Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

On se donne une suite (P_n) de fonctions polynômiales à coefficients réels. On suppose que la suite (P_n) est uniformément convergente sur un intervalle I non borné de $\mathbb{R}$.

Montrer que la fonction limite P est un polynôme, et que les différences $P_n - P$ sont des polynômes constants à partir d'un certain entier n.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions (f_n) définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = x^2 \exp(-\sin \dfrac{x}{n})$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(g_n)_{n\geq 0}$ deux suites uniformément convergentes d'applications continues sur le segment $I = [a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Montrer que la suite $(f_n g_n)$ est CVU sur $[a, b]$.
Donner un contre-exemple montrant que la propriété est fausse si I n'est pas un segment.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence de la suite (f_n) définie par : $\forall n \geq 1, \forall x \geq 0, f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Montrer qu'il existe m tel que $P_n - P_m$ soit égal à une constante λ_n pour $n \geq m$.

Montrer que la suite (λ_n) est convergente.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$, vers $f : x \to x^2$.

Montrer qu'il y a CVU sur toute partie bornée de $\mathbb{R}$ (accroissements finis.)

En choisissant $x = x_n = \frac{n\pi}{2}$, vérifier qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

- Utiliser $\|fg - f_n g_n\|_\infty = \leq \|f - f_n\|_\infty \|g\|_\infty + \|f_n\|_\infty \|g - g_n\|_\infty$.
- Considérer $f_n(x) = g_n(x) = x + \frac{1}{n}$ sur $I = \mathbb{R}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

- Vérifier que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : x \to \mathrm{e}^x$.
- En utilisant $x_n = n$, montrer qu'il n'y a pas CVU sur $\mathbb{R}^+$.
  On prouvera en revanche qu'il y a CVU sur $[0, a]$, pour tout $a > 0$.
  Pour cela, on considérera l'application $x \mapsto \varphi_n(x) = f(x) - f_n(x) = \mathrm{e}^x - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.
  On montrera que φ_n, qui est nulle en 0, est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

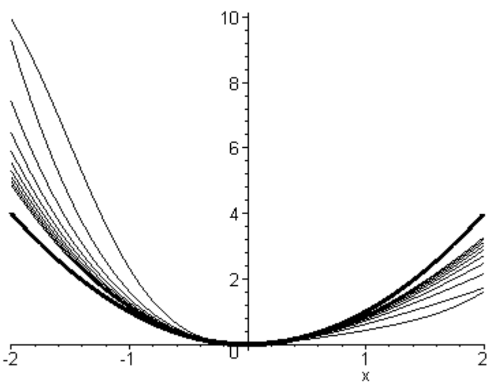
Corrigés des exercices

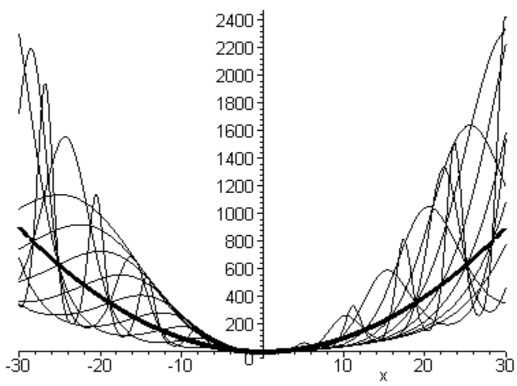
CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Soit $P = \lim_{n\to\infty} P_n$. Il existe un entier n_0 tel que : $n \geq m \Rightarrow \forall x \in I, |P_n(x) - P(x)| \leq 1$.
On en déduit que pour tout entier $n \geq n_0$, on a : $\forall x \in I, |P_n(x) - P_m(x)| \leq 2$.
Le polynôme $P_n - P_m$, borné sur l'intervalle non borné I, est nécessairement constant.
Autrement dit, il existe une suite (λ_n) de scalaires tels que $n \geq m \Rightarrow P_n = P_m + \lambda_n$.
Soit $x \in I$. Si $n \to +\infty$ dans $\lambda_n = P_n(x) - P_m(x)$, on voit que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = P(x) - P_m(x)$.
La suite (λ_n) est donc convergente. Notons λ sa limite.
La fonction limite de la suite (P_n) est donc le polynôme $P = P_m + \lambda$.
On constate bien que pour tout $n \geq n_0$, $P_n - P$ est le polynôme constant $\lambda_n - \lambda$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a bien sûr $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^2$.
La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est donc simplement convergente, sur $\mathbb{R}$, vers l'application $f : x \to x^2$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(x) - f_n(x) = x^2\Big(1 - \exp(-\sin\dfrac{x}{n})\Big)$.
Pour tout X de $[-1, 1]$, l'inégalité des accroissements finis donne $|1 - \exp(-X)| \leq e\,|X|$.
On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{\mathrm{e}\,|x|^3}{n}$.
En particulier : $\forall a > 0,\ \sup_{x\in[-a,a]} |f(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{\mathrm{e}a^3}{n}$, qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
La suite (f_n) est donc CVU vers f sur toute partie bornée de $\mathbb{R}$.
Mais il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
En effet, pour $x = x_n = \dfrac{n\pi}{2}$, on a : $f(x) - f_n(x_n) = x_n^2(1 - \mathrm{e}^{\pm 1}) \to \infty$ quand $n \to \pm\infty$.
On a représenté $y = f_n(x)$ pour $1 \leq n \leq 10$, ainsi que $f : x \to x^2$ (tracé en gras).
A gauche, l'intervalle en x est $[-2, 2]$, et à droite il est $[-30, 30]$.
Sur l'image de droite, on voit bien comment les fonctions f_n "oscillent" entre $\dfrac{1}{\mathrm{e}}x^2$ et ex^2.





Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

– On sait que les fonctions limites f et g sont continues sur $[a,b]$. Pour tout n, on a :

$$\|fg - f_n g_n\|_\infty = \|(f-f_n)g + f_n(g-g_n)\|_\infty \leq \|f-f_n\|_\infty \|g\|_\infty + \|f_n\|_\infty \|g-g_n\|_\infty \qquad (1)$$

Par hypothèse $\lim\limits_{n\to\infty} \|f-f_n\|_\infty = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \|g-g_n\|_\infty = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = \|f\|_\infty$.

Ces résultats et l'inégalité (1) permettent d'affirmer que $\lim\limits_{n\to\infty} \|fg - f_n g_n\|_\infty = 0$.

La suite $(f_n g_n)_{n\geq 0}$ est donc uniformément convergente sur $[a,b]$ vers la fonction fg.

– Contre-exemple : On se place sur $I = \mathbb{R}$ et on pose $f_n(x) = g_n(x) = x + \dfrac{1}{n}$.

La suite (f_n) est CVU sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \to x$, car $\|f - f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}$ tend vers 0.

Mais (f_n^2) est CVS vers f^2 et non CVU car $f_n^2(x) - f^2(x) = \dfrac{2x}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ (ex : $f_n^2(n) - f^2(n) > 2$)

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

– **Convergence simple** :

Notons tous d'abord que pour tout $n \geq 1$, on a $f_n(0) = 1$.

Pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$ et tout $n \geq 1$, on a : $\ln f_n(x) = n \ln(1 + \dfrac{x}{n}) \underset{n\to\infty}{\sim} x$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \mathrm{e}^x$: la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : x \to \mathrm{e}^x$.

– **Convergence uniforme** :

Il n'y a pas CVU sur $\mathbb{R}^+$.

En effet, $f(n) - f_n(n) = \mathrm{e}^n - 2^n$ ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$.

Soit $a > 0$. On va montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[0,a]$.

Montrons que $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x) = \mathrm{e}^x - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ qui est nulle en 0 est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

$$\varphi_n'(x) = \mathrm{e}^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^k \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{n^k}\mathrm{C}_{n-1}^k\right) x^k + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

On a : $\mathrm{C}_{n-1}^k = \dfrac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} = \dfrac{1}{k!}(n-1)(n-2)\cdots(n-k) \leq \dfrac{1}{k!} n^k$.

Donc $\dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{n^k}\mathrm{C}_{n-1}^k \geq 0$. On en déduit : $\varphi_n'(x) \geq 0$.

Ainsi $\varphi_n = f - f_n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $[0,a]$.

Ainsi : $\forall n \geq 1$, $\forall x \geq 0$, $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \varphi_n(a)$ qui tend vers 0 quand $n \to \infty$.

On en déduit la convergence uniforme, sur $[0,a]$, de la suite (f_n) vers la fonction $f : x \to \mathrm{e}^x$.

Voici le graphe de $f_1, f_2 \ldots, f_{10}$ sur $[0,5]$, ainsi que celui f (ce dernier est en gras).