LIFO63 – Algorithme numérique – TD 2

Racines de fonctions $f(x) = 0$

f: fonction non linéaire

Solutions

Exercice 1

Soit la fonction $f(x) = 2x^3 - x - 2$, montrer que f possède une seule racine réelle $r \in [1,2]$.

Il est clair que f, polynôme de degré 3, est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f(1) = -1$ et $f(2) = 12$, donc $f(1)f(2) < 0$. D'autre part, $f'(x) = 6x^2 - 1 > 0$ sur tout l'intervalle [1,2]. Donc il existe une seule solution réelle $r \in [1,2]$ telle que $f(r) = 0$.

Exercice 2

Approximer la racine de $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ dans l'intervalle $[-2,2]$ après 2 itérations.

1. En utilisant la méthode de dichotomie

Dans la méthode de dichotomie on évalue $f(x)$ au point médian c_i de l'intervalle de recherche, et on réduit l'intervalle de moitié (inférieur ou supérieur) en fonction du signe.
Au départ $a = -2$ et $f(-2) = -10 < 0$, et $b = 2$ et $f(2) = 6 > 0$.

A la première itération, $c_1 = \frac{-2+2}{2} = 0$ et $f(c_1) = f(0) = 2$. Nous avons donc $f(c_1)f(a) < 0$ et $f(c_1)f(b) > 0$ ce qui signifie que c_1 est de signe différent de a donc on réduit à l'intervalle inférieur. Le nouvel intervalle de recherche est $[a, c_1] = [-2,0]$.

A la deuxième itération, $c_2 = \frac{-2+0}{2} = -1$ et $f(c_2) = f(-1) = 0$ donc on a trouvé la racine de la fonction : -1.

2. En utilisant la méthode Regula Falsi (fausse position)

Depuis l'interpolation de Lagrange sur les deux bornes de l'intervalle, le point d'intersection $(c_i, 0)$ avec l'axe x est donné par : $c_i = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$

À l'itération 1, nous avons : $c_1 = \frac{-2\times 6+2\times 10}{6+10} = \frac{1}{2}$ et donc $f(c_1) = \frac{15}{8}$. Cela signifie que $f(c_1)f(x_0) = \frac{15}{8}\times -10 < 0$ donc notre nouvel intervalle de recherche est $[a, c_1] = [-2, \frac{1}{2}]$.

À l'itération 2, nous avons : $c_2 = \frac{-2\times\frac{15}{8}+\frac{1}{2}\times 10}{\frac{15}{8}+10} \approx 0.105$ et $f(c_2) \approx 1.99$
Les valeurs successives pour c_i sont : 0.5, 0.105, -0.244, -0.527, -0.852, … Cette série converge aussi vers -1, mais nous avons besoin de 20 itérations pour atteindre 5 décimales significatives !

Exercice 3

On considère la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Trouver une racine de f par la méthode de Picard après 3 itérations (méthode du point fixe).

1. Avec pour valeur initiale $x_0 = 1$

Dans la méthode de Picard, nous devons mettre la fonction à zéro et trouver une forme $g(x) = x$.
Ici nous pouvons écrire $x^3 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(x^3 + 1)$ Donc $g(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 1)$
Nous avons les itérations suivantes :

$$x_1 = g(x_0) = \frac{2}{3} \approx 0.6667$$
$$x_2 = g(x_1) = \frac{35}{81} \approx 0.4321$$
$$x_3 = g(x_2) = \frac{574316}{1594232} \approx 0.36$$

La suite converge vers 0.3472963… atteignant ces décimales significatives après 10 itérations.

2. Avec pour valeur initiale $x_0 = 1.6$. Que constatez-vous ?

Nous avons les itérations suivantes :

$$x_1 = g(x_0) \approx 1.6987$$
$$x_2 = g(x_1) \approx 1.9671$$
$$x_3 = g(x_2) \approx 2.8707$$

La suite diverge rapidement (au-delà de 10^{55} après 7 itérations).

Exercice 4

On considère la fonction $f(x) = x + \cos x$. Trouver une racine de f.

1. Par la méthode de Picard après 3 itérations en partant de $x_0 = 0$.

Nous devons d'abord écrire l'équation nulle sous la forme $g(x) = x$. Nous avons ici $g(x) = x = -\cos x$
Nous avons les itérations suivantes :

$$x_1 = g(x_0) = -\cos 0 = -1$$
$$x_2 = g(x_1) = -\cos(-1) \approx -0.5403$$
$$x_3 = g(x_2) = -\cos(-0.5403) \approx -0.8575$$

La suite converge vers -0.73909… atteignant ces décimales significatives après 37 itérations.

2. Par la méthode de Newton-Raphson après 2 itérations en partant de $x_0 = 0$.

Cette fois la forme itérative est $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
Ici nous avons :

$$g(x) = x - \frac{x + \cos x}{1 - \sin x}$$

Les itérations nous donnent successivement :

$$x_1 = g(x_0) = 0 - \frac{0+1}{1} = -1$$
$$x_2 = g(x_1) = -1 - \frac{-1 + \cos(-1)}{1 - \sin(-1)} \approx -0.75036$$

Cette série converge vers la même racine -0.73909…, mais nous avons besoin que de 4 itérations pour atteindre la même précision (vs. 37 pour Picard) !

Exercice 5

En utilisant la méthode de Newton-Raphson, trouver une approximation d'une racine des fonctions suivantes en partant de $x_0 = 0$.

1. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

La suite récurrente à utiliser est $g(x) = x - \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{3x^2 + 1}$ et les valeurs sont $x_1 = 0 - \frac{-1}{1} = 1$, $x_2 = 1 - \frac{0}{1} = 1$
Et donc $x_i = 1$ pour toutes valeurs $i \geq 2$. La suite converge donc très rapidement (2 itérations).

2. $f(x) = \sin x - \cos x$

La suite récurrente à utiliser est $g(x) = x - \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x}$ et les valeurs sont $x_1 = 0 - \frac{0-1}{1+0} = 1$ etc.

3. $f(x) = x - e^{-x}$

La suite récurrente à utiliser est $g(x) = x - \frac{x-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ et les valeurs sont $x_1 = 0 - \frac{0-1}{1+1} = \frac{1}{2}$ etc.

Exercice 6

En utilisant les trois premières itérations de Newton-Raphson, approximer la valeur de $\sqrt[3]{2}$. Commencer par l'approximation $\sqrt[3]{2} \approx 2$.

Tout d'abord nous avons besoin d'une équation qui a $\sqrt[3]{2}$ comme racine, par exemple $f(x) = x^3 - 2 = 0$. Puis nous utilisons la formule de Newton-Raphson :

$$g(x) = x - \frac{x^3 - 2}{3x^2}$$

En commençant à l'approximation donnée, on obtient :

$$x_1 = g(x_0) = 2 - \frac{8-2}{12} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{3}{2} - \frac{\frac{27}{8} - 2}{3\times\frac{9}{4}} = \frac{35}{27}$$

$$x_3 = g(x_2) \approx 1.261$$

Cette série converge vers 1.250021… ce qui correspond bien à la valeur $\sqrt[3]{2}$.

Exercice 7

Comparer la solution à l'équation $x^3 + x^2 - x = 2$ approximée par Regula Falsi, Picard et Newton-Raphson après 2 itérations de chaque. Commencer avec l'intervalle $[1,2]$ (pour Regula Falsi) et $x_0 = 1$ (pour Picard et Newton-Raphson).

Regula Falsi

Nous voulons approximer la racine de la fonction $f(x) = x^3 + x^2 - x - 2$

Depuis l'interpolation de Lagrange sur les deux bornes de l'intervalle, le point d'intersection $(c_i, 0)$ avec l'axe x est donné par : $c_i = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$

À l'itération 1, nous avons : $c_1 = \frac{1\times8-2\times-1}{8+1} = \frac{10}{9}$ et donc $f(c_1) = -\frac{368}{729}$. Cela signifie que $f(c_1)f(x_0) = -\frac{368}{729}\times-1 > 0$ donc notre nouvel intervalle de recherche est $[c_1, b] = [\frac{10}{9}, 2]$.

À l'itération 2, nous avons : $c_2 = \frac{\frac{10}{9}\times8-2\times-\frac{368}{729}}{8+\frac{368}{729}} = \frac{902}{775} \approx 1.16$

Cette série converge vers 1.20557…

Picard

Nous devons réécrire $f(x) = x^3 + x^2 - x - 2 = 0$ sous la forme $g(x) = x$
Ici nous avons $g(x) = x = x^3 + x^2 - 2$
Les valeurs successives obtenues sont :

$$x_1 = g(x_0) = 1 + 1 - 2 = 0$$
$$x_2 = g(x_1) = 0 + 0 - 2 = -2$$
$$x_3 = g(x_2) = -8 + 4 - 2 = -6$$

Cette série diverge, aucune solution ne peut être trouvée par la méthode de Picard en partant de 1.

Newton-Raphson

Cette fois la forme itérative est $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
Ici nous avons :

$$g(x) = x - \frac{x^3 + x^2 - x - 2}{3x^2 + 2x - 1}$$

Les itérations nous donnent successivement :

$$x_1 = g(x_0) = 1 - \frac{1 + 1 - 1 - 2}{3 + 2 - 1} = \frac{5}{4}$$
$$x_2 = g(x_1) = \frac{5}{4} - \frac{\frac{125}{64} + \frac{25}{16} - \frac{5}{4} - 2}{\frac{75}{16} + \frac{10}{4} - 1} = \frac{239}{198} \approx 1.207$$
$$x_3 = g(x_2) \approx 1.206$$

Cette série converge vers la même solution que Regula Falsi 1.20557… avec 5 décimales de précision après 5 itérations.

Exercice 8

En utilisant la méthode de Newton-Raphson avec valeur initiale $x_0 = 1$, donner une solution à l'équation $x^2 = 4$. Expliquer quelle valeur initiale peut être choisie pour trouver l'autre solution.

La forme itérative est $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
Ici nous avons $f(x) = x^2 - 4$, donc

$$g(x) = x - \frac{x^2 - 4}{2x^2}$$

Les itérations nous donnent successivement :

$$x_1 = g(x_0) = 1 - \frac{1 - 4}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$
$$x_2 = g(x_1) = \frac{5}{2} - \frac{\frac{25}{4} - 4}{5} = \frac{41}{20} \approx 2.05$$

Cette série converge évidement vers 2 atteignant 8 décimales de précision après 4 itérations.

Comme la fonction $y = x^2 - 4$ est symétrique par rapport à l'axe y, pour trouver l'autre solution (i.e. -2) nous commençons simplement par la valeur opposée à 1, c.-à-d. -1. Les valeurs à chaque itération sont exactement les opposées.

Exercice 9

Comparer la solution à l'équation $\ln x + x = 0$ approximée par Picard et Newton-Raphson après 3 itérations. Commencer à la valeur initiale $x_0 = 1$.

Picard

Nous changeons l'équation $\ln x + x = 0$ en la fonction $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x} = -\ln x$
Les valeurs successives obtenues sont :

$$x_1 = g(x_0) = -\ln 1 = 0$$

$$x_2 = g(x_1) = -\ln 0 \text{ qui n'est pas définit}$$

La méthode de Picard ne converge donc pas vers une solution.

Newton-Raphson

La forme itérative est $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
Ici nous avons $f(x) = \ln x + x$, donc

$$g(x) = x - \frac{\ln x + x}{\frac{1}{x} + 1} = x - (\ln x + x)\frac{x}{1 + x}$$

Les itérations nous donnent successivement :

$$x_1 = g(x_0) = 1 - (\ln 1 + 1)\frac{1}{1 + 1} = 0.5$$

$$x_2 = g(x_1) \approx 0.564$$

$$x_3 = g(x_2) \approx 0.567$$

Cette série converge vers 0.5671433…

Exercice 10

Soit l'équation $\ln x = 2 - x$.

1. Montrer que cette équation admet une solution unique $r \in [0,2]$.

Posons $f(x) = \ln x + x - 2$, on a donc $f(2) = \ln 2 > 0$ et $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty < 0$. On sait également que $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ sur $]0,2[$, donc on a bien une racine unique $r \in [0,2]$.

2. Donner la solution à l'équation en utilisant la méthode de Picard en partant de 1.

Nous changeons l'équation $\ln x = 2 - x$ en la fonction $g(x) = x = 2 - \ln x$
Les valeurs successives obtenues sont :

$$x_1 = g(x_0) = 2 - \ln 1 = 2$$
$$x_2 = g(x_1) = 2 - \ln 2 \approx 1.307$$
$$x_3 = g(x_2) = 2 - \ln 1.307 \approx 1.732$$

Cette série converge vers 1.5571… atteignant 4 décimales après 22 itérations.

3. Montrer que cette équation est équivalente à $x = e^{2-x}$ et en donner la solution en utilisant la méthode de Picard en partant de 1.

On a $x = 2 - \ln x \Leftrightarrow \ln x = 2 - x \Leftrightarrow x = e^{2-x}$. Donc pour x_0 donné, l'itération $x_{n+1} = 2 - \ln x_n$ est équivalente à l'itération $x_{n+1} = e^{2-x_n}$.

Les valeurs successives obtenues sont :

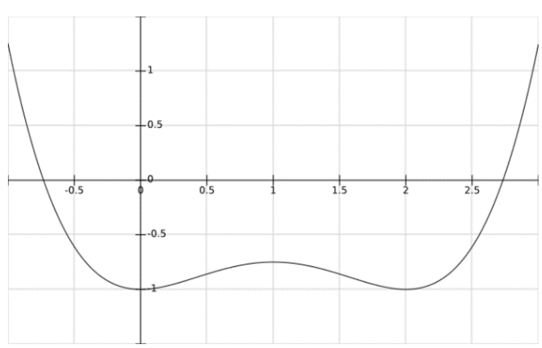
$$x_1 = g(x_0) = e^{2-1} = e$$
$$x_2 = g(x_1) = e^{2-e} \approx 0.4876$$
$$x_3 = g(x_2) = e^{2-0.4876} \approx 4.538$$

Cette série ne converge pas.
La 'forme' est donc importante (en fait la valeur initiale choisie pour une fonction donnée l'est).

Exercice 11

On désire calculer la racine réelle de la fonction $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - 1$

1. Trouver un intervalle $[a, b]$ avec $a > 0$ et $b > 0$ tel qu'il existe r unique et $f(r) = 0$.



On cherche des valeurs $a > 0$ et $b > 0$ telles que $a < b$ et $f(a)f(b) < 0$ et que $f'(x)$ soit monotone sur l'intervalle $[a, b]$. Or $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2)$ et:

f	+		- -1 -		- -3/4 -		- -1 -		+
f'	$-\infty$	-	0	+	1	-	2	+	$+\infty$

Prenons par exemple $a = 2$, on a $f(a) = -1$. Nous devons trouver une valeur b plus grande que 2 dont l'évaluation est positive. Une possibilité est $b = 3$ car $f(3) = \frac{5}{4} > 0$ et $f'(x) > 0$ sur [2,3].

2. Donner les expressions des suites itératives pour la méthode de dichotomie, de Regula Falsi et de Newton-Raphson.

La méthode de dichotomie se fait grâce à l'expression $x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$ dont le choix des valeurs dépend du signe.
La méthode de Regula Falsi se fait grâce à l'expression $x_{n+1} = \frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ dont le choix des valeurs dépend du signe.
La méthode de Newton-Raphson se fait grâce à l'expression $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

3. Appliquer 2 itérations de la méthode de dichotomie afin d'obtenir un plus petit intervalle de recherche.

Dans la méthode de dichotomie on évalue $f(x)$ au point médian c_i de l'intervalle de recherche, et on réduit l'intervalle de moitié (inférieur ou supérieur) en fonction du signe.
Au départ $a = 2$ et $f(2) = -1 < 0$, et $b = 3$ et $f(3) = \frac{5}{4} > 0$.

A la première itération, $c_1 = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$ et $f(c_1) = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{39}{64} < 0$. Nous avons donc $f(c_1)f(a) > 0$ et $f(c_1)f(b) < 0$ ce qui signifie que c_1 est de signe différent de b donc on réduit à l'intervalle supérieur. Le nouvel intervalle de recherche est $[c_1, b] = [\frac{5}{2}, 3]$.

A la deuxième itération, $c_2 = \frac{\frac{5}{2}+3}{2} = \frac{11}{4}$ et $f(c_2) = f\left(\frac{11}{4}\right) \approx 0.0635 > 0$. Nous avons donc $f(c_2)f(a) < 0$ et $f(c_1)f(b) > 0$ ce qui signifie que c_1 est de signe différent de a donc on réduit à l'intervalle inférieur. Le nouvel intervalle de recherche est $[c_1, c_2] = [\frac{5}{2}, \frac{11}{4}]$.

4. Appliquer 3 itérations de la méthode de Newton-Raphson en partant de l'une des bornes de l'intervalle de recherche obtenu à la question précédente.

La forme itérative est $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
Ici nous avons $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - 1$, donc

$$g(x) = x - \frac{\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

Les itérations nous donnent successivement (en partant de la borne inférieure c_1):

$$x_1 = g(x_0) \approx 2.825$$
$$x_2 = g(x_1) \approx 2.7408$$
$$x_3 = g(x_2) \approx 2.7321$$

Cette série converge vers 2.732051 atteignant 9 décimales de précision après 5 itérations.

Exercice 12

On considère l'équation non linéaire suivante :

$$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 = 0$$

1. Montrer que l'équation admet une solution dans $[-1,1]$ et qu'elle est unique.

On a $f(-1) = e^{-1} - \frac{1}{2} < 0$ et $f(1) = e - \frac{5}{2} > 0$. On sait également que $f'(x) = e^x - x - 1 > 0$ sur $[-1,1]$, donc on a bien une racine unique $r \in [-1,1]$.

2. Résoudre numériquement l'équation en utilisant la méthode de Newton-Raphson.

La forme itérative est $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
Ici nous avons $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$, et $f'(x) = e^x - x - 1$ donc

$$g(x) = x - \frac{e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1}{e^x - x - 1}$$

Les itérations nous donnent successivement (en partant de 1):

$$x_1 = g(x_0) \approx 0.6961$$
$$x_2 = g(x_1) \approx 0.4781$$
$$x_3 = g(x_2) \approx 0.3253$$
$$x_4 = g(x_3) \approx 0.2198$$

Cette série converge vers zéro atteignant 14 décimales de précision après 26 itérations.

Exercice 13

On considère la fonction $f(x) = xe^x$ dont la racine est zéro. Comparer les résultats obtenus par la résolution numérique par la méthode de Newton-Raphson en partant de $x_0 = \frac{1}{4}$ et $x_0 = 2$.

La forme itérative est $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
Ici nous avons $f(x) = xe^x$, et $f'(x) = e^x(1 + x)$ donc :

$$g(x) = x - \frac{xe^x}{e^x(1+x)} = x - \frac{x}{1+x}$$

En partant de $x_0 = \frac{1}{4}$, les itérations nous donnent successivement :

$$x_1 = g(x_0) = 0.05$$
$$x_2 = g(x_1) \approx 2.380 \times 10^{-3}$$
$$x_3 = g(x_2) \approx 5.6554 \times 10^{-6}$$
$$x_4 = g(x_3) \approx 3.1984 \times 10^{-11}$$

Cette série converge vers zéro atteignant 20 décimales de précision après 5 itérations.

En partant de $x_0 = 2$, les itérations nous donnent successivement :

$$x_1 = g(x_0) \approx 1.333$$
$$x_2 = g(x_1) \approx 0.7619$$
$$x_3 = g(x_2) \approx 0.3295$$
$$x_4 = g(x_3) \approx 0.0816$$

Cette série converge aussi vers zéro mais n'atteignant que 2 décimales de précision après 5 itérations (nécessite 8 itérations pour atteindre 17 décimales de précision).