

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
И ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ (КАФЕДРА №43)

ОТЧЕТ ЗАЩИЩЕН С  
ОЦЕНКОЙ:

\_\_\_\_\_

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:

\_\_\_\_\_  
(должность, учёная степень, звание) / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / М. В. Фаттахова  
(подпись) (дата защиты) (инициалы, фамилия)

ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3

«Решение задачи многокритериальной оптимизации средствами Excel»

ПО КУРСУ: «Прикладные модели оптимизации»

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ (-А) СТУДЕНТ (-КА):

\_\_\_\_\_  
(номер группы) / Н. С. Иванов  
(инициалы, фамилия)

/ \_\_\_\_\_ / 27.11.2021  
(подпись студента) (дата отчета)

## 1 Формулировка задачи:

### Вариант 8

Фирма производит два безалкогольных напитка «Колокольчик» и «Буратино». Для производства «Колокольчика» требуется 0,02 ч работы оборудования, а для «Буратино» – 0,04, а расход специального ингредиента на них составляет 0,01 кг и 0,04 кг на 1 л соответственно. Ежедневно в распоряжении фирмы 16 кг специального ингредиента и 24 ч работы оборудования. Доход от продажи одного литра «Колокольчика» составляет 0,25 рубля, а «Буратино» – 0,35.

Требуется составить такой план производства, который будет удовлетворять следующим целям:

- Цель 1: максимизировать суммарный доход от продажи.
- Цель 2: максимизировать суммарное количество производимых напитков.
- Цель 3: минимизировать используемое количество специального ингредиента.

## 2. Математическая модель

$$\max H_1(x) = \max(0,25x_1 + 0,35x_2)$$

$$\max H_2(x) = \max(x_1 + x_2)$$

$$\min H_3(x) = \max(-(0,01x_1 + 0,04x_2))$$

$$\begin{cases} 0,02x_1 + 0,04x_2 \geq 24 \\ 0,01x_1 + 0,04x_2 \geq 16 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

## 3. Математические модели каждой цели и их решение с помощью Excel

$$L = H_1(x) = 0,25x_1 + 0,35x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 0,02x_1 + 0,04x_2 \geq 24 \\ 0,01x_1 + 0,04x_2 \geq 16 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

| Условие         |               |            |       |    |      |    |     |
|-----------------|---------------|------------|-------|----|------|----|-----|
|                 | «Колокольчик» | «Буратино» |       | H1 | 300  | -> | max |
| Ингредиент (кг) | 0,01          | 0,04       |       | H2 | 1200 | -> | max |
| Время (ч)       | 0,02          | 0,04       |       | H3 | -12  | -> | max |
| Стоимость       | 0,25          | 0,35       |       |    |      |    |     |
| Производство    |               |            |       |    |      |    |     |
|                 | «Колокольчик» | «Буратино» |       |    |      |    |     |
|                 | 1200          | 0          |       |    |      |    |     |
| Ограничения     |               |            |       |    |      |    |     |
| Ингредиент (кг) | 12            | 0          | 12 <= | 16 |      |    |     |
| Время (ч)       | 24            | 0          | 24 <= | 24 |      |    |     |
| Стоимость       | 300           | 0          | 300   |    |      |    |     |

$$L = H_2(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 0,02 x_1 + 0,04 x_2 \geq 24 \\ 0,01 x_1 + 0,04 x_2 \geq 16 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

| Условие         |               |            |       |    |      |    |     |
|-----------------|---------------|------------|-------|----|------|----|-----|
|                 | «Колокольчик» | «Буратино» |       | H1 | 300  | -> | max |
| Ингредиент (кг) | 0,01          | 0,04       |       | H2 | 1200 | -> | max |
| Время (ч)       | 0,02          | 0,04       |       | H3 | -12  | -> | max |
| Стоимость       | 0,25          | 0,35       |       |    |      |    |     |
| Производство    |               |            |       |    |      |    |     |
|                 | «Колокольчик» | «Буратино» |       |    |      |    |     |
|                 | 1200          | 0          |       |    |      |    |     |
| Ограничения     |               |            |       |    |      |    |     |
| Ингредиент (кг) | 12            | 0          | 12 <= | 16 |      |    |     |
| Время (ч)       | 24            | 0          | 24 <= | 24 |      |    |     |
| Стоимость       | 300           | 0          | 300   |    |      |    |     |

$$L = H_3(x) = -(0,01 x_1 + 0,04 x_2) \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 0,02 x_1 + 0,04 x_2 \geq 24 \\ 0,01 x_1 + 0,04 x_2 \geq 16 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

| Условие         |               |            |      |    |   |    |     |
|-----------------|---------------|------------|------|----|---|----|-----|
|                 | «Колокольчик» | «Буратино» |      | H1 | 0 | -> | max |
| Ингредиент (кг) | 0,01          | 0,04       |      | H2 | 0 | -> | max |
| Время (ч)       | 0,02          | 0,04       |      | H3 | 0 | -> | max |
| Стоимость       | 0,25          | 0,35       |      |    |   |    |     |
| Производство    |               |            |      |    |   |    |     |
|                 | «Колокольчик» | «Буратино» |      |    |   |    |     |
|                 | 0             | 0          |      |    |   |    |     |
| Ограничения     |               |            |      |    |   |    |     |
| Ингредиент (кг) | 0             | 0          | 0 <= | 16 |   |    |     |
| Время (ч)       | 0             | 0          | 0 <= | 24 |   |    |     |
| Стоимость       | 0             | 0          | 0    |    |   |    |     |

#### 4. Решение многокритериальной задачи методом главного критерия

Точка sq(статус-кво) ( 213; 750; -15 )

$$\max H_1(x) = \max(0,25x_1 + 0,35x_2)$$

$$0,02x_1 + 0,04x_2 \geq 24$$

$$0,01x_1 + 0,04x_2 \geq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \geq 750$$

$$0,01x_1 + 0,04x_2 \geq -15$$

| Условие         |               |            |       |    |      |    |     |  |
|-----------------|---------------|------------|-------|----|------|----|-----|--|
|                 | «Колокольчик» | «Буратино» |       | H1 | 300  | -> | max |  |
| Ингредиент (кг) | 0,01          | 0,04       |       | H2 | 1200 | => | 750 |  |
| Время (ч)       | 0,02          | 0,04       |       | H3 | -12  | => | -15 |  |
| Стоимость       | 0,25          | 0,35       |       |    |      |    |     |  |
| Производство    |               |            |       |    |      |    |     |  |
|                 | «Колокольчик» | «Буратино» |       |    |      |    |     |  |
|                 | 1200          | 0          |       |    |      |    |     |  |
| Ограничения     |               |            |       |    |      |    |     |  |
| Ингредиент (кг) | 12            | 0          | 12 <= | 16 |      |    |     |  |
| Время (ч)       | 24            | 0          | 24 <= | 24 |      |    |     |  |
| Стоимость       | 300           | 0          | 300   |    |      |    |     |  |

Точка sq ( 213; 750; -15 )

$$0,02x_1 + 0,04x_2 \geq 24$$

$$0,01x_1 + 0,04x_2 \geq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$0,25x_1 + 0,35x_2 \geq 213$$

$$x_1 + x_2 \geq 750$$

$$0,01x_1 + 0,04x_2 \geq -15$$

Функция Нэша  
4370625

## 6. Методом минимизации расстояния до «утопической» точки

Утопическая точка ( 300; 1200; 0)

$$\rho^2 = (H_1(x) - 300)^2 + (H_2(x) - 1200)^2 + (H_3(x) - 0)^2$$

$$\min \rho^2(x) = (0,25x_1 + 0,35x_2 - 300)^2 + (x_1 + x_2 - 1200)^2 + (-(0,01x_1 + 0,04x_2) - 0)^2 \rightarrow \min$$

$$0,02x_1 + 0,04x_2 \geq 24$$

$$0,01x_1 + 0,04x_2 \geq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

| Условие                         |               |            |         |    |      |      |  |
|---------------------------------|---------------|------------|---------|----|------|------|--|
|                                 | «Колокольчик» | «Буратино» |         | H1 | 300  | 300  |  |
| Ингредиент (кг)                 | 0,01          | 0,04       |         | H2 | 1200 | 1200 |  |
| Время (ч)                       | 0,02          | 0,04       |         | H3 | -12  | 0    |  |
| Стоимость                       | 0,25          | 0,35       |         |    |      |      |  |
| Производство                    |               |            |         |    |      |      |  |
|                                 | «Колокольчик» | «Буратино» |         |    |      |      |  |
|                                 | 1200          | 0          |         |    |      |      |  |
| Ограничения                     |               |            |         |    |      |      |  |
| Ингредиент (кг)                 | 12,0          | 0,0        | 12,0 <= | 16 |      |      |  |
| Время (ч)                       | 24,0          | 0,0        | 24,0 <= | 24 |      |      |  |
| Стоимость                       | 300,0         | 0,0        | 300,0   |    |      |      |  |
| Расстояние до утопической точки |               |            |         |    |      |      |  |
| 143,9864483                     |               |            |         |    |      |      |  |

## 7. Сводная таблица построенных решений:

| Решение   | $x_1^*$ | $x_2^*$ | $H_1^*$ | $H_2^*$ | $H_3^*$ |
|---|---------|---------|---------|---------|---------|
| Оптим. для ЦФ1  | 1200    | 0       | 300     | 1200    | -12     |
| Оптим. для ЦФ2  | 1200    | 0       | 300     | 1200    | -12     |
| Оптим. для ЦФ3  | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| Точка статус-кво  | 500     | 250     | 212,5   | 750     | -15     |
| Метода главного критерия (главный – первый)                   | 1200    | 0       | 300     | 1200    | -12     |
| Арбитражное решение Нэша                                      | 900     | 150     | 277     | 1050    | -15     |
| Решение методом минимизации расстояния до «утопической» точки | 1200    | 0       | 300     | 1200    | -12     |

Оптимальным решением будет решение методом главного критерия

### 8. Эффективная кривая.

|        |       |        |     |
|--------|-------|--------|-----|
| min H1 | 212,5 | max H1 | 300 |
| max H3 | 0     | min H3 | -15 |

$$\Delta = \frac{\max H_3 - \min H_3}{10} = \frac{-(-15)}{10} = \frac{15}{10} = 1,5$$

$$\max H_1(x) = \max(0,25x_1 + 0,35x_2)$$

$$0,02x_1 + 0,04x_2 \geq 24$$

$$0,01x_1 + 0,04x_2 \geq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$-(0,01x_1 + 0,04x_2) \geq \min H_3 + k \cdot (-\Delta), k = 0, \dots, 10$$

| Условие         |               |            |           |    |       |     |      |  |  | K  | H1    | H3    |
|-----------------|---------------|------------|-----------|----|-------|-----|------|--|--|----|-------|-------|
|                 | «Колокольчик» | «Буратино» |           | H1 | 13,13 |     |      |  |  | 0  | 131,3 | -15,0 |
| Ингредиент (кг) | 0,01          | 0,04       |           | H3 | -1,5  | <=  | -1,5 |  |  | 1  | 118,1 | -13,5 |
| Время (ч)       | 0,02          | 0,04       |           |    |       |     |      |  |  | 2  | 112   | -12,0 |
| Стоимость       | 0,25          | 0,35       |           |    | DELTA | 1,5 |      |  |  | 3  | 91,88 | -10,5 |
|                 |               |            |           |    | min   | -15 |      |  |  | 4  | 78,75 | -9,0  |
|                 | Производство  |            |           |    | k     | 9   |      |  |  | 5  | 65,63 | -7,5  |
|                 | «Колокольчик» | «Буратино» |           |    |       |     |      |  |  | 6  | 52,5  | -6,0  |
|                 | 0             | 37,5       |           |    |       |     |      |  |  | 7  | 39,38 | -4,5  |
|                 |               |            |           |    |       |     |      |  |  | 8  | 26,25 | -3,0  |
|                 | Ограничения   |            |           |    |       |     |      |  |  | 9  | 13,13 | -1,5  |
| Ингредиент (кг) | 0             | 1,5        | 1,5 <= 16 |    |       |     |      |  |  | 10 | 0     | 0     |
| Время (ч)       | 0             | 1,5        | 1,5 <= 24 |    |       |     |      |  |  |    |       |       |
| Стоимость       | 0             | 13,125     | 13,13     |    |       |     |      |  |  |    |       |       |

