Прикладные модели оптимизации

Доцент, к.ф.-м.н., доцент кафедры № 43

Фаттахова Мария Владимировна

mvfa@yandex.ru

Тема 1. Линейное программирование

Лекция 3

Прямая и двойственная задачи линейного программирования

Таблица данных Примера

$$\max L = \max(5x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 & (2) \\ x_1 \le 1{,}5 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

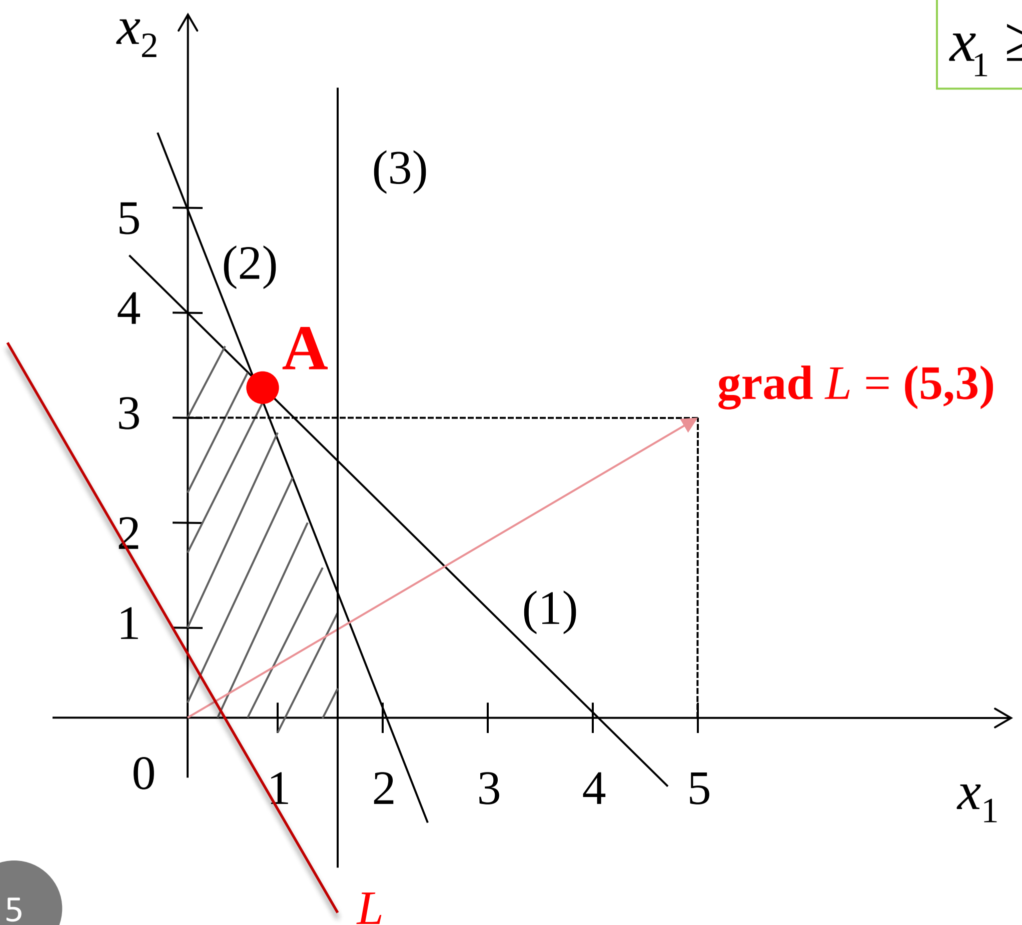
Тип ресурса	Нормы расхода ресурсов на производство единицы продукции		Запасы ресурсов
	Вид 1	Вид 2	
Ресурс 1	1	1	4
Ресурс 2	5	2	10
Ресурс 3	1	0	1,5
Прибыль	5	3	

Пример

$$\max L = \max(5x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 & (2) \\ x_1 \le 1{,}5 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$



$$A: \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$$

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

$$L^* = \frac{40}{3}$$

Математическая модель (прямой) задачи

$$\max L = \max(5x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 & (2) \\ x_1 \le 1,5 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Переменные решения – количество продукции видов 1 и 2, производимых в плановый период.

Целевая функция – прибыль от реализации произведённой продукции.

Задача

Пусть ***имеется покупатель на все ресурсы****, используемые для выпуска продукции фирмы. Какую* ***минимальную сумму*** *можно выручить от продажи всех ресурсов?* ***Какие цены*** *на эти ресурсы нужно назначить, чтобы* ***их было выгоднее продать, чем производить*** *продукцию?*

Математическая модель

y_1 – *цена единицы ресурса типа 1, у.д.е.*

y_2 – *цена единицы ресурса типа 2, у.д.е.*

y_3 – *цена единицы ресурса типа 3, у.д.е*

Целевая функция: $C = 4y_1 + 10\ y_2 + 1{,}5y_3$, $C \to min$

Ограничения:

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 + y_3 \geq 5 \\ y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Тип ресурса	Нормы расхода ресурсов на производство единицы продукции		Запасы ресурсов
	Вид 1	Вид 2	
Ресурс 1	1	1	4
Ресурс 2	5	2	10
Ресурс 3	1	0	1,5
Прибыль	5	3	

Прямая и двойственная задачи

$$\max L = \max(5x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 \le 1{,}5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$\min C = \min\left(4y_1 + 10y_2 + 1{,}5y_3\right)$$

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 + y_3 \ge 5 \\ y_1 + 2y_2 \ge 3 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0$$

Понятие прямой и двойственной задачи ЛП

Каждой задаче ЛП можно некоторым образом сопоставить другую задачу ЛП, называемую ***двойственной*** *по отношению к исходной* (***прямой***):

Прямая задача	Двойственная задача
Задача максимизации:	Задача минимизации:
$ЦФ \to \max$	$ЦФ \to \min$
n переменных	n ограничений
m ограничений	m переменных
все ограничения $\le$	все ограничения $\ge$

Прямая задача

$$
\begin{cases}
\max L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1,\dots, m_1); \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = m_1 + 1,\dots, m); \\
x_j \ge 0 \quad (j = 1,\dots, n_1); \\
x_j \lesseqgtr 0 \quad (j = n_1 + 1,\dots, n).
\end{cases}
$$

Двойственная задача

$$
\begin{cases}
\min P = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i; \\
\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad (j = 1,\dots, n_1); \\
\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \quad (j = n_1 + 1,\dots, n); \\
y_i \ge 0 \quad (i = 1,\dots, m_1); \\
y_i \lesseqgtr 0 \quad (i = m_1 + 1,\dots, m).
\end{cases}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\
 & & & \leq & \cdots & \leq & & & & & \\
 & & & x_1 & \cdots & x_r & x_{r+1} & \cdots & x_n & & \uparrow \min \\
0 & \leq & y_1 & a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} & \leq & b_1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \leq & y_p & a_{p1} & \cdots & a_{pr} & a_{pr+1} & \cdots & a_{pn} & \leq & b_p \\
 & & y_{p+1} & a_{p+1,1} & \cdots & a_{p+1,r} & a_{p+1,r+1} & \cdots & a_{p+1,n} & = & b_{p+1} \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & y_m & a_{m1} & \cdots & a_{mr} & a_{mr+1} & \cdots & a_{mn} & = & b_m \\
 & & & \geq & \cdots & \geq & = & \cdots & = & & \\
 & & & c_1 & \cdots & c_r & c_{r+1} & \cdots & c_n & \rightarrow \max &
\end{array}
$$

Некоторые частные случаи

1. Стандартная ЗЛП:

$$\begin{cases} \max L = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1,\ldots,m); \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1,\ldots,n). \end{cases}$$

Двойственная ЗЛП к стандартной:

$$\begin{cases} \min P = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad (j = 1,\ldots,n); \\ y_i \ge 0 \quad (i = 1,\ldots,m). \end{cases}$$

Некоторые частные случаи

2. Каноническая ЗЛП:

$$\begin{cases} \max L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1,\ldots,m); \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,\ldots,n). \end{cases}$$

Двойственная ЗЛП к канонической:

$$\begin{cases} \min P = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i; \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = 1,\ldots,n). \end{cases}$$

Взаимосвязь пары двойственных задач

- Двойственная к двойственной ЗЛП есть прямая задача.
- Одновременно достигают оптимальных решений.
- Одно и то же значение задач.
- Зная решение одной задачи из пары двойственных задач, можно найти решение другой задачи.

Теоремы двойственности и равновесия в линейном программировании

$$\begin{cases} \max L = \max CX \\ AX \le B \qquad (1) \\ X \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \min P = \min YB \\ YA \ge C \qquad (2) \\ Y \ge 0. \end{cases}$$

Лемма 1. (*Свойство допустимых решений*)

Пусть X и Y – произвольные допустимые решения задач (1) и (2). Тогда

$$CX \le YB$$

Лемма 2. (*Достаточное условие оптимальности*)

Пусть X^* и Y^* – произвольные допустимые решения задач (1) и (2), для которых выполнено равенство

$$CX^* = Y^* B.$$

Тогда X^* и Y^* – оптимальные решения задач ЛП.