Прикладные модели оптимизации

Доцент, к.ф.-м.н., доцент кафедры № 43

Фаттахова Мария Владимировна

mvfa@yandex.ru

Тема 1. Задача линейного программирования

Лекция 2

Пример 1

Студент Джек решил распределить свое дневное время (10 часов) между учебой и игрой в баскетбол. Привлекательность игрового времени он оценивает в два раза выше, чем привлекательность времени, затраченного на учебу. Но имея совесть и чувство долга, Джек решил, что время игры не должно превышать время учебы. Кроме того, он заметил, что если выполнять все задания, на игру останется не более 4 часов в день.

Помогите Джеку распределить его дневное время так, чтобы он получил максимальное удовольствие и от учебы, и от игры.

Допустимое и оптимальное решения ЗЛП

Допустимое решение – любой набор переменных решения (т.е. вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$), удовлетворяющих *ограничениям*.

Оптимальное решение ЗЛП – допустимое решение доставляющее максимум (минимум) целевой функции при заданных ограничениях:

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*),$$

Значение ЗЛП

Наибольшее (наименьшее) значение целевой функции – ***значение ЗЛП***:

$$L\left(X^*\right) = L(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = L^*$$

Решить задачу ЛП – означает найти оптимальное решение этой задачи и ее значение.

Особенности графического (геометрического) метода

- Основан на построении множества допустимых решений.
- Применим только для задач малой размерности (2-3 переменные).
- Теорема об оптимальных точках: *если в ЗЛП существует оптимальное решение, то существует и оптимальная экстремальная* * *(угловая) точка.*

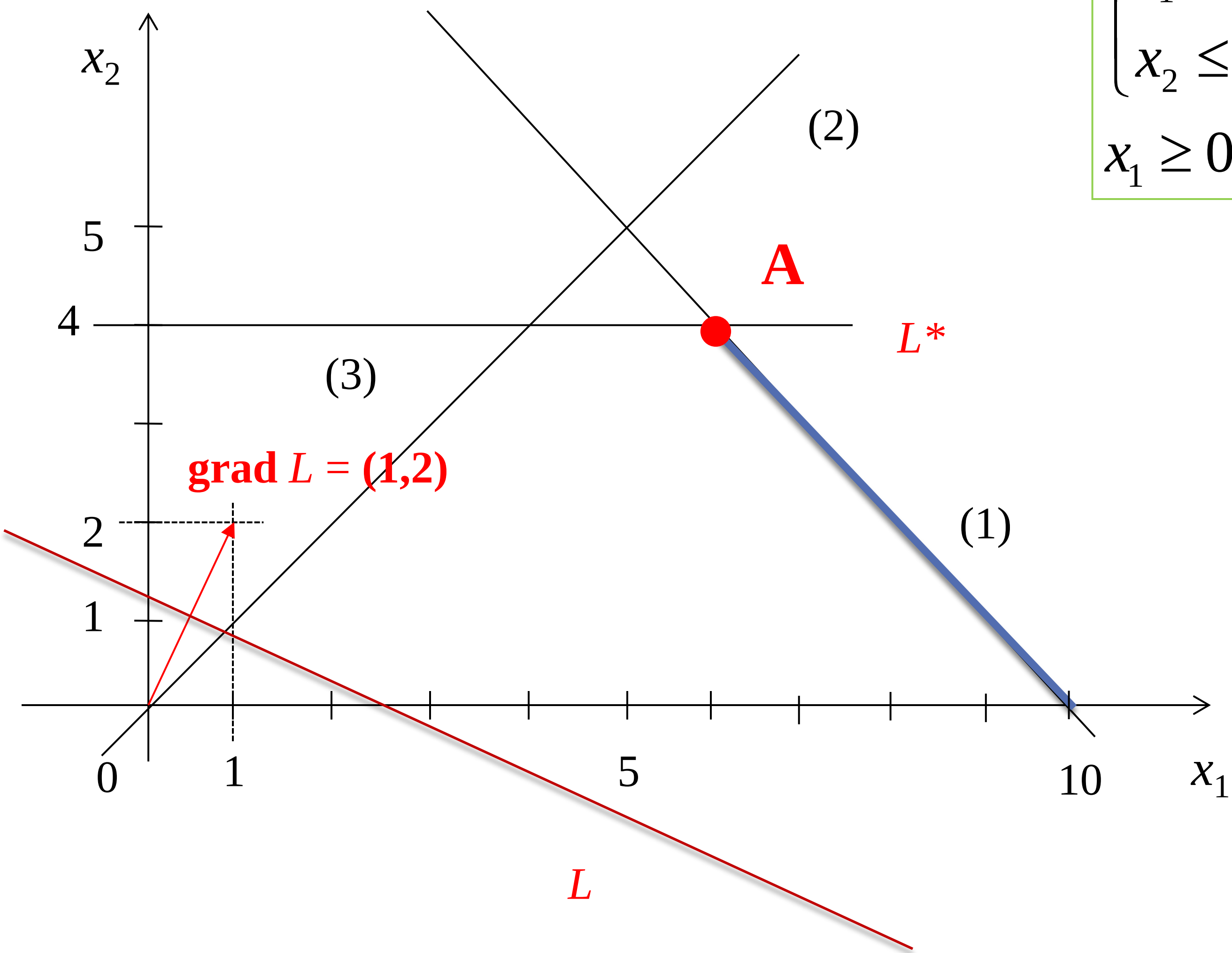
*угловая точка множества допустимых решений ЗЛП.

Решение задачи Джека

$$\max z = \max(x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 & (1) \\ x_1 - x_2 \geq 0 & (2) \\ x_2 \leq 4 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



$$A: \begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

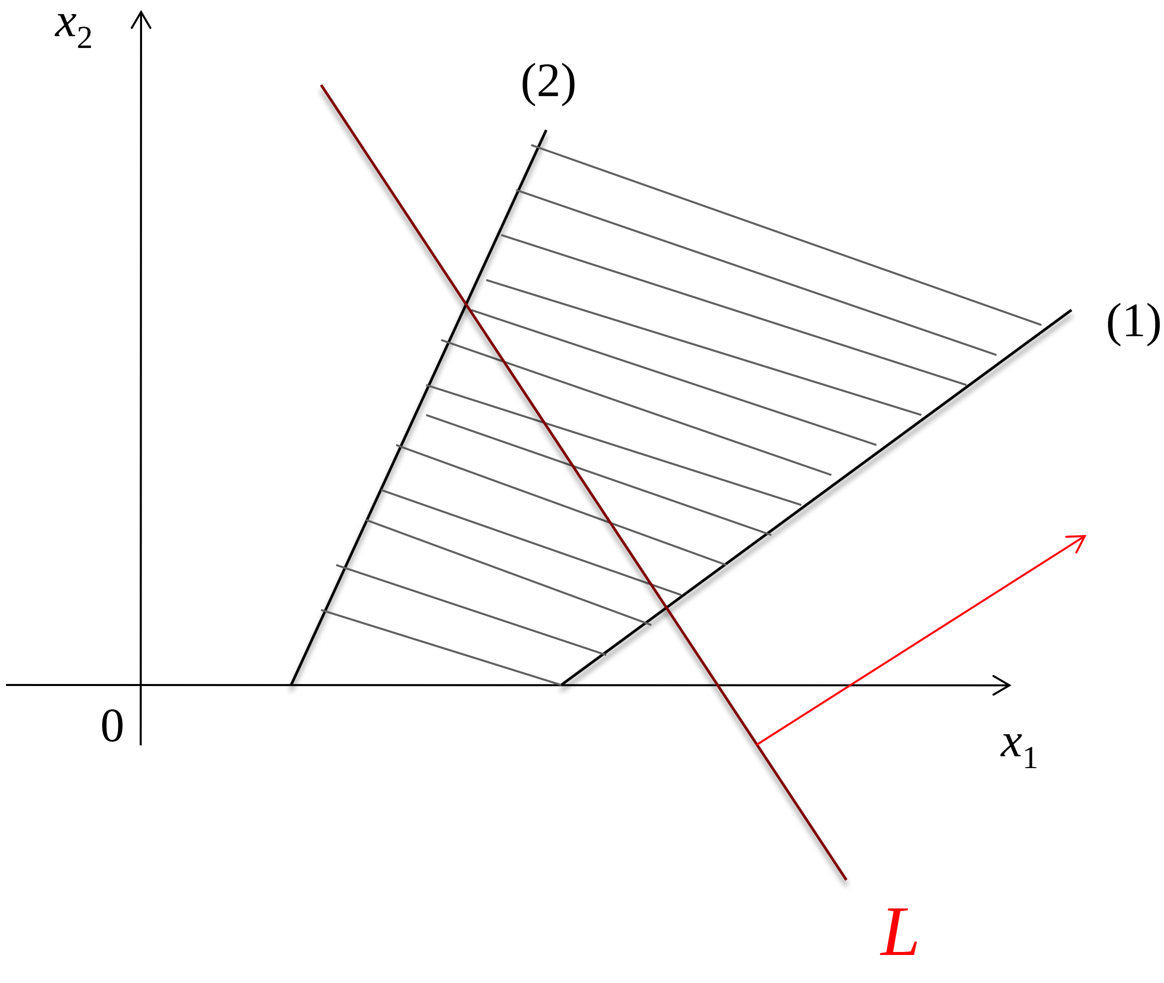
$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = (6, 4)$$

$$z^* = 14$$

Число решений ЗЛП

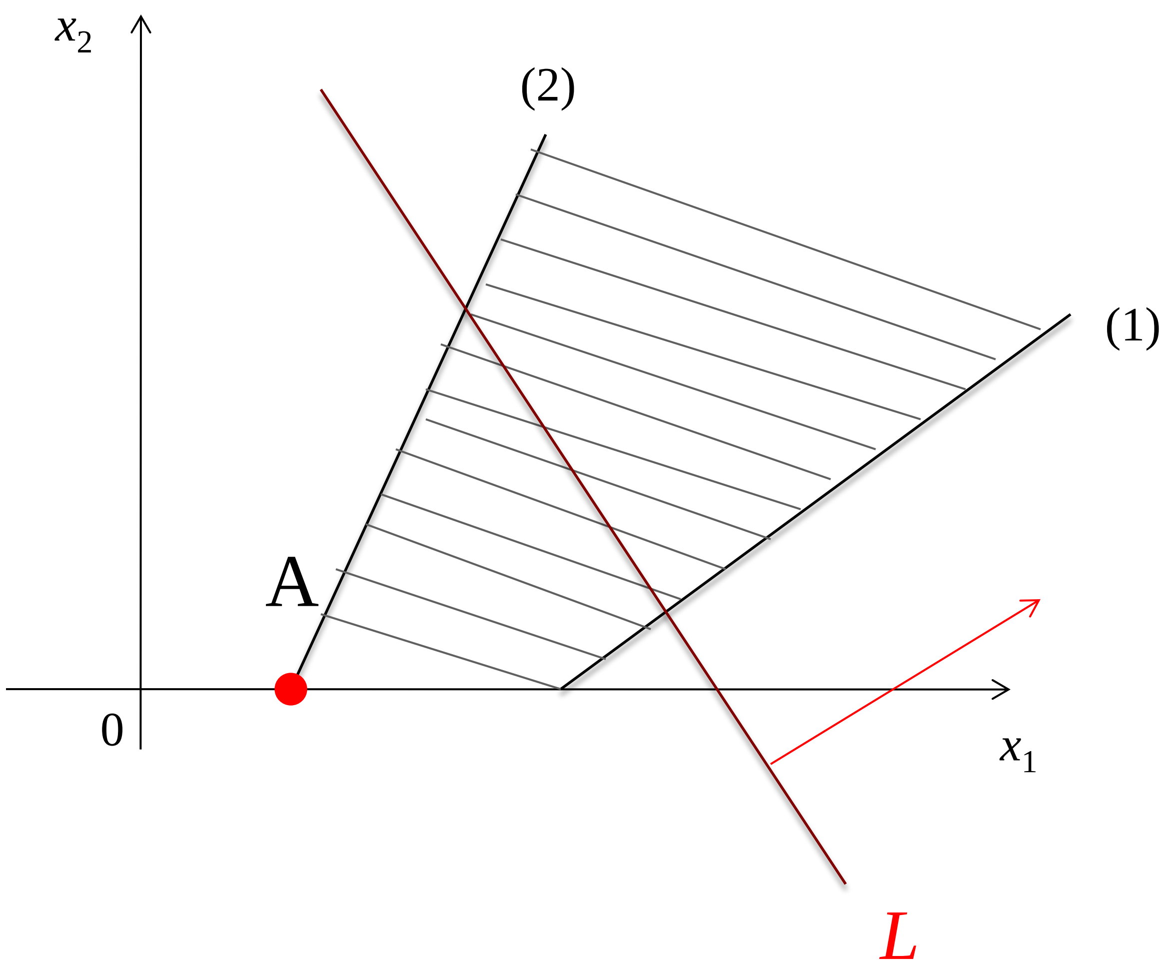
Неограниченное множество ДР

$L \to max$



Неограниченное множество ДР

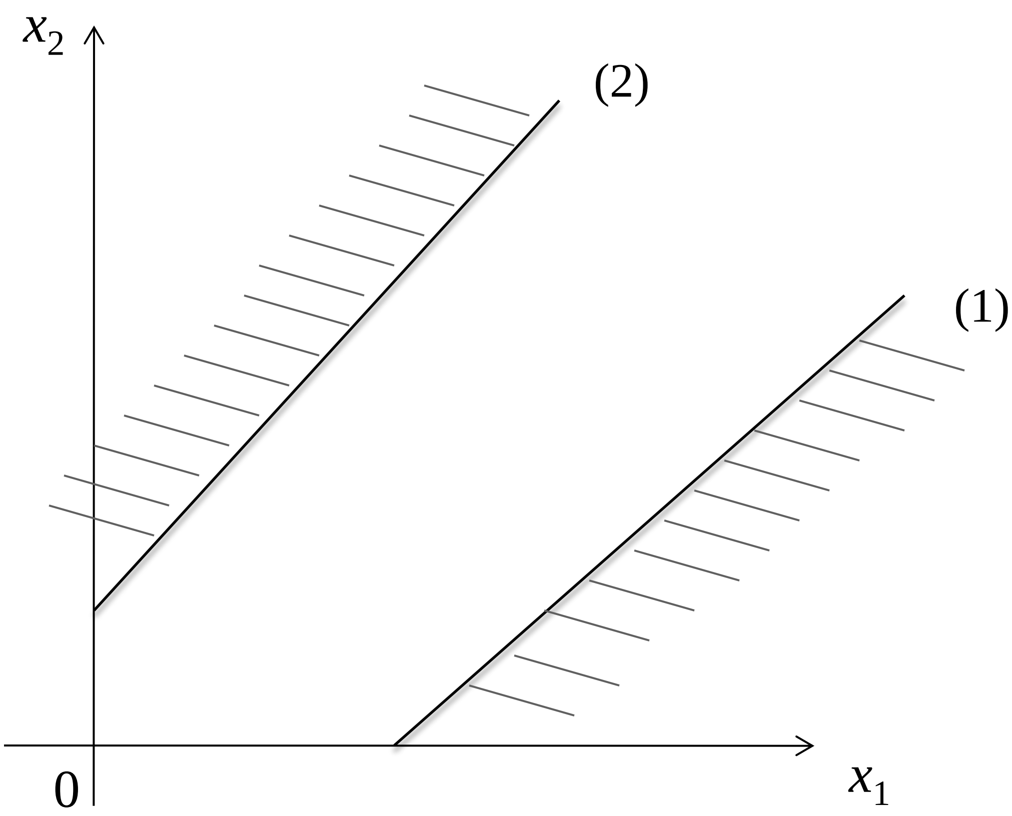
L→min



Неограниченное множество ДР

1. Неограниченность множества допустимых решений <u>может</u> привести к ***неограниченному решению***.
2. *Практически*: не хватает ограничения в постановке задачи!

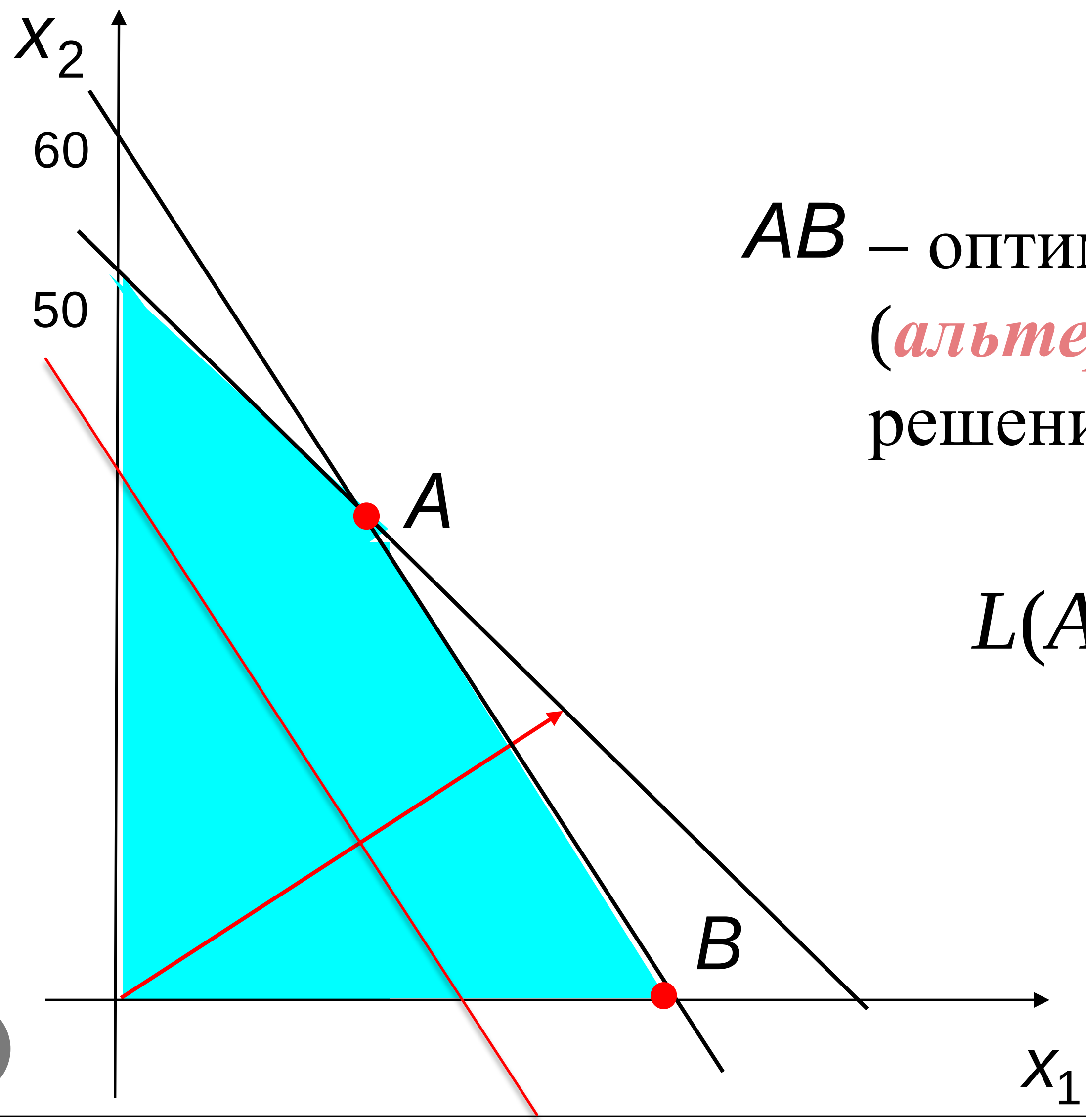
Пустое множество ДР



Пустое множество ДР

1. Нет допустимого решения – нет оптимального решения.
2. *Практически*: ошибки в логике вербальной постановки!

Случай альтернативных решений



AB – оптимальные (***альтернативные***) решения

$L(A)=L(B)$

Случай альтернативных решений

1. Чтобы выписать множество AB необходимо найти координаты A и B и написать уравнение отрезка.
2. *Практически*: ПЭВМ находит только одно из оптимальных решений!

При решении задачи ЛП возможны случаи:

1. Задача ЛП имеет ***единственное*** решение.

2. Задача ЛП имеет ***бесконечное множество*** решений.

3. Задача ЛП ***не имеет*** решений:

- неограниченность множества ДР;
- отсутствие допустимых решений (пустота множества ДР).

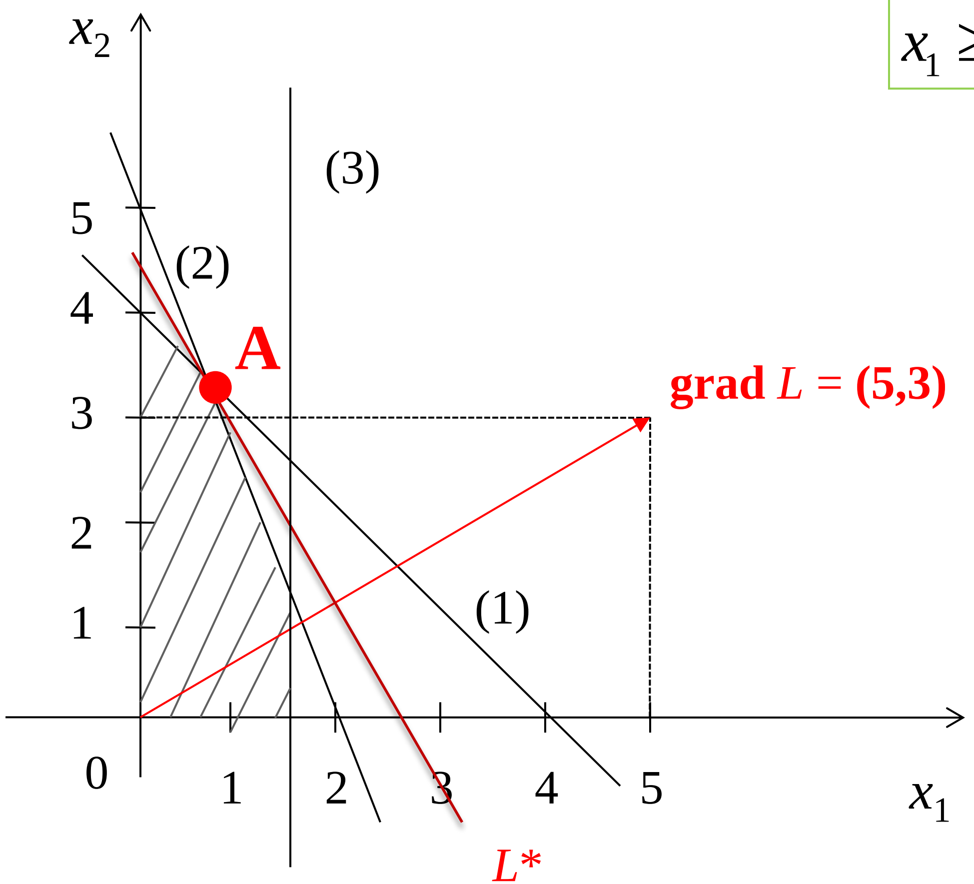
Анализ решения на чувствительность (постоптимальный анализ)

Пример 2

$$\max L = \max(5x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 & (2) \\ x_1 \le 1{,}5 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$



$$A: \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$$

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

$$L^* = \frac{40}{3}$$

Анализ решения на чувствительность (постоптимальный анализ)

Пусть найдено оптимальное решение:

$$X^*=(x^*_1, x^*_2)$$

$$L^* = L\left(X^*\right) = c_1 x_1^* + c_2 x_2^*$$

Постоптимальный анализ включает **три задачи**

Первая задача анализа на чувствительность

Как запасы ресурса влияют на оптимальное решение?

Первый вопрос 1-ой задачи анализа:

Каков ***статус*** ресурса? (Дефицитный, недефицитный).

Понятие активного ограничения

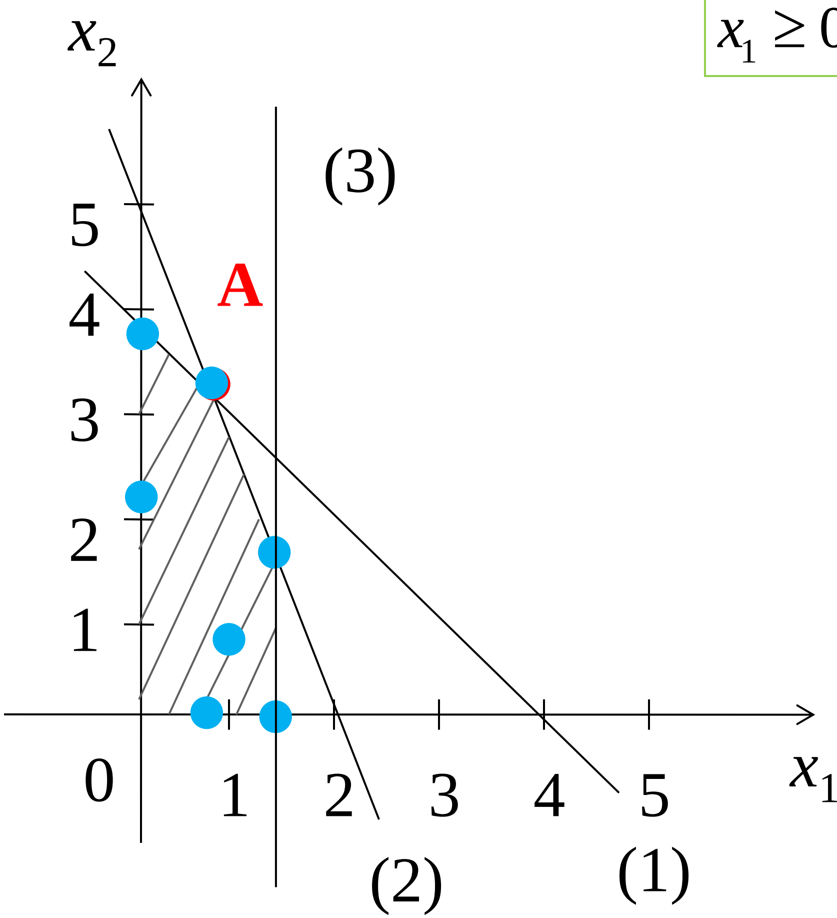
Ограничение под номером ***i*** называется ***активным ограничением*** *для допустимого решения* $X=(x_1, x_2)$, если оно выполняется на этом решении как <u>равенство</u>.

Пример 2

$$\max L = \max(5x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 & (2) \\ x_1 \le 1{,}5 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$



$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

$$L^* = \frac{40}{3}$$

Понятие дефицитного ресурса

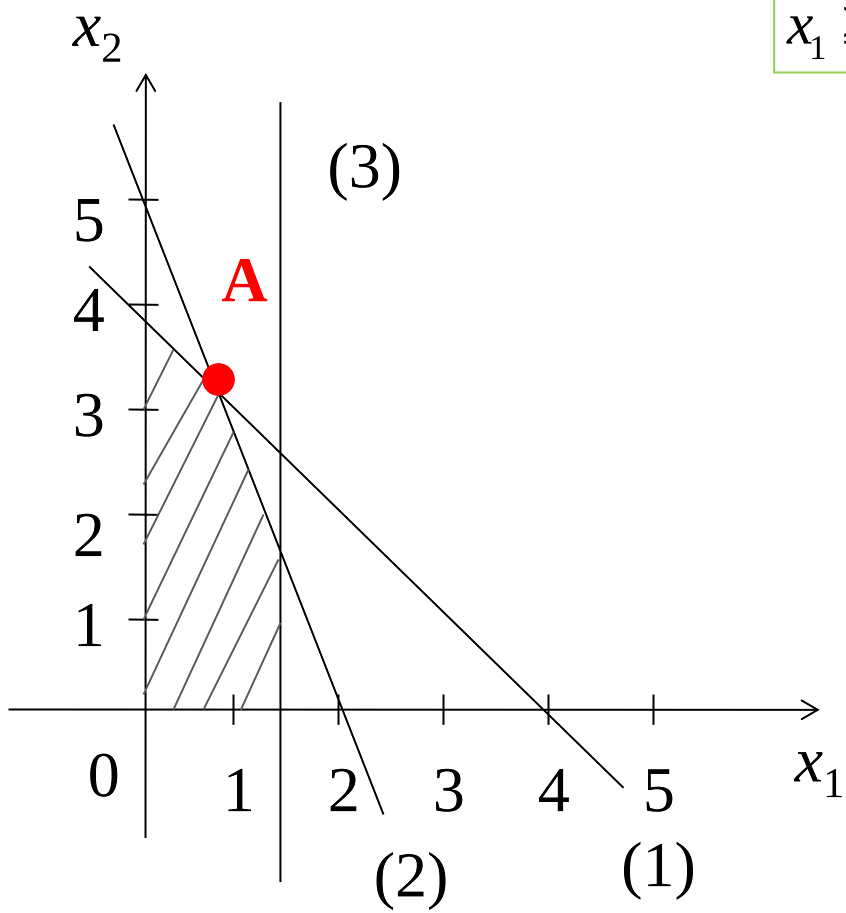
Ресурс под номером ***i*** называется ***дефицитным,*** если ограничение под номером ***i*** является <u>активным</u> *для оптимального решения* $X^*=(x^*_1, x^*_2)$.

Пример 2

$$\max L = \max(5x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 & (2) \\ x_1 \le 1,5 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$



$$x^* = \left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

$$L^* = \frac{40}{3}$$

Статус ресурса

В оптимальной точке

Активное ограничение ⟺ Дефицитный ресурс

В оптимальной точке

Неактивное ограничение ⟺ Недефицитный ресурс

Цели первой задачи анализа:

- найти максимальное *увеличение* запаса *дефицитного ресурса* для увеличения значения ЦФ;

- найти максимальное *уменьшение* запаса *недефицитного ресурса* при сохранении оптимального решения.

Первая задача анализа на чувствительность

Как запасы ресурса влияют на оптимальное решение?

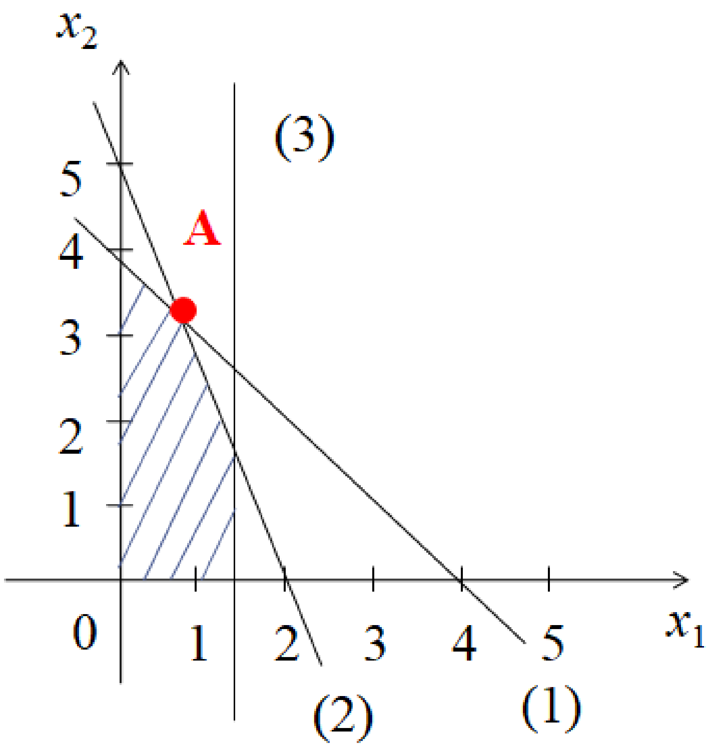
<u>Первый вопрос 1-ой задачи анализа</u>: *Каков* ***статус*** *ресурса?*

(*Дефицитный, недефицитный*).

<u>Второй вопрос 1-ой задачи анализа</u>:

- Для дефицитного ресурса: *На сколько можно увеличить запас* ***дефицитного*** *ресурса <u>для увеличения</u> полученного <u>оптимального значения ЦФ</u>?*
- *Для недефицитного ресурса: На сколько можно уменьшить запас* ***недефицитного*** *ресурса при <u>сохранении оптимального решения</u>?*

Пример 2



1. Ресурс 1 – дефицитный (ограничение 1 – активное в оптимальной точке).

2. Ресурс 2 – дефицитный (ограничение 2 – активное в оптимальной точке).

3. Ресурс 3 – недефицитный (ограничение 3 – неактивное в оптимальной точке).

Пример 2. Ресурс 1

$$\max L = \max(5x_1 + 3x_2)$$

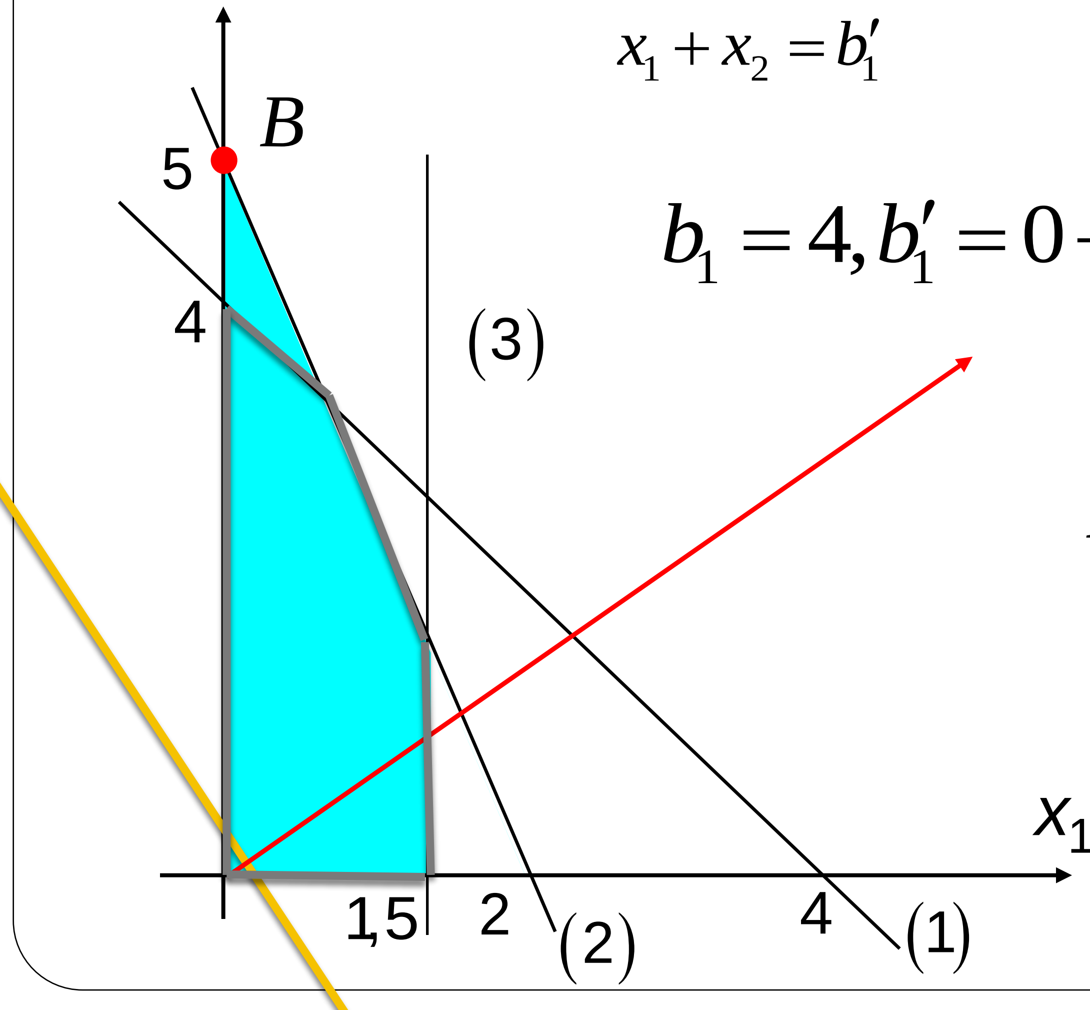
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 & (2) \\ x_1 \le 1,5 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$B=(0,5)$

$$x_1 + x_2 = 4 \Longrightarrow b_1 = 4$$

$$x_1 + x_2 = b_1'$$



$$b_1 = 4, b_1' = 0 + 5 = 5, \Delta b_1 = 5 - 4 = 1$$

$$L(B) = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$$

$$\Delta L = 15 - \frac{40}{3} = \frac{5}{3}$$

Пример 2. Ресурс 2

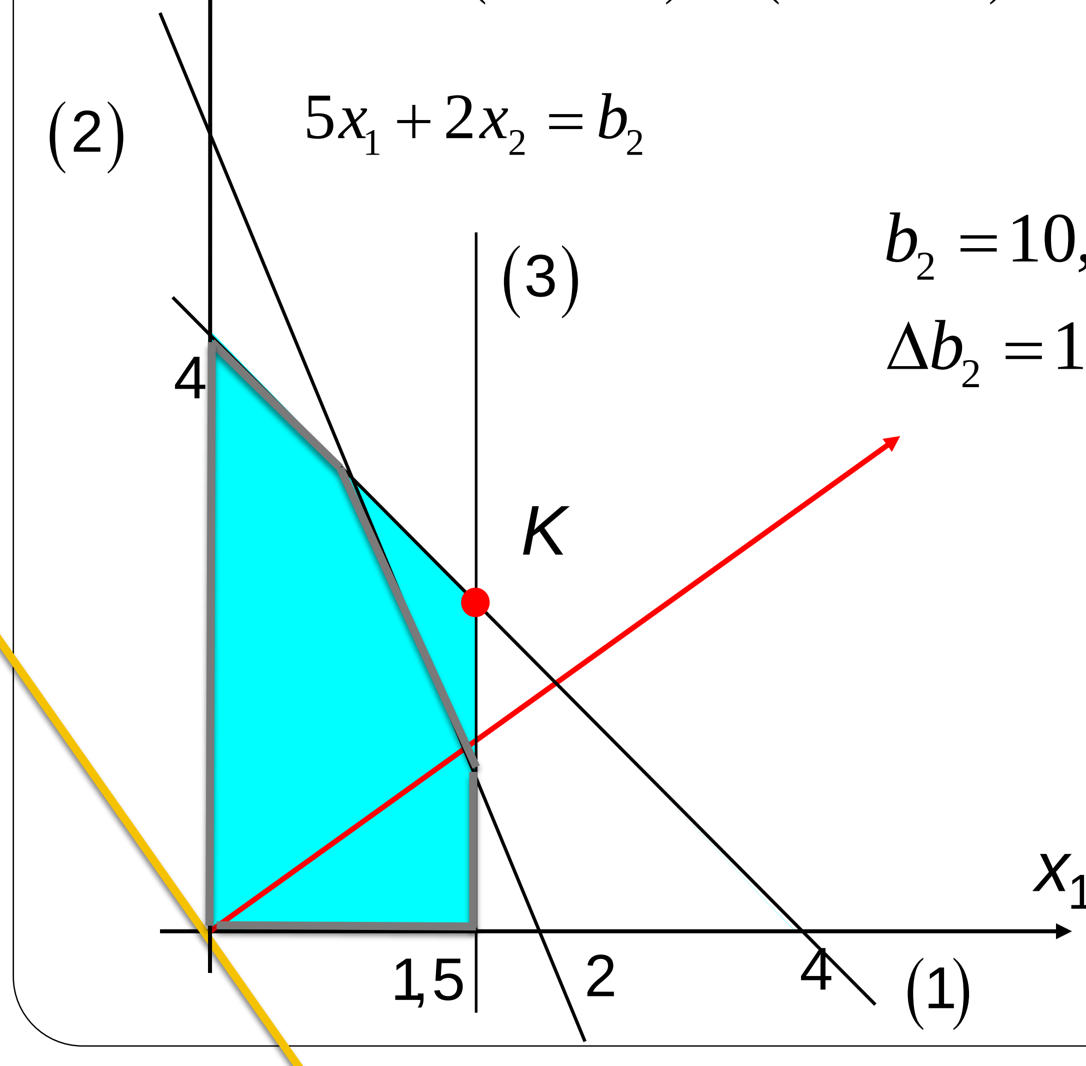
$$\max L = \max(5x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 & (2) \\ x_1 \le 1,5 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$K = (1,5; x_2) = (1,5; 2,5)$$

$$5x_1 + 2x_2 = b_2$$



$$b_2 = 10, b_2' = 5 \cdot 1,5 + 2 \cdot 2,5 = 12,5$$

$$\Delta b_2 = 12,5 - 10 = 2,5$$

$$L(K) = 5 \cdot 1,5 + 3 \cdot 2,5 = 15$$

$$\Delta L = 15 - \frac{40}{3} = \frac{5}{3}$$

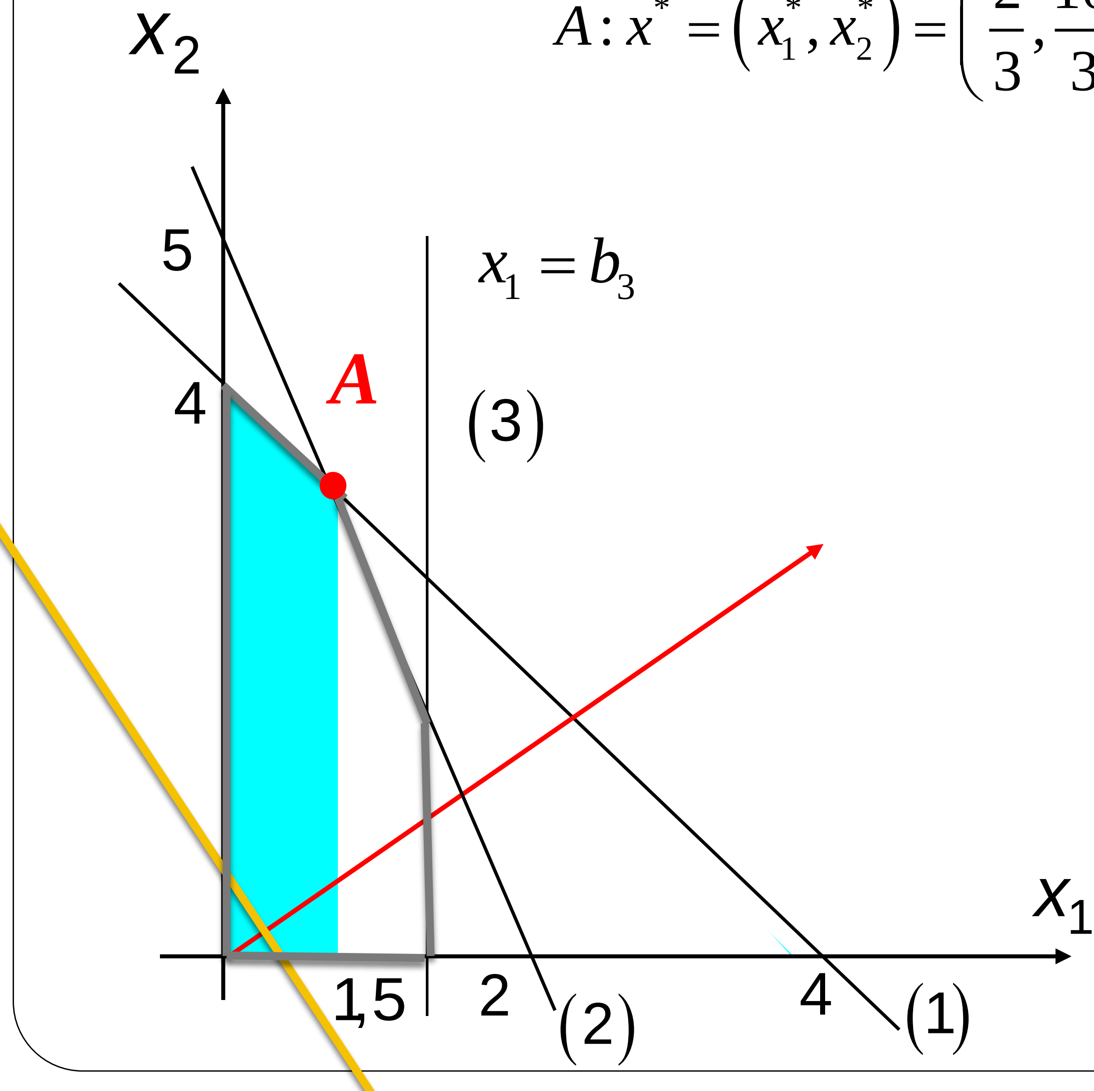
Пример 2. Ресурс 3

$$\max L = \max(5x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 & (2) \\ x_1 \le 1,5 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

$$A: x^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$$



$$b_3 = 1,5; \quad b_3' = \frac{2}{3}$$

$$\Delta b_3 = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\Delta L = 0$$

Вывод по примеру 2

$$\max L = \max(5x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 & (2) \\ x_1 \le 1{,}5 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Ресурс номер (ограничение)	Статус	На сколько можно *max* увеличить/ уменьшить	Прирост оптимального значения ЦФ
1	Дефицит.	1	5/3
2	Дефицит.	2,5	5/3
3	Недефиц.	-1/3	0

Вторая задача анализа на чувствительность

Увеличение объема какого ресурса наиболее выгодно?

$$y_i = \frac{\text{Максимальное приращение оптимального значения } L^*}{\text{Максимальное допустимое значение прироста ресурса } i}$$

y_i – ***теневая цена*** (*двойственная оценка*) *ресурса i* – показывает на сколько изменится максимальная прибыль при увеличении запаса этого ресурса на единицу.

Если ресурс недефицитный, оптимальное решение не изменяется, прибыль не растет:

$$y_i = 0$$

Пример 2

Первый ресурс: Второй ресурс: Третий ресурс:

$$y_1 = \frac{\frac{5}{3}}{1} = \frac{5}{3} \qquad y_2 = \frac{\frac{5}{3}}{2{,}5} = \frac{2}{3} \qquad y_3 = \frac{0}{-\frac{1}{3}} = 0$$

***<u>Вывод по второй задаче анализа</u>*:**

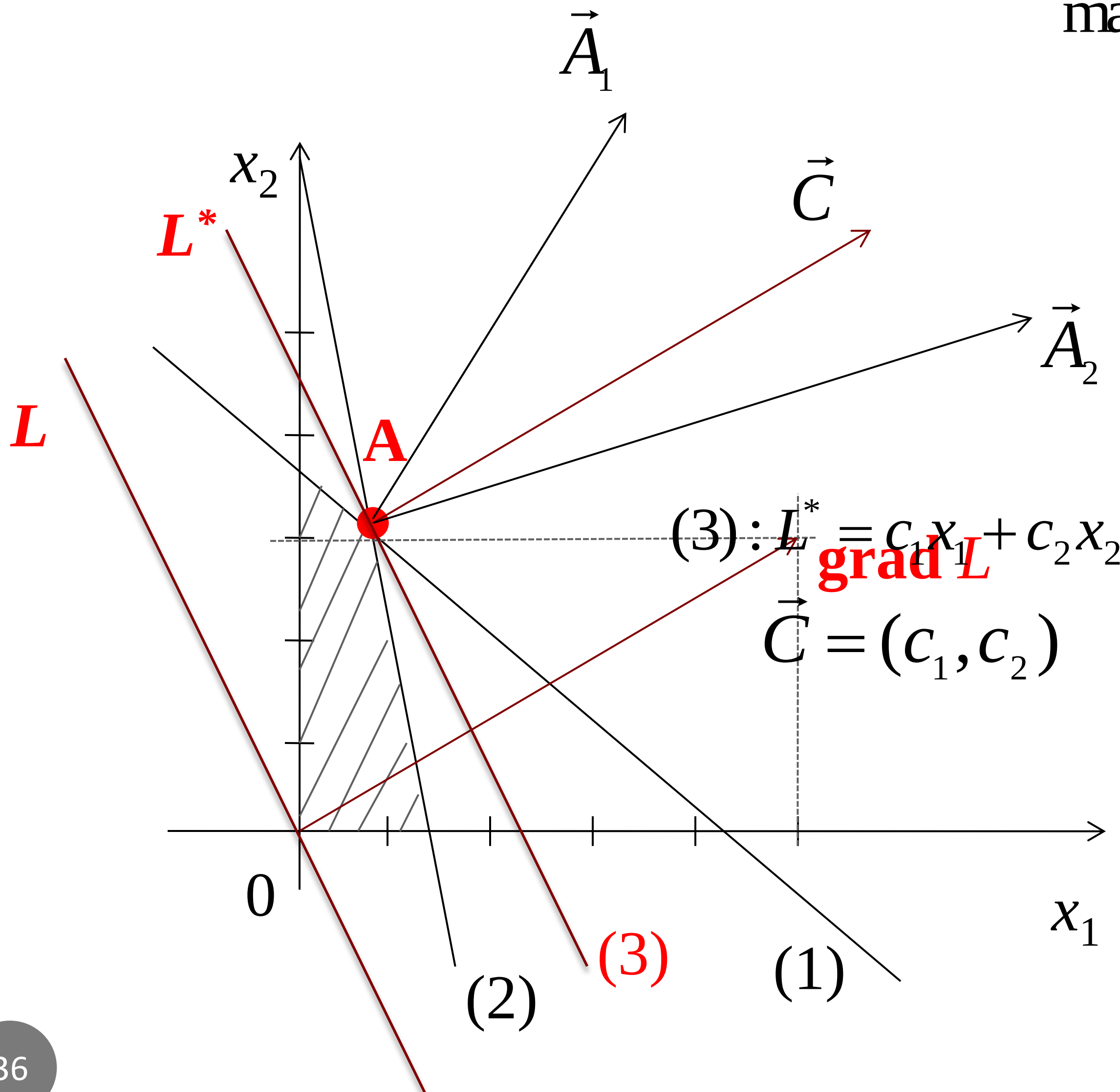
Наиболее выгодно увеличивать запас ***ресурса 1*** *(если имеется возможность увеличения его на единицу).*

Запасы ***ресурса 3*** *можно сократить на 1/3 при сохранении оптимального решения.*

Третья задача анализа на чувствительность

В каких пределах допустимо изменение коэффициентов ЦФ без изменения оптимального решения?

Пример.



$$\max L = \max(c_1x_1 + c_2x_2)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

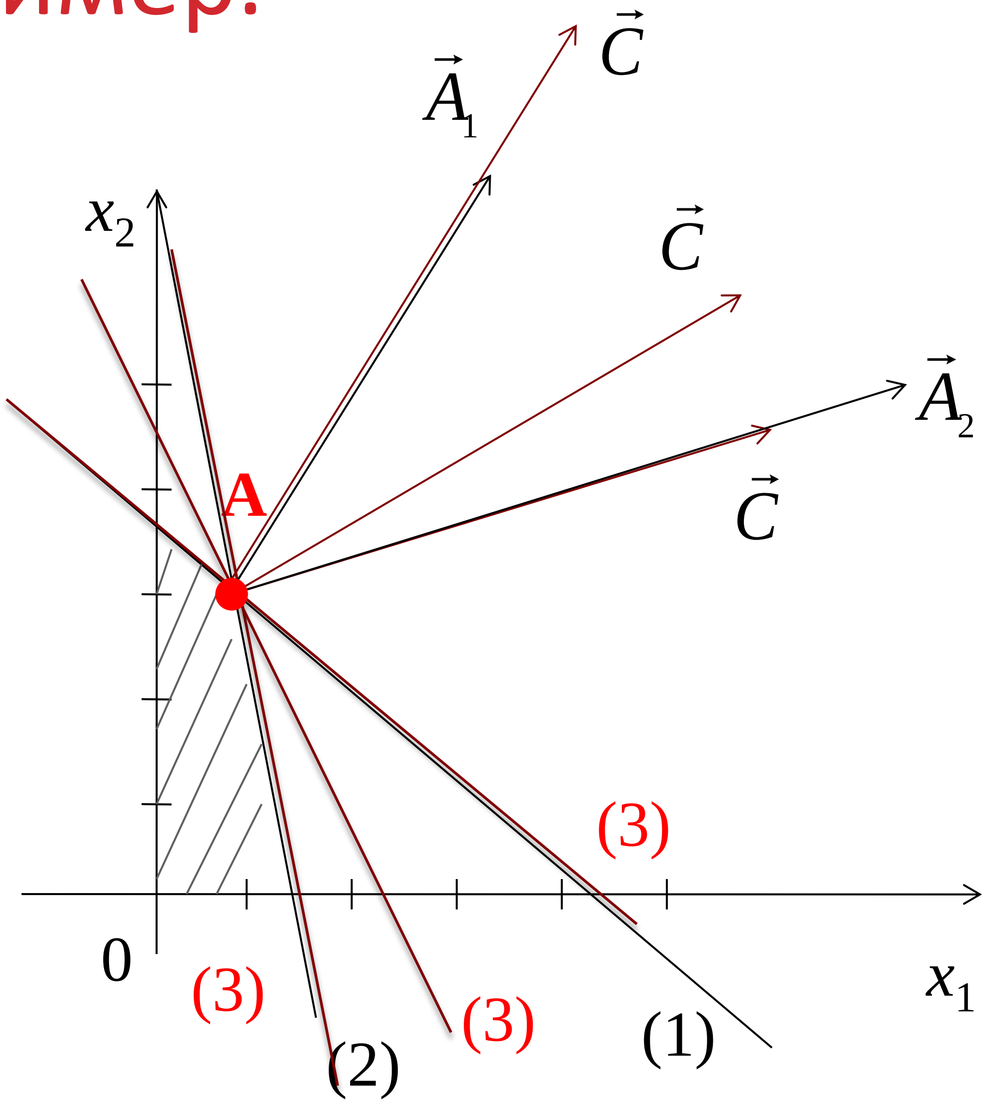
$$(1): a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$\vec{A}_1 = (a_{11}, a_{12})$$

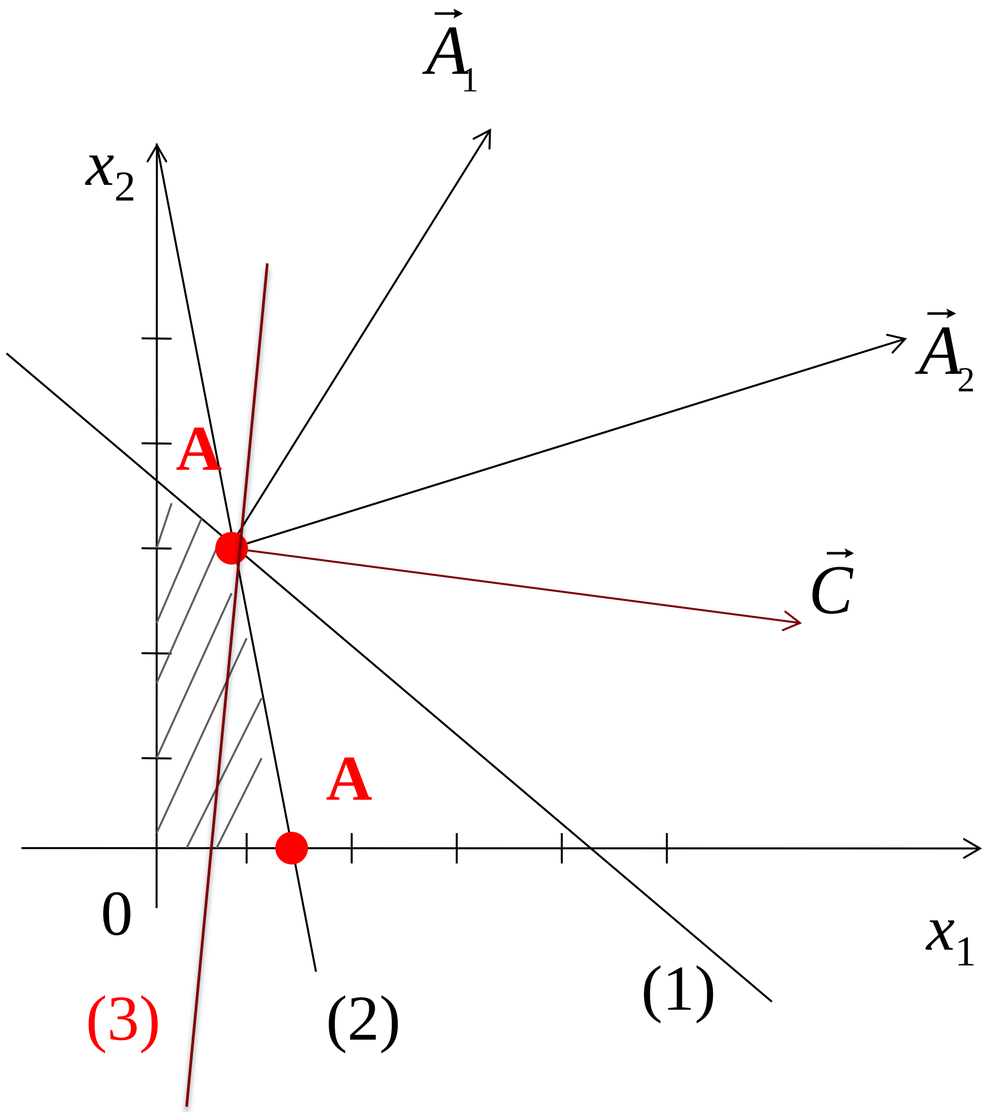
$$(2): a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

$$\vec{A}_2 = (a_{21}, a_{22})$$

Пример.



Пример.



Третья задача анализа на чувствительность

Пусть $L = c_1x_1 + c_2x_2$ – ЦФ, а $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

– два <u>активных</u> ограничения в <u>оптимальной</u> точке $X^*=(x^*_1, x^*_2)$.

Если выполняются неравенства: $\dfrac{a_{11}}{a_{12}} \le \dfrac{c_1}{c_2} \le \dfrac{a_{21}}{a_{22}}$,

то $X^*=(x^*_1, x^*_2)$ <u>**остается оптимальным**</u> решением задачи.

Пример 2. Диапазон оптимальности (интервал устойчивости)

$$\boxed{L = 5x_1 + 3x_2}$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}}$$

Если $1 \le \dfrac{c_1}{c_2} \le \dfrac{5}{2}$,

то план $X^* = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$ остается оптимальным.

В частности, если c_2=3, то для c_1: $3 \le c_1 \le \dfrac{15}{2}$

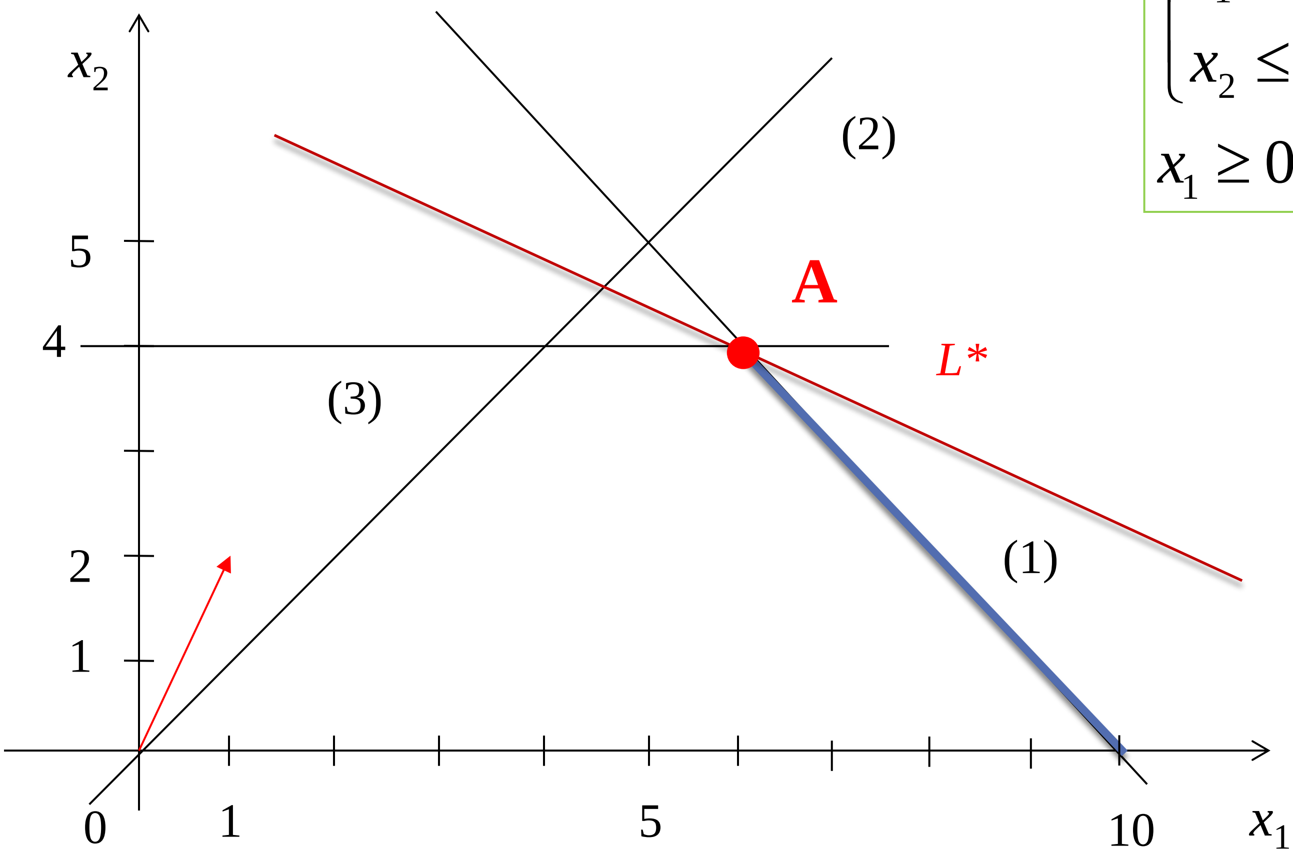
Если c_1=5, то для c_2: $2 \le c_2 \le 5$

Решение задачи Джека

$$\max z = \max(x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 & (1) \\ x_1 - x_2 \geq 0 & (2) \\ x_2 \leq 4 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



$$A: \begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = (6, 4)$$

$$z^* = 14$$