Accélération de convergence pour une série

On se propose de trouver une valeur approchée de la somme $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, avec $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

Pour tout entier $N \geq 1$, on pose $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ et $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$.

1. (a) Justifier l'existence de la somme S, le signe de R_N et un majorant de $|R_N|$. [S]
   (b) Donner un majorant de l'erreur commise dans l'approximation $S \approx S_N + \dfrac{1}{2} u_{N+1}$.
   Avec ce résultat, combien faudrait-il de termes pour calculer S à 10^{-4} près ? [S]
2. Pour $n \geq 1$, on note $u'_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.
   (a) Prouver que pour tout $n \geq 1$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{2n\sqrt{n}}$ [S]
   (b) En déduire la convergence de la série $\sum u'_n$. [S]
   (c) Montrer que $S_{2N} = S'_N$ et $R_{2N} = R'_N$, avec $S'_N = \sum_{n=1}^{N} u'_n$ et $R'_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u'_n$. [S]
3. (a) Montrer que $u'_n \sim v_n - v_{n-1}$, avec $v_n = -\dfrac{1}{2\sqrt{2n}}$. [S]
   (b) Pour tout $n \geq 2$, on pose $w_n = u'_n - (v_n - v_{n-1})$.
   Justifier la convergence de $\sum w_n$ et montrer que $R'_N = \dfrac{1}{2\sqrt{2N}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} w_n$. [S]
4. (a) Montrer qu'on peut écrire $w_n = f(n)$, où $f(t)$ est croissante négative. [S]
   (b) En déduire que $F(n) - F(n-1) \leq w_n \leq F(n+1) - F(n)$, l'application F étant définie par $F(t) = \sqrt{2t-1} - \dfrac{1}{2}\sqrt{2t} - \dfrac{1}{2}\sqrt{2t-2}$. [S]
   (c) Former le développement limité de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3. [S]
   (d) Donner un équivalent de $F(t)$ quand $t \to \infty$. [S]
5. (a) Montrer que $-F(N) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} w_n \leq -F(N+1)$. [S]
   (b) Montrer que $t \to \Delta(t) = F(t) - F(t+1)$ est une fonction décroissante de t.
   Donner un équivalent de $\Delta(t)$ quand $n \to \infty$. [S]
6. Les questions précédentes montrent donc que, pour tout $N \geq 1$.
   $$S = S_{2N} + R_{2N} = S_{2N} + R'_N = S_{2N} + \frac{1}{2\sqrt{2N}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} w_n.$$
   On a donc l'encadrement : $S_{2N} + \dfrac{1}{2\sqrt{2N}} - F(N) \leq S \leq S_{2N} + \dfrac{1}{2\sqrt{2N}} - F(N+1)$.
   On sait enfin que l'amplitude de cet encadrement est une fonction décroissante de l'entier N et tend vers 0 avec la vitesse de $N^{-5/2}$. Montrer qu'il suffit de choisir $N = 14$ pour connaître S à 10^{-4} près. Quel est l'encadrement obtenu ? [S]

Corrigé du problème

1. (a) La série $\sum u_n$ est une série alternée qui satisfait aux hypothèses du critère spécial : la suite de terme général $|u_n|$ est en effet décroissante et elle converge vers 0.
On en déduit la convergence de la série $\sum u_n$, c'est-à-dire l'existence de S.
Plus précisément, on sait que le reste R_N d'ordre N de cette série possède le signe de u_{N+1} (il est donc positif si N est pair et négatif sinon) et qu'il est majoré en valeur absolue par $|u_{N+1}| = \frac{1}{\sqrt{N+1}}$. [Q]
(b) On sait que la somme S de la série $\sum u_n$ est toujours comprise entre deux sommes partielles consécutives S_N et S_{N+1}.
On peut donc écrire $S \approx \dfrac{1}{2}(S_N + S_{N+1})$, c'est-à-dire $S \approx S_N + \dfrac{1}{2}u_{N+1}$.
L'erreur absolue est alors majorée par $\dfrac{1}{2}\,|S_{N+1} - S_N| = \dfrac{1}{2}\,|u_{N+1}| = \dfrac{1}{2\sqrt{N+1}}$.
On a $\dfrac{1}{2\sqrt{N+1}} < 10^{-4} \Leftrightarrow \sqrt{N+1} > 5000 \Leftrightarrow N \geq 25000000$.
Il faudrait donc calculer et ajouter vingt-cinq millions de termes pour espérer obtenir une valeur approchée de S avec une précision inférieure ou égale à 10^{-4} ! [Q]

2. (a) $\dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}\,\sqrt{n}} = \dfrac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})\,\sqrt{n-1}\,\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{2n\,\sqrt{n}}$ [Q]
(b) D'après le résultat précédent, $u'_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2n}} \sim \dfrac{1}{4\sqrt{2}\,n\sqrt{n}}$
La série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est convergente (série de Riemann).
On en déduit la convergence de la série $\sum u'_n$. [Q]
(c) $\forall N \geq 1, S_{2N} = \displaystyle\sum_{n=1}^{2N} u_n = \sum_{n=1}^{N}(u_{2n-1} + u_{2n}) = \sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\Big) = \sum_{n=1}^{N} u'_n = S'_N$
Quand $N \to \infty$, on trouve $S = S'$, avec $S' = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$.
On en déduit, pour tout entier $N \geq 1$: $R_{2N} = S - S_{2N} = S' - S'_N = R'_N$. [Q]

3. (a) On a effectivement $v_n - v_{n-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big) \sim \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\,\dfrac{1}{2n\sqrt{n}} \sim u'_n$ [Q]
(b) Puisque $u'_n \sim v_n - v_{n-1}$, on a $w_n = \mathrm{o}(u'_n)$.
La série $\sum u'_n$ converge : il en est donc de même de la série $\sum w_n$.
Pour tout $n \geq 2$, on a : $u'_n = (v_n - v_{n-1}) + w_n$, et donc :
$$\begin{aligned} R'_N &= \sum_{n=N+1}^{\infty} u'_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} (v_n - v_{n-1}) + \sum_{n=N+1}^{\infty} w_n \\ &= -v_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} w_n = \frac{1}{2\sqrt{2N}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} w_n \end{aligned}$$
[Q]

4. (a) Pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} w_n &= u'_n - (v_n - v_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{2\sqrt{2n}} - \frac{1}{2\sqrt{2n-2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{2\sqrt{2n}} - \frac{1}{2\sqrt{2n-2}} \end{aligned}$$

Ainsi $w_n = f(n)$, où f est définie par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2t-1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2t}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2t-2}}$

On peut écrire $f(t) = \dfrac{1}{2}\Big(g(2t) + g(2t-2)\Big) - g(2t-1)$, avec $g(t) \equiv -\dfrac{1}{\sqrt{t}}$

On a alors $f'(t) = g'(2t) + g'(2t-2) - 2g'(2t-1)$, avec $g'(t) \equiv \dfrac{1}{2}t^{-3/2}$.

Or g' est convexe : on en déduit $g'(2t-1) \leq \dfrac{1}{2}\Big(g'(2t) + g'(2t-2)\Big)$ et donc $f'(t) \geq 0$.

Ainsi f est croissante. Or $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Compte tenu de sa monotonie, l'application f est donc négative.

Remarque : pour le signe de f, on peut aussi utiliser la concavité de g. [Q]

(b) Sur l'intervalle $[n-1, n]$, on a $f(t) \leq f(n) = w_n$, et sur $[n, n+1]$ on a $w_n \leq f(t) \leq 0$.

On en déduit par intégration : $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq w_n \leq \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq 0$

Mais une primitive de f est $F : t \to F(t) = \sqrt{2t-1} - \dfrac{1}{2}\sqrt{2t} - \dfrac{1}{2}\sqrt{2t-2}$

L'encadrement s'écrit alors : $F(n) - F(n-1) \leq w_n \leq F(n+1) - F(n)$ [Q]

(c) On sait que $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{1}{2}m(m-1)x^2 + \dfrac{1}{6}m(m-1)(m-2)x^3 + \mathrm{o}(x^3)$.

Avec $m = \dfrac{1}{2}$, on trouve : $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$. [Q]

(d) $F(t) = \sqrt{2t-1} - \dfrac{1}{2}\sqrt{2t} - \dfrac{1}{2}\sqrt{2t-2} = \sqrt{2t}\left(\Big(1 - \dfrac{1}{2t}\Big)^{1/2} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\Big(1 - \dfrac{1}{t}\Big)^{1/2}\right)$

En utilisant le DL de $\sqrt{1+x}$ en 0 à l'ordre 2, on trouve :

$$\begin{aligned} F(t) &= \sqrt{2t}\left(\Big(1 - \frac{1}{4t} - \frac{1}{32t^2}\Big) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2t} - \frac{1}{8t^2}\Big) + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\right) \\ &= \sqrt{2t}\left(\frac{1}{32t^2} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\right) \sim \frac{\sqrt{2}}{32t\sqrt{t}} \end{aligned}$$

[Q]

5. (a) Pour tout $n \geq 2$, on sait que $F(n) - F(n-1) \leq w_n \leq F(n+1) - F(n)$.

Par sommation de $n = N+1$ à M : $F(M) - F(N) \leq \displaystyle\sum_{n=N+1}^{M} w_n \leq F(M+1) - F(N)$

Puisque $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 0$, il vient : $-F(N) \leq \displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} w_n \leq -F(N+1) \leq 0$ [Q]

(b) La dérivée de $\Delta(t)$ est $\Delta'(t) = f(t) - f(t+1)$.
Cette quantité négative car f est croissante.
L'application Δ est donc décroissante.

$$\begin{aligned}\Delta(t) &= \sqrt{2t-1} - \frac{1}{2}\sqrt{2t} - \frac{1}{2}\sqrt{2t-2} - \sqrt{2t+1} + \frac{1}{2}\sqrt{2t+2} + \frac{1}{2}\sqrt{2t}\\ &= \sqrt{2t-1} - \frac{1}{2}\sqrt{2t-2} - \sqrt{2t+1} + \frac{1}{2}\sqrt{2t+2}\\ &= \sqrt{2t}\left(\left(1-\frac{1}{2t}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{1/2} - \left(1+\frac{1}{2t}\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{1/2}\right)\end{aligned}$$

Avec le DL de $\sqrt{1+x}$ en 0 on trouve : $\left(1+\frac{1}{t}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2t} - \frac{1}{8t^2} + \frac{1}{16t^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^3}\right)$

On prend alors la partie impaire : $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{1/2} = \frac{1}{2t} + \frac{1}{16t^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^3}\right)$

D'autre part : $\begin{cases}\left(1+\frac{1}{2t}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{4t} - \frac{1}{32t^2} + \frac{1}{128t^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^3}\right)\\ \left(1-\frac{1}{2t}\right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{4t} - \frac{1}{32t^2} - \frac{1}{128t^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^3}\right)\end{cases}$

On en déduit : $\left(1-\frac{1}{2t}\right)^{1/2} - \left(1+\frac{1}{2t}\right)^{1/2} = -\frac{1}{2t} - \frac{1}{64t^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^3}\right)$.

Finalement :

$$\begin{aligned}\Delta(t) &= \sqrt{2t}\left(-\frac{1}{2t} - \frac{1}{64t^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^3}\right) + \frac{1}{2t} + \frac{1}{16t^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^3}\right)\right)\\ &= \sqrt{2t}\left(\frac{3}{64t^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^3}\right)\right) \sim \frac{3\sqrt{2}}{64\,t^2\sqrt{t}}\end{aligned}$$

[Q]

6. Pour $N = 13$, on a $F(N) - F(N+1) \approx 0.000109 > 10^{-4}$
Pour $N = 14$, on a $F(N) - F(N+1) \approx 0.000091 < 10^{-4}$
La valeur $N = 14$ est donc la première pour laquelle l'encadrement de S donne un intervalle d'amplitude inférieure à 10^{-4}.
On trouve : $0.6048506223 \leq S \leq 0.604941272$ et donc $S \approx 0.6049$ à 10^{-4} près. [Q]