

# Прикладные модели ОПТИМИЗАЦИИ

Доцент, к.ф.-м.н., доцент кафедры № 43

*Фаттахова Мария Владимировна*

*[mvfa@yandex.ru](mailto:mvfa@yandex.ru)*

# Тема 5. Модели многокритериальной оптимизации

---

## Лекция 12

# Формальная постановка задачи многокритериальной оптимизации

$$H_1(x) \rightarrow \max,$$

$$H_2(x) \rightarrow \max,$$

$\vdots$

$$H_r(x) \rightarrow \max,$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_x$$

$D_x$  – множество (область)  
допустимых решений

$H_k(x)$  – критерии (цели),  
 $r \geq 2$

# Определение оптимальности по Парето

Решение  $x^*$  называется **парето-оптимальным** (**оптимальным по Парето, эффективным**), если **не существует** другого решения  $x$ , для которого

$$H_i(x) \geq H_i(x^*), i = 1, \dots, r,$$

$$\exists i_0 : H_{i_0}(x) > H_{i_0}(x^*)$$

# Арбитражные схемы.

## Метод главного критерия

$$\begin{aligned} H(x) &= (H_1(x), \dots, H_r(x)), \\ H_i &\rightarrow \max, i = 1, \dots, r, \\ x &\in D_x \end{aligned}$$

1. Фиксируем точку «**статус-кво**»  $H(x_0) = (H_1(x_0), H_2(x_0), \dots, H_r(x_0))$
2. Выберем главный критерий. ( $H_1$ )

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} H_1(x) \rightarrow \max, \\ x \in D_x, \\ H_i \geq H_i(x_0), i = 2, \dots, r, \end{array} & \Rightarrow x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \end{array}$$

$x^*$  – **оптимальное решение по методу главного критерия**  
(главный критерий – первый) при **заданной точке**  
**«статус-кво»**  $H(x_0)$ .

# Арбитражная схема Нэша

$$\begin{aligned} H(x) &= (H_1(x), \dots, H_r(x)), \\ H_i &\rightarrow \max, i = 1, \dots, r, \\ x &\in D_x \end{aligned}$$

1. Фиксируем точку «*статус-кво*»  $H(x) = (H_1(x_0), \dots, H_r(x_0))$
2. Функция Нэша:

$$H^N(x) = \prod_{i=1}^r (H_i(x) - H_i(x_0)).$$

$$\begin{array}{l|l} \max_{x \in D_x} H^N(x) & \\ H_i(x) \geq H_i(x_0), i = 1, \dots, r & \Rightarrow x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \end{array}$$

$x^*$ , которое решает эту ЗНЛП, называется **арбитражным решением Нэша при точке статус-кво**  $H(x_0)$ .

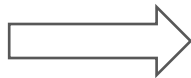
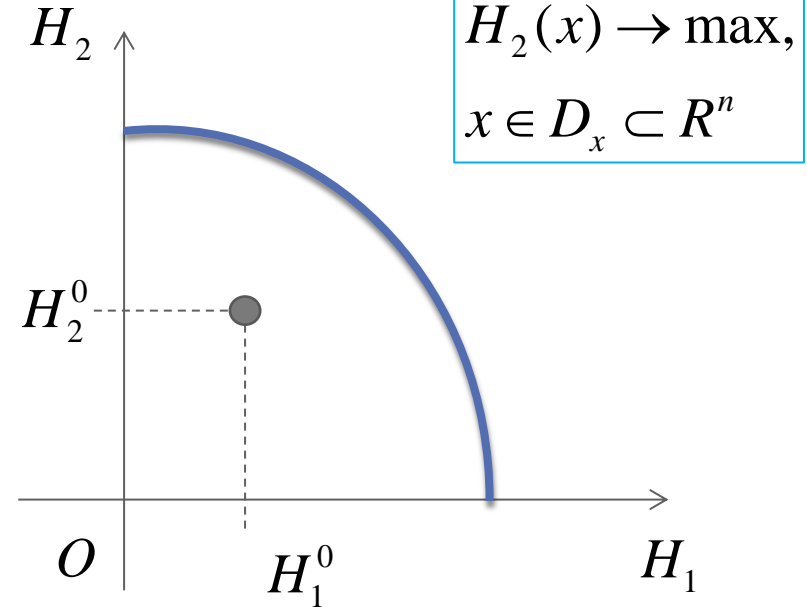
# Арбитражное решение Нэша для двух критериев

Точка статус-кво:

$$H(x_0) = (H_1(x_0), H_2(x_0)) = (H_1^0, H_2^0)$$

Функция Нэша

$$H^N(x) = (H_1(x) - H_1^0)(H_2(x) - H_2^0)$$



$$H^N(x) = (H_1(x) - H_1^0)(H_2(x) - H_2^0) \rightarrow \max$$

$$x \in D_x$$

$$H_1(x) \geq H_1^0$$

$$H_2(x) \geq H_2^0$$

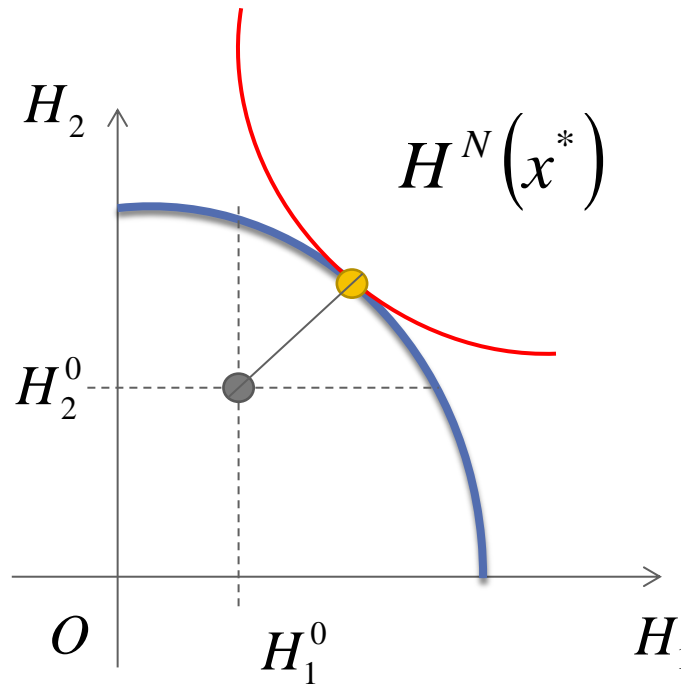
# Арбитражное решение Нэша для двух критериев

$$H^N(x) = (H_1(x) - H_1^0)(H_2(x) - H_2^0) \rightarrow \max$$

$$x \in D_x$$

$$H_1(x) \geq H_1^0$$

$$H_2(x) \geq H_2^0$$



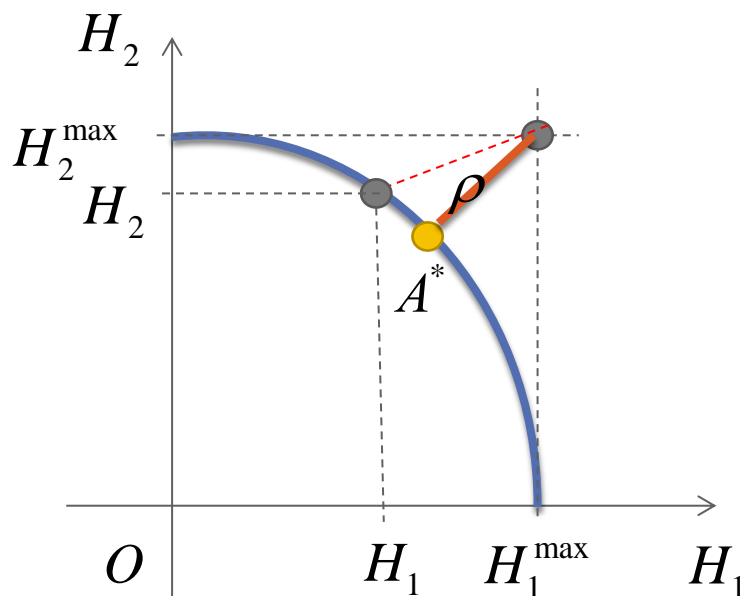


# Минимизация расстояния до «утопической точки»

**Утопическая точка** - это точка  $(H_1^{\max}, H_2^{\max}, \dots, H_r^{\max})$ , где все критерии одновременно достигают своего максимума.

Расстояние от векторной оценки произвольной допустимой точки до утопической:

$$\rho^2 = (H_1(x) - H_1^{\max})^2 + (H_2(x) - H_2^{\max})^2$$



$$\rho^2 = (H_1(x) - H_1^{\max})^2 + (H_2(x) - H_2^{\max})^2 \rightarrow \min$$
$$x \in D_x$$

# Теорема (о существовании решения через утопическую точку)

Если множество допустимых решений в задаче многокритериальной оптимизации является выпуклым и замкнутым, то существует единственное решение, минимизирующее расстояние до утопической точки.

# Пример. Фирма Chemco

Химическая компания «Chemco» планирует выпуск трёх видов продукции.

	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3	ЗАПАС ресурсов
Прибыль	\$10	\$9	\$8	-
Временные затраты	4 ч	3 ч	2 ч	1 300 ч
Затраты ресурса	3 ед.	2 ед.	3 ед.	1 000 ед.
Загрязнение	10 ед.	6 ед.	3 ед.	-

Фирма «Chemco» ставит две цели:

1. Максимизировать прибыль.
2. Минимизировать загрязнение окружающей среды.

# Математическая модель. Chemco

	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3	ЗАПАС ресурсов
Прибыль	\$10	\$9	\$8	-
Временные затраты	4 ч	3 ч	2 ч	1 300 ч
Затраты ресурса	3 ед.	2 ед.	3 ед.	1 000 ед.
Загрязнение	10 ед.	6 ед.	3 ед.	-

Фирма «Chemco» ставит две цели:

1. Максимизировать прибыль.
2. Минимизировать загрязнение окружающей среды.

$x_j$  – объём продукта  $j$ , выпускаемый в плановый период,  $j = 1, 2, 3$ .

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

Цель 1:  $H_1(x) = 10x_1 + 9x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$  – суммарная прибыль

Цель 2:  $\bar{H}_2(x) = 10x_1 + 6x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$  – суммарное загрязнение

Ограничения:

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1300$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1000$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

# Chemco. Математическая модель

$$\max H_1(x) = \max(10x_1 + 9x_2 + 8x_3)$$

$$\min \bar{H}_2(x) = \min(10x_1 + 6x_2 + 3x_3)$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1300$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1000$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$



$$\max H_1(x) = \max(10x_1 + 9x_2 + 8x_3)$$

$$\max H_2(x) = \max(-(10x_1 + 6x_2 + 3x_3))$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1300$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1000$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$



# Оптимизация по первой цели

Оптимальное решение в задаче максимизации прибыли:

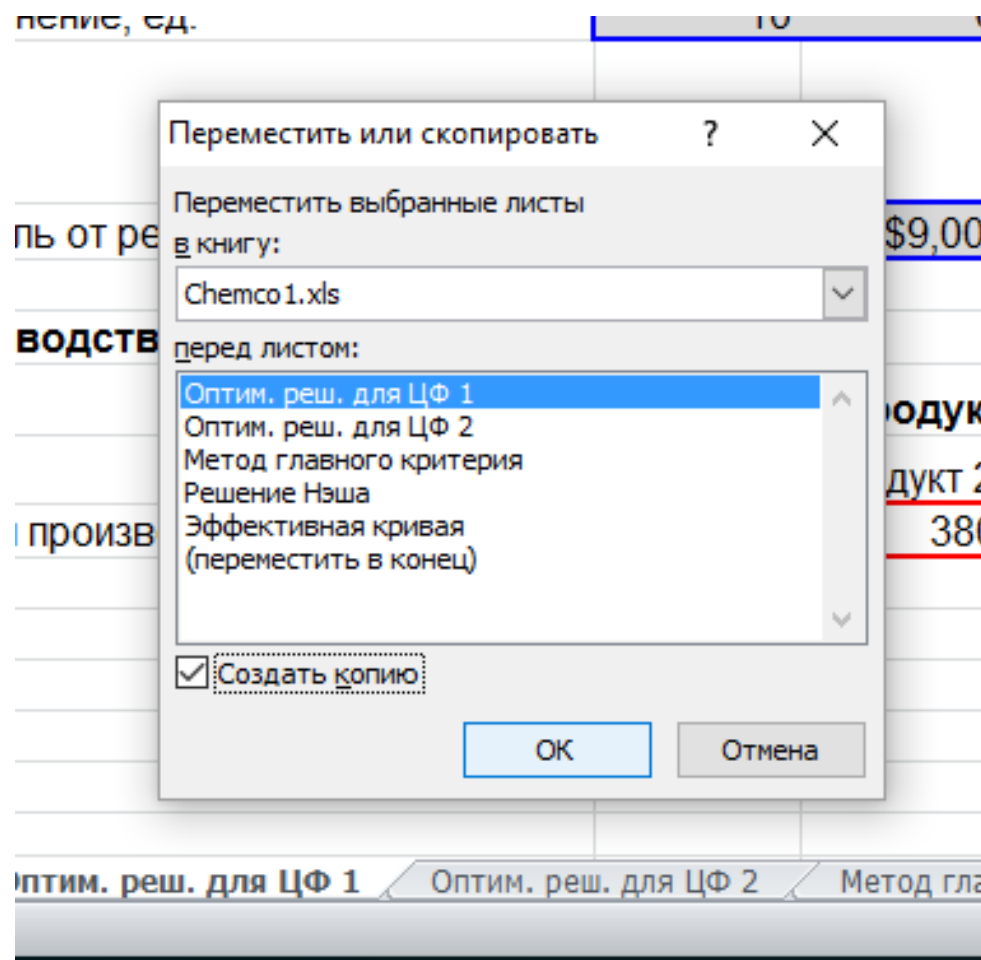
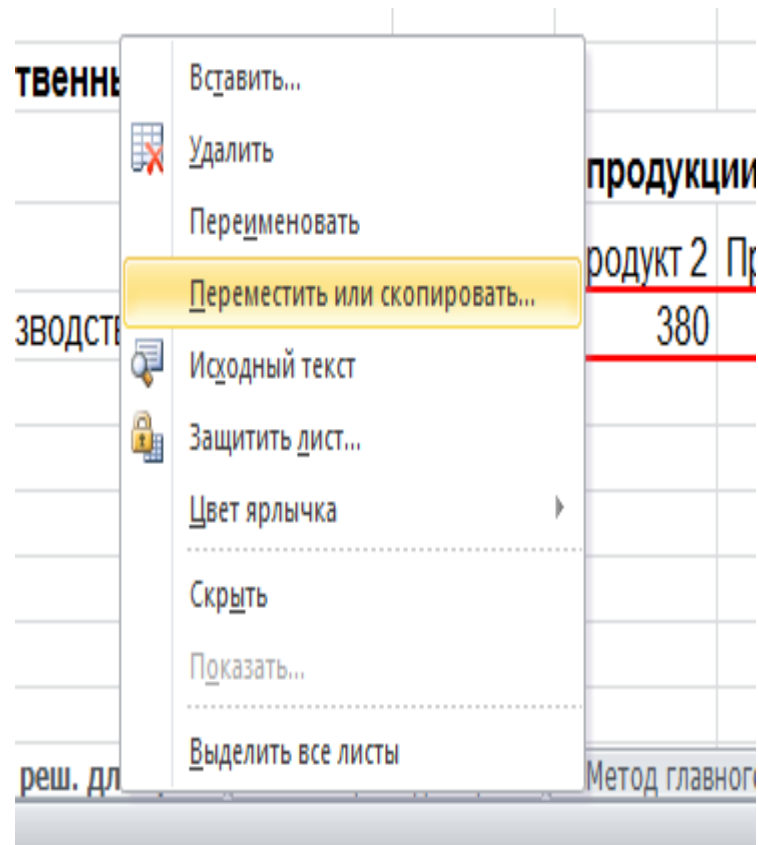
$$\begin{aligned} \max H_1(x) &= \max (10x_1 + 9x_2 + 8x_3) \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 1300 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 1000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

## Входные данные

Ресурсы	Вид продукции			Всего затрачено		Всего доступно
	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3			
Временные затраты, ч	4	3	2	1300	<=	1300
Затраты ресурса, ед.	3	2	3	1000	<=	1000
Загрязнение, ед.	10	6	3	2520		
Прибыль от реализации ед. изделия	\$10,00	\$9,00	\$8,00			Суммарная прибыль \$4 060,00

## Производственный план

	Вид продукции		
	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3
Объем производства	0	380	80



# Оптимизация по второй цели

Оптимальное решение в задаче минимизации суммарного загрязнения

$$\begin{aligned} \max(-H_2(x)) &= \max(-(10x_1 + 6x_2 + 3x_3)) \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 1300 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 1000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

## Входные данные

Ресурсы	Вид продукции			Всего затрачено		Всего доступно		Суммарная прибыль	Суммарное загрязнение (обратная функция)
	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3						
Временные затраты, ч	4	3	2	0	<=	1300			
Затраты ресурса, ед.	3	2	3	0	<=	1000			
Загрязнение, ед.	10	6	3	0					
Прибыль от реализации ед. издег	\$10,00	\$9,00	\$8,00			\$0,00			0

## Производственный план

	Вид продукции		
	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3
Объем производства	0	0	0



# Chemco. Выбор точки SQ

Ресурсы	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3	Всего затрачено		Всего доступно	
Временные затраты, ч	4	3	2	860	<=	1300	
Затраты ресурса, ед.	3	2	3	615	<=	1000	
Загрязнение, ед.	10	6	3	1915			
Прибыль от реализации ед. издег	\$10,00	\$9,00	\$8,00			Суммарная прибыль	Суммарное загрязнение (обратная функция)
						\$2 390,00	-1915
<b>Производственный план</b>							
	Вид продукции						
	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3				
Объем производства	100	150	5				

Точка SQ: (2390; –1915)

# Chemco. Метод главного критерия. Главный критерий - первый

$$\begin{aligned}\max H_1(x) &= \max (10x_1 + 9x_2 + 8x_3) \\ \max H_2(x) &= \max (-(10x_1 + 6x_2 + 3x_3)) \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 1300 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 1000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

Точка SQ: (2390; -1915)

$$\begin{aligned}\max H_1(x) &= \max (10x_1 + 9x_2 + 8x_3) \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 1300 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 1000 \\ -(10x_1 + 6x_2 + 3x_3) &\geq -1915 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

Арбитражное решение в задаче МКО по методу главного критерия.  
Главный критерий - ПЕРВЫЙ. Точка "статус-кво": (2390, -1915)

$$\begin{aligned} \max H_1(x) &= \max (10x_1 + 9x_2 + 8x_3) \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 1300 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 1000 \\ -10x_1 - 6x_2 - 3x_3 &\geq -1915 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

<b>Входные данные</b>					
<b>Ресурсы</b>	<b>Вид продукции</b>				
	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3	Всего затрачено	Всего доступно
Временные затраты, ч	4	3	2	1047,91667	1300
Затраты ресурса, ед.	3	2	3	1000	1000
Загрязнение, ед.	10	6	3	1915	
Прибыль от реализации ед. издег	\$10,00	\$9,00	\$8,00	Суммарная прибыль	Суммарное загрязнение (обратная функция)
				\$3 505,42	-1915
<b>Производственный план</b>					
Объем производства	<b>Вид продукции</b>				
	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3		
	0	228,75	180,8333		

"SQ" -1915

# «Chemco».

## Эффективная граница

$\max H_1$	4060		$\min H_1$	0
$\min H_2$	-2520		$\max H_2$	0

$$\Delta = \frac{\max H_2 - \min H_2}{10} = \frac{2520}{10} = 252$$

$$\max H_1(x) = \max (10x_1 + 9x_2 + 8x_3)$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1300$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1000$$

$$-10x_1 - 6x_2 - 3x_3 \geq k \cdot (-\Delta), k = 0, \dots, 10$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

# «Chemco».

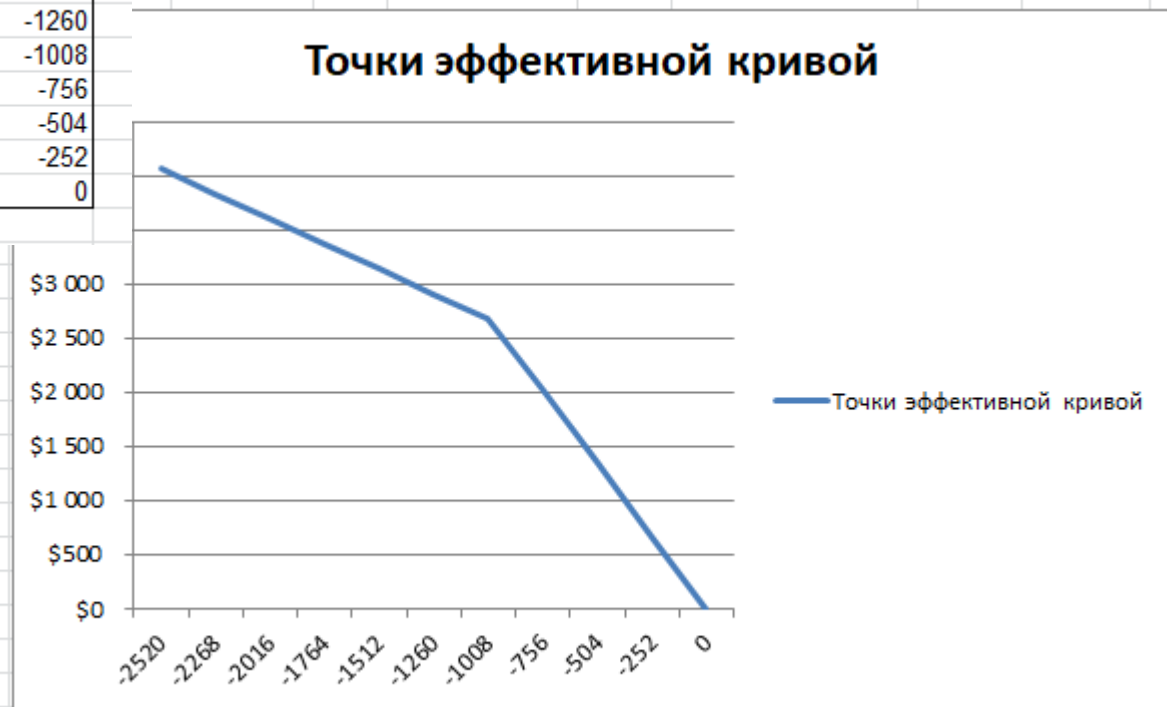
## Эффективная граница

<b>Входные данные</b>						
	<b>Вид продукции</b>					
<b>Ресурсы</b>	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3	Всего затраче		Всего доступно
Временные затраты, ч	4	3	2	168	<=	1300
Затраты ресурса, ед.	3	2	3	252	<=	1000
Загрязнение, ед.	10	6	3	252		
					Суммарная прибыль	Суммарное загрязнение (обратная функция)
Прибыль от реализации ед. издег	\$10,00	\$9,00	\$8,00		\$672,00	-252
						>=
<b>Производственный план</b>					$k \cdot \Delta$	-252
	<b>Вид продукции</b>					
	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3			
Объем производства	0	0	84			

# «Chemco».

## Эффективная граница

Точки эффективной кривой		
	Прибыль	Уровень загрязнения
1	\$4 060	-2520
2	\$3 829	-2268
3	\$3 598	-2016
4	\$3 367	-1764
5	\$3 136	-1512
6	\$2 905	-1260
7	\$2 674	-1008
8	\$2 016	-756
9	\$1 344	-504
0	\$672	-252
1	\$0	0



# Chemco. Арбитражное решение Нэша

$$\max H_1(x) = \max (10x_1 + 9x_2 + 8x_3)$$

$$\max H_2(x) = \max (-(10x_1 + 6x_2 + 3x_3))$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1300$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1000$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Точка SQ: (2390; -1915)

$$\max H^N(x) = \max (10x_1 + 9x_2 + 8x_3 - 2390)(-10x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 1915)$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1300$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1000$$

$$10x_1 + 9x_2 + 8x_3 \geq 2390$$

$$-10x_1 - 6x_2 - 3x_3 \geq -1915$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

# «Chemco».

## Арбитражное решение Нэша

$$\begin{aligned} \max H^N(x) &= \max (10x_1 + 9x_2 + 8x_3 - 2390)(-10x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 1915) \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 1300 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 1000 \\ 10x_1 + 9x_2 + 8x_3 &\geq 2390 \\ -10x_1 - 6x_2 - 3x_3 &\geq -1915 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

<b>Входные данные</b>									
<b>Ресурсы</b>	<b>Вид продукции</b>			Всего затрачено			Всего доступно		
	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3						
Временные затраты, ч	4	3	2	861,45243	<=		1300		
Затраты ресурса, ед.	3	2	3	1000	<=		1000		
Загрязнение, ед.	10	6	3	1467,4858					
							Суммарное загрязнение (обратная функция)		Функция Нэша
Прибыль от реализации ед. изделия	\$10,00	\$9,00	\$8,00				3095,1954	-1467,485837	3095,2
							>=	>=	
<b>Производственный план</b>							"SQ" 2390	-1915	
	<b>Вид продукции</b>								
	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3						
Объем производства	0	116,8715	255,419						



# Минимизация расстояния до «утопической точки»

$$\min \rho^2(x) = \min (10x_1 + 9x_2 + 8x_3 - 4060)^2 + (-10x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 0)^2$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1300$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1000$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Ресурсы	Вид продукции			Всего затрачено		Всего доступно			
	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3						
Временные затраты, ч	4	3	2	729,43397	<=	1300			
Затраты ресурса, ед.	3	2	3	1000	<=	1000			
Загрязнение, ед.	10	6	3	1150,6415					
Прибыль от реализации ед. изделия	\$10,00	\$9,00	\$8,00			Суммарная прибыль	Суммарное загрязнение (обратная функция)	Расстояние до утопической точки	
						2804,7547	-1150,641524	2899616,615	
Производственный план				Утопическая точка	>=	4060	>=	0	
	Вид продукции								
	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3						
Объем производства	0	37,66038	308,2264	Решение методом минимизации расстояния до утопической точки					

# Chemco. Сравнение решений

Решение	$x_1^*$	$x_2^*$	$x_3^*$	Максим. прибыль (ЦФ1)	Сумм. загрязнение (ЦФ2)
Оптим. для ЦФ1	0	380	80	4060	2520
Оптим. для ЦФ2	0	0	0	0	0
<i>Точка SQ</i>	–	–	–	<i>2390</i>	<i>1915</i>
Метода главного критерия (главный – первый)	0	228,75	180,83	3505,42	1915
Арбитражное решение Нэша	0	116,87	266,42	3095,20	1467,49
Минимизация расстояния до утопической точки	0	37,66	308,23	2804,75	1150,64

# Лабораторная работа 3

- СРОК СДАЧИ без потери баллов:

*Группа 4931: 24.11.2021*

*Группа 4932: 24.11.2021*

*Группа 4933: 26.11.2021*

*Группа 4936: 26.11.2021*

- Задачи к ЛР № 3 – задачи к ЛР № 1, в которых добавлены новые цели.
- Критериев три, но решения аналогичны рассмотренным.