Прикладные модели оптимизации

Доцент, к.ф.-м.н., доцент кафедры № 43

Фаттахова Мария Владимировна

mvfa@yandex.ru

Прямая и двойственная задачи линейного программирования

Взаимосвязь пары двойственных задач

- Двойственная к двойственной ЗЛП есть прямая задача.
- Одновременно достигают оптимальных решений.
- Одно и то же значение задач.
- Зная решение одной задачи из пары двойственных задач, можно найти решение другой задачи.

Теоремы двойственности и равновесия в линейном программировании

$$\begin{cases} \max L = \max CX \\ \quad AX \le B \qquad (1) \\ \quad X \ge 0. \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \min P = \min YB \\ \quad YA \ge C \qquad (2) \\ \quad Y \ge 0. \end{cases}$$

Лемма 1. (*Свойство допустимых решений*)

Пусть X и Y – произвольные допустимые решения задач (1) и (2). Тогда

$$CX \le YB$$

Лемма 2. (*Достаточное условие оптимальности*)

Пусть X^* и Y^* – произвольные допустимые решения задач (1) и (2), для которых выполнено равенство

$$CX^* = Y^* B.$$

Тогда X^* и Y^* – оптимальные решения задач ЛП.

Теорема 1. (*Двойственности*).

- Если обе задачи ЛП (и прямая, и двойственная) имеют допустимые решения, то обе задачи имеют оптимальные решения X^* и Y^* соответственно, причем

$$L^* = P^*, \quad L^* = CX^*, \quad P^* = Y^* B.$$

- Если хотя бы одна из задач ЛП (прямая или двойственная) не имеет допустимого решения, то обе задачи ЛП (и прямая, и двойственная) не имеют оптимальных решений.

Замечание.

Теорема двойственности справедлива для любой пары двойственных задач.

Теорема 3. (*Стандартная теорема равновесия*)

Для того чтобы пара допустимых решений X^* и Y^* задач (1) и (2) была парой оптимальных решений соответствующих задач, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} Y^*(B - AX^*) = 0, \\ (Y^*A - C)X^* = 0. \end{cases}$$

Следствие. (*Критерий оптимальности для стандартной задачи ЛП*).

Для того чтобы пара допустимых решений

$$X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*) \qquad \text{и} \qquad Y^* = (y_1^*, \cdots, y_m^*)$$

задач (1) и (2) была парой оптимальных решений, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:

1. $x_j^* > 0 \Rightarrow a_{1j}y_1^* + \cdots + a_{m\,j}y_m^* = c_j,$
2. $a_{1j}y_1^* + \cdots + a_{m\,j}y_m^* > c_j \Rightarrow x_j^* = 0,$
3. $y_i^* > 0 \Rightarrow a_{i\,1}x_1^* + \cdots + a_{i\,n}x_n^* = b_i,$
4. $a_{i\,1}x_1^* + \cdots + a_{i\,n}x_n^* < b_i \Rightarrow y_i^* = 0.$

Пример (Лек. 2).
Прямая и двойственная задачи

$$\max L = \max(5x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 & (2) \\ x_1 \le 1{,}5 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$\min C = \min\left(4y_1 + 10y_2 + 1{,}5y_3\right)$$

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 + y_3 \ge 5 \\ y_1 + 2y_2 \ge 3 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0$$

Оптимальное решение ПЗ

$x^*_1 = 2/3$

$x^*_2 = 10/3$ $L^* = 40/3$

Оптимальное решение ДЗ

$y^*_1 = 5/3$ $y^*_3 = 0$

$y^*_2 = 2/3$ $C^* = 40/3$

Пример (Лек. 2)

Первый ресурс:

$$y_1 = \frac{\frac{5}{3}}{1} = \frac{5}{3}$$

Второй ресурс:

$$y_2 = \frac{\frac{5}{3}}{2,5} = \frac{2}{3}$$

Третий ресурс:

$$y_3 = \frac{0}{-\frac{1}{3}} = 0$$

<u>Вывод по второй задаче анализа</u>:

*Наиболее выгодно увеличивать запас **ресурса 1*** (*если имеется возможность увеличения его на единицу*).

*Запасы **ресурса 3** можно сократить на 1/3 при сохранении оптимального решения.*

Дополнительное задание 2 (2 балла)

Используя геометрическое решение двойственной задачи и теоремы двойственности и равновесия, решите следующую задачу линейного программирования:

$$F = -4x_1 - 18x_2 - 30x_3 - 5x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \le -3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \ge 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

СРОК: 29.09.2021

Тема 2. Транспортная задача

Лекция 4

Пример 1. Песчаные карьеры

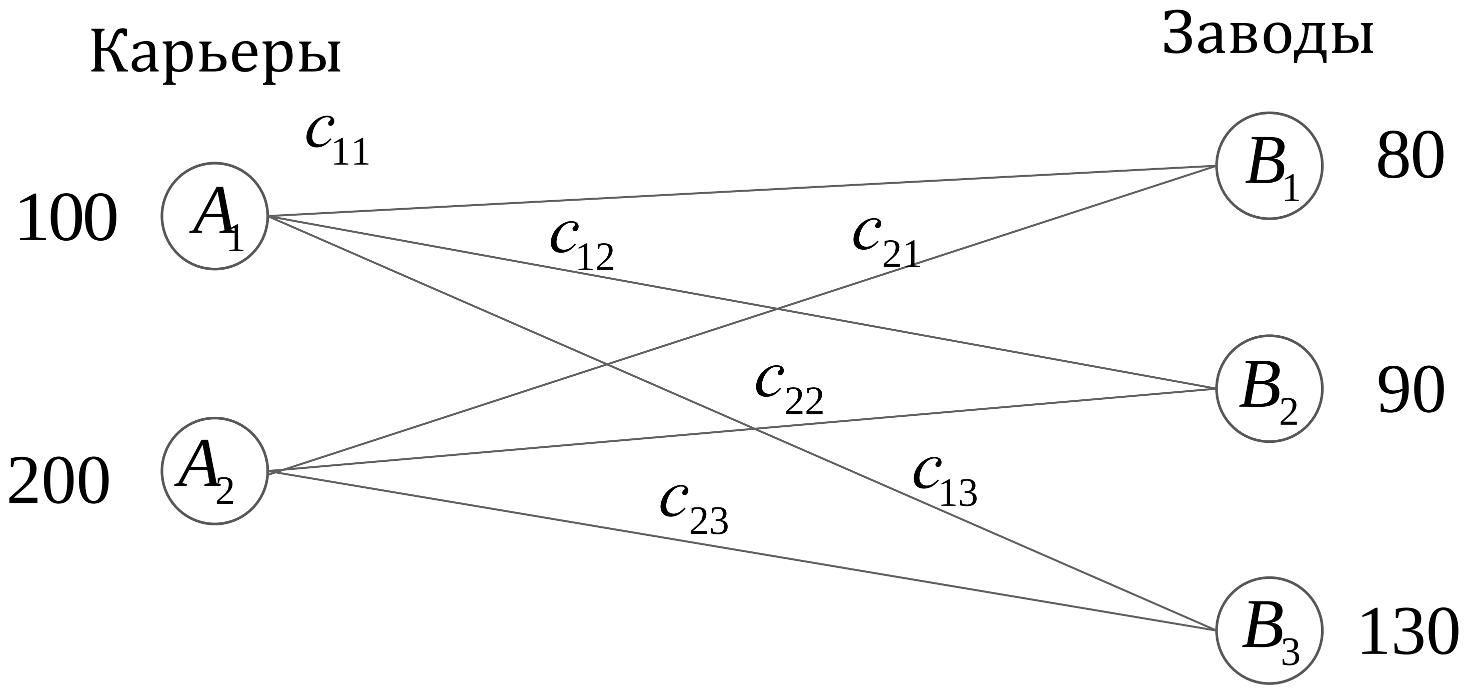
В районе имеется **два песчаных карьера**, с которых вывозится песок на 5-тонных грузовиках.

В этом же районе имеется **три завода железобетонных** конструкций – потребителей песка, которым требуется соответственно 80, 90 и 130 грузовиков песка в день.

Стоимости перевозки песка одним грузовиком от карьеров – поставщиков к заводам – потребителям известны.

Необходимо составить план перевозок, **минимизирующий** суммарные *транспортные издержки*.

Пример 1. Песчаные карьеры



Транспортные издержки c_{ij}

	Завод B1	**Завод B2**	**Завод B3**
Карьер A1	***4***	***6***	***3***
Карьер A2	***8***	***4***	***5***

Сетевая модель ТЗ. Основные понятия

Пусть $N = \{x\}$ – конечное (заданное) множество узлов ($|N| = n$) и пусть $u: N \times N \to R^1$ – заданная функция, называемая **функцией пропускной способности**. Тогда говорят, что задана **сеть**.

Сеть (N, u) – это конечный граф без циклов и петель, ориентированный в одном общем направлении, с заданной функцией пропускной способности.

Сетевая модель ТЗ. Основные понятия

Пропускная способность ребра – максимальное количества груза (вещества), которое может быть провезено от x к y: $\boldsymbol{u(x,y)}$.

Если $u(x,y) = 0$, перевозка от x к y **невозможна**.

В рамках ТЗ предполагается, что пропускная способность принимает **только целочисленные** значения:

$$u: N \times N \to Z$$

Поток в сети

Потоком в сети (N, u) называется функция f:

$$f: N \times N \to R^1$$

удовлетворяющее свойствам:

$$\forall (x, y) \in N \times N \Longrightarrow$$

1. $f(x, y) = -f(y, x)$ (кососимметрия)
2. $f(x, y) \le u(x, y)$ (допустимость)

В рамках ТЗ предполагается, что поток принимает **только целочисленные** значения:

$$f: N \times N \to Z$$

Функции от множества

$A \subset N,\quad g$ – некоторая функция на N

$$\Rightarrow \quad g(A) = \sum_{x \in A} g(x)$$

$A \subset N, B \subset N,$

$R(x, y)$ – некоторая функция на (x, y)

$$\Rightarrow \quad R(A, B) = \sum_{x \in A, y \in B} R(x, y)$$

Свойства функций от множества

$$g\left(A\cup B\right)=g\left(A\right)+g\left(B\right),\ A\cap B=\varnothing$$

$$R\left(A\cup B,C\right)=R\left(A,C\right)+R\left(B,C\right),\ A\cap B=\varnothing$$

$$R\left(A,B\cup C\right)=R\left(A,B\right)+R\left(A,C\right),\ B\cap C=\varnothing$$

Свойства потока в сети

1. $f(x,y) = -f(y,x)$ (кососимметрия)
2. $f(x,y) \leq u(x,y)$ (допустимость)

$1 \rightarrow 1'$: $f(A,A) = 0 \quad \forall A \subset N$

$2 \rightarrow 2'$: $f(A,B) \leq u(A,B) \quad \forall A, B \subset N$

$f(A,B)$ – полный (суммарный) поток из A в B

$u(A,B)$ – полная (суммарная) пропускная способность рёбер, начинающихся в A и заканчивающихся в B.

Источники и стоки

Узел $s \in N$ называется **источником сети** (N, u), если

$$f(s, N) > 0.$$

Узел $s' \in N$ называется **стоком сети** (N, u), если

$$f(s', N) < 0.$$

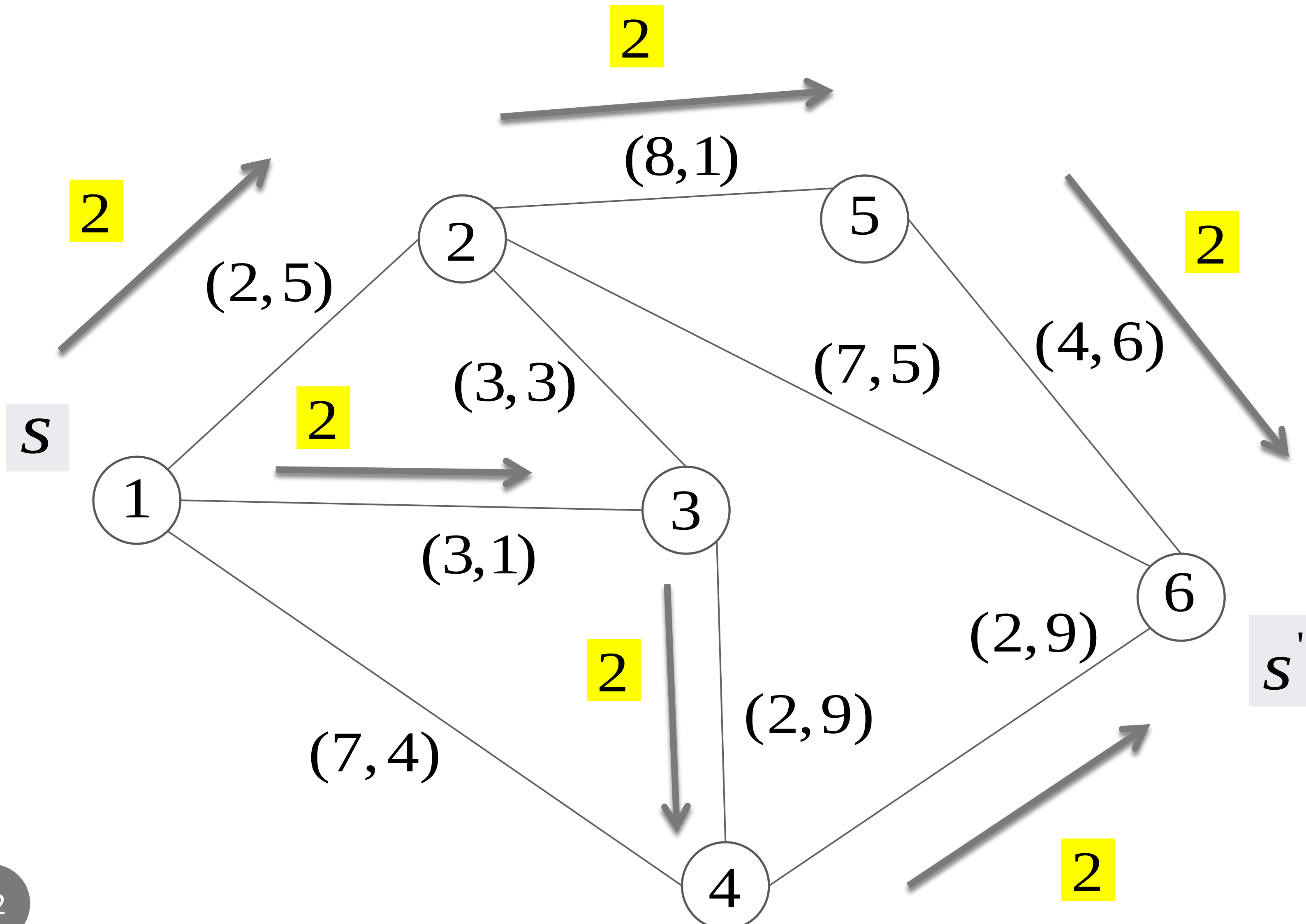
Будем предполагать, что в сети (N, u) имеется **один источник и один сток**. (*Предположение единственности*).

Тогда для всех $x \neq s, x \neq s'$ выполнено:

$$f(x, N) = 0$$

– промежуточные узлы.

Пример 2. Транспортная сеть

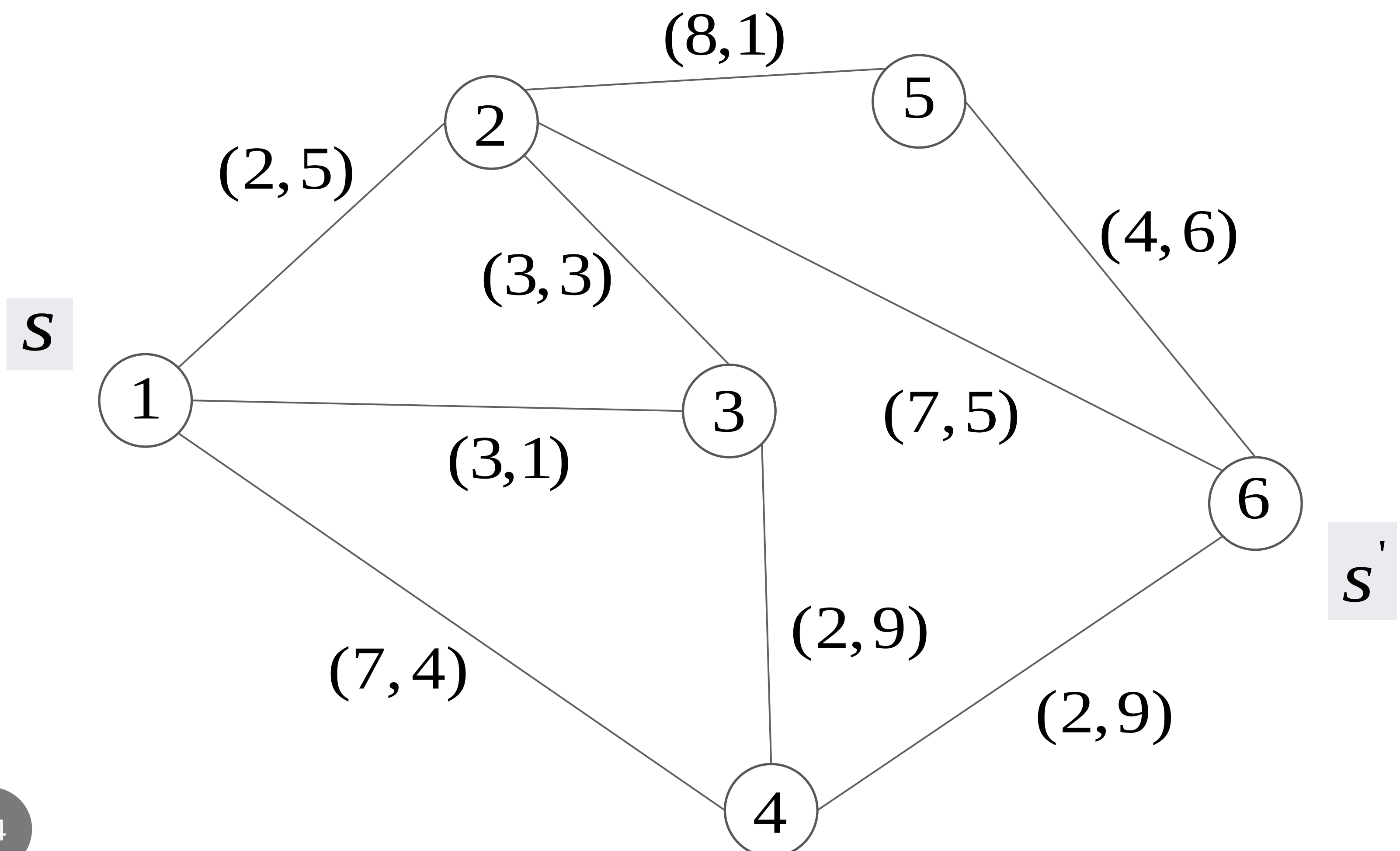


Мощность потока. Максимальный поток

Число $f(s, N) = f(N, s') > 0$ называется **мощностью потока.**

Поток максимальной мощности называется **максимальным потоком в сети.**

Пример 2. Транспортная сеть



Сечение сети

Пара множеств (S, S'), $S \subset N$, $S' \subset N$, называется **сечением сети**, если выполнено:

$$S \cup S' = N$$

$$S \cap S' = \emptyset$$

$$s \in S, s' \in S'$$

Пропускной способностью сечения (S, S') называется $u(S, S')$.

Сечение $(\bar{S}, \overline{S'})$, $\bar{S} \subset N$, $\overline{S'} \subset N$ с минимальной пропускной способностью называется **минимальным сечением**.

Задачи

Прямая задача (о максимальном потоке)

В сети (N, u) построить максимальный поток и найти мощность этого потока.

Двойственная задача (о минимальном сечении)

В сети (N, u) найти минимальное сечение и вычислить его пропускную способность.

Лемма 1 (Свойство потока и сечения)

Пусть f – произвольный поток в (N, u), а (S, S') – произвольное сечение в N. Тогда мощность f не превосходит $u(S, S')$:

$$f(s, N) \leq u(S, S')$$

Лемма 2 (Достаточное условие оптимальности)

Если мощность какого либо потока $\bar{f}$ совпадает с пропускной способностью некоторого сечения $(\bar{S}, \bar{S'}), \bar{S} \subset N, \bar{S'} \subset N$:

$$\bar{f}(s, N) = u(\bar{S}, \bar{S'}),$$

то этот поток является максимальным, а данное сечение – минимальным.

Теорема (о максимальном потоке и минимальном сечении)

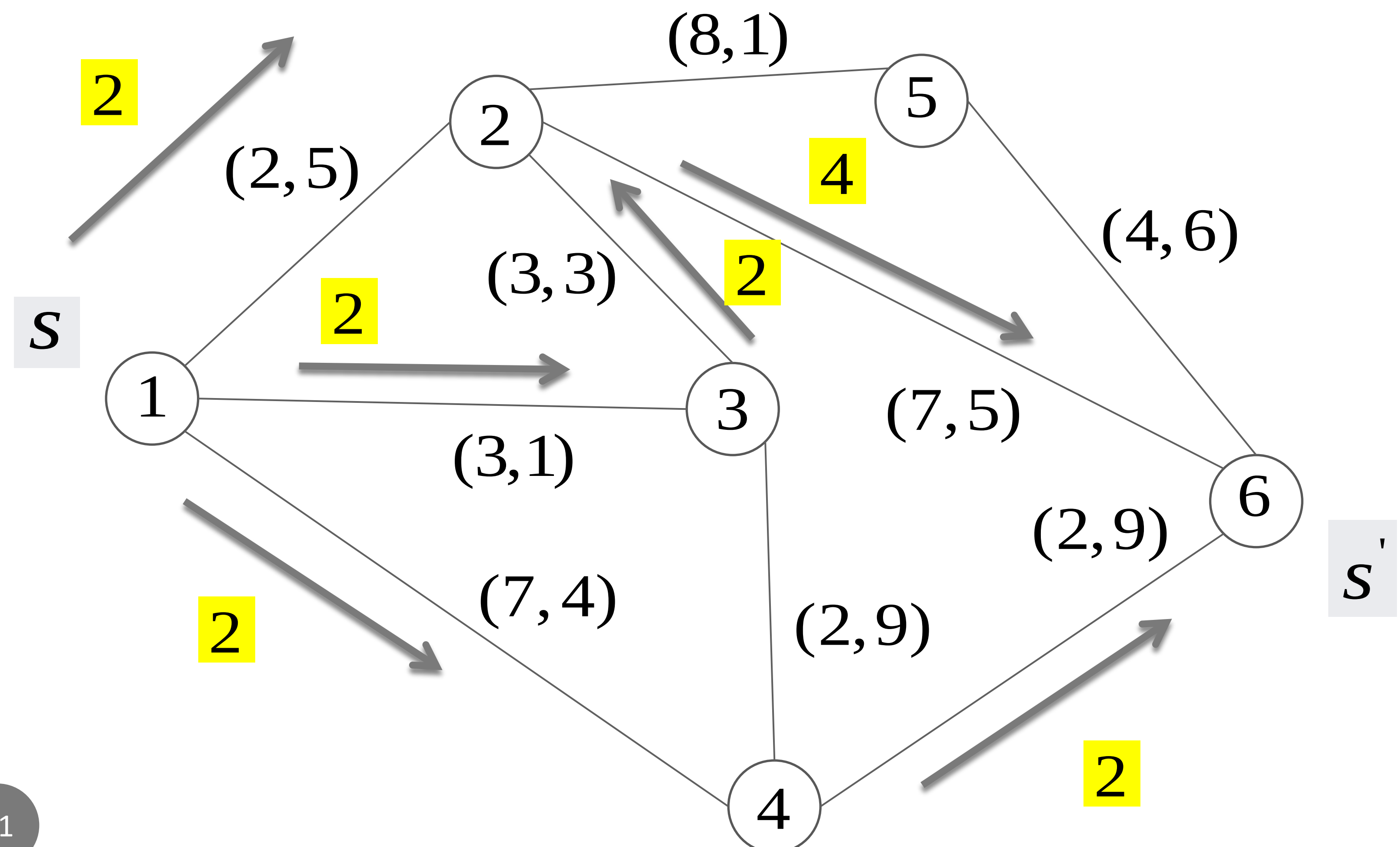
В произвольной сети (N, u) существует максимальный поток $\bar{f}: N \times N \to Z$ и минимальное сечение $(\bar{S}, \bar{S'})$, $\bar{S} \subset N$, $\bar{S'} \subset N$, при этом мощность максимального потока совпадает с пропускной способностью минимального сечения, т.е.

$$\bar{f}\,(s, N) = u(\bar{S}, \bar{S'}).$$

Понятие пути, ненасыщенного потоком

- Пусть $f: N \times N \to Z$, – поток в сети (N, u). Будем говорить, что **ребро (x, y) не насыщено потоком f**, если
$$f(x, y) < u(x, y).$$
- **Путём $P(s, s')$ из источника в сток** будем называть последовательность рёбер вида:
$$P(s, s') = \{(s, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, s')\}.$$
- Будем говорить, что **путь не насыщен относительно потока**, если каждое ребро не насыщено относительно этого потока.

Пример 2. Транспортная сеть



Теорема (о максимальном потоке и минимальном сечении)

В произвольной сети (N, u) существует максимальный поток $\bar{f}: N \times N \to Z$ и минимальное сечение $(\bar{S}, \overline{S'})$, $\bar{S} \subset N, \overline{S'} \subset N$, при этом мощность максимального потока совпадает с пропускной способностью минимального сечения, т.е.

$$\bar{f}\,(s, N) = u(\bar{S}, \overline{S'}).$$

Доказательство

Пусть $\bar{f}$ – максимальный поток. Докажем, что существует минимальное сечение $(\bar{S}, \bar{S}')$, $\bar{f}(s, N) = u(\bar{S}, \bar{S}')$.

$\bar{S}$ – множество узлов в сети, которые можно достичь из s по *ненасыщенному относительно потока* $\bar{f}$ пути.

Возможны два случая:

1. $s' \notin \bar{S}$
2. $s' \in \bar{S}$

Случай 1: $s' \notin \bar{S}$

$$\Longrightarrow s' \in N \backslash \bar{S} = \bar{S}'$$

$\Longrightarrow (\bar{S}, \bar{S}')$ – сечение.

Покажем, что это сечение – минимальное, т.е. $\bar{f}(s, N) = u(\bar{S}, \bar{S}')$.

От противного: пусть $\bar{f}(s, N) < u(\bar{S}, \bar{S}')$.

Случай 2: $s' \in \bar{S}$

$\Longrightarrow$ существует ненасыщенный путь $\bar{P}(s, s')$ относительно потока $\bar{f}$.

Найдём $\boldsymbol{\delta = \min\limits_{(x,y)\in\bar{P}}\left[u(x,y) - \bar{f}\,(x,y)\right] > 0}$.

Строим новый поток по правилу:

$$f_1 = \begin{cases} \bar{f}(x,y) + \delta, (x,y) \in \bar{P} \\ \bar{f}(x,y) - \delta, (y,x) \in \bar{P} \\ \bar{f}(x,y), (x,y) \notin \bar{P}, (y,x) \notin \bar{P} \end{cases}$$

Алгоритм построения максимального потока и минимального сечения (алгоритм Форда – Фалкерсона)

1. Построить произвольный поток (можно нулевой): f_0 в сети (N, u).
2. Построить множество *достижимости* S_0 - множество вершин, которые могут быть достигнуты из s по пути, ненасыщенным потоком f_0.

Алгоритм построения максимального потока и минимального сечения

3. Если $s' \notin S_0$, то поток f_0 – максимален, и сечение (S_0, S_0'), $S_0' = N \backslash S_0$, – минимальное сечение в сети.
4. Если $s' \in S_0$, то от s к s' имеется ненасыщенный путь, на который можно наложить дополнительный поток δ_0, получив новый поток :

$$f_1 = f_0 + \delta_0$$

большей мощности, который строят по правилу:

Алгоритм построения максимального потока и минимального сечения

a) Находим ненасыщенный путь $P_0(s, s')$ относительно потока f_0.

b) Вычисляем величину

$$\delta_0 = \min_{(x,y)\in P_0} [u(x, y) - f_0(x, y)] > 0.$$

c) Вычисляем новый поток по правилу:

$$f_1 = \begin{cases} f_0(x, y) + \delta_0, (x, y) \in P_0 \\ f_0(x, y) - \delta_0, (y, x) \in P_0 \\ f_0(x, y), (x, y) \notin P_0, (y, x) \notin P_0 \end{cases}$$

5. Переходим к п. 1 алгоритма, но с потоком f_1

Дополнительное задание 3

Написать программу, реализующую алгоритм Форда – Фалкерсона так, как он представлен в доказательстве теоремы.

СРОК: конец семестра (24.12.2021)