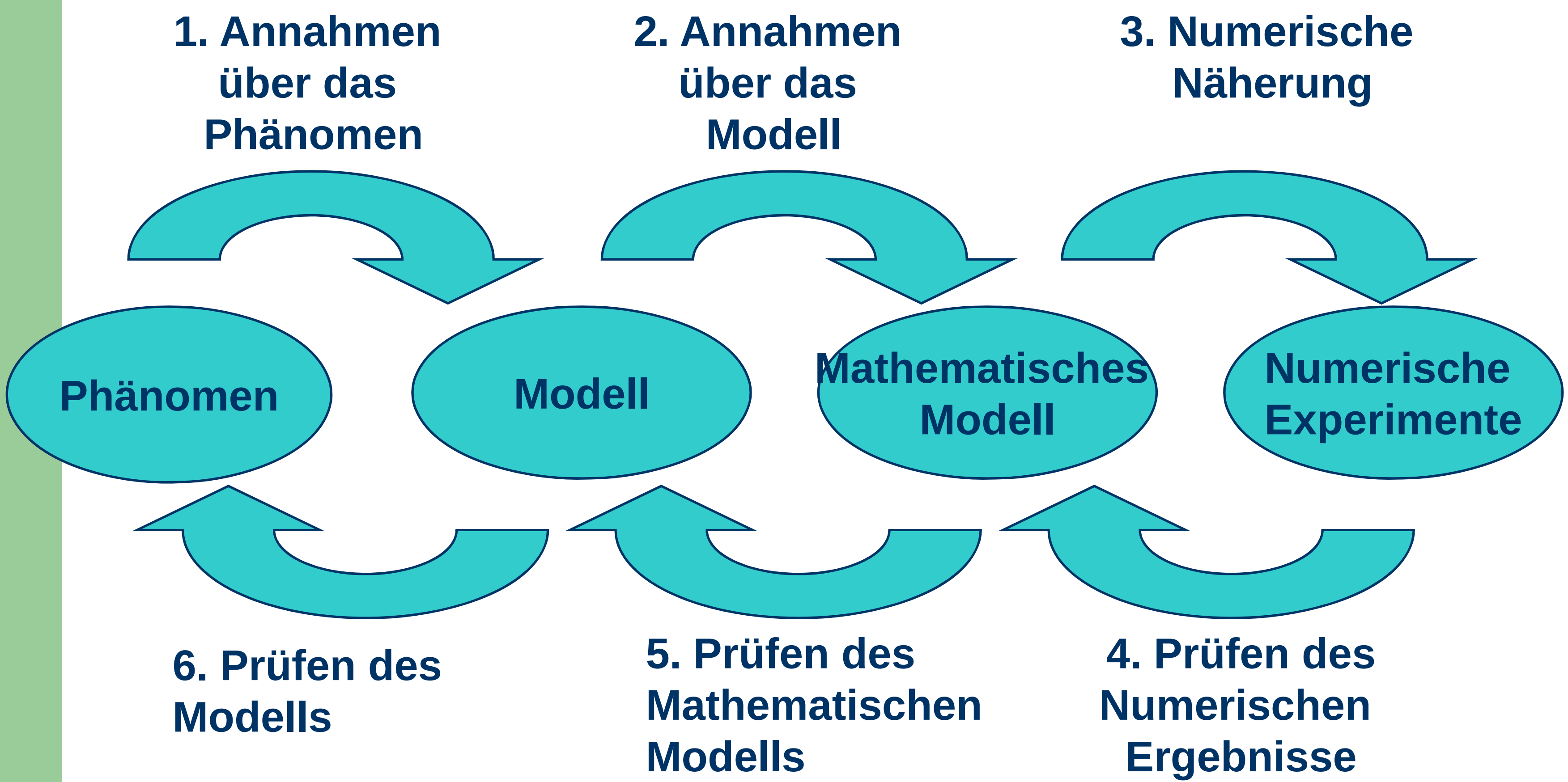
Mathematische Modellierung unter extremen Bedingungen

Anton Grigor’ev
BSU, Minsk,2008

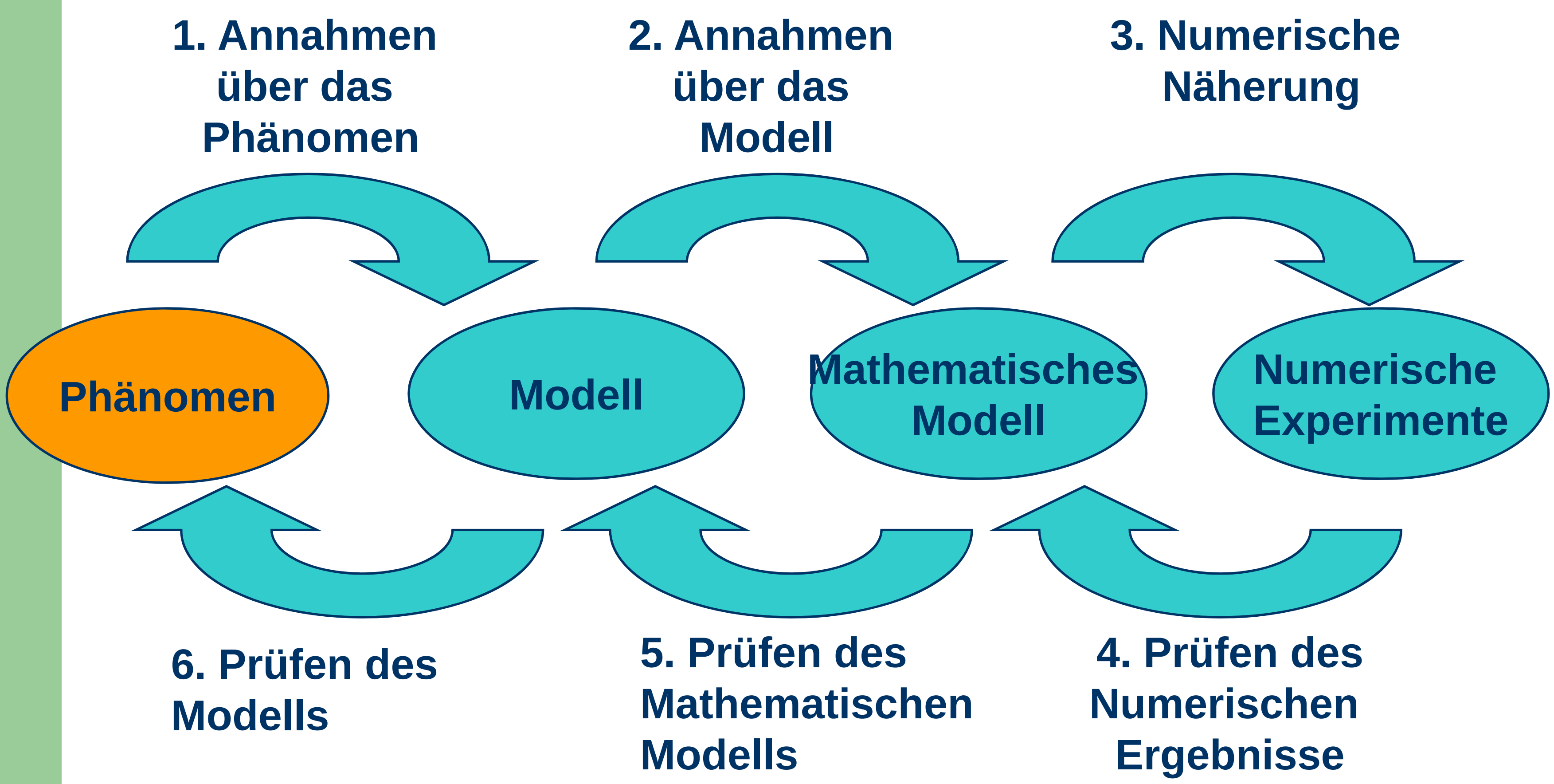
Zwecke der Vorlesung

- Ein Beispiel von Mathematischer Modellierung unter extremen Bedingungen zu bringen,
- Das Schema des Prozesses der Modellierung zu erlernen,
- Ihre Inspiration zu stimulieren, um die Mathematik zu studieren und verwenden.

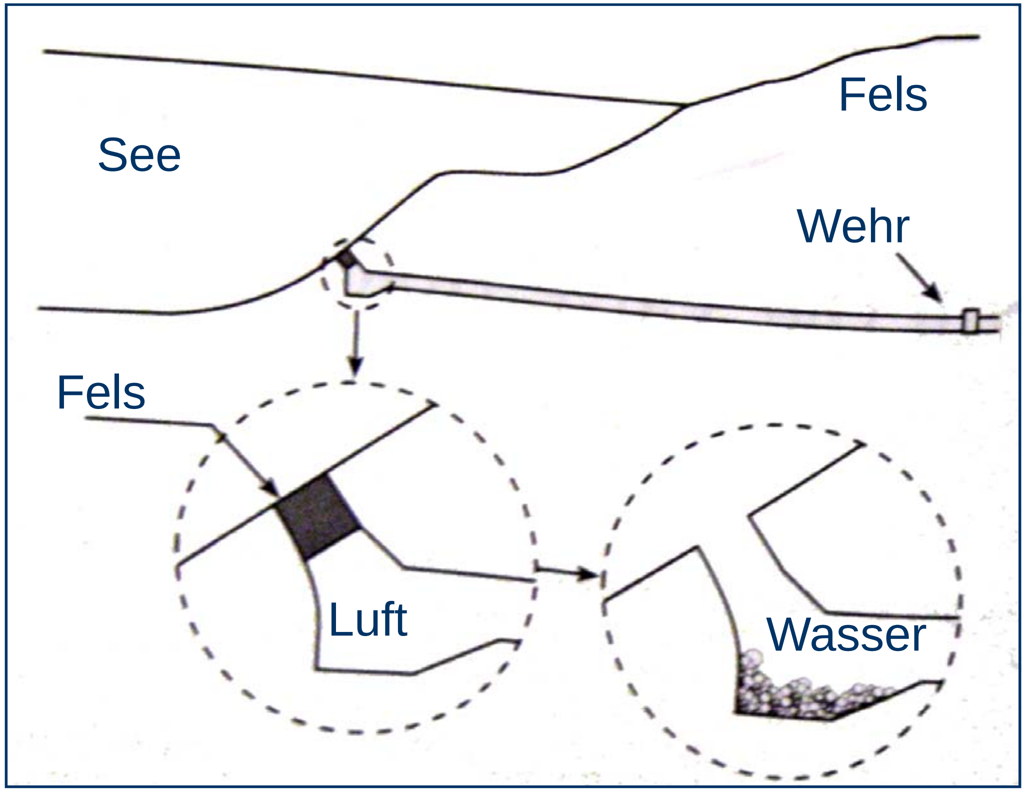
Das allgemeine Schema



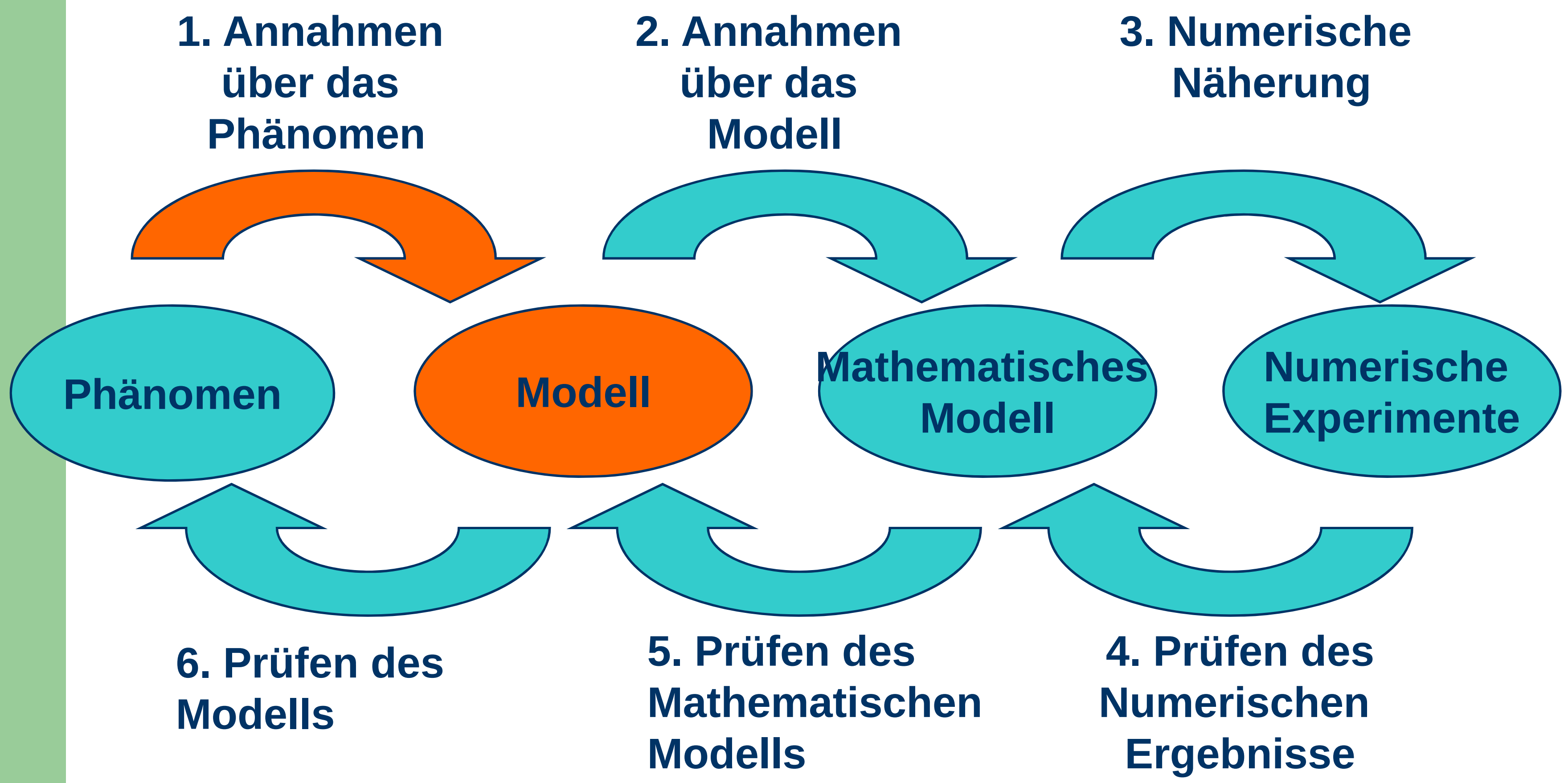
Schritt 0.


1. Annahmen über das Phänomen
2. Annahmen über das Modell
3. Numerische Näherung
Phänomen
Modell
Mathematisches Modell
Numerische Experimente
6. Prüfen des Modells
5. Prüfen des Mathematischen Modells
4. Prüfen des Numerischen Ergebnisse

1961, B.C. Hydro, Kanada



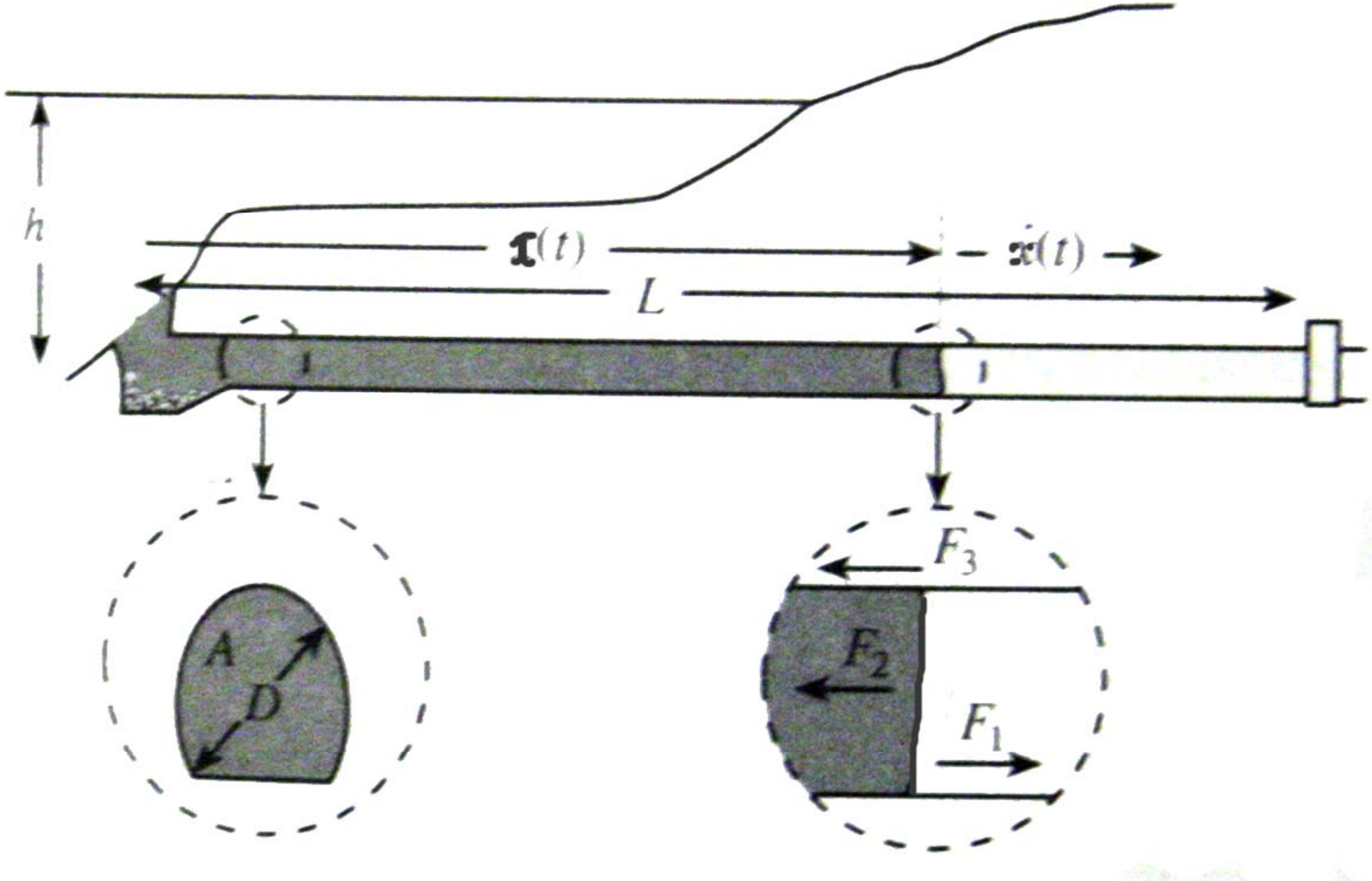
Schritt 1.


1. Annahmen über das Phänomen
2. Annahmen über das Modell
3. Numerische Näherung
Phänomen
Modell
Mathematisches Modell
Numerische Experimente
6. Prüfen des Modells
5. Prüfen des Mathematischen Modells
4. Prüfen des Numerischen Ergebnisse

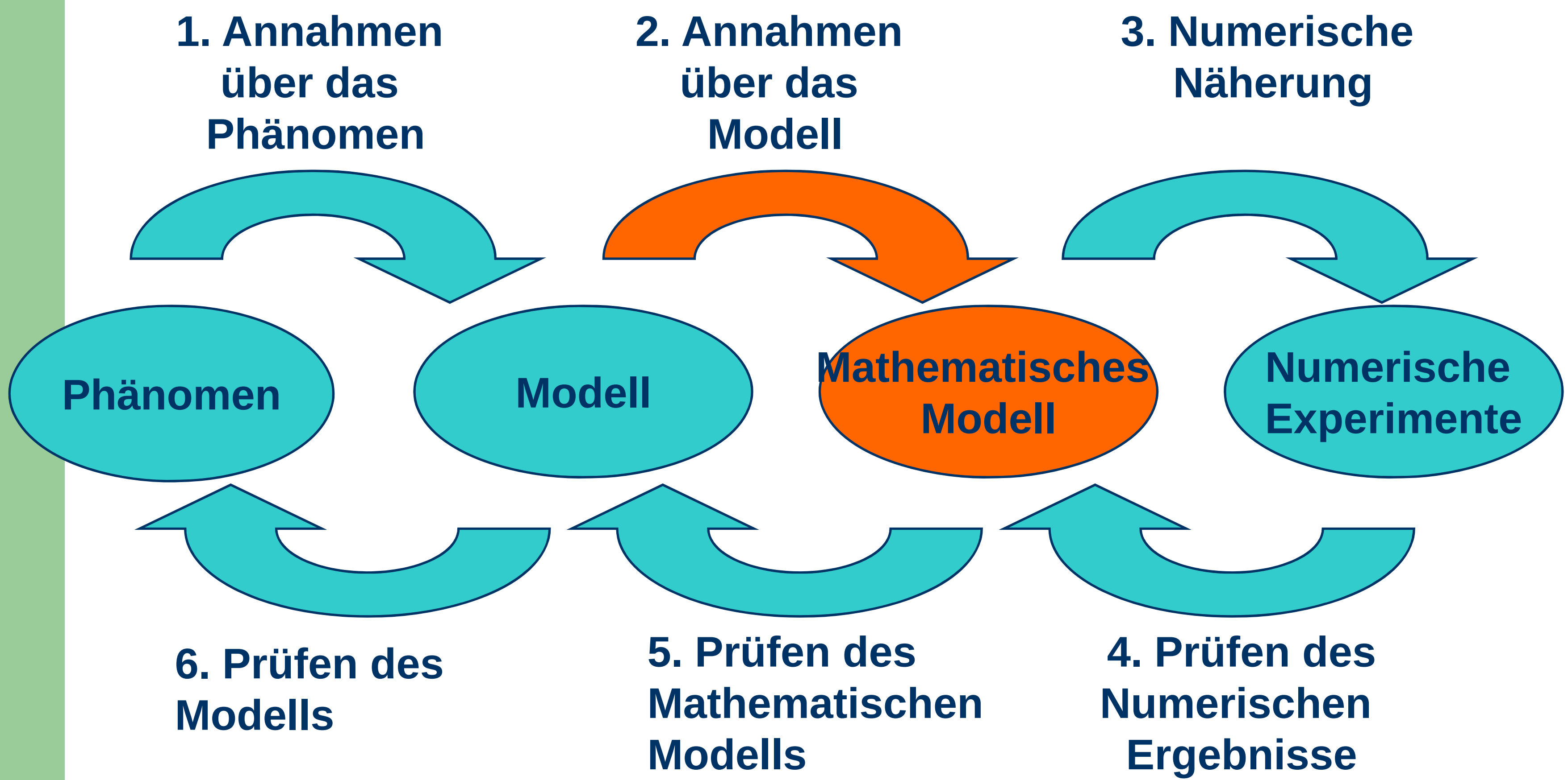
Hypothesen

- Wand von dem Wasser ist glatt,
- Strömung ist turbulent,
- Luftverdichtung ist adiabatisch.

Das Modell



Schritt 2.


1. Annahmen über das Phänomen
2. Annahmen über das Modell
3. Numerische Näherung
Phänomen
Modell
Mathematisches Modell
Numerische Experimente
6. Prüfen des Modells
5. Prüfen des Mathematischen Modells
4. Prüfen des Numerischen Ergebnisse

F1 - hydrostatischen Kraft

$$F_1 = P_{hs} A = (\rho g h + P_o) A$$

Hydrostatischer Druck

Dichte des Wassers

Beschleunigung der Schwerkraft

Tiefe des Sees

Atmosphärischer Druck

F2 – Widerstand der Luft gegen Druck

Wegen Gesetz über Adiabatischen Druck

$$P V^{\gamma} = const, \quad \gamma = 1.4$$

$$P(t) A^{\gamma} (L - x)^{\gamma} = P_0 A^{\gamma} L^{\gamma}$$

erhält man

$$P(t) = P_0 \left(\frac{L}{L - x}\right)^{\gamma}$$

$$F_2(t) = -P(t) A = -A P_0 \left(\frac{L}{L - x}\right)^{\gamma}$$

F3 – Kraft der Friktion

Da Strömung turbulent ist,
gilt folgende empirische Formel
für den Verlust von Wasserdruck

$$\Delta P(t) = \frac{\rho f x}{2D} \dot{x}^2, \quad f = 0.05$$

$$F_3(t) = -\Delta P(t) A = -A \frac{\rho f}{2D} x \dot{x}^2$$

Bewegungsgleichung

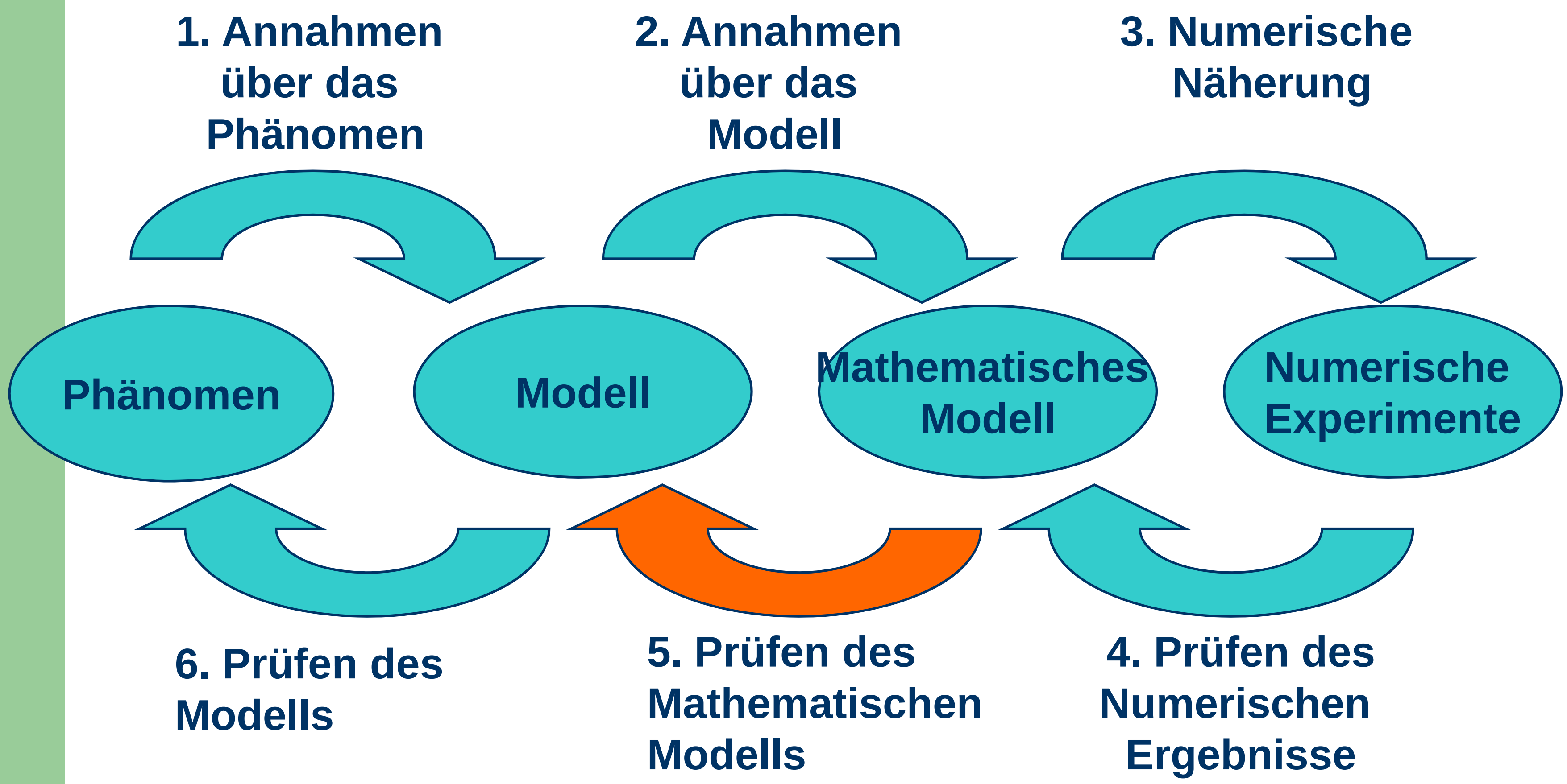
Hypothese: die Energieverluste sind klein.
Die Arbeit von Stärke geht in die Energie der Bewegung vom Wasser

$$\Delta E = -\Delta W \Rightarrow \frac{dE}{dt} = -\frac{dW}{dt}$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \rho A x \dot{x}^2 , \quad -\frac{dW}{dt} = (F_1 + F_2 + F_3) \dot{x}$$

$$x \ddot{x} = g h + \frac{P_0}{\rho} - \frac{P_0}{\rho} \left(\frac{L}{L - x} \right)^{\gamma} - \frac{f}{2D} x \dot{x}^2 - \frac{1}{2} \dot{x}^2$$

Schritt 5.


1. Annahmen über das Phänomen
2. Annahmen über das Modell
3. Numerische Näherung
Phänomen
Modell
Mathematisches Modell
Numerische Experimente
6. Prüfen des Modells
5. Prüfen des Mathematischen Modells
4. Prüfen des Numerischen Ergebnisse

Anfangsbedienungen

Falls benutzt man die Anfangsbedienungen x(0)=x'(0)=0, wegen

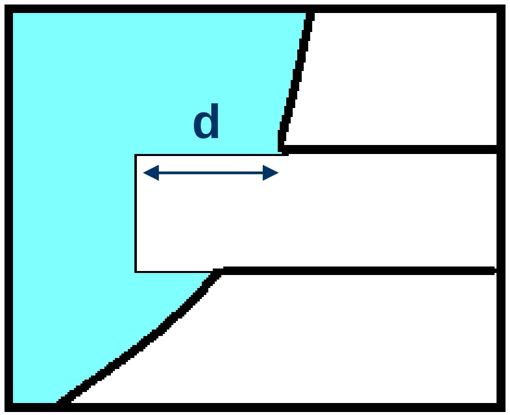
$$x\,\ddot{x} = g\,h + \frac{P_0}{\rho} - \frac{P_0}{\rho}\left(\frac{L}{L-x}\right)^{\gamma} - \frac{f}{2\,D}\,x\,\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\,\dot{x}^2$$

bekommt man

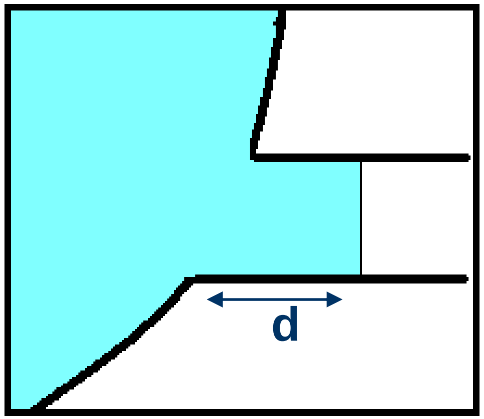
$$gh = 0$$

Das ist aber unmöglich!

Korrekte Anfangsbedienungen:

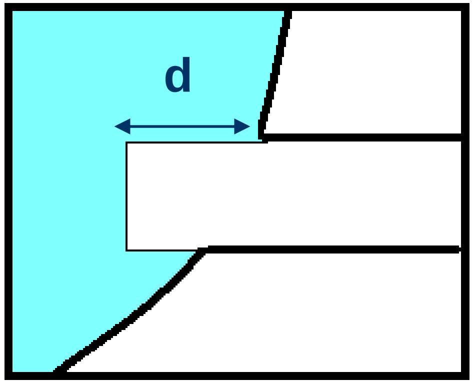


(a)



(b)

Korrekte Anfangsbedienungen (a)



$$m = \rho\, A\, (x + d)$$

Neue Formeln für die Masse und die Energie

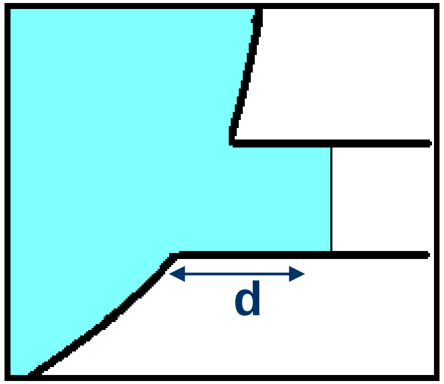
$$E = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 = \frac{1}{2}\, \rho\, A\, (x + d)\, \dot{x}^2$$

$$(x + d)\, \ddot{x} = g\, h + \frac{P_0}{\rho} - \frac{P_0}{\rho} \left(\frac{L}{L - x}\right)^{\gamma} - \frac{f}{2\, D}\, x\, \dot{x}^2 - \frac{1}{2}\, \dot{x}^2$$

Neue Bewegungsgleichung

$$x\,(0) = \dot{x}\,(0) = 0$$

Korrekte Anfangsbedienungen (b)



(b)

In diesem Fall kann man die Anfangsbedinungen aus Toricelli's Gesetz erhalten:

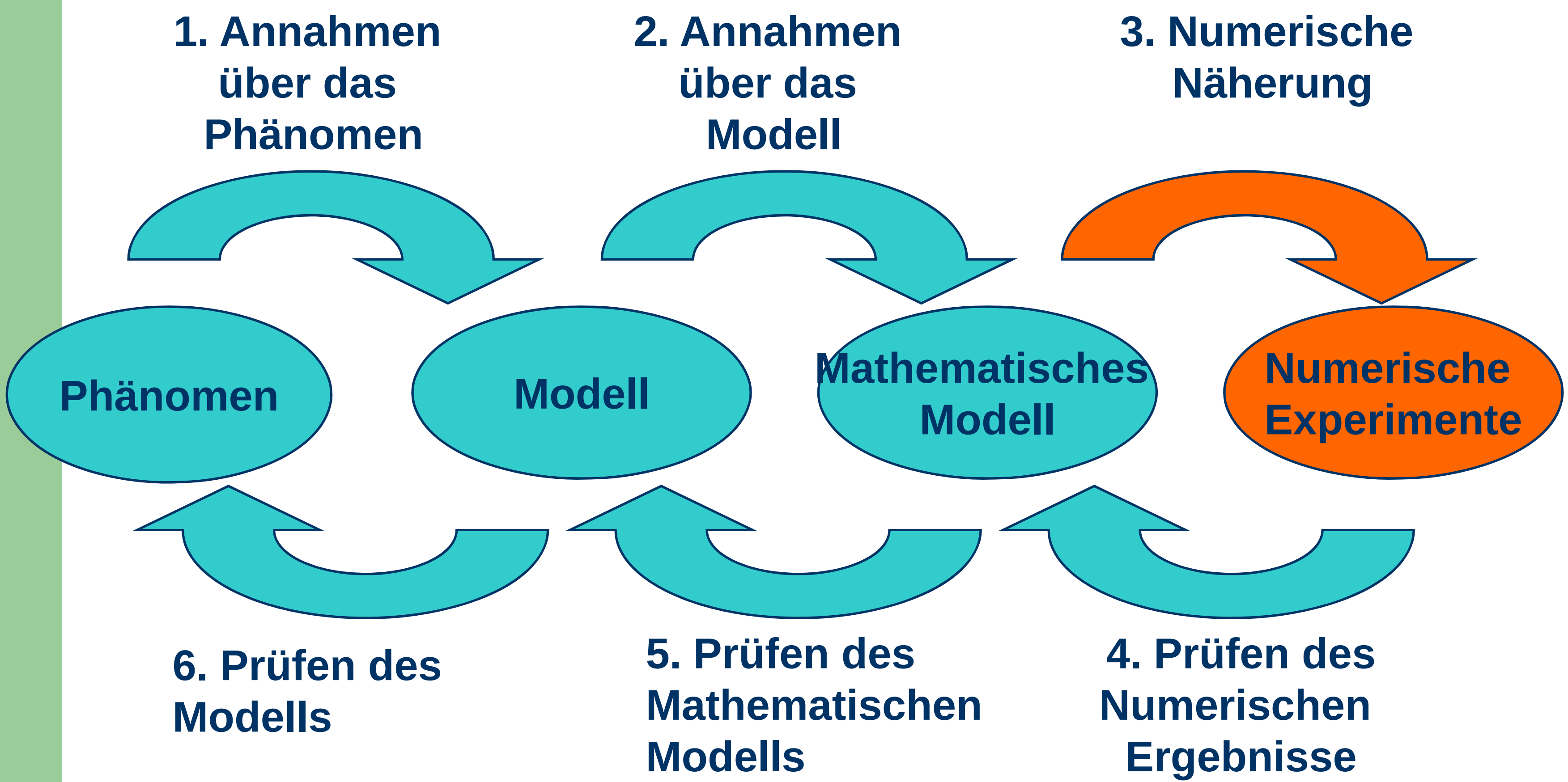
$$x(0) = d$$

$$\dot{x}(0) = \sqrt{gh}$$

und die alte Gleichung benutzen

$$x\ddot{x} = gh + \frac{P_0}{\rho} - \frac{P_0}{\rho}\left(\frac{L}{L-x}\right)^{\gamma} - \frac{f}{2D}x\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\dot{x}^2$$

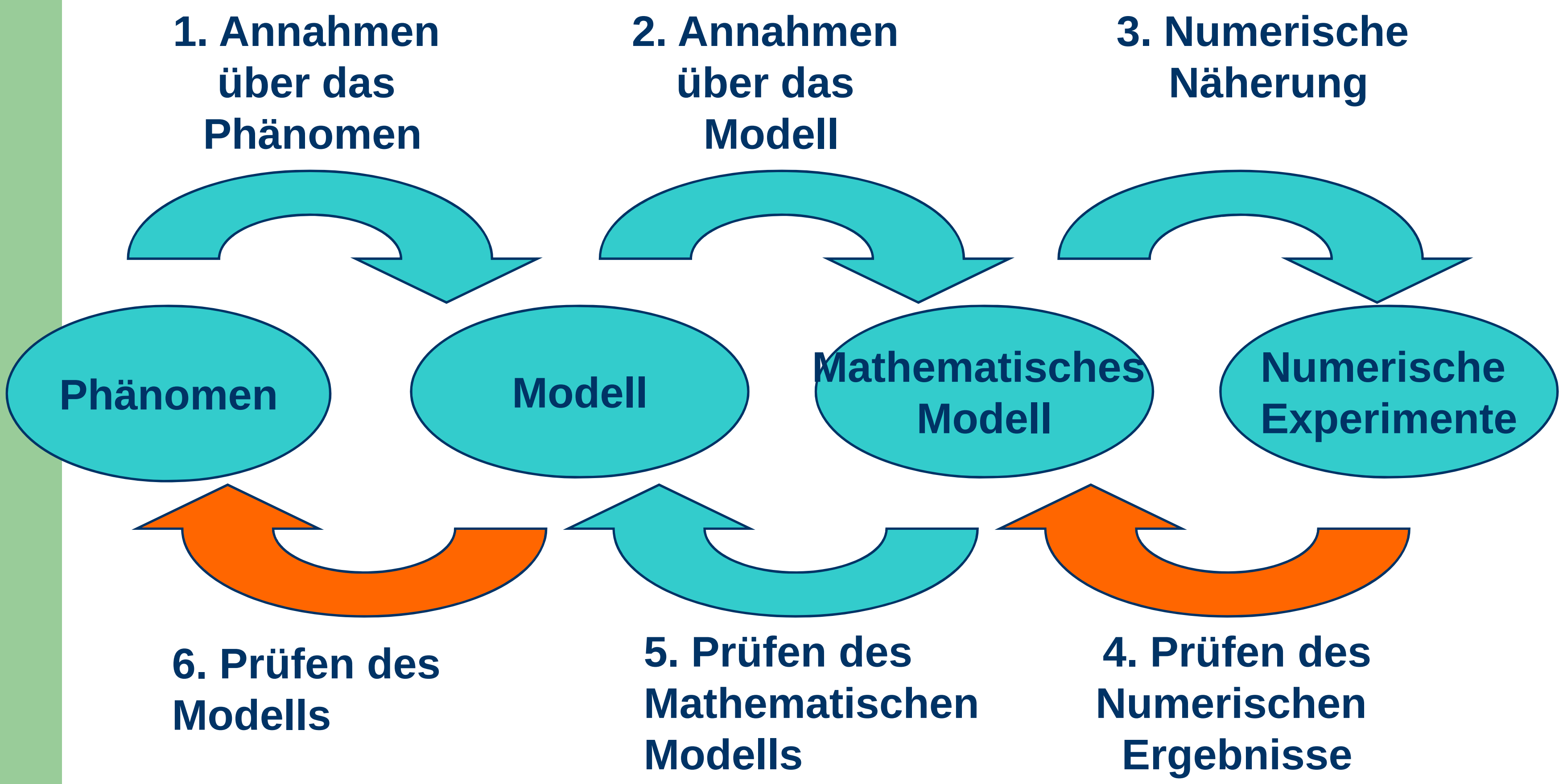
Schritt 3.


1. Annahmen über das Phänomen
2. Annahmen über das Modell
3. Numerische Näherung
Phänomen
Modell
Mathematisches Modell
Numerische Experimente
6. Prüfen des Modells
5. Prüfen des Mathematischen Modells
4. Prüfen des Numerischen Ergebnisse

Berechnungen

- $h=100m$
- $L=1000m$
- $D=d=2m$
- $f=0.05$
- $P_0=101325$ Pa
- $p=1000\ kg/m^3$
- $g=9.8\ m/s^2$

Schritte 4 und 6.



Ergebnisse

- Ergebnis von B.C. Hydro in 1961:

  $P_{maximal} = 180\%\ P_{statisch}$

- Ergebnis von Victoria Universität in 1989:

  $P_{maximal} = 173\%\ P_{statisch}$

- Tatsächlicher Druck nach der Explosion

  $P_{maximal} = 175\%\ P_{statisch}$

Resümee

Wir haben:

- ein Beispiel von effektiver Verwendung der mathematischer Modellierung kennen gelernt;
- erlernt, wie die allgemeine Schema von Modellierung funktioniert;
- einige Regeln erlernt, die man bei der Modellierung von Ströme benutzt;
- erlernt, wie man die Anfangsbedienungen wählen kann.

Übungen

- Lösen Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Numerischen Methoden und des Computers.
- Finden Sie den maximalen Druck.
- Modellieren Sie die Situation, wenn der Tunnel nicht horizontal, sondern geneigt ist.