

狭义相对论原理

开场

同学们大家好，今天我们将开始学习近代物理。20 世纪物理学有两大重要的物理学理论：相对论和量子力学。二者都极大地改变了我们对世界的认识。今天我们先来学习狭义相对论。

相对性原理

大家很多人应该都有坐过高铁的经验，在高铁上，大家感觉和在地面上有什么不同吗？我想在高铁运行中的大部分时间，大家应该感觉不到差别，不论你做各种动作也好，各种事也好，都不会感觉到差别。有人曾经做过测试，把硬币立在车窗上，可以立很长时间。我们的这种经验其实验证了力学中的一条原理，即相对性原理：匀速直线运动的参考系中物理规律与静止参考系中相同。

相对性原理如何用数学来表述呢？物理定律可以用公式表达，那么在不同匀速直线运动参考系中（也即惯性系）相同，就可以归结为物理定律的形式相同。不同惯性系的坐标之间是有联系的，这一联系就是伽利略变换，比如， S' 系相对于 S 系沿 x 轴正方向以速度 v 运动，假定两者坐标轴分别平行，并且在原点重合时刻两者时间调到 0. 两者坐标间的变换就是

$$\begin{aligned}x' &= x - vt, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= t.\end{aligned}$$

有了伽利略变换，相对性原理就可以表述为： 物理定律的形式在伽利略变换下不变。

下面我们来验证牛顿力学在伽利略变换下是不变的。牛顿力学的基本方程即牛顿第二定律 $\mathbf{F} =$

ma , 如果用位矢 \mathbf{r} 来写, 可以写成

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

现在对这个方程做一个伽利略变换 $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, t \rightarrow t' = t$, 我们发现变换后的加速度与变换前是相同的, 因为

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

又由于 \mathbf{F}, m 在伽利略变换下不变, 因此变换后的方程仍然有形式

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2}$$

于是我们证明了牛顿定律的伽利略不变性。

麦克斯韦方程组与相对性原理的矛盾

下面我们把目光投向刚学习过的电磁理论, 电磁理论的基本方程是麦克斯韦方程组。电磁理论是否符合相对性原理呢? 我们可以看看麦克斯韦方程组是否在伽利略变换下不变。很遗憾, 麦克斯韦方程组在伽利略变换下形式是改变的, 这似乎意味这它不符合相对性原理。

对于麦克斯韦方程组不具有伽利略不变性这一点, 我们也可以从速度叠加的角度来理解。对伽利略变换 $x' = x - vt$ 两边对时间求导, 我们就得到

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v,$$

也即

$$u' = u - v$$

其中 u' 是在 S' 系中的速度, u 是在 S 系中的速度, 两者相差 S' 和 S 系的相对速度 v , 这一公式就是速度叠加公式。然而麦克斯韦方程预言真空中电磁波的波速(也即光速)始终是 $c = \sqrt{\epsilon\mu}$, ϵ, μ 是真空中电导率和磁导率, 与参考系速度无关。如果我们认为麦克斯韦方程组在所有惯性系都成立, 这就和速度叠加公式矛盾了, 从而与伽利略变换不相容。

迈克尔逊—莫雷实验

如何来解释麦克斯韦方程组与相对性原理的矛盾呢? 一个思路是认为麦克斯韦方程组有问题。这也是 19 世纪时人们最先想到的观点, 因为当时麦克斯韦方程组刚提出, 怀疑它有问题很正常。19 世纪时人们普遍认为(包括麦克斯韦自己)电磁波传播需要介质, 这种假想的介质叫做以太。这样, 一个合理的想法就是, 麦克斯韦方程组只在以太静止的参考系中是成立的, 其预言的光速 c 是相对于以太的速度, 而在一般的惯性系中, 麦克斯韦方程组并不成立, 这样, 它自然是不符合相对性原理的。

上述观点其实是非常自然的。我们可以用声波来类比理解。我们知道，在空气中声速大约是 340m/s，这个速度其实是声波在空气静止参考系中的速度，如果空气在流动，比如有大风，那声速就不是 340m/s。普通的声波的波动方程只有在空气静止参考系中才是成立的，在空气流动的参考系其形式就要发生改变。

采取这种观点的话，人们马上就会去想：既然 c 是在以太静止系的速度，那如果在一个相对以太运动的参考系，那就应该能测量出光速与 c 有差别。因为 c 很大，为了使这个差别明显，应该找一个运动够快的参考系在其中测量。那人们能够使用的运动速度够快的参考系是什么呢？其实就是地球本身。地球绕太阳公转速率约为 30 公里/秒，这是 19 世纪人们所能利用的最快的参考系。历史上，迈克尔逊和莫雷就去做了这个实验，期待能测出地球在以太中的漂移速度，从而验证以太的存在。

迈克尔逊—莫雷使用的仪器就是大家学过的迈克尔逊干涉仪，我们知道，这个仪器精度很高，其实它就是为了测量以太而被发明出来的。从光源发出的光在半透镜这里分成水平和垂直的两束，再被反射回来，最终在接收屏上汇合。如果两条路径有光程差的话，屏上会显示出干涉条纹。现在，在地球上，假设以太相对地球运动，就会有以太风，平行与以太风方向的光速与垂直于以太风方向的光速就会不同，这会给两条路带来一个额外的光程差。如果把仪器旋转后测量，两条路上的光速会发生改变，光程差也会发生改变，从而会产生干涉条纹的移动。迈克尔逊预计，应该能很容易就测量出地球不同方向上光速的差别。然而，测量的结果令他大跌眼镜，不同方向上的光速根本没有明显差别。他们进行多次测量，得到的都是这样一个“失败”的结果。

迈克尔逊—莫雷实验测量以太的失败给物理学家们带来了极大的困惑，有很多尝试解释来这一结果，比如以太拖曳假说，但这个解释会遇到其他问题。对这个实验结果的解释的尝试最终导致了狭义相对论的产生。从这里我们看到，一个“失败”的实验也可能是很有价值的，关键在于要以严谨、认真的态度设计和进行实验，并忠实记录实验数据——即使这些数据不符合预期。

绝对时空观

如果迈克尔逊—莫雷实验说明光速是不变的，这似乎意味着麦克斯韦方程组确实在各个惯性系中都成立。那为了解释它与相对性原理的矛盾，我们就不得不把目光转向相对性原理，怀疑是相对性原理有问题。然而，相对性原理太基本了，很难想象它有问题。不过，我们注意到，相对性原理是通过伽利略变换来表述的。所以有这样一种可能：相对性原理没问题，但是伽利略变换是有问题的，惯性系间的正确变换并非是它。

于是让我们仔细来重新审视一下伽利略变换，我们注意到，在伽利略变换中，我们假定了 $t' = t$ ，

也即两个惯性系的时间是一样的。当然一般地，它们可以差一个常数，不过这只是计时原点的选取不同而已，两个惯性系中的时间流逝速度是完全一样的。然而，我们要问，凭什么 $t' = t$ 呢？你可能会说，当然是这样，似乎这是不证自明的事。

其实， $t' = t$ 的假定反映了一种时空观——绝对时空观。绝对时空观认为空间和时间都是独立于物质而存在的，不受物质运动的任何影响。所以，一个事件发生的时间是绝对的，不同惯性系中时间流逝的速度也是相同的。这种时空观是牛顿在《自然哲学的数学原理》中明确表述的，也是符合我们直觉的。然而，在这种时空观中，时间的绝对性仅仅是一种先验的假定，并没有实验和测量的内涵。爱因斯坦意识到，要讨论时间的含义，必须落实到操作测量的层面，这使他发现了时间具有相对性，打破了绝对时空观，进而提出了狭义相对论。

狭义相对论的基本假设

爱因斯坦意识到了光速不变与绝对时空观的矛盾，如果抛弃绝对时空观，把光速不变当作一条原理的话，可以建立起一种新的时空观，也即相对论时空观。爱因斯坦在 1905 年的论文《论动体的电动力学》中提出将以下两条假设作为基本原理：

- (1) 相对性原理：物理定律在所有惯性系中具有相同形式。
- (2) 光速不变原理：所有惯性系中光速相等。

从这两条基本假设出发，就可以建立起狭义相对论。

洛伦兹变换

伽利略变换是绝对时空观的结果，现在我们抛弃了绝对时空观，改成了光速不变原理，那我们应该得到怎样的惯性系间的坐标变换呢？现在，就让我们从两条基本假设来推导这个变换。

为了简单，我们先只考虑一维空间，这时只有 x 和 t ，假定 S' 系相对 S 系沿 x 轴正方向以速度 v 运动，两者原点重合时 $t' = t = 0$. 由于时空均匀性，变换应该是线性的，设变换一般形式为

$$\begin{aligned}x' &= a_1 x + b_1 t \\t' &= a_2 x + b_2 t\end{aligned}$$

(1) 考虑 S' 系的原点, 其坐标为 $x' = 0$, 在 S 系中看来 $x = vt$, 于是

$$a_1vt + b_1t = 0$$

$$b_1 = -a_1v$$

$$x' = a_1(x - vt)$$

(2) 考虑 S 系的原点, 其坐标 $x = 0$, 在 S' 系中看来 $x' = -vt'$, 于是

$$a_1(x - vt) = -v(a_2x + b_2t)$$

$$-a_1vt = -vb_2t$$

$$b_2 = a_1$$

$$t' = a_2x + a_1t$$

(3) 考虑 $t = 0$ 时, 从原点发出的光线 $x = ct$, 由于光速不变, S' 中看此光线为 $x' = ct'$, 代入得

$$a_1(x - vt) = c(a_2x + a_1t)$$

$$a_1(c - v)t = c(a_2c + a_1)t$$

$$a_2 = -\frac{a_1v}{c^2}$$

$$t' = a_1(t - \frac{vx}{c^2})$$

令 $\gamma = a_1$,

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2})$$

由相对性原理, 逆变换应为

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$t = \gamma(t' + \frac{vx'}{c^2})$$

代入正变换 (也即再变回去)

$$\begin{aligned} x &= \gamma[\gamma(x - vt) + v\gamma(t - \frac{vx}{c^2})] \\ &= \gamma^2(1 - \frac{v^2}{c^2})x \end{aligned}$$

于是

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

最终得到

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \\\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

对于三维空间情况，垂直运动方向坐标不会发生变化，这一点严格证明起来有些繁琐，我们不再展开，同学们可以自己看讲义。最终我们有

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\end{aligned}$$

这组变换叫做洛伦兹变换。

从洛伦兹变换公式，我们可以看到以下几点

- (1) 时间坐标和空间坐标发生了混合，这意味着时空是一个整体。
- (2) γ 因子要有意义， v 必须小于 c ，这意味着速度的上限就是光速，不可能超光速。
- (3) 当 $v \ll c$ 时，洛伦兹变换退回到伽利略变换。伽利略变换是洛伦兹变换的低速近似，这解释了为什么我们日常感觉不到狭义相对论的效应。

时间延缓

狭义相对论带来很多似乎有反直觉的结论，其中之一是在静止观察者看来，运动物体的时间会延缓。

考虑 S' 系中在 x' 处发生一个事件，起始时刻是 t'_1, t'_2 ，延续时间是 $\tau_0 = t'_2 - t'_1$ ， τ_0 也被称为固有

时间。在 S 系中测得该事件起始时刻为 t_1, t_2 , 由洛伦兹逆变换

$$t_1 = \gamma(t'_1 + \frac{vx'}{c^2})$$

$$t_2 = \gamma(t'_2 + \frac{vx'}{c^2})$$

在 S 系中测得该事件延续事件 $\tau = t_2 - t_1$, 得

$$\tau = \gamma\tau_0$$

因为 $\gamma > 1$, 所以 $\tau > \tau_0$, 也即在静止系看来, 运动物体的时间变慢了。

这一点可以解释某些高能粒子的寿命问题。宇宙中一些高能粒子寿命比较短, 按照这个寿命来算的话, 它们没到地球以前就应该衰变了, 但我们在地球上确实测到了它们。这怎么解释呢? 原来, 由于这些粒子是高速运动的, 地球上看来它们的寿命延长了, 因此可以在衰变前到达地球。

长度收缩

狭义相对论另一推论是运动物体在运动方向上的长度收缩。

考虑 S' 系中一个静止杆, 左端放于 x'_1 , 右端放于 x'_2 , 固有长度 $l_0 = x'_2 - x'_1$. 在 S 系中某时刻 t 测得左右两端坐标分别为 x_1, x_2 . 由洛伦兹变换

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt)$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt)$$

S 系中测得长度 $l = x_2 - x_1$, 得

$$l = \frac{l_0}{\gamma}$$

因为 $\gamma > 1$, $l < l_0$, 这意味着在静止系看来, 运动的杆在运动方向上长度收缩了。

需要注意, 垂直运动方向上的长度并不收缩。

历史评论

这里我们做一点历史评论。历史上, 洛伦兹先于爱因斯坦提出了长度收缩和洛伦兹变换, 但他对于自己提出公式的解释是不正确的, 他仍然囿于以太观念和绝对时空观, 没有认识到自己公式的真正含义。爱因斯坦在他工作的基础上提出了狭义相对论, 在数学公式层面并没有新的地方。但

爱因斯坦完全革新了人们的时空观念。从这个意义上来说，爱因斯坦不仅是一位科学家，更是一位哲学家。他能提出这样的理论，一方面是源于他对基本观念的追问和反思，另一方面则是创造的勇气。