Прикладные модели оптимизации

Доцент, к.ф.-м.н., доцент кафедры № 43

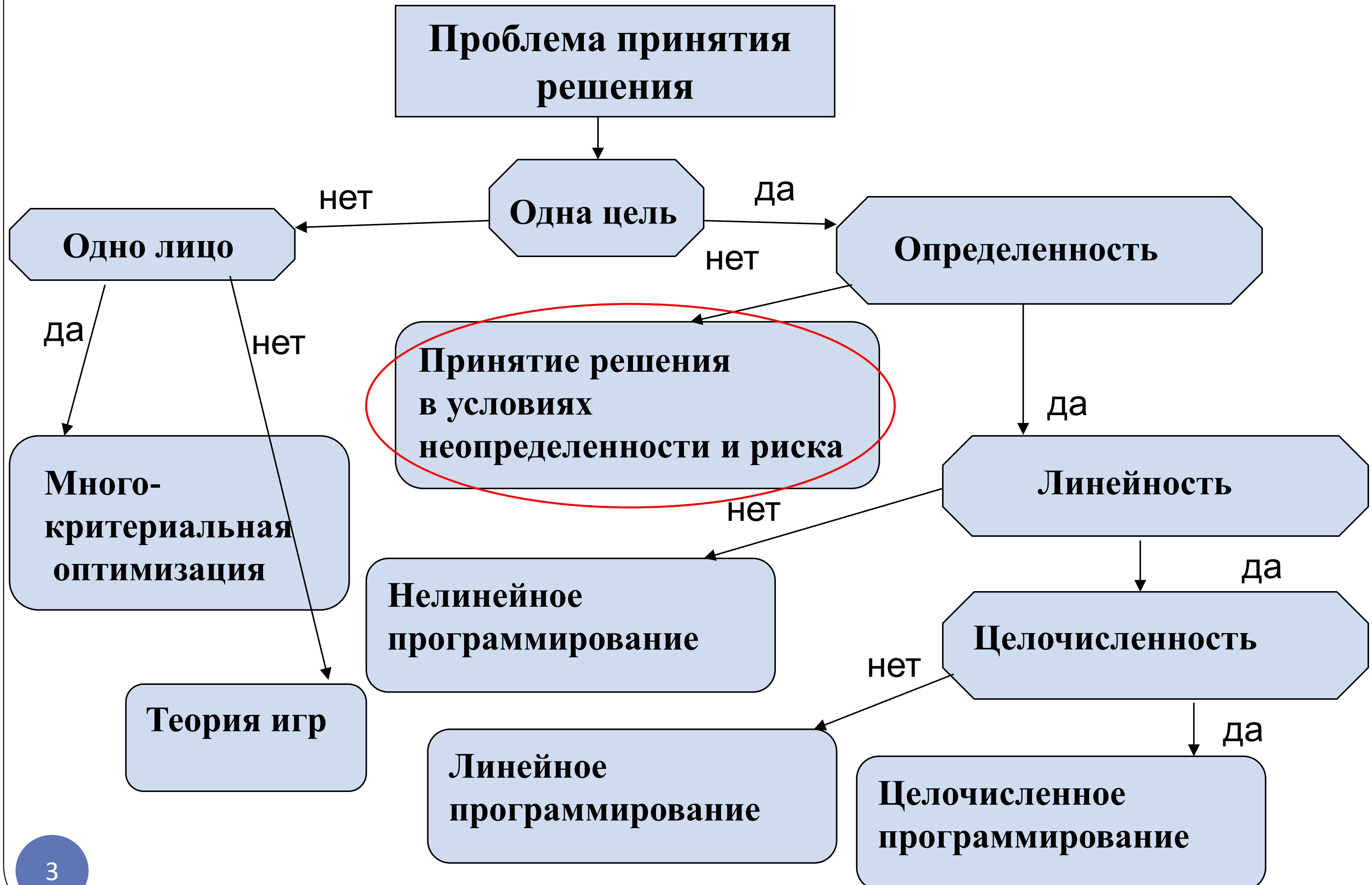
Фаттахова Мария Владимировна

mvfa@yandex.ru

Тема 5. Принятие решений в условиях неопределённости и риска

Лекция 13

Классификация оптимизационных задач



Теория принятия решений

— часть теории управления, изучающая способы анализа, выработки образа действий в зависимости от целевой установки и условий, в которых осуществляется деятельность, располагаемых ресурсов, состава исполнителей.

Теория принятия решений

- область исследования, вовлекающая понятия и методы математики, статистики, менеджмента и психологии;
- изучает закономерности выбора людьми путей решения разного рода задач;
- исследует способы поиска наиболее выгодных из возможных решений.

Классификация процесса принятия решений

- Принятие решений в условиях определенности (*ЗЛП, ЦЧП, ЗНЛП*)
- Принятие решений в условиях риска (исходные данные могут быть описаны с помощью вероятностных распределений)
- Принятие решений в условиях неопределенности
- Принятие решений в условиях конфликта (*теория игр*)

Задачи принятия решений в условиях риска (УР)

– это задачи принятия решений, в которых исходные данные (стоимости альтернатив) могут быть описаны с помощью вероятностных распределений

Решения ЛПР	**Состояния среды**			
	s_1	s_2	…	s_n
d_1				
d_2				
…				
d_m				

Исходные данные в задаче принятия решений в условиях риска

Решения ЛПР	**Состояния среды**			
	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	**…**	$\boldsymbol{s_n}$
$\boldsymbol{d_1}$	$h(d_1,s_1)$	$h(d_1,s_2)$	…	$h(d_1,s_n)$
$\boldsymbol{d_2}$	$h(d_2,s_1)$	$h(d_2,s_2)$	…	$h(d_2,s_n)$
…	…	…	…	…
$\boldsymbol{d_m}$	$h(d_m,s_1)$	$h(d_m,s_2)$	…	$h(d_m,s_n)$

$h(d_i, s_j)$ – полезность принятого решения $d_i, i = 1, \dots, m$,

при реализации состояния $s_j, j = 1, \dots, n$.

Исходные данные в задаче принятия решений в УР

Решения ЛПР	**Состояния среды**			
	s_1	s_2	…	s_n
d_1	$h(d_1,s_1)$	$h(d_1,s_2)$	$\ldots$	$h(d_1,s_n)$
d_2	$h(d_2,s_1)$	$h(d_2,s_2)$	$\ldots$	$h(d_2,s_n)$
…	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
d_m	$h(d_m,s_1)$	$h(d_m,s_2)$	$\ldots$	$h(d_m,s_n)$
Вероятности	$p(s_1)$	$p(s_2)$	$\ldots$	$p(s_n)$

$p(s_j)$ – вероятность реализации состояния $s_j, j = 1, \ldots, n$.

Задачи принятия решений в условиях риска (УР). Пример 1

Брать зонт?

Решения ЛПР	**Состояния среды**	
	Идёт дождь	***Нет дождя***
Взять зонт	10	–5
Не брать зонт	–10	5
Прогноз погоды	0,3	0,7

Полезность и риск принятого решения

$h(d_i, s_j)$ – полезность *исхода* $(d_i, s_j), i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$

Математическое ожидание полезности решения d_i

(в случае дискретной s):

$$H(d_i) = \sum_{j=1}^{n} h(d_i, s_j)\, p(s_j), i = 1, \dots, m$$

Ожидаемая полезность

Дисперсия решения d_i (в случае дискретной s):

Риск

$$D(d_i) = \sum_{j=1}^{n} \left(h(d_i, s_j) - H(d_i) \right)^2 p(s_j), i = 1, \dots, m$$

Задача принятия решений в УР – постановка 1

$$H(d_i) = \sum_{j=1}^{n} h(d_i, s_j) p(s_j) \to \max$$

$$D(d_i) = \sum_{j=1}^{n} \left(h(d_i, s_j) - H(d_i) \right)^2 p(s_j) \to \min$$

Двухкритериальная задача
(если ЛПР **учитывает** риск)

Задача принятия решений в УР – постановка 2

$$H(d_i) = \sum_{j=1}^{n} h(d_i, s_j) p(s_j) \rightarrow \max$$

Однокритериальная задача (ЗЛП или ЗНЛП)
(если ЛПР **не учитывает** риск)

Задача принятия решения в условиях риска – это *задача* ***максимизации*** *ожидаемой полезности* принятого решения.

Задачи принятия решений в УР. Пример 1

$$H(d_i) = \sum_{j=1}^{n} h(d_i, s_j)\, p(s_j) \to \max$$

Брать зонт?

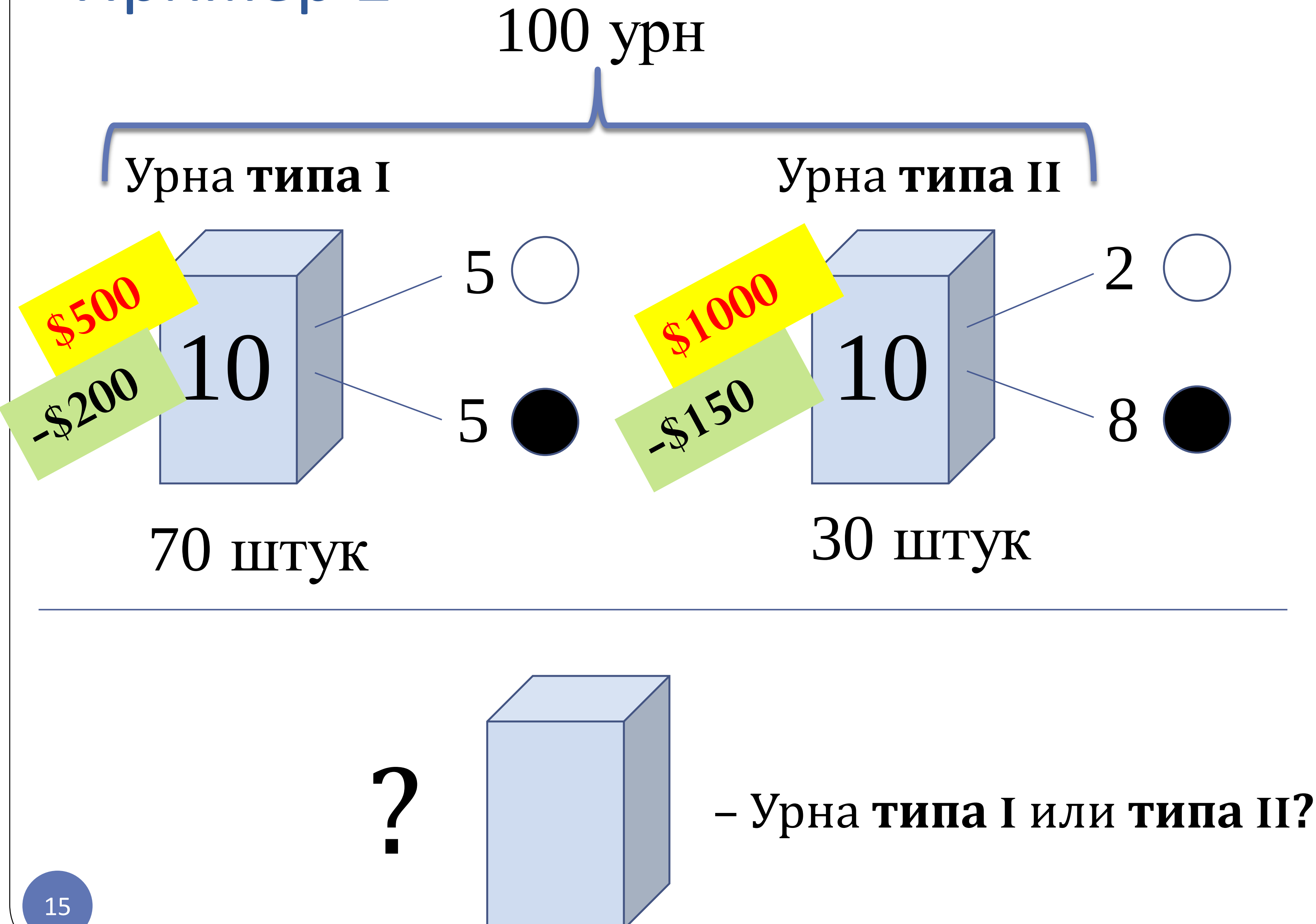
Решения ЛПР	**Состояния среды**	
	Идёт дождь	***Нет дождя***
Взять зонт	10	-5
Не брать зонт	-10	5
Прогноз погоды	0,3	0,7

$$H(d_1) = 10 \cdot 0,3 + (-5) \cdot 0,7 = -0,5$$

$$H(d_2) = -10 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,7 = 0,5$$

Оптимальное решение:
d_2 – «не брать зонт»

Пример 2


100 урн
Урна **типа I**
$500
-$200
10
5
5
70 штук
Урна **типа II**
$1000
-$150
10
2
8
30 штук
?
– Урна **типа I** или **типа II**?

Пример 2

$$H(d_i) = \sum_{j=1}^{n} h(d_i, s_j) p(s_j) \rightarrow \max$$

Альтернативы	Состояние среды		Ожидаемая полезность
	s_1	s_2	
d_1	\$500	-\$200	**\$290**
d_2	-\$150	\$1000	**\$195**
d_3	\$0	\$0	**\$0**
Вероятности состояния среды	**0,7**	**0,3**	

$$H(d_1) = 500 \cdot 0,7 + (-200) \cdot 0,3 = 290$$

$$H(d_2) = (-150) \cdot 0,7 + 1000 \cdot 0,3 = 195$$

$$H(d_3) = 0 \cdot 0,7 + 0 \cdot 0,3 = 0$$

Оптимальное решение:
d_1 – «урна I типа»

Пример 1

$$D(d_i) = \sum_{j=1}^{n} \left(h(d_i, s_j) - H(d_i)\right)^2 p(s_j) \to \min$$

Альтернативы	Состояние среды		Риск (дисперсия)
	s_1	s_2	
d_1	$500	-$200	**102900**
d_2	-$150	$1000	**277725**
d_3	$0	$0	**0**
Вероятности состояния среды	**0,7**	**0,3**	

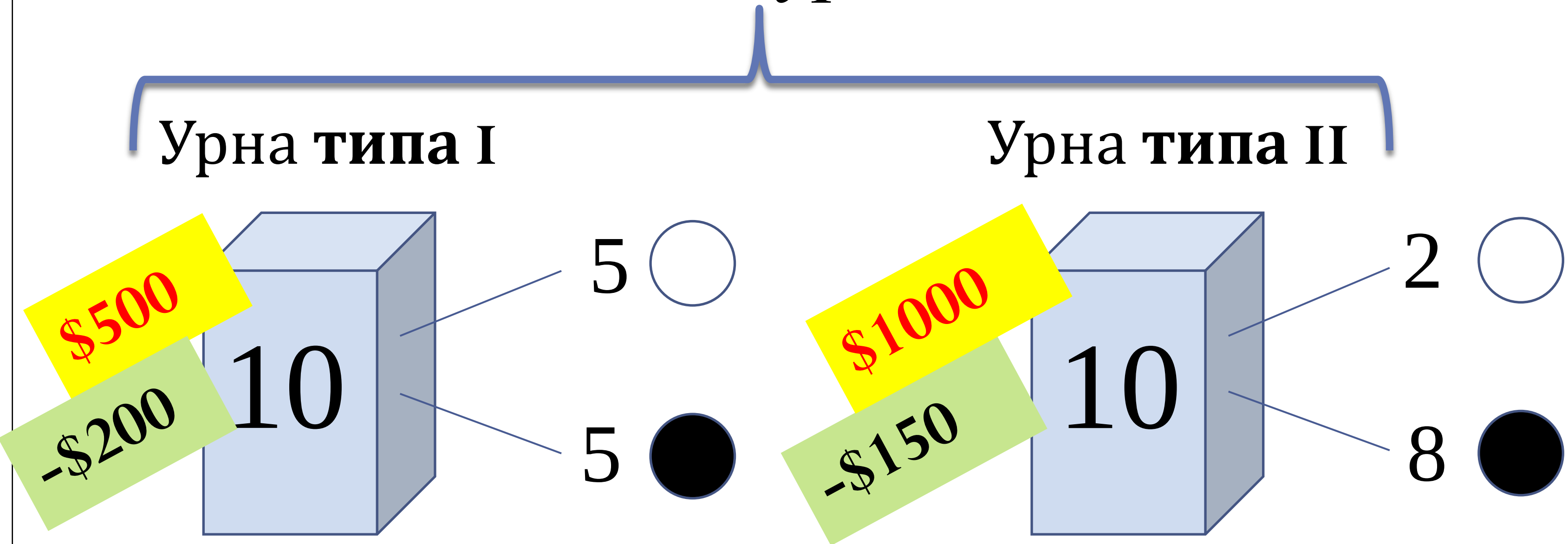
$$D\left(d_1\right) = (500 - 290)^2 \cdot 0,7 + (-200 - 290)^2 \cdot 0,3 = 102900$$

$$D\left(d_2\right) = (-150 - 195)^2 \cdot 0,7 + (1000 - 195)^2 \cdot 0,3 = 277725$$

Оптимальное решение:
d_3 – «отказ от игры»

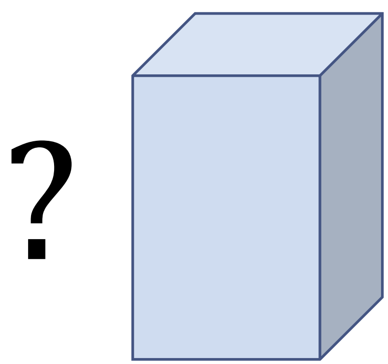
Пример 3

100 урн



70 штук

30 штук



Достать один шар? – $50!

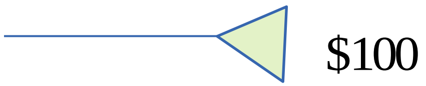
– Урна **типа I** или **типа II?**

Дерево решений

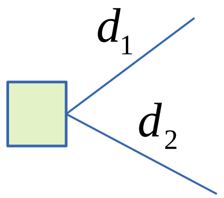
- **Дерево решений** – это *ориентированный граф,* исходящий из одной вершины (*основание дерева*), соответствующий исходной точке процесса принятия решения.
- **Граф** – это математический объект, определяемый двумя множествами: множеством узлов $N = \{x\}$, $|N| = n$, и множеством рёбер $G = N \times N = \{(x, y) | x \in N, y \in N\}$.
- Граф называется **ориентированным**, если все его рёбра имеют направление (ориентированы).

Вершины дерева принятия решений

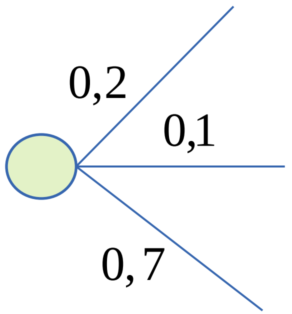
- ***Терминальные (концевые) вершины:*** никакие рёбра не выходят; количественные оценки варианта решения.



- ***Вершины принятия решения:*** выходят рёбра, соответствующие возможным альтернативам.



- ***Случайные вершины:*** выходят вероятностные рёбра, соответствующие исходам случайных событий; указываются вероятности данных исходов.



Этапы решения (1)

1. Выписывается дерево решений **слева направо** (в направлении *принятия решения*). При этом на граф наносятся все известные числовые характеристики.
2. Оценивается дерево решений последовательно по шагам в **обратном направлении**, т.е., начиная с *терминальных вершин*.

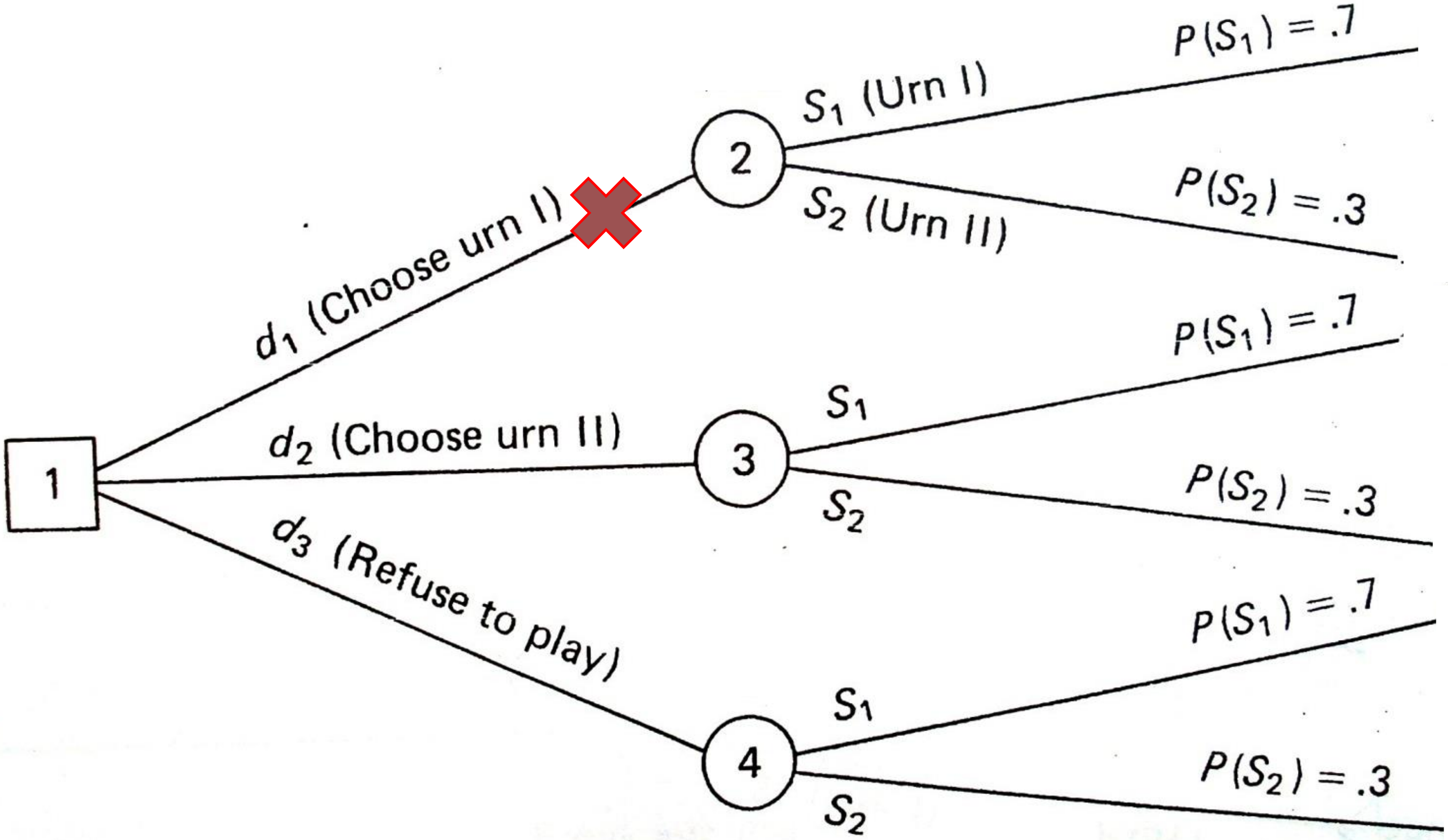
- Для случайных вершин – последовательно вычисляются ***математические ожидания выигрышей***.
- Для вершин принятия решения – последовательно вычисляются ***оценки лучших альтернатив***.

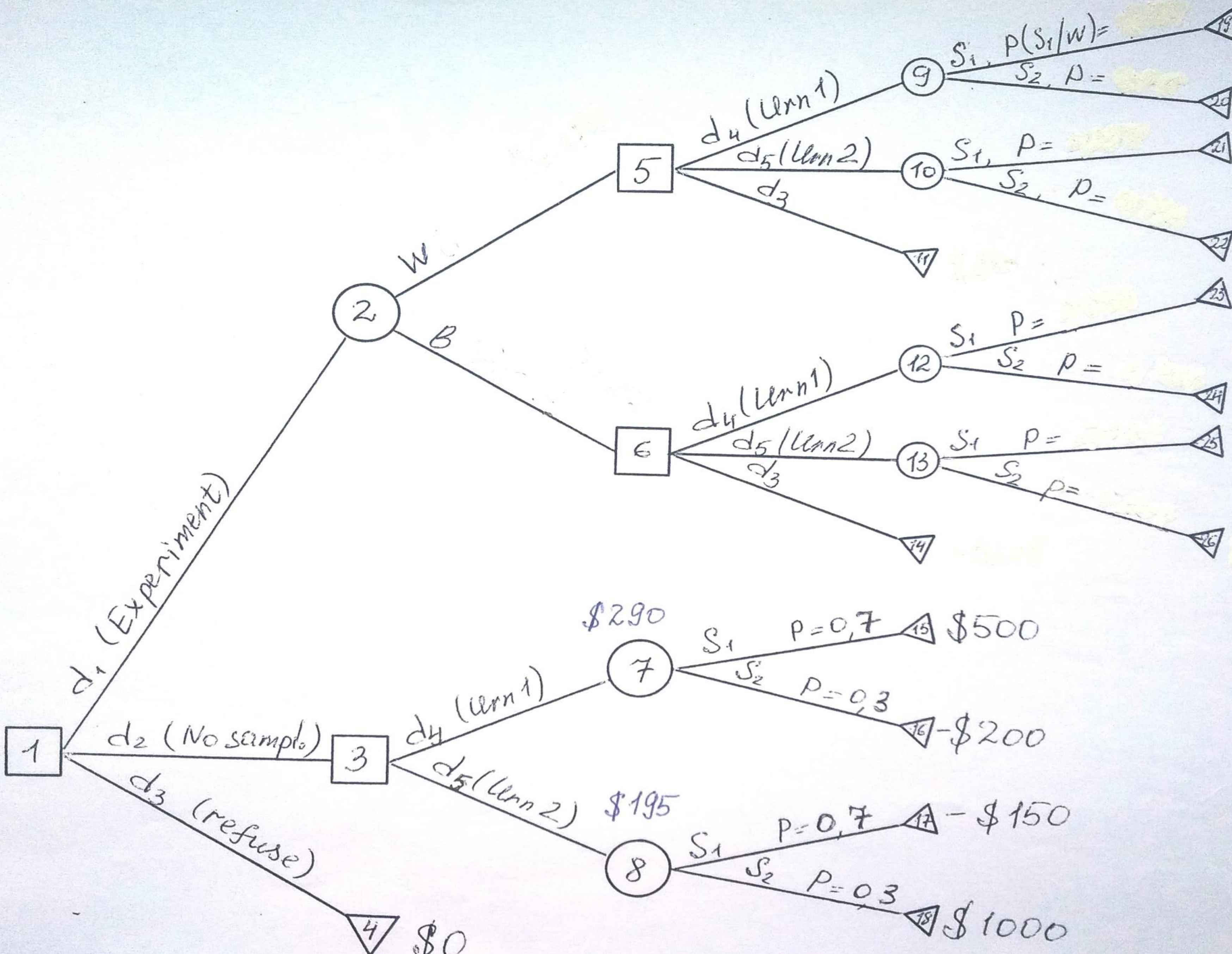
Этапы решения (2)

3. Последний этап – это определение оптимального решения. Для нахождения оптимального решения дерево еще раз просматривается в **прямом направлении**, отмечая наилучшие альтернативы в точках принятия решения.

Метод тройной прогонки

Дерево решений 1





1
d_1 (Experiment)
d_2 (No sampl.)
d_3 (refuse)
4
\$0
2
W
B
3
d_4 (Urn 1)
d_5 (Urn 2)
5
6
7
8
\$290
\$195
d_4 (Urn1)
d_5 (Urn2)
d_3
9
10
11
12
13
14
S_1, $P(S_1/W)=$
S_2, $P=$
S_1, $P=$
S_2, $P=$
S_1 $P=$
S_2 $P=$
S_1 $P=$
S_2 $P=$
S_1 $P=0,7$
S_2 $P=0,3$
S_1 $P=0,7$
S_2 $P=0,3$
15
16
17
18
\$500
-\$200
-\$150
\$1000
19
20
21
22
23
24
25
26

Теорема 1. (Формула полной вероятности)

Пусть случайные события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу событий и пусть известны $P(A_i)$ и $P(B/A_i)$, $i = 1, \dots, n$, а с.с. B происходит вместе с одним из с.с. A_i.

Тогда вероятность случайного события B можно вычислить по формуле:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B/A_i)$$

$$= P(A_1)\, P(B/A_1) + \dots + P(A_n)\, P(B/A_n)$$

называемой формулой полной вероятности.

$P(A_i)$ – априорные вероятности

Теорема 2. (Формула Байеса)

Пусть случайное событие A_m, $m = 1, \dots, n$ - это некоторая фиксированная гипотеза и пусть выполняются все условия теоремы 1, т.е. $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу событий и известны $P(A_i)$ и $P(B/A_i)$, $i = 1, \dots, n$.

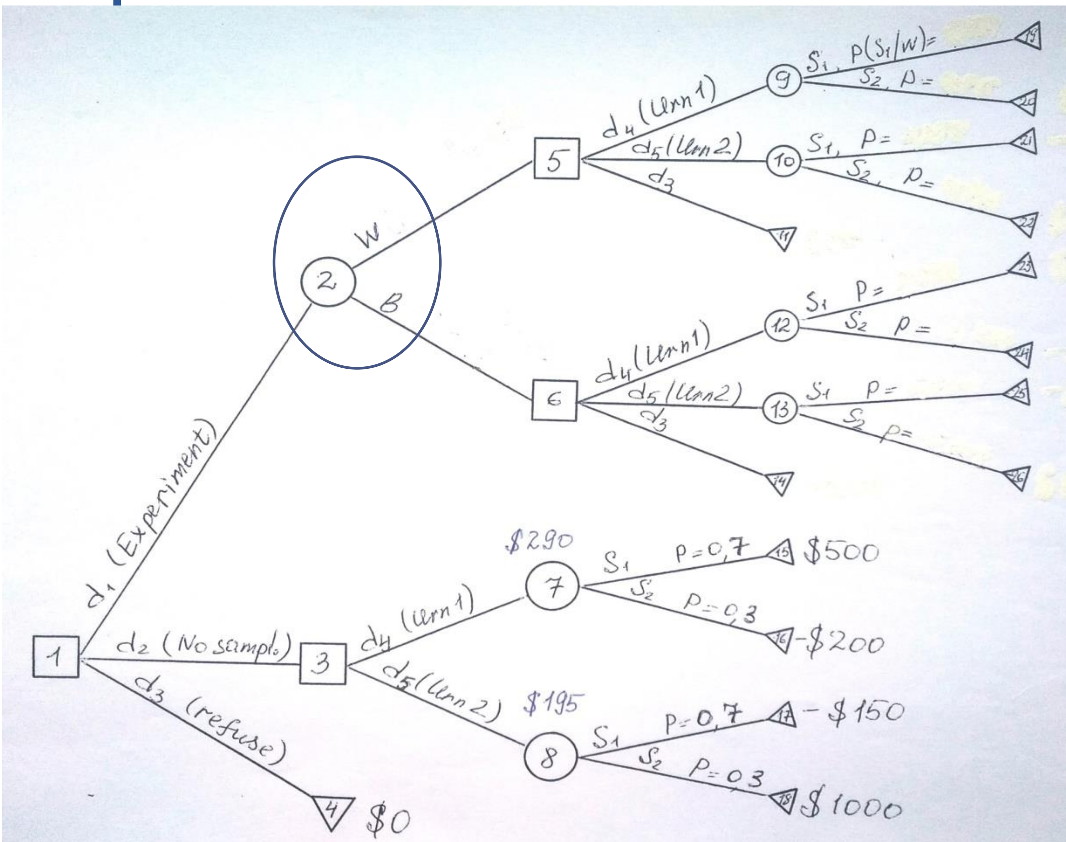
Тогда вероятность гипотезы A_m, при условии, что с.с. B произошло, находится по формуле :

$$P(A_m/B) = \frac{P(A_m)\,P(B/A_m)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)} = \frac{P(A_m)\,P(B/A_m)}{P(B)}$$

называемой ***формулой Байеса***.

$P(A_m/B)$ – апостериорные вероятности

Вероятности для Дерева 2. Вершина 2



W = «достали белый шар»

B = «достали чёрный шар»

$$P(W/s_1)=0,5$$

$$P(W/s_2)=0,2$$

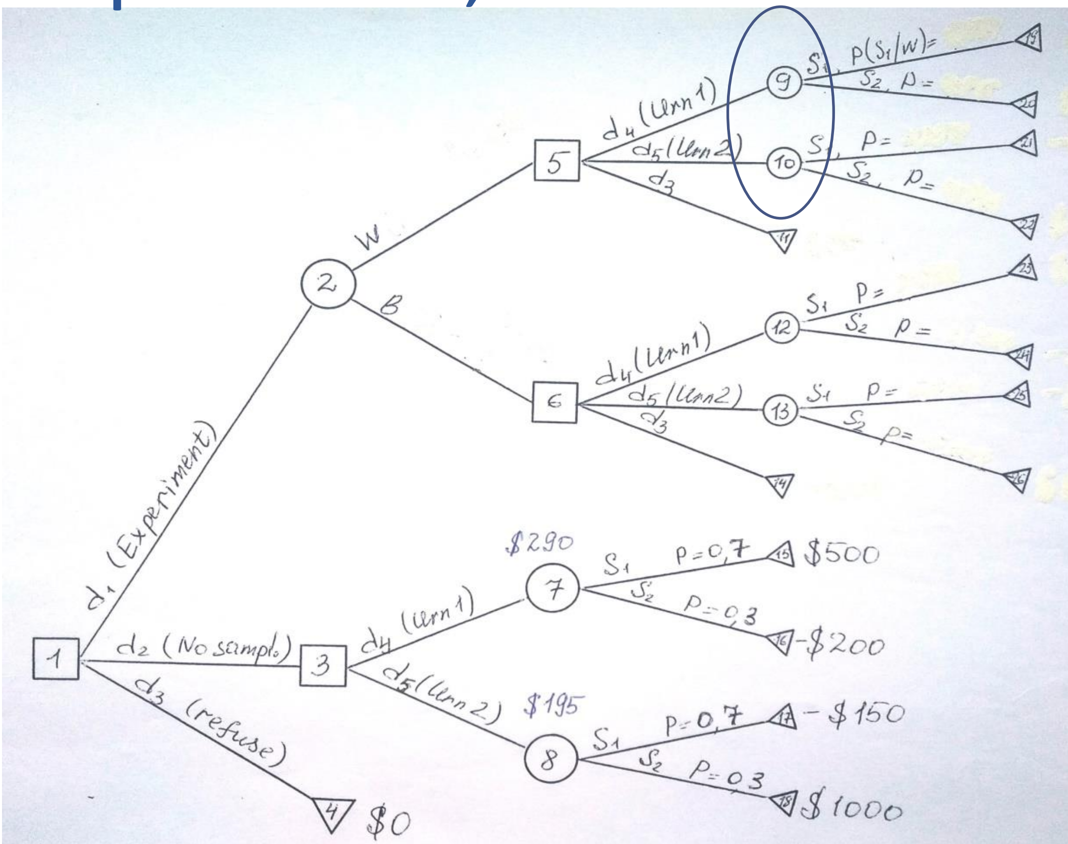
$$P(B/s_1)=0,5$$

$$P(B/s_2)=0,8$$

$$P(W)=P(W/s_1)\cdot P(s_1)+P(W/s_2)\cdot P(s_2)=0,5\cdot 0,7+0,2\cdot 0,3=0,41$$

$$P(B)=P(B/s_1)\cdot P(s_1)+P(B/s_2)\cdot P(s_2)=0,5\cdot 0,7+0,8\cdot 0,3=0,59$$

Вероятности для Дерева 2. Вершины 9, 10



W = «достали белый шар»

B = «достали чёрный шар»

$$P(W/s_1)=0,5$$

$$P(W/s_2)=0,2$$

$$P(B/s_1)=0,5$$

$$P(B/s_2)=0,8$$

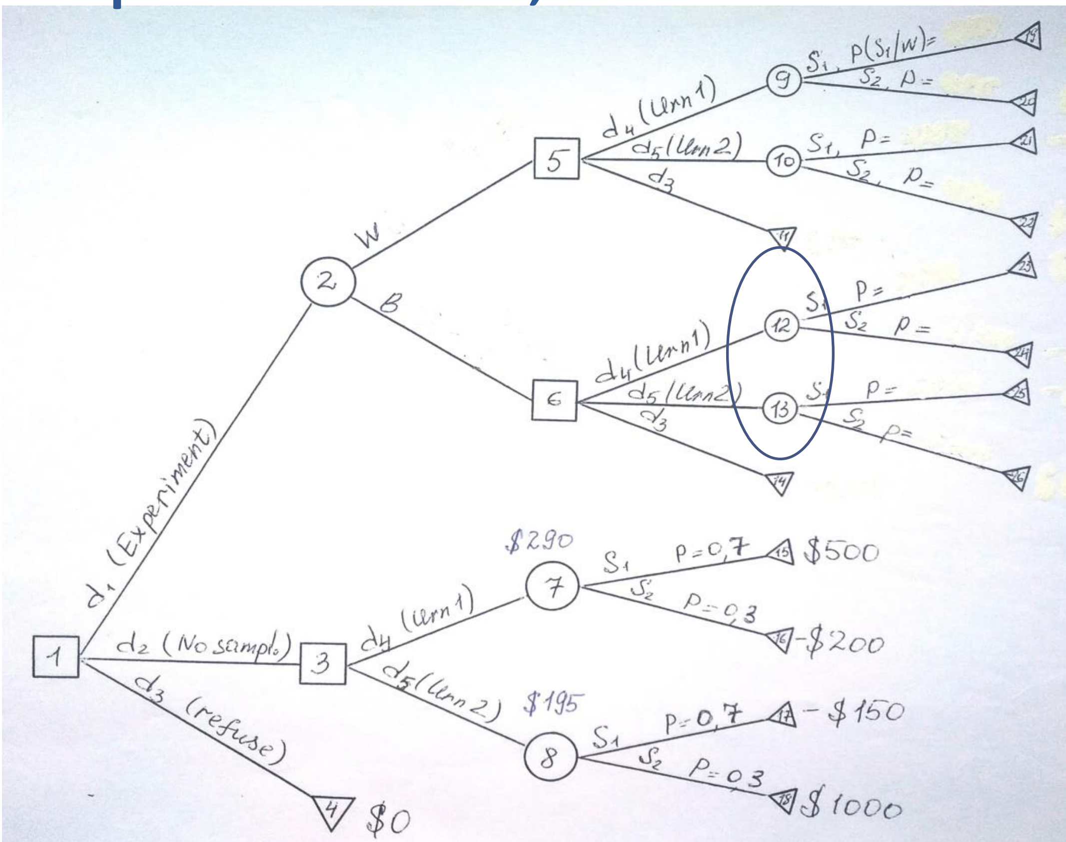
$$P(W)=0,41$$

$$P(B)=0,59$$

$$P(s_1/W)=\frac{P(W/s_1)\cdot P(s_1)}{P(W)}=\frac{0,5\cdot 0,7}{0,41}=0,854$$

$$P(s_2/W)=\frac{P(W/s_2)\cdot P(s_2)}{P(W)}=\frac{0,2\cdot 0,3}{0,41}=0,146$$

Вероятности для Дерева 2. Вершины 12, 13



W = «достали белый шар»

B = «достали чёрный шар»

$$P(W/s_1)=0,5$$

$$P(W/s_2)=0,2$$

$$P(B/s_1)=0,5$$

$$P(B/s_2)=0,8$$

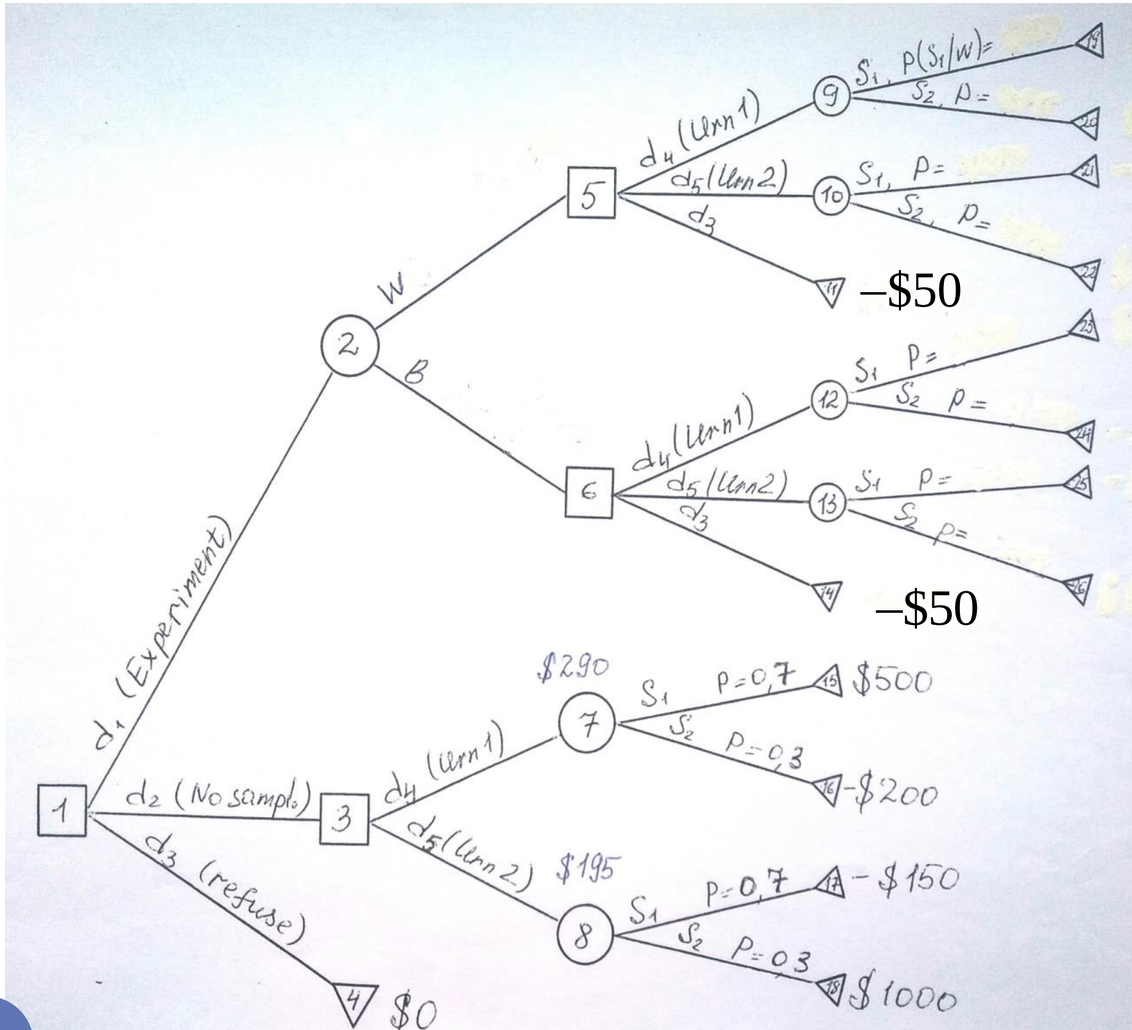
$$P(W)=0,41$$

$$P(B)=0,59$$

$$P(s_1/B)=\frac{P(B/s_1)\cdot P(s_1)}{P(B)}=\frac{0,5\cdot 0,7}{0,59}=0,593$$

$$P(s_2/B)=\frac{P(B/s_2)\cdot P(s_2)}{P(B)}=\frac{0,8\cdot 0,3}{0,59}=0,407$$

Выигрыши для Дерева 2. Терминальные вершины



$19: \quad \$500 - \$50 = \$450$

$20: \quad -\$200 - \$50 = -\$250$

$21: \quad -\$150 - \$50 = -\$200$

$22: \quad \$1000 - \$50 = \$950$

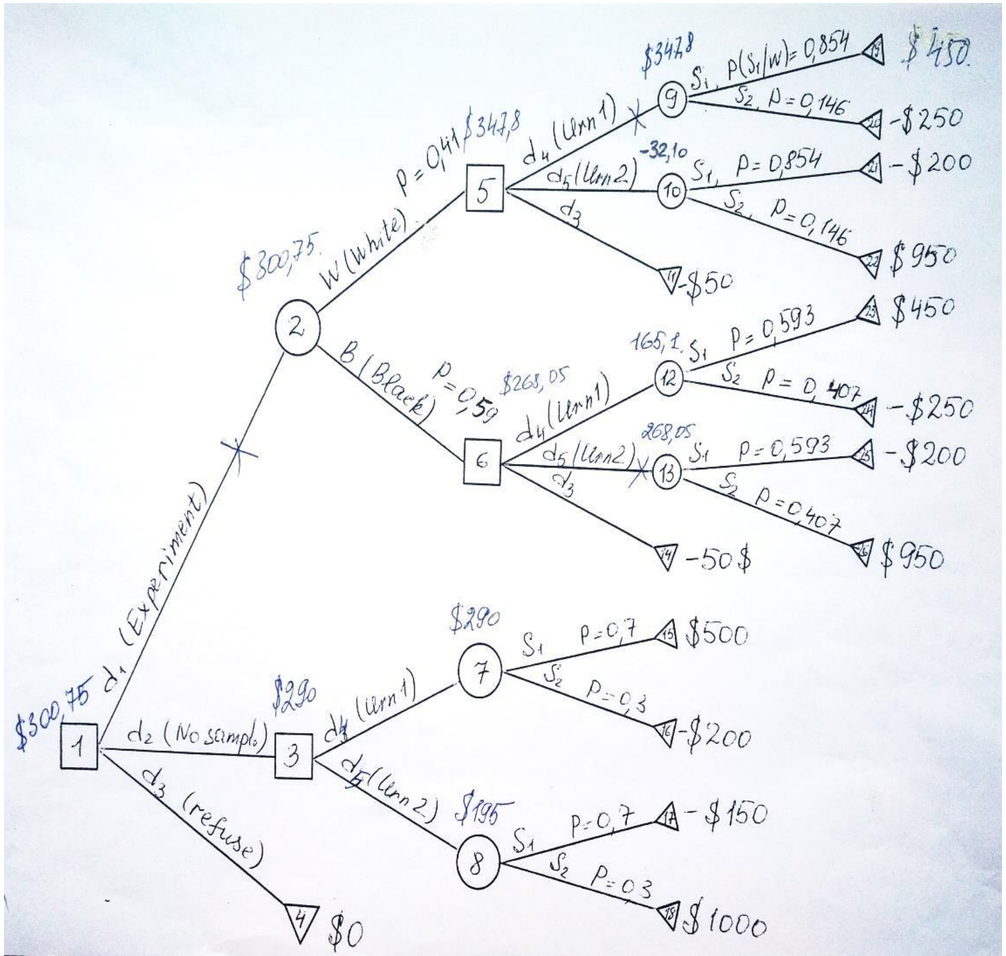
$23: \quad \$500 - \$50 = \$450$

$24: \quad -\$200 - \$50 = -\$250$

$25: \quad -\$150 - \$50 = -\$200$

$26: \quad \$1000 - \$50 = \$950$

Оценка Дерева 2



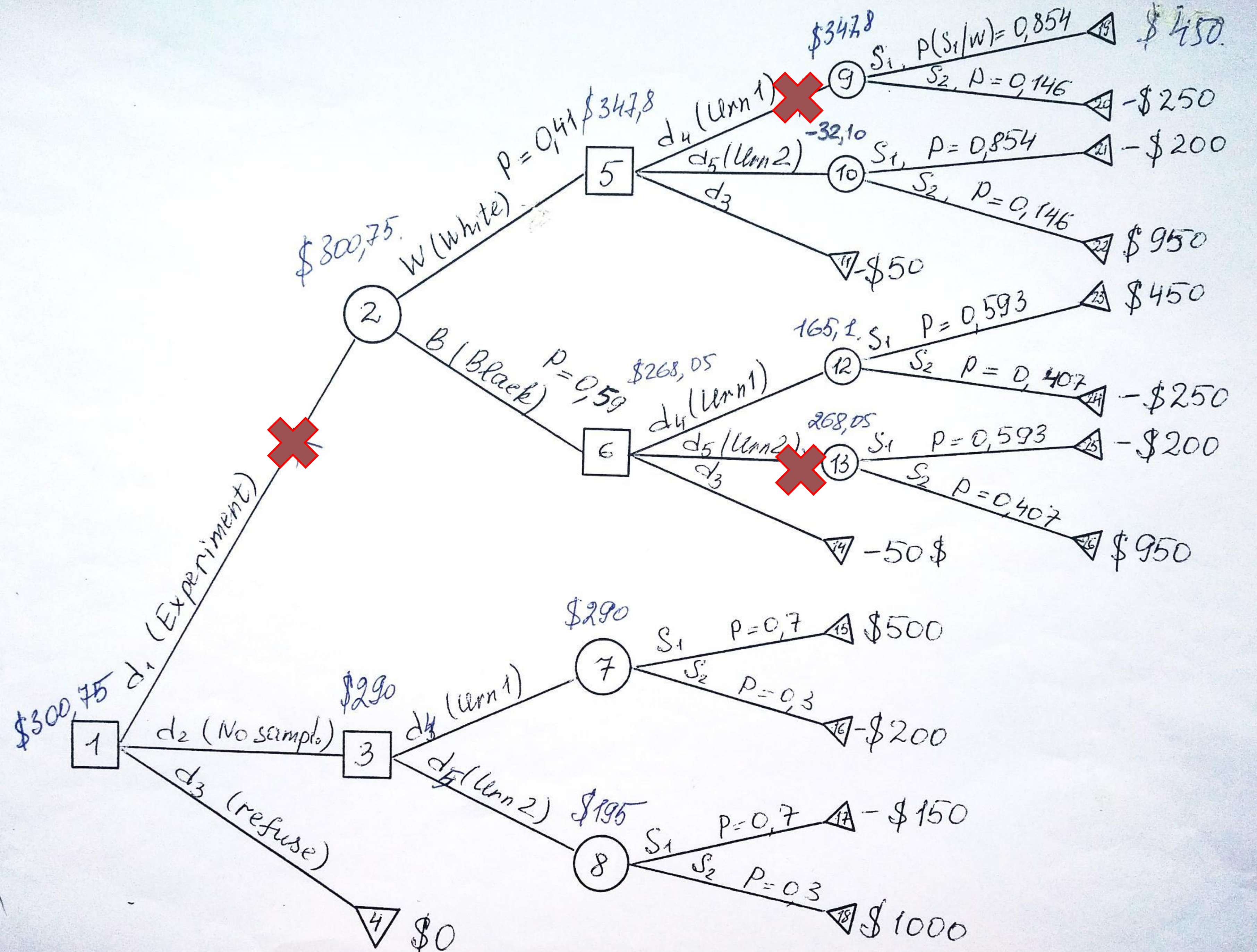
$$9:\ \$450\cdot 0,854+(-\$250)\cdot 0,146=\$347,8$$

$$10:\ -\$200\cdot 0,854+\$950\cdot 0,146=-\$32,1$$

$$12:\ \$450\cdot 0,593+(-\$250)\cdot 0,407=\$165,1$$

$$13:\ -\$200\cdot 0,593+\$950\cdot 0,407=\$268,05$$

$$2:\ \$347,8\cdot 0,41+\$268,05\cdot 0,59=\$300,75$$



$300,75
d1 (Experiment)
d2 (No sample)
d3 (refuse)
$0
$300,75
W (white)
p = 0,41
$347,8
B (Black)
p = 0,59
$268,05
$347,8
d4 (Urn 1)
d5 (Urn 2)
-32,10
d3
-$50
S1, P(S1/W) = 0,854
S2, p = 0,146
$450
-$250
S1, p = 0,854
S2, p = 0,146
-$200
$950
165,1
d4 (Urn 1)
d5 (Urn 2)
d3
S1 p = 0,593
S2 p = 0,407
$450
-$250
268,05
S1 p = 0,593
S2 p = 0,407
-$200
$950
-50 $
$290
d4 (Urn 1)
d5 (Urn 2)
$290
S1 p = 0,7
S2 p = 0,3
$500
-$200
$195
S1 p = 0,7
S2 p = 0,3
-$150
$1000

Оптимальное решение.
Пример 3

1. В узле 1 игрок должен выбрать альтернативу **«Эксперимент»**.
2. Если игрок достал **белый шар**, то он выбирает альтернативу **«урна I типа»**.

Если игрок достал **чёрный шар**, то он выбирает альтернативу **«урна типа II»**.

Математическое ожидание выигрыша составит $**300,75**

Дополнительное задание 3 (2 балла)

Постройте дерево и найдите оптимальное решение в задаче «Игра с шарами», допустив возможность для игрока по желанию доставать из урны *второй пробный* шар, который тоже стоит $50.

СРОК: 01.12.2021

Лабораторная работа № 4

Решите задачу с помощью дерева решений.

(Таблицу строить НЕ надо!)

- СРОК СДАЧИ без потери баллов:

Группа 4931: 08.12.2021

Группа 4932: 08.12.2021

Группа 4933: 10.12.2021

Группа 4936: 10.12.2021

- *РЕШЕНИЕ!*