Chapitre de rappel
Calcul matriciel

The Matrix is everywhere. It is all around us, even now in this very room

1

Définitions et rappels

On appelle matrice M de type (n, p); un tableau de nombres réels a_{ij} à n lignes et p colonnes. aij désigne le coefficient de la matrice M situé à l 'intersection de la ligne n°i et de la colonne n°j

- i : indice des lignes; i = 1,2,3,........,n
- j : indice des colonnes; j = 1,2,3,.....,p

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad \begin{cases} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p \end{cases}$$

On notera par A(n,p) l'ensemble des matrices du type (n,p) à coefficients dans R (a_{ij} coefficients).

2

<u>Remarques:</u>

Si n = p : la matrice A est dite matrice **carrée** d'ordre **n**.

<u>exemple:</u>
A matrice carrée d'ordre 3 est:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Si n = 1 : la matrice A est dite matrice **ligne** (ou vecteur ligne)

$$A = (a_{11}, \quad \cdots \quad a_{1n})$$

Si p = 1 : la matrice A est dite matrice **colonne** (ou vecteur colonne)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

3

Opérations sur les matrices

•Transposition d'une matrice

Soit A une matrice de type (*n,p*). (n lignes et p colonnes)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad \begin{cases} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p \end{cases}$$

La transposée de la matrice A *(p,n)* ; noée t_A ou ^tA telle que :

$$^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{k1} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1l} & \cdots & a_{kl} & \cdots & a_{nl} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & \cdots & a_{kp} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{kl}) \quad \begin{cases} 1 \le k \le p \\ 1 \le l \le n \end{cases}$$

4

Remarques:

*Si n = p : la matrice A est dite matrice **carrée** d'ordre **n**.

exemple:
A matrice carrée d'ordre 3 est:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Si n = 1 : la matrice A est dite matrice **ligne** (ou vecteur ligne)

$$A = (a_{11}, \quad \cdots \quad a_{1n})$$

Si p = 1 : la matrice A est dite matrice **colonne** (ou vecteur colonne)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

5

• Transposée d'une matrice

La transposée de A =(a_{ij}) de M_{np} est la matrice ^tA =(a_{ji}) de M_{pn} obtenue par permutation des ligne en colonnes

^tA est une matrice de type (*p,n*) (**p** lignes et **n** colonnes) : les lignes de A deviennent colonnes de ^tA et inversement.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -5 & 7 & 8 & 10 \\ -3 & 1 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad ^tA = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 9 & 0 \\ 6 & 10 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

6

- Somme de matrices

La **somme** de deux matrices A = (a_{ij}) et B = (b_{ij}) de même type (*n,p*) est la matrice C = A + B du type (n,p) ; C=(c_{ij}) avec $\mathbf{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$ avec i = 1,2,… ,n ; j = 1,2, … ,p.

Exemple

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 & 5 \\ 0 & -6 & 6 & -3 \\ 4 & 5 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 7 & 11 & 8 & 9 \\ 0 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C=A+B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -8 & 8 \\ 7 & 5 & 14 & 6 \\ 4 & 10 & 5 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

7

Propriétés de la somme de matrices

- La **somme** de matrices de même type (*n,p*) est la matrice
  Commutative A + B = B+A
  Associative A+(B+C) = (A+B)+C
- L'opposée de la matrice A = (a_{ij}) ∈ M(n,p) est la matrice (-A) ∈ M(n,p) où :
  (-*A*)= -(a_{ij}) = (-a_{ij}) ; i = 1,2,.......,n et j = 1,2,.........,p.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -17 & 5 \\ 0 & -6 & 8 & -3 \\ \frac{2}{3} & 5 & -4 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad -A=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 17 & -5 \\ 0 & 6 & -8 & 3 \\ -\frac{2}{3} & -5 & 4 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

8

Propriétés de la somme de matrices

•La transposée d'une somme de deux matrices A et B est égale à la somme des transposées ${}^tA$ et ${}^tB$: ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

•Le produit d'une matrices A = (a_{ij}) ∈ M(n,p) par un scalaire λ est la matrice A' :

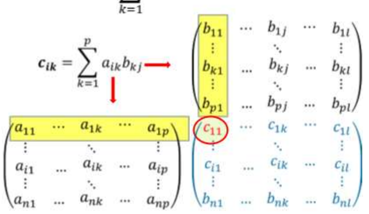
A'= (a'_{ij}) ∈ M(n,p) et $a'_{ij} = \lambda\, a_{ij}$

9

- **Produit de matrices**

Soit A = (aij) ∈ M(n,p) et B = (bij) ∈ M(p,l), on appelle produit de la matrice A par la matrice B ; la matrice C = A.B C = (cij) (1 ≤ i ≤ n et 1 ≤ i ≤ p) de taille (n,l) défini par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{ip} a_{pj}$$



Le produit de deux matrices n'est défini que si le nombre de colonnes de la 1ère matrice est égal au nombre de lignes de la 2ème matrice.

10

Exemple
1- Soit:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice produit $C = A\,B = \begin{pmatrix} 11 & 19 \\ 30 & 51 \end{pmatrix}$

Remarques

- Soit A ∈ M(n,p) et B ∈ M(p,l) ; (A.B) existe, mais en général si l ≠ n, (B.A) n'existe pas.
- Si n = l , on a A(n,p). B(p,n) = C(n,n) matrice carrée ;
  D(p,p) = B(p,n). A(n,p) → D matrice carrée
- ${}^t(A.B) = {}^tB.\,{}^tA$
- Le Produit A.B = 0 n'implique pas que A = 0 ou B = 0

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;;\; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ or } A.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11

Complexité algorithmique

Quel est l'algorithme qui calcule *C=AB* le plus vite ?

Définitions

- grand O $f(x) = O(g(x))$ lorsque $x \to \infty \equiv f(x) = g(x)H(x),\; H(x)$ étant borné à l'infini
- petit o $f(x) = o(g(x))$ lorsque $x \to \infty \equiv \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- **équivalence** asymptotique $f(x) = \Omega(g(x))$ lorsque $x \to \infty \equiv \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

A, *B* et *C* sont des matrices carrées de taille *n*

$O(n^2)$ < Algorithme < $O(n^3)$

Exemple, *n*=2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21}$$
$$c_{12} = a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22}$$
$$c_{21} = a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21}$$
$$c_{22} = a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22}$$

2^3 = 8 multiplications
Comme Strassen, 1969
sauriez vous faire mieux ?

12

Quel est l'algorithme qui calcule *C*=*AB* le plus vite ?

Exemple, *n*=2
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = (a_{11} + a_{22}) \times (b_{11} + b_{22})$$
$$Q_2 = (a_{21} + a_{22}) \times b_{11}$$
$$Q_3 = a_{11} \times (b_{12} - b_{22})$$
$$Q_4 = a_{22} \times (-b_{11} + b_{21})$$
$$Q_5 = (a_{11} + a_{12}) \times b_{22}$$
$$Q_6 = (a_{21} - a_{11}) \times (b_{11} + b_{12})$$
$$Q_7 = (a_{12} - a_{22}) \times (b_{21} + b_{22})$$

$$c_{11} = Q_1 + Q_4 - Q_5 + Q_7$$
$$c_{12} = Q_2 + Q_4$$
$$c_{21} = Q_3 + Q_5$$
$$c_{22} = Q_1 + Q_3 - Q_2 + Q_6$$

Strassen, 1969

$\log_{10}(n)$	$n^3/n^{(\log_2(7))}$
1	1.5
2	2.4
3	3.7
4	5.8
5	9.1
6	14.3
7	22.3
8	34.7
9	54.1
10	84.4

$o(n^2)$ < Algorithme < $O(n^{\log 27})$

13

Quelques matrices particulières

- Matrice carrée
  - Matrice carrée d'ordre n : toute matrice A ayant n lignes et n colonnes.
  - a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{ii}, ..., a_{nn} sont les termes de la diagonale principales de la matrice A.

- A matrice triangulaire supérieure (resp. inf.) : A matrice carrée $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ (resp. $a_{ij} = 0$ pour $i < j$)
  - les éléments situés au dessous (au dessus) de la diagonale sont nuls
  - A et B sont deux matrices triangulaires supérieures (resp. inf.) d'ordre n alors, (A + B) et (A.B) sont aussi des matrices triangulaires supérieures (resp. inf.).

14

- **A matrice diagonale** : A matrice carrée et $a_{ij} = 0 \; si \;\; i \neq j$
- I_{nn} : **unitaire** : matrice diagonale d'ordre n (notée I_n) qui vérifie : $I_{ii} = 1$ (si i≠j $I_{ij} = 0$)

  Exemple

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- A **matrice symétrique** : A matrice carrée et ${}^tA = A$
$$a_{ij} = a_{ji} \; ; i = 1, \cdots, n \;\; ; j = 1, \cdots n$$
- A **matrice antisymétrique** : A matrice carrée et ${}^tA = -A$
$$a_{ij} = -a_{ji} \; ; i = 1, \cdots, n \;\; ; j = 1, \cdots n$$

15

- **A matrice orthogonale** ssi ${}^{t}A.A = A.{}^{t}A = I$ A matrice carrée et $a_{ij} = 0\ si\ i \neq j$
- A matrice orthogonale : ${}^{t}A = A^{-1}$

Le déterminant d'une matrice **orthogonale** est de carré 1, c'est-à-dire qu'il est égal à +1 ou −1.

Vérifiez si la matrice M est orthogonale

$$M = \begin{pmatrix} {}^{1}/_{\sqrt{3}} & {}^{1}/_{\sqrt{2}} & {}^{1}/_{\sqrt{6}} \\ {}^{1}/_{\sqrt{3}} & -{}^{1}/_{\sqrt{2}} & {}^{1}/_{\sqrt{6}} \\ {}^{1}/_{\sqrt{3}} & 0 & {}^{-2}/_{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

16

Propriétés et remarques

•A et B sont deux matrices symétriques, alors (A+B) est une matrice symétrique.

•A est une matrice symétrique et λ réel, alors (λA) est une matrice symétrique.

•A et B sont deux matrices symétriques, la matrice (A.B) n'est pas nécessairement une matrice symétrique.

•A est une matrice antisymétrique alors $A + {}^{t}A = 0$

•A et B sont deux matrices antisymétriques, la matrice (A.B) n'est pas nécessairement une matrice antisymétrique.

17

Déterminant d'une matrice

- A : matrice carrée déterminant de A: noté det A, ou |A|
  → valeur scalaire : définition récursive
- Mineur de l'élément a_{ij}, le déterminant M_{ij} d'ordre (n-1) obtenu à partir du déterminant de A en supprimant dans ce déterminant la ième ligne et la jme colonne.
- A_{ij} cofacteur de l'élément a_{ij} → $A_{ij} = (-1)^{(i+j)} M_{ij}$
- Exemple $A \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{32} = -2 \\ M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{22} = 2 \\ M_{[illegible]} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{[illegible]} = 9 \end{cases}$$

18

A : matrice carrée d'ordre n : det A, ou |A|

Le déterminant de A est égale à la somme des produits de chaque élément d'une ligne (ou d'une colonne) par son cofacteur.

$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det[A_{ij}]$ (dev. Selon les lignes)

$(-1)^{i+j}\det[A_{ij}]$: est appelé cofacteur de a_{ij}

Avec $[A_{ij}]$ est la matrice carrée d'ordre (n-1) obtenue à partir de la matrice A, en supprimant les éléments de la ligne i et les élément de la colonne j

19

Remarques

- Le déterminant d'ordre n ne change pas de valeur quelle que soit la ligne ou la colonne suivant laquelle le développement est effectué.
- Dans chaque cas, on est ramené au calcul de n déterminants d'ordre (n-1). On applique la même règle pour calculer chacun d'eux et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à des déterminants d'ordre 2.
- Pour le calcul de déterminant d'une matrice, il convient de choisir la ligne ou la colonne qui contient un maximum de termes nuls (des zéros).
- le déterminant d'une matrice d'ordre n diagonale, triangulaire supérieure, triangulaire inférieure est égal au produit des termes de sa diagonale principale.

20

Exemple:

Soit la matrice A tel que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

- calculer la déterminant de A en le développant suivant:
- 1) la 3ème colonne.
- 2) la 1ère ligne.
- det A = $0 \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -13$

21

Propriétés

- Si les éléments d'une colonne dans une matrice sont tous nuls, alors le déterminant de cette matrice est nul.
- Si dans une matrice une colonne est multipliée par un scalaire λ, alors son déterminant est multiplié par ce même scalaire.
- Généralement, si A est une matrice d'ordre n, alors:
  det (λA) = λ^n det A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- On calcule les déterminants des matrices A et B:
- Det A = -13 et det B = -26

22

- Un déterminant ne change pas de valeur si aux éléments d'une colonne (resp. ligne) on ajoute les éléments un multiple d'une autre colonne (resp. ligne).
- Exemple:
- Calculer les déterminants des matrices A et B suivantes:
- A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Que peut-on déduire?
- Det A = det B = -4

23

P5- Pour toute matrice carrée A d'ordre n, on a : **det A = det t_A**

Remarque importante:

Puisque det A = det t_A ; les propriétés précédentes restent valables si on remplace le mot « **colonne** » par le mot « **ligne** ».

Conséquence:

Un déterminant ayant deux colonnes (ou lignes) **identiques** ou **proportionnelles** est **nul**.

si par exemple, on a :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \text{alors obligatoirement}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

24

4- Application à la recherche de l'inverse d'une matrice:

4.1-Définition:

Une matrice carrée A, d'ordre n, est inversible s'il existe une matrice carrée, qu'on note A^{-1} d'ordre n telle que: $\mathbf{A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n}$

A^{-1} est appelée matrice inverse de A.

4.2-Comatrice:

Soit A une matrice carrée d'ordre 3, on appelle **comatrice de A**, la matrice des cofacteurs associés à A.

si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; alors $Co\,A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$, avec : $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

25

- $A^{-1} = \dfrac{{}^{t}ComA}{\det\ A}$ $comA$: comatrice de A

Théorème:

Une matrice carrée A est inversible ⇔ $\det A \neq 0$

4.3-Propriétés:

P1- Si une matrice est inversible, alors son inverse est **unique**.

P2- $(A^{-1})^{-1} = A$

P3- $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

car on sait que : $(A.B).(A.B)^{-1} = I$; et si on multiplie les deux membres par A^{-1} à gauche, on aura : $\mathbf{A^{-1}}.(A.B).(A.B)^{-1} = \mathbf{A^{-1}}.I \Rightarrow B.(A.B)^{-1} = A^{-1}.I$; et si on multiplie de la même façon ces deux membres par B^{-1}, on aura : $\mathbf{B^{-1}}.B.(A.B)^{-1} = \mathbf{B^{-1}}.A^{-1} \Rightarrow \mathbf{(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}}$

P4- $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

P5- $\mathbf{\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}}$; avec $\det A \neq 0$

26

Exemple:

Soit A la matrice donnée comme suit: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer A^{-1}.

2) En déduire le det A^{-1}.

1- Det A = -17 donc la matrice inverse existe. On calcule d'abord la comatrice de A

Soit : $CoA = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 19 \\ 1 & 2 & -6 \\ -1 & -2 & -11 \end{pmatrix}$ donc = $A^{-1} = -\dfrac{1}{17}\begin{pmatrix} -6 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \\ 19 & -6 & -11 \end{pmatrix}$

2- $\det A^{-1} = -\dfrac{1}{17}$

27

Rang d'une matrice

Soit A une matrice de type (m,n), dans cette matrice A, on choisit d'une façon arbitraire k lignes et k colonnes, avec lesquelles on forme une matrice carrée d'ordre k; le déterminant de cette matrice carrée s'appelle **mineur d'ordre k** de la matrice A.
Il existe un mineur d'ordre **r non nul** tel que tous les mineurs d'ordre **s > r** sont **nuls**.
Le nombre **r** s'appelle le rang de la matrice A; qu'on note **r(A)**.

Méthode directe

Exemple:

1- $$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

28

On va calculer les déterminants de tous les mineurs d'ordre 4.

$$M_4^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \;;\; M_4^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \;;\; M_4^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0\;;$$

$$M_4^{(4)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad M_4^{(5)} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -7 & 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0\;;$$

Le mineur d'ordre 3 donné par:

$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$; donc le rang de la matrice est égal à 3 $\Rightarrow$ **r(A) = 3**

29

2- On donne la matrice A de type (4,5) suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \\ -4 & -3 & 17 & -15 & 4 \end{pmatrix}$$

Le mineur d'ordre 2 donné par:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad ;$$

30

On vérifie par la suite que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \\ 5 & 6 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 5 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \\ 6 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -3 \\ 6 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

Tous les mineurs d'ordre 3 sont nuls, donc le rang de la matrice A est égal à 2 $\Rightarrow$ **r(A) = 2**.

31

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r = 3$ $\qquad$ $r = 2$ $\qquad$ $r = 1$

32

Remarques

Les opérations suivantes sont dites opération élémentaires:

- Permutation de 2 lignes (resp) 2 colonnes
- Multiplication d'une ligne (resp. colonne) par un scalaire non nul
- Ajouter à une ligne (resp. colonne) une autre ligne(resp. colonne) multipliée par un nombre

33

Exercices d'application

Ex.1 Diagonaliser la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ex.2 Résoudre le système suivant :

$$(S)\begin{cases} 3x + y - 9z + 7t = 2 \\ x + y - 2z + 3t = 3 \\ -x + y + 5z - t = 4 \\ -x + 3y + 8z + t = 11 \end{cases}$$

34

Corrigé des exercices

Exercice 1

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda)(4-\lambda)$$

Les valeurs propres sont donc 0 ; 3 ; et 4.

Vecteurs propres :

* $\lambda = 0$ On résout le système AX = O on obtient :

$$\begin{cases} 3x - z = 0 \\ x + 2z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \quad x = z = 0 \text{, et } y \in /R$$

L'ensemble des vecteurs propres associés à $\lambda = 0$ sont les vecteurs colinéaires au vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

35

* $\lambda = 3$ On résout le système (A- 3*I*)X = O on obtient :

$$\begin{cases} -z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{rang (S)} = 2 \text{, Si on pose } y = \alpha \text{, on trouve : } z = 0 \text{, et } x = 3\alpha .$$

L'ensemble des vecteurs propres associés à $\lambda = 3$ sont les vecteurs colinéaires au vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

* $\lambda = 4$ On résout le système (A- 4*I*)X = O on obtient :

$$\begin{cases} -x - z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \\ 0z = 0 \end{cases} \quad \text{rang (S)} = 2 \text{, on trouve : } z \in /R \text{, et } x = -z \text{, et } y = (x + 2z)/4.$$

L'ensemble des vect. propres associés à $\lambda = 4$ sont les vect. colinéaires au vecteur $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

36

La matrice P s'écrit donc : $P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ det P = -12

Et $P^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -4 & 12 & -7 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ on trouve : A' = $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

37

Exercice 2 Résoudre le système : $(S)\begin{cases} 3x + y - 9z + 7t = 2 \\ x + y - 2z + 3t = 3 \\ -x + y + 5z - t = 4 \\ -x + 3y + 8z + t = 11 \end{cases}$

On calcule le rang de ce système

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -9 & 7 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc r(S) = 2, On pose alors z = α et t = β, le système devient :

38

$$(S)\begin{cases} 3x + y = 2 + 9\alpha - 7\beta \\ x + y = 3 + 2\alpha - 3\beta \\ -x + y = 4 - 5\alpha + \beta \\ -x + 3y = 11 - 8\alpha - \beta \end{cases}$$

La solution du système: x = $-\frac{1}{2} + \frac{7}{2}\alpha - 2\beta$; y = $\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\alpha - \beta$; z = α et t = β

39

Exercice 3 On considère le système suivant :

$$(S)\begin{cases} 3x-2y+z=4 \\ 2x+3y-z=-1 \\ x-y-3z=-3 \end{cases}$$

a- Ecrire la matrice associée au système (S) et calculer son déterminant

b- Calculer la matrice inverse A^{-1}

c- En déduire la solution du système (S).

d- Retrouver le résultat par la méthode de Cramer.

40

Exercice 3

$$(S)\begin{cases} 3x-2y+z=4 \\ 2x+3y-z=-1 \\ x-y-3z=-3 \end{cases}$$

a- $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 5.1 - 5.10 = -45$

41

b- $\mathrm{CoA} = \begin{pmatrix} -10 & 5 & -5 \\ -7 & -10 & 1 \\ -1 & 5 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{45}\begin{pmatrix} -10 & -7 & -1 \\ 5 & -10 & 5 \\ -5 & 1 & 13 \end{pmatrix}$

c- On a $A.X = B$ donc $X = A^{-1}B$

On trouve : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$

42

d- $\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -30 \Rightarrow x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{2}{3}$

$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 15 \Rightarrow y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -\frac{1}{3}$

$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -60 \Rightarrow z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{4}{3}$

43