Прикладные модели оптимизации

Доцент, к.ф.-м.н., доцент кафедры № 43

Фаттахова Мария Владимировна

mvfa@yandex.ru

Тема 5. Принятие решений в условиях неопределённости и риска

Лекция 14

Пример. Проблема студента Василия

Альтернативы:

a1 – участвовать в вечеринке всю ночь,

a2 – половину ночи участвовать в вечеринке, а половину - учиться,

a3 – учиться всю ночь.

Экзамен: ***s1*** – лёгкий,

s2 – средний,

s3 – трудный.

Экзаменационные баллы (из 100 возможных):

	s1	s2	s3
a1	85	60	40
a2	92	85	81
a3	100	88	82

Задачи принятия решений в условиях неопределённости (УН)

– это задачи принятия решений, в которых влияние внешней среды учитывается, но вероятность реализации ее состояний **неизвестна** и **не может быть оценена**.

Решения ЛПР	**Состояния среды**			
	s_1	s_2	…	s_n
d_1	$h(d_1,s_1)$	$h(d_1,s_2)$	…	$h(d_1,s_n)$
d_2	$h(d_2,s_1)$	$h(d_2,s_2)$	…	$h(d_2,s_n)$
…	…	…	…	…
d_m	$h(d_m,s_1)$	$h(d_m,s_2)$	…	$h(d_m,s_n)$

Принятие решений в условиях неопределенности

d – возможное решение

s – состояние внешнего фактора

$h(d, s)$ – полезность решения d при условии, что реализовалось состояние внешнего фактора s.

$$\max_{d} h(d, s)$$

Критерий «осторожного наблюдателя» (Критерий *Вальда*)

Предположение. *Среда всегда наихудшим образом влияет на исход любого решения.*

$$\max_d \min_s h(d,s) = \min_s h(d_0, s)$$

d_0 – *стратегия осторожного наблюдателя.*

(Максиминная стратегия)

Исходные данные в задаче принятия решений в УН

Решения ЛПР	Состояния среды				$\min_s h(d,s)$
	s_1	s_2	…	s_n	
d_1	$h(d_1,s_1)$	$h(d_1,s_2)$	…	$h(d_1,s_n)$	$h(d_1,s_{j_1})$
d_2	$h(d_2,s_1)$	$h(d_2,s_2)$	…	$h(d_2,s_n)$	$h(d_2,s_{j_2})$
…	…	…	…	…	…
d_m	$h(d_m,s_1)$	$h(d_m,s_2)$	…	$h(d_m,s_n)$	$h(d_m,s_{j_m})$

$$d_0 : \quad \max_{d_i} \min_{s_j} h(d_i, s_j)$$

Пример. Проблема студента Василия

Решения ЛПР	Состояния среды			$\min_s h(d,s)$
	s_1 – лёгк. экз.	***s_2 – средн. экз.***	***s_3 – трудн. экз.***	
a_1 – вечеринка всю ночь	85	60	40	40
a_2 – вечеринка полночи	92	85	81	81
a_3 – учиться всю ночь	100	88	82	82 $= \max_{a_i} \min_{s_j} h(a_i, s_j)$

Стратегия осторожного наблюдателя: учиться всю ночь.

Критерий «здорового оптимиста»

Предположение. *Среда всегда наилучшим образом влияет на исход любого решения.*

$$\max_d \max_s h(d,s) = \max_s h(d_1,s)$$

d_1 – *стратегия здорового оптимиста.*

Пример. Проблема студента Василия

Решения ЛПР	Состояния среды			$\max\limits_{s} h(d,s)$
	s_1 – лёгк. экз.	s_2 – средн. экз.	s_3 – трудн. экз.	
a_1 – вечеринка всю ночь	85	60	40	85
a_2 – вечеринка полночи	92	85	81	92
a_3 – учиться всю ночь	100	88	82	100

$$= \max_{a_i} \max_{s_j} h(a_i, s_j)$$

<u>Стратегия здорового оптимиста</u>: учиться всю ночь.

Критерий «здорового оптимиста»

Обозначим

$$\beta = \max_d \min_s h(d,s)$$ *– критерий осторожного наблюдателя*

$$\gamma = \max_d \max_s h(d,s)$$ *– критерий здорового оптимиста*

$$\gamma - \beta$$

характеризует ***уровень неопределенности*** в задаче.

$$\beta \le h(d,s) \le \gamma$$

Пример. Проблема студента Василия

Решения ЛПР	Состояния среды		
	s_1 – лёгк. экз.	***s_2 – средн. экз.***	***s_3 – трудн. экз.***
a_1 – вечеринка всю ночь	85	60	40
a_2 – вечеринка полночи	92	85	81
a_3 – учиться всю ночь	100	88	82

$$\beta = \max_d \min_s h(d,s) = 82$$

$$\gamma = \max_d \max_s h(d,s) = 100 \qquad \boxed{100 - 82 = 18}$$

Уровень неопределённости в задаче – 18 баллов.

Критерий Гурвица

Предположение. *Среда наилучшим образом влияет на исход любого решения с вероятностью* $\boldsymbol{\alpha}$ *и наихудшим образом с вероятностью* $(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})$.

$\alpha \in [0,1]$ – *субъективная вероятность*

Критерий Гурвица

Ожидаемая полезность решения d при уровне субъективной вероятности α:

$$H_\alpha(d) = \alpha \max_s h(d,s) + (1-\alpha) \min_s h(d,s)$$

$$\max_d H_\alpha(d) = H_\alpha(d_a)$$

d_α – *решение по критерию Гурвица при уровне субъективной вероятности* α

Пример. Пессимистическое решение

Решения ЛПР	Состояния среды			$\min\limits_s h(d,s)$	$\max\limits_s h(d,s)$
	s_1 – лёгк. экз.	***s_2 – средн. экз.***	***s_3 – трудн. экз.***		
a_1 – вечеринка всю ночь	85	60	40	40	85
a_2 – вечеринка полночи	92	85	81	81	92
a_3 – учиться всю ночь	100	88	82	82	100

$\alpha = 0{,}1$

$$H_{0,1}(d) = 0{,}1 \cdot \max_s h(d,s) + (1-0{,}1)\min_s h(d,s)$$

$$H_{0,1}(a_1) = 0{,}1 \cdot 85 + 0{,}9 \cdot 40 = 44{,}5$$

$$H_{0,1}(a_2) = 0{,}1 \cdot 92 + 0{,}9 \cdot 81 = 82{,}1$$

$$H_{0,1}(a_3) = 0{,}1 \cdot 100 + 0{,}9 \cdot 82 = 83{,}8 = \max_d H_{0,1}(d)$$

Критерий Гурвица при субъективной вероятности 0,1: ***учиться всю ночь.***

Пример. Оптимистическое решение

Решения ЛПР	Состояния среды			$\min_s h(d,s)$	$\max_s h(d,s)$
	s_1 – лёгк. экз.	***s_2 – средн. экз.***	***s_3 – трудн. экз.***		
a_1 – вечеринка всю ночь	85	60	40	40	85
a_2 – вечеринка полночи	92	85	81	81	92
a_3 – учиться всю ночь	100	88	82	82	100

$\alpha = 0,8$

$$H_{0,8}(d) = 0,8 \cdot \max_s h(d,s) + 0,2 \cdot \min_s h(d,s)$$

$$H_{0,8}(a_1) = 0,8 \cdot 85 + 0,2 \cdot 40 = 76$$

$$H_{0,8}(a_2) = 0,8 \cdot 92 + 0,2 \cdot 81 = 89,8$$

$$H_{0,8}(a_3) = 0,8 \cdot 100 + 0,2 \cdot 82 = 96,4 = \max_d H_{0,8}(d)$$

***Критерий Гурвица при субъективной вероятности 0,8:* учиться всю ночь.**

Пример. Реалистическое решение

Решения ЛПР	Состояния среды			$\min\limits_s h(d,s)$	$\max\limits_s h(d,s)$
	s_1 – лёгк. экз.	***s_2 – средн. экз.***	***s_3 – трудн. экз.***		
a_1 – вечеринка всю ночь	85	60	40	40	85
a_2 – вечеринка полночи	92	85	81	81	92
a_3 – учиться всю ночь	100	88	82	82	100

$\alpha = 0,5$

$$H_{0,5}(d) = 0,5 \cdot \max_s h(d,s) + 0,5 \cdot \min_s h(d,s)$$

$$H_{0,5}(a_1) = 0,5 \cdot 85 + 0,5 \cdot 40 = 62,5$$

$$H_{0,5}(a_2) = 0,5 \cdot 92 + 0,5 \cdot 81 = 86,5$$

$$H_{0,5}(a_3) = 0,5 \cdot 100 + 0,5 \cdot 82 = 91 \quad = \max_d H_{0,5}(d)$$

Критерий Гурвица при субъективной вероятности 0,5: учиться всю ночь.

Критерий Лапласа

<u>Предположение</u>. *Внешний фактор s является случайной величиной, распределенной по равномерному закону.*

Пусть множество состояний среды конечно:

$$S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}; \quad P\{s_j\} = \frac{1}{n}, \ j = 1, ..., n$$

Ожидаемая полезность решения d в предположениях Лапласа:

$$H_l(d) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h\left(d, s_j\right)$$

Критерий Лапласа

$$\max_{d} H_l(d) = H_l(d_l)$$

d_l – оптимальное решение по критерию Лапласа

Пример

$$H_l(d)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}h\left(d,s_j\right)$$

Решения ЛПР	**Состояния среды**		
	s_1 – лёгк. экз.	***s_2 – средн. экз.***	***s_3 – трудн. экз.***
a_1 – вечеринка всю ночь	85	60	40
a_2 – вечеринка полночи	92	85	81
a_3 – учиться всю ночь	100	88	82

$$H_l(a_1)=\frac{1}{3}\left(85+60+40\right)=61,67$$

$$H_l(a_2)=\frac{1}{3}\left(92+85+81\right)=86$$

$$H_l(a_3)=\frac{1}{3}\left(100+88+82\right)=90$$

Решение по критерию Лапласа: учиться всю ночь.

Критерий Сэвиджа

Предположение. *Среда всегда наихудшим образом влияет на исход любого решения в соответствии с функцией Сэвиджа*

$$h_s = \max_d h(d, s)$$

$$\boxed{H^c(d, s) = [h(d, s) - h_s]}$$

– функция Сэвиджа (функция «сожаления»)

$$H^c(d, s) \le 0$$

Критерий Сэвиджа

$$\max_d \min_s H^c(d,s) = \min_s H^c(d_c,s)$$

d_c – *оптимальное решение по критерию Сэвиджа*

Пример

$$H^c(d,s) = [h(d,s) - h_s]$$

Решения ЛПР	Состояния среды		
	s_1 – *лёгк. экз.*	s_2 – *средн. экз.*	s_3 – *трудн. экз.*
a_1 – *вечеринка всю ночь*	85	60	40
a_2 – *вечеринка полночи*	92	85	81
a_3 – *учиться всю ночь*	100	88	82
$h_s = \max_d h(d,s)$	100	88	82

Функция Сэвиджа:

	s1	*s2*	*s3*
a1	-15	-28	-42
a2	-8	-3	-1
a3	0	0	0

Замечания

1. Рассмотренный пример – удивительное  исключение из правил: обычно, различные критерии дают различные решения. Иногда – прямо противоположные.
2. Для решения задачи принятия решения в условиях неопределённости ЛПР выбирает критерий, наиболее подходящий именно ему.
3. В случае применения критерия Гурвица, как правило рассматривают три различных варианта решения: оптимистичный, пессимистичный и реалистичный. А далее ЛПР определяет свой собственный настрой и ориентируется на него.
4. При большом уровне неопределённости, как правило, привлекают команду экспертов и переводят задачу в разряд задач принятия решений в условиях риска.

Домашнее задание № 5

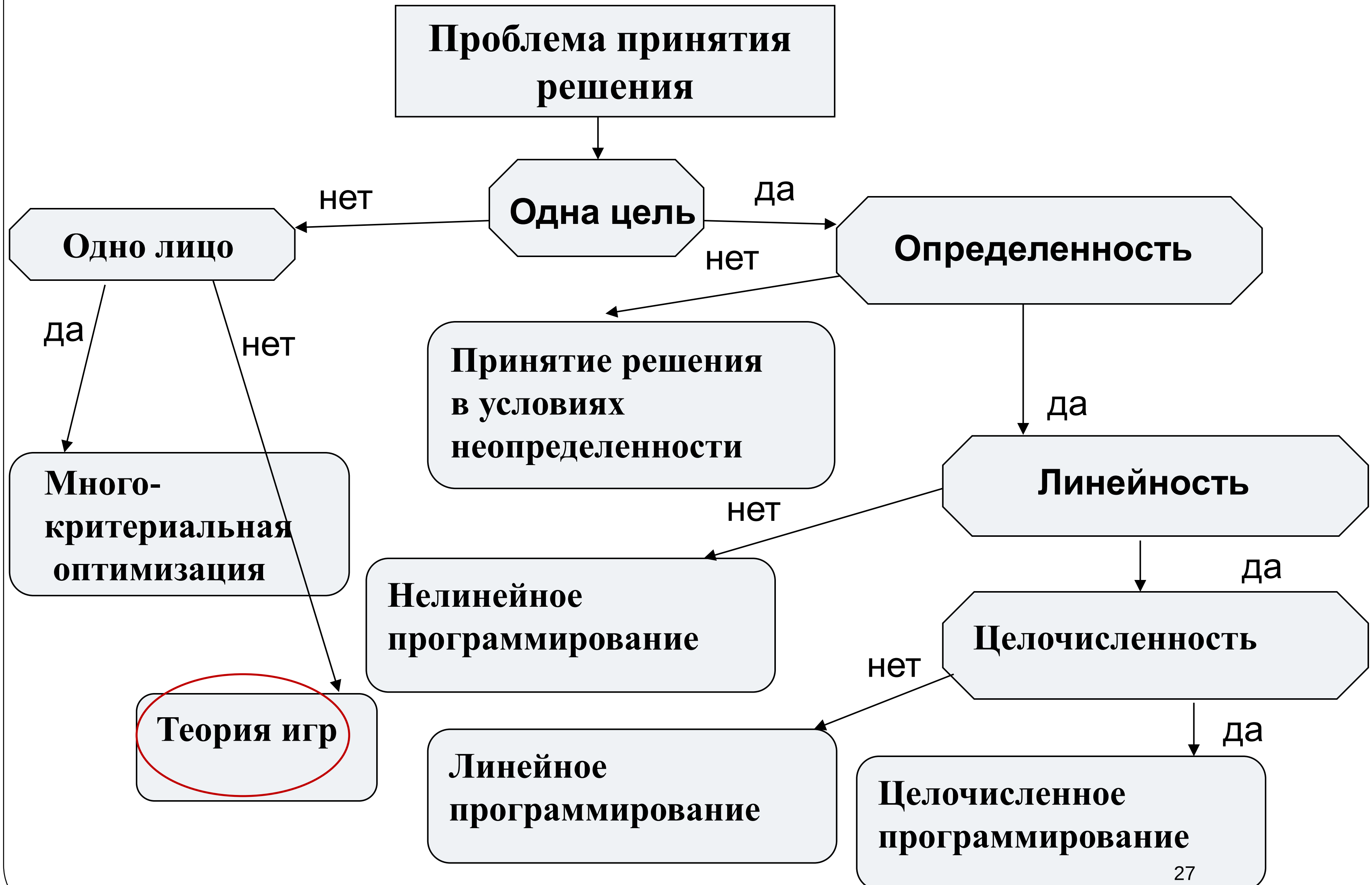
Решите задачу принятия решений в условиях неопределённости, используя все известные Вам критерии.

Решение – фотографию - прислать по почте.

СРОК: 08.12.2021

Тема 6. Матричные игры

Структура методов принятия решений



Теория игр

– это теория математических моделей принятия решений в условиях конфликта сторон (участников), где конфликт понимается самым широким образом: каждый участник имеет свои цели и влияет на исход.

Джон Фон Нейман, Оскар Моргенштерн

«*Теория игр и экономическое поведение*» – 1944 г.

Игра

– *математическая модель ситуации,* характеризующаяся следующими признаками:

1) 2 и более участников;
2) неопределённость поведения;
3) несовпадение интересов;
4) взаимосвязанность поведения;
5) правила поведения известны всем участникам.

Вопросы теории игр

- Как описать игрой конкретную модель конфликта?
- Что следует понимать под оптимальным решением игры?

Матричные игры

1. 2 лица;
2. каждый участник имеет конечное число альтернатив;
3. интересы игроков противоположны (выигрыш первого игрока равен проигрышу второго).

Понятие матричной игры

Матричная игра – это набор объектов:

$$\varGamma = \langle M, N, A \rangle$$

где

M = {1,2,…*m*} – ***множество стратегий*** первого игрока;

N = {1,2,…*n*} – ***множество стратегий*** второго игрока;

A – ***«платежная матрица»*** – матрица выигрышей первого игрока (проигрышей второго).

Платежная матрица

(i, j) – ***ситуация в игре*** (пара стратегий);

A= $\{a_{ij}\}$: a_{ij} – ***выигрыш*** **первого** игрока (***проигрыш*** второго игрока) в ситуации (i, j).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Реализация матричной игры

Игрок 2

Стратегии

2 игрока

Игрок 1

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & n \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \ldots \\ m \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Стратегии

1 игрока

$$(i, j) \Rightarrow a_{ij} :$$

– Выигрыш 1 игрока

– (Проигрыш 2-го)

Пример. *Камень, ножницы, бумага*

Игрок 2

Игрок 1

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} К & Н & Б \end{array} \\ \begin{array}{c} К \\ Н \\ Б \end{array} & \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \end{array}$$

Пример. *Камень, ножницы, бумага*

Игрок 2

Игрок 1

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} К & Н & Б \end{array} \\ \begin{array}{c} К \\ Н \\ Б \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \end{array}$$

Пример. *Камень, ножницы, бумага*

Игрок 2

Игрок 1

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} К & Н & Б \end{array} \\ \begin{array}{c} К \\ Н \\ Б \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \end{array}$$

Пример. *Камень, ножницы, бумага*

Игрок 2

Игрок 1

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} К & Н & Б \end{array} \\ \begin{array}{c} К \\ Н \\ Б \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \end{array}$$

Пример. *Камень, ножницы, бумага*

Игрок 2

Игрок 1

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \quad K & \quad H & \quad Б \end{array} \\
\begin{array}{c} K \\ H \\ Б \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Пример. *Продажа лекарств*

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	-2	9	-3
A_2	6	5	6	8
A_3	-2	4	-9	5

A_1, A_2 и A_3 – стратегии компании А:

A_1 – рекламировать товар по телевидению,

A_2 – рекламировать товар по радио,

A_3 – рекламировать товар в газетах.

B_1, B_2, B_3 и B_4 – стратегии компании В:

B_1 – рекламировать товар по телевидению,

B_2 – рекламировать товар по радио,

B_3 – рекламировать товар в газетах,

B_4 – рассылка по почте.