Прикладные модели оптимизации

Доцент, к.ф.-м.н., доцент кафедры № 43

Фаттахова Мария Владимировна

mvfa@yandex.ru

Тема 2. Транспортная задача в сетевой постановке

Теорема (о максимальном потоке и минимальном сечении)

В произвольной сети (N, u) существует максимальный поток $\bar{f}: N \times N \to Z$ и минимальное сечение $(\bar{S}, \overline{S'})$, $\bar{S} \subset N, \overline{S'} \subset N$, при этом мощность максимального потока совпадает с пропускной способностью минимального сечения, т.е.

$$\bar{f}\,(s, N) = u(\bar{S}, \overline{S'}).$$

Понятие пути, ненасыщенного потоком

- Пусть $f: N \times N \to Z$, – поток в сети (N, u). Будем говорить, что **ребро (x, y) не насыщено потоком f**, если
$$f(x, y) < u(x, y).$$
- **Путём $P(s, s')$ из источника в сток** будем называть последовательность рёбер вида:
$$P(s, s') = \{(s, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, s')\}.$$
- Будем говорить, что **путь не насыщен относительно потока**, если каждое ребро не насыщено относительно этого потока.

Теорема (о максимальном потоке и минимальном сечении)

В произвольной сети (N, u) существует максимальный поток $\bar{f}: N \times N \to Z$ и минимальное сечение $(\bar{S}, \overline{S'}), \bar{S} \subset N, \overline{S'} \subset N$, при этом мощность максимального потока совпадает с пропускной способностью минимального сечения, т.е.

$$\bar{f}\,(s, N) = u(\bar{S}, \overline{S'}).$$

Доказательство

Пусть $\bar{f}$ – максимальный поток. Докажем, что существует минимальное сечение $(\bar{S}, \bar{S}')$: $\bar{f}(s, N) = u(\bar{S}, \bar{S}')$.

Построим сечение : пусть $\bar{S}$ – множество узлов в сети, которые можно достичь из s по *ненасыщенному относительно потока* $\bar{f}$ пути.

Возможны два случая:

1. $s' \notin \bar{S}$
2. $s' \in \bar{S}$

Случай 1: $s' \notin \bar{S}$

$$s' \notin \bar{S} \Rightarrow s' \in N \backslash \bar{S} = \bar{S}'$$

$\Rightarrow (\bar{S}, \bar{S}')$ – сечение.

Покажем, что это сечение – минимальное, т.е.

$$\bar{f}(s, N) = u(\bar{S}, \bar{S}').$$

От противного: пусть $\bar{f}(s, N) < u(\bar{S}, \bar{S}')$.

Из доказат. Леммы 1

$$\bar{f}(s, N) = \bar{f}(\bar{S}, \bar{S}') =$$

По свойству функций от множеств

$$= \sum_{x \in \bar{S},\, y \in \bar{S}'} \bar{f}(x, y) < \sum_{x \in \bar{S},\, y \in \bar{S}'} u(x, y)$$

$\Rightarrow$ существует вершина $y_0 \in \bar{S}'$, такая, что для ребра (x, y_0), где $x \in \bar{S}$, справедливо неравенство:

$$\bar{f}(x, y_0) < u(x, y_0).$$

$\Rightarrow y_0 \in \bar{S}$ по построению. Но $y \in \bar{S}'$! $\Rightarrow$ противоречие!

$$\Rightarrow \bar{f}(s, N) = u(\bar{S}, \bar{S}').$$

Случай 2: $s' \in \bar{S}$

$\Longrightarrow$ существует ненасыщенный путь $\bar{P}(s, s')$ относительно потока $\bar{f}$.

Найдём $\boldsymbol{\delta = \min\limits_{(x,y)\in\bar{P}}[u(x,y) - \bar{f}\,(x,y)] > 0}$.

Строим новый поток по правилу:

$$f_1 = \begin{cases} \bar{f}(x,y)+\delta, (x,y)\in\bar{P} \\ \bar{f}(x,y)-\delta, (y,x)\in\bar{P} \\ \bar{f}(x,y), (x,y)\notin\bar{P}, (y,x)\notin\bar{P} \end{cases}$$

Случай 2: $s' \in \bar{S}$

Можно проверить по определению, что f_1 – поток.

Его мощность:

$$f_1 = \overline{f}(s,N) + \delta > \overline{f}(s,N)$$

Но это противоречит предположению, что $\bar{f}$ – максимальный поток!

Следовательно, если $\bar{f}$ – максимальный поток, то случай 2 невозможен!

Из доказательства теоремы следует алгоритм поиска максимального потока и минимального сечения в сети:

Алгоритм построения максимального потока и минимального сечения (алгоритм Форда – Фалкерсона)

1. Построить произвольный поток (можно нулевой): f_0 в сети (N, u).
2. Построить множество *достижимости* S_0 - множество вершин, которые могут быть достигнуты из s по пути, ненасыщенным потоком f_0.

Алгоритм построения максимального потока и минимального сечения

3. Если $s' \notin S_0$, то поток f_0 – максимален, и сечение (S_0, S_0'), $S_0' = N \backslash S_0$, – минимальное сечение в сети.
4. Если $s' \in S_0$, то от s к s' имеется ненасыщенный путь, на который можно наложить дополнительный поток δ_0, получив новый поток :

$$f_1 = f_0 + \delta_0$$

большей мощности, который строят по правилу:

Алгоритм построения максимального потока и минимального сечения

a) Находим ненасыщенный путь $P_0(s, s')$ относительно потока f_0.

b) Вычисляем величину

$$\delta_0 = \min_{(x,y)\in P_0} [u(x, y) - f_0(x, y)] > 0.$$

c) Вычисляем новый поток по правилу:

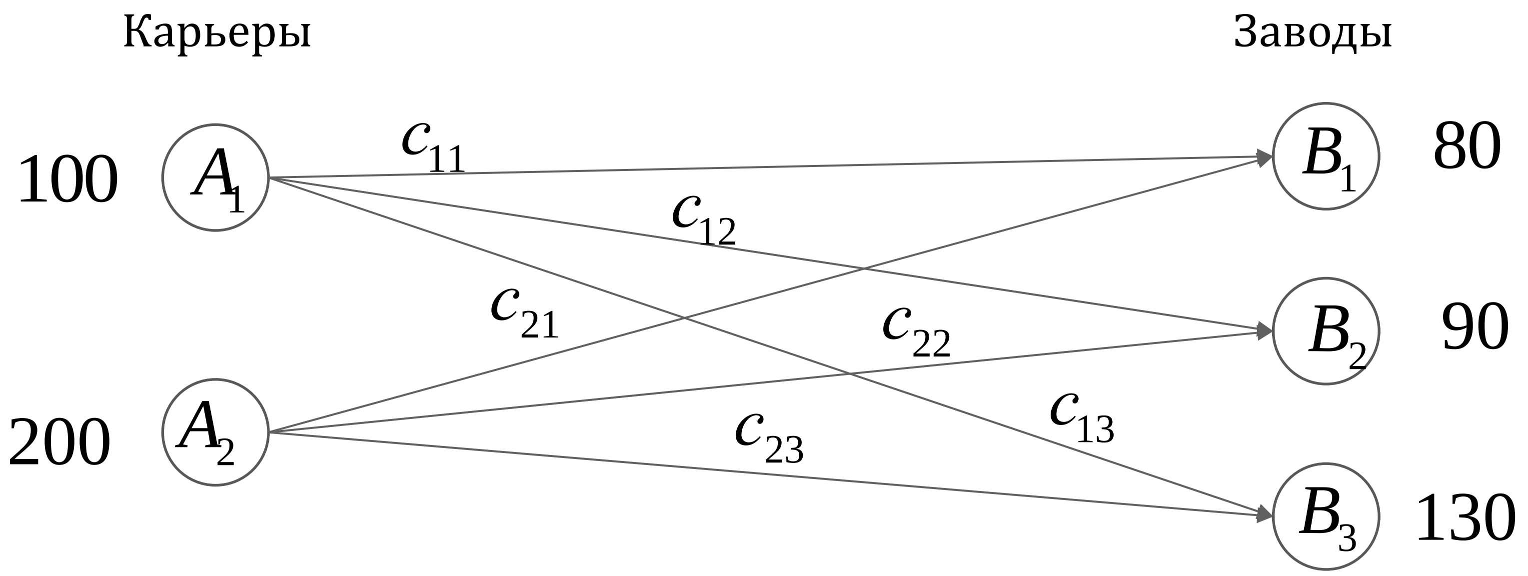
$$f_1 = \begin{cases} f_0(x, y) + \delta_0, (x, y) \in P_0 \\ f_0(x, y) - \delta_0, (y, x) \in P_0 \\ f_0(x, y), (x, y) \notin P_0, (y, x) \notin P_0 \end{cases}$$

5. Переходим к п. 1 алгоритма, но с потоком f_1

Тема 2. Транспортная задача как частный случай ЗЛП

Лекция 5

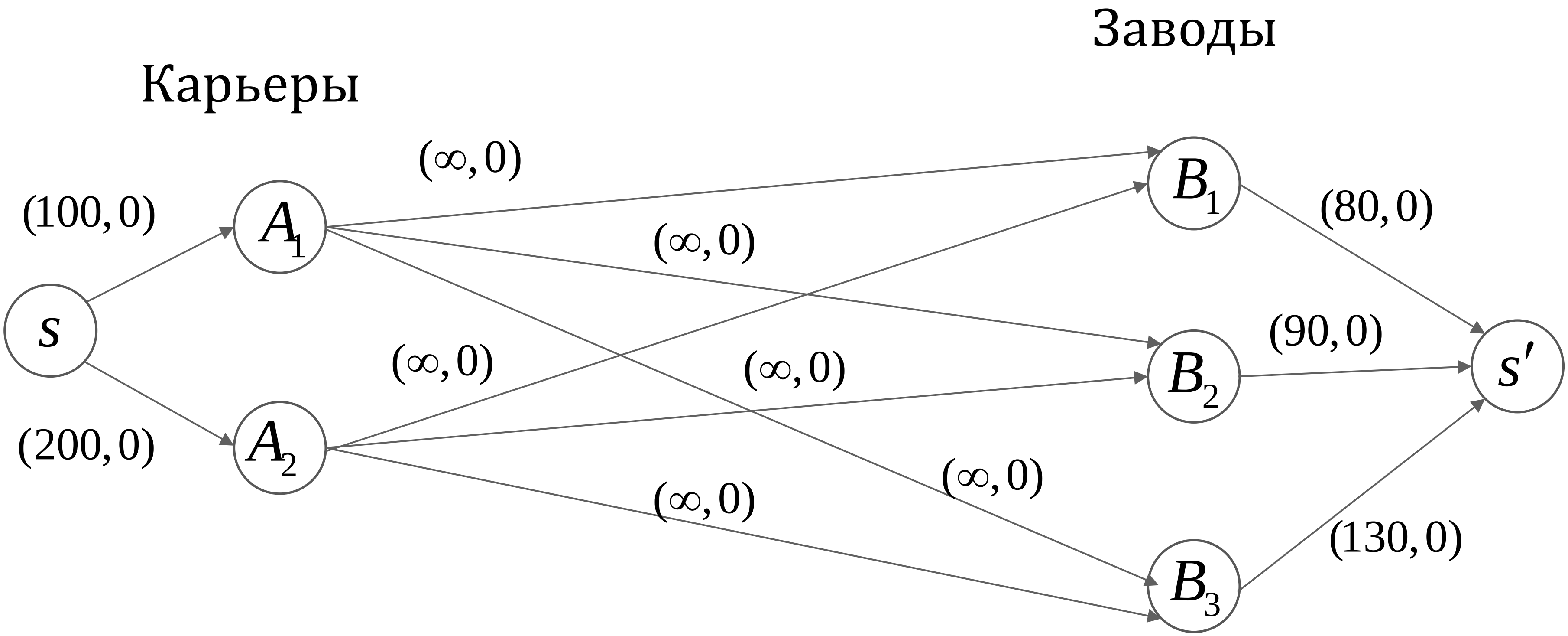
Пример 1. Песчаные карьеры



Транспортные издержки c_{ij}:

	Завод B1	**Завод B2**	**Завод B3**
Карьер A1	***4***	***6***	***3***
Карьер A2	***8***	***4***	***5***

Пример 1. Песчаные карьеры



Транспортные издержки c_{ij}

	Завод B1	Завод B2	Завод B3
Карьер A1	***4***	***6***	***3***
Карьер A2	***8***	***4***	***5***

Транспортная задача

имеет целью ***минимизацию транспортных издержек*** при перевозках однотипных грузов от ***нескольких поставщиков*** (*с различных складов*), расположенных в разных местах, к ***разным потребителям***.

Аналитическая постановка ТЗ

Для аналитической постановки ТЗ необходимо задать две таблицы: таблицу издержек и таблицу перевозок.

Таблица издержек

Пункты отправления (поставщики)	Пункты назначения (потребители)				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_n	

$\boldsymbol{c_{ij}}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n,$ – стоимость перевозки единицы груза от поставщика i к потребителю j.

Таблица перевозок

Поставщики	Потребители			
	B_1	B_2	...	B_n
A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}
A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}

$\boldsymbol{x_{ij}}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n,$ - количество единиц перевозимого груза от поставщика i к потребителю j.

– ***переменные решения транспортной задачи***

В ТЗ $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}$ *переменных*

Целевая функция

Постав-щики	Потребители			
	B_1	B_2	…	B_n
A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}
A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}

Пункты отправле-ния	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{12}	…	c_{mn}	a_m
Потребн.	b_1	b_2	…	b_n	

– суммарные издержки:

$$L = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \to \min$$

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

Ограничения в транспортной задаче

По поставщикам: поставщики A_i хотят вывезти весь объём груза a_i, $i = 1, \dots, m$.

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1$$

$$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2$$

$$\dots$$

$$x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m$$

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{12}	…	c_{mn}	a_m
Потребн.	b_1	b_2	…	b_n	

Постав-щики	Потребители			
	B_1	B_2	…	B_n
A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}
A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}

По потребителям: потребители B_j хотят получить тот объём груза b_j, который они заказали, $j = 1, \dots, n$.

$$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1$$

$$x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2$$

$$\dots$$

$$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n.$$

В ТЗ $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$ *ограничений.*

Математическая модель (аналит.)

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

Ограничения по поставщикам:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \ i = 1,\dots,m$$

Ограничения по потребителям:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ \ j = 1,\dots,n$$

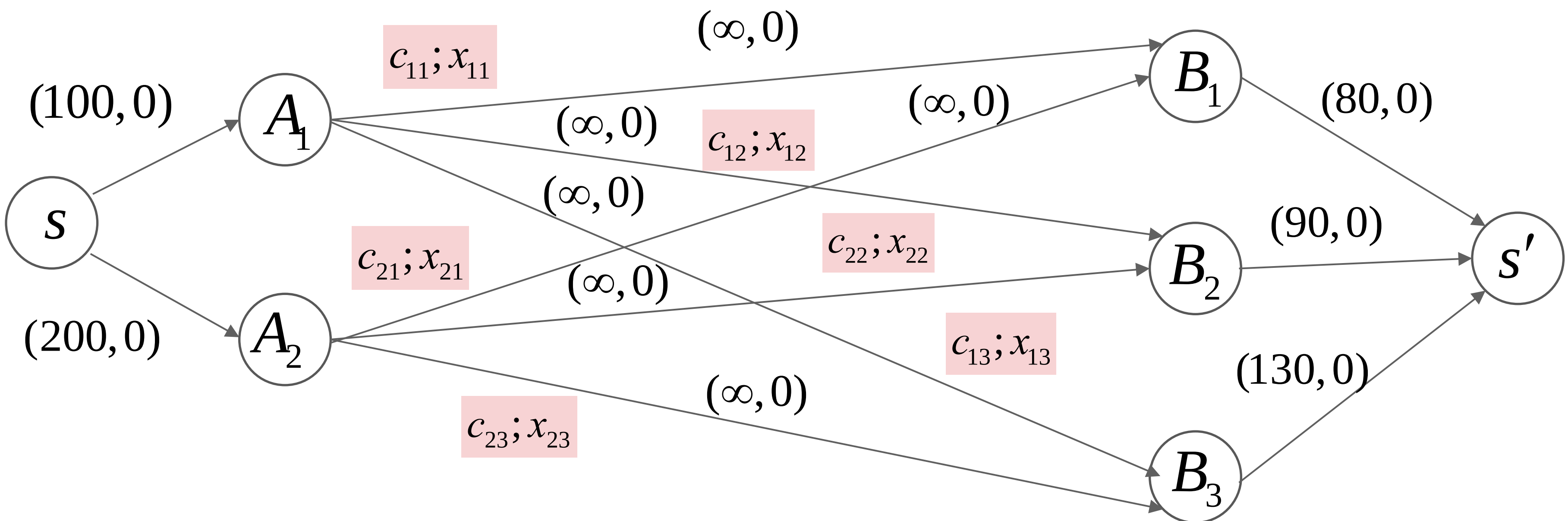
$$x_{ij} \geq 0, i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n.$$

Постав-щики	Потребители			
	B_1	B_2	…	B_n
A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}
A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}

Пункты отправле-ния	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{12}	…	c_{mn}	a_m
Потребн.	b_1	b_2	…	b_n	

Математическая модель (сеть)

$$L=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min$$



Ограничения по поставщикам:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ \ i=1,\ldots,m$$

Ограничения по потребителям:

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ \ j=1,\ldots,n$$

$$x_{ij}\ge 0, i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n.$$

Двойственная задача к ТЗ

Прямая задача

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$-y_i: \ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1,\ldots,m$$

$$p_j: \ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \ge 0, i = 1,\ldots,m, j = 1,\ldots,n.$$

Двойственная задача

$$W = -\sum_{i=1}^{m} a_i y_i + \sum_{j=1}^{n} b_j p_j \to \max$$

$$x_{ij}: \ p_j - y_i \ \le \ c_{ij}$$

$$i = 1,\ldots,m;$$

$$j = 1,\ldots,n$$

Экономическая интерпретация двойственной задачи к ТЗ

y_i – **цена** на продукцию, производимую у ***i*-го производителя** (отпускная цена), $i = 1, \dots, m$

p_j – **цена** за единицу той же продукции, но у ***j*-го потребителя**, $j = 1, \dots, n$

$\sum_{j=1}^{n} b_j p_j$ – суммарная выручка у потребителей

$\sum_{i=1}^{m} a_i y_i$ – суммарная выручка у производителей.

Экономическая интерпретация ДЗ к ТЗ

ЦФ – прибыль от реализации перевезенной продукции:

$$W = -\sum_{i=1}^{m} a_i y_i + \sum_{j=1}^{n} b_j p_j \rightarrow \max$$

Ограничения:

разность в ценах у производителя и потребителя не должна превышать затраты на перевозки:

$$p_j - y_i \leq c_{ij}$$

Экономическая интерпретация ДЗ к ТЗ

Требуется назначить цены у производителя и у потребителя таким образом, чтобы прибыль от реализации продукции была максимальной, перевозки – не убыточными.

$$W = -\sum_{i=1}^{m} a_i y_i + \sum_{j=1}^{n} b_j p_j \to \max$$

$$p_j - y_i \le c_{ij}$$

$$i = 1, \dots, m;$$

$$j = 1, \dots, n$$

Когда ТЗ имеет решение?

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = 1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = 1,\dots,n$$

$$x_{ij} \ge 0, i = 1,\dots,m, \; j = 1,\dots,n.$$

Постав-щики	Потребители			
	B_1	B_2	…	B_n
A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}
A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}

Пункты отправле-ния	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{12}	…	c_{mn}	a_m
Потребн.	b_1	b_2	…	b_n	

Условие сбалансированности ТЗ

- ТЗ является **сбалансированной**, если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- ТЗ является **несбалансированной**, если это условие нарушено

Теорема
(Критерий разрешимости ТЗ)

Для того, чтобы ТЗ имела оптимальное решение, необходимо и достаточно, чтобы она была сбалансирована.

Пример «Песчаные карьеры»

В районе имеется 2 ***песчаных карьера***, с которых песок вывозится на 5-тонных грузовиках. *Предприятия – поставщики*, разрабатывающие карьеры, могут поставлять соответственно **100** и **200** грузовиков в день.

В этом районе имеется 3 **завода железобетонных конструкций** – *потребители* песка, которым требуется соответственно **80**, **90** и **130** грузовиков в день.

Таблица параметров (транспортные издержки)

$S_i \backslash D_j$	D_1	D_2	D_3	***Запасы***
S_1	4	6	3	**100**
S_2	8	4	5	**200**
Заказы	**80**	**90**	**130**	

Таблица параметров (транспортные издержки)

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	***Запасы***
S_1	4	6	3	**100**
S_2	8	4	5	**200**
Заказы	**80**	**90**	**130**	**300=300**

Математическая модель

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	**Запасы**
S_1	4	6	3	**100**
S_2	8	4	5	**200**
Заказы	**80**	**90**	**130**	**300=300**

- ***Переменные модели***: $\boldsymbol{x_{ij}}, i = 1,2, j = 1,2,3$, – количество грузовиков, которое нужно отправить с карьера S_i на завод D_j.
- ***Целевая функция*** – суммарные издержки

$$L = 4x_{11} + 6x_{12} + 3x_{13} + 8x_{21} + 4x_{22} + 5x_{23} \to \min$$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 200 \end{array}\right\} \text{по поставщика м} \\ \left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} = 80 \\ x_{12} + x_{22} = 90 \\ x_{13} + x_{23} = 130 \end{array}\right\} \text{по потребител ям} \\ x_{ij} \geq 0, i = 1,2,\ j = 1,2,3 \end{cases}$$

Решение в Excel

Стоимость перевозки песка одним грузовиком

		Потребители - заводы		
		D1	D2	D3
Предприятия - поставщики	S1	$4	$6	$3
	S2	$8	$4	$5

Суммарная стоимость

$1 290

Объем поставки (в шт. грузовиков)

		Потребители - заводы					
		D1	D2	D3	Всего поставлено		Максимально возможный объем ежедневной поставки (шт. грузовиков)
Предприятия - поставщики	S1	80	0	20	100	"="	100
	S2	0	90	110	200	"="	200
	Всего получено	80	90	130			
		"="	"="	"="			
	Ежедневные заказы потребителей (шт. грузовиков)	80	90	130			

Случаи несбалансированной задачи

Перепроизводство:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Дефицит:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Пример 1*. Перепроизводство.

D_j \ S_i	D_1	D_2	D_3	***Запасы***
S_1	4	6	3	**150**
S_2	8	4	5	**200**
Заказы	**80**	**90**	**130**	**300<350**

Математическая модель

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	*Запасы*
S_1	4	6	3	**150**
S_2	8	4	5	**200**
Заказы	**80**	**90**	**130**	**300<350**

$$L = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} = 4x_{11} + 6x_{12} + 3x_{13} + 8x_{21} + 4x_{22} + 5x_{23} \to \min$$

По поставщикам

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 150$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 200$$

По потребителям

$$x_{11} + x_{21} = 80$$
$$x_{12} + x_{22} = 90$$
$$x_{13} + x_{23} = 130$$

$$x_{ij} \ge 0, \;\; i = 1,2, \;\; j = 1,2,3.$$

x_{ij} -целые, $i = 1, 2, \;\; j = 1, 2, 3.$

Перепроизводство $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

- Вводят фиктивного потребителя B_{n+1}
- «Заказ» (спрос) фиктивного потребителя – объем перепроизводства: $$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$
- Транспортные издержки $C_{i,n+1}$ – штрафы за «невывоз» единицы продукта от производителя i (затраты на хранение, контрактные обязательства и пр.).
- Если штрафов нет, $C_{i,n+1} = 0$.
- $\boldsymbol{x_{i,n+1}^{*}}$ – объем продукта, который мы ***не*** вывозим от производителя $\boldsymbol{i}$.

Таблица издержек

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	D_{fict}	**Запасы**
S_1	4	6	3	0 (x_{14})	**150**
S_2	8	4	5	0 (x_{24})	**200**
Заказы	**80**	**90**	**130**	**50**	**350=350**

Математическая модель

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	D_{fict}	Запасы
S_1	4	6	3	0 (x_{14})	150
S_2	8	4	5	0 (x_{24})	200
Заказы	80	90	130	50	350=350

$$L = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} = 4x_{11} + 6x_{12} + 3x_{13} +$$

$$+ 0\cdot x_{14} + 8x_{21} + 4x_{22} + 5x_{23} + 0\cdot x_{24} \rightarrow \min$$

По поставщикам

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 200$$

По потребителям

$$x_{11} + x_{21} = 80$$

$$x_{12} + x_{22} = 90$$

$$x_{13} + x_{23} = 130$$

$$x_{14} + x_{24} = 50$$

$$x_{ij} \geq 0,\ \ i = 1,2,\ \ j = 1,\ldots 4.$$

Решение в Excel

Стоимость перевозки песка одним грузовиком

		Потребители - заводы			
		D1	D2	D3	D-fict
Предприятия - поставщики	S1	$4	$6	$3	0
	S2	$8	$4	$5	0

Суммарная стоимость

$1 190

Объем поставки (в шт. грузовиков)

		Потребители - заводы				Всего поставлено		Максимально возможный объем ежедневной поставки (шт. грузовиков)
		D1	D2	D3	D-fict			
Предприятия - поставщики	S1	80	0	70	0	150	"="	150
	S2	0	90	60	50	200	"="	200
	Всего получено	80	90	130	50			
		"="	"="	"="	"="			
	Ежедневные заказы потребителей (шт. грузовиков)	80	90	130	50			

Дефицит

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- Вводят фиктивного поставщика A_{m+1}
- «Запас» фиктивного поставщика – объем дефицита

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

- Транспортные издержки $C_{m+1,j}$ – штрафы за единицу неудовлетворенного спроса у потребителя *j*.
- Если штрафов нет, $C_{m+1,j} = 0$.
- $\boldsymbol{x^{*}_{m+1,j}}$ – объем продукта, который ***не*** получит потребитель ***j*** (неудовлетворенный спрос потребителя *j*).

Математическая модель

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	**Запасы**
S_1	4	6	3	**100**
S_2	8	4	5	**150**
Заказы	**80**	**90**	**130**	**300>250**

$$L=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}=4x_{11}+6x_{12}+3x_{13}+8x_{21}+4x_{22}+5x_{23}\to\min$$

По поставщикам

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=100$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=150$$

По потребителям

$$x_{11}+x_{21}\le 80$$
$$x_{12}+x_{22}\le 90$$
$$x_{13}+x_{23}\le 130$$

$x_{ij}\ge 0,\ \ i=1,2,\ \ j=1,2,3.$

x_{ij} -целые, $\ i=1,2,\ \ j=1,2,3.$

Таблица издержек

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	**Запасы**
S_1	4	6	3	**100**
S_2	8	4	5	**150**
S_{fict}	0 (x_{31})	0 (x_{32})	0 (x_{33})	**50**
Заказы	**80**	**90**	**130**	**300=300**

Математическая модель

D_j / S_i	D_1	D_2	D_3	Запасы
S_1	4	6	3	100
S_2	8	4	5	150
S_{fict}	0 (x_{31})	0 (x_{32})	0 (x_{33})	50
Заказы	80	90	130	300=300

$$L = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 4x_{11} + 6x_{12} +$$

$$+3x_{13} + 8x_{21} + 4x_{22} + 5x_{23} + 0\cdot x_{31} + 0\cdot x_{32} + 0\cdot x_{33} \to \min$$

По поставщикам

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 150$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 50$$

По потребителям

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 90$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 130$$

$$x_{ij} \geq 0,\ \ i = 1,2,3,\ \ j = 1,2,3.$$

Решение в Excel

		Потребители - заводы		
		D1	D2	D3
Предприятия - поставщики	S1	$4	$6	$3
	S2	$8	$4	$5
	S-fict	$0	$0	$0

Суммарная стоимость

$990

Объем поставки (в шт. грузовиков)

		Потребители - заводы					
		D1	D2	D3	Всего поставлено		Максимально возможный объем ежедневной поставки (шт. грузовиков)
Предприятия - поставщики	S1	30	0	70	100	"="	100
	S2	0	90	60	150	"="	150
	S-fict	50	0	0	50	"="	50
	Всего получено	80	90	130			
		"="	"="	"="			
	Ежедневные заказы потребителей (шт. грузовиков)	80	90	130			

Лабораторная работа 2

- *СРОК: 2 НЕДЕЛИ*
- Решение ТЗ всегда начинается с проверки сбалансированности! Проверьте БАЛАНС В ЗАДАЧЕ Вашего варианта и сбалансируйте её при необходимости.
- Составьте математическую модель *сбалансированной* задачи.
- Реализуйте мат. модель в Excel.