Série 9 (Corrigé)

Exercice 1

(a) Soit A une matrice 5×6. Si $\dim \mathrm{Ker}\,(A) = 3$, quel est le rang de A?

Sol.: *On considère l'application linéaire associée:* $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$. *Le théorème du rang donne*

$$\mathrm{rg}\,(A) + \dim \mathrm{Ker}\,(A) = 6 \Rightarrow \mathrm{rg}\,(A) = 3.$$

(b) Soit A une matrice 7×3. Quel est le rang maximum de A? Quelle est la dimension minimum de $\mathrm{Ker}\,(A)$? Même question si A est une matrice 3×7.

Sol.:

Si A est de taille 7×3, *alors* $\mathrm{rg}\,(A) + \dim \mathrm{Ker}\,(A) = 3$. *Le rang maximum est* 3 *et la dimension minimum du noyau est* 0.

Si A est de taille 3×7 *, le rang maximum est* 3. *Comme* $\mathrm{rg}\,(A) + \dim \mathrm{Ker}\,(A) = 7$, *la dimension minimale du noyau est* 4.

(c) Soit A une matrice $n \times n$. Donner une condition sur $\mathrm{rg}\,(A)$ pour que A^T soit inversible?

Sol.: A^T *est inversible* $\Leftrightarrow$ A *est inversible* $\Leftrightarrow \mathrm{rg}\,(A) = n$.

(d) Soit $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une transformation linéaire telle que $\mathcal{T} \circ \mathcal{T} \circ \mathcal{T} = \mathcal{I}_3$ (application identité). Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}\,\mathcal{T}$?

Sol.: *On a*

$$3 = \mathrm{rg}\,(\mathcal{I}_3) = \mathrm{rg}\,(\mathcal{T} \circ \mathcal{T} \circ \mathcal{T}).$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(\mathcal{T} \circ \mathcal{T} \circ \mathcal{T}) = \{0\}$. *Comme*

$$v \in \mathrm{Ker}\,(\mathcal{T}) \Rightarrow v \in \mathrm{Ker}\,(\mathcal{T} \circ \mathcal{T} \circ \mathcal{T})$$

on obtient $\dim \mathrm{Ker}\,(\mathcal{T}) = 0$.

Exercice 2

Soit $B = \{b_1, b_2\}$ et $C = \{c_1, c_2\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. On suppose $b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base C vers la base B.

Sol.: *Par définition, $P_{B\leftarrow C}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de c_1 et c_2 dans la base B. Ainsi, $P_{B\leftarrow C}$ est la solution de*

$$(b_1, b_2)P_{B\leftarrow C} = (c_1, c_2).$$

Pour résoudre ce système linéaire, on réduit la matrice (b_1, b_2) augmentée avec les vecteurs c_1 et c_2:

$$(b_1 \quad b_2 | c_1 \quad c_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Ainsi, la matrice de passage cherchée est $P_{B\leftarrow C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$.

(b) Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base B vers la base C.

Sol.: *On a $P_{C\leftarrow B} = P_{B\leftarrow C}^{-1}$, d'où la matrice cherchée* $P_{C\leftarrow B} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$.

(c) Si $v \in \mathbb{R}^2$ est tel que $[v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, calculer $[v]_C$.

Sol.: $[v]_C = P_{C\leftarrow B}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

(d) À présent, si $[v]_C = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ calculer $[v]_B$.

Sol.: $[v]_B = P_{B\leftarrow C}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

(a) Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$ sont équivalentes.

Sol.: *En réduisant la matrice A par des opérations élémentaires sur les lignes, on obtient la matrice B.*

(b) Calculer $\mathrm{rg}\,(A)$, $\dim \mathrm{Ker}\,(A)$, $\mathrm{rg}\,(B)$, $\dim \mathrm{Ker}\,(B)$.

Sol.: *La matrice B est sous forme échelonnée réduite, on peut donc lire $\mathrm{rg}\,(B) = 3$ (trois pivots) et $\dim \mathrm{Ker}\,(B) = 1$. Comme A et B sont équivalentes d'après a), on a $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(B) = 3$ et $\dim \mathrm{Ker}\,(A) = \dim \mathrm{Ker}\,(B) = 1$.*

(c) Trouver une base de $\operatorname{Ker}(A)$ et $\operatorname{Ker}(B)$.

Sol.: *Comme B est la forme échelonnée réduite de A, on a* $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(B)$, *et une base de* $\operatorname{Ker}(A)$ *est aussi une base de* $\operatorname{Ker}(B)$. $\operatorname{Ker}(B)$ *est l'espace des solutions de $Bx = 0$, de dimension 1. On obtient ainsi la base* $\left\{\begin{pmatrix} 19 \\ -11 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Exercice 4

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$ telles que

$$\operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Col}(B) = \{0\}.$$

Soit $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_k\}$ une base de $\operatorname{Col}(B)$. Montrer que $\{Ab_1, \cdots, Ab_k\}$ est une base de $\operatorname{Col}(AB)$.

Sol.: ***Méthode 1:*** *Soit $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire associée à la matrice A. On considère la restriction $T_{A_{|\operatorname{Col}(B)}}$ au sous-espace* $\operatorname{Col}(B)$*:*

$$T_{A_{|\operatorname{Col}(B)}} : \operatorname{Col}(B) \to \mathbb{R}^m$$

Comme $\operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Col}(B) = \{0\}$, *cette application est injective. De plus l'image de cette application est* $T_A(\operatorname{Col}(B)) = \operatorname{Col}(AB)$. *L'application T_A réalise donc une bijection entre* $\operatorname{Col}(B)$ *et* $\operatorname{Col}(AB)$. *Par conséquent, la matrice A transforme toute base de* $\operatorname{Col}(B)$ *en une base de* $\operatorname{Col}(A)$.

Méthode 2: *Montrons d'abord que la famille $\{Ab_1, \cdots, Ab_k\}$ est indépendante. Soit $c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\begin{aligned} & c_1 Ab_1 + c_2 Ab_2 + \cdots + c_k Ab_k = 0 \\ & \textit{alors } A(c_1 b_1 + \cdots + c_k b_k) = 0 \\ & \textit{ainsi } c_1 b_1 + \cdots + c_k b_k \in \operatorname{Ker}(A). \end{aligned}$$

Or le vecteur $c_1 b_1 + \cdots + c_k b_k$ appartient à $\operatorname{Col}(B)$ *comme combinaison linéaire des $b_j \in$* $\operatorname{Col}(B)$. *Mais* $\operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Col}(B) = \{0\}$, *ainsi $c_1 b_1 + \cdots + c_k b_k = 0$. $\mathcal{B}$ étant une base, $\mathcal{B}$ est indépendante, d'où $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.*

Montrons maintenant que la famille $\{Ab_1, \cdots, Ab_k\}$ engendre $\operatorname{Col}(AB)$. *Soit $x \in$* $\operatorname{Col}(AB)$. *Il existe $y \in \mathbb{R}^p$ tel que $x = ABy$. Comme $By \in$* $\operatorname{Col}(B)$, *on peut décomposer le vecteur By dans la base $\mathcal{B}$: il existe des scalaires $\alpha_1 \ldots, \alpha_k$ tels que*

$$By = \alpha_1 b_1 + \ldots \alpha_k b_k.$$

Ensuite, on a:

$$x = ABy = A(\alpha_1 b_1 + \ldots \alpha_k b_k) = \alpha_1 Ab_1 + \ldots \alpha_k Ab_k.$$

Tout vecteur $x \in$ $\operatorname{Col}(AB)$ *peut donc se décomposer comme combinaison linéaire de $Ab_1, \cdots, Ab_k$. La famille $\{Ab_1, \cdots, Ab_k\}$ est donc une base.*

Exercice 5

Soit $B = \{1 - 3t^2,\ 2 + t - 5t^2,\ 1 + 2t\}$

(a) Vérifier que B est une base de $\mathbb{P}_2$.

Sol.: *Écrivons la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de B dans la base canonique $\{1,\ t,\ t^2\}$:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice de déterminant 1 est inversible. Les trois vecteurs de B sont linéairement indépendant et la dimension de $\mathbb{P}_2$ est 3. Par conséquent, B est une base. Cette matrice est en fait la matrice de passage de la base B vers la base canonique.

(b) Déterminer la matrice de passage de la base B vers la base canonique $\{1, t, t^2\}$.

Sol.: *La matrice P du a).*

(c) Écrire t^2 comme combinaison linéaire des vecteurs de B.

Sol.: *Les coordonnées de t^2 dans la base canonique sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par définition de la matrice de passage P du b), les coordonnées de t^2 dans la base B sont donc la solution du système*

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On résout: $x = 3, y = -2, z = 1$.

Exercice 6

Montrer que la dimension de $\mathbb{P}$ (espace des polynômes à coefficients réels) est infinie.
Sol.: *Méthode 1: L'espace $\mathbb{P}$ contient le sous-espace $\mathbb{P}_n$ de dimension n pour tout n. Par conséquent, la dimension de $\mathbb{P}$ est plus grande ou égale à n pour tout n donc infinie.*

Méthode 2: Supposons par l'absurde que la dimension de $\mathbb{P}$ soit finie, égale à n. Il existe une base $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$. Soit $M = \max_{i=1,\cdots,n} deg(p_i)$ le maximum des degrés des polynômes de cette base. On constate que le polynôme t^{M+1} n'est pas une combinaison linéaire des $p_1, \cdots, p_n$, ainsi $t^{M+1} \notin \mathbb{P}$ d'où la contradiction.

Exercice 7

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -15 & 1 & -9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Est-ce que $\lambda = 6$ est une valeur propre de A?

Sol.: *En calculant $A - 6I$, on obtient une matrice dont la seconde ligne est nulle, donc une matrice non-inversible. Par conséquent,* $\operatorname{Ker}(A - 6I) \neq \{0\}$ *et* 6 *est une valeur propre.*

(b) Même questions avec $\lambda = 1$ et $\lambda = -9$.

Sol.: *On calcule:*

$$A - I = \begin{pmatrix} -16 & 1 & -9 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A + 9I = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -9 \\ 0 & 15 & 0 \\ 4 & 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de ces matrices (en développant par rapport à la seconde ligne) sont respectivement $5 \cdot (-16 \cdot 2 + 4 \cdot 9)$ *et* $15 \cdot (-6 \cdot 12 + 4 \cdot 9)$*. Ils sont non nuls, par conséquent, ces matrices sont inversibles, et ni* 1 *ni* -9 *ne sont des valeurs propres.*

Exercice 8

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

et $E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres de chacune de ces matrices A, B, C, D, E.

Sol.:

A. Le polynôme caractéristique de A est $\lambda^2 - 5\lambda + 5$. Les valeurs propres de A sont $\{\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\}$*. Les vecteurs propres correspondants sont* $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

B. Le polynôme caractéristique de B est $(\lambda - 4)^2$. Les valeurs propres de B sont $\{4, 4\}$. (Il y a une seule valeur propre 4 de multiplicité 2). Vecteurs propres correspondants: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
Remarque: L'espace propre est de dimension seulement 1 alors que la valeur propre est de multiplicité 2: la matrice n'est pas diagonalisable.

C. Le polynôme caractéristique de C est $(\lambda - 4)(\lambda - 1)^2 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4$. Les valeurs propres de C sont $\{4, 1, 1\}$ c-à-d les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire. Les vecteurs propres correspondants sont $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

D. Le polynôme caractéristique de D est $-\lambda^3 + 36\lambda = -\lambda(\lambda+6)(\lambda-6)$. *Les valeurs propres de C sont donc* $\{-6, 0, 6\}$. *Les vecteurs propres correspondants sont*

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

E. Le polynôme caractéristique de E est $(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda-2) = \lambda^4 - 10\lambda^3 + 35\lambda^2 - 50\lambda + 24$. *Les valeurs propres de E sont* $\{3, 4, 1, 2\}$ *c-à-d les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire. Les vecteurs propres correspondants sont*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 31 \\ -34 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 113 \\ -60 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 9

Déterminer lesquelles des matrices suivantes sont diagonalisables:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

A. Oui car A est déjà diagonale.

B. Oui. Les valeurs propres de B sont $\lambda_1 = 4$ *et* $\lambda_2 = 1$. *Les valeurs propres de B sont distinctes, donc une famille avec un vecteur propre pour* λ_1 *et un vecteur propre pour* λ_2 *est indépendante, et constitue une base de* $\mathbb{R}^2$. *Ainsi B est diagonalisable.*

C. Oui. Les valeurs propres de C sont $4, 5, 5$ *(obtenue par exemple en résolvant le polynôme caractéristique). Comme la valeur propre* 5 *est de multiplicité* 2 *il faut vérifier si la dimension de l'espace propre associé est aussi* 2. *On calcule:*

$$C - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes 1 et 3 sont proportionnelles, et la colonne 2 est nulle, d'où $\mathrm{rg}\,(C-5I) = 1$. *Par conséquent* $\dim \mathrm{Ker}\,(C-5I) = 3 - 1 = 2$, *et la matrice C est diagonalisable.*

D. Oui. Le polynôme caractéristique de D est

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 36\lambda = -\lambda(\lambda-6)(\lambda+6).$$

Les valeurs propres sont donc $0, -6, 6$. *Elles sont distinctes donc D est diagonalisable.*

Remarque *(plus tard dans le cours): Le théorème spectral stipule que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.*

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) La matrice A n'est pas inversible si et seulement si 0 est une valeur propre de A.

b) Une matrice A carrée est inversible si et seulement si elle est diagonalisable.

c) Les valeurs propres d'une matrice carrée sont sur sa diagonale.

d) On trouve les valeurs propres de A en réduisant la matrice à sa forme échelonnée.

Sol.: *Vrai: a). Faux: b), c), d).*

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Si A et B sont deux matrices semblables, alors elles ont les mêmes valeurs propres.

b) Pour qu'une matrice $n \times n$ soit diagonalisable il faut qu'elle ait au moins n valeurs propres distinctes.

c) Si v_1 et v_2 sont deux vecteurs propres linéairement indépendants, alors leur valeurs propres associées sont différentes.

d) Soient A, B et C trois matrices. Si A est équivalente à B, et B est équivalente à C, alors A est équivalente à C.

Sol.: *Vrai: a), d). Faux: b), c).*

Informations générales, séries et corrigés: cf. `http://anmc.epfl.ch/Algebre.html`.
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.