DUALITE DANS LES ESPACES VECTORIELS

1 DUAL D'UN ESPACE VECTORIEL

1.1 Définitions

$*$ *Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{k}$.*

$*\mathcal{L}(E, \mathbb{k})$ *,l'ensemble des formes linéaires sur E, est appelé le dual de E et noté E^*.*

1.2 Exemples

a) $k \in \overline{1, n}$ fixé, $\pi_k : \begin{array}{c} \mathbb{k}^n \longrightarrow \mathbb{k} \\ (x_1, ..., x_n) \longmapsto x_k \end{array}$

π_k est une forme linéaire sur $\mathbb{k}^n$ appelée la $k^{ième}$ *projection canonique de* $\mathbb{k}^n$ sur $\mathbb{k}$.

b) $tr : \begin{array}{c} M_n(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k} \\ A = (a_{ij}) \longmapsto trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{array}$

tr est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{k})$ qui vérifie:$\forall A, B \in M_n(\mathbb{k})$:

$$tr({}^tA) = tr(A);\ \ tr(AB) = tr(BA)$$

Preuve : voir TD

c) $\phi : \begin{array}{c} C([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \int_a^b f(x)\, dx \end{array}$

est une forme linéaire sur $C([a, b], \mathbb{R})$.

d) $a \in \mathbb{k}$, fixé $\psi : \begin{array}{c} \mathbb{k}[X] \longrightarrow \mathbb{k} \\ P \longmapsto P(a) \end{array}$

est une forme linéaire sur $\mathbb{k}[X]$.

Dans la suite de ce chapitre on suppose E de dimension finie n

2 Propriétés

a) $\forall f \in E^*$ avec $f \neq 0$, on a:

$\cdot \operatorname{Im} f = \mathbb{k}$

$\cdot \ker f$ *est un hyperplan de* E.

(un hyperplan est un s e.v supplémentaire d'une droite vectorielle; en particulier si E *est un espace vectoriel*

de dimension finie n*, un hyperplan de* E *est un s.e.v de* E *de dimension* $n-1$*)*

b) $\dim E^* = \dim E$.

c) $f : E \longrightarrow \mathbb{k}$ est une forme linéaire si et seulement si son expression dans une base quelconque $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ de E est de la forme:

$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$ avec $a_i \in \mathbb{k}$, pour $1 \leq i \leq n$.

Preuve

a): - $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{k}$; mais comme $\dim \mathbb{k} = 1$, alors soit $\dim(\operatorname{Im} f) = 0$, soit $\dim(\operatorname{Im} f) = 1$; Mais comme $f \neq 0$, alors on a $\operatorname{Im} f \neq \{0\}$, d'où $\dim(\operatorname{Im} f) \neq 0$; donc on a $\dim(\operatorname{Im} f) = 1 = \dim \mathbb{k}$, d'où $\operatorname{Im} f = \mathbb{k}$.

- d'après la formule de la dimension, on a $\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$, d'où $\dim(\ker f) = \dim E - \dim(\operatorname{Im} f) = n - 1$, donc $\ker f$ est un hyperplan.

b) On a $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{k}) \Longrightarrow \dim E^* = \dim E \times \dim \mathbb{k} = \dim E$.

c) comme f est linéaire, alors on a $f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$, d'où la forme escomptée en posant $f(e_i) = a_i$, pour $1 \leq i \leq n$; réciproquement, $\forall (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{k}^n$, on vérifie aisément que l'application $\begin{array}{c} E \longrightarrow \mathbb{k} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \end{array}$ est linéaire, donc appartient à E^*.

3 Base duale

Définition 3.1 : *Soit* $B = (e_1, ..., e_n)$ *une base de* E*;* $\forall i \in \overline{1, n}$*, on apelle* $i^{\text{ème}}$ *forme duale de* B*, l'application* $e_i^* : \begin{array}{c} E \longrightarrow \mathbb{k} \\ x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \longmapsto e_i^*(x) = x_i \end{array}$

Proposition 3.1 : e_i^* *est une forme linéaire sur* E *qui vérifie* $\forall j \in \overline{1, n}$:

$$\boxed{e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad l \neq j \end{cases}}$$

Preuve

simple vérification.

Théorème 3.1 et définition: *Avec les considérations ci-dessus, la suite* $B^* = (e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ *est une base de* E^* *appelée la base duale de* B.

<u>Preuve</u>

On a $Card(B^*) = n = \dim E$, donc il suffit de montrer que B^* est libre. Soit $a_1, a_2..., a_n \in \Bbbk$ tels que $a_1e_1^* + a_2e_2^* + ... + a_ne_n^* = 0$. Alors $\forall k = \overline{1, n}$, $(a_1e_1^* + a_2e_2^* + ... + a_ne_n^*)(e_k) = a_1e_1^*(e_k) + a_2e_2^*(e_k) + ...a_ke_k(e_k) + ... + a_ne_n^*(e_k) = a_k = 0$ d'où le résultat.

Exemple 3.1 : Base duale de la base canonique de $\Bbbk^n$

Soient $B = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\Bbbk^n$, $B^* = (e_1^*, ..., e_n^*)$ sa base duale .

Soit $i \in \overline{1, n}$; $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \Bbbk^n$, on a $x = \sum_{j=1}^{n} x_je_j \Longrightarrow e_i^*(x) = x_i = \pi_i(x)$, donc $e_i^* = \pi_i$; alors $B^* = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$

Théorème 3.2 : *Soit* $B = (e_i)$ *une base de* E, $B^* = (e_i^*)$ *la base duale de* B; *alors:*

a) $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)\, e_i$

b) $\forall f \in E^*$, $f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, e_i^*$

c) S'il existe $\varphi_i : E \to \Bbbk$, $1 \leq i \leq n$, *tels que* $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, e_i$ *alors* $\forall i \in \overline{1, n}$, $\varphi_i \in E^*$ *et* $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ *est la base duale de* B.

<u>Preuve</u>

Simples vérifications.

NB : D'après ce qui précède, si $B = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E, on détermine sa base duale $B^* = (e_1^*, ..., e_n^*)$ par l'une des relations:

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}, \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n; \quad e_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} x_je_j\right) = x_i; \quad \forall x \in E, \ x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)\, e_i$$

Théorème 3.3 : *Soient* B *et* B' *deux bases de* E; P *la matrice de passage de* B *à* B'; *alors la matrice de passage de* B^* *à* ${B'}^*$ *est*

$${}^tP^{-1} = ({}^tP)^{-1}$$

Preuve

Posons $B=(e_i)_{1\leq i\leq n}$, $B'=(e'_i)_{1\leq i\leq n}$, $P=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Soit $P^*=(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de passage de B^* à B'^*.

Soient $i,j\in\overline{1,n}$; Par définition de la base duale, on a : $e'^*_j(e'_i)=\delta_{ji}=\delta_{ij}$.

D'autre part on a: $e'_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}e_k$; $e'^*_j=\sum_{l=1}^{n}b_{lj}e^*_l$. D'où $e'^*_j(e'_i)=$

$$(\sum_{l=1}^{n}b_{lj}e^*_l)(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}e_k)=\sum_{1\leq k,l\leq n}a_{ki}b_{lj}e^*_l(e_k)=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}b_{kj}\ \text{ car }\ e^*_l(e_k)=\delta_{lk}$$

On a donc: $\sum_{k=1}^{n}a_{ki}b_{kj}=\delta_{ij}$, $\forall\ i,j\in\overline{1,n}$. Cette dernière égalité se traduit matriciellement par :

${}^tPP^*=I$ d'où $P^*=({}^tP)^{-1}$

4 Bidual

Définition 3.2 : *Le bidual de E est $E^{**}=(E^*)^*$*

$\forall x\in E$, considérons $\hat{x}:\begin{array}{c}E^*\longrightarrow\Bbbk\\ f\longmapsto f(x)\end{array}$

$\forall f,g\in E^*$, $\forall\alpha\in\Bbbk$, $\hat{x}(\alpha f+g)=(\alpha f+g)(x)=\alpha f(x)+g(x)=\alpha\hat{x}(f)+\hat{x}(g)$; alors $\hat{x}$ est linéaire donc $\hat{x}\in E^{**}$

Théorème 3.4 : *L'application* $\varepsilon:\begin{array}{c}E\longrightarrow E^{**}\\ x\longmapsto\widehat{x}\end{array}$ *est un isomorphisme.*

preuve

Soient $x,y\in E$, $\alpha\in\Bbbk$. $\forall f\in E^*$, $[\varepsilon(\alpha x+y)](f)=(\widehat{\alpha x+y})(f)=f(\alpha x+y)=\alpha f(x)+f(y)=\alpha\widehat{x}(f)+\widehat{y}(f)$

$=(\alpha\widehat{x}+\widehat{y})(f)=(\alpha\varepsilon(x)+\varepsilon(y))(f)$. Donc $\varepsilon(\alpha x+y)=\alpha\varepsilon(x)+\varepsilon(y)$, alors ε est linéaire. En outre $\varepsilon(x)=0\Leftrightarrow\widehat{x}=0\Leftrightarrow\forall f\in E^*,\widehat{x}(f)=f(x)=0\Leftrightarrow x=0$ Donc $\ker(\varepsilon)=\{0\}$, alors ε est injectif, et comme $\dim E=\dim E^{**}$ finie, alors ε est bijectif, d'où le résultat.

Remarque 3.1

1) Cet isomorphisme canonique permet d'identifier E et E^{**} (c.a.d qu'on peut écrire $E^{**}=E$),ainsi un vecteur $x\in E$ peut être considéré comme une forme linéaire sur E^*; $x\in E$ étant la forme $f\rightarrow f(x)$. On peut donc écrire $\forall x\in E,\forall f\in E^*$, $x(f)=f(x)$

2) Soient $B=(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $B^*=(e^*_i)_{1\leq i\leq n}$ la base duale de B; en vertu de l'assimilation de E à E^{**}, on a $\forall 1\leq i,j\leq n$, $e_i(e^*_j)=e^*_j(e_i)=\delta_{ji}=\delta_{ij}$, donc B est la base duale de B^* : on a donc: $B=(B^*)^*$.

5 ORTHOGONAL DUAL

Définition 3.3

- *Soit F une partie non vide de E; $f \in E^*$ est appelé un annihilateur de F si $\forall x \in F,\ f(x) = 0$*

- $F^\circ = \{f \in E^*, f(x) = 0, \forall x \in F\}$*, l'ensemble des annihilateurs de F, est appelé l'orthogonal dual de F.*

Théorème 3.5

a) *Soit $F \neq \phi$ un sous ensemble de E, alors $F^\circ = (vect(F))^\circ$ et c'est un sous espace vectoriel de E^*.*

Si F est un s.e.v de E alors:

b) $\dim F + \dim (F)^\circ = \dim E$

c) $(F^\circ)^\circ = F = \{x \in F \ / \ f(x) = 0,\ \forall f \in E^*\}$ *(où E^{**} est identifié à E)*

Preuve

a) se vérifie facilement

b) Soit $k = \dim F$, $H = (v_1, v_2, ..., v_k)$ une base de F qu'on complète en une base $B = (v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_n)$ de E et soit $B^* = (v_1^*, v_2^*, ..., v_n^*)$ la base duale de B. On a donc $\forall 1 \leq i, j \leq n,\ v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$. Soit $f = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i^* \in E^*$. $f \in F^\circ = H^\circ$ (d'après a)) $\Leftrightarrow f(v_j) = 0, \forall j \in \overline{1,k} \Leftrightarrow a_j = 0, \forall j \in \overline{1,k} \Leftrightarrow f = \sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i^*$. Par suite $F^\circ = Vect(v_{k+1}^*, ..., v_n^*)$ d'où $\dim(F^\circ) = n - k$

c) D'après la preuve de b), on a $(F^\circ)^\circ = (Vect(v_{k+1}^*, ..., v_n^*))^\circ = Vect(v_1^{**}, ..., v_k^{**}) = \langle (v_1, ..., v_k) \rangle = F.$

Application aux systèmes homogènes.

Théorème 3.6 : *Soit le système d'équations homogènes suivant:*

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$m, n \in N^*, a_{ij} \in \mathbb{k}, \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ *d'inconnues, $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$.Soit $A = (a_{ij})$ la matrice associée à (S).Alors l'ensemble des solutions de(S) est un s.e.v de $\mathbb{k}^n$ de dimension $n - rgA$.*

preuve

Soit $\forall i = \overline{1,m}$, la forme f_i définie par $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{k}^n,\ f_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n,$. Alors, x solution de $(S) \Leftrightarrow f_i(x) = 0, \forall i = \overline{1,m} \Leftrightarrow x \in (f_1, f_2, ..., f_m)^\circ$. Donc l'ensemble des solutions de (S) est $F = (f_1, f_2, ..., f_m)^\circ$ qui est un $s.e.v$ de $\mathbb{k}^n$. En outre d'après le théo 2.5, on a: $\dim F = \dim \mathbb{k}^n - \dim \langle f_1, f_2, ..., f_m \rangle = n - rg(A)$ cqfd.

6 TRANSPOSEE D'UNE APPLICATION LINEAIRE

Soient E, F des $\Bbbk$-$e.v$, $u \in \mathcal{L}(E,F)$. $\forall f \in F^*$; on a: $f \circ u : E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{f} \Bbbk$. est linéaire donc $f \circ u \in E^*$.

Définition 3.4 : *L'application*

$$ {}^t u : \begin{array}{c} F^* \longrightarrow E^* \\ f \longmapsto f \circ u \end{array} $$

est appelée la transposée de u

Proposition 3.2 : ${}^t u$ *est linéaire donc* ${}^t u \in \pounds(F^*, E^*)$

Preuve

En effet $\forall f, g \in F^*, \forall \alpha \in \Bbbk$; on a

${}^t u(\alpha f + g) = (\alpha f + g) \circ u = \alpha(f \circ u) + (g \circ u) = \alpha {}^t u(f) + {}^t u(g)$.

Exemple 3.2 :

$$ u : \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \longmapsto (x,y) \end{array} $$

$\forall f = \alpha_1 \pi_1 + \alpha_2 \pi_2 \in (\mathbb{R}^2)$,($(\pi_1, \pi_2)$ est une base de $(\mathbb{R}^2)^*$, duale de la base canonique de $\mathbb{R}^2$), $\forall X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $[{}^t u(f)](X) = (f \circ u)(X) = f(x,y) = \alpha_1 x + \alpha_2 y = \alpha_1 \pi_1(X) + \alpha_2 \pi_2(X) = (\alpha_1 \pi_1 + \alpha_2 \pi_2)(X)$

$\Leftrightarrow {}^t u(f) = \alpha_1 \pi_1 + \alpha_2 \pi_2$

donc $ {}^t u : \begin{array}{c} (\mathbb{R}^2)^* \to (\mathbb{R}^3)^* \\ \alpha_1 \pi_1 + \alpha_2 \pi_2 \longmapsto \alpha_1 \pi_1 + \alpha_2 \pi_2 \ (+0\pi_3) \end{array}$

Théorème 3.7

1°) $\forall u \in \pounds(E,F)$; ${}^t({}^t u) = u$ (via l'idendification $E^{**} = E$)

2°) $\forall u, v \in \pounds(E,F), \forall \alpha \in \Bbbk$, ${}^t(u+v) = {}^t u + {}^t v$; ${}^t(\alpha u) = \alpha {}^t u$

3°) $\forall (u,v) \in \pounds(E,F) \times \pounds(F,G)$ on a ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$

Preuve

1°) Soit $x \in E$. $\forall f \in F^*$, $[{}^t({}^t u) \circ (\widehat{x})](f) = (\widehat{x} \circ {}^t u)(f) = \widehat{x}[{}^t u(f)] = \widehat{x}(f \circ u) = (f \circ u)(x) = f(u(x)) = \widehat{u(x)}(f)$

donc ${}^t({}^t u) \circ (\widehat{x}) = \widehat{u(x)}$, d'où par identification de E^{**} et E, ($\widehat{x} = x$, $\widehat{u(x)} = u(x)$),

${}^t({}^t u)(x) = u(x)$, $\forall x \in E$; par suite ${}^t({}^t u) = u$

2°) $\forall f \in F^*$, ${}^t(\alpha u + v) \circ (f) = f \circ (\alpha u + v) = \alpha f \circ u + f \circ v = \alpha {}^t u(f) + {}^t v(f)$

Par suite ${}^t(\alpha u + v) = \alpha {}^t u + {}^t v$

3°) $\forall f \in G^*$ on a ${}^t(v \circ u)(f) = f \circ (v \circ u) = (f \circ v) \circ u = {}^t u(f \circ v) = {}^t u[v^t(f)] = ({}^t u \circ {}^t v)(f)$

Par suite ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$

Corollaire : *L'application* $u \longmapsto {}^t u$ *est un isomorphisme de* $\pounds(E,F)$ *dans* $\pounds(F^*,E^*)$.

Théorème 3.8 : *Soit* $u \in \pounds(E,F)$, B *une base de* E, B' *une base de* F, $A = mat_{BB'}(u)$, $H = mat_{B'^*B^*}({}^t u)$;

$$\text{Alors on a } \; H = {}^t A.$$

<u>Preuve</u>

Soit $n = \dim E$, $m = \dim F$, $B = (e_i)$, $B' = \left(e'_j\right)$, $A = (a_{ij})$, $H = (h_{ij})$.

On a pour $1 \le i \le n$, $u(e_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} e'_k$. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$.Alors

$u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ki} e'_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i\right) e'_k$

Alors $\forall j \in \overline{1,m}$, $\left[{}^t u\left(e'^*_j\right)\right](x) = \left(e'^*_j \circ u\right)(x) = e'^*_j[u(x)] = e'^*_j \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i\right) e'_k\right)$

$= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i\right) e'^*_j(e'_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} e^*_i(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} e^*_i\right)(x), \forall x \in E$ d'où

$$^t u\left(e'^*_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} e^*_i.$$

Or on a pour $1 \le j \le m$, ${}^t u\left(e'^*_j\right) = \sum_{i=1}^{n} h_{ij} e^*_i$. on en déduit que $h_{ij} = a_{ji}$, $\forall 1 \le i \le n$ et $\forall 1 \le j \le m$, d'où $H = {}^t A$ cqfd.

Soit $n = \dim E$, $m = \dim F$, $B = (e_i)$, $B' = \left(e'_j\right)$, $A = (a_{ij})$, $H = (h_{ij})$.

On a pour $1 \le i \le n$, $u(e_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} e'_k$. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$.Alors

$u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ki} e'_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i\right) e'_k$

Alors $\forall j \in \overline{1,m}$, $\left[{}^t u\left(e'^*_j\right)\right](x) = \left(e'^*_j \circ u\right)(x) = e'^*_j[u(x)] = e'^*_j \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i\right) e'_k\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} e^*_i(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} e^*_i\right)(x), \forall x \in E$ d'où

$$^t u\left(e'^*_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} e^*_i.$$

Or on a pour $1 \le j \le m$, ${}^t u\left(e'^*_j\right) = \sum_{i=1}^{n} h_{ij} e^*_i$. on en déduit que $h_{ij} = a_{ji}$, $\forall 1 \le i \le n$ et $\forall 1 \le j \le m$, d'où $H = {}^t A$ cqfd.

7 Exercices du chapitre 3

Exercice 1

1° Montrer que l'application "trace" $tr : \begin{array}{c} M_n(\mathbb{k}) \longrightarrow \mathbb{k} \\ A \longmapsto tr(A) \end{array}$ est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{k})$

2° a) Montrer que $\forall A \in M_n(\mathbb{k})$, $tr({}^tA) = tr(A)$.

b) Montrer que $\forall A, B \in M_n(\mathbb{k})$, $tr(AB) = tr(BA)$. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.

3° Existe t-il deux matrice $A, B \in M_n(\mathbb{k})$ telles que $AB - BA = I$?

Exercice 2

Pour $i \in \overline{0,n}$ on note f_i l'application $f_i : \begin{array}{c} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \longmapsto P(\frac{i}{n}) \end{array}$

1° Montrer que f_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et montrer que la famille $(f_0, f_1, ..., f_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$

2° En déduire que: $\exists (a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int\limits_0^1 P(t)dt = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i P(\frac{i}{n})$

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{k}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients dans $\mathbb{k}$.

1° a) Déterminer la base duale de la base canonique $B = (X^i)_{i=0,n}$

b) Même question pour la base $L = (L_i)_{i=0,n}$ avec $\forall i \in \overline{0,n}$, $L_i = \prod\limits_{1 \leq j \leq n}^{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$, où $a_0, a_1, ..., a_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{k}$.

2° on prend $n = 3$.

Soient f_1, f_2, f_3 et $f_4 \in E^*$ définies par : $f_1(P) = P(0)$; $f_2(P) = P'(0)$; $f_3(P) = P(1)$; $f_4(P) = P'(1)$.

Vérifier que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E^*

Déterminer la base duale de $\mathcal{F}$

Exercice 4

1° Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$, $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que $\ker({}^tu) = (\operatorname{Im} u)^\circ$. En déduire que u est surjectif si et seulement si ${}^tf$ est injectif.

2° Lorsque E et F sont de dimension finie montrer que $rg(u) = rg({}^tu)$. En déduire que pour toute matrice A à coefficients dans $\mathbb{k}$, on a: $rg(A) = rg({}^tA)$

Exercice 5:

Soient E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel, $B = (v_1, v_2, ..., v_n)$ une famille de vecteurs de E, $\mathcal{F} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ une famille d'éléments de E^*.

Montrer que si la matrice $(f_i(v_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ est inversible alors B est une famille libre de E et $\mathcal{F}$ est une famille libre de E^*.

Application

Soit $E = \mathbb{k}_n[X]$, On note $P_0 = 1$, $P_i = X(X-1)...(X-i+1)$ pour $i \geq 1$, et $f_i : P \longmapsto P(i)$.

1) Montrer que $B = (P_0, ..., P_n)$ est une base de E et $\mathcal{F} = (f_0, ..., f_n)$ est une base de E^*.

2) Décomposer la forme linéaire P_n^* dans la base $\mathcal{F}$. En déduire la base duale de B.