Complément

Ci-joint

- Correction de l’exemple sur l’interpolation par Newton (page 90 dans les slides envoyé hier)
- J’ai ajouté un exemple corrigé (exercice examen 2015).

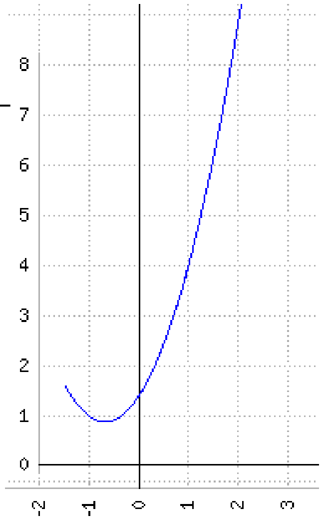
Bon travail, et n’hésitez pas à revenir vers nous si vous avez des questions, ou si vous n’avez pas compris des passages.

Bon courage et prenez soin de vous

Newton : exemple

- Retour sur l'exercice : *n=2* avec (*-1*,*1*), (*1*,*4*) et (*3*,*16*)

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
-1	$f[x_0]=1$ a_0		
1	$f[x_1]=4$	a_1 $f[x_0,x_1]=\frac{1-4}{1+1}=\frac{3}{2}$	
3	$f[x_2]=16$	$f[x_0,x_1]=\frac{16-4}{3-1}=6$	a_2 $f[x_0,x_1,x_2]=\frac{6-\frac{3}{2}}{3+1}=\frac{9}{8}$



$$(\mathrm{p}(\mathrm{x}) = 1 + \frac{3}{2}(x+1) + \frac{9}{8}(x+1)(x-1)$$

et on retombe sur $\mathrm{p}(\mathrm{x}) = \frac{9}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{11}{8}$ (voir Lagrange)

Exemple

Soit la fonction $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$, on souhaite créer un polynôme p de degré 2 qui interpole f. Pour ceci nous utilisons les points d'abscisse $x = \{0, 1, 2\}$.
Question 1.1.A Calculer le polynôme p par la méthode d'interpolation de Lagrange.

Réponse :

Dans la méthode d'interpolation de Lagrange le polynôme est de la forme :
$P(x) = p_0(x) + \cdots + p_n(x)$ avec $n + 1$ points de support et

$$p_i(x) = y_i \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

Les points de support sont : (0,-1) (1,-2) et (2,-3).

Donc ici nous avons :

$$p_0(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = -1 \frac{x - 1}{0 - 1} \frac{x - 2}{0 - 2} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$$

$$p_1(x) = y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = -2 \frac{x - 0}{1 - 0} \frac{x - 2}{1 - 2} = 2x^2 - 4x$$

$$p_2(x) = y_2 \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = -3 \frac{x - 0}{2 - 0} \frac{x - 1}{2 - 1} = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$$

Finalement on obtient :

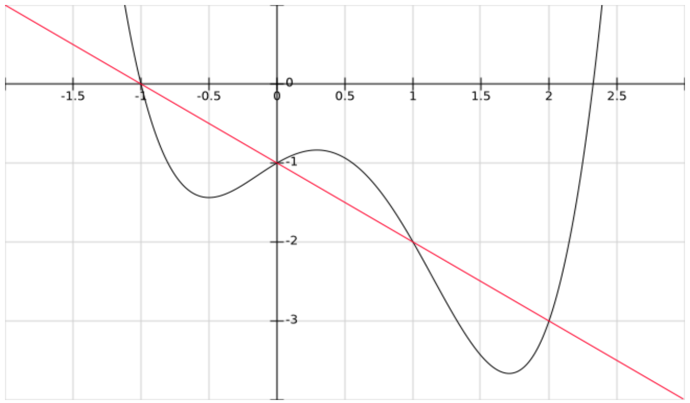
$$P(x) = p_0(x) + p_1(x) + p_2(x) = -x - 1$$

Exemple (suite)

Question 1.1.B Que constatez-vous ? Ce résultat était-il prévisible dès le départ (justification) ?

Réponse :

Le polynôme se réduit en fait à une droite le résultat est prévisible car les trois points de support sont alignés



Question 1.2 [0.25 point] Calculer et expliquer l'erreur d'interpolation commise en utilisant p pour le point d'abscisse x=1.

Réponse :

Pour le point d'abscisse $x = 1$, nous avons $p(1) = -1 - 2 = -2$ qui donne une erreur d'interpolation nulle ce qui est normal, puisque ce point est un point de support.

Question 1.3 : Calculer l'erreur d'interpolation commise en utilisant p pour le point d'abscisse x=1/2.

Réponse : Calculons la valeur de l'interpolation pour $x = \frac{1}{2}$. Nous avons $p\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$

Alors que nous avons la valeur originale $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{16} = -0.9375$

L'erreur commise est donc $e = \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - p\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{9}{16} = 0.5625$

Question 1.4 : Donner l'expression de l'erreur théorique d'interpolation de f par p dans l'intervalle [0,2] (il n'est pas demandé de calculer sa majoration). Et expliquer si l'erreur obtenue en question 1.3 est plus grande ou plus petite que l'erreur théorique maximale.

Réponse :

Si p est le polynôme d'interpolation d'une fonction f pour support les points $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, l'erreur commise en remplaçant la valeur f(x) par p(x) est donnée en fonction de ξ par l'expression suivante :

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)\cdots(x - x_n)$$

Ici, avec nos trois points de support :

$$e(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = \frac{24\xi - 12}{6}x(x-1)(x-2) \qquad \text{avec } \xi \in [0,2]$$

L'erreur obtenue à la question 1.3 est nécessairement plus petite que l'erreur théorique maximale, puisque cette erreur est donnée pour un point particulier (i.e. $-\frac{1}{2}$) alors que l'erreur théorique maximale est la pire des erreurs possible pour l'ensemble de l'intervalle.

Question 1.4 : Donner une majoration de l'erreur théorique.

Réponse :

Nous avons obtenu

$$e(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = \frac{24\xi-12}{6}x(x-1)(x-2) \qquad \text{avec } \xi \in [0,2]$$

Il nous faut trouver un majorant de $e(x)$ pour tout $x \in [0,2]$.

$(x-x_0)\cdots(x-x_n)$

Comme $\frac{24\xi-12}{6}$ est croissante par rapport à ξ , on prend $\xi = 2$. Il reste à étudier

$g(x) = x(x-1)(x-2)$ pour en trouver un majorant. On a $g'^{(x)} = 3x^2 - 6x + 2$ qui s'annule en $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ donnant une majoration $|g(x)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

D'où :

$$|e(x)| \leq \frac{24 \times 2 - 12}{6} \times \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2.31$$

$$|e(x)| \leq 2.31$$

Question 1.4 : Donner le polynôme d'interpolation par la méthode de Newton.

Réponse :

Dans la méthode d'interpolation de Newon le polynôme est de la forme avec $(n+1)$ noeuds

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n\,(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

En prenant les points de support (ou nœuds) les points : (0,-1) (1,-2) et (2,-3).

Donc ici nous avons :

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Il faut calculer a_k

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	-1 $=a_0$		
1	-2	$\frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{-2+1}{1-0} = -1 = \mathbf{a_1}$	
2	-3	$\frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{-3+2}{2-1} = -1$	$\frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-1+1}{1-0} = 0 = \boldsymbol{a_2}$