FACULTÉ des Sciences et Technologies
Dpt Informatique

Lundi 27 Avril 2015 - UE LIFO63
Durée 1h30 min - Noté sur 15

Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables et les ordinateurs sont interdits.
Une calculatrice simple est autorisée.

EXERCICE 1 : Interpolation [3pts +0.5]

Soit la fonction $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$, on souhaite créer un polynôme p de degré 2 qui interpole f. Pour ceci nous utilisons les points d'abscisse $x = \{0, 1, 2\}$.

Question 1.1.A [1 point] Calculer le polynôme p par la méthode d'interpolation de **Lagrange**.

Question 1.1.B [0.25 point] Que constatez-vous ? Ce résultat était-il prévisible dès le départ (justification) ?

Question 1.2 [0.25 point] Calculer et expliquer l'erreur d'interpolation commise en utilisant p pour le point d'abscisse $x = 1$.

Question 1.3 [0.5 point] Calculer l'erreur d'interpolation commise en utilisant p pour le point d'abscisse $x = \frac{1}{2}$.

Question 1.4 [1 point] Donner l'expression de l'erreur théorique d'interpolation de f par p dans l'intervalle $[0,2]$ (il n'est pas demandé de calculer sa majoration). Et expliquer si l'erreur obtenue en question 1.3 est plus grande ou plus petite que l'erreur théorique maximale.

Question Bonus [0.5 point] Donner une majoration de l'erreur théorique.

EXERCICE 2 : Splines cubiques d'interpolation [3 pts]

Le tableau ci-dessous donne un extrait de relevés de terrain pour la modélisation d'un tracé $y = f(x)$

x_i	0	1	2
$y_i = f(x_i)$	y_0	y_1	y_2

On modélise ce tracé par une spline cubique d'interpolation $\boldsymbol{S(x)}$ passant par les 3 points $\{(x_i, y_i)\}$ qui s'écrit sous la forme :

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ S_2(x) & \text{si} \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

Question 2.1 [1.5 points] En appliquant la définition, préciser les 6 conditions que doivent vérifier $S_1(x)$ et $S_2(x)$ aux points (x_i, y_i) pour que la fonction S soit une fonction spline cubique d'interpolation.

Question 2.2 [0.5 point] Compléter les conditions données en 2.1 ci-dessus pour que $S(x)$ soit une fonction spline cubique d'interpolation naturelle.

La fonction $S(x)$ est donnée par :

Tourner SVP →

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = \boldsymbol{A} - 2x + x^3 & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ S_2(x) = 4 - \boldsymbol{B}x + \boldsymbol{C}x^2 + \boldsymbol{D}x^3 & \text{si} \quad x \in [1, 2] \end{cases}$$ et le tableau

x_i	0	1	2
y_i	2	1	4

Question 2.3 [1 point] Déterminer les coefficients A, B, C, D de sorte que $\boldsymbol{S(x)}$ soit la spline cubique naturelle qui passe par ces 3 points.

EXERCICE 3 : Approximation [5 pts]

Le tableau ci-dessous donne les bénéfices de la banque BANKROOT au 1er Janvier des années 2011 à 2015.

Année	2011	2012	2013	2014	2015
Indice année	1	2	3	4	5
Bénéfice (M€)	2	6	9	10	9

On souhaite modéliser l'évolution des bénéfices des 3 dernières années (2013 à 2015 inclus) par une fonction quadratique ; on opte pour la méthode d'interpolation de Newton.

Question 3.1.A [1 point] Donner le tableau des différences divisées pour cette fonction.

Question 3.1.B [1 point] En utilisant les résultats obtenus en (3.1.A), donner le polynôme d'interpolation de Newton. Donner l'expression canonique de ce polynôme.

Question 3.2 [2 points] Afin d'affiner le modèle de l'évolution des bénéfices, on ajoute des données antérieures (années 2011 et 2012). On retient le modèle quadratique et on opte pour une approximation. En utilisant la méthode des moindres carrées, donner la nouvelle fonction quadratique exploitant les données sur les cinq (5) années.

Question 3.4 [1 point] En supposant que cette dernière modélisation reste valide dans les années à venir, quel serait le bénéfice de la banque au 1er Janvier 2016 ?

EXERCICE 4 : Intégration [4 pts]

On cherche à calculer numériquement l'intégrale suivante $I = \int_a^b \frac{1}{x^2+2x+1}\, dx$

Question 4.1 En subdivisant [a, b] en n intervalles, rappeler l'expression de I donnée par :

4.1.A [0.25 pts] la méthode des trapèzes

4.1.B [0.25 pts] la méthode de Simpson

Question 4.2 [1pts] Calculer I sur l'intervalle [0, 4], pour n = 4 par la méthode des trapèzes

Question 4.3 [1pts] Donner l'erreur théorique dans ce cas, et donner sa majoration

Question 4.4 [1.25 pts] Calculer la primitive de $\frac{1}{x^2+2x+1}$ et en déduire la valeur exacte de I

Question 4.5 [0.25 pts] En utilisant **4.2** et **4.4**, calculer l'erreur effective commise

Question bonus [0.25 pts] Comparer cette valeur avec la majoration donnée en 4.3. Le résultat est-il cohérent (argumenter) ?