Premier ordre — épisode précédent

Sémantique : au premier ordre, domaines…

Prouvabilité : séquents prouvables, déduc. nat. au premier ordre

Une extension : ajout d'un prédicat, introduction/élimination

Termes = inductifs, faire qq-chose ? et les langages de prog. ?

Premier ordre — exemple déduc. nat.

Tout homme est mortel, Socrate est un homme donc Socrate est mortel

Termes $\{S:0\}$ Relations $\{H:1,\ M:1\}$

Modélisation

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} \forall x, H(x) \Rightarrow M(x) \\ H(S) \end{array} \right\}$$

Montrer $\Gamma \vdash M(S)$ prouvable

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x, H(x) \Rightarrow M(x)}\,(\text{ax})}{\Gamma \vdash H(S) \Rightarrow M(S)}\,(\forall_e) \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash H(S)}\,(\text{ax})}{\Gamma \vdash M(S)}\,(\Rightarrow_e)$$

Premier ordre — ajouter des règles

$\rightsquigarrow$ extensible sans perte de cohérence (difficile) :

Exemple : $\dfrac{}{\Gamma \vdash t = t}\,(=_i)$ `reflexivity` $\qquad \dfrac{\Gamma \vdash F[x \to t] \quad \Gamma \vdash t = s}{\Gamma \vdash F[x \to s]}\,(=_e)$

Termes inductifs + bonnes propriétés : possibilités ?

Premier ordre — ajouter des règles

Entiers E définis inductivement :

- $\to Z$ $\qquad Z \in E$
- $n \to Sn$ $\qquad n \in E \to Sn \in E$

Prouver P sur E par induction : stabilité de $F \subseteq E$ tel que si $n \in F$ alors Pn

- PZ
- Si Pn alors $P(Sn)$ $\qquad n \in F \to Sn \in F$

$$\dfrac{\forall y, Py \to P(Sy) \quad PZ}{\forall x, Px}\,(E_{\text{ind}})$$

Premier ordre — ajouter des règles

Listes de $\texttt{nat}$ L définies inductivement :

- $\to$ `[]` $\qquad$ `[]` $\in L$
- $l \to n :: l$ pour n $\texttt{nat}$ $\qquad l \in L \to n :: l \in L$

Prouver P sur L par induction : stabilité de $F \subseteq L$ tel que si $l \in F$ alors Pl

- $P\,\texttt{[]}$
- Si Pl alors pour tout n, $P(n :: l)$ $\qquad l \in F \to n :: l \in F$

$$\frac{\forall n, \forall l', Pl' \to P(n :: l') \quad P\,\texttt{[]}}{\forall l, Pl}\ (L_{\text{ind}})$$

++Déduc. nat. — ajouter des règles

Termes pour calculer (données, programmes sur ces données)

Formules pour raisonner (propriétés sur termes, *preuves*

Induction

$\leadsto$ sens d'un programme ? sémantique des langages...

Sémantique

Définir si une expression/programme a un sens avant de l'évaluer

$\leadsto$ règles d'évaluation

$\leadsto$ règles de typage

... $\leadsto$ environnements

...... $\leadsto$ fonctions

Sémantique — expressions arithmétiques

Ensemble $\mathcal{A}$ inductif pour changer...

- $\to \texttt{Cte}(n)$
- $A_1, A_2 \to \texttt{+}(A_1, A_2)$
- $A_1, A_2 \to \texttt{*}(A_1, A_2)$ $\qquad$ (syntaxe abstraite)

$$\frac{}{\texttt{Cte}(n) \leadsto n}$$

$$\frac{e_1 \leadsto v_1 \quad e_2 \leadsto v_2}{\texttt{+}(e_1, e_2) \leadsto v_1 +_{\mathbb{N}} v_2}$$

$$\frac{e_1 \leadsto v_1 \quad e_2 \leadsto v_2}{\texttt{*}(e_1, e_2) \leadsto v_1 \times_{\mathbb{N}} v_2}$$

Sémantique — expressions logiques

Ensemble $\mathcal{B}$ inductif

- $\rightarrow$ **faux** $\quad \rightarrow$ **vrai**
- $B_1, B_2 \rightarrow \mathtt{ou}(B_1, B_2)$
- $B_1, B_2 \rightarrow \mathtt{et}(B_1, B_2)$
- $B_1 \rightarrow \mathtt{non}(B_1)$ (syntaxe abstraite)

$$\frac{}{\mathtt{vrai} \rightsquigarrow t_{\mathbb{B}}} \qquad \frac{}{\mathtt{faux} \rightsquigarrow f_{\mathbb{B}}} \qquad \frac{e \rightsquigarrow v}{\mathtt{non}(e) \rightsquigarrow \overline{v}}$$

$$\frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\mathtt{et}(e_1, e_2) \rightsquigarrow \min_{\mathbb{B}}(v_1, v_2)} \qquad \frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\mathtt{ou}(e_1, e_2) \rightsquigarrow \max_{\mathbb{B}}(v_1, v_2)}$$

Sémantique — arith. + logiques

Ensemble $\mathcal{E}$ inductif

- $\rightarrow$ **faux** $\quad \rightarrow$ **vrai** $\quad \rightarrow \mathtt{Cte}(n)$
- $E_1 \rightarrow \mathtt{non}(E_1) \quad E_1, E_2 \rightarrow \mathtt{ou}(E_1, E_2) \quad E_1, E_2 \rightarrow \mathtt{et}(E_1, E_2)$
- $E_1, E_2 \rightarrow \mathtt{+}(E_1, E_2) \quad E_1, E_2 \rightarrow \mathtt{*}(E_1, E_2) \quad E_1, E_2 \rightarrow \mathtt{eq}(E_1, E_2)$
- $E_1, E_2 \rightarrow \mathtt{gt}(E_1, E_2) \quad E_1, E_2, E_3 \rightarrow \mathtt{if}(E_1, E_2, E_3)$

$$\frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\mathtt{eq}(e_1, e_2) \rightsquigarrow t_{\mathbb{B}}}\ v_1 =_{\mathbb{N}} v_2 \qquad \frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\mathtt{eq}(e_1, e_2) \rightsquigarrow f_{\mathbb{B}}}\ v_1 \neq_{\mathbb{N}} v_2$$

$$\frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\mathtt{gt}(e_1, e_2) \rightsquigarrow t_{\mathbb{B}}}\ v_1 >_{\mathbb{N}} v_2 \qquad \frac{e_1 \rightsquigarrow v_1 \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\mathtt{gt}(e_1, e_2) \rightsquigarrow f_{\mathbb{B}}}\ v_1 \not>_{\mathbb{N}} v_2$$

$$\frac{e_1 \rightsquigarrow t_{\mathbb{B}} \quad e_2 \rightsquigarrow v_2}{\mathtt{if}(e_1, e_2, e_3) \rightsquigarrow v_2} \qquad \frac{e_1 \rightsquigarrow f_{\mathbb{B}} \quad e_3 \rightsquigarrow v_3}{\mathtt{if}(e_1, e_2, e_3) \rightsquigarrow v_3}$$

Sémantique — typage

Quid de $\mathtt{+}(\mathtt{vrai}, \mathtt{Cte}(7))$?

$\rightsquigarrow$ garantir possibilité d'évaluation

Langage fortement typé si évaluation pour toute dérivation de typage