-REDUCTION DES ENDOMORPHISMES-

1 VALEURS PROPRES - VECTEURS PROPRES - DIAGONALISATION

Introduction

Question: L'espace vectoriel E étant de dimension finie n, quels sont les endomorphismes de E pour lesquels il existe une base de E dans laquelle la matrice est diagonale?

Si u est un tel endomorphisme, alors il existera une base $\mathcal{B}=(x_1,x_2,...,x_n)$ de E telle que $mat_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice diagonale donc de la forme

$$D=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(x_1) & \cdots & u(x_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \end{array}.$$

Par suite, on aura: $u(x_i)=\lambda_i x_i$, $1\leq i\leq n$.

Décider d'une réponse favorable ou non à $u\in\mathcal{L}(E)$ passe donc par la recherche de scalaires λ et de vecteurs non nuls x tels que $u(x)=\lambda x$.

Dans ce chapitre, u est un endomorphisme de E.

1.1 Valeurs propres-Vecteurs propres

1.1.1 Valeur propre

Définition 4.1 : *Un élément λ de $\Bbbk$ est dit une valeur propre de u s'il existe un vecteur $x\neq 0_E$ de E tel que $u(x)=\lambda x$.*

L'ensemble des valeurs propres de u est appelé le spectre de u et noté $Sp(u)$.

Remarque 4.1: l'égalité $u(x)=\lambda x \iff u(x)-\lambda x=0_E \iff u(x)-\lambda Id_E(x)=0_E \iff (u-\lambda Id_E)(x)=0_E \iff x\in\ker(u-\lambda Id_E)$.

Donc un élément λ de $\Bbbk$ est une valeur propre de u si et seulement si $\ker(u-\lambda Id_E)\neq\{0_E\}$

1.1.2 Vecteur propre

Définition 4.2 : *Un vecteur $x\neq 0$ de E vérifiant $u(x)=\lambda x$ avec $\lambda\in\Bbbk$ est dit un vecteur propre de u.*

On dit que x est associé à la valeur propre λ et vice versa.

1.1.3 Sous espace propre

Définition 4.3 : Soit $\lambda \in Sp\,(u)$. *Le sous espace propre de u associé à λ est:*
$E_\lambda = \ker\,(u \quad \lambda Id_E) = \{x \in E, u\,(x) = \lambda x\}$.

$\forall \lambda \in Sp\,(u)\,, E_\lambda$ est un sous espace vectoriel de E non réduit à $\{0\}$.

Remarque 4.2 : à un vecteur propre x de E est associé une unique valeur propre: en effet si α β sont des valeurs propres de u associées à x, alors on aura: $u(x) = \alpha x$ et $u(x) = \beta x$, d'où $\alpha x = \beta x$ puis $(\alpha \quad \beta)\,x = 0 \Longrightarrow \alpha \quad \beta = 0$ puisque $x \neq 0_E$ d'où le résultat.

Mais à une valeur propre λ de u est associé une infinité de vecteurs propres qui constitue avec le vecteur nul le sous espace propre associé à λ. En résumé:

à un vecteur propre x de u est associé une unique valeur propre; à une valeur propre λ de u est associé un unique sous espace propre (qui est constitué de tous les vecteurs propres de u associés à λ et du vecteur nul) et à un sous espace propre de u est associé une unique valeur propre.

Théorème 4.1: *soient $u \in \mathcal{L}\,(E)$, $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des valeurs propres de u deux à deux distinctes; alors la somme $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + ... + E_{\lambda p}$ est directe.*

Preuve

Par recurrence sur p.

Pour $p = 2$, il s'agit de montrer que $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$.

$x \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} \Longrightarrow u\,(x) = \lambda_1 x$ et $u\,(x) = \lambda_2 x$; d'où $(\lambda_1 \quad \lambda_2)\,x = 0$ donc $x = 0$, car $\lambda_1 \neq \lambda_2$ donc $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$.

Soit $p \geq 3$; supposons l'assertion vérifiée au rang $p \quad 1$. La somme $F = E_{\lambda_1} + ... + E_{\lambda p \quad 1}$ est alors directe. Donc il suffit de montrer que $F \cap E_{\lambda_p} = \{0\}$. $x \in F \Longrightarrow x = x_1 + \ldots + x_{p \quad 1}$ avec $x_i \in E_{\lambda i}$, $i = 1, \ldots, p \quad 1$, d'où $u\,(x) = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{p \quad 1} x_{p \quad 1}$; $x \in E_{\lambda_p} \Longrightarrow u\,(x) = \lambda_p x = \lambda_p x_1 + \ldots + \lambda_p x_{p \quad 1}$. Comme la somme $E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_{p \quad 1}}$ est directe, on a $\lambda_i x_i = \lambda_p x_i \Longrightarrow (\lambda_i - \lambda_p)\,x_i = 0$ $i = 1, \ldots, p \quad 1$ d'où $x_i = 0$ car $\lambda_i \neq \lambda_p$ donc $x = 0$ d'où le résultat.

Corollaire 1 : *Une famille de p vecteurs propres associés resp à p-valeurs propres distinctes est libre.*

Corollaire 2 : *Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n possède au plus n valeurs propres*

Exemple 4.1

* Soit p un projecteur de E (c'est-à-dire $p \in L_K\,(E)$ avec $pop = p$) avec $p \neq 0$ et $p \neq Id_E$; alors $Sp\,(p) = \{0, 1\}$

En effet, on vérifie que $\ker\,(p - Id_E) = \operatorname{Im}\,(p) \neq \{0\}$ car $p \neq 0$ d'où $1 \in Sp\,(p)$ de même $p \neq Id_E \Longrightarrow \exists x \in E$ tel que $p\,(x) \neq x$ d'où $p\,(x) - x \neq 0$ alors que $p\,[p\,(x) - x] = 0$; par suite, $\ker p \neq (0)$ d'où $0 \in Sp\,(u)$. En outre on a

$\forall x\in E, x=p(x)+x-p(x)$ avec $p(x)\in \mathrm{Im}(p)=E_1$ et $x-p(x)\in\ker p=E_0.$ On a donc $E=E_0+E_1$ et en vertu du théorème 1 il n'y a plus d'autres valeurs propres de p.

* Soit s une involution de $E\left(s\in L_K(E)\text{ avec } s^2=Id_E\right)$ avec $s\neq \pm Id_E$ alors un raisonnement similaire à ce qui précède montre que $Sp(s)=\{-1,1\}$.

1.2 Polynôme caractéristique

Dans toute la suite E est de dimension finie n sur $\mathbb{k}$.

Soient $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de u dans une base quelconque $\mathcal{B}$ de E et I_n la matrice unité d'ordre n. Alors $mat_{\mathcal{B}}(u-\lambda Id_E)=A-\lambda I_n$. Elle est obtenue en ajoutant $-\lambda$ à chaque élément de la diagonale de A.

Soit $\lambda\in K$. $\lambda\in Sp(u)\iff \ker(u-\lambda Id_E)\neq\{0\}\iff\det(u-\lambda Id_E)=0\iff\det(A-\lambda I_n)=0$.

Proposition 4.1 et définition

L'expression $\det(A-XI_n)=\begin{vmatrix} a_{11}-X & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-X & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n_1} & a_{n_2} & \cdots & a_{nn}-X\end{vmatrix}$ *est un polynôme en X de degré n indépendante de la base $\mathcal{B}$ choisie appelé le polynôme caractéristique de u et noté $P_u(X)$. En outre en posant $P_u(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_0$ on a*

$$\boxed{a_n=(-1)^n\ ;\ a_{n-1}=(-1)^{n-1}trA\ ;\ a_0=\det A\ ;\ a_1=-tr\widetilde{A}\text{ où }\widetilde{A}={}^tComA}$$

Preuve

D'après les règles de calcul d'un déterminant, dans le calcul de $\begin{vmatrix} a_{11}-X & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-X & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n_1} & a_{n_2} & \cdots & a_{nn}-X\end{vmatrix}$ ne sont utilisées que des sommes et des produits de coefficients; donc

$P_u(X)$ est un polynôme en X dont les termes des deux plus haut degrés sont issus du produit des coefficients de la diagonale

$(a_{11}-X)(a_{22}-X)\cdots(a_{nn}-X)=(-1)^nX^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+\cdots+a_{nn})X^{n-1}+\cdots+$ et dont le terme constant est $P_u(0)$. Il en résulte que:

$a_n=(-1)^n$; $a_{n-1}=(-1)^{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^n a_{ii}=(-1)^{n-1}trA$; D'autre part, on a: $a_0=P_u(0)=\det A$

Pour le calcul de a_1, supposons d'abord A est inversible.

On a $A\widetilde{A} = |A|\, I_n$ d'où $|A| \times \left|\widetilde{A}\right| = |A|^n$ puis $\left|\widetilde{A}\right| = |A|^{n-1}$. Il vient:

$|A|^{n-1} P_A(X) = \left|\widetilde{A}\right| P_A(X) = \left|\widetilde{A}\right| |A - XI_n| = \left|\widetilde{A}\,(A - XI_n)\right| = \left||A|\, I_n - X\widetilde{A}\right| = (-X)^n \left|\widetilde{A} - \frac{|A|}{X} I_n\right| = (-1)^n X^n P_{\widetilde{A}}\left(\frac{|A|}{X}\right)$ Par suite $P_A\,(X) = (-1)^n \, \frac{1}{|A|^{n-1}} X^n P_{\widetilde{A}}\left(\frac{|A|}{X}\right)$ $(*)$.

L'égalité $(*)$ est une égalité de deux polynômes Sachant que le coefficient de X^{n-1} dans $P_{\widetilde{A}}(X)$ est égal à $(-1)^{n-1}\, tr\widetilde{A}$, alors $(*)$ se traduit au degré 1 par :

$a_1 X = (-1)^n \, \frac{1}{|A|^{n-1}} X^n \times (-1)^{n-1}\, tr\widetilde{A}\left(\frac{|A|}{X}\right)^{n-1}$ d'où $a_1 = -tr\widetilde{A}$.

Maintenant dans l'espace vectoriel normé complet $M_n\,(\mathbb{k})$ (voir la norme sur $M_n\,(\mathbb{k})$ au paragraphe 3) les applications $A \longmapsto |A|$, $A \longmapsto trA$ et $A \longmapsto \widetilde{A}$ sont continues car ce sont des fonctions polynômes des coefficients de A, et on vérifie que $GL_n\,(\mathbb{k})$ est dense dans $M_n\,(\mathbb{k})$ (utiliser la fonction continue $A \longmapsto |A|$). Alors la formule $a_1 = -tr\widetilde{A}$ s'étend par continuité à $M_n\,(\mathbb{k})$ tout entier.

Pour le reste, $P_u\,(X)$ étant égal à $\det\,(u - \lambda Id_E)$, est indépendant de la base choisie car le déterminant d'un endomorphisme est indépendant de la base choisie.

On déduit de ce qui précède le résultat suivant.

Théorème 4.2 : *Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{k}$- espace vectoriel de dimension finie E et $P_u\,(X)$ son polynôme caractéristique. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{k}$, λ valeur propre de $u \Longleftrightarrow P_u\,(\lambda) = 0$.*

En d'autres termes, les valeurs propres de u sont les racines dans $\mathbb{k}$ de son polynôme caractéristique.

Corollaire

· *Le déterminant de u est égal au produit des racines (distinctes ou non) de $P_u\,(X)$*

En particulier si $P_u\,(X)$ a toutes ses racines dans $\mathbb{k}$, alors le déterminant de u est égale au produit des valeurs propres (distinctes ou non) de u.

· *La trace de u est égal à la somme des racines (distinctes ou non) de $P_u\,(X)$*

En particulier si $P_u\,(X)$ a toutes ses racines dans $\mathbb{k}$, alors la trace de u est égale à la somme des valeurs propres (distinctes ou non) de u.

Définition 4.4 : *L'ordre de multiplicité de la racine λ dans $P_u\,(X)$ est appelé la multiplicité de la valeur propre λ et notée m_λ.*

λ est dite valeur propre simple (resp multiple) s'il est racine simple (resp multiple) de $P_u\,(X)$

Remarque 4.3 : Comme il existe une bijection naturelle entre $\mathcal{L}\,(E)$ et $M_n\,(\mathbb{k})$, on définit également les valeurs propres, les vecteurs propres, les sous espaces propres et le polynôme caractéristique d'une matrice A de $M_n\,(\mathbb{k})$ comme étant les valeurs propres, les vecteurs propres, les sous espaces propres et le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de $\mathbb{k}^n$ canoniquement associé à

A. La même remarque reste valable pour les définitions ultérieures relatives à une matrice carré d'ordre n et à un endomorphisme de E.

Ainsi $Sp\,(A)$, $P_A\,(X)$ désignent respectivement le spectre de A (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A) et le polynôme caractéristique de A.

Une conséquense de ces définition est le résultat suivant:

A est inversible si et seulement si $0 \notin Sp(A)$:

En effet, 0 valeur propre de $A \iff P_A(0) = 0 \iff \det(A - 0I_n) = 0 \iff \det(A) = 0 \iff A$ n'est pas inversible

Gâce aux définitions qui précèdent on obtient auss l'équivalent de la proposition 1 pour les matrices.

Proposition 4. 2 : *Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique et donc les mêmes valeurs propres.*

1.3 Détermination des sous espaces propres

Soient $A = (a_{ij}) \in M_n\,(K)$, $\lambda \in Sp\,(A)$ et E_λ le sous espace propre de A associé à λ.

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est la matrice colonne d'un vecteur x de $\mathbb{k}^n$ alors $x \in E_\lambda \iff (A - \lambda I_n)\,X = 0$

$$\boxed{x \in E_\lambda \iff \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n_1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$$

qui est un système d'équation à n inconnues de rang $\neq n$

car la matrice associée à ce système est $A - \lambda I_n$ et on a $\det\,(A - \lambda I_n) = 0$, et qui définit E_λ.

On en déduit aussi le résultat suivant:

Proposition 4.3 : *Soient $A \in M_n\,(\mathbb{k})$, $\lambda \in Sp\,(A)$ et E_λ le sous espace propre de A associé à λ; alors on a:*

$$\dim E_\lambda = n - rg(A - \lambda I_n)$$

Exemple 4.2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3\,(\mathbb{R})$. Déterminer les valeurs propres de A et les sous espaces propres associés.

* $P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} \underset{}{\overset{C_1 \longleftarrow C_1+C_2+C_3}{=}} \begin{vmatrix} -X+2 & 1 & 1 \\ -X+2 & -X & 1 \\ -X+2 & 1 & -X \end{vmatrix}$

$= (-X+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1}}{=} (-X+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+X & 0 \\ 0 & 0 & 1+X \end{vmatrix}$

$P_A(X) = (-X+2)(X+1)^2$

$Sp(A) = \{2, -1\}$ avec $m_2 = 1$ et $m_{-1} = 2$

* Déterminons E_2.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_2 \Longleftrightarrow (A - 2I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 & L_1 + 2L_2 \Longrightarrow -3x_2 + 3x_3 = 0 \Longrightarrow x_2 = x_3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 & L_1 - L_3 \Longrightarrow -3x_1 + 3x_3 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_3 \end{cases}$

Par suite $x = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; donc $E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

* Déterminons E_{-1}.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_{-1} \Longleftrightarrow (A + I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

Système réduit à l'équation unique $x_1 + x_2 + x_2 = 0$ d'où $x_3 = -x_1 - x_2$

Par suite $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et donc

$E_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

1.4 Diagonalisation

Définition 4.5 *$u \in \mathcal{L}(E)$ est dite diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.*

** D'après l'introduction, Il est équivalent de dire que u est diagonalisable s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.*

Une telle base est alors appelée une base spectrale de E liée à u.

* Si M est la matrice de u dans une autre base de E et P la matrice de passage de cette base à $\mathcal{B}$ on a

$D = P^{-1}MP$ on encore $M = PDP^{-1}$

D'où la définition équivalente pour les matrices :

Définition 4.6 : *Une matrice A de $M_n(\Bbbk)$ est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.*

Si A est diagonalisable avec $A = PDP^{-1}$ où P inversible et D diagonale, alors D est appelée une réduite diagonale de A.

* On a $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ où les λ_i sont les valeurs propres (distinctes ou non) de A et P la matrice

de passage de la base canonique de $\Bbbk^n$ à une base $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1,\ldots,n}$ constituée de vecteurs propres de A avec $\forall i = 1, \ldots, n$, b_i associé à λ_i.

Remarques 4.4

1 Deux réduites diagonales d'une même matrice A diffèrent par une permutation des colonnes. C'est sous réserve de cette permutation qu'on parle souvent de *la réduite diagonale de A.*

2 D'après ce qui précède, si $A \in M_n(\Bbbk)$ est diagonalisable avec $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, alors les éléments de la diagonale de D sont les valeurs propres de A, les vecteurs colonnes de P sont des vecteurs propres de A. Le rang de chaque colonne de P est celui de la colonne dans D de la valeur propre associée.Cet ordre est appelé *l'ordre paritaire de P et de D* (ou *l'ordre paritaire de $\mathcal{B}$ et de D*, $\mathcal{B}$ étant la base formée par les vecteurs colonnes de P).

Théorème 4.3 : *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. alors u est diagonalisable si et seulement si $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$. En d'autres termes u est diagonalisable si et seulement si E est somme directe des sous espaces propres de u.*

<u>Preuve</u>

Supposons u diagonalisable et soit $\mathcal{B}$ une base de E formée de vecteurs propres de u. $\forall i = 1, \ldots, p$, soit $\mathcal{B}_i$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{B}$ associés à λ_i et $E_i = \langle \mathcal{B}_i \rangle$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E et que les $\mathcal{B}_i$ forment une partition de $\mathcal{B}$, on a : $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$. Alors, du fait que $E_i \subset E_{\lambda_i}$ et que la somme des E_{λ_i} est directe on a : $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$. Réciproquement, supposons $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$. Soit $\forall i = 1, \ldots, p$, $\mathcal{B}_i$ une base de E_{λ_i}. alors $\mathcal{B} = \bigcup_{1 \leq i \leq p} \mathcal{B}_i$ est une base de E formée de vecteurs propres de u d'où le résultat.

Définition 4.7: *Un polynôme $P(X) \in \Bbbk[X]$ de degré r est dit scindé dans $\Bbbk[X]$ ou scindé sur $\Bbbk$ s'il est produit de r polynômes de degré 1 de $\Bbbk[X]$, c.à.d. s'il admet r racines (distinctes ou non) dans $\Bbbk$. Il est dit scindé simple dans $\Bbbk[X]$ s'il admet r racines distinctes (donc toutes simples) dans $\Bbbk$.*

Théorème 4.4 : *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u diagonalisable $\iff P_u(X)$ est scindé dans $\Bbbk[X]$ et pour chaque valeur propre λ de u,* $\dim E_\lambda = m_\lambda$

Preuve

Supposons u diagonalisable et soit $\mathcal{B}$ une base de vecteurs propres de u. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u auquelles sont associés les éléments de $\mathcal{B}$.$\forall i = 1, \ldots, p$, soit $\mathcal{B}_i$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{B}$ associés à λ_i et $r_i = card(\mathcal{B}_i)$. Du fait que les $\mathcal{B}_i$ forment une partition de $\mathcal{B}$, on a : $r_1 + \cdots + r_p = n$ et $P_u(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \ldots (X - \lambda_p)^{r_p}$. Les racines de $P_u(X)$ sont donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ qui sont tous dans $\Bbbk$ et en vertu de la preuve du théorème 4.3, on a $\dim E_{\lambda_i} = r_i = m_{\lambda_i}$.

Réciproquement, supposons que $P_u(X)$ a toutes ses racines dans $\Bbbk$ avec $\forall i$, $\dim E_{\lambda_i} = r_i = m_{\lambda_i}$; alors on a $r_1 + \ldots\ldots\ldots + r_p = n$ et en vertu du théorème 4.1, la somme $E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_p}$ est directe et donc $\dim \left(E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_p}\right) = r_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + r_p = n$. On en déduit que $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$ et en vertu du théorème 4.3, u est diagonalisable.

Remarque 4.5: On déduit de ce qui précède que :

$$\forall \lambda \in Sp(u) \text{ on a } 1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda.$$

En particulier si $m_\lambda = 1$ alors on a $\dim E_\lambda = m_\lambda = 1$. Par suite dans l'application du théorème 4.4, on n'étudie que le cas des valeurs propres multiples.

Corollaire : *Si $P_u(X)$ admet n racines distinctes dans $\Bbbk$ (ou de façon équivalente si u admet n valeurs propres distinctes) alors u est diagonalisable.*

On démontre (algèbre bilinéaire) et nous l'admettons :

Théorème 4.5 : *Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.*

Exemple 4.3

Dans l'exemple 4.1 si p est un projecteur avec $p \neq 0$ et $p \neq Id_E$ alors

$Sp(p) = \{0, 1\}$ et $E = E_0 \oplus E_1$. Donc tout projecteur est diagonalisable de même si s est une symétrie non triviale, on a $Sp(s) = \{-1, 1\}$ et $E = E_{-1} \oplus E_1$ Donc toute symétrie est diagonalisable.

Dans l'exemple 4.2 on a $Sp(A) = \{2, -1\}$ avec -1 est la seule valeur propre multiple de A. On a $m_{(-1)} = 2 = \dim E_{-1}$ donc A est diagonalisable.(On aurait même pu remarquer que A est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable).

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & -3 & 7 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A et dire si A est diagonalisable (raisonner dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$).

2 TRIGONALISATION

2.1 Matrice trigonalisable

Définition 4.8

- Une matrice A de $M_n(\mathbb{k})$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire T

- De même $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

- Trigonaliser A (ou u) c'est trouver une telle matrice et une telle base (ou une matrice de passage).

Dans la suite nous supposons T triangulaire supérieure (ceci n'est pas une restriction car en transposant T on obtient une matrice triangulaire inférieure).

une matrice triangulaire supérieure T semblabla à A est appelée une réduite triangulaire de A.

Proposition 4.4: *Soit A une matrice trigonalisable semblable à une matrice triangulaire T. Alors les éléments de la diagonale de T sont les valeurs propres de A.*

Preuve

En effet, posons $T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$; on a

$$P_A(X) = P_T(X) = \begin{vmatrix} a_{11}-X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-X & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}-X \end{vmatrix}$$

$= (a_{11}-X)(a_{22}-X)\ldots\ldots(a_{nn}-X)$ d'où le résultat

Théorème 4.6 : *$u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si $P_u(X)$ est scindé dans $\mathbb{k}[X]$, c-à-d si $P_u(X)$ a toutes ses racines dans $\mathbb{k}$.*

Preuve

La condition nécessaire découle de la proposition 4.4.

Montrons la condition suffisante par recurrence sur $n = \dim E$

L'assertion est triviale pour $n = 1$

Soit $n \geq 2$; supposons l'assertion vérifiée au rang $n-1$

Soit λ_1 une racine de $P_u(X)$. Par hypothèse $\lambda_1 \in \mathbb{k}$ c'est donc une valeur propre de u et soit x_1 un vecteur propre associé à λ_1. Soit $F = \mathbb{k}x_1$ et soit $\mathcal{C}$ un supplémentaire de F dans E. $\mathcal{C}$ est un sous espace vectoriel de E de dimension $n-1$ et on a $\forall y \in E$, $y = z + ax_1$ (1) avec $z \in \mathcal{C}$ et $a \in \mathbb{k}$. En outre en posant $z = v(y)$ alors v est une application linéaire de E dans $\mathcal{C}$ (c'est le projecteur sur $\mathcal{C}$ parallèlement à F). $\forall x \in E$, en appliquant (1) à $y = u(x)$ on obtient $u(x) = v \circ u(x) + ax_1$

Alors $v \circ u \mid_{\mathcal{C}} \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$ et $P_u(X) = (X - \lambda_1)P_{v \circ u|_{\mathcal{C}}}(X)$; donc $P_{v \circ u|_{\mathcal{C}}}(X)$ aussi est scindé sur $\mathbb{k}$.Alors d'après l'hypothèse de recurrence, il existe une base $\mathcal{B} = (x_2, ..., x_n)$ de $\mathcal{C}$

dans laquelle la matrice de $v \circ u \mid_{\mathcal{C}}$est une matrice triangulaire $T = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base de E et on a
$u(x_1) = \lambda_1 x_1$
$u(x_2) = \alpha_2 x_1 + vou(x_2)$
....
$u(x_n) = \alpha_n x_1 + vou(x_n)$
d'où la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ est

$T' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ qui est triangulaire.

Corollaire : *Toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est trigonalisable.*

2.2 Trigonalisation

Pratiquement, la trigonalisation, comme la diagonalisation commence par la recherche des valeurs propres et des sous espaces propres.

Soit donc une matrice $A \in M_n(\mathbb{k})$ trigonalisable. On a donc $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure et P inversible. Il s'agit de déterminer le couple (T, P) On détermine d'abord les valeurs propres et les sous espaces propre de A. D'après la prop 4.4, les éléments de la diagonale de T sont les valeurs propres de A. Les éléments de T au dessus de la diagonale sont des inconnes à déterminer. Si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{k}^n$ et $\mathcal{B}'$ une base de $\mathbb{k}^n$ associée à T, alors on a:

$mat_{\mathcal{B}}(f) = A$; $mat_{\mathcal{B}'}(f) = T$; $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. Donc les colonnes de P sont les mcc dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\mathcal{B}'$ (toujours avec respect de l'ordre paritaire).

Pour les valeurs propres λ de A telles que $\dim E_{(\lambda)} = m_{(\lambda)}$ on choisit comme sous famille de $\mathcal{B}'$ associée à λ une base quelconque de $E_{(\lambda)}$. Pour les valeurs propres λ de A telles que $\dim E_{(\lambda)} \neq m_{(\lambda)}$, la sous famille de $\mathcal{B}'$ associée à λ est constituée des vecteurs d'une base queconque de $E_{(\lambda)}$ complètée par des vecteurs non propres, si possibles des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{k}^n$. On détermine alors les vecteurs non propres de $\mathcal{B}'$ et les éléments au dessus de la diagonale de T en utilisant judicieusement l'égalité $mat_{\mathcal{B}'}(f) = T$.

Remarque 4.6 : La méthode de trigonalisation décrite ci-dessus donne une infinité de solutions pour le couple (T, P)

Exemple 4.4 : Trigonaliser la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

on a $P_A(X)=\begin{vmatrix} 1-X & -3 & 4 \\ 4 & -7-X & 8 \\ 6 & -7 & 7-X \end{vmatrix}$

on trouve $P_A(X)=(X+1)^2(3-X)$

$Sp(A)=\{-1,3\}$ avec $m(-1)=2$ et $m(3)=1$

$E_{-1}=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \diagup (A+I_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ donc E_1 est définie par le système

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3 &= 0 \\ 4x_1-6x_2+8x_3 &= 0 \\ 6x_1-7x_2+8x_3 &= 0 \end{cases}$$

on obtient $x_2=2x_1$ et $x_3=x_1$ d'où $E_{-1}=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle$

$E_3=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \diagup (A-I_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ définie par

le système$\begin{cases} -2x_1-3x_2+4x_3 &= 0 \\ 4x_1-10x_2+8x_3 &= 0 \\ 6x_1-7x_2+4x_3 &= 0 \end{cases}$ on trouve $x_2=x_3=2\ x_1$ d'où $E_3=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\rangle$

A n'est pas diagonalisable car $m(-1)=2\neq\dim E_{-1}$ mais A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$ car $P_A(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ on a

$A=PTP^{-1}$ avec $T=\begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

La base associée à P est constituée des vecteurs bases de E_{-1} et E_3 c'est-à-dire

$u_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'un 3è vecteur choisi en priorité si possible parmi les vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{B}'=(u_1,u_2,e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$car $\det\mathcal{B}'=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-2\neq 0$

donc on peut tenter $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Pour le calcul de a, b et c, en désignant par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, on a :

$$mat_{\mathcal{B}}(f) = A; \ \ mat_{\mathcal{B}'}(f) = T = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(e_1) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ e_1 \end{array} \end{array}$$

$f(u_2) = au_1 - u_2$; mais comme $u_2 \in E_{(-1)}$, alors $f(u_2) = -u_2$ d'où $a = 0$.
$f(e_1) = bu_1 + cu_2 - e_1$ (base $\mathcal{B}'$)
$\quad = e_1 + 4e_2 + 6e_3$ (base $\mathcal{B}$)

Il vient : $b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ d'où le système

$\left\{ \begin{array}{lcl} b + c - 1 & = & 1 \\ 2b + 2c & = & 4 \\ 2b + c & = & 6 \end{array} \right.$ on trouve $a = 4$; $b = -2$ d'où $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3 POLYNOME D'ENDOMORPHISME

Dans ce qui suit, $u \in \mathcal{L}$ *avec* $u \neq 0$, $A \in M_n(\Bbbk)$, $A \neq 0$ *sont fixés.*

3.1 Resultats de base

on pose : $u^0 = Id_E$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = u \circ u^{k-1}$

$\forall P = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k X^k \in \Bbbk[X]$; on pose:

$P(u) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k u^k = a_0 Id_E + a_1 u + ... + a_r u^r$. $P(u) \in \pounds(E)$

$P(A) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k A^k = a_0 I + a_1 A + ... + a_r A^r$ (I est la matrice unité de $M_n(\Bbbk)$). $P(A) \in M_n(\Bbbk)$

Définition 4.9 : Un *polynôme d'endomorphisme est un endomorphisme* $f = P(u)$ *où* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $P \in \Bbbk[X]$. *Définition similaire pour* un *polynôme de matrice.*

N.B *Si E est de dimension finie n, alors du fait de la correspondance naturelle entre* $\mathcal{L}(E)$ *et* $M_n(\Bbbk)$, *tout résultat ou toute définition relatif aux endomorphismes de E a son équivalent naturel pour les matrices (et vice versa) qui ne sera pas toujours énoncé dans ce cours*

Algèbre sur un corps commutatif

* Soit $\mathbb{k}$ un corps commutatif; une $\mathbb{k}$-algèbre est un objet $(A, +, \cdot, *)$ où $(A, +, \cdot)$ est un anneau unitaire (non necessairement commutatif) et $(A, +, *)$ est un $\mathbb{k}$-espace vectoriel vérifiant:

$\forall a, b \in A, \forall \lambda \in \mathbb{k}$, $\lambda * (a \cdot b) = (\lambda * a) \cdot b = a \cdot (\lambda * b)$

Exemple 4.5: $\mathbb{k}[x]$, $\mathcal{L}(E)$ et $M_n(\mathbb{k})$ munis de leurs lois usuelles sont des $\mathbb{k}$-algèbres.

Sous algèbre

Soit $(A, +, \cdot, *)$ une $\mathbb{k}$-algèbre; $F \subset A$ est dit une sous algèbre de A si F est un sous anneau et un sous espace vectoriel de A c.à.d si:

$1_A \in F$ et $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{k}$, $x + y \in F$, $x \cdot y \in F$ et $\lambda x \in F$.

morphisme d'algèbre

* Soit A et B des $\mathbb{k}$-algèbres; un morphisme d'algèbre est une application $f : A \to B$ qui est linéaire et qui est un morphisme d'anneau c.à.d qui vérifie:$\forall x, y \in A, \forall \lambda \in \mathbb{k}$:

- , $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
- $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$
- $f(\lambda x) = \lambda f(x)$
- $f(1_A) = 1_B$;

Théorème 4.7: *L'application:* $\theta_u \begin{array}{c} \mathbb{k}[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \longmapsto P(u) \end{array}$ *est un morphisme d'algèbre.*

<u>Preuve</u>

En effet $\forall P, Q \in \mathbb{k}[X], \forall \lambda \in \mathbb{k}$, posons $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$; $Q = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j x^j$

$\cdot\ \theta_u(P + Q) = (P + Q)(u) = P(u) + Q(u) = \theta_u(P) + \theta_u(Q)$

$\cdot\ \theta_u(P) \circ \theta_u(Q) = P(u) \circ Q(u) = \left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i u^i\right) \circ \left(\sum\limits_{j=0}^{n} b_j u^j\right) = \sum\limits_{k=0}^{n+m} \left(\sum\limits_{i+j=k} a_i b_j\right) u^k$ (car u est linéaire) $= (PQ)(u) = \theta_u(PQ)$

$\cdot\ \theta_u(\lambda P) = (\lambda P)(u) = \lambda P(u) = \lambda \theta_u(P)$

$\cdot\ \theta_u(1) = 1(u) = Id_E$

D'après le théo 4.7, on a $\forall P, Q \in \mathbb{k}[X]$, $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$ d'où:

Corollaire: *Deux endomorphismes, polynômes d'un même endomorphisme, commutent*

Exercice: Montrer qu'un sous espace vectoriel de E stable par u est stable par tout endomorphisme polynôme de u.

Théorème 4.8 : *Soient $P_1, P_2, ..., P_r \in \Bbbk[X]$ deux à deux premiers entre eux ; alors on a:*

$$\ker[(\prod_{i=1}^{r} P_i)(u)] = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker[P_i(u)]$$

<u>Preuve</u>

Par recurrence sur r

$\cdot$ $r = 2$. Soient $P_1, P_2 \in \Bbbk[X]$ premiers entre eux ; montrons que $\ker[(P_1P_2)(u)] = \ker[P_1(u)] \oplus \ker[P_2(u)]$. $\forall x \in \ker[P_1(u)]$, on a $(P_1(u))(x) = 0 \Rightarrow (P_2(u))[(P_1(u))(x)] = 0 \Rightarrow (P_2(u) \circ P_1(u))(x) = 0 \Rightarrow ((P_2P_1)(u))(x) = 0$

$\Rightarrow ((P_1P_2)(u))(x) = 0 \Rightarrow x \in \ker[(P_1P_2)(u)]$. on a donc $\ker[P_1(u)] \subset \ker[(P_1P_2)(u)]$. On montre de même que $\ker[P_2(u)] \subset \ker[(P_1P_2)(u)]$. Il sensuit que $\ker[P_1(u)] + \ker[P_2(u)] \subset \ker[(P_1P_2)(u)]$. Réciproquement, soit $x \in \ker[(P_1P_2)(u)]$. D'après l'idendité de Bezout, il existe $Q_1, Q_2 \in \Bbbk[x]$ tels que $Q_1P_1 + Q_2P_2 = 1$; il s'ensuit que $(Q_1P_1 + Q_2P_2)(u) = Id_E$ d'où $x = ((Q_1P_1 + Q_2P_2)(u))(x) = ((Q_1P_1)(u))(x) + ((Q_2P_2)(u))(x) = x_1 + x_2$ avec $x_1 = ((Q_1P_1)(u))(x)$ et $x_2 = ((Q_2P_2)(u))(x)$. On a $(P_2(u))(x_1) = (P_2(u))[((Q_1P_1)(u))(x)] = (P_2(u) \circ (Q_1P_1)(u))(x) = ((P_2Q_1P_1)(u))(x) = ((Q_1P_1P_2)(u))(x)$

$= (Q_1(u) \circ (P_1P_2)(u))(x) = (Q_1(u))[((P_1P_2)(u))(x)] = 0$ car $x \in \ker[(P_1P_2)(u)]$. Par conséquent, $x_1 \in \ker[P_2(u)]$. On montre de même que $x_2 \in \ker[P_1(u)]$. On a donc $\ker[(P_1P_2)(u)] \subset \ker[P_1(u)] + \ker[P_2(u)]$ et en somme $\ker[(P_1P_2)(u)] = \ker[P_1(u)] + \ker[P_2(u)]$ Il reste à montrer que $\ker[P_1(u)] \cap \ker[P_2(u)] = \{0\}$. Soit $x \in \ker[P_1(u)] \cap \ker[P_2(u)]$. D'après ce qui précède, on a $x = ((Q_1P_1 + Q_2P_2)(u))(x) = ((Q_1P_1)(u))(x) + ((Q_2P_2)(u))(x)$

$= (Q_1(u))[(P_1(u))(x)] + (Q_2(u))[(P_2(u))(x)] = 0$ d'où le résultat.

On a bien $\ker[(P_1P_2)(u)] = \ker[P_1(u)] \oplus \ker[P_2(u)]$

$\cdot$ Supposons l'assertion vérifiée au rang $r - 1$ pour un entier $r \geq 3$. Soient $P_1, P_2, ..., P_r \in \Bbbk[x]$ deux à deux premiers entre eux ; Posons $P = P_1P_2...P_{r-1}$; on a $(P, P_r) = 1$. D'après le cas $r = 2$, on a:

$\ker[(PP_r)(u)] = \ker[P(u)] \oplus \ker[P_r(u)]$ (1). D'après l'hypothèse de récurrence, on a: $\ker[P(u)] = \bigoplus_{i=1}^{r-1} \ker[P_i(u)]$; d'où (1) $\Rightarrow \ker[(\prod_{i=1}^{r} P_i)(u)] = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker[P_i(u)]$

CQFD

Corollaire: *Soient $P_1, P_2, ..., P_r \in \Bbbk[X]$ deux à deux premiers entre eux tels que $(P_1P_2...P_r)(u) = 0$ alors on a:*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker[P_i(u)]$$

3.2 Polynôme minimal d'un endomorphisme

3.2.1 Polynôme annulateur

Définition 4.10 $P \in \Bbbk[X]$ est un *polynôme annulateur* de u ($respA$) si $P(u) = 0$ ($resp$ $P(A) = 0$).

On note $Ann(u) = \{P \in \Bbbk[X], \ P(u) = 0\}$, l'ensemble des polynômes annulateurs de u appelé l'*annihilateur* de u.

D*ans toute la suite de ce chapitre, on suppose* E *de dimension finie* n.

3.2.2 Polynôme minimal

Théorème 4.9 : On suppose E de dimension finie; alors

$$\exists! \mathfrak{m}_u \text{ unitaire } \in \Bbbk[X] \text{ tel que } \begin{array}{l} \mathfrak{m}_u(u) = 0 \\ \forall P \in \Bbbk[X], P(u) = 0 \Longrightarrow \mathfrak{m}_u \text{ divise } P \end{array}$$

Preuve

Considérons l'application θ_u définie dans le théo 4.7 ; on a: $\ker(\theta_u) = \{P \in \Bbbk[X], \ P(u) = 0\} = Ann(u)$. Comme θ_u est un morphime d'anneau, alors ker (θ_u)est un ideal de $\Bbbk[X]$. En outre on a $\ker(\theta_u) \neq (0)$: en effet E est de dimension finie n, donc $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie n^2. Alors la famille $\left\{Id, u, u^2, ...u^{n^2}\right\}$ formée de $n^2 + 1$ élément de $\mathcal{L}(E)$ est liée. Donc il existe $a_0, a_1, ...a_{n^2} \in \Bbbk$ non tous nuls tels que $a_0 Id + a_1 u + ... + a_{n^2} u^{n^2} = 0$. Alors le polynôme $P = a_0 + a_1 X + ... + a_{n^2} X^{n^2}$ est un polynôme annulateur non nul de u.

Comme $\Bbbk[X]$ est un anneau principal alors $\ker(\theta_u)$ est engendré par un polynôme unitaire unique $\mathfrak{m}_u$ CQFD

Définition 4.11: *Le polynôme m_u défini dans le théo 4.9 s'appelle le polynôme minimal de u.*

Par conséquent:

- m_u est un polynôme unitaire (c.à.d de coefficient directeur 1)

- m_u est un polynôme annulateur de u

- Si P est un polynôme annulateur de u, alors m_u divise P.

Théorème 4.10 (Cayley-Hamilton) : *Le polynôme caractéristique $P_A(X)$* de A *est un polynôme annulateur de* A (*resp* $P_u(X)$ *est un polynôme annulateur de* u)

Preuve

Posons $P_A(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$; on a $P_A(X) = \det(A - XI)$; posons $B = {}^t com(A - XI)$; les coefficients de B sont les cofacteurs de $A - XI$; donc ce sont des polynômes en X de degré $\leq n - 1$ d'où on a:

$B = B_0 + XB_1 + ... + X^{n-1}B_{n-1}$ où $B_i \in M_n(\Bbbk)$, pour $i = 0, n - 1$. Par ailleurs B étant l'adjoint classique de $A - XI$, on a:

$$B(A - XI) = \det(A - XI)I = P_A(X)I \Rightarrow (\sum_{i=0}^{n-1} X^i B_i)(A - XI) = (\sum_{i=0}^{n} a_i X^i)I$$

$$\Rightarrow B_0A+\sum_{i=1}^{n-1}X^i(B_iA-B_{i-1})-X^nB_{n-1} = \sum_{i=0}^{n}a_iX^iI$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} B_0A = a_0I \quad (0) \\ B_iA - B_{i-1} = a_iI \quad (i),\ i = 1, n \\ B_{n-1} = a_nI \quad (n) \end{cases}$$

En multipliant les égalités (i) par A^i et (n) par A^n et après addition, on obtient:

$$B_0A + \sum_{i=1}^{n-1}(B_iA^{i+1} - B_{i-1}A^i) = a_0I + a_1A + ... + a_nA^n$$

$$\Rightarrow B_0A + \sum_{j=2}^{n}B_{j-1}A^j - \sum_{j=1}^{n-1}B_{j-1}A^j - B_{n-1}A^n = P_A(A)$$

$$\Rightarrow 0 = P_A(A) \quad \text{CQFD}$$

Corollaire : *Le polynôme minimal d'un endomorphisme (ou d'une matrice) divise son polynôme caractéristique*

Théorème 4.11: *Soit P un polynôme annulateur de u. Alors les valeurs propres de u sont toutes racines de P.*

Preuve

Posons $P = \sum_{k=0}^{r} a_kX^k$ et soit $\lambda \in Sp(u)$ et x un vecteur propre de u associé à λ. On a $u^2(x) = u\,[u\,(x)] = u\,(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda^2 x$. De proche en proche on obtient $u^k(x) = \lambda^k x$. Il s'ensuit:

$(P\,(u))\,(x) = \left(\sum_{k=0}^{r} a_ku^k\right)(x) = \sum_{k=0}^{r} a_ku^k(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k\lambda^k x = \left(\sum_{k=0}^{r} a_k\lambda^k\right)x = P(\lambda)x$; comme P est un polynôme annulateur de u, on a $P(u) = 0$ et il s'ensuit $P(\lambda)x = 0$ d'où $P(\lambda) = 0$ car $x \neq 0$.

Théorème 4.12 : *$m_A(X)$ et $P_A(X)$ ont les mêmes racines dans* $\mathbb{C}$ donc *les mêmes facteurs irréductibles* (idem pour $m_u(X)$ et $P_u(X)$).

Preuve

D'après le théo de Cayley-Hamilton, m_u divise P_u donc les racines de m_u sont toutes racine de P_u. D'après le théorème précédent, m_u étant un polynôme annulateur de u, les valeurs propres de u c.à.d les racines de P_u, sont toutes racines de m_u d'où le résultat.

Corollaire : *Les valeurs propres de u sont les racines dans $\mathbb{k}$ du polynôme minimal de u.*

Définition 4.12 : *$P \in \Bbbk[X]$ est dit scindé sur $\Bbbk$ s'il peut s'écrire sous forme d'un produit de polynômes de $\Bbbk[X]$ de degrés 1, c.à.d si P admet r racines (distinctes ou non) dans $\Bbbk$ où $r = \deg(P)$. P est dit scindé simple sur $\Bbbk$ si P est scindé sur $\Bbbk$ et si chaque racine de P est simple.*

Théorème 4.13 : Les CSSE:
i) u est diagonalisable;
ii) Le polynôme minimal de u est scindé simple sur $\Bbbk$;
iii) il existe un polynôme annulateur de u scindé simple sur $\Bbbk$.

Preuve

i) $\Rightarrow$ *ii)* : Supposons u diagonalisable. Soient λ_i, $i \in \overline{1,r}$, les racines distinctes de $P_u(X)$; alors on a:

$Sp(u) = \{\lambda_i, i \in \overline{1,r}\}$ et $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{(\lambda_i)}$. Soit $T = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$; il suffit de montrer que $m_u(X) = T$ car T est scindé simple sur $\Bbbk$. D'après le théo 5, λ_i est racine de $m_u(X)$ d'où $(X - \lambda_i)$ est un facteur de $m_u(X)$ et par suite T divise $m_u(X)$. Pour montrer que $m_u(X)$ divise T, il suffit de montrer que T est un polynôme annulateur de u. Soit $j \in \overline{1,r}$; alors $\forall y \in E_{(\lambda_j)}$, on a

$(T(u))(y) = (\prod_{i=1}^{r}(u - \lambda_i Id))(y) = (\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r}(u - \lambda_i Id))[(u - \lambda_j Id)(y)] = 0$. on a donc $(T(u))(E_{(\lambda_j)}) = 0, \forall j \in \overline{1,r}$; et comme $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{(\lambda_i)}$, on a $T(u) = 0$ comme escompté.

ii) $\Longrightarrow$ *i)* : Supposons $m_u(X)$ scindé simple sur $\Bbbk$; on a alors $m_u(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j \in \Bbbk$. D'après le corollaire du théo précédent, on a $Sp(u) = \{\lambda_i, i \in \overline{1,r}\}$. Les $(X - \lambda_i)$ sont deux à deux premiers entre eux et on a

$\prod_{i=1}^{r}(u - \lambda_i Id) = m_u(u) = 0$ donc d'après le corollaire du théo 2, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(u - \lambda_i Id) = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{(\lambda_i)}$. E est somme direct des sous espaces propres de u d'où u est diagonalisable.

ii) $\Longrightarrow$ *iii)* car le polynôme minimal m_u de u est un polynome annulateur de u.

iii) $\Longrightarrow$ *ii)* : Supposons qu'il existe un polynôme scindé simple P annulateur de u. Alors tout polynôme non constant divisant P est scindé simple, en particulier m_u.

Exemple 4.6

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminer les valeurs propres, les vecteurs propres et le polynôme minimal de A.

On trouve $P_A(X) = (2-X)(1+X)^2 \Rightarrow Sp(A) = \{-1; 2\}$. On trouve $E_{(-1)} =$ plan d'équation: $x+y+z=0$; $E_{(2)} = \langle(1,1,1)\rangle$. A est diagonalisable car la dimension de chaque sous espace propre est égal à la multiplicité de la valeur propre associée. Par conséquent, $m_A(X)$ est scindé simple ; et comme en plus $m_A(X)$ et $P_A(X)$ ont les mêmes facteurs irréductibles, on a: $m_A(X) = (X-2)(1+X)$

3.3 Sous espace caractéristique

Définition 4.13: Soient $\lambda \in Sp\,(u)$ et m_λ, l'ordre de multiplicité de λ dans $P_u(X)$

Le *sous espace caractéristique* de u associé à λ est $C_{(\lambda)} = \ker\,(u - \lambda Id_E)^{m_\lambda}$

Propriétés 4.1: On a:
· $E_{(\lambda)} \subset C_{(\lambda)}$
· $E_{(\lambda)}$ et $C_{(\lambda)}$ sont stables u.

En effet, $\forall x \in E_{(\lambda)}$, on a $(u - \lambda Id)(x) = 0$. Il s'ensuit:
$(u-\lambda Id)[u(x)] = ((u-\lambda Id)\circ u)(x) = (u\circ(u-\lambda Id))(x) = u[(u-\lambda Id)(x)] = 0$.
On a donc $u(x) \in E_{(\lambda)}$; alors $u(E_{(\lambda)}) \subset E_{(\lambda)}$.
On montre de même que $u(C_{(\lambda)}) \subset C_{(\lambda)}$

Théorème 4.14:
1) *Si $P_u\,(X)$ est scindé sur $\mathbb{k}$, alors E est somme directe des sous espaces caractéristiques de u.*
2) $\dim C_{(\lambda)} = m_\lambda$
3) $C_{(\lambda)} = \ker\,(u - \lambda Id_E)^{s_\lambda}$ où s_λ est l'ordre de multiplicité de λ dans $m_u(X)$.

Preuve

1) $P_u(X)$ étant scindé sur $\mathbb{k}$, on a $P_u(X) = (-1)^n \prod\limits_{\lambda\in Sp(u)} (X-\lambda)^{m_\lambda}$. Comme les $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ sont premiers entre eux et que $P_u(u) = 0$, d'après le corollaire du théorème$*$, on a $E = \bigoplus\limits_{\lambda\in Sp(u)} \ker(u-\lambda Id)^{m_\lambda} = \bigoplus\limits_{\lambda\in Sp(u)} C_{(\lambda)}$

2) Le même raisonnement appliqué à $m_u(X) = \prod\limits_{\lambda\in Sp(u)} (X-\lambda)^{s_\lambda}$ montre que $E = \bigoplus\limits_{\lambda\in Sp(u)} \ker(u-\lambda Id)^{s_\lambda}$; donc on a: $\bigoplus\limits_{\lambda\in Sp(u)} \ker(u-\lambda Id)^{m_\lambda} = \bigoplus\limits_{\lambda\in Sp(u)} \ker(u-$

$\lambda Id)^{s_\lambda}$; comme en outre, $\forall \lambda \in SP(u)$, $\ker(u-\lambda Id)^{s_\lambda} \subset \ker(u-\lambda Id)^{m_\lambda}$ (car $s_\lambda \leq m_\lambda$), on a $\ker(u-\lambda Id)^{s_\lambda} = \ker(u-\lambda Id)^{m_\lambda}$ c.à.d $C_{(\lambda)} = \ker(u-\lambda Id)^{s_\lambda}$ d'où 3).

2) On sait que $\forall \lambda \in Sp(u)$, $C_{(\lambda)}$ est stable par u et d'après 1), $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} C_{(\lambda)}$. Alors en désignant par u_λ l'endomorphisme induit par u sur $C_{(\lambda)}$ on a:

$P_u(X) = |u - XId_E| = \prod_{\lambda \in Sp(u)} \left|u_\lambda - XId_{C_{(\lambda)}}\right| = \prod_{\lambda \in Sp(u)} P_{u_\lambda}(X)$ Or par definition de $C_{(\lambda)}$, on a

$(u_\lambda - \lambda Id)^{m_\lambda}(C_{(\lambda)}) = (u-\lambda Id)^{m_\lambda}(C_{(\lambda)}) = 0$; donc $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ est un polynôme annulateur de u_λ;par suite λ est la seule valeur propre de u_λ; alors on a $P_{u_\lambda}(X) = (-1)^{q_\lambda}(X-\lambda)^{q_\lambda}$ où $q_\lambda = \dim(C_{(\lambda)})$.

Alors l'égalité $P_u(X) = \prod_{\lambda \in Sp(u)}^{r} P_{u_\lambda}(X)$, s'écrit: $(-1)^n \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)^{m_\lambda} = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (-1)^{q_\lambda}(X-\lambda)^{q_\lambda}$; on en déduit que $\forall \lambda \in Sp(u)$, $m_\lambda = q_\lambda = \dim(C_{(\lambda)})$ CQFD

3.4 Etude de $\mathbf{e}^A$, $\mathbf{e}^u$

Pour définir l'exponentielle d'une matrice ou d'un endomorphisme nous aurons besoin du résultat suivant:

Théorème 4.15 : (Norme sur $M_n(\Bbbk)$) $\forall A = (a_{ij}) \in M_n(\Bbbk)$, on pose $\|A\| = n\max\{|a_{ij}|, i,j \in \overline{1,n}\}$. Alors *la fonction*

$\|\cdot\| : \begin{array}{c} M_n(\Bbbk) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ A \longmapsto \|A\| \end{array}$ *est une norme sur $M_n(\Bbbk)$ qui vérifie:*

$\forall A, B \in M_n(\Bbbk)$, $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

En outre l'espace vectoriel normé $(M_n(\Bbbk), \|\cdot\|)$ est complet.

<u>Preuve</u>

Montrons que$\|\cdot\|$ est une norme c.à.d que $\forall A, B \in M_n(\Bbbk)$, $\forall \lambda \in \Bbbk$, $||A|| = 0 \Longrightarrow A = 0$; $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$; $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\Bbbk)$, $\forall \lambda \in \Bbbk$.

- $\|A\| = 0 \Longleftrightarrow n\max\{|a_{ij}|, i,j \in \overline{1,n}\} = 0 \Longleftrightarrow |a_{ij}| = 0, \forall 1 \leq i,j \leq n \Longleftrightarrow a_{ij} = 0, \forall 1 \leq i,j \leq n \Longleftrightarrow A = 0$.

- $\|\lambda A\| = n\max\{|\lambda a_{ij}|, i,j \in \overline{1,n}\} = n\max\{|\lambda|\,|a_{ij}|, i,j \in \overline{1,n}\} = |\lambda|\, n\max\{|a_{ij}|, i,j \in \overline{1,n}\} = |\lambda|\,\|A\|$.

- $\forall 1 \leq i,j \leq n$, on a $|a_{ij}| \leq \frac{1}{n}\|A\|$ et $|b_{ij}| \leq \frac{1}{n}\|B\|$ par définition de $\|\cdot\|$. Il s'ensuit:

$|a_{ij}+b_{ij}| \leq |a_{ij}|+|b_{ij}| \leq \frac{1}{n}\|A\|+\frac{1}{n}\|B\|$ d'où $\max\{|a_{ij}+b_{ij}|, i,j \in \overline{1,n}\} \leq \frac{1}{n}\|A\|+\frac{1}{n}\|B\|$ puis $n\max\{|a_{ij}+b_{ij}|, i,j \in \overline{1,n}\} \leq \|A\|+\|B\|$ et enfin $\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|$.

Donc $\|\cdot\|$ est une norme sur $M_n(\mathbb{k})$. Montrons maintenant que $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

Posons $AB = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$; on a $\forall 1 \leq i,j \leq n$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ d'où $|c_{ij}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\,|b_{kj}| \leq n\left(\frac{1}{n}\|A\|\right)\left(\frac{1}{n}\|B\|\right)$ car $\forall 1 \leq k \leq n$, $|a_{ik}| \leq \frac{1}{n}\|A\|$ et $|b_{kj}| \leq \frac{1}{n}\|B\|$; par suite $\max\{|c_{ij}|, i,j \in \overline{1,n}\} \leq \frac{1}{n}\|A\|\,\|B\|$ puis $n\max\{|c_{ij}|, i,j \in \overline{1,n}\} \leq \|A\|\,\|B\|$ c.à.d $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

Le dernier point du théorème découle du fait que tout $\mathbb{k}$-espace vectoriel normé de dimension finie avec $\mathbb{k}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{k}=\mathbb{C}$ est complet.

Corollaire et définition : *$\forall A \in M_n(\mathbb{k})$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{k!}A^k + \ldots$ est normalement convergente et on note*

$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k$ sa somme, appelé l'exponentielle de A.

En effet d'après le théorème précédent, on a $\left\|\frac{1}{k!}A^k\right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$ qui est le terme générale d'une série numérique convergente (de somme $e^{\|A\|}$). Comme l'espace vectoriel normé $(M_n(\mathbb{k}), \|\cdot\|)$ est complet, alors la série normalement convergente $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k$ est convergente.

Propriétés 4.2 :

1) $e^0 = I$ (ici 0 est la matrice nulle de $M_n(\mathbb{k})$)

2) $\forall \lambda \in \mathbb{k}$, $e^{\lambda I} = e^{\lambda} I$

3) $\forall A, \in M_n(\mathbb{k})$, e^A est inversible et on a: $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

4) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{k})$ telles que $AB = BA$ on a $e^{A+B} = e^A e^B$

5) $\forall A, P \in M_n(\mathbb{k})$ avec P invresible on a: $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$

Preuve

1), 2) et 5) s'obtiennent par un calcul direct à partir de la définition de l'exponentielle.

Quant à 4) posons $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = \frac{1}{k!}A^k$ et $v_k = \frac{1}{k!}B^k$. Alors du fait que les séries $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ convergent normalement respectivement vers e^A et e^B, la série $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right) * \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right)$ de terme général $w_k = \sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i}$ converge vers $e^A e^B$. Or on a $\forall k \in \mathbb{N}$:

$\sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{i!} A^i\right) \left(\frac{1}{(k-i)!} B^{(k-i)}\right) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!(k-i)!} A^i B^{(k-i)} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} A^i B^{(k-i)} =$ $\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i A^i B^{(k-i)} = \frac{1}{k!} (A+B)^k$ d'après la formule du binôme de Newton car par hypothèse, $AB = BA$. Il s'ensuit que $w_k = \frac{1}{k!} (A+B)^k$ et donc $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right) * \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k$ et l'égalité des sommes de ces deux séries fournit le résultat escompté.

Maintenant du fait que A et $-A$ commutent, on a d'après 4), $e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I$ d'où 3)

Définition 4.14 : $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, on définit de même $e^u = \sum \frac{1}{k!} u^k$ dont les propriétés sont similaires et se deduisent de celles de e^A.

Exemple 4.7

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & ... & 1 \\ . & 1 & . \\ 1 & ... & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\Bbbk)$. Calculer e^A

On a: $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$. On vérifie par recurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = n^{(k-1)} A$.

Il vient

$$e^A = I + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^{(k-1)}}{k!} A = I + \frac{1}{n} (\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} - 1) A \Rightarrow e^A = I + \frac{1}{n} (e^n - 1) A.$$

4 REDUCTION DE JORDAN

La réduction de Jordan est une forme plus élaborée de trigonalisation qui utilise des concepts et des outils que nous définissons maintenant.

4.1 Surdiagonale

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\Bbbk)$; l'ensemble des $n-1$ éléments $(a_{12}, a_{23}, ..., a_{n-1n})$ situés juste au dessus de la diagonale de A est appelé la surdiagonale de A

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ & & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & & a_{n-1n} \\ a_{n1} & & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4.2 Matrice sous bloc de Jordan

Une matrice sous bloc de Jordan est une matrice triangulaire ayant les coefficients tous égaux à un scalaire λ sur la diagonale, les coefficients tous égaux à 1 sur la surdiagonale et les coefficients tous nuls ailleurs, donc de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Toute matrice carrée d'ordre 1 est par définition une matrice sous bloc de Jordan

Une matrice sous bloc de Jordan d'ordre r a un lot de $r-1$ "1 consécutifs" sur la surdiagonale.

4.3 Matrice élémentaire de Jordan

Une matrice élémentaire de Jordan est une matrice triangulaire ayant les coefficients tous égaux à un scalaire λ sur la diagonale, les coefficients égaux à 1 ou 0 sur la surdiagonale et les coefficients tous nuls ailleurs, donc de la forme

$$\lambda I_r + N = \begin{pmatrix} \lambda & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & a_{23} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & a_{r-1r} \\ 0 & & & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad a_{ii+1} \in \{0,1\}, \forall 1 \leq i \leq r-1$$

$$(r \in \mathbb{N}^*).$$

Il apparaît qu'une matrice élémentaire de Jordan est une matrice diagonale par plocs où chaque bloc diagonale est une matrice sous bloc de Jordan.

Le nombre de sous blocs de Jordan est égal au nombre de "0" sur la surdiagonale +1.

Exemple 4.8: la matrice $G = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice élémentaire de Jordan; sa forme diagonale par blocs est $G = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec:

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ des matrices sous blocs de Jordan.

4.4 Matrice de Jordan

Une matrice de Jordan est une matrice triangulaire qui est diagonale par blocs de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_p \end{pmatrix}$$

où $\forall 1 \leq i \leq p$, M_i est une matrice élémentaire de Jordan

Nous nous proposons de montrer ici que si un endomorphisme u de E est trigonalisable, alors il existe une base B de E telle que $mat_B\left(u\right)$ a la forme de J et donner des méthodes pour préciser J et déterminer B.

Soit donc $u \in \mathcal{L}\left(E\right)$, trigonalisable. Alors on sait que : $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in Sp(u)} C_\lambda$, où $\forall \lambda \in Sp(u)$, $C_\lambda = \ker(u - \lambda Id_E)^{m_\lambda} = \ker(u - \lambda Id_E)^{s_\lambda}$ est le sous espace caractéristique associé à u (m_λ et s_λ sont respectivement la multiplicité de λ et l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme minimal de u). En outre $\forall \lambda \in Sp(u)$, C_λ est stable par u. Alors en désignant par u_λ l'endomorphisme de C_λ induit par u on a :

$u = \bigoplus\limits_{\lambda \in Sp(u)} u_\lambda$. Par conséquent, si $\forall \lambda \in Sp(u)$, B_λ est une base de C_λ, alors $B = \bigcup\limits_{\lambda \in Sp(u)} B_\lambda$ est une base de E telle que $mat_B\left(u\right)$ est une matrice diagonale par blocs où les blocs diagonaux respectifs sont les matrices des u_λ dans les bases B_λ.Il suffit donc de montrer que $\forall \lambda \in Sp(u)$, C_λ possède une base B_λ telle que $mat_{B_\lambda}\left(u_\lambda\right)$ soit une matrice élémentaire de Jordan. Pour cela , montrons les résultats suivants :

Théorème 4.16:

a) Soit g un endomorphisme de E nilpotent d'ordre r ($r \leq n$); Soit $y \in E$ tel que $g^{r-1}\left(y\right) \neq 0$. Alors la famille $\mathcal{F} = \left\{y, g(y), ..., g^{r-1}(y)\right\}$ est libre.

b) Soit F le sous espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$; alors F est stable par g et si on désigne par g_F l'endomorphisme de F induit par g, alors la matrice de g_F dans la base $(g^{r-1}(y), ...g(y), y)$ est une matrice sous bloc de Jordan d'ordre r égale à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Preuve</u>

Soient $a_0, a_1, ..., a_{r-1} \in \Bbbk$ tels que $a_0 y + a_1 g(y) + ... + a_{r-1} g^{r-1}(y) = 0$ (E_0); alors en appliquant g^{r-1} aux deux membres de l'égalité (E_0), on obtient :$a_0 = 0$ d'où $a_1 g(y) + ... + a_{r-1} g^{r-1}(y) = 0$ (E_1); alors en appliquant g^{r-2} aux deux membres de l'égalité (E_1), on obtient :$a_1 = 0$ d'où $a_2 g(y) + ... + a_{r-1} g^{r-1}(y) = 0$ (E_2); on obtient ainsi de proche en proche : $a_0 = a_1 = ... = a_{r-1} = 0$ d'où a).

b) découle de la définition de $\mathcal{F}$ en particulier du fait que $g\left[g^k(y)\right] = g^{k+1}(y)$, pour $0 \leq k \leq r-2$ et $g\left[g^{r-1}(y)\right] = g^r(y) = 0$.

Corollaire : S*oit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable et soit $\lambda \in Sp(u)$. Soient s_λ l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme minimal de u, C_λ le sous espace caractéristique associé à λ.*

a) Soit $y \in C_\lambda$ tel que $(u - \lambda Id_E)^{s_\lambda - 1}(y) \neq 0$; on pose pour $1 \leq k \leq s_\lambda$, $y_k = (u - \lambda Id_E)^{s_\lambda - k}(y)$. Alors la famille $\mathcal{F} = \{y_1, y_2, ...y_{s_\lambda}\}$ est libre.

b) Soit F le sous espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$. Alors F est un sous espace vectoriel de C_λ stable par u et si on désigne par u_F l'endomorphisme de F induit par u alors la matrice de u_F dans la base $(y_1, ..., y_{s_\lambda})$ est une matrice sous bloc de Jordan d'ordre s_λ égale à :

$$H_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

<u>Preuve</u>

On applique le théorème avec $E = C_\lambda$ et $g = u_\lambda - \lambda Id_{C_\lambda}$ en effet, g est l'endomorphisme de C_λ induit par $u - \lambda Id_E$ et par définition de C_λ et s_λ, g est nilpotent d'ordre s_λ.

Remarque 4.7: (et définition) Avec les considération du corollaire, le vecteur $y_1 = (u - \lambda Id_E)^{s_{\lambda - 1}}(y) \in E_\lambda$, le sous espace propre associé à λ; les vecteurs $y_2, ..., y_{s_\lambda}$ sont des vecteurs de C_λ qui ne sont pas des vecteurs propres de u. On les appelle des *vecteurs radicaux* de u.

On démontre et nous admettons le résultat suivant:

Lemme : *Avec les considérations ci-avant, F admet un supplémentaire dans C_λ stable par u, contenant un supplémentaire de $\Bbbk y_1$ dans E_λ.*

Soit donc G_1 un supplémentaire de F dans C_λ stable par u et contenant un supplémentaire dans C_λ de $\mathbb{k}y_1$. Soit u_{G_1} l'endomorphisme de G_1 induit par u. On a $u_\lambda = u_F \oplus u_{G_1}$.

Si $\Im$ est une base de G_1, alors $B_\lambda = \mathcal{F} \cup \Im$ est une base de C_λ telle que $mat_{B_\lambda}(u_\lambda)$ est la matrice diagonale par blocs

$M_\lambda = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & L_1 \end{pmatrix}$ où $L_1 = mat_{\Im}(u_{G_1})$.

On a $(u_{G_1} - \lambda Id_E)^{s_\lambda} = 0$, donc $(u_{G_1} - \lambda Id_E)$ est nilpotent d'ordre $t \leq s_\lambda$. On a aussi $\dim G_1 < \dim C_\lambda$. Si $G_1 \neq \{0\}$, on applique le théorème avec $E = G_1$ et $g = (u_{G_1} - \lambda Id_E)$; on obtient une famille libre $T = \{z_1, z_2, ..., z_t\}$ de G_1 où z_1 est un vecteur propre de u et $z_2, ..., z_t$ des vecteurs radicaux, et une base T' d'un supplémentaire G_2 dans G_1 du sous espace vectoriel engendré par T stable par u et contenant un supplémentaire dans G_1 de $\mathbb{k}z_1$telles que $mat_{T\cup T'}(u_{G_1})$ est la matrice diagonale par blocs

$M_\lambda = \begin{pmatrix} H_2 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}$ où H_2 est la matrice sous bloc de Jordan d'ordre t

$$H_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

On a $\dim G_2 < \dim G_1$. Si $G_2 \neq \{0\}$, on poursuit l'opération. On obtient une suite (G_k) de sous espace vectoriels de E qui décroît strictement tant qu'elle n'a pas atteint $\{0\}$. Comme E est de dimension finie, elle atteint $\{0\}$ à un rang k. Par conséquent il existe une base B_λ de $C_\lambda$et des matrices sous blocs de Jordan $H_1, H_2, ..., H_k$ associées à λ telles que $mat_{B_\lambda}(u_\lambda)$ est la matrice diagonale par blocs

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} H_1 & & 0 \\ & H_2 & \\ & & \\ 0 & & H_k \end{pmatrix}$$

Nous résumons tous ces résultats dans les théorèmes suivants:

Théorème 4.17 : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable, A sa matrice dans une base donnée de E, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de u, $m_1, m_2, ..., m_p$ leurs multiplicités respectives, $C_1, C_2, ..., C_p$, les sous espaces caractéristiques respectives associés. Alors :

- *A est semblable à une matrice de Jordan de la forme*

$$J = \begin{pmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_p \end{pmatrix}$$

où $\forall 1 \leq i \leq p$, M_i est une matrice élémentaire de Jordan d'ordre m_i de la forme $M_i = \lambda_i I_{m_i} + N_i$

- la base de E associée à J pour u est une base adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} C_i$ c.à.d *de la forme $B = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_p$ où $\forall 1 \leq i \leq p$, B_i est une base de C_i.*

Définition 4.15 : - *Avec les considérations ci-avant, J est appelée une réduite de Jordan de A.*

- Jordaniser A (ou u) c'est trouver une matrice de Jordan J et une base B de E (ou une matrice de passage) telles que $mat_B(u) = J$. (B est alors appelée une base associée à J pour u)

- Si un tel couple (J, B) existe on dit que A (ou u) est jordanisable.

Remarque 4.8 Deux réduites de Jordan d'une même matrice A diffèrent par une une permutaion des blocs élémentaires de Jordan ou des sous blocs de Jordan à l'intérieur des blocs élémentaires de Jordan. Donc c'est à de telles permutations près qu'on parle souvent de *la réduite de Jordan* de A.

Proposition 4.5 : $A \in M_n(\Bbbk)$ (resp $u \in \mathcal{L}(E)$) jordanisable $\Longleftrightarrow$ A (resp u) trigonalisable $\Longleftrightarrow$ $P_A(X)$ $(= P_u(X))$ scindé dans $\Bbbk[X]$.

Définition 4.16: - *Avec les considérations du théorème précédent, $\forall 1 \leq i \leq p$, M_i est appelé le bloc élémentaire de Jordan associé à λ_i dans J, et B_i la famille de B associée à λ_i.*

- Toute matrice sous bloc de Jordan $J_{i,k}$ composant M_i est appelé un sous bloc de Jordan associé à λ_i, auquel correspond dans l'ordre paritaire de J et de B, une suite de vecteurs de B appelée la sous famille de B associée à $J_{i,k}$.

Théorème 4.18 : *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, jordanisable, B_0 une base de E, $A = mat_{B_0}(u)$, J une réduite de Jordan de A, B une base de E associé à J pour u.*

Soient $\lambda \in Sp(u)$, m_λ la multiplicité de λ, s_λ l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme minimal de u, E_λ le sous espace propre asscié à λ, $d_\lambda = \dim E_\lambda$, C_λ le sous espace caractéristique associé à λ et M_λ le bloc élémentaire de Jordan associé à λ dans J. Alors :

- Le nombre de sous blocs de Jordan de M_λ est égal à d_λ; donc le nombre de 0 sur la surdiagonale de M_λ est égal à $d_\lambda - 1$

- Il existe au moins un sous bloc de Jordan de M_λ d'ordre s_λ et c'est l'ordre maximal des sous blocs de Jordan de M_λ; donc il existe au moins un lot de "1 consécutifs"comportant $s_\lambda - 1$ "1" sur la surdiagonale de M_λ, tout autre lot de ."1 consécutifs" sur la surdiagonale de M_λ comporte au plus $s_\lambda - 1$ "1".

- Si $J_{\lambda,k}$ est un sous bloc de Jordan d'ordre r associé à λ, alors la sous famille de B associée à $J_{\lambda,k}$ est de la forme $(y_1, y_2, ..., y_r)$ où $y_r \in C_\lambda$ avec $(u - \lambda Id_E)^{r-1}(y_r) \neq 0$, et pour $1 \leq i \leq r-1$, $y_i = (u - \lambda Id_E)(y_{i+1})$ donc:

pour $1 \leq i \leq r-1$, $y_i = (u - \lambda Id_E)^{r-i}(y_r)$ et par suite $y_i \in \operatorname{Im}(u - \lambda Id_E)^{r-i}$. *En particulier* $y_1 \in \operatorname{Im}(u - \lambda Id_E)^{r-1}$

y_1 *est un vecteur propre de u associé à* λ, $y_2, ..., y_r$ *sont des vecteurs radicaux de u associés à* λ.

- Pour $1 \leq i \leq r$, *soit* X_i *la mcc de* y_i *dans* B_0. *Alors on a* $\forall 2 \leq i \leq r$:

$$(A - \lambda I_n) X_i = X_{i-1} \quad \textit{(équation des vecteurs radicaux)}$$

Exemple 4.9: Diagonaliser ou jordaniser si possible les matrices

$1°\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; $2°\ M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Résolution

1°

<u>Détermination du polynôme caractéristique $P_B(X)$</u>

$B - XI$ est une matrice triangulaire par blocs, donc on a:

$$P_B(X) = \det(B - XI) = \begin{vmatrix} 3-X & 1 \\ -4 & -1-X \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ -1 & -X \end{vmatrix}$$
$$= [(3-X)(-1-X)+4][-X(2-X)+1]$$
$$= \left(X^2 - 2X + 1\right)\left(X^2 - 2X + 1\right)$$
$$P_B(X) = (X-1)^4$$

d'où $\lambda_1 = 1$ est une valeur propre quadriple

<u>Détermination du polynôme minimal</u>

$m_B(X)$ divise $(X-1)^4$ donc $m_B(X) = (X-1)^k$ avec $k \in \overline{1,4}$

Il est clair que $m_B(X) \neq (X-1)$ car $B \neq \mathbf{I}$.

On a $(B-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$(B-I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

On a $B - I \neq 0$ et $(B-I)^2 = 0$ donc $m_B(X) = (X-1)^2$

<u>Sous-espace propre associé à 1</u>

$E_1 = \left\{X \in \mathbb{R}^4 /\ (B-I)X = 0\right\}$

$E_{(1)}$ est définie par le système

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -4x - 2y = 0 \\ 7x + y + z + t = 0 \\ -17x - 6y - z - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 5x - z - t = 0 \\ -5x - z - t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = -t - 5x \end{cases}$$

Donc $(x,y,z,t) = (x,-2x,-5x-t,t)$
$= x\,(1,-2,-5,0) + t\,(0,0,-1,1)$
d'où $E_{(1)} = \langle (1,-2,-5,0)\,,(0,0,-1,1) \rangle$

B n'est pas diagonalisable car $m_B\,(X)$ n'est pas scindé simple sur $\mathbb{R}$ (ou car $\dim E_{(1)} \neq m_{(1)}$) mais elle est jordanisable car $P_B\,(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

<u>Détermination de la réduite de Jordan et d'une base associée</u>

Soit J une réduite de Jordan de B. Comme 1 est la seule valeur propre de B, alors J est égale au seul bloc élémentaire de jordan associé à 1 qu'elle comporte et le sous espace caactéristique C_1est égal à $\mathbb{R}^4$. J comporte $d_1 = 2$ sous blocs de Jordan.

En outre, $m_B\,(X) = (X-1)^2$ d'où $s = 2$ qui est l'ordre maximal des sous blocs de Jordan. Par suite les deux sous blocs de Jordan de J sont d'ordre 2; d'où la réduite de Jordan de B est:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\delta = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ une base associée à J. D$'$après la forme de J, ε_1 et ε_3 sont des vecteurs propres et ε_2 et ε_4 sont des vecteurs radicaux. Tout vecteur de y de C_1 $(= \mathbb{R}^4)$ tel que $(B-I)(y) \neq 0$ convient pour ε_2. donc on peut prendre $\varepsilon_2 = e_3 = (0,0,1,0)$ D'où $\varepsilon_1 = (B-I)(\varepsilon_2) = (0,0,1,-1)$. Pour déterminer la sous famille $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ associé au second sous bloc de jordan de J, il est imprudent de procéder par la même méthode car il n'est pas sûr qu'on obtiendra des vecteurs linéairement indépendants. ε_3 est un vecteur propre de B appartenant à $\mathrm{Im}(B-I)$ et non colinéaire à ε_1. on vérifie que le vecteur $(1,-2,-5,0)$ convient qu'on peut donc prendre pour ε_3. Posons $\varepsilon_4 = (x,y,z,t)$. D'après l'équation des vecteurs radicaux, on a

$(B-I)\,(\varepsilon_4) = \varepsilon_3$; d'où:

$$\begin{cases} 2x + y & = & 1 \\ -4x - 2y & = & -2 \\ 7x + y + z + t & = & -5 \\ -17x - 6y - z - t & = & 0 \end{cases}$$

pour $x = 0$, $t = 0$ on a $y = 1$ et $z = -6$

Donc $\varepsilon_4 = (0,1,-6,0)$ d'où une matrice de passage associée a J est:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & -6 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2°

On trouve $P_M(X) = (X+1)(X-1)^3 \Rightarrow Sp(M) = \{-1;1\}$

$E_{(-1)} = \langle (0,1,0,1) \rangle$; $E_{(1)} = \langle (1,0,0,-1) \rangle$

M n'est pas diagonalisable car $\dim E_{(1)} \neq m_{(1)}$ mais elle est jordanisable car $P_M(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Dans la réduite de Jordan de M, le bloc associé à la valeur propre -1 est d'ordre 3 et le nombre de 0 sur sa surdiagonale est égal à $d_1 - 1 = 0$ Donc la réduite de Jordan de M est :

$$K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\xi = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ une base de $\mathbb{R}^4$ associée à K. u_1 est un vecteur quelconque de $E_{(-1)}$. Donc on peut prendre $u_1 = (0,1,0,1)$. u_4 est un élément quelconque de $C_{(1)} \setminus \ker(M-I)^2$, donc tout vecteur y tel que $(M-I)^3(y) = 0$ et $(M-I)^2(y) \neq 0$ convient.

On vérifie que $e_1 = (1,0,0,0)$ convient

$u_3 = (M-I)(u_4) = (0,0,1,-1)$; $u_2 = (M-I)(u_3) = (M-I)^2(u_4) = (1,0,0,-1)$. d'où une matrice de passage associée à K est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 4.9:

a) Il existe une infinité de solutions pour le couple (J, P).

b) Pour les matrices de petite taille (matrices carrées d'ordre $n \leq 6$), la méthode exposée dans ce cours est une méthode complète de jordanisation.

Mais elle est insuffisante pour les matrices de grande taille ($n \geq 7$) car elle ne donne pas la structure complète de la réduite de Jordan, en l'occurrence, le nombre $n_{\lambda,k}$ de sous blocs de Jordan d'un ordre k donné associé à une valeur propre λ donné de A. Une approche plus complexe établit la formule:

$$n_{\lambda,k} = 2\dim\left[\ker(A-\lambda I)^k\right] - \dim\left[\ker(A-\lambda I)^{k+1}\right] - \dim\left[\ker(A-\lambda I)^{k-1}\right]$$

(formule à ne pas apprendre!!!)

5 APPLICATIONS DE LA REDUCTION DES MATRICES

5.1 Puissance d'une matrice

Nous en donnons 3 méthodes classiques de calcul.

Soit $A \in M_n(K)$, $A \neq 0$ et $q \in \mathbb{N}$

1^{er}cas : A est diagonalisable

alors $A = PDP^{-1}$avec D diagonale et il s'en suit $A^q = PD^qP^{-1}$

$(D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ étant diagonale on a $D^q = \begin{pmatrix} \lambda_1^q & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^q \end{pmatrix})$

La formule ci-dessus reste valable pour $q \in \mathbb{Z}$ lorsque A est inversible.

Exemple 4.10
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer A^n, $\forall n \in \mathbb{Z}$

Résolution

A est la matrice de l'exemple 4.2. On a montré que $Sp(A) = \{-1; 2\}$, $E_{(-1)} = \langle (1, 0, -1); (0, 1, -1) \rangle$, $E_{(2)} = \langle (1, 1, 1) \rangle$. A est diagonalisable avec $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a $\forall n \in \mathbb{Z}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ (La formule s'étend à $\mathbb{Z}$ car A est inversible).
on trouve $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, d'où:

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$$

2^e <u>cas $A = \lambda I_n + N$ avec N nilpotente d'ordre p</u>
(exemple A matrice élémentaire de Jordan).

<u>Définition</u> : Une matrice N est nilpotente s'il existe $r > 0$ tel que $N^r = 0$. Si p est le plus petit entier > 0 tel que $N^p = 0$, on dit que N est nilpotente d'ordre p. (Définition équivalente pour un endomorphisme nilpotent et un endomorphisme nilpotent d'ordre p)

Alors pour $q \geq p$ on a

$$\boxed{A^q = (\lambda I_n + N)^q = \sum_{k=0}^{p-1} C_q^k \lambda^{q-k} N^k}$$

Exemple 4.11
Soit $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer M^n, $\forall n \in \mathbb{Z}$

Résolution

On a $M = -2I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On calcule: $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $N^3 = 0$; donc N est nilpotent d'ordre 3, d'où:

$M^n = (-2I_3+N)^n = \sum_{k=0}^{2} C_n^k(-2)^{n-k}N^k = (-2)^n I_3 + n(-2)^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}(-2)^{n-2}N^2.$

On trouve $M^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} & n(n+11)(-2)^{n-3} \\ 0 & (-2)^n & -n(-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$, pour $n \geq 2$.

3^ecas Connaissance d'un polynôme annulateur de A

Soit P un polynôme annulateur de A (ex. $P_A(X)$ ou $m_A(X)$). Par la division euclidienne on a

$X^q = PQ + R$ où $Q, R \in K[X]$ avec $\deg R < \deg P$. Alors

$A^q = (PQ+R)(A) = P(A)\,Q(A) + R(A)$ et finalement comme $P(A) = 0$, on a:

$$\boxed{A^q = R(A)}$$

Exemple 4.12

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer A^n, $\forall n \in \mathbb{Z}$

Résolution

C'est la matrice des exemples 4.8 et 4.18 à laquelle on va appliquer une autre méthode.

Dans l'exemple 4.8 on a montré que le polynôme minimal de A est $m_A = (X+1)(X-2)$; Pour $n \in \mathbb{N}$, la formule de la division euclidienne de X^n par m_A s'écrit:

$X^n = m_A Q_n + R_n$ avec $Q_n, R_n \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(R_n) < \deg(m_A)$; donc $R_n = a_n X + b_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

On a donc: $X^n = (X+1)(X-2)Q_n + a_n X + b_n \quad (*)$

pour $X = -1$, $(*) \Longrightarrow (-1)^n = -a_n + b_n$

pour $X = 2$, $(*) \Longrightarrow 2^n = 2a_n + b_n$.

On en déduit que $a_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$; $b_n = \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n$.

Par conséquent $A^n = R_n(A) = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)A + \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$

5.2 Système différentiel

Soit le système différentiel suivant :

$$(S)\begin{cases} x_1'(t) & = & a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ x_n'(t) & = & a_{n1}x_1(t) + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Avec $(a_{ij}) \in \mathbb{k}$, $b_1(t), \ldots, b_n(t)$ des fonctions continues, $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ des fonctions inconnues de la variable t.
En posant :

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}; \; A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

La forme matricielle de (S) s'écrit :

$$\boxed{X'(t) = AX(t) + B(t)}$$

Définition 4.17: *La matrice $A = (a_{ij})$ est appelée la matrice associée au système (S)*

* Equation sans second membre : $X'(t) = AX(t)$

- Si A est diagonalisable avec $A = PDP^{-1}$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ en posant $X(t) = PY(t)$ avec $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ on obtient :

$PY'(t) = \left(PDP^{-1}\right)PY(t) = PDY(t)$ d'où $Y'(t) = DY(t)$ qui s'écrit : $y_k'(t) = \lambda_k y(t)$, $k = 1, ..., n$ alors $y_k(t) = C_k e^{\lambda_k t}$

donc $X(t) = PY(t) = P\begin{pmatrix} C_1 e_1^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$, $C_1, ...C_n \in \mathbb{k}$ doù le résultat suivant :

Proposition 4.6 : S*oit le système différentiel : $X'(t) = AX(t)$ (1). On suppose que A est diagonalisable et soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et $B = (u_1, \ldots, u_n)$ une base de vecteurs propres de A associés resp à $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Alors la solution générale de (1) est de la forme*

$$\boxed{X(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + K_2 e^{\lambda_2 t} u_2 + \cdots + K_n e^{\lambda_n t} u_n, K_1, \ldots, K_n \in \mathbb{k}}$$

* Equation complète
Le changement de variable $X = PY$ conduit à l'équation

$$\boxed{Y'(t) = DY(t) + P^{-1}B(t)}$$

d'où

$$y_k'(t) = \lambda_k y_k(t) + f_k(t)$$

équation différentielle linéaire qu'on résoud facilement.

* Si A n'est pas diagonalisable, on la trigonalise dans $\mathbb{C}$ avec $A = PTP^{-1}$ où T est triangulaire. Alors l'équation sans second membre (1) s'écrit :

$$Y'(t) = TY(t)$$

qu'on résoud en cascades.

Exemple 4.13: Résoudre le système différentiel:

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & x - 3y + 4z \\ \frac{dy}{dt} & = & 4x - 7y + 8z \\ \frac{dz}{dt} & = & 6x - 7y + 7z \end{array}\right.$$

(S) s'écrit sous forme matricielle $\dfrac{dX}{dt} = AX$ avec

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

On reconnaît la matrice A de l'exemple 4. A est trigonalisable avec

$A = PTP^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

En posant $X = PY$ avec $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ on obtient $\dfrac{dY}{dt} = TY$ c'est-à-dire le système $\left\{\begin{array}{rcl} \frac{du}{dt} & = & 3u + 4w \\ \frac{dv}{dt} & = & -v - 2w \\ \frac{dw}{dt} & = & -w \end{array}\right.$

$L_3 \Longrightarrow w = me^{-t}$, $m \in \mathbb{R}$

L_2 s'écrit $\frac{dv}{dt} = -v - 2me^{-t}$ on obtient $v = (l - 2mt)\, e^{-t}$, $l \in \mathbb{R}$

L_3 s'écrit $\frac{du}{dt} = 3u + 4me^{-t}$ on obtient $u = ke^{3t} - me^{-t}$, $k \in \mathbb{R}$

d'où $X = PY$ donne $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & ke^{3t} + (-2mt + l)\, e^{-t} \\ y & = & 2ke^{3t} + (-ymt + 2l - 2m)\, e^{-t} \\ z & = & 2ke^{3t} + (-2mt + l - 2m)\, e^{-t} \end{array}\right.$

6 Exercices du chapitre 4

Exercice 1

Soit $E = C^{\infty}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions numériques infiniment dérivables.

1° Montrer que tout réel λ est valeur propre de l'endomorphisme de E qui à toute fonction associe sa dérivée. Déterminer le sous espace propre associé à λ et en déduire que la famille de fonctions $\left\{e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ est une famille libre de E.

2° Mêmes questions pour l'endomorphisme de E qui à toute fonction associe sa dérivée seconde et la famille de fonctions $\left\{\sin \alpha x, \cos \alpha x, \sinh \alpha x, \cosh \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}_+^*\right\}$

Exercice 2

Soit A_n la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1° Vérifier que les valeurs propres de A_n sont :

$$\lambda_k = 2\left(1 - \cos \tfrac{k\pi}{n+1}\right),\ k \in \{1, ..., n\}$$

et qu'un vecteur propre asscié à λ_k est :

$$v_k = (\sin \tfrac{k\pi}{n+1}, \sin \tfrac{2k\pi}{n+1}, , ..., \sin \tfrac{nk\pi}{n+1}).$$

2° a) A_n est-elle diagonalisable?

b) Montrer qu'on a: $\det A_n = 4^n \prod_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}$.

3° On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = \det A_n$.

a) Exprimer Δ_n en fonction de Δ_{n-1} et Δ_{n-2} pour $n \geq 3$.

b) en déduire en étudiant la suite de Fibonacci (u_n) définie par :

$$\left\{ \begin{array}{c} u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0 \\ u_0 = 1; u_1 = 2 \end{array} \right.$$

la valeur de Δ_n en fonction de n.

4° Déduire des questions 2° et 3° la valeur de $\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}$ en fonction de n.

Exercice 3

On considère les trois suites réelles $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}, (V_n)_{n\in\mathbb{N}}, (W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par:

$$\left\{ \begin{array}{c} U_{n+1} = 2U_n - 2V_n + W_n \\ V_{n+1} = 2U_n - 3V_n + 2W_n \\ W_{n+1} = -U_n + 2V_n \end{array} \right. \quad \text{avec } U_0 = 2;\ V_0 = -1;\ W_0 = -2.$$

On se propose de determiner le terme général de chacune de ces suites.

1° Ecrire le système sous la forme matricielle: $X_{n+1} = AX_n$ et montrer que $X_n = A^n X_0$.

2° Calculer A^n et en déduire X_n puis U_n, V_n et W_n en fonction de n.

Exercice 4

Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{k}$. Trouver le polynôme caractéristique $P(X)$ de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

(on dit que A est une matrice **compagne** du polynôme P).

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $P(X)$ a n racines dans $\mathbb{k}$ deux à deux distinctes.

Exercice 5

Soient $A \in M_2(\mathbb{R})$.

1. On a $A^2 = I_2$. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2. On a $A^2 = -I_2$, montrer que A n'est triangulable sur $\mathbb{R}$ (noter que A^2 est diagonalisable).

Donner un exemple d'une telle matrice A.

Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

3. De même, que peut-on dire de $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $A^2 = \alpha I_2$?

Exercice 6

Soient E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\lambda \in Sp(u)$.

1° Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, λ^k est valeur propre de u^k et que les vecteurs propres de u sont vecteurs propres de u^k

2° Soit $P \in \mathbb{k}[X]$. Montrer que $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$ et que les vecteurs propres de u sont vecteurs propres de $P(u)$.

3° On suppose que P est annulateur de u (c.à.d $P(u) = 0$). Montrer que toute valeur propre de u est racine de P.

4° Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que si le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X)$, alors celui de $Q(A)$ est: $P_{Q(A)}(X) = \prod_{i=1}^{n} (Q(\lambda_i) - X)$ (on pourra utiliser une réduite triangulaire T de A.).

5° Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$. a) Montrer que l'ensemble $\mathbb{k}[A] = \{P(A),\ P \in \mathbb{k}[X]\}$ est une sous algèbre de la $\mathbb{k}$-algèbre $M_n(\mathbb{k})$.

b) Montrer que la famille $\{I, A, A^2, ..., A^{d-1}\}$ où d est le degré du polynome minimale de A, est une base du $\mathbb{k}$-espace vectoriel $\mathbb{k}[A]$ et en déduire la dimension de cet espace vectoriel.

Exercice 7

Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1° a) Dans $\mathbb{R}$ A est-elle diagonalisable? trigonalisable?

b) Dans $\mathbb{C}$ A est-elle diagonalisable, trigonalisable?

2° a) diagonaliser A

b) Calculer A^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8

Dites si les matrices à coefficients réels suivantes sont diagonalisables. Sinon les trigonaliser si possible:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

Soit la matrice

$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ avec $(a_1, a_2) \neq (0,0)$.

1° Déterminer le polynôme caractéristique de A et montrer que si:

$a_3^2 + 4\left(a_1^2 + a_2^2\right) \neq 0$ et $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, alors A est diagonalisable.

2° a) Montrer que si $a_1^2 + a_2^2 = 0$, alors A n'est pas diagonalisable.

b) Montrer que si $a_3^2 + 4\left(a_1^2 + a_2^2\right) = 0$, alors A n'est pas diagonalisable.

Exercice 10

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{k})$ où $\mathbb{k}$ est uncorps commutatif. On se propose de montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique (et donc les mêmes valeurs propres).

Soient A_λ, B_λ $(\lambda \in \mathbb{k})$, les matrices par blocs de $M_{2n}(\mathbb{k})$:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} A & \lambda I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix};\ B_\lambda = \begin{pmatrix} B & -\lambda I_n \\ -I_n & A \end{pmatrix}.$$

1° Calculer $A_\lambda B_\lambda$ et $B_\lambda A_\lambda$.(Faire les produits par blocs).

2° Calculer $|A_\lambda B_\lambda|$ et $|B_\lambda A_\lambda|$ et en déduire que $P_{AB} = P_{BA}$.

3° Montrer que si f et g sont deux endomorphismes d'un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension finie, alors $f \circ g$ et $g \circ f$ ont le même polynôme caractéristique (donc les mêmes valeurs propres).

Exercice 11

1° Résoudre le système d'équations différentielles linéaires suivant d'inconnues les fonctions x, y, z de la variable t :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y - z \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y - z + \sin t \\ \frac{dz}{dt} = -x - y + 4z - \cos t \end{cases}$$

2° Même question pour le système:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{dx}{dt} = 8x - y - 5z \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y + z \\ \frac{dz}{dt} = 4x - y - z \end{array} \right.$$

Exercice 12

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice par blocs à coefficients réels:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}J \\ \frac{1}{2}J & 0 \end{pmatrix}$$

1° Calculer M^2, M^3 et en déduire que M est diagonalisable.

2° Determiner le polynôme minimal et le polynôme caracteristique de M.

3° Déterminer M^n, $\forall n \in \mathbb{N}$, puis $e^M = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} M^n$.

Exercice 13

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E. On pose :

$u^0 = Id_E$; $u^i = u \circ u^{i-1}$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$. Si $P(X) = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i \in \mathbb{C}[X]$, on pose $P(u) = \sum_{i=0}^{n} c_i u^i \in \mathcal{L}(E)$.

1° Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = P_1(X)P_2(X)...P_k(X)$ avec pour $1 \leq j \leq k$, $P_j(X) = (X - a_j)^{m_j}$, $a_j \in \mathbb{C}$, $m_j \geq 1$, $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$.

Montrer que $\ker[P(u)] = \bigoplus_{j=1}^{k} \ker[P_j(u)]$ et que $\ker[P_j(u)]$ est stable par u $\forall 1 \leq j \leq k$.

2° On pose $E = C^\infty[\mathbb{R}, \mathbb{C}]$ et u l'endomorphisme de E qui à f associe sa dérivée f'.

a) Soit $a \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Etablir que : $(u - aId_E)^m(f) = e^{at}u^m(e^{-at}f)$, $\forall f \in E$. (On rapelle la formule de Leibniz : $(fg)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f^{(p)} g^{(n-p)}$).

b) En déduire la solution de l'équation différentielle : $(L) : (u - aId_E)^m(f) = 0$

3° soit l'équation différentielle : (H) $f^{(n)} + b_{n-1}f^{(n-1)} + ... + b_1 f' + b_0 f = 0$, où $b_i \in \mathbb{C}$, $\forall 0 \leq i \leq n-1$.

a) En décomposant $P(X) = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + ... + b_1 X + b_0$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, et en utilisant les résultats des questions 1° et 2°, déterminer la solution générale de (H).

b) Application : Résoudre dans $C^\infty[\mathbb{R}]$, l'équation différentielle:

(V) : $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' - 2y' + y = 0$.

Exercice 14

On considère la matrice

$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. On note I la matrice unité d'ordre

4.

1° Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de M. M est-elle diagonalisable? trigonalisable?

2° Soit J la réduite de Jordan de M. Déterminer J et en donner une base associée.

3° a) Déterminer le polynôme minimal de M.

b) Déterminer M^n, $\forall n \in \mathbb{N}$, puis $e^M = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} M^n$, en fonction de I, M et M^2.

Exercice 15

Soit l'endomorphisme f d'un $\Bbbk$-espace vectoriel E de dimension 9 dont la matrice dans une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, ..., v_9)$ de E est

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quelle est la nature de H?

Déterminer le polynôme caractéristique, le polynôme minimal, les sous espaces propres et les sous espaces caractéristiques de f.

Exercice 16

Soit la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

1° a) Calculer $(M+I)$; $(M+I)^2$; $(M+I)^3$.

b) En déduire le polynôme minimal, le polynôme caractéristique et les valeurs propres de M.

c) M est-elle diagonalisable? jordanisable?

2° Jordaniser M.

Exercice 17

Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

1) Calculer $(A+I_5)^2$, $(A-I_5)^2$, $(A-I_5)^3$, $(A+I_5)^2(A-I_5)^3$.

2) a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

b) Determiner les sous-espaces caractéristiques et le polynôme caractéristique de A.

3) Donner une réduite de Jordan J de A et le polynôme minimal de A sans calcul.

4) Déterminer une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$ de $\mathbb{R}^5$ associée à J.

5) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$. Montrer que le système différentiel :

(1) : $\dfrac{dX}{dt} = AX$, peut se mettre sous la forme

(2) : $\dfrac{dY}{dt} = JY$. Préciser Y.

Intégrer (2).

En déduire la solution de (1).