Прикладные модели оптимизации

Доцент, к.ф.-м.н., доцент кафедры № 43

Фаттахова Мария Владимировна

mvfa@yandex.ru

Тема 4. Введение в нелинейное программирование

Лекция 10

Пример 1

Организация реализует автомобили двумя способами: через розничную и оптовую торговлю. При реализации x_1 автомобилей в розницу расходы на реализацию равны $4x_1 + x_1^2$ руб., а при продаже оптом x_2 автомобилей расходы составляют x_2^2 руб. Найти оптимальный способ реализации автомобилей, минимизирующий суммарные расходы, если общее число предназначенных для продажи автомобилей составляет 200 шт, при этом в розницу должно быть продано не менее 50 шт.

$$z(x_1, x_2) = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2 \rightarrow min$$

$$x_1 + x_2 = 200$$
$$x_1 \geq 50$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Постановка задачи нелинейного программирования

Задачей нелинейного программирования (*ЗНЛП*) называется задача нахождения максимума (минимума) нелинейной функции многих переменных, когда на переменные имеются (не имеются) ограничения типа равенств или неравенств.

$$z(x_1, x_2) = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2 \rightarrow min$$

$$x_1 + x_2 = 200$$
$$x_1 \geq 50$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Различные виды задач нелинейного программирования.

- Задача безусловной оптимизации.
- Задача условной оптимизации.
- Стандартная задача нелинейного программирования.
- Задача нелинейного программирования смешанного типа.

Задача безусловной оптимизации

Задача нахождения

$$\max_{(x_1, x_2)} f(X) \qquad \left(\min_{(x_1, x_2)} f(X) \right)$$

без дополнительных ограничений называется *задачей нелинейного программирования без ограничений* (**задачей безусловной оптимизации**)

M – ***всегда выпукло***

Задача условной оптимизации

Задача нахождения

$$\max_{(x_1,x_2)} f(X) \quad \left(\min_{(x_1,x_2)} f(X) \right)$$

при ограничениях

$$g_i(x_1, x_2) = 0, i = 1,\ldots, m,$$

называется *задачей нелинейного программирования с ограничениями типа равенств* (**задачей условной оптимизации**)

M – ***выпукло***, если

$g_i(x_1, x_2), i = 1, \ldots, m,$ – ***линейные***

Стандартная задача оптимизации

$$\max_{(x_1,x_2)} f(x_1, x_2)$$

при ограничениях

$$g_i(x_1, x_2) \geq 0, i = 1, \ldots, m$$

M – ***выпуклое, если***

g_i – ***вогнутые***

$$\min_{(x_1,x_2)} f(x_1, x_2)$$

при ограничениях

$$g_i(x_1, x_2) \leq 0, i = 1, \ldots, m$$

M – ***выпуклое, если***

g_i – ***выпуклые***

Задача нелинейного программирования смешанного типа

$$\max_{(x_1,x_2)} f(X) \qquad \left(\min_{(x_1,x_2)} f(X)\right)$$

при ограничениях $\qquad M$ *– **выпукло, если:***

$$g_i(x_1,x_2) \geq 0, i = 1,\dots,r, \qquad g_i(x_1,x_2) - \textit{вогнутые}$$

$$g_i(x_1,x_2) \leq 0, i = r+1,\dots,p, \qquad g_i(x_1,x_2) - \textit{выпуклые}$$

$$g_i(x_1,x_2) = 0, i = p+1,\dots,m, \qquad g_i(x_1,x_2) - \textit{линейные}$$

Необходимые и достаточные условия оптимальности

- Необходимые условия позволяют найти точки, подозрительные на экстремум.
- Достаточные условия позволяют убедиться в том, что найденная точка – искомое решение.

Корректность обращение к Excel

Если необходимые условия являются достаточными, обращение к Excel *корректно*.

Общая идея. Необходимые условия являются достаточными для любого типа оптимизационной задачи, если:

1. Целевая функция выпукла $(\min)$ или вогнута $(\max)$ на M.
2. Множество допустимых решений M – выпукло.

Необходимые условия оптимальности в задаче безусловной оптимизации

Если $X^* = (x_1^*, x_2^*) \in M$ – оптимальное решение в задаче безусловной оптимизации:

$$\max_{(x_1, x_2)} f(x_1, x_2) \quad \left(\min_{(x_1, x_2)} f(x_1, x_2)\right)$$

то выполняется следующее условие (*условие стационарной точки*):

$$\frac{\partial f(X^*)}{\partial x_i} = 0, i = 1,2.$$

Достаточность условий оптимальности

Если $f(x_1, x_2)$ – вогнутая (выпуклая) для любых $(x_1, x_2) \in R^2$

то стационарная точка $X^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$

является ***решением задачи безусловной оптимизации на максимум (на минимум).***

Пример 2

Запишите необходимые условия оптимальности и проверьте их достаточность:

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = \min\left(x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3\right)$$

Задача *безусловной* оптимизации.

Необходимые условия оптимальности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 - 2x_1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} = 6x_3 - 2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_2 - 2x_1 = 0 \\ 6x_3 - 2x_1 = 0 \end{cases}$$

Решение этой системы – стационарная точка. Будет ли она точкой минимума?

Пример 2

Проверим выпуклость функции $f(x_1, x_2, x_3)$.

Построим матрицу Гессе и изучим её знакоопределённость.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 - 2x_1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} = 6x_3 - 2x_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2; & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -2; \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 4; & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = -2; \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 6; & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 0; \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad H(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2 > 0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 8 > 0. \quad \Rightarrow$$

Все ведущие главные миноры матрицы Гессе положительны. Следовательно, матрица является положительно определённой.

Из этого следует, что функция $f(x_1, x_2, x_3)$ является строго выпуклой на всей области определения.

Пример 2

Вывод.

В рассматриваемой задаче *безусловной* оптимизации целевая функция является *строго выпуклой* на всей области определения.

Таким образом, необходимые условия являются достаточными. Стационарная точка (решение системы) является точкой минимума.

Необходимые условия оптимальности в задаче условной оптимизации

Функция Лагранжа:

$$L(x_1, x_2 \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \equiv f(x_1, x_2) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2).$$

Если $X^* = (x_1^*, x_2^*) \in M$ – оптимальное решение в задаче условной оптимизации:

$$\max_{(x_1, x_2)} f(x_1, x_2)$$
$$g_i(x_1, x_2) = 0, i = 1, ..., m,$$

то существует вектор $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$:

Необходимые условия оптимальности (*условия Лагранжа*)

Условия оптимальности

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* \dfrac{\partial g_i(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_j} = 0,\ j = 1,2, \\ g_i(x_1^*, x_2^*) = 0, i = 1,\ldots, m. \end{cases}$$

Условия допустимости

Достаточность условий оптимальности

Если $f(x_1, x_2)$ – вогнутая для любых $(x_1, x_2) \in M$

а функции $g_i(x_1, x_2), i = 1, \ldots, m,$ – линейные,

то стационарная точка $X^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$

является ***решением задачи условной оптимизации:***

$$\max_{(x_1, x_2)} f(x_1, x_2)$$

$$g_i(x_1, x_2) = 0, i = 1, \ldots, m,$$

Пример 3

Запишите необходимые условия оптимальности и проверьте их достаточность:

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = \min\left(x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3\right)$$

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ &x_1 - x_2 = 2. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0, \\ &x_1 - x_2 - 2 = 0. \end{aligned}}$$

Задача *условной оптимизации*.

Для составления функции Лагранжа ограничения переписаны таким образом, чтобы функции $g_i(x_1, x_2, x_3), i = 1, 2,$ были записаны в явном виде.

Функция Лагранжа для данного примера имеет:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 1) + \lambda_2(x_1 - x_2 - 2)$$

Пример 3

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 1) + \lambda_2(x_1 - x_2 - 2)$$

Выпишем условия Лагранжа для данной функции. Для этого вычислим производные от функции Лагранжа по всем переменным и приравняем их к нулю.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 - 2x_1 + \lambda_1 - \lambda_2 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = 6x_3 - 2x_1 + \lambda_1 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 + x_3 - 1 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 - x_2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 4x_2 - 2x_1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 6x_3 - 2x_1 + \lambda_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Условия оптимальности

Условия допустимости

Пример 3

Вывод.

В рассматриваемой задаче *условной* оптимизации:

1. Целевая функция является *строго выпуклой* на всей области определения (показано в Примере 2).
2. Множество допустимых решений задано линейными ограничениями (следовательно, является выпуклым).

Таким образом, необходимые условия являются достаточными. Стационарная точка (решение системы) является точкой минимума.

Необходимые условия оптимальности в стандартной ЗНЛП

Функция Лагранжа:

$$L(x_1, x_2 \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \equiv f(x_1, x_2) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2).$$

Если $X^* = \left(x_1^*, x_2^*\right) \in M$ – оптимальное решение в стандартной задаче оптимизации:

$$\max_{(x_1, x_2)} f(x_1, x_2)$$

$$g_i(x_1, x_2) \geq 0, i = 1, \ldots, m,$$

то существует вектор $\Lambda^* = \left(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*\right)$:

$$\lambda_i^* \geq 0, i = 1, \ldots, m,$$

Необходимые условия оптимальности (*условия Куна - Таккера*)

Условия оптимальности

Условия допустимости

$$\begin{cases} g_i(x_1^*, x_2^*) \geq 0, i = 1,\ldots, m, \\ \dfrac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \dfrac{\partial g_i(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_j} = 0, \; j = 1,2, \\ \lambda_i^* g_i(x_1^*, x_2^*) = 0, i = 1,\ldots, m. \end{cases}$$

Условия связности

Достаточность условий оптимальности

Если $f(x_1, x_2)$ – вогнутая для любых $(x_1, x_2) \in M$

и функции $g_i(x_1, x_2), i = 1, \ldots, m,$ – вогнутые,

то стационарная точка $X^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$

является ***решением стандартной задачи нелинейного программирования***.

$$\max_{(x_1, x_2)} f(x_1, x_2)$$

$$g_i(x_1, x_2) \geq 0, i = 1, \ldots, m,$$

Пример 4

Запишите необходимые условия оптимальности и проверьте их достаточность:

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = \min\left(x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3\right)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1,$$
$$x_1^2 - x_2 \geq 2$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} &-x_1 - x_2 - x_3 + 1 \leq 0, \\ &-x_1^2 + x_2 + 2 \leq 0 \\ &-x_1 \leq 0, \\ &-x_2 \leq 0. \end{aligned}}$$

Стандартная задача нелинейной оптимизации.

Для построения функции Лагранжа ограничения переписаны так, чтобы функции $g_i(x_1, x_2, x_3), i = 1, \ldots, 4$, имели явный вид.

Функция Лагранжа для данного примера имеет вид:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + \lambda_1(-x_1 - x_2 - x_3 + 1) +$$
$$+\lambda_2(-x_1^2 + x_2 + 2) + \lambda_3(-x_1) + \lambda_4(-x_2)$$

Пример 4

Запишем условия Куна-Таккера, для чего продифференцируем функцию Лагранжа по переменным $x_j, j = 1, 2, 3$, и добавим условия связности и допустимости.

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + \lambda_1(-x_1 - x_2 - x_3 + 1) +$$

$$+\lambda_2(-x_1^2 + x_2 + 2) + \lambda_3(-x_1) + \lambda_4(-x_2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 x_1 - \lambda_3 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 - 2x_1 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = 6x_3 - 2x_1 - \lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 x_1 - \lambda_3 = 0 \\ 4x_2 - 2x_1 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\ 6x_3 - 2x_1 - \lambda_1 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 1 \le 0 \\ -x_1^2 + x_2 + 2 \le 0 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \\ \lambda_1(-x_1 - x_2 - x_3 + 1) = 0 \\ \lambda_2(-x_1^2 + x_2 + 2) = 0 \\ \lambda_3(-x_1) = 0 \\ \lambda_4(-x_2) = 0 \end{cases}$$

Достаточность необходимых условий в примере 4

Выпуклость целевой функции уже доказана в примере 2.

Необходимо проверить выпуклость функций, задающих множество допустимых решений M.

$$-x_1 - x_2 - x_3 + 1 \le 0,$$
$$\boxed{-x_1^2 + x_2 + 2 \le 0}$$
$$-x_1 \le 0, -x_2 \le 0.$$

В данном примере НЕ все функции, задающие ограничения, являются линейными. Рассмотрим нелинейное ограничение.

По свойству выпуклых функций известно, что данное ограничение будет определять выпуклое множество в том случае, если функция в его левой части – выпуклая. Исследуем выпуклость данной функции с помощью матрицы Гессе.

Матрица Гессе для нелинейного ограничения в примере 4

$$\boxed{g = x_1^2 - x_2 - 2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1; \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = 2; \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = -1; \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} = 0;$$

$$\Rightarrow \quad H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Один из главных ведущих миноров оказался равным 0. Необходимо проверить, нет ли отрицательных среди просто главных миноров. Осталось рассмотреть один главный минор:

$$\Delta_1^2 = 0$$

Матрица Гессе для нелинейного ограничения примере 4

Это означает, что матрица Гессе для функции $g(x_1, x_2)$ является положительно полуопределённой.

Следовательно, функция $g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 - 2$ является выпуклой (не строго).

Этого достаточно, чтобы заключить, что неравенство

$$x_1^2 - x_2 - 2 \geq 0$$

задаёт выпуклое множество по свойству выпуклых функций.

Пример 4

Вывод.

В рассматриваемой стандартной задаче оптимизации:

1. Целевая функция является *строго выпуклой* на всей области определения (показано в Примере 2).
2. Множество допустимых решений является выпуклым, т.к. часть ограничений определяются линейными неравенствами, а нелинейное ограничение задаёт выпуклое множество по свойству.

Таким образом, необходимые условия являются достаточными. Стационарная точка (решение системы) является точкой минимума.

Замечание

Рассмотрим условия связности: $$\boxed{\lambda_i^* g_i(x_1^*, x_2^*) = 0, i = 1, \ldots, m.}$$

Для его выполнения достаточно, чтобы один из множителей этого произведения равнялся 0. Множители Лагранжа неотрицательны по условию.

Если в результате решения системы получилось, что какой-либо множитель Лагранжа $\lambda_i^* > 0$, это означает, что соответствующее ему ограничение должно выполняться на оптимальном решении как равенство (т.е., являться активным):

$$\lambda_i^* > 0 \Rightarrow g_i(x_1^*, x_2^*) = 0$$

Если какое-либо ограничение не является активным (ресурс расходуется не полностью), то соответствующий множитель Лагранжа обращается в 0 на оптимальном решении:

$$g_i(x_1^*, x_2^*) \neq 0 \Rightarrow \lambda_i^* = 0$$

Необходимые условия оптимальности в смешанной ЗНЛП

$$\max_{(x_1,x_2)} f(x_1,x_2)$$

$$g_i(x_1,x_2) \ge 0, i = 1,\dots,r,$$

$$g_i(x_1,x_2) \le 0, i = r+1,\dots,p,$$

$$g_i(x_1,x_2) = 0, i = p+1,\dots,m,$$

$$g_i(x_1,x_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g_i(x_1,x_2) \le 0 \\ g_i(x_1,x_2) \ge 0 \end{cases}, i = p+1,\dots,m$$

$$\begin{cases} -g_i(x_1,x_2) \ge 0 \\ g_i(x_1,x_2) \ge 0 \end{cases}, i = p+1,\dots,m$$

Сведение смешанной ЗНЛП к стандартной ЗНЛП

$$\max_{(x_1, x_2)} f(x_1, x_2)$$

$$g_i(x_1, x_2) \geq 0, i = 1, \ldots, r,$$

$$-g_i(x_1, x_2) \geq 0, i = r+1, \ldots, p,$$

$$-g_i(x_1, x_2) \geq 0, i = p+1, \ldots, m,$$

$$g_i(x_1, x_2) \geq 0, i = p+1, \ldots, m$$

$$\lambda_{i,} i = 1, \ldots, m + m_1$$

$$m_1 = m - p$$

Домашнее задание № 4

Записать необходимые условия оптимальности и проверить их достаточность. Решение **- от руки**!

СРОК 10.11.2021

Решение – по *e-mail*

В Теме письма укажите: «ПМО. Группа ... ДЗ 4»

Выводы

- Обращение к «Поиску решения» MS Excel будет корректным только в случае, когда необходимые условия являются достаточными.
- Таким образом, перед обращением к Excel для решения ЗНЛП необходимо убедиться в достаточности необходимых условий.

В обобщённом виде (для ЗНЛП любого типа) эти условия можно записать следующим образом:

1. Должна иметь место выпуклость (в случае поиска минимума) или вогнутость (в случае поиска максимума) целевой функции.
2. Множество допустимых решений должно быть выпуклым.

При выполнении этих условий можно сделать вывод о том, что обращение к «Поиску решений» корректно.

Пример 1

Организация реализует автомобили двумя способами: через розничную и оптовую торговлю. При реализации x_1 автомобилей в розницу расходы на реализацию равны $4x_1 + x_1^2$ руб., а при продаже оптом x_2 автомобилей расходы составляют x_2^2 руб. Найти оптимальный способ реализации автомобилей, минимизирующий суммарные расходы, если общее число предназначенных для продажи автомобилей составляет 200 шт, при этом в розницу должно быть продано не менее 50 шт.

Математическая модель. Пример 1

x_1, шт. – число автомобилей, реализуемых в розницу

x_2, шт. – число автомобилей, реализуемых оптом

$$4x_1 + x_1^2 + x_2^2 \rightarrow min$$
$$x_1 + x_2 = 200$$
$$x_1 \geq 50$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Смешанная задача нелинейной оптимизации.

Проверка корректности обращения к Excel

Проверим выпуклость целевой функции: $4x_1 + x_1^2 + x_2^2$

Убедитесь, что матрица Гессе данной функции: $H\left(x_1, x_2\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Проверьте, что матрица является положительно определённой.

1. Следовательно, целевая функция является строго выпуклой.
2. Множество допустимых решений данной задачи выпукло, т.к. задано линейными ограничениями.

Таким образом, обращение к Excel является корректным.

Решение в Excel

$$4x_1 + x_1^2 + x_2^2 \to min$$
$$x_1 + x_2 = 200$$
$$x_1 \geq 50$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	***План реализации:***		через розницу	оптом		Суммарное число реализованных автомобилей		Всего реализовать	
3			99,0000005	101,0000005		200,000001	=	200	
4									
5	Ограничения на объём производства								
6			>=						
7			50						
8						Суммарные затраты на реализацию			
9	Затраты на реализацию		10197,0001	10201,0001		20398,0002			
10									

=4*C3+C3^2

=D3^2

=СУММ(C9:D9)

Поиск решения