Faculté des Sciences et Technologies
Dpt Informatique

LIFO63 – Algorithme numérique – TD 3

Interpolation

Exercice 1

Trouver le polynôme passant par les points $A = (0,0), B = (-2,4), C = (3,6)$ en utilisant la méthode d'interpolation de Lagrange.

Exercice 2

Calculer la valeur à $x = 2$ en utilisant l'interpolation de Lagrange aux points suivant :

1. $(-4,1)$ et $(3,2)$

2. $(-2,-2), (3,-4.5)$ et $(1,-0.5)$

Conclusion ?

Exercice 3

Nous souhaitons approcher la fonction cosinus.

1. Avec un polynôme de degré 1 en utilisant les points particuliers pour les deux angles 0 et π. Donner ce polynôme et calculer l'erreur au point 2π.

2. Avec un polynôme de degré 2 en utilisant les points particuliers pour les trois angles : $0, \pi, 2\pi$. Donner ce polynôme et calculer l'erreur au point $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4

Soient les points $A = (1,3), B = (2,5), C = (3,3)$. Calculer le polynôme P de degré 2 passant par ces points.

1. En résolvant un système d'équation linéaire.

2. En utilisant la méthode d'interpolation de Lagrange.

3. En utilisant les différences divisées de Newton.

Exercice 5

On donne les valeurs numériques suivantes :

x	$f(x)$
1	0
1.5	1

2	2
2.5	-1.5

1. En utilisant les différences divisées de Newton, déterminer le polynôme qui interpole la fonction $f(x)$ sur les points de support donnés.

2. Évaluer $f(1.8)$

Exercice 6

On considère une fonction $f:\ [-1,1]\ \to \mathbb{R}$. Soit p le polynôme de degré 1 qui interpole f pour le support $\{x_0, x_1\}$.

1. Quels points de support doit-on choisir entre $\{-1,1\}$ et $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ et pourquoi ?

2. Déterminer le polynôme d'interpolation de degré 1 qui interpole $f(x) = x^3$ sur le support $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ et donner une majoration de l'erreur pour tout $x \in [-1,1]$.

Exercice 7

Soient $f(x) = \cos x$ et $g(x) = e^{3x}$ définies sur $[0,1]$. Estimer le nombre minimum de points pour que l'erreur entre la fonction et son polynôme d'interpolation de Lagrange soit inférieur à 0.1, 0.01 et 0.001.

Exercice 8

Soient les fonctions définies par $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$ et trois points $x_0 = 1, x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 2$.

1. Montrer, sans le calculer, que f et g ont le même polynôme d'interpolation sur le support $\{x_0, x_1, x_2\}$.

2. Calculer le polynôme de Lagrange qui interpole f et g sur le support donné.

3. Trouver la valeur approchée de g au point $x = 1.75$ et donner une majoration de l'erreur d'interpolation sur l'intervalle $[1,2]$.

Exercice 9

On veut représenter la fonction $f(x) = e^x$ par un polynôme sur l'intervalle $[-1,1]$. On choisit les 3 points $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$.

1. Donner le polynôme d'interpolation de Lagrange sur le support donné.

2. Donner une majoration de l'erreur.

3. Donner les valeurs approchées aux points $x = -0.5, 0.5, -0.75, 0.75$ ainsi que les erreurs de précisions commises en ces points et comparer avec le résultat obtenu en question 2.

Exercice 10

Soit la fonction $f(x) = x^3$ sur $[0,1]$

1. Écrire l'interpolation polynomiale P de degré 1 sur le support $\{(0,0), (1,1)\}$.

2. Calculer la valeur du point $c \in [0,1]$ tel que $f(x) - p(x) = \frac{f''(c)}{2} x(x-1)$.

Exercice 11

Soit la fonction $f(x) = 4^x - x - 2$ définie sur $[0,1] \to R$. L'équation $f(x) = 0$ admet une solution $x^* \in [0,1]$.

1. À l'aide des différences divisées, calculer le polynôme P qui interpole f aux points $0, 0.5, 1$.

2. En utilisant le polynôme P, donner une valeur approchée de x^*.

Exercice 12

Soit la fonction $f(x) = (2x - \alpha)^4$ définie sur $[0, \alpha]$.

1. Donner le polynôme P de degré 1 interpolée aux bornes de l'intervalle.

2. Calculer la ou les valeurs du point $c \in [0, \alpha]$ tel que $f(x) - P(x) = \frac{f''(c)}{2} x(x - \alpha)$.

Exercice 13

On veut approcher la fonction $f(x) = e^{2x}$ par un polynôme d'interpolation P avec points équidistants :$x_0, \cdots, x_n$ dans l'intervalle $[0,1]$.

1. Rappeler la formule d'erreur.

2. Montrer que la formule d'erreur est monotone décroissante en fonction de n.

Exercice 14

On étudie l'interpolation polynômiale de la fonction $f(x) = |x|$ sur $[-1,1]$. On connaît les cinq valeurs pour les abscisses $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$.

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange et l'erreur associée.

2. Confirmer le résultat par la méthode des différences divisées.

3. Le polynôme de Tchebychev donne les abscisses optimales pour minimiser l'erreur d'approximation. Ces n abscisses sur $[a, b]$ (pas nécessairement équidistantes) sont données par :

$$\forall i \in \{0, \cdots, n\}, x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2(n-i)+1)\pi}{2(n+1)}$$

Déterminer le polynôme d'interpolation de f obtenu en utilisant cinq abscisses optimales sur $[-1,1]$.

4. Déterminer sur l'intervalle $[-1,1]$ la spline cubique naturelle d'interpolation de f passant par les points de support donnés en plus des bornes de l'intervalle. En déduire la valeur approchée de $|0.75|$ et $|-0.25|$.