

# Прикладные модели ОПТИМИЗАЦИИ

Доцент, к.ф.-м.н., доцент кафедры № 43

*Фаттахова Мария Владимировна*

*[mvfa@yandex.ru](mailto:mvfa@yandex.ru)*

# Тема 2. Транспортная задача как частный случай ЗЛП

---

Лекция 6

# Транспортная задача

имеет целью **минимизацию транспортных издержек** при перевозках однотипных грузов от **нескольких поставщиков** (с различных складов), расположенных в разных местах, к **разным потребителям**.

# Теорема (Критерий разрешимости ТЗ)

Для того, чтобы ТЗ имела оптимальное решение, необходимо и достаточно, чтобы она была сбалансирована, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

# Когда ТЗ необходимо балансировать?

- В случае, если в задаче присутствуют штрафные затраты, связанные с «невывозом» или «недопоставками»;
- В случае, когда имеются дополнительные ограничения, связанные с «неравноправностью» потребителей (или поставщиков) и т.п.

# Преимущество сбалансированной модели

«Поиск решения» автоматически выбирает специальные эффективные методы решения ТЗ и обеспечивает **целочисленность решения** (без специального требования целочисленности!) при условии, что заказы и запасы – целые.

## Если ТЗ *не* балансировать

1. Меняется вид математической модели (часть равенств становится неравенствами).
2. ТЗ – задача ***целочисленного программирования***. Необходимо добавлять условие целочисленности на переменные.
3. Для целочисленного программирования характерна проблема выбора ***начального допустимого решения***.

# Эвристические методы поиска допустимого решения ТЗ

Понятие *транспортной таблицы*.

	$c_{11}$		$c_{12}$		$c_{13}$		$c_{14}$	$a_1$
	$c_{21}$		$c_{22}$		$c_{23}$		$c_{24}$	$a_2$
	$c_{31}$		$c_{32}$		$c_{33}$		$c_{34}$	$a_3$
$b_1$	$b_2$		$b_3$		$b_4$			



# Эвристические методы поиска решения ТЗ

- Метод северо-западного элемента.
- Метод минимального элемента.
- Приближенный метод Фогеля.

# Метод северо-западного элемента

*Идея. В транспортной таблице всегда заполняется свободный северо-западный элемент.*

# Метод северо-западного элемента

	7		8		5		3	11
	2		4		5		9	11
	6		3		1		2	8
5		9		9		7		

# Метод северо-западного элемента

	7		8		5		3	11
	2		4		5		9	11
	6		3		1		2	8
5		9		9		7		<b>30=30</b>

# Метод северо-западного элемента

5	7		8		5		3	<del>11</del> 6
	2		4		5		9	11
	6		3		1		2	8
<del>5</del> 0		9		9		7		30=30

# Метод северо-западного элемента

5	7	8	5	3	<del>11</del> 6
0	2	4	5	9	11
0	6	3	1	2	8
<del>5</del> 0	9	9	7	30=30	

# Метод северо-западного элемента

5	7	6	8		5		3	<del>11</del> <del>6</del> <b>0</b>
0	2		4		5		9	11
0	6		3		1		2	8
<del>5</del> <b>0</b>	<del>9</del> 3	9		7				<b>30=30</b>

# Метод северо-западного элемента

5	7	6	8	0	5	0	3	<del>11</del> <del>6</del> <b>0</b>
0	2		4		5		9	11
0	6		3		1		2	8
<del>5</del> <b>0</b>	<del>9</del> 3	9		7				<b>30=30</b>



# Метод северо-западного элемента

5	7	6	8	0	5	0	3	<del>11</del> <del>6</del> <b>0</b>
0	2	3	4		5		9	<del>11</del> 8
0	6		3		1		2	8
<del>5</del> <b>0</b>	<del>9</del> <del>3</del> <b>0</b>	9		7		<b>30=30</b>		

# Метод северо-западного элемента

5	7	6	8	0	5	0	3	<del>11</del> <del>6</del> <b>0</b>
0	2	3	4		5		9	<del>11</del> 8
0	6	0	3		1		2	8
<del>5</del> <b>0</b>	<del>9</del> <del>3</del> <b>0</b>	9	7	<b>30=30</b>				

# Метод северо-западного элемента

5	7	6	8	0	5	0	3	<del>11</del> <del>6</del> <b>0</b>
0	2	3	4	8	5	0	9	<del>11</del> <del>8</del> <b>0</b>
0	6	0	3		1		2	8
<del>5</del> <b>0</b>	<del>9</del> <del>3</del> <b>0</b>	<del>9</del> 1	7	<b>30=30</b>				

# Метод северо-западного элемента

5	7	6	8	0	5	0	3	<del>11</del> <del>6</del> <b>0</b>
0	2	3	4	8	5	0	9	<del>11</del> <del>8</del> <b>0</b>
0	6	0	3	1	1	7	2	<del>8</del> <del>7</del> <b>0</b>
<del>5</del> <b>0</b>	<del>9</del> <del>3</del> <b>0</b>	<del>9</del> <del>1</del> <b>0</b>	<del>7</del> 0	<b>30=30</b>				

$$C = 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + \\ + 0 \cdot 9 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 150$$

# Метод северо-западного элемента

- Используется: только для нахождения начального допустимого решения.

# Метод минимального элемента

- Идея. *В транспортной таблице всегда заполняется свободная клетка с минимальными затратами.*

# Метод минимального элемента

	7		8		5		3	11
	2		4		5		9	11
	6		3		1		2	8
5		9		9		7		<b>30=30</b>

# Метод минимального элемента

	7		8		5		3	11
	2		4		5		9	11
	6		3	8	1		2	<del>8</del> <b>0</b>
5		9	<del>9</del> 1		7			<b>30=30</b>



# Метод минимального элемента

	7		8		5		3	11
	2		4		5		9	11
0	6	0	3	8	1	0	2	<del>8</del> <b>0</b>
5		9	<del>9</del> 1		7			<b>30=30</b>

# Метод минимального элемента

	7		8		5		3	11
5	2		4		5		9	<del>11</del> 6
0	6	0	3	8	1	0	2	<del>8</del> <b>0</b>
<del>5</del> <b>0</b>	9	<del>9</del> 1	7	<b>30=30</b>				

# Метод минимального элемента

0	7		8		5		3	11
5	2		4		5		9	<del>11</del> 6
0	6	0	3	8	1	0	2	<del>8</del> <b>0</b>
<del>5</del> <b>0</b>	9	<del>9</del> 1	7	<b>30=30</b>				

# Метод минимального элемента

0	7		8		5	7	3	<del>11</del> 4
5	2		4		5		9	<del>11</del> 6
0	6	0	3	8	1	0	2	<del>8</del> <b>0</b>
<del>5</del> <b>0</b>	9	<del>9</del> 1	<del>7</del> 0	<b>30=30</b>				

# Метод минимального элемента

0	7		8		5	7	3	<del>11</del> 4
5	2	6	4		5	0	9	<del>11</del> <del>6</del> <b>0</b>
0	6	0	3	8	1	0	2	<del>8</del> <b>0</b>
<del>5</del> <b>0</b>	<del>9</del> 3	<del>9</del> 1	<del>7</del> 0	<b>30=30</b>				

# Метод минимального элемента

0	7		8	1	5	7	3	<del>11</del> <del>4</del> 3
5	2	6	4	0	5	0	9	<del>11</del> <del>6</del> <b>0</b>
0	6	0	3	8	1	0	2	<del>8</del> <b>0</b>
<del>5</del> <b>0</b>	<del>9</del> 3	<del>9</del> <del>1</del> <b>0</b>	<del>7</del> 0	<b>30=30</b>				

# Метод минимального элемента

0	7	3	8	1	5	7	3	<del>11</del> <del>4</del> <del>3</del> 0
5	2	6	4	0	5	0	9	<del>11</del> <del>6</del> 0
0	6	0	3	8	1	0	2	<del>8</del> 0
<del>5</del> 0	<del>9</del> <del>3</del> 0	<del>9</del> <del>1</del> 0	<del>7</del> 0	30=30				

$$C = 0 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 1 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + \\ + 0 \cdot 9 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 92$$

# Метод минимального элемента

- *Используется: для нахождения начального допустимого решения и для оценки затрат.*

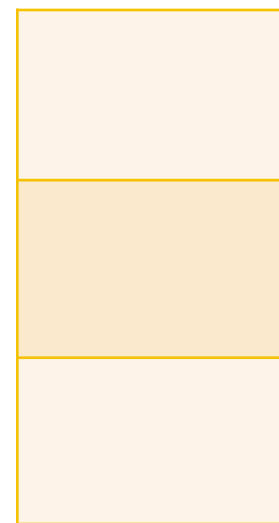


# Приближенный метод Фогеля

- Идея. В строке (столбце) с максимальным штрафом заполняется клетка с минимальными затратами.

# Метод Фогеля

	7		8		5		3	11
	2		4		5		9	11
	6		3		1		2	8
5		9		9		7		<b>30=30</b>



# Метод Фогеля

	7		8		5		3	11
	2		4		5		9	11
	6		3		1		2	8
5		9		9		7		<b>30=30</b>

$$5-3=2$$

$$4-2=2$$

$$2-1=1$$

# Метод Фогеля

	7		8		5		3	11
	2		4		5		9	11
	6		3		1		2	8
5		9		9		7		<b>30=30</b>

$$5-3=2$$

$$4-2=2$$

$$2-1=1$$

$$6-2=4$$

$$4-3=1$$

$$5-1=4$$

$$3-2=1$$

# Метод Фогеля

	7		8		5		3	11
	2		4		5		9	11
	6		3		1		2	8
5		9		9		7		<b>30=30</b>

$$5-3=2$$

$$4-2=2$$

$$2-1=1$$

$$6-2=4$$

$$4-3=1$$

$$5-1=4$$

$$3-2=1$$

# Метод Фогеля

	7		8		5		3	11
	2		4		5		9	11
	6		3		1		2	8
5		9		9		7		<b>30=30</b>

$$5-3=2$$

$$4-2=2$$

$$2-1=1$$

$$6-2=4$$

$$4-3=1$$

$$5-1=4$$

$$3-2=1$$

# Метод Фогеля

	7		8		5		3	11
	2		4		5		9	11
	6		3	8	1		2	8
5		9		9		7		<b>30=30</b>

$$5-3=2$$

$$4-2=2$$

$$2-1=1$$

$$6-2=4$$

$$4-3=1$$

$$5-1=4$$

$$3-2=1$$

# Метод Фогеля

	7		8		5		3	11
	2		4		5		9	11
	6		3		1		2	<del>8</del> 0
5		9	<del>9</del> 1		7			<b>30=30</b>

$$5-3=2$$

$$4-2=2$$

$$2-1=1$$

$$6-2=4$$

$$4-3=1$$

$$5-1=4$$

$$3-2=1$$



# Метод Фогеля

	7		8		5		3	11
	2		4		5		9	11
0	6	0	3	8	1	0	2	<del>8</del> 0
5		9	<del>9</del> 1		7			<b>30=30</b>

$$5-3=2$$

$$4-2=2$$

~~$$2-1=1$$~~

$$6-2=4$$

$$4-3=1$$

$$5-1=4$$

$$3-2=1$$

# Метод Фогеля

	7		8		5		3	11
	2		4		5		9	11
0	6	0	3	8	1	0	2	<del>8</del> 0
5		9		<del>9</del> 1		7		<b>30=30</b>

$$5-3=2$$

$$4-2=2$$

~~$$2-1=1$$~~

~~$$6-2=4$$~~  

$$7-2=5$$

~~$$4-3=1$$~~  

$$8-4=4$$

~~$$5-1=4$$~~  

$$5-5=0$$

~~$$3-2=1$$~~  

$$9-3=6$$

# Метод Фогеля

	7		8		5		3	11
	2		4		5		9	11
0	6	0	3	8	1	0	2	<del>8</del> 0
5		9		<del>9</del> 1		7		<b>30=30</b>

$$5-3=2$$

$$4-2=2$$

~~$$2-1=1$$~~

~~$$6-2=4$$~~  

$$7-2=5$$

~~$$4-3=1$$~~  

$$8-4=4$$

~~$$5-1=4$$~~  

$$5-5=0$$

~~$$3-2=1$$~~  

$$9-3=6$$

# Метод Фогеля

	7		8		5		7	3	11
	2		4		5			9	11
0	6	0	3	8	1	0	2	<del>8</del> 0	
5		9		<del>9</del> 1		7			<b>30=30</b>

$$5-3=2$$

$$4-2=2$$

~~$$2-1=1$$~~

~~$$6-2=4$$~~  

$$7-2=5$$

~~$$4-3=1$$~~  

$$8-4=4$$

~~$$5-1=4$$~~  

$$5-5=0$$

~~$$3-2=1$$~~  

$$9-3=6$$

# Метод Фогеля

	7		8		5		7	3	<del>11</del> 4
	2		4		5		0	9	11
0	6		0	3	8	1	0	2	<del>8</del> 0
5		9		<del>9</del> 1		<del>7</del> 0			<b>30=30</b>

$$5-3=2$$

$$4-2=2$$

~~$$2-1=1$$~~

~~$$6-2=4$$~~  

$$7-2=5$$

~~$$4-3=1$$~~  

$$8-4=4$$

~~$$5-1=4$$~~  

$$5-5=0$$

~~$$3-2=1$$~~  

$$9-3=6$$

# Метод Фогеля

	7		8		5		7	3	<del>11</del> 4
	2		4		5		0	9	11
0	6		0	3	8	1	0	2	<del>8</del> 0
5		9		<del>9</del> 1		<del>7</del> 0			<b>30=30</b>

$$5-3=2$$

$$4-2=2$$

~~$$2-1=1$$~~

~~$$6-2=4$$~~  

$$7-2=5$$

~~$$4-3=1$$~~  

$$8-4=4$$

~~$$5-1=4$$~~  

$$5-5=0$$

~~$$3-2=1$$~~  
~~$$9-3=6$$~~

# Метод Фогеля

	7		8		5		7	3	<del>11</del> 4
	2		4		5		0	9	11
0	6		3	8	1		0	2	<del>8</del> 0
5		9		<del>9</del> 1		<del>7</del> 0			30=30

~~5-3=2~~  
7-5=2

4-2=2

~~2-1=1~~

~~6-2=4~~  
7-2=5

~~4-3=1~~  
8-4=4

~~5-1=4~~  
5-5=0

~~3-2=1~~  
~~9-3=6~~

# Метод Фогеля

	7		8		5		7	3	<del>11</del> 4
5	2		4		5		0	9	11
0	6		3	8	1		0	2	<del>8</del> 0
5		9		<del>9</del> 1		<del>7</del> 0			30=30

~~5-3=2~~  
7-5=2

4-2=2

~~2-1=1~~

~~6-2=4~~  
7-2=5

~~4-3=1~~  
8-4=4

~~5-1=4~~  
5-5=0

~~3-2=1~~  
~~9-3=6~~



# Метод Фогеля

0	7		8		5	7	3	<del>11</del> 4
5	2		4		5	0	9	<del>11</del> 6
0	6	0	3	8	1	0	2	<del>8</del> 0
<del>5</del> 0		9		<del>9</del> 1		<del>7</del> 0		<b>30=30</b>

~~5-3=2~~  
7-5=2

4-2=2

~~2-1=1~~

~~6-2=4~~  
7-2=5

~~4-3=1~~  
8-4=4

~~5-1=4~~  
5-5=0

~~3-2=1~~  
~~9-3=6~~

# Метод Фогеля

0	7		8		5	7	3	<del>11</del> 4
5	2		4		5	0	9	<del>11</del> 6
0	6	0	3	8	1	0	2	<del>8</del> 0
<del>5</del> 0		9		<del>9</del> 1		<del>7</del> 0		<b>30=30</b>

~~5-3=2~~  
~~7-5=2~~  
8-5=3

~~4-2=2~~  
5-4=1

~~2-1=1~~

~~6-2=4~~  
~~7-2=5~~

~~4-3=1~~  
8-4=4

~~5-1=4~~  
5-5=0

~~3-2=1~~  
~~9-3=6~~

# Метод Фогеля

0	7		8		5	7	3	<del>11</del> 4
5	2	6	4		5	0	9	<del>11</del> 6
0	6	0	3	8	1	0	2	<del>8</del> 0
<del>5</del> 0		9		<del>9</del> 1		<del>7</del> 0		<b>30=30</b>

$$\begin{aligned} &\cancel{5-3=2} \\ &\cancel{7-5=2} \\ &8-5=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cancel{4-2=2} \\ &5-4=1 \end{aligned}$$

$$\cancel{2-1=1}$$

$$\begin{aligned} &\cancel{6-2=4} \\ &\cancel{7-2=5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cancel{4-3=1} \\ &8-4=4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cancel{5-1=4} \\ &5-5=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cancel{3-2=1} \\ &\cancel{9-3=6} \end{aligned}$$

# Метод Фогеля

0	7		8		5	7	3	<del>11</del> 4
5	2	6	4	0	5	0	9	<del>11</del> <del>6</del> 0
0	6	0	3	8	1	0	2	<del>8</del> 0
<del>5</del> 0	<del>9</del> 3	<del>9</del> 1	<del>7</del> 0	30=30				

$$\begin{aligned} &\cancel{5-3=2} \\ &\cancel{7-5=2} \\ &8-5=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cancel{4-2=2} \\ &5-4=1 \end{aligned}$$

$$\cancel{2-1=1}$$

$$\begin{aligned} &\cancel{6-2=4} \\ &\cancel{7-2=5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cancel{4-3=1} \\ &8-4=4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cancel{5-1=4} \\ &5-5=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cancel{3-2=1} \\ &\cancel{9-3=6} \end{aligned}$$

# Метод Фогеля

$$C = 0 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 1 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + \\ + 0 \cdot 9 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 92$$

0	7	3	8	1	5	7	3	<del>11</del> 4
5	2	6	4	0	5	0	9	<del>11</del> <del>6</del> 0
0	6	0	3	8	1	0	2	<del>8</del> 0
<del>5</del> 0	<del>9</del> 3	<del>9</del> 1	<del>7</del> 0	30=30				

~~5-3=2~~  
~~7-5=2~~  
~~8-5=3~~

~~4-2=2~~  
~~5-4=1~~

~~2-1=1~~

~~6-2=4~~  
~~7-2=5~~

~~4-3=1~~  
~~8-4=4~~

~~5-1=4~~  
~~5-5=0~~

~~3-2=1~~  
~~9-3=6~~

# Приближенный метод Фогеля

- Используется: только как оценочный метод.

# Сравнение значений транспортных издержек

№	Метод поиска решения	Значение транспортной задачи
1	Северо-западного элемента	150
2	Минимального элемента	92
3	Фогеля	92
4	<i>Оптимальное значение</i>	<b>89</b>

## Домашнее задание 3

- Нарисуйте сеть ТЗ.
- Составьте математическую модель.
- Найдите начальное решение тремя способами.

***На листочке! Срок – 1 неделя.***



# Тема 2. Транспортная задача. Задача о назначениях

---

# Пример 1

Мастер должен назначить 7 слесарей ( $A, B, \dots, H$ ) для ремонта сельскохозяйственной техники (К-701, Т-150М и т.д.), имеющий разного рода неисправности после окончания уборочной.

Время (ч), которое каждый слесарь тратит на выполнение определенного вида ремонта, приведено в таблице:

	К-701	Т-150М	Т-155М	МТЗ-80	МТЗ-40	Т-100	Дон-1500
<i>A</i>	12	14	14	10	9	15	21
<i>B</i>	15	13	12	10	8	21	23
<i>C</i>	-	16	11	10	11	21	-
<i>D</i>	16	-	-	8	9	-	21
<i>E</i>	13	11	13	9	8	15	21
<i>F</i>	13	13	11	11	9	22	28
<i>H</i>	12	13	13	9	10	22	27

# Пример 1

Необходимо определить оптимальную расстановку слесарей по участкам работы, при которой суммарное время на выполнение работ будет минимальным.

	К-701	Т-150М	Т-155М	МТЗ-80	МТЗ-40	Т-100	Дон-1500
<i>A</i>	12	14	14	10	9	15	21
<i>B</i>	15	13	12	10	8	21	23
<i>C</i>	-	16	11	10	11	21	-
<i>D</i>	16	-	-	8	9	-	21
<i>E</i>	13	11	13	9	8	15	21
<i>F</i>	13	13	11	11	9	22	28
<i>H</i>	12	13	13	9	10	22	27

# Решение примера 1

	К-701	Т-150М	Т-155М	МТЗ-80	МТЗ-40	Т-100	Дон-1500
<i><b>A</b></i>	12	14	14	10	9	15	21
<i><b>B</b></i>	15	13	12	10	8	21	23
<i><b>C</b></i>	99	16	11	10	11	21	99
<i><b>D</b></i>	16	99	99	8	9	99	21
<i><b>E</b></i>	13	11	13	9	8	15	21
<i><b>F</b></i>	13	13	11	11	9	22	28
<i><b>H</b></i>	12	13	13	9	10	22	27

# Математическая модель

- Переменные:  $x_{ij}$  – количество слесарей « $i$ », назначенных на ремонт техники  $j$ ,  $i = 1, \dots, 7$ ,  $j = 1, \dots, 7$  (принимает значения 0 или 1).
- Цель: минимизация суммарного времени выполнения ремонтных работ

$$C = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 c_{ij} x_{ij} = 12x_{11} + 14x_{12} + \dots + 27x_{77} \rightarrow \min$$

где  $c_{ij}$  – время выполнения работы по ремонту техники  $j$  слесарем  $i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ ,  $j = 1, \dots, 7$ .

# Математическая модель

- Ограничения.

1. Каждый слесарь может быть назначен на ремонт только одной единицы техники:

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{17} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{27} = 1$$

...

$$x_{71} + x_{72} + \dots + x_{77} = 1$$

2. Каждую единицу техники должен ремонтировать только 1 слесарь:

$$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{71} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + \dots + x_{72} = 1$$

...

$$x_{17} + x_{27} + \dots + x_{77} = 1$$

3. Условия неотрицательности:  $x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, 7, j = 1, \dots, 7$ .

# Пример 1.

## Математическая модель

$$C = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 c_{ij} x_{ij} = 12x_{11} + 14x_{12} + \dots + 27x_{77} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^7 x_{ij} = 1, i = 1, \dots, 7,$$

$$\sum_{i=1}^7 x_{ij} = 1, j = 1, \dots, 7,$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, 7, j = 1, \dots, 7.$$

# Пример 1 (оптимальное решение)

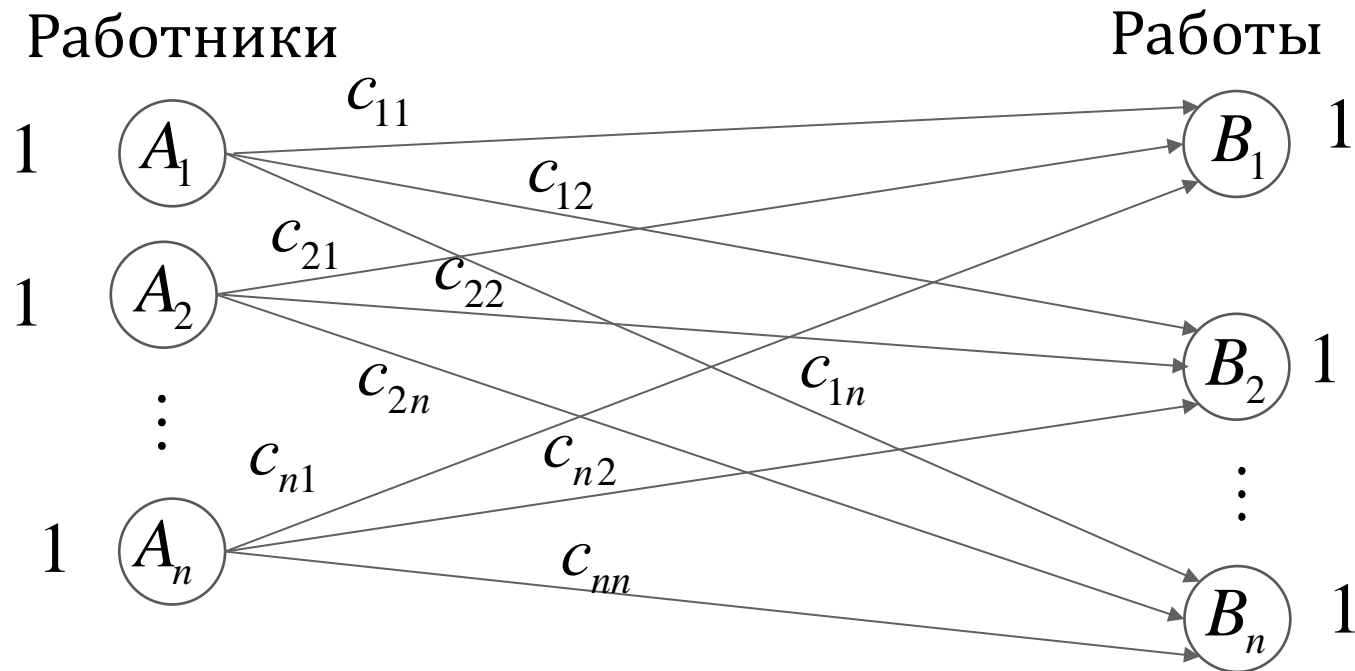
Время ремонта										
	К-701	Т-150М	Т-155М	МТЗ-80	МТЗ-40	Т-100	Дон-1500			
<b>A</b>	12	14	14	10	9	15	21			
<b>B</b>	15	13	12	10	8	21	23			
<b>C</b>	99	16	11	10	11	21	99	Суммарное время		
<b>D</b>	16	99	99	8	9	99	21	88		
<b>E</b>	13	11	13	9	8	15	21			
<b>F</b>	13	13	11	11	9	22	28			
<b>H</b>	12	13	13	9	10	22	27			
Распределение слесарей по участкам										
	К-701	Т-150М	Т-155М	МТЗ-80	МТЗ-40	Т-100	Дон-1500	Всего участков, на которые назначен слесарь		
<b>A</b>	0	0	0	0	0	1	0	1	=	1
<b>B</b>	0	0	0	0	1	0	0	1	=	1
<b>C</b>	0	0	1	0	0	0	0	1	=	1
<b>D</b>	0	0	0	0	0	0	1	1	=	1
<b>E</b>	0	1	0	0	0	0	0	1	=	1
<b>F</b>	1	0	0	0	0	0	0	1	=	1
<b>H</b>	0	0	0	1	0	0	0	1	=	1
Всего слесарей на участке										
	1	1	1	1	1	1	1			
	=	=	=	=	=	=	=			
	1	1	1	1	1	1	1			



# Задача о назначениях – частный случай транспортной задачи.

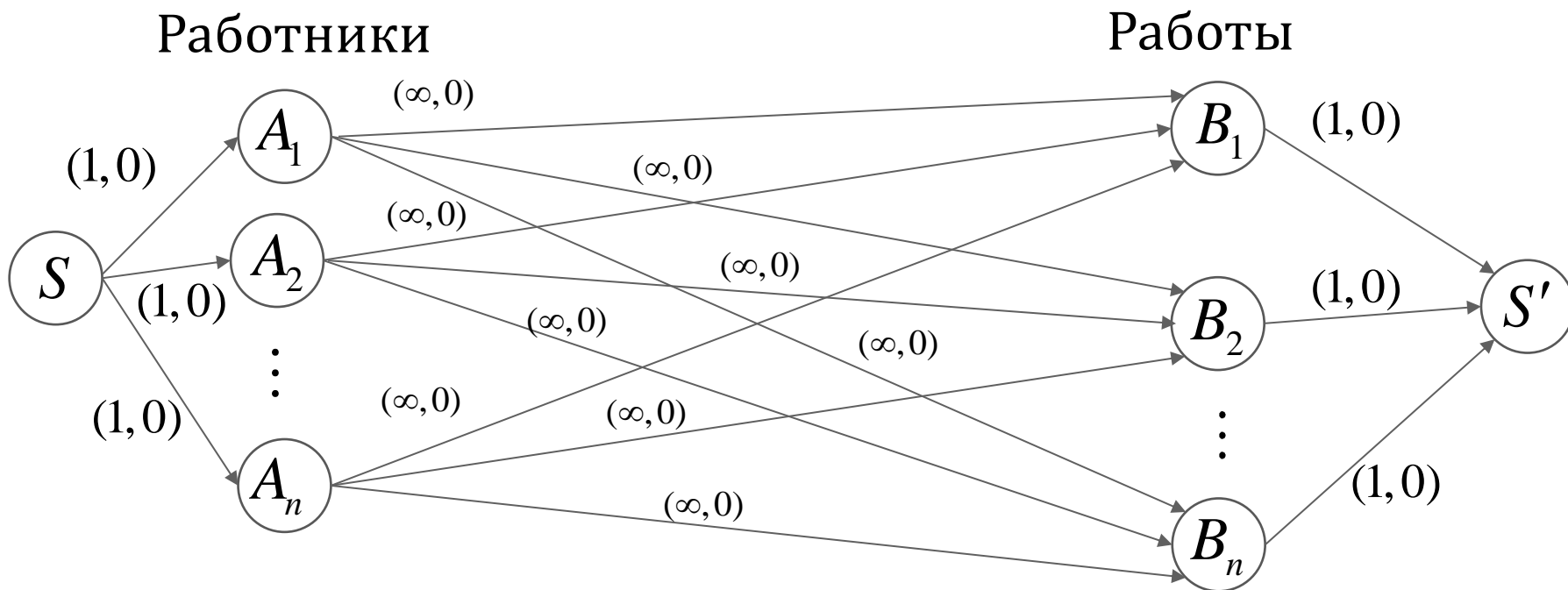
- Число поставщиков (рабочих, поставщиков рабочей силы)  $n$  совпадает с числом потребителей (работ, различных технологических операций)  $n$ .
- Все запасы и заказы равны 1.
- Так же как и в ТЗ – **не требуется** условие *целочисленности* (при соблюдении структуры ТЗ).

# Задача о назначении. Сетевая постановка



$c_{ij}$  – КПД, эффективность или время выполнения работником  $i$  работы  $j$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, n$ .

# Задача о назначении. Сетевая постановка



# Математическая модель задачи о назначениях

$$\min L = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad \text{или} \quad \max L = \max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Ограничения по  
работникам:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

Ограничения по работам:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n.$$

## Пример 2. Построение команд.

Необходимо составить пары ( техник –программист – менеджер по маркетингу) – команды по продаже оборудования, соответствующего нуждам конкретного клиента. Менеджер по работе с персоналом провел среди программистов и маркетологов тест Майер – Бриггс и определил индекс взаимной несовместимости между  $i$ -ым техником и  $j$ -ым маркетологом. Индекс варьируется от 20 (выраженная враждебность) до 1 (дружеские отношения).

Пары должны быть составлены таким образом, чтобы минимизировать суммарный индекс враждебности пар.

# Пример 2. Построение команд.

## Данные теста

<b>Менеджеры по маркетингу</b>	<b>Техники-программисты</b>								
	<i>Ваня</i>	<i>Петя</i>	<i>Миша</i>	<i>Коля</i>	<i>Вася</i>	<i>Рома</i>	<i>Майя</i>	<i>Витя</i>	<i>Инна</i>
<i>Аня</i>	11	8	4	3	9	17	14	6	12
<i>Зоя</i>	7	4	7	11	19	2	10	5	18
<i>Маша</i>	13	20	1	12	14	11	16	9	15
<i>Виталий</i>	5	8	12	6	1	3	4	7	10
<i>Люба</i>	16	7	18	9	13	1	2	17	12
<i>Даша</i>	12	3	9	17	5	6	18	2	1
<i>Руслан</i>	9	1	13	4	7	20	19	1	19
<i>Валя</i>	8	6	17	8	11	4	3	4	13
<i>Юля</i>	17	2	19	13	14	19	11	3	17
<i>Галя</i>	12	1	7	1	2	5	6	4	1

# Математическая модель.

## Пример 2

- Цель: минимизация суммарного индекса враждебности

$$C = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} c_{ij} x_{ij} = 11x_{11} + 8x_{12} + \dots + 0 \cdot x_{10,10} \rightarrow \min$$

где  $c_{ij}$  – индекс враждебности пары  $(i, j)$  согласно данным опроса,  $i = 1, \dots, 7, j = 1, \dots, 7$ .

- Ограничения:

По менеджерам:  $\sum_{j=1}^{10} x_{ij} = 1, i = 1, \dots, 10,$

По техникам:  $\sum_{i=1}^{10} x_{ij} = 1, j = 1, \dots, 10,$

Условия неотрицательности:  $x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, 7, j = 1, \dots, 7.$

## Пример 2. Построение команд.

Юля	17	2	19	13	14	19	11	3	17	0	Суммарный индекс						
Галя	12	1	7	1	2	5	6	4	1	0	<div>18</div>						
Менеджеры по маркетингу	Техники-программисты										Всего техников каждому менеджеру						
	Ваня	Петя	Миша	Коля	Вася	Рома	Майя	Витя	Инна	Fict							
	Аня	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	=	1			
	Зоя	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	=	1			
	Маша	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	=	1			
	Виталий	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	=	1			
	Люба	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	=	1			
	Даша	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	=	1			
	Руслан	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	=	1			
	Валя	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	=	1			
Юля	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	=	1				
Галя	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	=	1				
Всего менеджеров каждому технику																	
1											1	1	1	1	1	1	1
=											=	=	=	=	=	=	=
1											1	1	1	1	1	1	1