Прикладные модели оптимизации

Доцент, к.ф.-м.н., доцент кафедры № 43

Фаттахова Мария Владимировна

mvfa@yandex.ru

Тема 7. Матричные игры

Лекция 15

Понятие матричной игры

Матричная игра – это набор объектов:

$$\Gamma = \langle M, N, A \rangle$$

где

M = {1,2,…*m*} – ***множество стратегий*** первого игрока;

N = {1,2,…*n*} – ***множество стратегий*** второго игрока;

A – ***«платежная матрица»*** – матрица выигрышей первого игрока (проигрышей второго).

Реализация матричной игры

Игрок 2

Стратегии

2 игрока

Игрок 1

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Стратегии

1 игрока

$$(i, j) \Rightarrow a_{ij} :$$

– *Выигрыш 1 игрока*

– (*Проигрыш 2-го*)

Основное **предположение** при решении игр

оба игрока действуют ***рационально***, т. е. стремятся к получению *максимального выигрыша*, считая, что соперник действует *наилучшим для себя образом*.

Максиминные и минимаксные стратегии

$$
\begin{array}{cc}
 & \min\limits_j a_{ij} \\
\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{matrix}
\end{array}
\quad 3 = \max_i \min_j a_{ij}
$$

Игрок 1

Какой выигрыш может ***гарантировать*** *себе первый игрок независимо от действий второго?*

Максиминные и минимаксные стратегии

Какой выигрыш может ***гарантировать*** *себе первый игрок независимо от действий второго*?

$$\underline{v} = \max_i \min_j a_{ij}$$

$\underline{v}$ – ***нижнее значение игры*** (гарантированный выигрыш игрока 1)

Максиминные и минимаксные стратегии

$$\underline{v} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j a_{i_0 j}$$

i_0 – ***максиминная стратегия*** первого игрока

$$\begin{array}{cc} & \min_j a_{ij} \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Игрок 1

$\underline{v} = 3$

$i_0 = 2$

Максиминные и минимаксные стратегии

Какой проигрыш может ***гарантировать*** *себе второй игрок независимо от действий первого?*

Игрок 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\max_i a_{ij} \quad 6 \quad 5 \quad 8$$

$$\boxed{\min_j \max_i a_{ij}}$$

Максиминные и минимаксные стратегии

Какой проигрыш может ***гарантировать*** *себе второй игрок независимо от действий первого?*

$$\overline{v} = \min_j \max_i a_{ij}$$

$\overline{v}$ – ***верхнее значение игры*** (гарантированный проигрыш игрока 2)

Максиминные и минимаксные стратегии

$$\overline{v} = \min_j \max_i a_{ij} = \max_i a_{ij_0}$$

j_0 – ***минимаксная стратегия*** второго игрока

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6 \quad 5 \quad 8$$

$$\overline{v} = 5$$

$$j_0 = 2$$

Лемма

Для любой матричной игры имеет место неравенство:

$$\underline{v} \leq \overline{v}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{v} = 3 \quad \leq \quad \overline{v} = 5$$

Пример 1. Продажа лекарств

$$
\begin{array}{cc}
 & \min\limits_{j} a_{ij} \\
A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 9 & -3 \\ 6 & 5 & 6 & 8 \\ -2 & 4 & -9 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -3 \\ \boxed{5 \quad = \underline{v}} \\ -9 \end{array} \\
\max\limits_{i} a_{ij} \quad \begin{matrix} 8 & 5 & 9 & 8 \end{matrix} &
\end{array}
$$

$$\boxed{\overline{v} = 5}$$

Пример 1. Продажа лекарств

$$\overline{v} = 5 = \underline{v}$$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 9 & -3 \\ 6 & 5 & 6 & 8 \\ -2 & 4 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$i_0 = 2$$

$$j_0 = 2$$

Ситуация в игре: (2,2)

Пример. *Камень, ножницы, бумага*

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} К & Н & Б \end{array} \\
\begin{array}{c} К \\ Н \\ Б \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\max\limits_i a_{ij} & \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \min\limits_j a_{ij} \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{array}
$$

$$\boxed{\underline{v} = -1 < \overline{v} = 1}$$

Ситуации равновесия в матричных играх

В матричной игре $\Gamma = \langle M, N, A \rangle$ ситуация (i^*, j^*) называется ***ситуацией равновесия*** или ***седловой точкой***, если для всех $i \in M$ и $j \in N$ выполняются неравенства:

$$a_{ij^*} \leq a_{i^* j^*} \leq a_{i^* j}$$

Ситуации равновесия в матричных играх

Число $v = a_{i^* j^*}$ называется ***значением*** **(*ценой*)** ***игры*** $\Gamma = \langle M, N, A \rangle$

Решить матричную игру означает найти ситуацию равновесия и значение игры.

Примеры матричных игр

Пример 1. Продажа лекарств

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{3} & \mathit{4} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 8 & -2 & 9 & \boxed{-3} \\ 6 & \boxed{5} & 6 & 8 \\ -2 & 4 & -9 & 5 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$(2,2)$ – ситуация равновесия

$(1,4)$ – НЕ ситуация равновесия

Теорема о существовании равновесия в матричной игре

Для того, чтобы в матричной игре существовала ситуация равновесия, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\underline{v} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \overline{v}$$

Ситуации равновесия в матричных играх

Пусть (i^*, j^*) – ситуация равновесия в игре *Г*,

тогда *значение игры* v определяется

следующим образом:

$$v = \underline{v} = \overline{v} = a_{i^* j^*}$$

Оптимальная стратегия в матричных играх

Оптимальная стратегия – стратегия, входящая по меньшей мере, в одну ситуацию равновесия.

Стратегия i^* (*максиминная*) – ***оптимальная*** стратегия первого игрока, стратегия j^* (*минимаксная*) – ***оптимальная*** стратегия второго игрока **в игре с седловой точкой** $(\boldsymbol{i}^*, \boldsymbol{j}^*)$.

Примеры матричных игр

- Пример 1:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 4\\ 5 & 3 & 8\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{vmatrix}1\\ \langle 3\rangle=\underline{v}\\ 0\end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix}6 & \langle 5\rangle & 8\\ & = & \\ & \bar{v} & \end{matrix}$$

$$\underline{v}=3\le\bar{v}=5$$

- Пример 2:

$$B=\begin{pmatrix}8 & -2 & 9 & -3\\ 6 & 5 & 6 & 8\\ -2 & 4 & -9 & 5\end{pmatrix}\begin{vmatrix}-3\\ \langle 5\rangle=\underline{v}\\ -9\end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix}8 & \langle 5\rangle & 9 & 8\\ & = & & \\ & \bar{v} & & \end{matrix}$$

$$\underline{v}=\bar{v}=5$$

Замечание 1

Если в игре Γ существует **несколько** ситуаций равновесия, то они являются *эквивалентными* и *взаимозаменяемыми*.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -20 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ -16 & 0 & 16 & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \langle 2 \rangle \\ -20 \\ \langle 2 \rangle \\ -16 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} 4 & \langle 2 \rangle & 16 & \langle 2 \rangle \end{matrix}$$

Ситуации равновесия:

$$(1,2)$$

$$(1,4)$$

$$(3,2)$$

$$(3,4)$$

Замечание 2

Если в игре Γ **не существует** ситуации равновесия, *максиминная* и *минимаксная* стратегии **не являются оптимальными**.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} 1 \\ \langle 3 \rangle \\ 0 \end{matrix} \right.$$

$$\overline{}$$

$$6 \quad \langle 5 \rangle \quad 8$$

Смешанные стратегии

Под смешанной стратегией первого игрока будем понимать распределение вероятностей на множестве номеров строк матрицы *A:*

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m), \quad \sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1, \quad \xi_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Чистая стратегия первого игрока:

$$i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

i

Смешанные стратегии

Под смешанной стратегией второго игрока будем понимать распределение вероятностей на множестве номеров столбцов матрицы *A:*

$$y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n), \quad \sum_{j=1}^{n} \eta_j = 1, \quad \eta_j \ge 0, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Чистая стратегия второго игрока:

$$j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

j

Смешанные стратегии

$$X = \left\{ \left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \right) \middle| \sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1, \xi_i \geq 0, i = 1, \ldots, m \right\}$$

$$Y = \left\{ \left(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \right) \middle| \sum_{j=1}^{n} \eta_j = 1, \eta_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \right\}$$

Множества *X* и *Y* называются ***множествами смешанных стратегий*** первого и второго игроков.

X (*Y*) – это множество *всевозможных распределений вероятностей* на множестве строк (столбцов) матрицы А.

Смешанные стратегии

Выигрыш первого игрока **(*проигрыш второго*)** при использовании игроками 1 и 2 смешанных стратегий x и y *есть математическое ожидание выигрыша*:

$$K(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\eta_j$$

Пример 3

Вычислите выигрыш первого игрока (проигрыш второго) в матричной игре:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Если игроки используют следующие смешанные стратегии:

$$x = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) \qquad y = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right)$$

Пример

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad x = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) \qquad y = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right)$$

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array} \\ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$K(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{15}{8}$$

Смешанное расширение игры

Игру $\bar{\Gamma}_A = \langle X, Y, K \rangle$ будем называть ***смешанным расширением*** игры $\Gamma = \langle M, N, A \rangle$.

Ситуации равновесия в смешанных стратегиях

Ситуация (x^*, y^*) в игре $\overline{\Gamma}_A$ называется ***ситуацией равновесия в смешанных стратегиях***, а число $K(x^*, y^*)$ называется ***значением игры*** $\overline{\Gamma}_A$ если для всех $x \in X$ и $y \in Y$ выполняются неравенства:

$$K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, y).$$

Ситуации равновесия в смешанных стратегиях

Ситуацией равновесия в матричной игре Γ называется ситуация равновесия в смешанном расширении игры $\overline{\Gamma}_A$ **.**

Теорема Дж. Фон Неймана

Любая матричная $\Gamma = \langle M, N, A \rangle$ имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.

Свойство оптимальных смешанных стратегий

<u>Теорема</u>. Для того, чтобы ситуация (x^*, y^*) была равновесной в игре $\overline{\Gamma}_A$, а число $v = K(x^*, y^*)$ являлось значением игры $\overline{\Gamma}_A$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $i \in M$ и $j \in N$ выполнялись следующие неравенства:

$$K(i, y^*) \leq K(x^*, y^*) \leq K(x^*, j).$$

Пример 3

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверим, что ситуация (x, y): $x = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; $y = \left(\frac{1}{4};\ \frac{3}{4}\right)$ НЕ является ситуацией равновесия в матричной игре B.

$$K(x, y) = \frac{15}{8}$$

$$K(1, y) = \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot 0 = 1 < \frac{15}{8}$$

$$K(x, 1) = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{6}{2} = 3 > \frac{15}{8}$$

$$\boxed{K(2, y) = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{11}{4} > \frac{15}{8}}$$

$$\boxed{K(x, 2) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} < \frac{15}{8}}$$

Следовательно, ситуация (x, y): $x = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; $y = \left(\frac{1}{4};\ \frac{3}{4}\right)$ НЕ является ситуацией равновесия в матричной игре B.

Пример 3

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверим, что ситуация (x^*, y^*): $x^* = \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right)$; $y^* = \left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right)$ является **ситуацией равновесия** в матричной игре B.

$$K(x^*, y^*) = \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot 4 + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot 0 + \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot 2 + \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot 3 = \frac{60}{25} = \frac{12}{5}$$

$$K(1, y) = \frac{3}{5}\cdot 4 + \frac{2}{5}\cdot 0 = \frac{12}{5} = K\left(x^*, y^*\right) \qquad K(x, 1) = \frac{1}{5}\cdot 4 + \frac{4}{5}\cdot 2 = \frac{12}{5} = K\left(x^*, y^*\right)$$

$$K(2, y) = \frac{3}{5}\cdot 2 + \frac{2}{5}\cdot 3 = \frac{12}{5} = K\left(x^*, y^*\right) \qquad K(x, 2) = \frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{4}{5}\cdot 3 = \frac{12}{5} = K\left(x^*, y^*\right)$$

Следовательно, ситуация (x^*, y^*): $x^* = \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right)$; $y^* = \left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right)$ **является ситуацией равновесия** в матричной игре B.

Защита курсовой работы (ОЧНО!)

- 4931 – 23.12.2021 – 3 пара (по расписанию)
- 4933, 4936 – 24.12.2021 (по расписанию)
- 4232 – 23.12.2021 – 4 пара (окно!)

Тест № 1

(для тех, кто не писал!)

В пятницу, 17.12.2021:

- 4931, 4932, 4933 – на 2 паре (в 11:10)
- 4936 – на 4 паре.

На кафедре (возможно, 23-16)

СООБЩИТЬ О СВОЁМ ЖЕЛАНИИ ЗАРАНЕЕ!!!