COURS D'ANALYSE 2
UNIVERSITÉ DE COCODY (ABIDJAN)

Justin FEUTO

2009-2010

Table des matières

Chapitre 1

Calcul Intégral

Soient $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $I = [a,b]$

1.1 Subdivisions et sommes de Darboux

Définition 1.1.1.
► *On appelle subdivision ou découpage de I, une famille finie et strictement croissante* $X = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ *telle que*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

On note $\mathfrak{S}_I$ *l'ensemble des subdivision de I.*
► *Etant donné* $X \in \mathfrak{S}_I$*, on appelle pas (ou module) de la subdivision* $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *est le réel*

$$\mathfrak{p}(X) = \max\{x_i - x_{i-1}, i = 1, \ldots, n\}.$$

► *Si X et Y sont deux subdivisions de I tels que* $X \subset Y$ *alors on dit que Y est plus fine que X (ceci définie une relation d'ordre partielle sur).*

Exemple 1.1.2. *(subdivision équidistante) Soit* $n \in \mathbb{N}$*.*
Si nous posons $h = \frac{b-a}{n}$*, alors* $x_i = a + ih$ $i = 0, \ldots, n$ *est une subdivision de I. On parle de la subdivision régulière de* $[a,b]$*.*
Le nombre h est le pas (uniforme) de cette subdivision.

Notation 1.1.3.

1. $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ *est l'ensemble des applications de* $I \to \mathbb{R}$ *bornée.i.e.*

$$f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} f : I \to \mathbb{R} \text{ application} \\ \exists m, M \in \mathbb{R} \text{ tels que } m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in I \end{cases}$$

2. *Soit* $f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{R})$*. On pose*
   (a) $m(f) = \inf_{x \in I} f(x)$ *et* $M(f) = \sup_{x \in I} f(x)$

(b) Soit $X = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{S}_I$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$m_i(f) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \text{ et } M_i(f) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Définition 1.1.4. *Soient $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ et $X = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{S}_I$.*

1. *On appelle somme de Darboux inférieure de f relativement à X, le nombre réel*

$$s(f,X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i(f), \tag{1.1}$$

2. *On appelle somme de Darboux supérieure de f relativement à X, le nombre réel*

$$S(f,X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i(f). \tag{1.2}$$

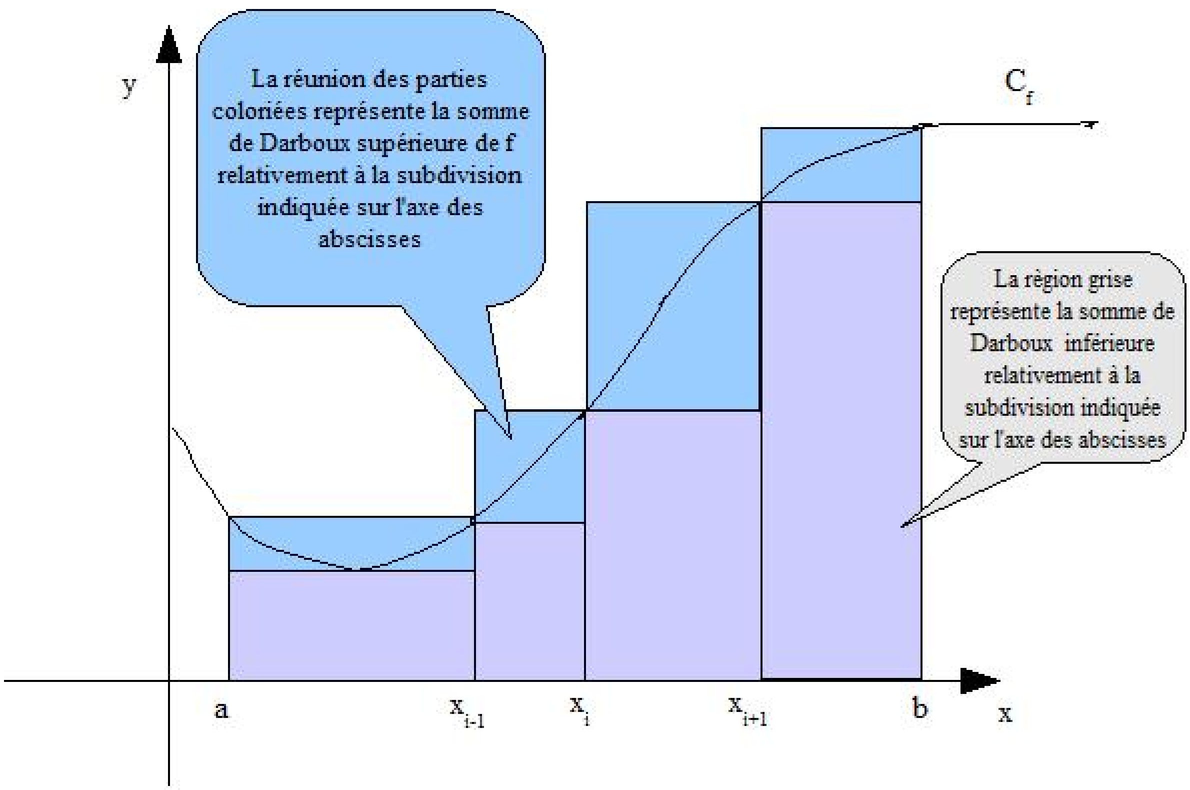

FIGURE 1.1 – illustration graphique des sommes de Darboux

Lorsque la fonction est positive, les sommes de Darboux supérieures et inférieures majorent et minorent respectivement l'aire déterminée par l'axe des abscisses, les droites $x = a$ et $x = b$ et le graphe de la fonction (figure (1.1)-les points de la partition ne sont pas nécessairement équidistants).

Exemple 1.1.5. *Ecrire les sommes de Darboux inférieure et supérieure de la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[-1,1]$, relativement à la subdivision $X = \left(-1+\frac{i}{q}\right)_{0\leq i\leq 2q}$, ainsi que celles de la fonction $g(x) = e^x$ sur l'intervalle $[0,1]$ relativement à la subdivision $Y = \left(\frac{i}{q}\right)_{0\leq i\leq q}$.*

Correction.

1. Sommes de Darboux de la fonction f relative à la subdivision X.
Par définition, on a

$$s(f,X) = \sum_{i=1}^{2q}(x_i - x_{i-1})m_i(f) \text{ et } S(f,X) = \sum_{i=1}^{2q}(x_i - x_{i-1})M_i(f).$$

Or pour tout $1 \leq i \leq 2q$

$$\begin{aligned} m_i(f) &= \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = \inf_{x\in\left[-1+\frac{i-1}{q},-1+\frac{i}{q}\right]} x^2 \\ &= \begin{cases} \left(-1+\frac{i}{q}\right)^2 & \text{si} \quad 1 \leq i \leq q \\ \left(-1+\frac{i-1}{q}\right)^2 & \text{si} \quad q < i \leq 2q \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M_i(f) &= \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = \sup_{x\in\left[-1+\frac{i-1}{q},-1+\frac{i}{q}\right]} x^2 \\ &= \begin{cases} \left(-1+\frac{i-1}{q}\right)^2 & \text{si} \quad 1 \leq i \leq q \\ \left(-1+\frac{i}{q}\right)^2 & \text{si} \quad q < i \leq 2q \end{cases}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} s(f,X) &= \sum_{i=1}^{2q}(x_i - x_{i-1})m_i(f) = \sum_{i=1}^{q}(x_i - x_{i-1})m_i(f) + \sum_{i=q+1}^{2q}(x_i - x_{i-1})m_i(f) \\ &= \frac{1}{q}\left(\sum_{i=1}^{q}\left(-1+\frac{i}{q}\right)^2 + \sum_{i=q+1}^{2q}\left(-1+\frac{i-1}{q}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{q}\left(\sum_{i=1}^{q}\left(1-\frac{2i}{q}+\frac{i^2}{q^2}\right) + \sum_{i=q+1}^{2q}\left(1-\frac{2i}{q}+\frac{i^2}{q^2}+\frac{2}{q}-\frac{2i}{q^2}+\frac{1}{q^2}\right)\right) \\ &= 2+\frac{2}{q}+\frac{1}{q^2}-\left(\frac{2}{q^2}+\frac{2}{q^3}\right)\sum_{i=1}^{2q} i + \frac{2}{q^3}\sum_{i=1}^{q} i + \frac{1}{q^3}\sum_{i=1}^{2q} i^2 \end{aligned}$$

Or, nous savons que

$$\sum_{i=1}^{2q} i = q(2q+1) \text{ et } \sum_{i=1}^{2q} i^2 = \frac{1}{3}q(2q+1)(4q+1).$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned}
s(f,X) &= 2+\frac{2}{q}+\frac{1}{q^2}-(\frac{2}{q^2}+\frac{2}{q^3})q(2q+1)+\frac{1}{q^2}(q+1)+\frac{1}{3q^3}q(2q+1)(4q+1)\\
&= 2+\frac{2}{q}+\frac{1}{q^2}-(\frac{2}{q}+\frac{2}{q^2})(2q+1)+\frac{1}{q^2}(q+1)+\frac{1}{3q^2}(2q+1)(4q+1)\\
&= \frac{2}{3}-\frac{1}{q}+\frac{1}{3q^2}.
\end{aligned}$$

De même, nous avons

$$\begin{aligned}
S(f,X) &= \sum_{i=1}^{2q}(x_i-x_{i-1})M_i(f)=\sum_{i=1}^{q}(x_i-x_{i-1})M_i(f)+\sum_{i=q+1}^{2q}(x_i-x_{i-1})M_i(f)\\
&= \frac{1}{q}\left(\sum_{i=1}^{q}\left(1-\frac{2i}{q}+\frac{i^2}{q^2}+\frac{2}{q}-\frac{2i}{q^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\sum_{i=q+1}^{2q}\left(1-\frac{2i}{q}+\frac{i^2}{q^2}\right)\right)\\
&= 2+\frac{2}{q}+\frac{1}{q^2}-(\frac{2}{q^2}+\frac{2}{q^3})\sum_{i=1}^{q}i-\frac{2}{q^2}\sum_{i=q+1}^{2q}i+\frac{1}{q^3}\sum_{i=1}^{2q}i^2\\
&= 2+\frac{2}{q}+\frac{1}{q^2}-(\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2})(q+1)-\frac{1}{q}(3q+1)+\frac{1}{3q^2}(2q+1)(4q+1)=\frac{2}{3}+\frac{1}{q}+\frac{1}{3q^2}.
\end{aligned}$$

2. Sommes de Darboux de la fonction g relative à la subdivision Y.
Tout comme ci-dessus on a

$$s(g,Y)=\sum_{i=1}^{q}(y_i-y_{i-1})m_i(g) \text{ et } S(g,Y)=\sum_{i=1}^{q}(y_i-y_{i-1})M_i(g).$$

Or la fonction $g(x)=e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; par conséquent, on a pour tout $1\leq i\leq q$

$$m_i(g)=\inf_{x\in[y_{i-1},y_i]}g(x)=\inf_{x\in\left[\frac{i-1}{q},\frac{i}{q}\right]}e^x=e^{\frac{i-1}{q}}$$

et

$$M_i(g)=\sup_{x\in[y_{i-1},y_i]}g(x)=\sup_{x\in\left[\frac{i-1}{q},\frac{i}{q}\right]}e^x=e^{\frac{i}{q}}$$

de sorte que

$$s(g,Y)=\sum_{i=1}^{q}(y_i-y_{i-1})m_i(g)=\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}e^{\frac{i-1}{q}}=\frac{1}{q}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{q}}}$$

et

$$S(g,Y)=\sum_{i=1}^{q}(y_i-y_{i-1})M_i(g)=\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}e^{\frac{i}{q}}=\frac{e^{\frac{1}{q}}}{q}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{q}}}$$

■

Exercice 1. *Soient $X\subset Y$ deux subdivisions de $I=[a,b]$. Montrer que $\mathfrak{p}(Y)\leq\mathfrak{p}(X)$.*

Correction. Soient $X=\{x_0,\ldots,x_n\}$ et $Y=\{y_0,\ldots,y_m\}$ deux subdivisions de I telles que Y soit plus fine que X.

Pour tout $k\in\{0,\ldots,m\}$, nous avons soit $y_k\in X$ soit qu'il existe $i\in\{1,\ldots,n\}$ tel que $x_{i-1}<y_k<x_i$ (car X et Y sont des subdivisions du même intervalle I). Par ailleurs Y est plus fine que X ;i.e. chaque x_i correspond à un unique y_{j_i}, de sorte que si $y_k\notin X$, il existe $i\in\{1,\ldots,n\}$ tel que $x_{i-1}=y_{j_{i-1}}\le y_{k-1}<y_k<y_i=x_i$ (nous avons alors $[x_{i-1},x_i]=\left[y_{j_{i-1}},y_{j_i}\right]=\cup_{k=j_{i-1}+1}^{j_i}[y_{k-1},y_k]$). Donc, pour tout $k\in\{1,\ldots,m\}$, il existe $i\in\{1,\ldots,n\}$ tel que $[y_{k-1},y_k]\subset[x_{i-1},x_i]$ Ainsi

$$y_k-y_{k-1}\le x_i-x_{i-1}\le\mathfrak{p}(X)$$

Ceci étant vrai pour tout $k\in\{1,\ldots,m\}$, on a $\mathfrak{p}(Y)\le\mathfrak{p}(X)$ ∎

Proposition 1.1.6. *Soient $f\in\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ et $X\subset Y$ deux subdivisions de I. On a*

$$m(f)(b-a)\le s(f,X)\le S(f,X)\le M(f)(b-a)\tag{1.3}$$

$$s(f,X)\le s(f,Y)\ \text{et}\ S(f,X)\ge S(f,Y)\tag{1.4}$$

Démonstration. Posons $X=\{x_0,\ldots,x_n\}$ et $Y=\{y_0,\ldots\ldots,y_m\}$.

1. Pour tout $i\in\{0,\ldots,n\}$, on a

$$m(f)\le m_i(f)\le M_i(f)\le M(f)\ \text{car}\ [x_{i-1},x_i]\subset[a,b],$$

$$m(f)(x_i-x_{i-1})\le m_i(x_i-x_{i-1})\le M_i(f)(x_i-x_{i-1})\le M(f)(x_i-x_{i-1})\ \text{car}\ x_{i-1}<x_i.$$

En prenant la somme sur tous les i dans la dernière relation, nous obtenons

$$m(f)(b-a)\le s(f,X)\le S(f,X)\le M(f)(b-a).\tag{1.5}$$

D'où l'Inégalité (1.3).

2. Montrons maintenant que $s(f,X)\le s(f,Y)$ et $S(f,Y)\le S(f,X)$. Pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$, il existe $j_i\in\{0,\ldots,m\}$ tel que

$$[x_{i-1},x_i]=\left[y_{j_{i-1}},y_{j_i}\right]=\cup_{k=j_{i-1}+1}^{j_i}[y_{k-1},y_k].\tag{1.6}$$

Donc, pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$ et pour tout $j\in\{j_{i-1}+1,\ldots,j_i\}$, on a

$$m_i(f)\le m_j(f)\le M_j(f)\le M_i(f).$$

Ce qui conduit à

$$m_i(f)(y_j-y_{j-1})\le m_j(f)(y_j-y_{j-1})\ \text{et}\ M_j(f)(y_j-y_{j-1})\le M_i(f)(y_j-y_{j-1}),$$

pour tout $j\in\{j_{i-1}+1,\ldots,j_i\}$. D'où en prenant la somme sur les $j\in\{j_{i-1}+1,\ldots,j_i\}$ on obtient,

$$m_i(f)(x_i-x_{i-1})\le\sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i}m_j(f)(y_j-y_{j-1})\tag{1.7}$$

et

$$\sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} M_j(f)(y_j - y_{j-1}) \leq M_i(f)(x_i - x_{i-1}), \tag{1.8}$$

vu que $m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} m_i(f)(y_j - y_{j-1})$ et $\sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} M_i(f)(y_j - y_{j-1}) = M_i(f)(x_i - x_{i-1})$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ (nous rappelons que $y_{j_i} = x_i$). D'où en prenant la somme sur les i, dans la relation (1.7), nous obtenons

$$s(f,X) \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} m_j(f)(y_j - y_{j-1}) \overset{(e1)}{=} \sum_{j=1}^{m} (y_j - y_{j-1}) m_j(f) = s(f,Y),$$

tandis que la relation (1.4) donne

$$S(f,Y) = \sum_{j=1}^{m} (y_j - y_{j-1}) M_j(f) \overset{(e2)}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} M_j(f)(y_j - y_{j-1}) \leq S(f,X),$$

les égalités (e1) et (e2) venant du fait que $\cup_{i=1}^{n} \{j_{i-1}+1, \ldots, j_i\} = \{1, \ldots, m\}$ la réunion étant disjointe.

□

Proposition 1.1.7. *Soient f et g deux fonctions bornées sur I, $k \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ et X une subdivision de I. On a*

1. $[\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0] \Rightarrow s(f,X) \geq 0.$
2. $[\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k] \Rightarrow s(f,X) = k(b-a) = S(f,X)$
3. $[\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) + k] \Rightarrow \begin{cases} s(g,X) = s(f,X) + k(b-a) \\ S(g,X) = S(f,X) + k(b-a) \end{cases}$
4. $s(g,X) + s(f,X) \leq s(f+g,X)$ *et* $S(f+g,X) \leq S(f,X) + S(g,X)$
5. $s(\lambda f,X) = \lambda s(f,X)$ *et* $S(\lambda f,X) = \lambda S(f,X)$
6. $s(-f,X) = -S(f,X)$ *et* $S(-f,X) = -s(f,X)$

Démonstration. Evidente à partir des relations

1. $\inf(f+k) = \inf f + k,\ \inf f + \inf g \leq \inf(f+g)$
2. $\sup(f+k) = \sup f + k,\ \sup(f+g) \leq \sup(f) + \sup(g)$
3. $\inf(-f) = -\sup f$ et $\inf \lambda f = \lambda \inf f, \sup(\lambda f) = \lambda \sup(f)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+$

□

Proposition 1.1.8. *Soient f une application bornée positive sur I et X et Y deux subdivisions de I. On a*

$$S(f,X) \leq S(f,Y) + M(f) card(Y) \mathfrak{p}(X); \tag{1.9}$$

$$s(f,Y) \leq s(f,X) + M(f) card(Y) \mathfrak{p}(X). \tag{1.10}$$

Démonstration. (Exo) Supposons que $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$ et $Y = \{y_0, \ldots, y_m\}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ nous n'avons que deux les possibilités suivantes :

(c1) il existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $[x_{i-1}, x_i] \subset [y_{j-1}, y_j]$,

(c2) il existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $y_j \in]x_{i-1}, x_i[$.

Désignons par K l'ensemble des $i \in \{1, \ldots, n\}$ vérifiant la condition (c1), et par L le complémentaire de K dans $\{1, \ldots, n\}$.

1. Nous avons
$$S(f,X) = \sum_{i \in K} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in L} M_i(f)(x_i - x_{i-1})$$
Notons que pour tout i, on $M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq M(f)\mathfrak{p}(X)$; par suite
$$\sum_{i \in L} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq card(L)M(f)\mathfrak{p}(X).$$
Or $cardL \leq m = cardY$ car si $i_1 \neq i_2$ alors $j_{i_1} \neq j_{i_2}$ ($j_i \in \{1, \ldots, m\}$ avec $x_{i-1} < y_{j_i} < x_i$). Donc,
$$\sum_{i \in L} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq card(Y)M(f)\mathfrak{p}(X).$$
Par ailleurs, pour $i \in K$, il existe $j_i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $[x_{i-1}, x_i] \subset [y_{j_i-1}, y_{j_i}]$, soit
$$M_i(f) = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \leq \sup_{[y_{j_i-1}, y_{j_i}]} f(x) = M_{j_i}(f)$$
D'où
$$\sum_{i \in K} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i \in K} M_{j_i}(f)(y_{j_i} - y_{j_i-1}) \leq \sum_{j=1}^{m} M_j(f)(y_j - y_{j-1}) = S(f,Y).$$
En définitive, nous avons
$$S(f,X) = \sum_{i \in K} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in L} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq S(f,Y) + card(Y)M(f)p(X).$$

2. Montrons maintenant pour conclure que $s(f,Y) \leq s(f,X) + M(f)card(Y)\mathfrak{p}(X)$. Soit $j \in \{0, \ldots, m-1\}$. Il existe un élément $i_j \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $x_{i_j} \leq y_j < x_{i_j+1}$, et cet élément est unique, vu que $[x_{i_1}, x_{i_1+1}[\cap [x_{i_1}, x_{i_1+1}[= \emptyset$ if $i_1 \neq i_2$ Notons que pour $j \in \{1, \ldots, m\}$ on a
$$x_{i_{j-1}} \leq y_{j-1} < x_{i_{j-1}+1} \leq x_{i_j} \leq y_j < x_{i_j+1}$$
Il vient que pour tout j dans $\{1, \ldots, m\}$
$$\begin{aligned} m_j(f)(y_j - y_{j-1}) &= m_j(f)(y_j - x_{i_j}) + m_j(f)(x_{i_j} - x_{i_{j-1}+1}) + m_j(f)(x_{i_{j-1}+1} - y_{j-1}) \\ &= m_j(f)(x_{i_{j-1}+1} - y_{j-1}) + \sum_{[x_{i-1}, x_i] \subset [y_{j-1}, y_j]} m_j(f)(x_i - x_{i-1}) + m_j(f)(y_j - x_{i_j}) \\ &\leq M(f)(x_{i_{j-1}+1} - y_{j-1}) + \sum_{[x_{i-1}, x_i] \subset [y_{j-1}, y_j]} m_j(f)(x_i - x_{i-1}) + M(f)(y_j - x_{i_j}) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
s(f,Y) &\leq \sum_{i\in K} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) + M(f)\left[\sum_{j=1}^{m}\left(x_{i_{j-1}+1} - y_{j-1}\right) + \sum_{j=1}^{m}\left(y_j - x_{i_j}\right)\right] \\
&\leq \sum_{i\in K} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) + M(f)\sum_{j=1}^{m}\left(x_{i_{j-1}+1} - x_{i_{j-1}}\right) \leq s(f,X) + M(f)card(Y)\mathfrak{p}(X)
\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.1.9. *Soit f une application bornée sur I, X et Y deux subdivisions de I. On a*

$$\begin{aligned}
s(f,Y) - card(Y)\mathfrak{p}(X)\left[M(f) - m(f)\right] &\leq s(f,X) \leq S(f,X) \\
&\leq S(f,Y) + card(Y)\mathfrak{p}(X)\left[M(f) - m(f)\right]
\end{aligned}$$

Démonstration. Posons $g = f - m(f)$. Alors $0 \leq g \in \mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ avec $M(g) = M(f) - m(f)$ et pour toute subdivision Y de I, $s(g,Y) = s(f,Y) + m(f)(b-a)$ et $S(g,Y) = S(f,Y) + m(f)(b-a)$ Donc d'après la proposition précédente,

$$\begin{aligned}
s(f,Y) - card(Y)\left[M(f) - m(f)\right]\mathfrak{p}(Y) &= s(g,Y) - card(Y)M(g) + m(f)(b-a) \\
&\leq s(g,Y) + m(f)(b-a) = s(f,X) \\
&\leq S(f,X) = S(g,X) + m(f)(b-a) \\
&\leq S(g,X) + card(Y)\mathfrak{p}(X)M(g) + m(f)(b-a) \\
&= S(f,X) + card(Y)\mathfrak{p}(X)\left[M(f) - m(f)\right]
\end{aligned}$$

□

1.2 Intégrale supérieure et inférieure

Définition 1.2.1. *Soit f un élément de $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$.*

1. *L'intégrale supérieure de f sur I est le nombre réel*

$$\overline{\int_I} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(f,X)/X \in \mathfrak{S}_I\} \tag{1.11}$$

2. *L'intégrale inférieure de f sur I est le nombre réel*

$$\underline{\int_I} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s(f,X)/X \in \mathfrak{S}_I\} \tag{1.12}$$

Proposition 1.2.2. *Soit $f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{R})$, X et Y deux subdivisions de I. Alors on a*

$$s(f,X) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,Y) \tag{1.13}$$

Démonstration. Nous avons $X \subset X \cup Y$ et $Y \subset X \cup Y$ et d'après la Proposition 1.1.6, on a $s(f,X) \leq s(f,X\cup Y) \leq S(f,X\cup Y) \leq S(f,Y)$, pour toutes subdivisions X et Y de I. En prenant le sup sur les X et ensuite inf sur les Y, on a

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

□

Exemple 1.2.3.

1. *Considérons la fonction $f(x) = e^x$ sur l'intervalle $[0,1]$ et la suite de subdivisions $X_n = \left(\frac{i}{n}\right)_{0\leq i\leq n}$. On peut voir que $s(f,X_n) = \frac{1}{n}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ et $S(f,X_n) = e^{\frac{1}{n}}s(f,X_n)$. Donc*

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}} = e-1$$

$$\overline{\int_0^1} f(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} s(f,X_n) = e-1.$$

Par suite $\underline{\int_0^1} f(x)dx = e-1 = \overline{\int_0^1} f(x)dx$

2. *Considérons la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[-1,1]$ et la suite de subdivisions $X_n = \left(-1+\frac{i}{n}\right)_{0\leq i\leq 2n}$ On peut voir que $s(f,X_n) = \frac{2}{n^3}\frac{(n-1)n(2n+1)}{6}$ et $S(f,X_n) = s(f,X_n) + \frac{2}{n^2}$. Donc,*

$$\underline{\int_{-1}^1} f(x)dx \geq \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3}\frac{(n-1)n(2n+1)}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\overline{\int_{-1}^1} f(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} s(f,X_n) + \frac{2}{n^2} = \frac{2}{3}$$

Par suite $\underline{\int_{-1}^1} f(x)dx = \frac{2}{3} = \overline{\int_{-1}^1} f(x)dx$

3. *Considérons la fonction $f(x) = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)$ sur l'intervalle $[0,1]$. Pour toute subdivision X de I, on a $m_i(f) = 0$ et $M_i(f) = 1$. On peut voir que $s(f,X) = 0$ et $S(f,X) = 1$. Donc,*

$$\underline{\int_{-1}^1} f(x)dx = 0 \text{ et } \overline{\int_{-1}^1} f(x)dx = 1$$

Proposition 1.2.4. *Soient f et g deux fonctions bornées sur I, $k \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ et X une subdivision de I.*

1. $[\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0] \Rightarrow \underline{\int}_a^b f(x)dx \geq 0.$
2. $[\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k] \Rightarrow \underline{\int}_a^b f(x)dx = k(b-a) = \overline{\int}_a^b f(x)dx$
3. $[\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)+k] \Rightarrow \underline{\int}_a^b g(x)dx = \underline{\int}_a^b f(x)dx + k(b-a) \leq \overline{\int}_a^b f(x)dx + k(b-a) = \overline{\int}_a^b g(x)dx$
4. $\underline{\int}_a^b g(x)dx + \underline{\int}_a^b f(x)dx \leq \underline{\int}_a^b (f+g)(x)dx \leq \overline{\int}_a^b (f+g)(x)dx \leq \overline{\int}_a^b f(x)dx + \overline{\int}_a^b g(x)dx$
5. $\underline{\int}_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \underline{\int}_a^b f(x)dx \leq \overline{\int}_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \overline{\int}_a^b f(x)dx$
6. $\underline{\int}_a^b (-f)(x)dx = -\overline{\int}_a^b f(x)dx \leq -\underline{\int}_a^b f(x)dx = \overline{\int}_a^b (-f)(x)dx$

Démonstration. Conséquence immédiate de la Proposition 1.1.7 □

Proposition 1.2.5. *Soit f une fonction bornée sur I. Alors*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \forall \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall X \in \mathfrak{S}_I \ \mathfrak{p}(X) \leq \delta \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq S(f,X) - \overline{\displaystyle\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon \\ 0 \leq \underline{\displaystyle\int_a^b} f(x)dx - s(f,X) < \varepsilon \end{cases}$$

C'est-á dire

$$\begin{cases} \lim\limits_{\mathfrak{p}(X)\to 0} S(f,X) = \overline{\displaystyle\int_a^b} f(x)dx \\ \lim\limits_{\mathfrak{p}(X)\to 0} s(f,X) = \underline{\displaystyle\int_a^b} f(x)dx \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

1^{ier}cas : $f = k$. Alors, Pour toute subdivision X de I on a

$$s(f,X) = k(b-a) = S(f,X) = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Donc, pour toute subdivision X de I, on a

$$S(f,X) - \overline{\int_a^b} f(x)dx = s(f,X) - \underline{\int_a^b} f(x)dx = 0 < \varepsilon$$

2^{ieme} Cas : f n'est pas constante. Alors on a $m(f) < M(f)$. Puisque

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{X \in \mathfrak{S}_I} S(f,X),$$

il existe une subdivision X_ε de I telle que

$$0 \leq S(f,X_\varepsilon) - \overline{\int_a^b} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2card(X_\varepsilon)(M(f)-m(f))}$$

D'après le corollaire 1.1.9, on a pour toute subdivision X de I

$$\mathfrak{p}(X) < \delta_1 \Rightarrow S(f,X) - \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,X_\varepsilon) + card(X_\varepsilon)\mathfrak{p}(X)(M(f)-m(f)) - \overline{\int_a^b} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

De même, puisque $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{X \in \mathfrak{S}_I} s(f,X)$ il existe une subdivision X'_ε de I telle que

$$0 \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx - s(f,X'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons

$$\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2card(X'_\varepsilon)(M(f)-m(f))}$$

D'après le corollaire 1.1.9, on a pour toute subdivision X de I

$$\mathfrak{p}(X) < \delta_2 \Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)dx - s(f,X) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx - s(f,X'_\varepsilon) + card(X'_\varepsilon)\mathfrak{p}(X)(M(f)-m(f)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Posons $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$ alors

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \forall \delta \in \mathbb{R}_+^* \forall X \in \mathfrak{S}_I \mathfrak{p}(X) \leq \delta \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq S(f,X) - \overline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon \\ 0 \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx - s(f,X) < \varepsilon \end{cases}$$

□

Proposition 1.2.6. *Si $f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ alors pour tout $c \in]a,b[$*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \tag{1.14}$$

Démonstration. Soit $c \in]a,b[$

(a) Pour toutes subdivisions $X = \{x_0,\dots,x_n\}$ de $[a,c]$ et $Y = \{y_0,\dots,y_n\}$ de $[c,b]$,on a $Z = \{x_0,\dots,x_n = c = y_0,\dots,y_n\}$ est une subdivision de $[a,b]$ et

$$s(f,X)+s(f,Y) \leq s(f,Z) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,Z) \leq S(f,X)+S(f,Y)$$

par suite,

$$\underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx$$

(b) Supposons que $X = \{x_0,\dots,x_n\}$ soit une subdivision de $[a,b]$.

1er cas : Il existe $i_0 \in \{1,\dots,n-1\}$ tel $c = x_{i_0}$. Alors $X_1 = \{x_0,\dots,x_{i_0}\}$ est une subdivision de $[a,c]$ et $X_2 = \{x_{i_0},\dots,x_n\}$ est une subdivision de $[c,b]$. Donc,

$$\begin{aligned} s(f,X) &= s(f,X_1)+s(f,X_2) \leq \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx \\ &\leq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx \leq S(f,X_1)+S(f,X_2) = S(f,X) \end{aligned}$$

2$^{\text{ième}}$ cas : il existe $i_0 \in \{1,\dots,n-1\}$ tel que $c \in]x_{i_0},x_{i_0+1}[$ Alors $X_1 = \{x_0,\dots,x_{i_0},c\}$ est une subdivision de $[a,c]$ et $X_2 = \{c,x_{i_0},\dots,x_n\}$ est une subdivision de $[c,b]$ et $Z = \{x_0,\dots,x_{i_0},c,x_{i_0+1},\dots,x_n\}$ est une subdivision de $[a,b]$ plus fine que X. Ainsi on a

$$\begin{aligned} s(f,X) &\leq s(f,Z) = s(f,X_1)+s(f,X_2) \leq \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx \\ &\leq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx \leq S(f,X_1)+S(f,X_2) = S(f,Z) \leq S(f,X). \end{aligned}$$

Donc dans tous les cas on a

$$s(f,X) \leq \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx \leq S(f,X).$$

Par suite,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

□

Définition 1.2.7. *$f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ de I et une suite de réels $(k_i)_{0\leq i\leq n}$ telles que*

$$\forall i \in \{0,\dots,n\}\ \forall x \in]x_{i-1}, x_i[\ f(x) = k_i.$$

On dit alors que X est adaptée à f.

Proposition 1.2.8. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier et $X = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à f telle que*

$$\forall i \in \{0,\dots,n\}\ \forall x \in]x_{i-1}, x_i[\ f(x) = k_i.$$

Alors,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sum_i^n k_i(x_i - x_{i-1}) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Démonstration. Considérons une subdivision Y plus fine que la subdivision X.

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}\ \exists j_i \in \{1,\dots,m\} : [x_{i-1}, x_i] = \cup_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} \left[y_{j-1}, y_j\right]$$

avec $j_0 = 0$. remarquons que

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}\ \forall j \in \{j_{i-1}+2,\dots,j_i-1\} \quad m_j(f) \leq k_i \leq M_j(f).$$

Donc

$$\begin{aligned}
s(f,Y) &= \sum_{j=1}^{m} m_j(f)(y_j - y_{j-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[m_{j_{i-1}+1}(f)(y_{j_{i-1}+1} - y_{j_{i-1}}) + \sum_{j=j_{i-1}+2}^{j_i-1} m_j(f)(y_j - y_{j-1}) + m_{j_i}(f)(y_{j_i} - y_{j_i-1}) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[m_{j_{i-1}+1}(f)(y_{j_{i-1}+1} - y_{j_{i-1}}) + \sum_{j=j_{i-1}+2}^{j_i-1} k_i(y_j - y_{j-1}) + m_{j_i}(f)(y_{j_i} - y_{j_i-1}) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} k_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} \left[m_{j_{i-1}+1}(f) - k_i\right](y_{j_{i-1}+1} - y_{j_{i-1}}) + \sum_{i=1}^{n} \left[m_{j_i}(f) - k_i\right](y_{j_i} - y_{j_i-1}).
\end{aligned}$$

D'oú

$$\begin{aligned}0 \leq \sum_{i=1}^{n} k_i(x_i - x_{i-1}) - s(f,Y) &\leq \sum_{i=1}^{n} \left[(k_i - m_{j_{i-1}+1}(f)) + (k_i - m_{j_i(f)})\right] \mathfrak{p}(Y)\\ &\leq 2n\,(M(f) - m(f))\,\mathfrak{p}(Y).\end{aligned}$$

De façon analogue, on a

$$\begin{aligned}0 \leq S(f,Y) - \sum_{i=1}^{n} k_i(x_i - x_{i-1}) &\leq \sum_{i=1}^{n} \left[(M_{j_i}(f) - k_i) + (M_{j_{i-1}+1}(f) - k_i)\right] \mathfrak{p}(Y)\\ &\leq 2n\,(M(f) - m(f))\,\mathfrak{p}(Y).\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\mathfrak{p}(Y) \overset{X\subseteq Y}{\to} 0} s(f,Y) = \sum_{i=1}^{n} k_i(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\mathfrak{p}(Y) \overset{X\subseteq Y}{\to} 0} S(f,Y).$$

Ainsi,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sum_{i}^{n} k_i(x_i - x_{i-1}) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

□

Remarque 1.2.9.

1. *La proposition 1.2.8 montre que si l'on modifie la valeur d'une fonction en escalier en un nombre fini de points alors les intégrales supérieures et inférieures de f sur I ne changent pas.*
2. *Soit f un élément de $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$. Alors*

$$\forall X \in \mathfrak{S}_I \; s(f,X) = \underline{\int_a^b} \varphi_X(x)dx \text{ et } S(f,X) = \overline{\int_a^b} \psi_X(x)dx$$

où φ_X et ψ_X sont des fonctions en escaliers sur I définies par :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\} \; \forall x \in]x_{i-1},x_i[\; \varphi_X(x) = m_i(f) \text{ et } \psi_X(x) = M_i(f)$$

Donc,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\left\{\underline{\int_a^b} \varphi(x)dx : \varphi \text{ en escalier }, \varphi \leq f\right\}$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\left\{\overline{\int_a^b} \psi(x)dx : \psi \text{ en escalier }, f \leq \psi\right\}$$

En prenant en compte (1), il apparaît donc que $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ et $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ ne varient pas lorsqu'on modifie la valeur de f en un nombre fini de points de I.

1.3 Intégrale de Riemann

Définition 1.3.1. *Un élément f de $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ est dit Riemann intégrable sur I si*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx \text{ où } \lim_{\mathfrak{p}(X)\to 0}[S(f,X)-s(f,X)] = 0 \tag{1.15}$$

Si f est Riemann intégrable sur I, alors son intégrale de Riemann est

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx \tag{1.16}$$

Exemple 1.3.2. *1. D'après Exemple 1.2.3 sur l'intégrale supérieure et inférieure, nous avons :*

(a) La fonction $f(x) = e^x$ est intégrable dur $[0,1]$ et on a

$$\int_0^1 e^x dx = \overline{\int_0^1} e^x dx = \underline{\int_0^1} e^x dx = e-1$$

(b) La fonction $g(x) = x^2$ est Riemann intégrable sur l'intervalle $[-1,1]$ et on a

$$\int_0^1 x^2 dx = \underline{\int_{-1}^1} f(x)dx = \overline{\int_{-1}^1} f(x)dx = \frac{2}{3}$$

2. Toute fonction en escalier sur un intervalle.

L'ensemble des fonctions réelles Riemann intégrable sur I sera noté $\mathcal{R}(I,\mathbb{R})$.

Proposition 1.3.3. *Soient f et g deux fonctions Riemann intégrables sur I, k et λ deux réels et $c \in]a,b[$.*

1. *$m(f)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(f)(b-a)$ (inégalité de la moyenne). En particulier $\int_a^b kdx = k(b-a)$*
2. *$[\forall x \in I \ f(x) \leq g(x)] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$*
3. *$f+g \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ et $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$*
4. *$\lambda f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ et $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$*
5. *$f \in \mathcal{R}([a,c],\mathbb{R}) \cap \mathcal{R}([c,b],\mathbb{R})$ et $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (relation de Chasles).*

Démonstration.

1) Découle de la Proposition 1.1.6 1.3 et 1.2.2, tandis que 2),3) et 4) sont des conséquences immédiates de la proposition 1.2.4. 5) quand à lui, découle de la proposition 1.2.5

□

Remarque 1.3.4. *Soit f une fonction Riemann intégrable sur I. La Remarque 1.2.9 donne :*

1. $\int_a^b f(x)dx = \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)dx : \varphi \text{ en escalier }, \varphi \leq f\right\} = \inf\left\{\int_a^b \psi(x)dx : \psi \text{ en escalier }, f \leq \psi\right\}$
2. *Supposons que g est bornée et que $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}$ a un nombre fini d'éléments. Alors g est Riemann intégrable sur I et on a*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Définition 1.3.5. *Soit f une fonction définie sur I et $X = (x_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathfrak{S}_I$. Alors la somme*
$$\sigma_X = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$
avec $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$ est une somme de Riemann de f relativement à la subdivision X.

Proposition 1.3.6. *Soit f une fonction Riemann intégrable sur I . A chaque subdivision $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$ associons une suite $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que*
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \; t_i \in [x_{i-1}, x_i].$$
Alors
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mathfrak{p}(X) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{1.17}$$

Démonstration. Pour tout $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$ et tout $(t_i)_{1 \leq i \leq n} \in \Pi\,[x_{i-1}, x_i]$, on a pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}, m_i(f) \leq f(t_i) \leq M_i(f)$. D'où
$$s(f,X) \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i) \leq S(f,X)$$
Donc
$$\int_a^b f(x)dx \leq \liminf_{\mathfrak{p}(X) \to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i) \leq \limsup_{\mathfrak{p}(X) \to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i) \leq \int_a^b f(x)dx$$
D'oú
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mathfrak{p}(X) \to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i)$$
□

Corollaire 1.3.7. *Soit f une fonction Riemann intégrable sur I. Alors*
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \int_a^b f(x)dx.$$

Par convention, si f est intégrable sur $I=[a,b]$, on pose

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \text{ et } \int_a^a f(x)dx = 0 \tag{1.18}$$

Proposition 1.3.8. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone, alors elle est Riemann intégrable sur I.*

Démonstration. (a) supposons que f est croissante. Soit X une subdivision de I. On a pour tout i dans $\{1,\dots,n\}$

$$f(x_{i-1}) = m_i(f) \leq M_i(f) \leq f(x_i)$$

ce qui permet d'avoir $M_i(f) - m_i(f) \leq f(x_i) - f(x_{i-1})$. Ainsi

$$\begin{aligned} 0 < S(f,X) - s(f,X) &= \sum_{i=1}^{n} [M_i(f) - m_i(f)]\,(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]\,\mathfrak{p}(X) = (f(b) - f(a))\mathfrak{p}(X) \end{aligned}$$

Or $\lim_{\mathfrak{p}(X)\to 0}(f(b)-f(a))\mathfrak{p}(X) = 0$ donc $\lim_{\mathfrak{p}(X)\to 0}(S(f,X)-s(f,X)) = 0$. Si

(b) Supposons que f est décroissante ; alors $-f$ est croissante et d'après ce qui précède, est Riemann intégrable. Donc f est Riemann intégrable d'après la Proposition 1.3.3

□

Proposition 1.3.9. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors elle est Riemann intégrable sur I*

Démonstration. f étant continue sur I compact, y est uniformement continue. Soit ε un élément de $\mathbb{R}_+^*$. Il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x,y \in I \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Soit $X = \{x_0,\dots,x_n\}$ une subdivision de I telle que $\mathfrak{p}(X) < \delta$. On a

$$\forall i \in \{1,\dots,n\} \ \forall x,y \in [x_{i-1},x_i] \ |y-x| \leq x_i - x_{i-1} < \delta$$

$$\forall i \in \{1,\dots,n\} \ \forall x,y \in [x_{i-1},x_i] \ |f(y)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\forall i \in \{1,\dots,n\} \ \forall x,y \in [x_{i-1},x_i]\, f(y) - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(x) < f(y) + \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}\, m_i(f) \leq M_i(f) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} + m_i(f)$$

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}\, 0 \leq M_i(f) - m_i(f) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$0 \leq S(f,X) - s(f,X) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon$$

Par conséquent,
$$\lim_{\mathfrak{p}(X)\to 0}[S(f,X)-s(f,X)]=0$$
□

Définition 1.3.10. *Soit $f: I \to \mathbb{R}$. On appelle*

1. *Partie positive de f, l'application*
$$\begin{array}{lllll} f^+ & : & I & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & f^+(x)=\max(f(x),0) \end{array}$$
2. *Partie négative de f l'application*
$$\begin{array}{lllll} f^- & : & I & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & f^-(x)=\max(-f(x),0) \end{array}$$

Remarque 1.3.11. *Soit $f: I \to \mathbb{R}$. Alors*

1. $f = f^+ - f^-$ *et* $|f| = f^+ + f^-$
2. $f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{R}) \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{B}(I,\mathbb{R}) \Leftrightarrow f^+, f^- \in \mathcal{B}(I,\mathbb{R})$

Proposition 1.3.12. *Supposons que f est Riemann intégrable sur I. Alors*

1. $f^+, f^- \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ *et*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$
2. $|f| \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ *et*
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Démonstration. Soit $X=(x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de I. On a
$$f \leq f^+ \text{ et } f \leq f^-,$$
de sorte que pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$,
$$0 \leq M_i(f) \Rightarrow m_i(f) \leq m_i(f^+) \leq M_i(f^+) \leq M_i(f),$$
soit $M_i(f^+)-m_i(f^+) \leq M_i(f)-m_i(f)$.
$$M_i(f)<0 \Rightarrow \forall x \in [x_{i-1},x_i)\ f^+(x)=0 \Rightarrow 0 = M_i(f^+)-m_i(f^+) \leq M_i(f)-m_i(f)$$
Donc
$$0 \leq S(f^+,X)-s(f^+,X) \leq S(f,X)-s(f,X).$$
Or $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ d'oú
$$\lim_{\mathfrak{p}(X)\to 0} S(f^+,X)-s(f^+,X) \leq \lim_{\mathfrak{p}(X)\to 0} S(f,X)-s(f,X)=0.$$

Ainsi $f^+ \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$.

f et f^+ étant Riemann intégrable, la différence $f^- = f - f^+$ l'est aussi, et on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

De même, $|f| = f^+ + f^- \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ et on a

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b f^+(x)dx\right| + \left|\int_a^b f^-(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

□

Lemma 1.3.13. *Supposons que $p \in]1,\infty[$ et $q = \frac{p}{p-1}$*

1. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* $q \in]1,\infty[$
2. $\forall A,B \in \mathbb{R}_+\ A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}A + \frac{1}{q}B$
3. $\forall\,(a_i,b_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)^n\ \sum_{i=1}^n a_ib_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$
4. $\forall M,m \in \mathbb{R}, 0 \leq m < M$ *on a* $pm^{p-1}(M-m) \leq M^p - m^p \leq pM^{p-1}(M-m)$

Démonstration. 1. évident

2. On considere la fonction $f(x) = e^x$. $f''(x) = e^x > 0$ donc f est convexe. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(\frac{1}{p}x + (1-\frac{1}{p})y) \leq \frac{1}{p}f(x) + (1-\frac{1}{p})f(y)$$
Choisir x et y tels que $A = e^x$ et $B = e^y$ et le résultat s'ensuit.
3. Soit $(a_i,b_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)^n$
Si $\sum a_i = 0$ ou $\sum b_i = 0$ alors
$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}\ a_i = 0 \text{ ou } \forall i \in \{1,\ldots,n\}\ b_i = 0$$
Donc pour tout i, on a $a_ib_i = 0$.
Si $\sum a_i \neq 0$ et $\sum b_i \neq 0$ alors nous posons
$$A_i = \frac{a_i^p}{\sum_{j=1}^n a_j^p} \text{ et } B_i = \frac{b_i^q}{\sum_{j=1}^n b_j^q}$$
D'aprés 2), nous aurons
$$A_i^{\frac{1}{p}}B_i^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}A_i + \frac{1}{q}B_i$$
Soit
$$\sum_{i=1}^n A_i^{\frac{1}{p}}B_i^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^n A_i + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^n B_i = 1$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1,$$

et le résultat s'ensuit.

Soient m et M deux nombres réel tels que : $0 \leq m \leq M$. La fonction g définie par $g(t) = t^p$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ g''(t) = p(p-1)t^{p-2} > 0$$

donc g est convexe et par suite

$$pm^{p-1} = g'(m) \leq \frac{g(M)-g(m)}{M-m} = \frac{M^p - m^p}{M-m} \leq g'(M) = pM^{p-1}$$

□

Proposition 1.3.14. *Supposons que f et g sont Riemann intégrables sur I, $p \in]1, \infty[$ et $q = \frac{p}{p-1}$. Alors*

1. *fg, $|f|^p$, $|g|^q$ sont intégrables sur I*
2. $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}$ *(inégalité de Holder).*

Démonstration. Soit $f, g \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$.

1. (a) Montrons que $|f|^p \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$
   Soit $X = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de I. On a pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$m_i(|f|^p) = [m_i(|f|)]^p \leq [M_i(|f|)]^p = M_i(|f|^p)$$

   Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & S(|f|^p, X) - s(|f|^p, X) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [M_i(|f|)^p - m_i(|f|)^p]\,(x_i - x_{i-1}) \\ & \leq & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} pM_i(|f|)^{p-1}\,(M_i(|f|) - m_i(|f|))\,(x_i - x_{i-1}) \leq pM(|f|)^{p-1}\,[S(|f|, X) - s(|f|, X)] \end{array}$$

   la dernière inégalité provenant du Lemme 1.3.13. En faisant tendre le pas $p(X)$ de X vers 0, le résultat s'ensuit, vu que $|f| \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$.

   (b) Montrons que $fg \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$
   Puisque $q = \frac{p}{p-1} \in]1, \infty[$, on a donc que $|g|^q \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$. f et g sont Riemann intégrable implique que $f-g$ l'est aussi, et par suite $|f-g|$. On a aussi $fg = \frac{1}{2}((f-g)^2 - f^2 - g^2)$ Donc fg est Riemann intégrable.

2. Etablissons l'inégalité de Hölder
   Soit X comme ci-dessus un découpage de I. Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ on a $M_i(|fg|) \leq M_i(|f|)M_i(|g|)$ ce qui permet d'avoir

$$S(|fg|,X) = \sum_{i=1}^{n} M_i(|fg|)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \left[M_i(|f|)(x_i - x_{i-1})^{\frac{1}{p}}\right]\left[M_i(|g|)(x_i - x_{i-1})^{\frac{1}{q}}\right]$$

   Donc d'après l'inégalité de Hölder discret, on a

$$S(|fg|,X) \leq \left[\sum_{i=1}^{n} M_i(|f|)^p (x_i - x_{i-1})\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n} M_i(|g|)^q (x_i - x_{i-1})\right]^{\frac{1}{q}} = S(|f|^p,X)S(|g|^q,X)$$

   Puisque les fonctions intervenant dans l'inégalité sont Riemann intégrables, nous obtenons le résultat en faisant tendre le pas vers 0.

□

Proposition 1.3.15. *Supposons que f et g sont Riemann intégrable sur I,*

1. *Si g est positive sur I alors*

$$m(f)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M(f)\int_a^b g(x)dx$$

2. *Si g est positive sur I et f continue sur I alors*

$$\exists c \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \text{ (1ere formule de la moyenne)}$$

Démonstration. Puisque les fonctions f et g sont Riemann intégrables sur I,

1. Supposons que g est positive sur I. $\forall x \in I$ $m(f)g(x) \leq f(x)g(x) \leq M(f)g(x)$. Donc d'après la Proposition 1.3.3 nous avons

$$m(f)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M(f)\int_a^b g(x)dx$$

2. Supposons que g est positive et f continue. d'après ce qui précede, on a

$$m(f)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M(f)\int_a^b g(x)dx$$

   L'application $t \mapsto f(t)\int_a^b g(x)dx$ est continue sur I. Donc d'après le théorème de valeurs intermédiaires, on a

$$\exists c \in [a,b] \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

□

Proposition 1.3.16. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions Riemann intégrables sur I, et f une fonction définie sur I. Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f dans I alors f est Riemann intégrable sur I et*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

Démonstration.

1. Considérons un $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f, il existe un entier N_ε tel que pour tout entier $n > N_\varepsilon$ on ait

   $$\forall x \in I\ f_n(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon.$$

   En considérant une subdivision $X = (x_i)$ de I, on a pour tout $n \geq N_\varepsilon$

   $$\forall i \in \{1,\dots,n\}\ m_i(f_n) - \varepsilon \leq m_i(f) \leq M_i(f) \leq M_i(f_n) + \varepsilon$$

   Soit
   $$s(f_n,X) - \varepsilon(b-a) \leq s(f,X) \leq S(f,X) \leq S(f_n,X) + \varepsilon(b-a)$$
   De sorte que
   $$0 \leq S(f,X) - s(f,X) \leq S(f_n,X) - s(f_n,X) + 2\varepsilon(b-a)$$
   Chaque f_n étant Riemann intégrable, on a pour tout $n > N_\varepsilon$

   $$\lim_{\mathfrak{p}(X)\to 0}(S(f_n,X) - s(f_n,X)) = 0$$

   soit
   $$\lim_{\mathfrak{p}(X)\to 0}(S(f,X) - s(f,X)) = 2\varepsilon(b-a).$$
   Ceci étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a le résultat.

2. D'après 1., nous avons

   $$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon \forall X \in \mathfrak{S}_I s(f_n,X) - \varepsilon(b-a) \leq s(f,X) \leq S(f,X) \leq S(f_n,X) + \varepsilon(b-a)$$

   En faisant tendre $\mathfrak{p}(X)$ vers 0, nous obtenons

   $$\int_a^b f_n(x)dx - \varepsilon(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f_n(x)dx + \varepsilon(b-a)$$

   Ainsi
   $$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon\ \left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq 2\varepsilon(b-a)$$

   et le résultat s'ensuit.

□

Définition 1.3.17. *Soit $f : I \to \mathbb{C}$.*

1. *f est dite Riemann intégrable sur I si $\mathcal{R}e\, f$ et $Im\, f$ le sont.*
2. *Si f est Riemann intégrable, sont intégrale de Riemann sur I est le nombre complexe*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathcal{R}e\, f(x)dx + i\int_a^b Im\, f(x)dx$$

1.4 Primitive

1.4.1 Introduction

I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ est Riemann intégrable sur tout compact inclus dans I, x_0 est un point de I.

Proposition 1.4.1. *La fonction*

$$\begin{array}{cccc} F : I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt \end{array}$$

est continue sur I

Démonstration.

1. Soit x un point intérieur de I

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^* : [x-r, x+r] \subset I.$$

Posons $M = \sup\{|f(t)| / t \in [x-r, x+r]\}$

$$\forall y \in [x-r, x+r] \ \ |F(y) - F(x)| = \left| \int_{x_0}^y f(t)dt - \int_{x_0}^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq M|y-x|$$

F est donc continue au point x.

2. Supposons que I a un plus grand élément b.

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^* : [b-r, b] \subset I.$$

En raisonnant comme au 1. nous obtenons

$$\forall y \in [b-r, b] \ \ |F(y) - F(x)| \leq M|y-b| \ \text{ où } M = \sup\{|f(t)| / t \in [b-r, b]\}$$

Donc F est continue à gauche en b. De même on montre que si I possède un plus petit élément a, F est continue à droite en ce point.

□

Proposition 1.4.2. *Supposons que f est continue au point x_1 de I. Alors*

$$\begin{array}{rcc} F : I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \end{array}$$

est dérivable en ce point et $F'(x_1) = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)dt|_{x=x_1} = f(x_1)$

Démonstration. Pour tout $x \in I \setminus \{x_1\}$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x_1)\right| &= \left|\frac{1}{x-x_1}\left(\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt - \int\limits_{x_0}^{x_1} f(t)dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(x_1)dt\right)\right| \\ &= \frac{1}{x-x_1}\left|\int\limits_{x_1}^{x}(f(t)-f(x_1)dt\right|. \end{aligned}$$

1. Supposons que x_1 est un point intérieur à I.

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^* : [x_1 - r, x_1 + r] \subset I.$$

f étant continue au point x_1, nous avons

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \rho \in]0, r[: \forall t \in]x_1 - \rho, x_1 + \rho[\ |f(t) - f(x_1)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \rho \in]0, r[: \forall x \in]x_1 - \rho, x_1 + \rho[\ \left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x_1)\right| \leq \frac{1}{|x-x_1|}\varepsilon|x-x_1| = \varepsilon.$$

Donc F est dérivable en x_1 et $F'(x_1) = f(x_1)$.

2. Supposons que x_1 est le plus petit élément de I.

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^* : [x_1, x_1 + r] \subset I.$$

f étant continue à droite au point x_1, nous avons

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \rho \in]0, r[: \forall t \in [x_1, x_1 + \rho[\ |f(t) - f(x_1)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \rho \in]0, r[: \forall x \in [x_1, x_1 + \rho[\ \left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x_1)\right| \leq \frac{1}{|x-x_1|}\varepsilon|x-x_1| = \varepsilon.$$

Donc $\lim_{x\to x_1^+} \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} = f(x_1)$

3. Supposons que x_1 est le plus grand élément de I. Un raisonnement analogue à celui du 1b. montrer que F est dérivable à gauche en x_1 et $F'_-(x_1) = f(x_1)$.

□

Exemple 1.4.3.

1. *$\forall t \in \mathbb{R}$ $f(t) = te^{2t}$ f est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'application $F : x \mapsto \int_0^x te^{2t}dt$ est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ F'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x te^{2t}dt = xe^{2x}.$$

2. *$\forall t \in \mathbb{R}$ $f(t) = e^{i2t}\ln(t^2+1)$ f est continue sur $\mathbb{R}$ donc $F : x \mapsto \int_0^x e^{i2t}\ln(t^2+1)dt$ est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ avec*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ F'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x e^{i2t}\ln(t^2+1)dt = e^{i2x}\ln(x^2+1).$$

Si nous considérons la fonction φ définie par $\varphi(u) = u^3+2u+1$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction

$$u \mapsto G(u) = F\circ\varphi(u) = \int_0^{u^3+2u+1} e^{i2t}\ln(t^2+1)dt$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall u \in \mathbb{R}\ G'(u) = F'(\varphi(u))\varphi'(u) = f(\varphi(u))\varphi'(u) = e^{i2(u^3+2u+1)}\left[\ln((u^3+2u+1)^2+1)\right](3u^2+2)$$

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur D.

Définition 1.4.4. *Une fonction de $F : D \to \mathbb{R}$ est une primitive de f dans D si et seulement si*

1. *F est dérivable sur D*
2. *Pour tout $x \in D, F'(x) = f(x)$.*

Proposition 1.4.5. *Si F et G sont deux primitives de f sur D alors $F-G$ est une constante sur chaque intervalle $I \subset D$.*

Démonstration. Soit a, x appartenant à I. On applique le Théorème des accroissements finis à la fonction $h = F-G$, dérivable sur $[a,x] \subset I$ comme somme de fonctions dérivables. On a donc

$$\exists c \in]a,x[: (F-G)(x)-(F-G)(a) = (x-a)(F-G)'(c) = F'(c)-G'(c) = 0$$

Donc $F(x)-G(x) = F(a)-G(a)$, ce qui est une constante, indépendante de x qui peut parcourir l'ensemble des points de I. □

Notation 1.4.6. *Si f admet G comme primitive sur un intervalle I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est noté*

$$\int f(x)dx = G(x)+C.$$

Théorème 1.4.7. *Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ possède une primitive, donnée par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Démonstration. Cette intégrale existe pour tout $x \in [a,b]$ car f est continue sur cet intervalle, donc est Riemann intégrable. Par ailleur,

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t) - \int_a^x f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \text{ (relat. de Chasles)}$$

D'après le théorème de la moyenne,

$$\exists \xi \in [x, x+h] \text{ tel que } \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi)$$

Donc,

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x)$$

(NB : Si $x = a$ ou $x = b$ on ne peut considérer que la limite à gauche ou à droite). $\square$

Remarque 1.4.8. *Supposons que f est une fonction continue sur un intervalle compact $I = [a,b]$. Le Théorème 1.4.7 permet d'identifier l'intégration comme une antidifférentiation (à une constante près), puisque $F' = f$ pour $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.*

Proposition 1.4.9. *Supposons que f est Riemann intégrable sur tout intervalle compact $[\alpha,\beta]$ inclu dans D et admet G comme primitive sur D. Alors*

$$\forall [\alpha,\beta] \subset D \quad \int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) = [G(x)]_\alpha^\beta$$

Démonstration. Considérons une subdivision $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[\alpha,\beta]$. Pour tout $x \in D$, $G'(x) = f(x)$ et pour tout $1 \le i \le n$, G est continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ et dérivable sur $]x_{i-1}, x_i[$. d'après le théorème des accroissements finis,

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\} \quad \exists t_i \in]x_{i-1}, x_i[: G(x_i) - G(x_{i-1}) = G'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

or

$$G(b) - G(a) = \sum_{i=1}^n [G(x_i) - G(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Ceci étant vrai pour toute subdivision $X \in \mathfrak{S}_{[\alpha,\beta]}$, on fait tendre le pas vers 0, et le résultat s'ensuit. $\square$

Exemple 1.4.10.

1. $\forall n \in \mathbb{N} \ \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$

2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^* \ \int e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} + C$

3. *Soit* $r \in]-1, \infty[$
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \; \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{i=1}^{n} i^r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\frac{i}{n})^r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$$
où $f(x) = x^r$. f *est continue sur* $[0,1]$, *donc Riemann intégrable sur cet intervalle. En plus,*
$$\int f(x)dx = \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \; sur \; \mathbb{R}_+^*$$
Donc
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) = \int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_0^1 = \frac{1}{r+1}.$$

1.4.2 Primitive des fonctions usuelles

Les primitives d'un certain nombres de fonctions doivent être connues. On lira en première colonne la valeur de la fonction, en deuxième la valeur de l'une de ses primitives et en troisième ses intervalles d'intégrabilité.

fonctions	primitives	intervalles
x^n $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \geq 0 \\ \mathbb{R}^* & \text{si } n < 0 \end{cases}$
$(ax+b)^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \geq 0 \\ \mathbb{R}^* & \text{si } n < 0 \end{cases}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
x^α $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$e^{\alpha x}$ $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$\mathbb{R}$
a^x $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotan} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$]k\pi, (k+1)\pi[$ $k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1+\operatorname{cotan}^2 x$	$-\operatorname{cotan} x$	$]k\pi, (k+1)\pi[$ $k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\begin{cases} \operatorname{Argth} x \\ \operatorname{Argcoth} x \\ \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert \end{cases}$	$]-1,1[$ $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x$	$]-1,1[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\begin{cases} \operatorname{Argch} x \\ -\operatorname{Argch}(-x) \\ \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert \end{cases}$	$]1,+\infty[$ $]-\infty,-1[$ $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{Argsh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+h}}$ $h \in \mathbb{R}^*$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+h}\right\rvert$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si} \quad h > 0 \\ \left]-\infty,-\sqrt{\lvert h\rvert}\right[\cup\left]\sqrt{\lvert h\rvert},+\infty\right[& \text{si} \quad h < 0 \end{cases}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$\ln \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\coth x$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$

1.4.3 Regles de calcul

Proposition 1.4.11. *Soit $(f_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ un élément de $(\mathbb{C}^I, \mathbb{C})^n$. Supposons que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, F_i est une primitive de f_i sur I. Alors $F = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i$ est une primitive de $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$ sur I*

Démonstration.

$$\forall x \in I \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \ \ F_i'(x) = f_i(x)$$

$$\forall x \in I \ \ (\sum_{i=1}^n \alpha_i F_i)'(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i'(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) = (\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i)(x)$$

□

Exemple 1.4.12.
$$(\alpha_i)_{0\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^{n+1} \Rightarrow \int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \frac{x^{i+1}}{i+1} + C$$

Proposition 1.4.13. *(Intégration par parties)*
Supposons que F et G sont deux fonctions dérivables sur D.

1. $\int F(x)G'(x)dx = F(x)G(x) - \int F'(x)G(x)dx$
2. *si F' et G' sont Riemann intégrables sur l'intervalle compact $[a,b] \subset D$ alors*
$$\int_a^b F(x)G'(x)dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F'(x)G(x)dx$$

Démonstration.

1. On suppose F et G dérivable sur D
$$\forall x \in D \ (F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x),$$
soit
$$\forall x \in D \ F(x)G'(x) = (F(x)G(x))' - F'(x)G(x).$$
On a alors
$$\int F(x)G'(x)dx = \int (F(x)G(x))'dx - \int F'(x)G(x)dx = F(x)G(x) - \int F'(x)G(x)dx$$
2. On suppose F' et G' Riemann intégrables sur $[a,b]$; alors $F'G$ et FG' le sont aussi sur $[a,b]$. D'après la Proposition 1.4.9 on a
$$\int_a^b F(x)G'(x)dx = \int_a^b (F(x)G(x))'dx - \int_a^b F'(x)G(x)dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F'(x)G(x)dx.$$

□

Exemple 1.4.14. *Calculons la primitive $\int \sin x e^x dx$. On posera successivement $f = \sin x$, puis $f = \cos x$:*
$$\begin{aligned}\int \sin x e^x dx &= \sin x e^x - \int \cos x e^x dx \\ &= \sin x e^x - \left[\cos x e^x - \int (-\sin x) e^x dx\right] \\ &= (\sin x - \cos x)\, e^x - \int \sin x e^x dx\end{aligned}$$
On met tous les $\int$ dans le membre de gauche et obtient après division par 2 :
$$\int \sin x e^x dx = \frac{(\sin x - \cos x)\, e^x}{2} + C$$

Théorème 1.4.15. *(Formule de Taylor avec reste intégrable) Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I, avec n entier naturel. Alors pour tout $x_0, x \in I$, on a*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt. \tag{1.19}$$

Démonstration. Pour $n = 0$, la formule est vraie : en effet, elle s'écrit dans ce cas

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt$$

Supposons maintenant (1.19) vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et que $f^{(n+1)}$ admette une dérivée $f^{(n+2)}$ continue sur $[x_0, x]$. Ainsi les deux facteurs dans le reste intégral vérifient les conditions suivantes

$$u = f^{(n+1)} \Rightarrow u' = f^{(n+2)} \text{ et } v'(t) = (x-t)^n \Rightarrow v(t) = \frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1},$$

de sorte que nous avons par intégration par parties

$$\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \left[f^{(n+1)}(t) \frac{-1}{n+1}(x-t)^{n+1} \right]_{x_0}^{x} + \frac{1}{n+1} \int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt.$$

Et le résultat s'ensuit. □

Proposition 1.4.16. *Supposons que $\varphi : J \to I$ est dérivable sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$.*

1. *Si F est une primitive de f sur I*
   (a) *alors $G = F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi)\varphi'$ sur J,*
   (b) *et si $(f \circ \varphi)\varphi'$ est Riemann intégrable sur l'intervalle compact $[\alpha, \beta]$ inclus dans J et f Riemann intégrable sur $\varphi([\alpha, \beta])$ alors*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

2. *Si φ est bijective et G est une primitive de $(f \circ \varphi)\varphi'$ sur J*
   (a) *alors $F = G \circ \varphi^{-1}$ est une primitive de f sur I,*
   (b) *et si f est Riemann intégrable sur l'intervalle compact $[c, d]$ inclus dans I et $(f \circ \varphi)\varphi'$ Riemann intégrable sur J alors*

$$\int_{c}^{d} f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(\varphi^{-1}(d)) - G(\varphi^{-1}(c))$$

Démonstration.

1. (a) $F \circ \varphi$ étant la composée de deux applications dérivables l'est aussi et
$$\forall t \in J \ \ (F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$
   (b) D'après la Proposition 1.4.9 et 1, nous avons
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = [F(x)]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = [F \circ \varphi(t)]_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$
2. (a) φ^{-1} est dérivable sur I avec :
$$\forall x \in I \ (\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}.$$
   $F = G \circ \varphi^{-1}$ est dérivable sur I et
$$\forall x \in I \ F'(x) = G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = f \circ \varphi(\varphi^{-1}(x))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x)$$
   (b) D'après la Proposition 1.4.9 et 1, nous obtenons
$$\begin{aligned}\int_{c}^{d} f(x)dx &= [F(x)]_c^d = F(d) - F(c) = F \circ \varphi(\varphi^{-1}(d)) - F \circ \varphi(\varphi^{-1}(c)) \\ &= G(\varphi^{-1}(d)) - G(\varphi^{-1}(c)) = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\end{aligned}$$

□

Exemple 1.4.17. *Calculons les intégrales suivantes :*
$$A = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad B = \int_{0}^{5\pi} \frac{\sin t}{2+\cos t}dt$$

1. *Pour le calcul de A, nous posons $f(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ et nous considérons le changement de variable $x = \phi(t) = \sin t$. On a*
$$-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4} \qquad \text{et } \phi'(t) = \cos t.$$

De sorte que

$$A = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(\sin t)\cos t dt$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t dt,$$

car pour $-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$, *on a* $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$ *et* $1-2\sin^2 t = \cos 2t$. *d'ù* $A = \frac{\sin 2t}{2}\big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

2. *Pour le calcul de B, nous posons* $\varphi(t) = \cos t$, *soit* $\varphi'(t) = \sin t$. *de sorte que*

$$B = \int_0^{5\pi} \frac{\sin t}{2+\cos t}dt = \int_0^{5\pi} \frac{\varphi((t)}{2+\varphi(t)}dt = \int_0^{5\pi} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

avec $f(x) = \frac{1}{2+x}$. *Puisque* $\varphi(0) = 1$ *et* $\varphi(5\pi) = -1$ *nous obtenons*

$$B = \int_0^{5\pi} \frac{\sin t}{2+\cos t}dt = -\int_1^{-1} f(x)dx = -\log(2+x)|_1^{-1}$$

Corollaire 1.4.18. *(Changement de variable)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *continue et* $\varphi : J \to I$ *un difféomorphisme, c'est-à dire une bijection telle que* φ *et* φ^{-1} *soient continûment dérivables. Dans ce cas,*

$$\int f(x)dx = F(\varphi(x)) \text{ avec } F(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{1.20}$$

Autrement dit, $F \circ \varphi^{-1}$ *est une primitive de* f. *En termes d'intégrale définis, on a*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{1.21}$$

Proposition 1.4.19. *Supposons que*

1. f *est positive et décroissante sur* $[a,b]$,
2. g *est Riemann intégrable sur* $[a,b]$.

Alors il existe un élément $c \in [a,b]$ *tel que :*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^c g(t)dt$$

Démonstration. f étant monotone est Riemann intégrable sur $[a,b]$; par suite, fg est Riemann intégrable sur $[a,b]$. Posons pour tout $t \in [a,b]$ $G(t) = \int_a^t g(x)dx$. G est continue, donc bornée sur $[a,b]$. Posons

$$m = \inf\{G(t) : t \in [a,b]\} \text{ et } M = \sup\{G(t) : t \in [a,b]\}$$

Considérons un nombre réel $\varepsilon > 0$. g et fg étant Riemann intégrable sur $[a,b]$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall X = (x_i)_{0\leq i\leq n} \in \mathfrak{S}_{[a,b]}\ \mathfrak{p}(X) < \delta \Rightarrow \begin{cases} \int\limits_a^b g(t)dt - \varepsilon < s(f,X) \leq S(f,X) < \int\limits_a^b g(t)dt + \varepsilon \\ (t_i)_{0\leq i\leq n} \in \prod\limits_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow \left| \sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)g(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_a^b f(t)g(t)dt \right| < \varepsilon \end{cases}$$

Considérons un élément $X \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$ vérifiant $\mathfrak{p}(X) < \delta$ et un élément $(t_i)_{0\leq i\leq n}$ de $\prod_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i]$

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}\ m_i(g) = \inf_{t\in[x_{i-1},x_i]} g(t) \leq \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} g(t)dt \leq \sup_{t\in[x_{i-1},x_i]} g(t) = M_i(g)$$

Par conséquent,

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}\ \exists k_i \in [m_i(g), M_i(g)] : k_i(x_i - x_{i-1}) = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} g(t)dt = G(x_i) - G(x_{i-1}),$$

de sorte que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} f(t_i)k_i(x_i - x_{i-1}) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(G(x_i) - G(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)G(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)G(x_{i-1}) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)G(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_{i+1})G(x_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(f(t_i) - f(t_{i+1})\right) G(x_i) + G(b)f(t_n) - G(a)f(t_1) \end{aligned}$$

Donc

$$mf(t_1) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)k_i(x_i - x_{i-1}) \leq Mf(t_1) \tag{1.22}$$

ceci venant du fait que $m \leq G(t) \leq M$. Or

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)k_i(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(t)g(t)dt\right| &\leq \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)k_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)g(t_i)(x_i - x_{i-1})\right| \\
&+ \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)g(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(t)g(t)dt\right| \\
&\leq \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(k_i - g(t_i))(x_i - x_{i-1})\right| + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} f(a)(M_i(g) - m_i(g))(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon \\
&= f(a)(S(g,X) - s(g,X)) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Soit

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)k_i(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq (2f(a)+1)\varepsilon \tag{1.23}$$

Des Relations (1.22) et (1.23) donnent

$$mf(t_1) - (2f(a)+1)\varepsilon \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq Mf(t_1) + (2f(a)+1)\varepsilon$$

Celà donne, en prenant $t_1 = a$

$$mf(a) - (2f(a)+1)\varepsilon \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq Mf(a) + (2f(a)+1)\varepsilon$$

ε étant quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$, nous avons en fait

$$mf(a) \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq Mf(a).$$

Puisque G est continue sur $[a,b]$, le Théorème des valeurs intermédiaires donne

$$\exists c \in [a,b] : \int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)G(c)$$

c'est-à-dire

$$\exists c \in [a,b] : \int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^c g(t)dt$$

□

1.4.4 Exemples classiques

1.4.5 Formes $\int \sin^p x \cos^q x dx$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

1er cas : p ou q est impair.
$p = 2n+1$ avec $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le changement de variables $t = \cos x$ on obtient

$$\begin{aligned}
\int \sin^p x \cos_q x dx &= \int \sin^{2n} x \cos_q x \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x) n \cos^q x (\cos x)' dx \\
&= -\int (1-t^2 x) n t^q dt = -\sum_{k=0}^{n} \complement_n^k (-1)^k \int t^{2k+q} dt \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \complement_n^k (-1)^k \frac{t^{2k+q+1}}{2k+q+1} + C = \sum_{k=0}^{n} \complement_n^k \frac{(-1)^{k+1}}{2k+q+1} \cos^{2k+q+1} x + C
\end{aligned}$$

$q = 2m+1$ avec $m \in \mathbb{N}$ utiliser le changement de variables $t = \sin x$ et proceder comme précédemment.
2ieme cas : p et q sont pairs
Il convient de linéariser $\sin^p x \cos^q$ en utilisant les formules

$$\cos^2 \varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \quad \sin^2 \varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2} \text{ et } \sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$$

ou les formules d'Euler

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

Exemple 1.4.20. *1. calcul des primitives de $\int \sin^3 x \cos_{15} x dx$.*

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos_{15} x dx &= \int \sin^2 x \cos_{15} x \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x)\cos^{15} x (\cos x)' dx \\
&= -\int (1-t^2 x) t^{15} dt = -\frac{t^{16}}{16} + \frac{t^{18}}{18} + C = -\frac{\cos^{16} x}{16} + \frac{\cos^{18} x}{18} + C
\end{aligned}$$

2. Calcul des primitives de $\int \sin^2 x \cos_4 x dx$

$$\begin{aligned}
\sin^2 x \cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2i}\right)^4 \\
&= -\frac{1}{2^2}(e^{i2x} - 2 + e^{-i2x}) \frac{1}{2^4}(e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-i2x} + e^{-i4x}) \\
&= \frac{1}{64}\left(e^{i6x} + 2e^{i4x} - e^{i2x} - 4 - e^{-i2x} + 2e^{-i4x} + e^{-i6x} +\right) \\
&= -\frac{1}{32}(-2 - \cos 2x + 2\cos 4x + \cos 6x)
\end{aligned}$$

D'où

$$\int \sin^2 x \cos_4 x dx = -\frac{1}{32}(-2 - \cos 2x + 2\cos 4x + \cos 6x) + C$$

1.4.6 Primitive des fractions rationnelles

.

En utilisant la division euclidienne, toute fonction rationnelle R peut se mettre sous la forme

$$R(x) = Q(x) + \frac{N(x)}{D(x)}$$

où Q, N, D sont des polynômes vérifiant $d^\circ N < d^\circ D$. La recherche de la primitive de Q ne posant pas de difficulté, nous nous occuppons de $\frac{N}{D}$.

Proposition 1.4.21. *Supposons que le nombre réel a est un zéro d'ordre $k \geq 1$ de D : $D(x) = (x-a)^k D_1(x)$ avec $D_1(a) \neq 0$. Alors*

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \sum_{s=1}^{k} \frac{A_s}{(x-a)^s} + \frac{N_1(x)}{D_1(x)} \text{ avec } d^\circ N_1 \leq d^\circ D_1$$

Démonstration.

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{N(x) - AD_1(x)}{(x-a)^k D_1(x)}$$

Déterminons A_k de façon à avoir $N(a) - A_k D_1(a) = 0$. Alors $A_k = \frac{N(a)}{D_1(a)}$ et $N(x) - A_k D_1(x) = (x-a)N_k(x)$. Par suite,

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{N_k(x)}{(x-a)^{k-1} D_1(x)} \text{ avec } d^\circ N_k < k-1+d^\circ D_1.$$

En ittérant k fois ce procédé nous obtiendrons le résultat anoncé. □

Proposition 1.4.22. *Supposons que $D(x) = (x^2+px+q)^k D_1(x)$ où $k \in \mathbb{N}^*$, $D_1(x)$ n'est pas divisible par x^2+px+q et $\Delta = p^2 - 4q < 0$. Alors,*

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \sum_{s=1}^{k} \frac{A_s x + B_s}{(x^2+px+q)^s} + \frac{N_1(x)}{D_1(x)} \text{ avec } d^\circ N_1 \leq d^\circ D_1$$

Démonstration.

$$\forall A, B \in \mathbb{R}\ \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} + \frac{N(x) - (Ax+B)D_1(x)}{(x^2+px+q)^k D_1(x)}$$

Déterminons A_k et B_k de sorte que $N(x) - (Ax+B)D_1(x)$ soit divisible par x^2+px+q. Pour celà il suffit que $N(x) - (A_k x + B_k)D_1(x)$ admette les même zéros $\alpha \pm i\beta$ que x^2+px+q :

$$N(\alpha+i\beta) - [A_k(\alpha+i\beta) + B_k]\, D_1(\alpha+i\beta) = 0$$

$$A_k(\alpha+i\beta) + B_k = \frac{N(\alpha+i\beta)}{D_1(\alpha+i\beta)} = K + iL \text{ avec } K, L \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} A_k\alpha + B_k &= K \\ A_k\beta &= L \end{cases} \quad A_k = \frac{L}{\beta} \text{ et } B_k = K - \frac{L}{\beta}\alpha = \frac{K\beta - L\alpha}{\beta}$$

Alors $N(x)-(A_kx+B_k)D_1(x)=(x^2+px+q)N_k(x)$ et

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}+\frac{N_k(x)}{(x^2+px+q)^kD_1(x)} \text{ avec } d^\circ N_k<k-1+d^\circ D_1.$$

En itérant k fois ce procédé nous obtiendrons le résultat anoncé. □

Corollaire 1.4.23. *Supposons que*

$$D(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{k_i}\prod_{j=1}^{m}(x^2+p_jx+q_j)^{\ell_i} \textit{ avec } p_j^2-4q_j<0 \textit{ pour } 1\leq j\leq m$$

Alors $\frac{N(x)}{D(x)}$ *se décompose en éléments simples comme suit*

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{s=1}^{k_i}\frac{A_{is}}{(x-a_i)^s}\right]+\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{\ell_j}\frac{B_{js}x+C_{js}}{(x^2+p_jx+q_j)^s}\right]$$

Démonstration. Conséquence immédiate des Propositions 1.4.21 et 1.4.22 □

La recherche des primitives de $\frac{N}{D}$ se ramène donc au calcul de primitives de la forme

$$\int\frac{dx}{(x-a)^n} \quad \text{et} \quad \int\frac{(ax+b)dx}{(x^2+px+q)^n} \text{ avec } p^2-4q<0.$$

Or nous avons

$$\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C, \tag{1.24}$$

$$\int\frac{dx}{(x-a)^n}=\frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-11}}+C \text{ si } n\geq 2. \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned}
\int\frac{(ax+b)dx}{(x^2+px+q)} &= \frac{a}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+(b-\frac{ap}{2})\int\frac{dx}{(x+p/2)^2+\frac{4q-p^2}{4}}\\
&= \frac{a}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+(b-\frac{2b-ap}{\sqrt{4q-p^2}})\int\frac{\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}dx}{(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}})^2+1}\\
&= \frac{a}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2b-ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{Arctan}(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}})+C.
\end{aligned}$$

Pour $n\geq 2$,

$$\begin{aligned}
\int\frac{(ax+b)dx}{(x^2+px+q)^n} &= \frac{a}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx+(b-\frac{ap}{2})\int\frac{dx}{\left[(x+p/2)^2+\frac{4q-p^2}{4}\right]^n}\\
&= \frac{a}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}+\frac{2b-ap}{2}\left(\frac{4}{4q-p^2}\right)^n\int\frac{dx}{\left[(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}})^2+1\right]^n}
\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variables $t = \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$, nous avons

$$\int \frac{dx}{\left[(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}})^2+1\right]^n} = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$$

En posant $t = \tan\varphi$, nous obtenons

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \int \frac{d\varphi}{(1+\tan^2\varphi)^{n-1}} = \int \cos^{2n-2}\varphi d\varphi$$

qui est une primitive déjà étudiée.

Exemple 1.4.24. *1. Calcul de* $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx$

La décomposition en éléments simple donne

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = -\frac{2}{9}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{2}{9}\frac{1}{x-2}$$

D'où les primitives

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx &= -\frac{2}{9}\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{(x+1)^2}dx-\int\frac{1}{(x+1)^3}dx+\frac{2}{9}\int\frac{1}{x-2}dx \\ &= \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|-\frac{2x-1}{(x+1)^2}+C\end{aligned}$$

2. *Calcul de* $\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx$

Décomposition en éléments simples

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+2x+3}+\frac{dx+e}{(x^2+2x+3)^2}$$

En developpant et en identifiant les coéfficients ou per autres méthodes, on obtient

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{1}{x+1}+\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}-\frac{2}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Calcul de

$$\int\frac{1}{(x^2+2x+3)^2}dx = \int\frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \int\frac{dx}{4\left[(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1\right]^2}$$

Posons $\frac{x+1}{\sqrt{2}} = t$ *et donc* $dx = \sqrt{2}dt$. *On obtient*

$$\int\frac{dx}{4\left[(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1\right]^2} = \int\frac{\sqrt{2}dt}{4(t^2+1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}$$

Posons $t = \tan\varphi$ *on a* $d\varphi = \frac{dt}{t^2+1}$ *D'où*

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+2x+3)^2}dx &= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{d\varphi}{(\tan^2\varphi+1)} = \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{Arctan} t + \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{t}{1+t^2} + C \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{Arctan}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{8}\sqrt{2}\frac{x+1}{x^2+2x+3} + C\end{aligned}$$

Conclusion

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\frac{x+2}{x^2+2x+3} - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{Arctan}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

1.4.7 Primitive des fonctions rationnelles en sin et cos

Règle de Bioche

Posons $f(x) = F(\sin x, \cos x)$. On étudie l'invariance de $f(x)dx$ quand on remplace x ou par $-x$, ou $\pi - x$ ou par $\pi + x$.

1. Si deux au moins des changements laissent $f(x)dx$ invariant, alors on utilise le changement de variables $\cos 2x = t$
2. Si $f(x)dx$ est invariant quand on remplace x par :
   (a) $-x$ alors on pose $\cos x = t$
   (b) $\pi - x$ alors on pose $\sin x = t$
   (c) $\pi + x$ alors on pose $\tan x = t$
3. Dans tous les cas on peut utiliser le changement de variables $\tan(\frac{x}{2}) = t$

Exemple 1.4.25. *1. Calcul de* $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$

Le changement de variable préconisé par la règle Bioche est $\tan(\frac{x}{2}) = t$.
Alors $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $dt = (1+\tan^2(\frac{x}{2}))\frac{1}{2}dx$ *soit* $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = 4\int \frac{tdt}{(1+t^2)(1+t)^2}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{t}{(1+t^2)(1+t)^2} &= \frac{at+b}{t^2+1} + \frac{c}{t+1} + \frac{d}{(t+1)^2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{(t+1)^2}\right]\end{aligned}$$

D'où

$$\int \frac{tdt}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t+1)^2}dt = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} t + \frac{1}{2}\frac{1}{t+1}$$

et par suite

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = 2\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{\tan(\frac{x}{2})+1}\right] + C = x + \frac{2}{\tan(\frac{x}{2})+1} + C$$

2. *calcul de* $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$
Le changement de variable préconisé par la règle Bioche est $\tan x = t$
Alors $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ *et* $(1+t^2)dx = dt$. *Donc*

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} &= \int \frac{1}{2-\frac{t^2}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(\frac{t}{\sqrt{2}})+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\frac{t}{\sqrt{2}})}{(\frac{t}{\sqrt{2}})^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}) + C\end{aligned}$$

1.4.8 Primitive de fonctions rationnelle de fonctions hyperboliques

$\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)dx$ où $R(X,Y)$ est une fonction rationnelle en X et Y. En utilisant le règle de Bioche

1. Si $\int R(\cos x, \sin x)dx$ se calcule en utilisant $\cos 2x = t$ alors $\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)dx$ se calcule avec $\operatorname{ch} 2x = t$
2. Si $\int R(\cos x, \sin x)dx$ se calcule en utilisant $\cos x = t$ alors $\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)dx$ se calcule avec $\operatorname{ch} x = t$
3. Si $\int R(\cos x, \sin x)dx$ se calcule en utilisant $\sin x = t$ alors $\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)dx$ se calcule avec $\operatorname{sh} x = t$
4. Si $\int R(\cos x, \sin x)dx$ se calcule en utilisant $\tan x = t$ alors $\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)dx$ se calcule avec $\operatorname{th} x = t$
5. dans tous les cas on peut utiliser $e^x = t$ ou $\operatorname{th}(\frac{x}{2}) = t$.

Exemple 1.4.26. *1. calcul de* $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x}$ *Les règle de Bioche préconisent pour* $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ *le changement de variable* $\cos x = t$. *Posons* $\operatorname{ch} x = t$. *Alors,*

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1 \textit{ et } dt = \operatorname{sh} x dx$$

Donc

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x} = \int \frac{\operatorname{sh} x dx}{\operatorname{sh}^4 x} = \int \frac{dt}{(t^2-1)^2}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{1}{(t^2-1)^2} &= \frac{1}{(t-1)^2(t+1)^2} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{(t+1)^2} + \frac{c}{t-1} + \frac{d}{(t-1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2}\right]\end{aligned}$$

D'où

$$\int \frac{dt}{(t^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{(t+1)} - \frac{1}{t-1}\right] + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\frac{t}{t^2-1} + C$$

Soit

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{ch} x - 1}\right| - \frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh} x} + C$$

2. *Calcul de* $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{5\operatorname{sh} x - 4\operatorname{ch} x}$
Posons $e^x = t$ *et donc* $dx = \frac{dt}{t}$, $x = 0 \Leftrightarrow t = 1$ *et* $x = \ln 2 \Leftrightarrow t = 2$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{5\operatorname{sh} x - 4\operatorname{ch} x} &= \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\frac{5}{2}(e^x - e^{-x}) - 2(e^x + e^{-x})} = 2\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x - 9e^{-x}} \\ &= 2\int_1^2 \frac{dt}{t^2 - 9} = 2\int_1^2 \frac{1}{6}\left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3}\right) dt = \frac{1}{3}\left[\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\right]_1^2 = \frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}\end{aligned}$$

1.4.9 Intégrale abéliennes

Ce sont les intégrales de la forme $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ ou $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ avec $R(X,Y)$ une fonction rationnelle en X et Y et n entier.

1. Dans le cas de $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, le changement de variables $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ nous ramène à un calcul de primitive de fonction rationnelle en t.
2. Dans le cas de $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$, les changements de variables
   - $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$ si $a > 0$
   - $\sqrt{a\frac{x-\alpha}{x-\beta}} = t$ si $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ avec $\alpha \neq \beta$, nous ramène à des calculs de primitives de fontions rationnelles en t.

Exemple 1.4.27. *1. Calcul de* $\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx$
$\sqrt{x+1} = (\sqrt[6]{x+1})^3$ $\sqrt[3]{1+x} = \left(\sqrt[6]{1+x}\right)^2$ *Posons* $t = \sqrt[6]{1+x}$. *On a* $1+x = t^6$ *et* $dx = 6t^5 dt$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx &= \int \frac{t^3 - t^2}{t^3 + t^2} 6t^5 dt = \int 6\frac{t^6 - t^5}{t+1} dt \\ &= 6\int \left(t^5 - 2t^4 - 2t^3 - 2t^2 + 2t - 2 + \frac{2}{t+1}\right) dt \\ &= 6\left(\frac{1}{6}t^6 - \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + t^2 - 2t + 2\ln|t+1|\right) + C\end{aligned}$$

En remplaçant t par sa valeur en x, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx &= 1 + x - \frac{12}{5}\sqrt[6]{1+x}^5 + 3\sqrt[6]{1+x}^4 - 4\sqrt[6]{1+x}^3 \\ &+ 6\sqrt[6]{1+x}^2 - 12\sqrt[6]{1+x} + 12\ln\left|\sqrt[6]{1+x} + 1\right| + C \\ &= 1 + x - \frac{12}{5}\frac{(x+1)}{\sqrt[6]{1+x}}^5 + 3\sqrt[6]{1+x}^4 - 4\sqrt[6]{1+x}^3 + 6\sqrt[6]{1+x}^2 \\ &- 12\sqrt[6]{1+x} + 12\ln\left|\sqrt[6]{1+x} + 1\right| + C\end{aligned}$$

2. *Calcul* $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$
   Posons $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$. *On a* $x^2+x+1 = x^2+2xt+t^2$ $x(1-2t) = t^2-1$ $x = \frac{t^2-1}{1-2t}$

$$dx = -2\frac{t^2-t+1}{(1-2t)^2}dt$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} &= \int \frac{-2(t^2-t+1)dt}{(1-2t)^2(2\frac{t^2-1}{1-2t}+t)} = -2\int \frac{(t^2-t+1)}{(1-2t)(t-2)}dt \\
&= -2\int\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{t}{(1-2t)(t-2)}\right)dt \\
&= -2\int\left[-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(-\frac{1}{3}\frac{1}{1-2t}-\frac{2}{3}\frac{1}{t-2}\right]dt \\
&= -2\left(-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\ln|1-2t|-\ln|t-2|\right)+C \\
&= t+\ln\frac{(t-2)^2}{\sqrt{1-2t}}+C = \sqrt{x^2+x+1}-x+\ln(\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x-2)^2}{\sqrt{\left|1-2\sqrt{x^2+x+1}-2x\right|}})+C
\end{aligned}$$

3. *Calcul de* $\int \frac{x-1}{x+1}\sqrt{2x-x^2}dx$
   En remarquant que $2x-x^2 = -(x-2)x$, *posons* $t = \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ $t^2 = \frac{2-x}{x}$ $2tdt = \frac{-x-2+x}{x^2}dx = -\frac{2}{x^2}dx$

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{\frac{2}{t^2+1}-1}{\frac{2}{t^2+1}+1} = \frac{2-t^2-1}{2+t^2+1} = \frac{1-t^2}{3+t^2}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x+1}\sqrt{2x-x^2}dx &= \int \frac{x-1}{x+1}\sqrt{-(x-2)x}dx = \int \frac{x-1}{x+1}\sqrt{\frac{(2-x)}{x}x^2}dx \\
&= \int \frac{1-t^2}{3+t^2}t\frac{4t}{(t^2+1)^2}(-1)\frac{2}{t^2+1}dt = -8\int\frac{(1-t^2)t}{(3+t^2)(t^2+1)^3}
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Equations différentielle du premier et du second ordres

2.1 Introduction

Beaucoup de problèmes physique et mécanique se ramènent à la recherche de fonctions (d'une ou plusieurs variables numériques) dont les dérivées vérifient certaines relations : Par exemple, si θ est l'angle que fait une pendule avec la verticale il est établit que cet angle est lié au temps t par la relation

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega^2 \sin(\theta(t)) = 0, \tag{2.1}$$

ω étant une constante qui dépend de la pendule.

Définition 2.1.1. *Une équation différentielle est une relation entre une variable réelle (par exemple x), une fonction qui dépend de cette variable (par exemple y) et un certain nombre de ses dérivées successives. Lorsque la dérivée de plus haut degré de la fonction (qui apparaît réellement) est la $n^{ième}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, on dit que l'équation différentielle est d'ordre n.*

Exemple 2.1.2.

$$y' = 2y \tag{2.2}$$

est une équation différentielle d'ordre 1*, tandis que*

$$y = \frac{1}{2}x^2 y'' - 5x. \tag{2.3}$$

est une équation différentielle d'ordre 2 où y est une fonction de x.

Remarque 2.1.3.

1. *Une équation différentielle d'ordre n peut donc s'écrire sous la forme :*

$$\phi(x, y, y', y", \ldots, y^{(n)}) = 0 \text{ ou encore } \phi(x, y(x), y'(x), y"(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

où y est donc une fonction qui dépend de x et ϕ est une fonction des $n+2$ variables $x, y, y', y", \ldots, y^{(n)}$.
Nous nous intéresserons aux fonctions y à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2. *Une équation différentielle d'ordre n est mise sous forme résolue quand on peut exprimer la dérivée la plus forte en fonction de x et des dérivées précédentes*

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

où G est une fonction continue.

Définition 2.1.4.

– *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $U \subset \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $F : I \times U \to \mathbb{R}$ une application. On appelle solution de l'équation différentielle résolue d'ordre n*

$$y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{2.4}$$

tout couple (J, y) où

1. *$J \subset I$ est un intervalle non-trivial.*
2. *$y : J \to \mathbb{R}$ est une fonction $n-$fois dérivable sur J.*
3. *Pour tout $x \in J$, $(y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \in U$, et $y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$.*

On appelle courbes intégrales d'une équation différentielle l'ensemble des courbes représentatives de toutes les solutions de cette équation différentielle

– *Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle $\phi(x, y, y', y", ..., y^{(n)}) = 0$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ tout entier, c'est trouver toutes les fonctions f telles que :*
  (a) *f soit n fois dérivable sur I*
  (b) *$\forall x \in I,\ \phi(x, f(x), f'(x), f"(x), ..., f^{(n)}(x)) = 0$.*
– *Une fonction qui vérifie les conditions (a) et (b) est appelée solution (ou intégrale) particulière de l'équation différentielle sur I.*
– *On appelle solution (ou intégrale) générale de l'équation sur I, l'ensemble de toutes les fonction solutions.*

– En pratique, on suppose souvent que I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
– Dans certains cas, à partir de la solution générale d'une équation différentielle, on peut rechercher une solution particulière satisfaisant à certaines conditions appelées conditions initiales. En général, ces conditions concernent les valeurs prises par la fonction ou certaines dérivées en une valeur x_0.

Exemple 2.1.5.
• *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est une solution particulière de l'équation différentielle*

$$y" + xy' - 5y = 2 - 3x^2.$$

• *Les courbes intégrales de l'équation différentielle $y" = 0$ sont les droites du plan non parallèles à l'axe des ordonnées.*
• *$y = \int_2^x t dt = \frac{1}{2}x^2 - 2$ est la solution particulière de l'équation différentielle $y' = x$ qui vérifie la condition initiale $y(2) = 0$.*

A priori, l'intervalle d'existence J d'une solution (J,y) n'est pas égal à I ; Considérer par exemple l'équation $y' = y^2$ qui entre dans le cadre précédent avec $n = 1$, $I = \mathbb{R}$ et $F(x,y) = y^2$, alors pour tout $\alpha \neq 0$, la fonction

$$y_0 = \frac{\alpha}{1-\alpha x}$$

vérifie l'équation, mais n'est pas définie sur $\mathbb{R}$, bien que $I = \mathbb{R}$. Ceci nous mène à considérer la notion de solution maximale.

Définition 2.1.6. *Une solution (J,y) de (2.4) est dite maximale si pour toute solution $(\tilde{J},\tilde{y})$ telle que $J \subset \tilde{J}$ et $\tilde{y}|_J = y$, on a nécéssairement $\tilde{J} = J$.*

2.2 Equation différentielle d'ordre 1

L'équation d'ordre 1 sert de référence pour toute la théorie, puisque les équations d'ordre supérieur peuvent s'y ramener.

Définition 2.2.1. *Considérons Ω*
- *un sous-ensemble (ouvert) de $\mathbb{R}^3$,*
- *une application $F : \Omega \to \mathbb{R}$.*

1. *L'équation*
$$F(x,y(x),y'(x)) = 0 \tag{2.5}$$
où y est une fonction réelle inconnue est appelée une équation différentielle du premier ordre.
2. *Une solution de l'équation (2.5) est une application dérivable $\varphi : I \to \mathbb{R}$ où*
   - *I est un intervalle de $\mathbb{R}$*
   - *$\forall x \in I\ (x,\varphi(x),\varphi'(x)) \in \Omega$*
   - *$\forall x \in I\ F(x,\varphi(x),\varphi'(x)) = 0$*
3. *Une solution maximale de (2.5) est une solution $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de (2.5) telle qu'il n'existe aucune solution $\psi : J \to \mathbb{R}$ de (2.5) vérifiant*
   - *$I \subsetneq J$*
   - *$\forall x \in I\ \psi(x) = \varphi(x)$*
4. *Supposons que (x_0,y_0,y_1) est un point de Ω. l'équation*
$$\begin{cases} F(x,y(x),y'(x)) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \tag{2.6}$$
où y est la fonction réelle inconnue est appelée le problème de Cauchy associé à l'équation (2.5) et de conditions initiales (x_0,y_0,y_1).

La forme résolue, ou explicite, permet d'avoir de bons résultats théoriques d'existence et d'unicité.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur U. Considérons l'equation différentielle du premier ordre résolue

$$y' = f(x,y). \tag{2.7}$$

Nous admettons le théorème d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 2.2.2. *Soit $f : I\times U \to \mathbb{R}$ une fonction continue, où U et I sont des intervalles bornés de $\mathbb{R}$ qui contiennent repectivement les points $y = y_0$ et $x = x_0$. On suppose en outre que f vérifie la condition dite de Lipschitz :*

$$\forall x \in I, \forall y,z \in U, |f(x,y) - f(x,z)| \leq \lambda |y-z|,$$

avec $\lambda > 0$. Il existe un intervalle $J \subset I$ sur lequel est défini l'unique solution de l'équation différentielle $y'(x) = f(x,y(x))$ qui satisfait la condition initiale $y(x_0) = y0$.

Théorème 2.2.3. *(de Cauchy-Lipschitz) On suppose que f est continue, et localement lipshitzienne par rapport à sa deuxième variable y. Soit $(x_0,y_0) \in U$ donné. Alors il existe une unique solution maximal au problème de Cauchy*

$$\left\{\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right. \tag{2.8}$$

Notons que si f est seulement continue au voisinage de (x_0,y_0) alors le problème de Cauchy (2.8) a au moins une solution, mais il peut en avoir plusieurs. Par exemple l'équation $y' = \frac{3}{2}|y|^{\frac{1}{3}}$ admet deux solutions définies sur tout $\mathbb{R}$, et vérifiant $y(0) = 0$: la fonction nulle et $x \mapsto x|x|^{1/2}$.

2.2.1 Equations à variables séparables

Une équation différentielle de 1^{er} ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme

$$f(y)\cdot y' = g(x). \tag{2.9}$$

Une telle équation différentielle peut s'intégrer facilement . En effet, on écrit $y' = \frac{dy}{dx}$ puis,*symboliquement*,

$$f(y)dy = g(x)dx \Leftrightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx + C.$$

(On écrit ici explicitement la constante d'intgration arbitraire $C \in \mathbb{R}$ (qui est déjà implicitement présente dans les l'intégrales indéfinies) pour ne pas l'oublier.) Il s'agit donc d'abord de trouver des primitives F et G de f et de g, et ensuite d'exprimer y en terme de x (et de C). En outre, la fonction F est continûment dérivable, strictement monotone, donc admet une fonction réciproque de sorte que la solution s'exprime comme

$$F(y) = G(x) + C \Leftrightarrow y = F^{-1}(G(x) + C)$$

Exemple 2.2.4. *Résoudre sur $I =]1,\infty[$ l'équation différentielle*

$$xy' \ln x = (3\ln x + 1)y. \tag{2.10}$$

Solution
On peut "sṕarer les variables" (x et y) en divisant par $yx\ln x$, ce qui est permis ssi $y \neq 0$ (car $x\ln x > 0$ d'après l'énoncé). On a

$$\frac{y'}{y} = \frac{3lnx+1}{x\ln x} \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{3lnx+1}{x\ln x}dx + C \quad C \in \mathbb{R}$$

or $\frac{3lnx+1}{x\ln x} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x\ln x}$ *D'où*

$$\ln|y| = 3\ln|x| + \ln|\ln x| + C' = \ln\left|x^3 \ln x\right| + C'.$$

(On a simplifié $\ln|\ldots| = \ln(\ldots)$ en utilisant que $x \in I \Leftrightarrow x > 1$.) En prenant l'exponentielle de cette équation, on a finalement

$$y = C_2 x^3 \ln x$$

avec $C_2 \in \mathbb{R}$: en effet, le signe de $C_2(= \pm e^{C'})$ tient compte des deux possibilités pour $|y|$, et on vérifie que $C_2 = 0 \Rightarrow y = 0$ est aussi solution (mais pour laquelle le calcul précédent, à partir de la division par y, n'est pas valable. C'est une solution **singulière** *de l'équation)*

La constante d'intégration C est fixée lorsqu'on demande que pour un $x = x_0$ donnée, on ait une valeur donnée de $y(x) = y(x_0) = y_0$.

2.2.2 Equations différentielle linéaire du premier ordre

Définition 2.2.5. *On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation du type :*

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

Une fonction f est solution de cette équation sur un intervalle I si

$$\forall x \in I, a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$$

Par exemple, la fonction $\exp(-\frac{x^2}{2}$ est solution de l'équation $y' + xy = 0$. Les fonctions considérées peuvent éventuellement être à valeurs complexes. Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f = g + ih$ avec g et h fonctions à valeurs réelles dérivables, on pose $f' = g' + ih'$. Ainsi, pour a complexe, la dérivée de $\exp ax$ est $a\exp ax$

Equation à coefficients constants

Il s'agit d'équations pour lesquelles les fonctions a et b sont constantes. Quitte à diviser par a et à renommer les coefficients, on peut se ramener à une équation du type :

$$y' + ay = c(x)$$

1-Equation homogène (ou équation sans second membre)

On appelle ainsi l'équation $y' + ay = 0$. Quelles sont ses solutions sur $\mathbb{R}$; avec a réel ?

- Il y a la solution $y = 0$:
- Cherchons les solutions ne s'annulant en aucun point. On peut alors écrire : $\frac{y'}{y} = a$
  $\Rightarrow \ln|y| = ax + Cte$, en prenant une primitive de chaque membre
  $\Rightarrow |y| = e^{Cte}e^{-ax}$
  La fonction y ne s'annulant pas et étant continue, elle garde un signe constant. En posant $\lambda = e^{Cte}$ ou $\lambda = -e^{Cte}$ suivant le signe de y ; on obtient :
  $$y = \lambda e^{-ax}$$
- Existe-t-il d'autres solutions, par exemple des solutions s'annulant en certains points ? Qu'en est-il si a (et donc y) sont complexes ? Montrons que les solutions sont de la même forme (mais avec λ complexe si a est complexe). Il suffit de montrer que, si y est une solution, alors ye^{ax} est constant.
  Posons donc z la fonction égale à ye^{ax}. Pour montrer que z est constant, il suffit de calculer sa dérivée
  $$z' = y'e^{ax} + aye^{ax} = 0$$
  $z' = 0$ donc z est constante (complexe si les fonctions sont à valeurs complexes).

Ces résultats permettent d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.2.6. *Soit a réel ou complexe. Alors :*

i) les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sont de la forme $y = \lambda e^{-ax}$; où λ est un scalaire quelconque. Elles forment un espace vectoriel de dimension 1 dont une base est la fonction e^{-ax}.

ii) Si l'on fixe une condition $y(x_0) = y_0$; alors cette solution est unique.

iii) En particulier, si y s'annule en un point, y est identiquement nulle.

Caractérisation de exponentielle

a étant un complexe, il résulte de ce qui précède que l'exponentielle est caractérisée par l'équation différentielle et la condition initiale suivantes :

$$y = e^{ax} \Leftrightarrow y' = ay \text{ et } y(0) = 1$$

Une autre caractérisation de l'exponentielle repose sur une équation fonctionnelle. Si $f(t) = e^{at}$ on a $f(t+u) = f(t)f(u)$ y compris lorsque a est complexe. Réciproquement, soit $f(t+u) = f(t)f(u)$ avec f fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. En dérivant la relation par rapport à u, on a :

$$f'(t+u) = f(t)f'(u)$$

Si on pose $u = 0$ et $f'(u) = a$, on obtient $f'(t) = af(t)$: Cette équation a pour solution

$$f(t) = e^{at}f(0)$$

Reste à calculer $f(0)$. La relation $f(t+u) = f(t)f(u)$ avec $t = u = 0$ conduit à $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ et f est identiquement nulle, ou $f(0) = 1$ et $f(t) = e^{at}$. Finalement :

$$\forall t, \forall u, f(t+u) = f(t)f(u) \Leftrightarrow f = 0 \text{ ou } \exists a, \exists t; f(t) = e^{at}$$

2- Equation avec second membre

Considérons l'équation $y' + ay = c(x)$.

Soit y_0 solution de cette équation. On remarque alors que :

i) si z est solution de l'équation homogène associée, alors $y_0 + z$ est solution de l'équation complète. En effet :

$$\begin{aligned} &y_0' + ay_0 = c(x) \\ &z' + az = 0 \\ &(y_0 + z)' + a(y_0 + z) = c(x) \end{aligned}$$

ii) Inversement, si y est solution de l'équation complète, alors $y - y_0$ est solution de l'équation homogène. En effet :

$$\begin{aligned} &y' + ay = c(x) \\ &y_0' + ay_0 = c(x) \\ &(y - y_0)' + a(y - y0) = 0 \end{aligned}$$

La conséquence de cette remarque est la suivante. Pour trouver TOUTES les solutions y de l'équation complète, il suffit de trouver les solutions z de l'équation homogène associée (ce qu'on sait faire), et de leur ajouter UNE solution particulière de l'équation complète. Voici deux cas :

1. Si $c(x) = P(x)e^{kx}$ où P est un polynôme de degré n et k une constante réelle ou complexe (ce dernier cas permet de traiter les fonctions trigonométriques). Cherchons y sous la forme $Q(x)e^{kx}$. On obtient l'équation suivante, après simplification :

$$Q'(x) + (k + a)Q(x) = P(x).$$

   Si l'on cherche les coefficients de Q, de degré n, cela revient à résoudre un système triangulaire de $n + 1$ équations à $n + 1$ inconnues. Les coefficients de la diagonale valent $k + a$. Il y a donc une solution si $k \neq -a$. Par contre, si $k = -a$, on obtient $Q'(x) = P(x)$ et il faut choisir Q de degré $n + 1$.

2. Si $c(x)$ est une fonction quelconque, on cherche y sous la forme :

$$y = \lambda(x)e^{-ax}$$

   Cette méthode est connue sous le nom de méthode de variation de la constante. On prend la solution de l'équation homogène, mais au lieu de prendre λ constant, on prend λ variable. On est amené à résoudre l'équation suivante, après simplification :

$$\lambda'(x)e^{-ax} = c(x),$$

   d'où $\lambda'(x) = c(x)e^{ax}$ et il suffit d'intégrer cette dernière fonction.

On remarque également que, si y_1 est solution particulière avec second membre b_1 et si y_2 est solution particulière avec second membre b_2, alors $y_1 + y_2$ est solution particulière avec second membre $b_1 + b_2$

$$y_1' + ay_1 = b_1 \text{ et } y_2' + ay_2 = b_2 \Rightarrow (y_1 + y_2)' + a(y_1 + y_2) = b_1 + b_2$$

C'est ce qu'on appelle le principe de superposition.

Exemple 2.2.7.

1. *Résoudre* $y' + y = e^{2x}$.
   La solution de l'équation homogène est $y_H = \lambda e^{-x}$
   Une solution particulière de la forme ae^{2x} *est* $y_P = \frac{1}{3}e^{2x}$
   La solution générale est donc $y = y_P + y_H = \frac{1}{3}e^{2x} + \lambda e^{-x}$
2. *Résoudre* $y' + y = e^{-x}$
   La solution de l'équation homogène est $y_H = \lambda e^{-x}$
   Une solution particulière de la forme axe^{-x} *est* $y_P = xe^{-x}$
   La solution générale est donc $y = y_P + y_H = xe^{-x} + \lambda e^{-x}$
3. *Résoudre* $y' + 2y = x^2e^{-2x} + 2e^{3x} + 1 + x$
   La solution de l'équation homogène est $y = \lambda e^{-2x}$
   Par linéarité, il suffit de chercher des solutions particuliéres pour chaque terme du second membre, et de les ajouter.
   Solution avec second membre x^2e^{-2x} *: On cherche une solution sous la forme* $y_P = (ax^3 + bx^2 + cx)e^{-2x}$ *(Il est inutile de prendre un terme constant, car on obtient alors une solution de l'équation homogène, qui n'a aucune contribution au terme du second membre). On obtient l'équation :*
   $$3ax^2 + 2bx + c = x^2$$
   D'où $y = \frac{x^3}{3}e^{-2x}$
   Solution avec second membre $2e^{3x}$ *: Une solution de la forme* ae^{3x} *est* $\frac{2}{5}e^{3x}$.
   Solution avec second membre $1 + x$ *: Une solution de la forme* $ax + b$ *est* $a = \frac{1}{2}$ *et* $b = \frac{1}{4}$.
   La solution générale est donc :
   $$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{2}{5}e^{3x} + \frac{x^3}{3}e^{-2x} + \lambda e^{-2x}$$
4. *Résoudre* $y' - y = \cos x$ *: Il suffit de résoudre avec comme second membre* e^{ix} *: Soit y la solution. Il n'est pas difficile de voir que le conjugué de y sera solution de l'équation avec second membre* e^{-ix}*, et donc par linéarité, que sa partie réelle (demi-somme des solutions trouvées) est solution avec second membre égal à* $\cos x$ *:*
   La solution de l'équation homogène est $y = \lambda e^x$
   Une solution particulière de la forme ae^{ix} *est* $\frac{1}{i-1}e^{ix} = -\frac{i+1}{2}e^{ix}$ *Sa partie réelle est* $-\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$.
   La solution générale est donc
   $$y = \frac{\sin x \cos x}{2} + \lambda e^x$$

Equations à coefficients non constants

Soit une telle équation $a(x)y' + b(x)y = c(x)$. Nous la résoudrons sur un intervalle I sur lequel a ne s'annule pas.

1-Equation homogène ou équation sans second membre

On appelle ainsi l'équation $a(x)y' + b(x)y = 0$: Quelles sont ses solutions dans le cas réel ?

- Il y a la solution $y = 0$.
- Cherchons les solutions ne s'annulant en aucun point. On peut alors écrire.

$$\frac{y'}{y} = \frac{-b(x)}{a(x)} \Rightarrow \ln(|y|) = G(x) + Cste$$

où G est une primitive de $\frac{-b(x)}{a(x)}$. Par conséquent, $|y| = e^{Cste}e^{G(x)}$ La fonction y ne s'annulant pas, elle garde un signe constant. En posant $\lambda = e^{Cte}$ ou $-e^{Cte}$ suivant le signe de y, on obtient :

$$y = \lambda e^{G(x)}$$

- Montrons qu'il n'y a pas d'autres solutions. Si y est une telle solution, montrons que $ye^{-G(x)}$ est constante. Posons $z = ye^{-G(x)}$. On a alors :

$$z' = y'e^{-G(x)} - G'(x)ye^{-G(x)} = e^{-G(x)}(y' + \frac{b(x)}{a(x)}y) = 0.$$

Ainsi, $z' = 0$ donc z est constante.

Ces résultats permettent d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.2.8. *Soit $a(x)y' + b(x)y = 0$ une équation différentielle linéaire du premier ordre. Alors :*

i) les solutions de cette équation sur un intervalle I où la fonction a ne s'annule pas forment un espace vectoriel de dimension 1 dont une base est la fonction $e^{G(x)}$ où G est une primitive de $-\frac{b(x)}{a(x)}$

ii) Si l'on fixe une condition $y(x_0) = y_0$, alors cette solution est unique.

iii) En particulier, si y s'annule en un point, y est identiquement nulle.

2-Equation avec second membre

Considérons l'équation $a(x)y' + b(x)y = c(x)$. Soit y_0 solution de cette équation. On remarque, comme dans le cas des équations à coefficients constants, que :

i) Si z est solution de l'équation homogène associée, alors $y_0 + z$ est solution de l'équation complète.

ii) Inversement, si y est solution de l'équation complète, alors $y - y_0$ est solution de l'équation homogène.

La conséquence de cette remarque est la suivante. Pour trouver TOUTES les solutions y de l'équation complète, il suffit de trouver les solutions z de l'équation homogène associée (ce qu'on sait faire), et de leur ajouter UNE solution particulière de l'équation complète. On peut appliquer la méthode de variation de la constante . On cherche une solution y sous la forme $y = \lambda(x)e^{G(x)}$ (où $e^{G(x)}$ est solution de l'équation homogène)

Après simplification, cela conduit à l'équation :

$$a(x)\lambda'(x)e^{G(x)} = c(x) \Rightarrow \lambda'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}e^{-G(x)}$$

Il suffit alors de chercher une primitive de λ'

Exemple 2.2.9. 1. *$xy' + y = 3x^2$. Résolution de l'équation homogéne sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.*

$$\frac{y'}{y} = \frac{-1}{x}$$

d'où $y = \frac{\lambda}{x}$
Résolution de l'équation avec second membre : $y = \frac{\lambda(x)}{x}$ conduit à $\lambda' = 3x^2$ d'où $\lambda = x^3$ La solution générale est donc :

$$y = x^2 + \frac{\lambda}{x}$$

Il existe une solution sur $\mathbb{R}$: $y = x^2$ et c'est la seule.

2. *Résolution de*

$$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3 \tag{2.11}$$

La solution de l'équation homogène est

$$y_H = C(x+1)^2 \quad C \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p = C(x)(x+1)^2$$

En remplaçant dans (2.11) on obtient

$$C'(x) = x+1 \text{ soit } C(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$$

Par suite

$$y_p = \frac{1}{2}(x+1)^4$$

et la solution générale de (2.11) est

$$y = y_p + y_H = \frac{1}{2}(x+1)^4 + C(x)(x+1)^2 \quad C \in \mathbb{R}.$$

2.2.3 Equation de Bernoulli

On appelle équation de Bernoulli toute équation différentielle numérique du premier ordre de la forme

$$y' = B(x)y^{\alpha} + A(x)y \tag{2.12}$$

où A, B désignent deux fonctions numériques continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et α une constante réelle, différente de 0 et de 1.

Si α n'est pas entier, la fonction inconnue y sera supposée positive et pour $\alpha < 0$ la fonction y sera supposée non nulle. Le changement d'inconnue $z(x) = y^{1-\alpha}$ ramène l'intégration de (2.12) à celle d'une équation linéaire

$$z' = (1-\alpha)A(x) + (1-\alpha)B(x)z$$

Exemple 2.2.10. 1. *On cherche à résoudre*

$$y' - \frac{y}{2x} = 5x^2y^5 \tag{2.13}$$

On peut intégrer l'équation sur $]-\infty,0[$ *ou sur* $]0,+\infty[$. *On a* $\alpha = 5$. *On divise par* y^5 : $\frac{y'}{y^5} - \frac{y}{2xy^5} = 5x^2$ *On pose* $t = y^{-4}$ *d'où* $t' = -4y'y^{-5}$. *On obtient* $\frac{-1}{4}t' - \frac{t}{2x} = 5x^2$ *c'est-à-dire*

$$t' + \frac{2}{x}t = -20x^2 \tag{2.14}$$

C'est une équation linéaire du premier ordre et l'équation sans second membre est $t' + \frac{2}{x}t = 0$. *Elle est dfinie sur* $\mathbb{R}_-^*$ *ou* $\mathbb{R}_+^*$. *Une primitive de est* $\frac{2}{x}$ *est* $\ln(x^2)$ *D'où les solutions de l'équation sans second membre sont* $t = \frac{c}{x^2}$ *où* $c \in \mathbb{R}$.
Recherche d'une solution particulière : On pose
$t_0 = \frac{1}{x^2}c(x)$
$t_0' = \frac{1}{x^2}c'(x) - \frac{2}{x^3}c(x)$
En remplaçant dans t_0 *et sa dérivée dans l'équation (2.14), on obtient* $c'(x) = -20x^4$. *D'où* $c(x) = -4x^5$ *et* $t_0 = -4x^3$. *La solution générale de l'équation (2.14) est donc* $t = \frac{c}{x^2} - 4x^3$ *où* $c \in \mathbb{R}$.
On obtient donc la solution de l'équation (2.13) qui est

$$y^4 = \frac{1}{\frac{c}{x^2} - 4x^3}$$

$c \in \mathbb{R}$.

2. *L'équation de Bernoulli* $y'cosx + ysinx + y^3 = 0$ *devient une équation linéaire* $(u' - 2u\tan x = \frac{2}{\cos x})$ *pour* $u = y^{-2}$

2.2.4 Equation de Riccatti

Définition 2.2.11. *On appelle équation de Ricatti toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :*

$$y' = a(x)y2 + b(x)y + c(x) \tag{2.15}$$

où a, b *et* c *sont des applications continues sur des intervalles à préciser.*

Remarque 2.2.12. *On ne sait rsoudre ce type d'équation que si l'on connaît déjà une solution particulière* y_1

<u>Méthode de résolution</u>

On pose $y = y_1 + \frac{1}{t}$ avec $y_1' = a(x)y_1^2 + b(x)y_1 + c(x)$ et t ne s'annulant pas sur l'intervalle de résolution. On a $y' = y_1' - \frac{t'}{t^2}$.
$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$
$\Leftrightarrow\ y_1' - \frac{t'}{t^2} = a(x)\left(y_1 + \frac{1}{t}\right)^2 + b(x)\left(y_1 + \frac{1}{t}\right) + c(x)$
$\Leftrightarrow\ -\frac{t'}{t^2} = 2a(x)\frac{y_1}{t} + a(x)\frac{1}{t^2} + b(x)\frac{1}{t}$
$\Leftrightarrow\ t' + (2a(x)y_1 + b(x))t = -a(x)$

Exemple 2.2.13. *On cherche à rsoudre* $2x^2y' = (x-1)(y2-x2)+2xy$ *sur* $]0,+\infty[$. *On peut mettre l'équation sous la forme :*

$$y' = \frac{x-1}{2x^2}y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{x-1}{2}$$

$y = x$ *est une solution particulière. On pose* $y = x + \frac{1}{t}$ *où* t *est une fonction qui ne s'annule pas sur* $]0,+\infty[$. *On a* $y' = 1 - \frac{t}{t^2}$.

On obtient

$2x^2\left(1-\frac{t}{t^2}\right) = (x-1)\left(\left(x+\frac{1}{t}\right)^2 - x^2\right) + 2x\left(x+\frac{1}{t}\right)$

$\Leftrightarrow\ 2x^2 - 2x^2\frac{t'}{t^2} = (x-1)\left(x^2+2x\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-x^2\right)+2x^2+2x\frac{1}{t}$

$\Leftrightarrow\ -2x^2\frac{t'}{t^2} = (x-1)\left(2x\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)+2x\frac{1}{t}$

$\Leftrightarrow\ -2x^2\frac{t'}{t^2} = 2x^2\frac{1}{t}+x\frac{1}{t^2}-2x\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+2x\frac{1}{t}$

$\Leftrightarrow\ -2x^2\frac{t'}{t^2} = 2x^2\frac{1}{t}+x\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2}$

$\Leftrightarrow\ 2x^2t' + 2x^2t = 1-x$

$\Leftrightarrow\ t'+t = \frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}$

La solution de l'équation sans second membre est $t = ce^{-x}$ *où* $c \in \mathbb{R}$.

Une solution particulière est $t_0 = -\frac{1}{2x}$.

D'où la solution générale est : $t = ce^{-x} - \frac{1}{2x}$ *où* $c \in \mathbb{R}$.

Et $y = x + \frac{1}{ce^{-x}-\frac{1}{2x}}$

2.3 Equation différentielles linéaires du second ordre

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. a, b, c et d sont des éléments de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, $a(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Définition 2.3.1.

1. *L'équation différentielle*
$$a(x)y" + b(x)y' + c(x)y = d(x) \tag{2.16}$$
est une équation différentielle linéaire du second ordre.
2. *L'équation différentielle*
$$a(x)y" + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{2.17}$$
est l'équation différentielle linéaire du second ordre, homogène (c'est l'équation homogène associée à (2.16)).
3. *Si a, b et c sont constantes alors (2.16) et (2.17) sont dites à coéfficients constants.*

2.3.1 Equations à coefficients constants

Il s'agit d'équations pour lesquelles les fonctions a,b et c sont constantes. On a donc une équation du type :

$$ay" + by' + cy = d(x)$$

Nous supposerons $a \neq 0$ sinon, on a en fait une équation du premier ordre.

Equation homogène ou équation sans second membre

On appelle ainsi l'équation $ay" + by' + cy = 0$. Quelles sont ses solutions sur $\mathbb{R}$? Par analogie avec ce qu'on a trouvé pour les équations du premier ordre, cherchons les solutions sous la forme : $y = e^{rx}$. Lorsque l'on remplace dans l'équation, on obtient, aprés simplification :

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Cette équation s'appelle équation caractéristique associée à l'équation différentielle. Elle admet toujours des solutions, éventuellement complexes si le discriminant est négatif ou si a, b et c sont des complexes. Cherchons d'autres solutions sous la forme $y = f(x)e^{rx}$. On obtient :

$$y' = \left(f'(x) + rf(x)\right)e^{rx}$$

$$y" = \left(f"(x) + 2rf'(x) + r2f(x)\right)e^{rx}$$

En reportant dans l'équation, on obtient, après simplification de l'exponentielle ,

$$af" + (2ar + b)f' + (ar2 + br + c)f = 0$$

Or r est solution de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. D'où

$$af" + (2ar + b)f' = 0.$$

Cette équation est une équation du premier ordre en f'. Sa solution est :

$$f'(x) = Cte \times exp\left(-\frac{(2ar + b)x}{a}\right).$$

On distingue alors deux cas :

1. si $2ar + b \neq 0$; alors, en intégrant à nouveau,on a :

$$f(x) = Ae^{\frac{-(2ar+b)}{a}x} + B$$

et

$$y = Ae^{\frac{-(2ar+b)}{a}x} + Be^{rx}$$

Or $\frac{-(2ar+b)}{a}$ n'est autre que l'autre racine de l'équation caractéristique. Ainsi y est combinaison linéaire des deux solutions exponentielles trouvées. La condition $2ar + b \neq 0$ est équivalente à : $r \neq \frac{-b}{2a}$ ou encore $\Delta \neq 0$ où Δ est le discriminant de l'équation caractéristique. Dans le cas où a, b et c sont réels et où les racines r et r' sont complexes, alors r et r' sont conjuguées, et l'on peut prendre des combinaisons linéaires de leur demi-somme et de leur demi différence.

Ainsi, si $r = \alpha + i\beta$; alors $r' = \alpha - i\beta$ et y est combinaison linéaire de $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.

2. Si $2ar+b=0$, on remarque d'abord que cette condition équivaut à $r=-\frac{b}{2a}$ ou encore à $\Delta=0$. Dans ce cas, l'équation caractéristique admet une racine double, et il n'y a qu'une solution exponentielle. On a alors : $f'=Cte$ d'où, en int'egrant à nouveau :

$$f=Ax+B$$

et

$$y=Axe^{rx}+Be^{rx}.$$

y est combinaison linéaire de deux fonctions, dont l'une est l'exponentielle déjà trouvée. Ces résultats permettent d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.3.2. *Soit* $ay"+by'+cy=0 \quad (E.H)$ *une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Alors les solutions de cette équation sont de la forme suivante :*

1. *Soit*
$$ar^2+br+c=0 \tag{2.18}$$
l'équation caractéristique associée et Δ *son discriminant.*
   - *si* Δ *est non nul, alors* y *est combinaison linéaire des deux fonctions* e^{rx} *et* $e^{r'x}$ *où* r *et* r' *sont solutions de (2.18).*
   - *si* Δ *est nul, alors* y *est combinaison linéaire des deux fonctions* e^{rx} *et* xe^{rx} *où* r *est racine double de (2.18).*
2. *Ces solutions forment un espace vectoriel de dimension 2.*
3. *Dans le cas réel, si* Δ *est négatif, alors on peut préférer écrire* y *comme combinaison linéaire des deux fonctions* $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ *et* $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ *où* $r=\alpha+i\beta$ *et* $r'=\alpha+i\beta$ *sont solutions conjuguées de (2.18).*

Exemple 2.3.3. 1. *Résoudre* $y"-2y'+y=0$
L'équation caractéristique associée est :

$$r^2-2r+1=0$$

dont les solutions sont 1*, racine double. Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme :*

$$y=Axe^x+Be^x$$

2. *Résoudre* $y"-3y'+2y=0$
L'équation caractéristique associée est

$$r^2-3r+2=0$$

dont les solutions sont 1 et 2. Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme :

$$y=Ae^{2x}+Be^x$$

3. *Résoudre $y" + y' + y = 0$*
   L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 + r + 1 = 0$$

dont les solutions sont j et j^2, racines complexes. Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme :
– *sur $\mathbb{C}$:*

$$y = Ae^{jx} + Be^{j^2x}$$

avec A et B complexes ou

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

avec (d'autres) A et B complexes
– *sur $\mathbb{R}$:*

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

avec A et B réels

$$e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

et

$$e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

sont respectivement les parties réelles et imaginaires de e^{jx}.

Equation avec second membre

Considérons l'équation $ay" + by' + cy = d(x) \qquad (E)$. Soit y_0 solution de cette équation. On remarque alors que, comme dans le cas des équations du premier ordre :

1. si z est solution de l'équation homogène associée, alors $y_0 + z$ est solution de l'équation complète.
2. Inversement, si y est solution de l'équation complète, alors $y - y_0$ est solution de l'équation homogène.

La conséquence de cette remarque est la suivante. Pour trouver TOUTES les solutions y de l'équation complète, il suffit de trouver les solutions z de l'équation homogène associée (ce qu'on sait faire), et de leur ajouter UNE solution particulière de l'équation complète. Il est facile de vérifier que le principe de superposition s'applique également dans le cas présent :

si y_1 est solution particulière avec second membre d_1 et si y_2 est solution particulière avec second membre d_2, alors $y_1 + y_2$ est solution particulière avec second membre $d_1 + d_2$.

Voici un cas important : $d(x) = P(x)e^{kx}$ où P est un polynôme de degré n et k une constante réelle ou complexe (ce dernier cas permet de traiter les fonctions trigonométriques). Cherchons y sous la forme $Q(x)e^{kx}$:
$y = Q(x)e^{kx}$

$y' = [Q'(x) + kQ(x)]\, e^{kx}$ $y" = \left[Q"(x) + 2kQ'(x) + k^2Q(x)\right] e^{kx}$ On obtient l'équation suivante, après simplification :

$$aQ"(x) + (2ka + b)Q'(x) + (ak^2 + bk + c)Q(x) = P(x)$$

Si l'on cherche les coefficients de Q ; de degré n ; cela revient à résoudre un système triangulaire de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues. Les coefficients de la diagonale valent $ak^2 + bk + c$: On reconnaît là le premier membre de l'équation caractéristique. Il y a donc une solution si k n'est pas racine de cette équation.

Si $ak^2 + bk + c = 0$ (autrement dit k est racine de l'équation caractéristique), la démarche précédente conduit à rechercher un polynôme Q ; tel que $aQ"(x) + (2ka + b)Q'(x) = P(x)$; avec Q de degré $n+1$:

On obtient un système triangulaire dont les termes de la diagonale valent $2ak + b$: Si ce terme est non nul, alors il est possible de trouver Q : Or $2ak + b$ non nul signifie k diffèrent de $-\frac{b}{2a}$, et k étant racine de l'équation caractéristique, cela signifie que le discriminant est non nul, et donc que k est racine simple de l'équation.

Si $ak^2 + bk + c = 0$ et $2ak + b = 0$, alors k est racine de l'équation caractéristique et vaut $-\frac{b}{2a}$.

Cela signifie donc que le discriminant est nul, et donc que k est racine double de l'équation. On obtient alors l'équation $aQ"(x) = P(x)$; avec Q de degré $n+2$: a étant non nul, il est alors possible de trouver Q : Nous ne nous intéresserons pas à d'autres expressions de d. Nous pouvons donc énoncer :

Proposition 2.3.4. *Soit $ay" + by' + cy = P(x)e^{kx}$ une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, P étant un polynôme.*

1. *Si k n'est pas racine de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme $Q(x)e^{kx}$, avec $\deg Q = \deg P$.*
2. *Si k est racine simple de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme $Q(x)e^{kx}$, avec $\deg Q = \deg P + 1$.*
3. *Si k est racine double de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme $Q(x)e^{kx}$ avec $\deg Q = \deg P + 2$.*

Exemple 2.3.5.

– *Résoudre $y" + y = \cos x$:*
L'équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$ La solution de l'équation homogène est $y_H = A\cos x + B\sin x$ Une solution particulière avec second membre e^{ix} se cherche sous la forme axe^{ix}. On trouve $\frac{1}{2}ixe^{ix}$.
On obtient une solution particulière avec second membre $\cos x$ en prenant la partie rèelle. D'où

$$y_p = \frac{1}{2}x\sin x.$$

La solution générale est donc

$$y = y_p + y_H = A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2}x\sin x$$

– *Résoudre $y" - 2y' + y = e^x$*
L'équation caractéristique est : $r^2 - 2r + 1 = 0$. 1 est racine double.

La solution de l'équation homogène est $y = Ae^x + Bxe^x$ Une solution particulière avec second membre e^x se cherche sous la forme ax^2e^x. On trouve $\frac{1}{2}x^2e^x$ La solution générale est donc

$$Ae^x + Bxe^x + \frac{1}{2}x^2e^x$$

Lorsque le second membre n'est pas sous la forme ci-dessus, on utilise la méthode de la variation de la constante.

<u>**Méthode de variation des constantes.**</u>

Définition 2.3.6. *Considérons deux applications dérivables u et v de I vers $\mathbb{R}$. Le déterminant de Wronski (ou wronskien) de u et v est l'application*

$$W(u,v) = \det\begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = uv' - u'v$$

de I dans $\mathbb{R}$

Proposition 2.3.7. *Considérons deux applications dérivables u et v de I vers $\mathbb{R}$. Si u et v sont linéairement dépendantes alors le wronskien est identiquement nul sur I.*

Démonstration. Supposons u et v linéairement dépendantes. Alors il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que

$$\forall x \in I \ \alpha u(x) + \beta v(x) = 0$$

Puisque $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, nous avons $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$.

Supposon $\beta \neq 0$.

$$\forall x \in I \ v(x) = \frac{-\alpha}{\beta}u(x) \text{ et } v'(x) = \frac{-\alpha}{\beta}u'(x)$$

de sorte que

$$W(u,v)(x) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u(x) & \frac{-\alpha}{\beta}u(x) \\ u'(x) & \frac{-\alpha}{\beta}u'(x) \end{vmatrix} = \frac{-\alpha}{\beta}\left(uu' - u'u\right) = 0$$

Si $\alpha \neq 0$, procéder de la même manière , en posant $u = -\frac{\beta}{\alpha}v$ □

Soient y_1 et y_2 deux solutions indépendantes de l'équation homogène $(E.H)$. On cherche une solution particulière de l'équation complète (E) sous la forme $y = Ay_1 + By_2$, où A et B sont des fonctions vérifiant $A'y_1 + B'y_2 = 0$. Ainsi, $y' = Ay_1' + By_2'$, et (E) devient $a(A'y_1' + B'y_2' = f(x)$ (car $ay"_i + by_i' + cy_i = 0$ pour $i = 1,2$). Donc, A', B' sont solutions du système

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 &= 0 \\ A'y_1' + B'y_2' &= \frac{1}{a}f(x) \end{cases}$$

Ce système se résoud aisément, ce qui donne A', B', puis A, B par intégration.

Exemple 2.3.8. *Résolvons*

$$y" + y = \frac{1}{\sin^3 x} \qquad (E)$$

La solution de (E.H.) est $y_H = A\cos x + B\sin x, A, B \in \mathbb{R}$ *Cherchons une solution particulière. Les solutions* $y_1 = \sin x$ *et* $y_2 = \cos x$ *sont indépendantes, en effet leur wronskien vaut* $w(x) = -1$. *Cherchons une solution sous la forme* $y_p = A(x)\cos x + B(x)\sin x$, *avec* $A'y_1 + B'y_2 = 0$. A', B' *sont solutions à*

$$\begin{cases} A'\sin x + B'\cos x &= 0 \\ A'\cos x - B'\sin x &= \frac{1}{\sin^3 x} \end{cases}$$

donc

$$A' = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \frac{1}{\sin^3 x} & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{\cos x}{\sin^3 x}$$

$$B' = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \frac{1}{\sin^3 x} \end{vmatrix} = \frac{-1}{\sin^2 x},$$

avec les primitives

$$A = \frac{-1}{2\sin^2 x},\ B = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

On a donc la solution particulière

$$y_p = \frac{-1}{2\sin x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\cos 2x}{2\sin x}$$

et la solution générale

$$y = y_p + y_H = \frac{\cos 2x}{2\sin x} + A\cos x + B\sin x.$$

2.3.2 Equation du second ordre à coefficients non constants

Contrairement au cas de l'ordre 1, il n'existe pas en général de méthode systématique pour résoudre l'équation homogène. Si on a su (par les moyens du bord) trouver deux solutions linéairement indépendantes u et v, on cherche alors une solution particulière sous la forme

$$y = \lambda(x)u(x) + \beta(x)v(x)$$

c'est à dire en faisant varier les deux constantes.

Remarque 2.3.9. *Soit :*

$$a(x)y"(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x) \tag{2.19}$$

où a, b, c, d *sont des fonctions continues de* $I \to \mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *où* $\mathbb{C}$, I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *où, de plus,* a *ne s'annule pas.*

1. *Nous admettons que*
   (a) *Toute solution maximale de (2.19) est définie sur tout I.*

(b) Pour tout élément $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

admet une et une seule solution sur I.

2. *Notons S_H l'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène associée à (2.19) cést-à-dire $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0$ définies sur I.*
   – *Il est clair que $S_H \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$*
   – *La fonction*

$$\begin{array}{rccc} 0 & : I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 0 \end{array}$$

   appartient à S_H.
   – *Pour tout $u, v \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned} u, v \in \mathcal{S}_H & \Rightarrow & a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = 0 = a(x)v''(x) + b(x)v'(x) + c(x)v(x) \\ & \Rightarrow & a(x)(u+v)''(x) + b(x)(u+v)'(x) + c(x)(u+v)(x) = 0 \\ & \Rightarrow & u + v \in S_H \end{aligned}$$

   – *Pour tout $(u, \lambda) \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{S}_H & \Rightarrow & a(x)(\lambda u)''(x) + b(x)(\lambda u)'(x) + c(x)(\lambda u)(x) = \lambda(a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x)) = 0 \\ & \Rightarrow & \lambda u \in S_H \end{aligned}$$

   Ainsi S_H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$.

Théorème 2.3.10.

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0 \tag{2.20}$$

où a, b, c, d sont des fonctions continues de $I \to \mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ où, de plus, a ne s'annule pas.

1. *Supposons que u et v sont deux solutions réelles de (2.20) sur I. S'il existe $x_0 \in I$ tel que $W(u, v)(x_0) \neq 0$ alors pour tout $x \in I$ $W(u, v)(x) \neq 0$.*
2. *Supposons que u et v sont deux solutions réelles de (2.20) sur I, linéairement indépendantes. Alors*
   (a) $\forall x \in I$ $W(u, v)(x) \neq 0$
   (b) les solutions de (2.20) sont les fonctions

$$y = Au + Bv$$

   où A et B sont des constantes réelles arbitraires.

Démonstration. 1. Puisque a ne s'annule pas sur I, nous posons $a_1 = \frac{b}{a}$ et $a_2 = \frac{c}{a}$. L'équation s'écrit alors

$$y" + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{2.21}$$

u et v étant des solutions de (2.21), on a

$$\forall x \in I \begin{cases} u"(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) &= 0 \\ v"(x) + a_1(x)v'(x) + a_2(x)v(x) &= 0 \end{cases}.$$

Alors en multipliant la première équation par $-v(x)$, la seconde par $u(x)$ et en additionnant les deux, nous obtenons

$$\forall x \in I \ (u(x)v"(x) - u"(x)v(x)) + a_1(x)(u(x)v'(x) - u'(x)v(x)) = 0.$$

Or

$$\forall x \in I \ \ W(u,v)(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x),$$

et

$$\forall x \in I \ \ W'(u,v)(x) = u(x)v"(x) - u"(x)v(x).$$

Donc

$$\forall x \in I \ \ W'(u,v)(x) + a_1(x)W(u,v)(x) = 0$$

Par suite il existe une constante réelle C telle que

$$\forall x \in I \ \ W(u,v)(x) = C\exp(-\int_{x_0}^{x} a_1(s)ds) \text{ Formule de Liouville}$$

En particulier, $0 \neq W(u,v)(x_0) = C$. Par conséquent,

$$\forall x \in I \ \ W(u,v)(x) \neq 0.$$

2. Soient u et v deux solutions réelles de (2.21) sur I linéairement indépendantes. Supposons qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $W(u,v)(x_0) = 0$. On a d'après ce qui précède (1), $W(u,v)(x) = 0$ pour tout $x \in I$. u et v étant linéairement indépendantes, il existe un point $x_1 \in I$ tel que $v(x_1) \neq 0$. v étant continue sur I, il existe un nombre réel $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in J =]x_1 - r, x_1 + r[\cap I \ v(x) \neq 0.$$

Alors,

$$\forall x \in J \ \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)} = 0.$$

D'où il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in J$, $\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \lambda$. Posons $w = u - \lambda v$. 0 et w sont des solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y" + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \\ y(x_1) = 0 \\ y'(x_1) = 0 \end{cases}$$

Donc d'après la remarque 2.3.9 (1b), nous avons pour tout $x \in I$, $w(x) = 0$ Ainsi u et v sont linéairement dépendantes sur I. Celà contredit l'hypothèse. Donc

$$\forall x \in I \;\; W(u,v)(x) \neq 0$$

3. Daprès la remarque 2.3.9 (2) S_H est un espace vectoriel. Donc

$$\forall A, B \in \mathbb{R} \;\; Au + Bv \in S_H$$

Soit y un élement de S_H. Considérons l'équation

$$y = \alpha u + \beta v. \tag{2.22}$$

$$(2.22) \Rightarrow \begin{cases} \alpha u + \beta v = y \\ \alpha u' + \beta v' = y' \end{cases}$$

Soit x_0 un élément de I ;

$$(2.22) \Rightarrow \begin{cases} \alpha u(x_0) + \beta v(x_0) = y(x_0) \\ \alpha u'(x_0) + \beta v'(x_0) = y'(x_0) \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est $W(u,v)(x_0)$ qui est différent de 0 ; donc il admet une solution $(\alpha, \beta) = (A, B)$ donnée par

$$A = \frac{W(y,v)}{W(u,v)}(x_0) \text{ et } B = \frac{W(u,y)}{W(u,v)}(x_0).$$

y et $w = Au + Bv$ sont deux solutions de (2.20) wérifiant les conditions initiales

$$\begin{cases} w(x_0) = y(x_0) \\ w'(x_0) = y'(x_0) \end{cases}$$

Donc $y = w = Au + Bv$

□

Remarque 2.3.11. *1. Supposons que y_p est une solution particulière de (2.19). Considérons un élément $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$*

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (2.19) \;\; &\Leftrightarrow \;\; \forall x \in I \; a(x)y" + b(x)y' + c(x)y = d(x) \\
&\Leftrightarrow \;\; \forall x \in I \; a(x)y" + b(x)y' + c(x)y = a(x)y"_p + b(x)y'_p + c(x)y_p \\
&\Leftrightarrow \;\; \forall x \in I \; a(x)(y - y_p)" + b(x)(y - y_p)' + c(x)(y - y_p) = 0 \\
&\Leftrightarrow \;\; (y - y_p) \text{ est solution de (2.20)} \\
&\Leftrightarrow \;\; y = y_p + y_H \text{ où } y_H \text{ est la solution générale de (2.20)}
\end{aligned}$$

La solution générale de (2.19) est la somme d'une solution particulière de (2.19) et de la solution générale de (2.20).

2. *Supposons que u et v sont deux solutions linéairement indépendantes de (2.20). Cherchons une solution de (2.19) sous la forme*

$$y(x) = A(x)u(x) + B(x)v(x)$$

Nous avons

$$y' = A'u + Au' + B'v + Bv' = (A'u + B'v) + (Au' + Bv')$$

Pour simplifier les calculs, imposons comme dans le cas à coéfficient constants, la condition $A'u + B'v = 0$*. Alors on a*

$$y' = Au' + Bv' \text{ et } y" = A'u' + Au" + B'v' + Bv"$$

y devant vérifier (2.19), nous avons

$$a\left(A'u' + Au" + B'v' + Bv"\right) + b(Au' + Bv') + c(Au + Bv) = d$$

soit

$$A\left(au" + bu' + cu\right) + B\left(av" + bv' + cv\right) + A'u' + B'v' = d.$$

Et puis que u et v sont solutions de (2.20), on a

$$A'u' + B'v' = d. \tag{2.23}$$

Ainsi A' *et* B' *doivent vérifier le système*

$$\begin{cases} A'u + B'v = 0 \\ A'u' + B'v' = d \end{cases} \tag{2.24}$$

Le déterminant de (2) est $W(u,v) \neq 0$*. Donc il admet une solution unique* (A', B') *donnée par*

$$A' = \frac{-bv}{W(u,v)} \text{ et } B' = \frac{bu}{W(u,v)}$$

Proposition 2.3.12. *Soit l'équation* $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ *(E). Si* y_1 *et* y_2 *sont deux solutions de (E), on définit le wronskien* $W(x)$ *par :*

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

$y_1(x)$ *et* $y_2(x)$ *forment un système libre si* $W(y_1, y_2)(x)$ *est non nul en un point* x_0*, et alors il n'est jamais nul. On montre très facilement que* $W'(y_1, y_2)(x) = -\frac{b(x)}{a(x)} W(y_1, y_2)(x)$ *et on a donc* $W(y_1, y_2)(x) = W(y_1, y_2)(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)} dt}$*. En développant le wronskien on trouve :*

$$W(y_1, y_2)(x) = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x)$$

Si on connaît y_1*, on peut trouver* y_2 *en résolvant l'équation différentielle du premier ordre précédente puisqu'on connaît* $W(y_1, y_2)(x)$*.*

Cette méthode est un peu lourde à gérer. Il faut déjà réussir à trouver une solution particulière puis faire beaucoup de calculs. Elle est donc à utiliser en dernier lieu.

Autre méthode On veut résoudre les équations de la forme

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{2.25}$$

sachant qu'une solution $y(x) = u(x)$ est connue, on cherche une autre solution sous la forme $y = u(x)z(x)$. En remarquant que $y' = u'z + uz'$ et $y" = u"z + 2u'z' + uz"$, l'équation (2.25) devient

$u"z + 2u'z' + uz" + a_1(x)(u'z + uz') + a_0(x)u(x)z(x) = 0$

$\Leftrightarrow (u" + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x))z(x) + 2u'(x)z'(x) + u(x)z"(x) + a_1(x)u(x)z'(x) = 0$

$\Leftrightarrow u(x)z"(x) + (2u'(x) + a_1(x)u(x))z'(x) = 0$

En posant $Z = z'$, on obtient

$$u(x)Z'(x) + (2u'(x) + a_1(x)u(x))Z(x) = 0$$

qui est une équation du premier ordre (la méthode de résolution est donnée plus haut). On obtient

$$Z = \frac{c}{u^2} \exp\left\{-\int a_1(s)ds\right\}.$$

D'où

$$z(x) = \int^x \frac{c}{u_1^2(t)} \exp\left\{-\int^t a_1(s)ds\right\} dt + \tilde{c}$$

Application

Déterminer toute les solutions de l'équation différentielle

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

sachant que $u(x) = x$ est une solution.

Nous écrivons d'abord l'équation sous la forme standard

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2y}{1-x^2} = 0$$

D'après ce qui précède,

$$a_1(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

et

$$\int^t a_1(s)ds = \log(1-t^2).$$

D'où

$$u_2(x) = x\int^x \frac{1}{t^2} \exp\left\{-\log(1-t^2)\right\} = x\int^x \frac{dt}{t^2(1-t^2)}$$

Après la décomposition en éléments simples nous obtenons que

$$u_2(x) = \frac{x}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$$

La solution générale de l'équation donnée est

$$y = Ax + B\left\{\frac{x}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1\right\}$$

Chapitre 3

Courbes paramétrées

Définition 3.0.13. *(et interprétation géométrique) Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.*

- *Une fonction $f : D \to \mathbb{R}^2$ est appelée application vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.*
- *Les deux fonctions $x : D \to \mathbb{R}$ et $y : D \to \mathbb{R}$ telles que*

$$\forall t \in D : f(t) = (x(t), y(t))$$

  sont appelées les applications composantes de (ou : associèes à) f.
- *Le plan étant rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note $M(t)$ le point dont les coordonnées sont $f(t) = (x(t), y(t))$. Lorsque le paramètre t parcourt D, le point $M(t)$ décrit un sous-ensemble du plan, appelé la courbe $\mathfrak{C}$ de (ou : associée à) f.*
- *Le système d'équations*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x(t) \\ y & = & y(t) \end{array} \right. \quad t \in D$$

  est appelé une représentation paramétrique de $\mathfrak{C}$. On dit alors que $\mathfrak{C}$ est une courbe paramétrée.

Une courbe dont on a la représentation paramétrée ne peut pas s'écrire forcément par une représentation cartésienne $y = f(x)$, car à deux valeurs différentes du paramètre peuvent correspondre plusieurs points de même abscisse, ce qui interdit la notion de fonction.

3.1 Plan d'étude d'une courbe parametrée

Pour étudier une courbe paramétrée, on procède en 6 étapes, précisées ci-dessous :

1. Préciser le domaine de définition D c'est-à-dire l'ensemble des points en lesquel les deux applications composantes x et y sont définis.
2. Recherche de périodes et symétries
   (a) Si $\exists T > 0 : \forall t \in D, x(t) = x(t+T)$ et $y(t+T) = y(t)$, la fonction est $T-$périodique : on peut alors restreindre l'étude à l'intersection de D avec un intervalle de longueur T, et on obtient ainsi toute la courbe.
   (b) Si D est symétrique et on a une des symétries suivantes :

i. $\forall t \in D : x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ (x et y fonctions paires de t),

ii. $\forall t \in D : x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ (x impaire et y paire),

iii. $\forall t \in D : x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ (x paire et y impaire),

iv. $\forall t \in D : x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ (x et y impaires),

alors on restreint l'étude à $t \in D \cap \mathbb{R}_+$, et on obtient toute la courbe

i. qui est parcourue 2 fois

ii. en complétant l'arc par une symétrie par rapport à l'axe y

iii. en complétant l'arc par une symétrie par rapport à l'axe x

iv. en complétant l'arc par une symétrie par rapport à l'origine O.

3. Rechercher les eventuelles branches infinies : voir le paragraphe 3.2
4. Faire un tableau de variations pour x et y, en étudiant les signes de x_0 et y_0.
5. Etudier les points particuliers tels que points stationnaires (= singuliers), points doubles : voir paragraphe 3.3
6. Tracer la courbe en s'aidant des résultats précédants, notamment en reportant aussi les points singuliers, tangentes et asymptotes.

3.2 Etude des branches infinies

Définition 3.2.1. *La courbe $\mathfrak{C}$ présente une branche infinie (ou : un arc infini), si au moins une des coordonnées tend vers l'infini, pour $t \to t_0$, avec $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

Les cas suivants sont possibles :

1. $\lim_{t\to t_0} x(t) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$: $\mathfrak{C}$ admet la droite Δ d'équation $x = \ell$ comme asymptote verticale
2. $\lim_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t\to t_0} y(t) = \ell \in \mathbb{R}$: $\mathfrak{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = \ell$ comme asymptote horizontale.
3. $\lim_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$, on étudie $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$:
   (a) Si $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, alors $\mathfrak{C}$ admet une branche parabolique dans la direction $(0y)$
   (b) Si $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, alors $\mathfrak{C}$ admet une branche parabolique dans la direction $(0x)$
   (c) Si $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \neq 0$, on étudie la fonction $y - ax$:
   – Si $\lim_{t\to t_0}(y(t) - ax(t)) = b \in \mathbb{R}$ alors $\mathfrak{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = ax + b$ comme asymptote, et la position de $\mathfrak{C}$ par rapport à Δ dépend du signe de $y - ax - b$. (On peut utiliser un DL(t_0) pour le trouver.)
   – Si $\lim_{t\to t_0}(y(t) - ax(t)) = \pm\infty$ alors $\mathfrak{C}$ admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = ax$.
   – Si $y - ax$ n'admet pas de limite, on ne sait pas conclure.
   (d) $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$ n'existe pas, on ne peut conclure sur la nature de l'arc infini.

3.3 Etude de points particuliers

Définition 3.3.1. *On suppose que $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ sont dérivables en t_0. Le vecteur $\vec{V}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ est appelé le vecteur dérivé de f en t_0. On note aussi $\vec{V}'(t_0)$ par $\frac{d}{dt}\vec{OM}(t_0)$*

1. *Si $\vec{V}'(t_0) \neq \vec{0}$, c'est-à-dire $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$, le point $M(t_0)$ est dit point ordinaire. La droite (T) de vecteur directeur $\vec{V}'(t_0)$ et passant par $M(t_0)$ est appelée tangente à $\mathfrak{C}$ en $M(t_0)$.*
   Une représentation paramétrique de T est donc donnée par
   $$T : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) \\ y & = & y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) \end{array} \right. \quad t \in D.$$
   et on peut en déduire facilement une équation de la forme $y = mx + b$(ou $x = x(t_0)$ si $x'(t_0) = 0$) en exprimant $(t - t_0)$ dans la deuxième équation en terme de x à l'aide de la première équation :
   $$y = y(t_0) + \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0)).$$
2. *Si $\vec{V}'(t_0) = \vec{0}$, c'est-à-dire $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$, alors le point $M(t_0)$ est dit stationnaire ou singulier.*

3.3.1 Tangente en un point stationnaire $M(t_0)$

En un point stationnaire, le vecteur dérivée s'annule ; la direction de la tangente est alors donnée par les dérivées supérieures. On suppose dans la suite les fonctions x et y suffisamment dérivables pour que toutes les dérivées considérées existent. (Dans le cas contraire, on ne peut pas utiliser le raisonnement présenté ici.)

1. Si $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ et $(x"(t0), y"(t_0)) \neq (0,0)$: Dans ce cas, la tangente (T) à $\mathfrak{C}$ en $M(t_0)$ c'est la droite qui passe par $M(t_0)$ de vecteur directeur le vecteur $\vec{V}"(t_0) = \frac{d^2}{dt^2}M(t_0)$ de composantes $(x"(t_0), y"(t_0))$.
2. Si $\vec{V}'(t_0) = \vec{V}"(t_0) = \ldots = \vec{0}$, $\vec{V}^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$: On généralise le cas précédent. La tangente T à $\mathfrak{C}$ en $M(t_0)$ est la droite qui passe par $M(t_0)$ et qui a comme vecteur directeur $\vec{V}^{(p)}(t_0) = (x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$.

3.3.2 Position de C/T et nature d'un point $M(t_0)$

L'étude suivante de la nature d'un point, en fonction de la position de la courbe C par rapport à la tangente T, s'applique aux points stationnaires, mais aussi à tout autre point ordinaire.

Notation 3.3.2. *On designe par p le premier entier ≥ 0 tel que $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)) \neq (0,0)$:*
$$p = \min\left\{pn \in \mathbb{N}^* : \vec{V}^{(n)} \neq \vec{0}\right\}$$
et par q le premier entier strictement supérieur à p tel que les vecteurs $\vec{V}^{(p)}$ et $\vec{V}^{(q)}$ ne soient pas colinéaires. (On peut écrire
$$q = \min\left\{n \in \mathbb{N}^* : \vec{V}^{(n)} \neq \lambda\vec{V}^{(p)} \ \ \forall\lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

car pour $q < p$ la dernière relation n'est pas satisfaite non plus.)

Ecrivons la formule de Taylor-Young à l'ordre q, c'est-à-dire le $DL_q(t0)$:

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x(t) = x(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!}x^{(p)}(t_0) + \ldots + \frac{(t-t_0)^q}{q!}x^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q\varepsilon_1(t) \\ y(t) = y(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!}y^{(p)}(t_0) + \ldots + \frac{(t-t_0)^q}{q!}y^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q\varepsilon_2(t) \end{array}\right.$$

avec $\lim_{t\to t_0}\varepsilon_1(t) = 0$ et $\lim_{t\to t_0}\varepsilon_2(t) = 0$. En écrivant (S) sous forme vectorielle, il vient :

$$f(t) = f(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!}\vec{V}^{(p)}(t_0) + \ldots + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\vec{V}^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q\vec{\varepsilon}(t).$$

Or, $\vec{V}^{(p+1)}(t_0), \ldots, \vec{V}^{(q-1)}(t_0)$ sont colinéaires à $\vec{V}(p)(t_0)$, donc

$$\begin{array}{rcl} f(t) & = & f(t_0) + (t-t_0)^p\left[\frac{1}{p!} + \lambda_{p+1}\frac{t-t_0}{(p+1)!} + \ldots + \lambda_{q-1}\frac{(t-t_0)^{q-p-1}}{(q-1)!}\right]\vec{V}^{(p)}(t_0) \\ & + & \frac{(t-t_0)^q}{q!}\vec{V}^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q\vec{\varepsilon}(t) \end{array}$$

Etudions le vecteur $M(t_0)\overset{\rightarrow}{)}M(t)$ dans le repr̂e $(M(t_0), \vec{V}^{(p)}(t_0), \vec{V}^{(q)}(t_0))$. Si $x_1(t)$ et $y_1(t)$ designent ses composantes dans cette base, on a les équivalences (au voisinage de t_0)

$$x_1(t) \underset{t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^p}{p!} \text{ et } y_1(t) \underset{t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^q}{q!}$$

Selon la parité de p et de q, on a les résultats suivants :

1. p pair et q impair : au voisinage de t_0, $x_1(t) \geq 0$ et $y_1(t)$ a le signe de $(t-t_0)$: $\mathfrak{C}$ traverse la tangente T en $M(t_0)$, qui est un **point de rebroussement de** 1^e **espèce.**
2. p pair et q pair : au voisinage de t_0, $x_1(t) \geq 0$ et $y_1(t) \geq 0$, indépendamment du signe de $(t-t_0)$: $\mathfrak{C}$ ne traverse pas la tangente T ; $M(t_0)$ est un **point de rebroussement de** 2^e **espèce.**
3. p impair et q pair : au voisinage de t_0, $x_1(t)$ change de signe et $y_1(t) \geq 0$: $\mathfrak{C}$ touche la tangente T ; $M(t_0)$ est appele "méplat".
4. p impair et q impair : au voisinage de t_0, $x_1(t)$ et $y_1(t)$ changent de signe : $\mathfrak{C}$ traverse la tangente T en $M(t_0)$, qui est appelé point d'inflexion.

Illustration de ces quatres cas possibles.

3.3.3 Points doubles (ou multiples)

Définition 3.3.3. *S'il existe $t_0 \neq t$ tels que $M(t_0) = M(t)$, on dit que $M(t)$ est un point double (ou multiple).*

Pour trouver les points doubles, il faut donc résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{l} x(t_0) = x(t) \\ y(t_0) = y(t) \end{array}\right.$$

avec $t_0 \neq t$. (C'est en général un calcul assez lourd... !) Notons que l'étude des symétries éventuelles (périodicité ou symétrie) peut être fort utile dans la recherche des points doubles. Par exemple, si x et y sont paires, tout point $M(t)$, $t \neq 0$ est point double.

Exemple 3.3.4. *Etudions la courbe $\mathfrak{C}$ définie par*

$$\begin{cases} x &= t^2 + \frac{2}{t} \\ y &= t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$$

1. *Domaine de définition : x et y sont définis sur $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$*
2. *Recherche de symétries : il n'y a pas de symétries évidentes. (y est paire mais x na pas de parité définie.)*
3. *Etude de branches infinies.*
   (a) *$t \to \pm\infty$: On a $x \to +\infty$ et $y \to +\infty$, il faut donc étudier $\frac{y}{x} \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^2} = 1$ et $y(t) - x(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} = 0$: La droite d'équation $\Delta : y = x$ est asymptote à la courbe pour les deux arc infinis $t \to \pm\infty$.*
   (b) *$t \to 0$: On a $y \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^2} \to +\infty$ et $x \underset{0}{\sim} \frac{2}{t}\, t \overset{\to}{\to} 0 \pm \pm\infty$ (selon la signe de t). On étudie donc $\frac{y}{x} \underset{0}{\sim} \frac{t}{2t^2} = \frac{1}{2t} \to \pm\infty$, on a donc deux branches parabolique de direction (Oy) en $t = 0$*
4. *<u>étude du signe de x' et y'</u> :*

$$\begin{cases} x'(t) &= 2t - \frac{2}{t^2} = \frac{2}{t^2}(t^3 - 1) = \frac{2}{t^2}(t-1)(t^2+t+1) \\ y'(t) &= 2t - \frac{2}{t^3} = \frac{2}{t^3}(t^4 - 1) = \frac{2}{t^3}(t-1)(t+1)(t^2+1) \end{cases}$$

   donc x' a le signe de $t - 1$ et y' a le signe de $t(t^2 - 1)$:
5. *<u>étude en t = 1</u>*
   $x'(1) = y'(1) = 0 \Rightarrow M(1) : (3,2)$ est un point stationnaire. Calculons les derivées successives de x et y en $t = 1$ pour connaître le vecteur directeur de la tangente et la nature du point :

$$\begin{cases} x"(t) &= 2 + \frac{4}{t^3} \\ y"(t) &= 2 + \frac{6}{t^4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x"(1) &= 6 \\ y"(1) &= 8 \end{cases}$$

   Donc $\vec{V}"(1) = (6,8) \neq \vec{0} \Rightarrow \mathfrak{C}$ admet une tangente en $M(1) : (3,2)$ de vecteur directeur vecV"$(1) = (6,8)$. (Son équation est donc $T : y = \frac{8}{6}(x-3) + 2 = \frac{4}{3}x - 2$.)
   <u>Nature du point</u> :

$$\begin{cases} x'"(t) &= \frac{-12}{t^4} \\ y'"(t) &= \frac{-24}{t^5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'"(1) &= -12 \\ y'"(1) &= -24 \end{cases}$$

   $\vec{V}'"(1) = (-12,-24)$ est non colinéaire à $\vec{V}"(1) = (6,8)$, on est donc dans le cas $p = 2, q = 3$, c'est-à-dire le point $M(1) : (3,2)$ est un pt de rebroussement de 1^e espèce.
6. *<u>recherche de points doubles</u> :*
   cherchons $t' \neq t$ tel que $M(t') = M(t)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x(t') = x(t) \\ y(t') = y(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'^2 + \frac{2}{t'} = t^2 + \frac{2}{t} \\ t'^2 + \frac{2}{t'^2} = t^2 + \frac{2}{t^2} \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} t'^2 - t^2 = \frac{2}{t} - \frac{2}{t'} = 2\frac{t'-t}{t't} \\ t'^2 - t^2 = \frac{2}{t^2} - \frac{2}{t'^2} = 2\frac{t'^2-t^2}{t'^2t^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' + t = \frac{2}{tt'} \\ 1 = \frac{1}{t^2t'^2} \end{array}\right.$$

car $t \neq t'$. Donc

$$\left\{\begin{array}{l} tt' = \pm 1 \\ t + t' = \pm 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = \pm\frac{1}{t} \\ t^2 \mp 2t \pm 1 = 0 \end{array}\right.$$

Le premier choix de signes est à exclure car il correspond à $(t-1)^2 = 0$, soit $t = 1 = t'$. Donc t, t' sont les solutions à $t^2 + 2t - 1 = 0$, soit $t = -1 + \sqrt{2}$ et $t' = -1 - \sqrt{2}$. Le point double est donc $M(t) = M(t') = (5,6)$.

7. *Tracé de la courbe :*
on reporte les asymptotes, le pt. stationnaire avec sa tangente. En partant de -1, au dessus de l'asymptote, on rejoint le pt. $(-1,2)$ avec une tangente horizontale, puis on repart pour $t \to 0-$ vers $x = -1, y = +1$ (brache parabolique de direction Oy) (pour $x = -10, y \approx 25$). Pour t au voisinage de $+1$, on vient de en-dessous de l'asymptote $y = x$, et on rejoint le pt. singulier $(3,2)$ avec la tangente de vecteur directeur $(6,8)$, puis on repart de l'autre coté de cette tangente, en passant par le pt. double $(5,6)$, pour la branche parabolique de direction Oy, quand $t \to 0+$ (pour $x = 10, y \approx 25$).

Bibliographie

[1] William F. Trench, INTRODUCTION TO REAL ANALYSIS, Pearson Education.

[2] J.-M. MONIER : "Analyse 1", "Analyse 2", "Algèbre 1" (série " j'intègre ", Monier, 3e édition), Dunod, 1999. ("Analyse 1" pour intégrale de Riemann, "Algèbre 1" pour décomposition en éléments simples-Très bonne présentation pédagogique, avec nombreux exercices corrigés.)

[3] X. OUDOT : "Analyse première année" (série Hprépa), Belin, 1998.

[4] E. LEHMAN : "Mathématiques pour l'étudiant de première année" (coll. DIA, Université), Belin.

[5] F. LIRET, M. ZISMAN : "Maths" (5 tômes), Dunod Université.

[6] D. GUININ, F. AUBONNET, B. JOPPIN : "Classes péparatoires et premier cycle universitaire : précis de mathématique" (tômes 3 à 5), Bréal.

[7] X. MERLIN : "Méthodix Analyse", Ellipses.

[8] P. VIGOUREUX : "Cours et exercices de Mathématiques" (tôme 2 et 3), Ellipses.

[9] E. RAMIS, C. DESCHAMPS, J. ODOUX : "Cours de mathématiques spéciales" (tôme I : Algèbre, III : Topologie et éléments d'analyse, IV : Séries et équations différentielles), 2e édition, Masson, 1988-1993.