Прикладные модели оптимизации

Доцент, к.ф.-м.н., доцент кафедры № 43

Фаттахова Мария Владимировна

mvfa@yandex.ru

Тема 3. Целочисленное программирование

Лекция 7

Задача целочисленного программирования (ЗЦЧП)

– задача оптимизации (обычно линейная), в которой решение должно быть найдено в целых числах.

Математическая постановка целочисленной задачи линейного программирования

$$\max L = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$x_j \ge 0,$$

$$x_j - целые,$$

$$j = 1, \ldots, n.$$

Пример (отличие ЗЛП от ЗЛЦЧП)

Решить задачу целочисленного программирования:

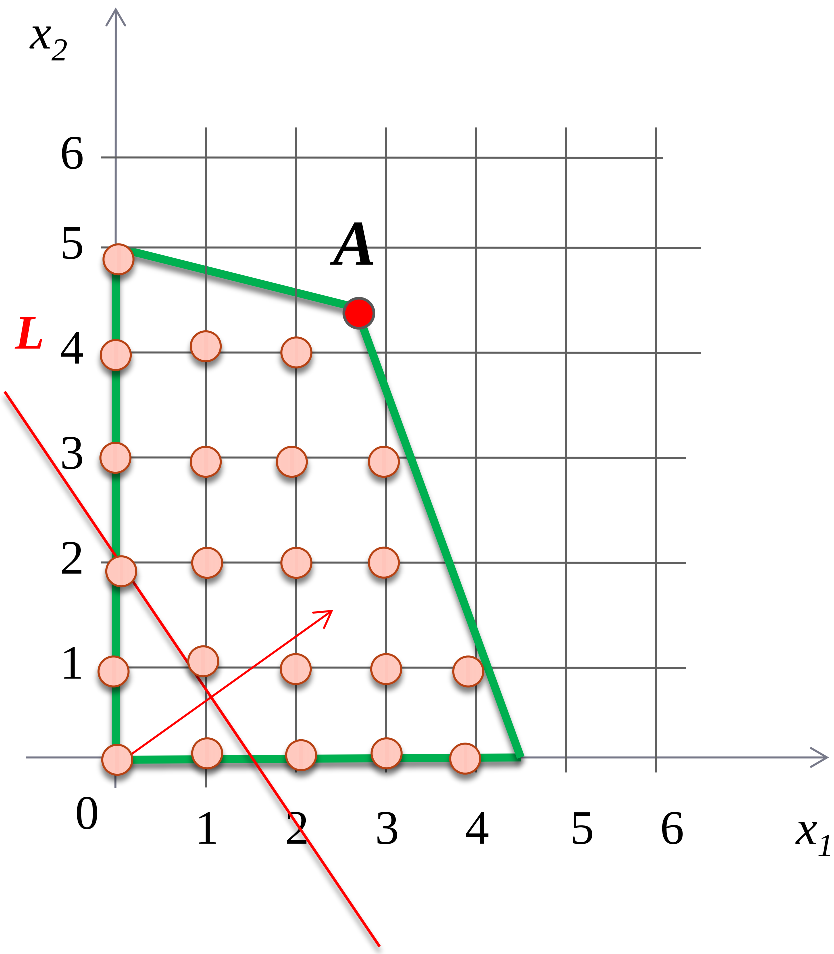
$$\max L = \max(0{,}3x_1 + x_2)$$

$$11x_1 + 4{,}5x_2 \le 49{,}5$$

$$5x_1 + 19x_2 \le 95$$

$$x_i \ge 0,\ \textit{целые},\ i = 1{,}2.$$

Графическое решение задачи



$$\max L = \max(0{,}3x_1 + x_2)$$

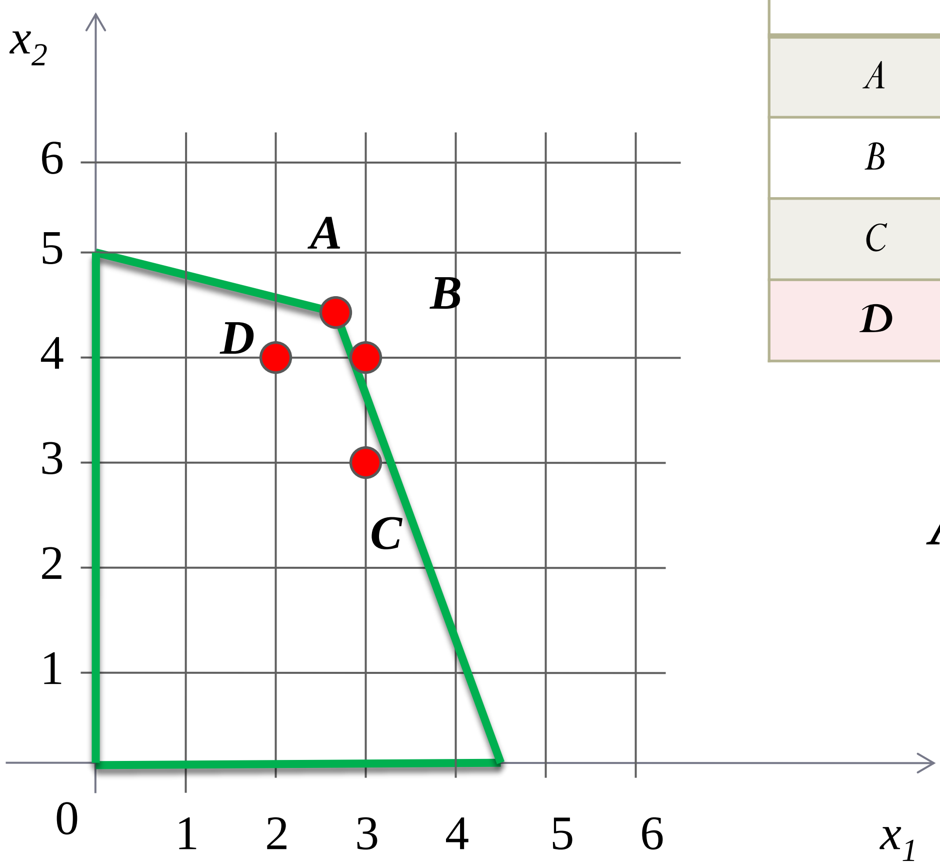
$$11x_1 + 4{,}5x_2 \le 49{,}5$$

$$5x_1 + 19x_2 \le 95$$

$$x_i \ge 0,\ \textit{целые},\ i = 1{,}2.$$

$A\ (2{,}8;\ 4{,}3)$

Графическое решение задачи



Точка	x_1	x_2	L	Решение
A	2,8	4,3	5,14	*Непрер.*
B	3	4	---	*Недопуст.*
C	3	3	3,9	*Допуст*
D	**2**	**4**	**4,6**	***Оптим***

$A(2{,}8;4{,}3)$ $B(3;4)$

$C(3;3)$ $D(2;4)$

Замечания

1. Округление оптимального непрерывного решения (даже в меньшую сторону) **может привести** к ***недопустимому решению***.
2. Оптимальным решением может оказаться то, в котором значения переменных **не являются ближайшими** к непрерывному оптимальному решению.
3. Число возможных решений *любой целочисленной задачи* **КОНЕЧНО**.
4. Аналитический метод решения ЗЦЧП – метод ветвей и границ.

Метод ветвей и границ. Пример.

Решите задачу целочисленного программирования методом границ и ветвей:

$$\max L = \max(7x_1 + 3x_2)$$

$$5x_1 + 2x_2 \le 20$$

$$8x_1 + 4x_2 \le 38$$

$$x_i \ge 0, \ \textit{целые}, \ i = 1,2.$$

Решение примера

В результате решения непрерывной задачи имеем:

$$\max L = \max(7x_1 + 3x_2)$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 20$$
$$8x_1 + 4x_2 \le 38$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1, 2.$$

$$x_1^* = 1$$
$$x_2^* = 7,5$$
$$L_1^* = 29,5$$

Здесь под x_1^*, x_2^*, L_1^* понимается *промежуточное* решение – оптимальное решение начальной непрерывной задачи.

Первая координата $x_1^* = 1$ – целочисленная. А вторая $x_2^* = 7{,}5$ позволяет вырезать из МДР полосу, в которой целочисленных решений точно нет: $7 < x_2 < 8$.

МДР распалась на две части: где $x_2 \le 7$ и где $x_2 \ge 8$. Решаем исходную задачу в каждой из них.

Ветвление исходной задачи

$$\max L = \max(7x_1 + 3x_2)$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 20$$
$$8x_1 + 4x_2 \le 38$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1, 2.$$

$x_2 \le 7$

$$\max L = \max(7x_1 + 3x_2)$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 20$$
$$8x_1 + 4x_2 \le 38$$
$$x_2 \le 7$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1, 2.$$

$x_2 \ge 8$

$$\max L = \max(7x_1 + 3x_2)$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 20$$
$$8x_1 + 4x_2 \le 38$$
$$x_2 \ge 8$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1, 2.$$

Для каждой из сформированных задач находим решение и проводим аналогичные рассуждения. В результате имеем следующее ветвление для исходной задачи:

Задача 1

$\max L = \max(7x_1 + 3x$

$5x_1 + 2x_2 \leq 20$

$8x_1 + 4x_2 \leq 38$

$x_i \geq 0, i = 1,2.$

$x_2 \leq 7$

Задача 2

$\max \quad L = \max(\ 7x_1 + 3x_2)$

$5x_1 + 2x_2 \leq 20$

$8x_1 + 4x_2 \leq 38$

$x_2 \leq 7$

$x_i \geq 0, i = 1,2$

$x_2 \geq 8$

Задача 3

$\max L = \max(7x_1 + 3x_2)$

$5x_1 + 2x_2 \leq 20$

$8x_1 + 4x_2 \leq 38$

$x_2 \geq 8$

$x_i \geq 0, i = 1,2$

$x_1 \leq 1$

Задача 4

$\max \ L = \max(\ 7x_1 + 3x_2)$

$5x_1 + 2x_2 \leq 20$

$8x_1 + 4x_2 \leq 38$

$x_2 \leq 7$

$x_1 \leq 1$

$x_i \geq 0, i = 1,2.$

$x_1 \geq 2$

Задача 5

$\max L = \max(7x_1 + 3x_2)$

$5x_1 + 2x_2 \leq 20$

$8x_1 + 4x_2 \leq 38$

$x_2 \leq 7$

$x_1 \geq 2$

$x_i \geq 0, i = 1,2.$

$x_1 \leq 0$

Задача 6

$\max \quad L = \max(\ 7x_1 + 3x_2)$

$5x_1 + 2x_2 \leq 20$

$8x_1 + 4x_2 \leq 38$

$x_2 \geq 8$

$x_1 \leq 0$

$x_i \geq 0, i = 1,2.$

$x_1 \geq 1$

Задача 7

$\max \quad L = \max(\ 7x_1 + 3x_2)$

$5x_1 + 2x_2 \leq 20$

$8x_1 + 4x_2 \leq 38$

$x_2 \geq 8$

$x_1 \geq 1$

$x_i \geq 0, i = 1,2.$

$x_2 \leq 9$

Задача 8

$\max L = \max(7x_1 + 3x_2)$

$5x_1 + 2x_2 \leq 20$

$8x_1 + 4x_2 \leq 38$

$x_2 \geq 8, x_1 \leq 0$

$x_2 \leq 9$

$x_i \geq 0, i = 1,2.$

$x_2 \geq 1\ 0$

Задача 9

$\max \ L = \max(\ 7x_1 + 3x_2)$

$5x_1 + 2x_2 \leq 20$

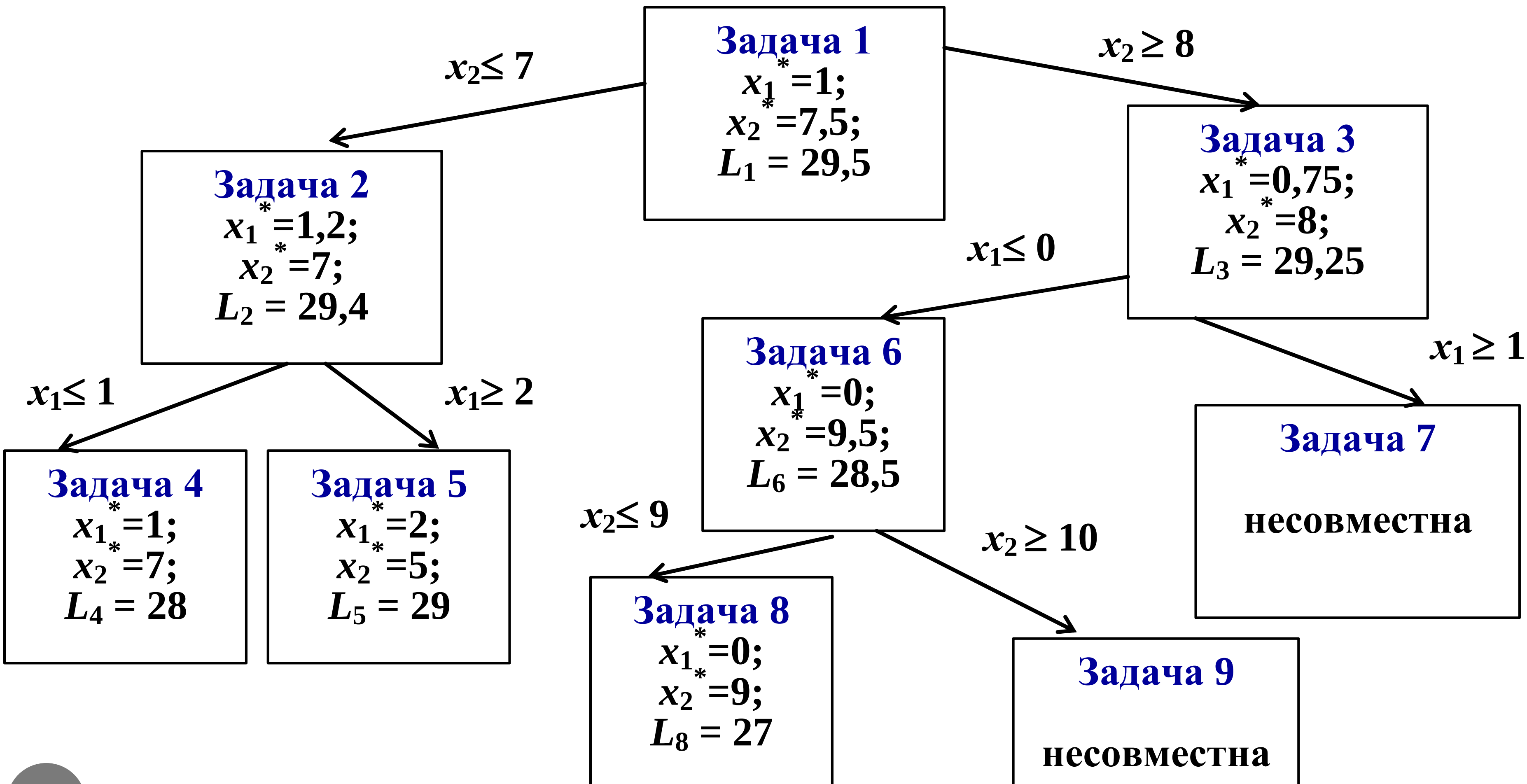
$8x_1 + 4x_2 \leq 38$

$x_2 \geq 8, x_1 \leq 0$

$x_2 \geq 10$

$x_i \geq 0, i = 1,2.$

Метод ветвей и границ. Пример.



Метод ветвей и границ. Пример.

Сравним найденные решения, выберем оптимальное

№ задачи	x_1	x_2	L	Решение
1	***1***	***7,5***	***29,5***	***непрерывное***
4	1	7	28	*допустимое*
5	***2***	***5***	***29***	***оптимальное***
8	0	9	27	*допустимое*

Задача бивалентного (булева) программирования

- это задача целочисленного программирования, переменные в которой ***могут принимать только одно из двух значений***: **0** или **1**.

- Задачи типа «брать – не брать».

Пример 3. Задача о распределении капиталовложений

Управляющему банком были представлены предложения о **четырех проектах**, претендующих на кредиты банка – ***A*, *B*, *C*** и ***D***.

Проекты должны принести следующую ***прибыль***:

A	B	C	D
$21 000	$18 000	$16 000	$17 500

При взвешивании этих предложений следует принять во внимание **потребность проектов в наличности** и **массу доступной наличности** для соответствующих периодов.

Пример 3. Задача о распределении капиталовложений

Проекты	Потребность в наличности, $			
	Период 1	Период 2	Период 3	Период 4
A	8000	8000	10000	10000
B	7000	9000	9000	11000
C	5000	7000	9000	11000
D	9000	8000	7000	6000

Доступная наличность банка составляет :

1 период	2 период	3 период	4 период
$22 000	$25 000	$38 000	$30 000

Вопрос

Какие **проекты** следует финансировать и **какое количество наличности необходимо** в течение каждого периода, если цель состоит в том, чтобы ***максимизировать прибыль***?

Математическая модель

Переменные модели: $x_i, i = 1,\dots,4:$

$$x_i = \begin{cases} 0, \text{ если } i\text{-ый проект НЕ поддерживается,} \\ 1, \text{ если } i\text{-ый проект решено поддержать,} \end{cases}$$

$$x_i : \left\{ \begin{array}{l} \text{целые;} \\ \text{неотрицательные;} \\ = 0 \text{ или } 1; \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \textit{двоичные} \\ \textit{переменные} \end{array} \right.$$

Целевая функция – суммарная прибыль:

A	B	C	D
\$21 000	\$18 000	\$16 000	\$17 500

$$21000x_1 + 18000x_2 + 16000x_3 + 17500x_4 \to \max$$

Математическая модель

Ограничения:

Проекты	Потребность в наличности, $			
	Период 1	Период 2	Период 3	Период 4
A	8000	8000	10000	10000
B	7000	9000	9000	11000
C	5000	7000	9000	11000
D	9000	8000	7000	6000

1 период	2 период	3 период	4 период
$22 000	$25 000	$38 000	$30 000

$$8000\,x_1 + 7000\,x_2 + 5000\,x_3 + 9000\,x_4 \le 22000$$

$$8000\,x_1 + 9000\,x_2 + 7000\,x_3 + 8000\,x_4 \le 25000$$

$$10000\,x_1 + 9000\,x_2 + 9000\,x_3 + 7000\,x_4 \le 38000$$

$$10000\,x_1 + 11000\,x_2 + 11000\,x_3 + 6000\,x_4 \le 30000$$

Математическая модель

$$21000x_1 + 18000x_2 + 16000x_3 + 17500x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 8000\,x_1 + 7000\,x_2 + 5000\,x_3 + 9000\,x_4 \le 22000 \\ 8000\,x_1 + 9000\,x_2 + 7000\,x_3 + 8000\,x_4 \le 25000 \\ 10000\,x_1 + 9000\,x_2 + 9000\,x_3 + 7000\,x_4 \le 38000 \\ 10000\,x_1 + 11000\,x_2 + 11000\,x_3 + 6000\,x_4 \le 30000 \\ x_i - \textit{двоичные}, i = 1,\dots,4. \end{cases}$$

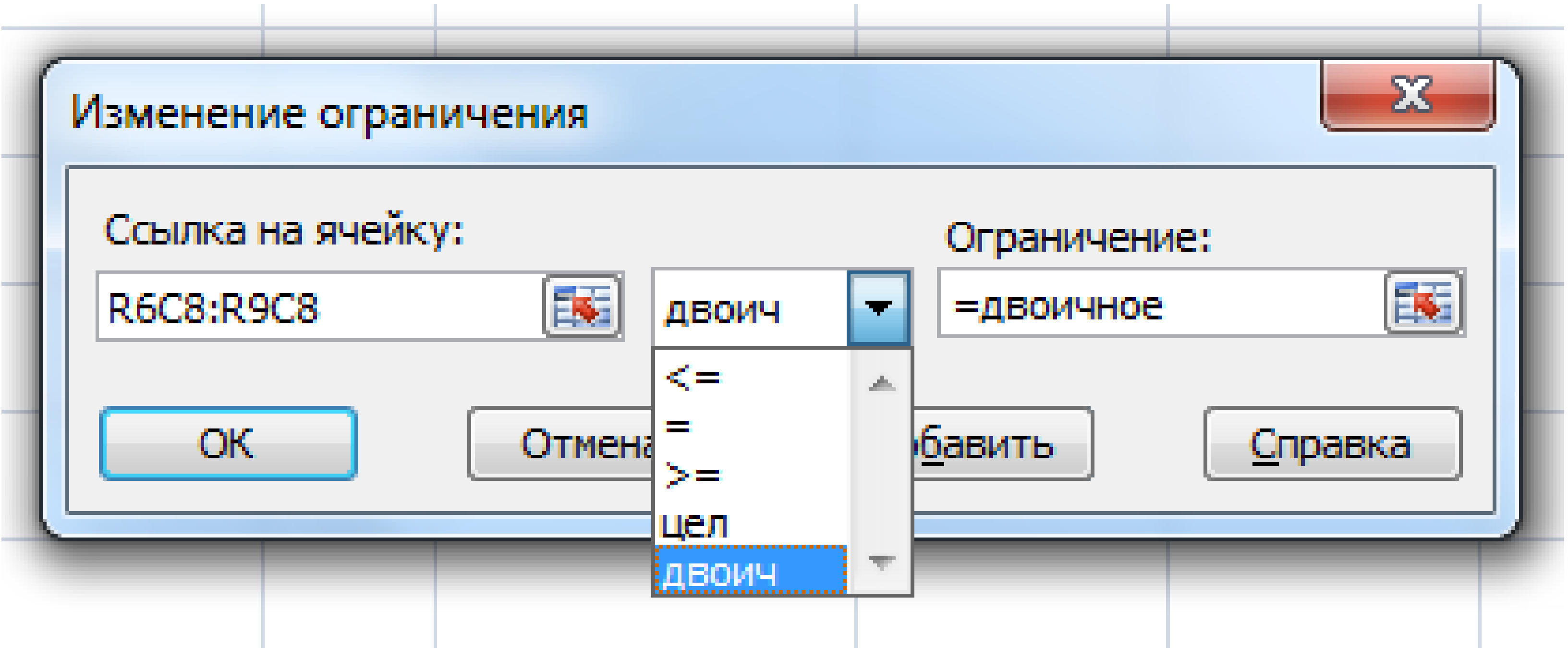
Решение в Excel (начальное)

Проекты	Потребность в наличности, $					Принятие проекта к финансированию ("0" - не принят, "1" - принят)	Прибыль от реализации, $
	Период 1	Период 2	Период 3	Период 4			
A	8000	8000	10000	10000		0	21000
B	7000	9000	9000	11000		0	18000
C	5000	7000	9000	11000		1	16000
D	9000	8000	7000	6000		1	17500

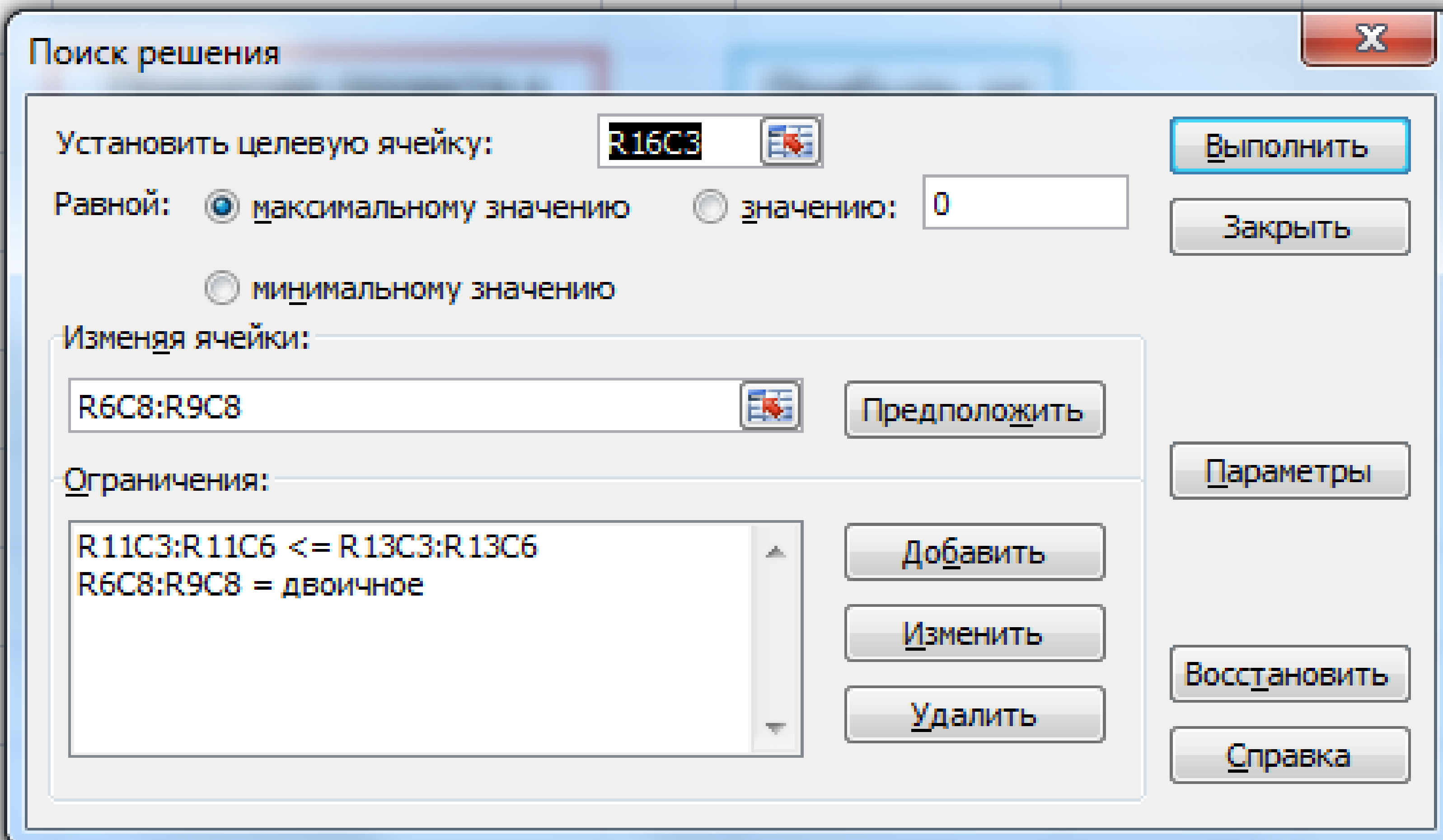
Всего затрачено средств	14000	15000	16000	17000
	<=	<=	<=	<=
Доступная наличность банка	22000	25000	38000	30000

Суммарная прибыль	33500

Двоичные переменные



Двоичные переменные



Решение в Excel (оптимальное)

Проекты	Потребность в наличности, $				Принятие проекта к финансированию ("0" - не принят, "1" - принят)	Прибыль от реализации, $
	Период 1	Период 2	Период 3	Период 4		
A	8000	8000	10000	10000	1	21000
B	7000	9000	9000	11000	0	18000
C	5000	7000	9000	11000	1	16000
D	9000	8000	7000	6000	1	17500

Всего затрачено средств	22000	23000	26000	27000
	<=	<=	<=	<=
Доступная наличность банка	22000	25000	38000	30000

Суммарная прибыль 54500

Дополнительные условия

1. Проект 2 должен быть обязательно выбран, если выбирается проект 3.

$$x_3 \le x_2$$

2. Проект 2 не может быть выбран одновременно с проектом 4.

$$x_2 + x_4 \le 1$$

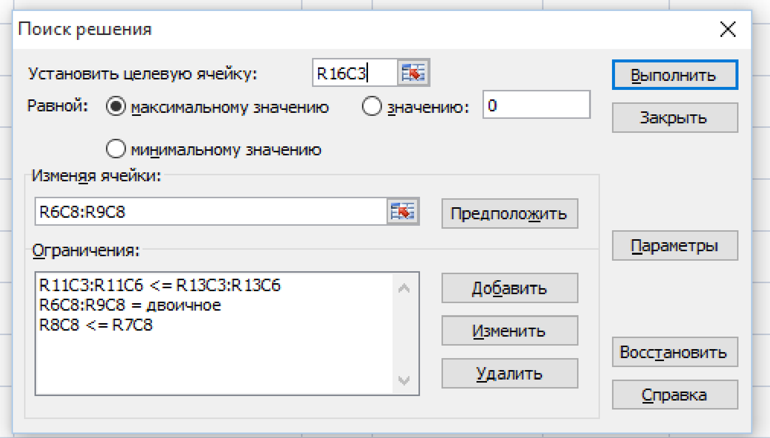
Дополнительное условие 1 в Excel

Выбор оптимальных проектов для финансирования. Учет доп.усл.1: x3 <= x2.

Проекты	Потребность в наличности, $				Принятие проекта к финансированию ("0" - не принят, "1" - принят)	Прибыль от реализации, $
	Период 1	Период 2	Период 3	Период 4		
A	8000	8000	10000	10000	0	21000
B	7000	9000	9000	11000	1	18000
C	5000	7000	9000	11000	1	16000
D	9000	8000	7000	6000	1	17500

Всего затрачено средств	21000	24000	25000	28000
	<=	<=	<=	<=
Доступная наличность банка	22000	25000	38000	30000

Суммарная прибыль	51500



Дополнительное условие 2 в Excel

Выбор оптимальных проектов для финансирования. Учет доп.усл.1: x2 + x4 <= 1.

Проекты	Потребность в наличности, $				Принятие проекта к финансированию ("0" - не принят, "1" - принят)	Прибыль от реализации, $
	Период 1	Период 2	Период 3	Период 4		
A	8000	8000	10000	10000	1	21000
B	7000	9000	9000	11000	0	18000
C	5000	7000	9000	11000	1	16000
D	9000	8000	7000	6000	1	17500

Всего затрачено средств	22000	23000	26000	27000	*x2+x4*		
	<=	<=	<=	<=	1	<=	1
Доступная наличность банка	22000	25000	38000	30000			

Суммарная прибыль	54500

Особенности решения ЗЦЧП в Excel

- Для гарантированного поиска оптимального решения **следует** установить параметр *Допустимое отклонение* равным 0%.
- Если «***Поиск решения***» не может найти оптимального решения или процесс затягивается, можно задать в качестве *начального решения* – оптимальное решение соответствующей ЗЛП.

Пример 4. Ambulance stations

Города	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	0	23	14	18	10	32
2	23	0	24	13	22	11
3	14	24	0	60	19	20
4	18	13	60	0	55	17
5	10	22	19	55	0	12
6	32	11	20	17	12	0

Города	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	1	0	1
3	1	0	1	0	0	0
4	0	1	0	1	0	0
5	1	0	0	0	1	1
6	0	1	0	0	1	1

Пример 4. Ambulance stations. Математическая модель

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{если в городе i устанавливается станция} \\ 0, \text{если в городе i не устанавливается станция} \end{cases}, \quad i = 1,\ldots,6,$$

Целевая функция – суммарное количество станций:

$$C = \sum_{i=1}^{6} x_i \to \min$$

Ограничения: каждый город должен быть обслужен по крайней мере одной станцией

$$k_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если из города i можно обслужить город j} \\ 0, \text{если из города i нельзя обслужить город j} \end{cases}$$

$$i = 1,\ldots,6,\ j = 1,\ldots,6$$

$$\sum_{i=1}^{6} k_{ij} x_i \geq 1, \quad j = 1,\ldots,6$$

Задача о размещении станций скорой помощи в Excel

Размещение станций скорой помощи.

Город, где расположена станция	Обслуживаемые города							Переменные решения ("0" - не размещать станцию в данном городе, "1" - размещать)
	1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***		
1	1	0	1	0	1	0		1
2	0	1	0	1	0	1		1
3	1	0	1	0	0	0		0
4	0	1	0	1	0	0		0
5	1	0	0	0	1	1		0
6	0	1	0	0	1	1		0

1	1	1	1	1	1	-	*количество стоянок, обслуживающих данный город*
>=	>=	>=	>=	>=	>=		
1	1	1	1	1	1	-	*условие того, что каждый город обслуживается*

общее количество станций 2

Тест № 1

- Тема 1. Линейное программирование.
- Тема 2. Транспортная задача и задача о назначениях в сетевой и аналитической постановках.
- Практические задания.

СРОК: 20.10.2021

Курсовая работа

	1 этап	2 этап	3 этап	Защита
Консультация	*	*	*	*
Срок	*	*	*	*
Результат	Мат. модель с необходимыми пояснениями	Табличная модель в Excel . КАЧЕСТВО!	Пользова-тельский интерфейс	Отчёт. Ответить на вопросы.
Баллы	20	10	15	55

Номер задачи – см. в файле Рейтинг-КР.xlsx

(Материалы по КР в ЛК)

Расписание занятий 7 – 11

Номер занятия	Дата по группам			Вид занятия
	4936	4931, 4932	4933	
Занятие 7	13.10	14.10	15.10	Приём ЛР № 2
Занятие 8	20.10	21.10	22.10	Консультация по I этапу курсовой работы
Занятие 9	27.10	28.10	29.10	Приём I этапа курсовой работы
Занятие 10	03.11	04.11*	05.11*	Консультация по II этапу курсовой работы (*- по e-mail)
Занятие 11	10.11	11.11	12.11	Выдача и выполнение ЛР № 3
Занятие 12	17.11	18.11	19.11	Приём II этапа курсовой работы
Занятие 13	24.11	25.11	26.11	Приём ЛР № 3. Выдача ЛР № 4.
Занятие 14	01.12	02.12	03.12	Приём III этапа курсовой работы
Занятие 15	08.12	09.12	10.12	Приём ЛР № 4
Занятие 16	15.12	16.12	17.12	Приём долгов по лабораторным работам и курсовой работе.
Занятие 17	22.12	23.12	24.12	Загрузка отчёта по курсовой работе в ЛК. Защита курсовой работы