftrightarrow$ ($\mathrm{Im}(p) \subset Ker(q)$ et $\mathrm{Im}(q) \subset Ker(p)$).
Dans le cas où $p + q$ est un projecteur, déterminer $\ker(p + q)$ et $\mathrm{Im}(p + q)$.

Exercice 7 : un critère d'indépendance

Soit $S = (\overrightarrow{a}_1, ..., \overrightarrow{a}_p)$ une suite de $p \geq 2$ vecteurs de K^n.
Montrer que s'il existe $k_1, ..., k_p \in [[1, n]]$ deux à deux distincts tels que, pour $i = 1, ..., p$, la $k_{i\grave{e}me}$ composante de $\overrightarrow{a}_i$ (resp., pour $j > i$, de $\overrightarrow{a}_j$) est non nulle (resp nulle), alors S
est libre.

Exercice 8

soient F, G, H trois sous espace vectoriel de E. Montrer que l'on a $F \cap H + G \cap H \subseteq (F + G) \cap H$ avec égalité si l'on a $G \subseteq H$. Donner un exemple montrant que l'on peut ne pas avoir égalité.

Exercice 9

Soit $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $M_n(K)$.
1. Montrer que l'on a, pour $i, j, k, l \in [[1, n]]$, $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_j^k E_{i,l}$ et

${}^tE_{i,j} = \delta_j^k E_{j,i}$.
2. Soient i_0, $j_0 \in [[1,n]]$. Pour $M \in M_n(K)$, on pose
$f(M) = ME_{i_0,j_0} - E_{i_0,j_0}M$. Montrer que f est linéaire et donner le rang de f, une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\ker(f)$.

Exercice 10

Soit $\Phi : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X]$ définie, pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, par
$\Phi(P) = (2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X)$.
1. Montrer que Φ est une application linéaire et donner sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Trouver des bases de $\ker(\Phi)$ et de $\mathrm{Im}(\Phi)$.

Exercice 11

Soit $S_2(K)$ l'espace vectoriel ensemble des matrices symétriques de $M_2(K)$ et $\Phi : S_2(K) \longrightarrow S_2(K)$ définiepar
$\Phi(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a+c & b \\ b & a+b+c \end{pmatrix}$.
1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $S_2(K)$ et donner sa matrice dans les bases (canonique) de $S_2(K)$.
2. Trouver une base de $\ker(\Phi)$ et de $\mathrm{Im}(\Phi)$.

Exercice 12

1. Soient $\overrightarrow{a} = (1,2,3,4)$, $\overrightarrow{b} = (2,2,2,6)$, $\overrightarrow{c} = (0,2,4,4)$, $\overrightarrow{d} = (1,0,-1,2)$, $\overrightarrow{e} = (2,3,0,1)$ des vecteurs de $E = \mathbb{R}^4$. On pose $F = Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ et $G = Vect(\overrightarrow{d}, \overrightarrow{e})$. Trouver des définitions par équations cartésiennes, les dimensions et des bases adaptées pour $F, G, F \cap G, F+G$, et E.
2. Même question pour $E = \mathbb{R}^5$, $\overrightarrow{a} = (15,12,-18,1,18)$, $\overrightarrow{b} = (32,-7,-13,-6,10)$, $\overrightarrow{c} = (19,-32,-20,-7,-6)$, $\overrightarrow{d} = (-26,34,46,6,8)$, $\overrightarrow{e} = (-10,4,-2,-19,2)$, $\overrightarrow{f} = (19,5,8,-8,13)$, $\overrightarrow{g} = (-20,2,-6,-17,-4)$, $\overrightarrow{h} = (27,3,10,3,13)$, et $F = Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d})$ et $G = Vect(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{h})$ (il est conseillé d'utiliser un logiciel de calcul par exemple Maple).

Exercice 13

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathcal{L}(E,G)$.
1. Montrer que l'on a:
$\ker(f) \subseteq \ker(g \circ f)$, $\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq Im(g)$ et $rg(g \circ f) \leq \min(rg(f), rg(g))$.
2. Montrer que l'on a $g \circ f = \overline{0}$. si et seulement si l'on a $\mathrm{Im}(f) \subseteq \ker(g)$.
3. Supposons que l'on a $g \circ f = \overline{0}$. Montrer que, si $f \neq \overline{0}$ (resp. $g \neq \overline{0}$), g n'est pas injective (resp. f n'est pas injective).
4. Montrer que l'on a $\ker(f) = \ker(g \circ f)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) = \{\overline{0}\}$.
5. Montrer que l'on a $Im(g) = \mathrm{Im}(g \circ f)$ si et seulement si l'on a $\mathrm{Im}(f) + \ker(g) = F$.
6. Montrer que l'on a $\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)) = rg(f) - rg(g \circ f)$.

Exercice 14

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:
$i)$ $\ker(f) = \ker(f^2)$; $ii)$ $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$; $iii)$ $E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$

$iv)$ $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\ker(f^k) \subseteq \ker(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subseteq \mathrm{Im}(f^k)$.
3. Montrer qu'il existe $p \in [[0, n]]$, unique tel que :
$i)$ si $k \in [[0, p[[$, on a $\ker(f^k) \neq \ker(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(f^k) \neq \mathrm{Im}(f^{k+1})$,
$ii)$ on a $E = \ker(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)$ (si $p = 0$, on a aussi f est bijective),
$iii)$ et si $k \geq p$, on a $\ker(f^k) = \ker(f^p)$ et $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^p)$.

Exercice 15

Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$ des projecteurs.
1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p + f = id_E$, que peux-t-on dire de f?
2. On suppose que l'on a $p \circ q = q \circ p = 0_E$. Montrer que $p + q$ est un projecteur et que l'on a $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ et $\ker(p + q) = \ker(p) \cap Ker(q)$.
3. Soient F un autre espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que l'on a $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Im}(p)$ si et seulement si l'on a $f = p \circ f$.
4. Si 2 est inversible dans K, montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
$i)$ $q - p$ est un projecteur ; $ii)$ $2p = p \circ q + q \circ p$;
$iii)$ $p \circ q + q \circ p$ et $\mathrm{Im}(p) \subseteq \mathrm{Im}(q)$.

Exercice 16

Soit $\sigma \in \Im_n$. La matrice carrée $M = mat_B(\overrightarrow{e}_{\sigma(1)}, ..., \overrightarrow{e}_{\sigma(n)})$ est dite matrice de la permutation dans la base B de E. Soit p l'ordre de σ dans $\Im_n$.
1. Montrer que M est inversible et que l'on a $M^p = I_n$.
2. Montrer que, si $\lambda \in K$ est tel que $\lambda^p \neq 1$, $M - \lambda I_n$ est inversible et calculer son inverse.
3. Soit $A_n \in M_n(K)$ à coefficients nuls sauf ceux d'indices $(1, 1), ..., (n, n)$, $(1, 2), ..., (n - 1, n)$, $(n, 1)$ tous égaux à 1. Montrer que :
$i)$ si n est impair, A_n est inversible et calculer son inversible,
$ii)$ si n est impair, A_n est de rang $n - 1$ et n'est pas inversible.