Прикладные модели оптимизации

Доцент, к.ф.-м.н., доцент кафедры № 43

Фаттахова Мария Владимировна

mvfa@yandex.ru

Тема 7. Матричные игры

Лекция 15

Решение матричных игр [2x2]

Решите матричную игру: $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Проверка наличия седловой точки

$\underline{v} = 2$

$\overline{v} = 3$

$\underline{v} \neq \overline{v} \Rightarrow$

Седловая точка в матричной игре НЕ существует

$\boxed{2 \le v \le 3}$

Решение матричных игр [2x2]

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}} \qquad \left.\begin{aligned} \underline{v} &= 2 \\ \overline{v} &= 3 \end{aligned}\right\} \quad \underline{v} \neq \overline{v} \Rightarrow$$ Седловой точки нет

***Игрок 1*:** $\quad x = (\xi_1, \xi_2) = (\xi, 1-\xi)$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ \xi & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$}} \\ 1-\xi & & \end{array}}$$

$$K(x,1) = 4\cdot\xi + 2\cdot(1-\xi)$$

$$K(x,2) = 0\cdot\xi + 3\cdot(1-\xi)$$

$$4\cdot\xi + 2\cdot(1-\xi) = 0\cdot\xi + 3\cdot(1-\xi) \Leftrightarrow \xi^* = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \quad x^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Решение матричных игр [2x2]

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{v} &= 2 \\ \overline{v} &= 3 \end{aligned}\right\} \quad \underline{v} \neq \overline{v} \Rightarrow \quad \text{Седловой точки нет}$$

$$\textbf{\textit{Игрок 2}}\textbf{:}\; y = (\eta, 1-\eta)$$

$$\begin{array}{ccc} & \eta & 1-\eta \\ 1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$}} \\ 2 & & \end{array}$$

$$K(1,y) = 4\cdot\eta + 0\cdot(1-\eta)$$

$$K(2,y) = 2\cdot\eta + 3\cdot(1-\eta)$$

$$4\cdot\eta + 0\cdot(1-\eta) = 2\cdot\eta + 3\cdot(1-\eta) \Leftrightarrow \eta^* = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow y^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Решение игры

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad x^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right) \qquad y^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) \Rightarrow \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \\ \begin{array}{c} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow K(x^*, y^*) = 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{60}{25} = \frac{12}{5}$$

Ответ:

Оптимальные стратегии игроков: $x^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right); \quad y^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$

Значение игры:

$$K(x^*, y^*) = \frac{12}{5}$$

Домашнее задание 6

Решить матричную игру.

Не забудьте проверить игру на наличие седловой точки и выписать ответ!

Решение – на листочке или по почте.

СРОК: 22.12.2021

Решение игры [mxn]. Сведение матричной игры к ЗЛП

- Матричная игра $\Gamma = \langle M, N, A \rangle$:

$$A = \{a_{ij}\} : a_{ij} > 0,$$
$$i = 1, \ldots, m,$$
$$j = 1, \ldots, n.$$

Седловой точки нет

Обозначим через

$x = (\xi_1, \ldots, \xi_m) -$ **смешанную стратегию** *игрока* 1

$y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) -$ **смешанную стратегию** *игрока* 2

V — *искомая цена игры*

Пусть ***игрок 1*** применяет смешанную стратегию x против чистой стратегии j ***игрока 2:***

Чистые стратегии *игрока 2*:

Смешанная стратегия *игрока 1*:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{\mathrm{m}} \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Выигрыш игрока 1 должен быть не меньше, чем v.

Имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{m1}\xi_m \geq v \\ a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{m2}\xi_m \geq v \\ \vdots \\ a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \ldots + a_{mn}\xi_m \geq v \end{cases}$$

Разделим обе части на

$$v > 0$$

и введем обозначение:

$$p_i = \frac{\xi_i}{v}$$

$\Rightarrow$ Система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \geq 1 \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \geq 1 \\ \vdots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \geq 1 \end{cases}$$

(*Система ограничений ЗЛП*)

(*Переменные ЗЛП*)

$$p_i = \frac{\xi_i}{v}, i = 1, \ldots, m, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi_i = v \cdot p_i, i = 1, \ldots, m.$$

По свойству вероятностей:

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} v \cdot p_i = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} p_i = \frac{1}{v}$$

Игрок 1 максимизирует свой выигрыш $\Rightarrow$

стремиться максимизировать цену игры, т.е.

$$v \to \max \Rightarrow \frac{1}{v} \to \min$$

Целевая функция:

$$\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{m} p_i \to \min$$

Задача линейного программирования

Переменные решения:

$$p_i = \frac{\xi_i}{v}, i = 1, \dots, m,$$

Целевая функция:

$$L = \sum_{i=1}^{m} p_i \to \min$$

Ограничения:

$$\begin{cases} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + \dots + a_{m1} p_m \geq 1 \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + \dots + a_{m2} p_m \geq 1 \\ \vdots \\ a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + \dots + a_{mn} p_m \geq 1 \end{cases}$$

Условие неотрицательности

$$p_i \geq 0,$$
$$i = 1, \dots, m.$$

Пусть ***игрок 2*** применяет смешанную стратегию y против чистой стратегии i ***игрока 1:***

Смешанная стратегия *игрока 2*:

Чистые стратегии *игрока 1*:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_n \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

***Проигрыш игрока 2 должен быть не больше, чем v*.**

Имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \ldots + a_{1n}\eta_n \le v \\ a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + \ldots + a_{2n}\eta_n \le v \\ \vdots \\ a_{m1}\eta_1 + a_{m2}\eta_2 + \ldots + a_{mn}\eta_n \le v \end{cases}$$

Разделим обе части на

$$v > 0$$

и введем обозначение:

$$q_j = \frac{\eta_j}{v}$$

$\Rightarrow$ Система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \le 1 \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \le 1 \\ \vdots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \le 1 \end{cases}$$

(*Система ограничений ЗЛП*)

(*Переменные ЗЛП*)

$$q_j = \frac{\eta_j}{v}, \; j = 1, \ldots, n, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta_j = v \cdot q_j, \; j = 1, \ldots, n.$$

По свойству вероятностей:

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j = 1 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} v \cdot q_j = 1 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} q_j = \frac{1}{v}$$

Игрок *2* минимизирует свой проигрыш $\Rightarrow$

стремиться минимизировать цену игры, т.е.

$$v \to \min \Rightarrow \frac{1}{v} \to \max$$

Целевая функция:

$$\frac{1}{v} = \sum_{j=1}^{n} q_j \to \max$$

Задача линейного программирования

Переменные решения:

$$q_j = \frac{\eta_j}{v},\ j = 1,\ldots,n$$

Целевая функция:

$$W = \sum_{j=1}^{n} q_j \to \max,$$

Ограничения:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \le 1 \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \le 1 \\ \vdots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \le 1 \end{cases}$$

Условие неотрицательности

$$q_j \ge 0,$$

$$j = 1,\ldots,n.$$

Пара двойственных ЗЛП

$$L = \sum_{i=1}^{m} p_i \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq 1, \quad j = 1,\ldots,n,$$

$$p_i \geq 0, \ i = 1,\ldots, m.$$

где $p_i = \dfrac{\xi_i}{v},$

а $v = \dfrac{1}{L_{\min}} \left(= \dfrac{1}{W_{\max}} \right)$

$$W = \sum_{j=1}^{n} q_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq 1, \quad i = 1,\ldots,m,$$

$$q_j \geq 0, \ j = 1,\ldots, n.$$

где $q_j = \dfrac{\eta_j}{v}$

а $v = \dfrac{1}{W_{\max}} \left(= \dfrac{1}{L_{\min}} \right)$

Решение матричных игр с помощью ЛП

1. Проверка на наличие *седловой точки*. (Если есть – игра решается в чистых стратегиях.)
2. Если **не все** элементы платежной матрицы *положительны*, прибавим ко всем элементам константу:

$$M > \max_{i,j} |a_{ij}|$$

(при этом ***v* *тоже возрастет*** на M)

3. Решение пары двойственных ЗЛП:

$$L = \sum_{i=1}^{m} p_i \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq 1, \quad j = 1,\ldots,n,$$

$$p_i \geq 0, \ i = 1,\ldots, m.$$

где $p_i = \dfrac{\xi_i}{v}$,

а $v = \dfrac{1}{L_{\min}} \left(= \dfrac{1}{W_{\max}} \right)$

$$W = \sum_{j=1}^{n} q_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq 1, \quad i = 1,\ldots,m,$$

$$q_j \geq 0, \ j = 1,\ldots, n.$$

где $q_j = \dfrac{\eta_j}{v}$

а $v = \dfrac{1}{W_{\max}} \left(= \dfrac{1}{L_{\min}} \right)$

Пример «*Камень, ножницы, бумага*»

$$\begin{array}{c|ccc} & К & Н & Б \\ \hline К & 0 & 1 & -1 \\ Н & -1 & 0 & 1 \\ Б & 1 & -1 & 0 \end{array} \xrightarrow{+2} \begin{array}{c|ccc} & К & Н & Б \\ \hline К & 2 & 3 & 1 \\ Н & 1 & 2 & 3 \\ Б & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

$$L = p_1 + p_2 + p_3 \to \min$$
$$2p_1 + p_2 + 3p_3 \geq 1$$
$$3p_1 + 2p_2 + p_3 \geq 1$$
$$p_1 + 3p_2 + 2p_3 \geq 1$$
$$p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$W = q_1 + q_2 + q_3 \to \max$$
$$2q_1 + 3q_2 + q_3 \leq 1$$
$$q_1 + 2q_2 + 3q_3 \leq 1$$
$$3q_1 + q_2 + 2q_3 \leq 1$$
$$q_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Пример «*Камень, ножницы, бумага*»

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} К & Н & Б \end{array} \\ \begin{array}{c} К \\ Н \\ Б \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{+2} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} К & Н & Б \end{array} \\ \begin{array}{c} К \\ Н \\ Б \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$L = p_1 + p_2 + p_3 \to \min$$

$$2p_1 + p_2 + 3p_3 \geq 1$$

$$3p_1 + 2p_2 + p_3 \geq 1$$

$$p_1 + 3p_2 + 2p_3 \geq 1$$

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$p_i = \frac{\xi_i}{v} \Rightarrow \xi_i = p_i v$$

$$v = \frac{1}{L_{\min}}$$

Решение в Excel

			План						
		p1	0,166667						
		p2	0,166667						
		p3	0,166667						
							Итого		Правая часть
Левая часть ограничений				2	3	1	1	>=	1
				1	2	3	1	>=	1
				3	1	2	1	>=	1
Целевая функция			0,5						
Обратная величина (цена игры)			2						
			Смешанная стратегия:	0,33333					
				0,33333					
				0,33333					

$$v = \frac{1}{L_{\min}}$$

$$\xi_i = p_i v$$

Отчёт по устойчивости

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости
Лист: [Камень_ножницы_бумага.xlsx]Лист1
Отчет создан: 17.09.2019 11:37:27

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
D3	p1 План	0,166666667	0	1	0,6	0,428571429
D4	p2 План	0,166666667	0	1	0,6	0,428571429
D5	p3 План	0,166666667	0	1	0,6	0,428571429

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
I7	Левая часть ограничений Итого	1	0,166666667	1	0,6	0,428571429
I8	Итого	1	0,166666667	1	0,6	0,428571429
I9	Итого	1	0,166666667	1	0,6	0,428571429

Решение для второго игрока

		План							
	p1	0,166667							
	p2	0,166667							
	p3	0,166667							
						Итого		Правая часть	
Левая часть ограничений			2	3	1	1	>=	1	
			1	2	3	1	>=	1	
			3	1	2	1	>=	1	
Целевая функция		0,5							
Обратная величина		2				*Для второго игрока*			
							Тень Цена		$q_j = \eta_j v$
Смешанная стратегия:			0,333333			*решение*	0,166667		0,333333
			0,333333				0,166667		0,333333
			0,333333				0,166667		0,333333

«Камень, ножницы, бумага». Решение.

$$x^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

$$y^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

$$v = 2 - 2 = 0$$

Защита курсовой работы (ОЧНО!)

- 4931 – 23.12.2021 – 3 пара (по расписанию)
- 4933, 4936 – 24.12.2021 (по расписанию)
- 4232 – 23.12.2021 – 4 пара (окно!)

Тест № 1

(для тех, кто не писал!)

В пятницу, 17.12.2021:

- 4931, 4932, 4933 – на 2 паре (в 11:10)
- 4936 – на 4 паре.

На кафедре (возможно, 23-16)

СООБЩИТЬ О СВОЁМ ЖЕЛАНИИ ЗАРАНЕЕ!!!