Premier ordre — épisode précédent

Signature : symboles. . .

Termes : ensemble inductif fondé sur signature et variables

Variables $\rightsquigarrow$ substitution et donc filtrage et unification

Formules : ensemble inductif fondé sur termes et relations

On continue : pourquoi ? sémantique ? déduc. nat. ?

Premier ordre — sémantique

Pourquoi ? pour parler des gens qui vont à Paris. . . , des hommes. . .

- Termes : objets du discours $\rightsquigarrow$ ensembles connus
- Relations/prédicats : propriétés des objets $\rightsquigarrow$ algèbre $\mathbb{B}$

Premier ordre — sémantique

$(\mathcal{F}, \tau)$ signature termes, $(\mathcal{S}, \rho)$ signature relations

Interprétation I : $(D, I_{\mathcal{F}}, I_{\mathcal{S}})$

- D domaine, ensemble non vide
- $I_{\mathcal{F}}$: pour chaque $f \in \mathcal{F}, \tau(f) = n, \quad I_{\mathcal{F}}(f) = f_I : D^n \to D$
- $I_{\mathcal{S}}$: pour chaque $P \in \mathcal{S}, \rho(P) = k, \quad I_{\mathcal{S}}(P) = P_I : D^k \to \mathbb{B}$

Valuation $\nu : X \to D$

Notation : $\nu[x/v_0]$ telle que $\nu[x/v_0](x) = v_0$

Premier ordre — sémantique

Interprétation : extension de ν par I à $\mathcal{T}(\mathcal{F}, X)$ puis aux formules :

- $I_\nu(x) = \nu(x)$ pour $x \in X$
- $I_\nu(f(t_1, \ldots, t_n)) = f_I(I_\nu(t_1), \ldots, I_\nu(t_n))$ pour $f \in \mathcal{F}$
- $I_\nu(P(t_1, \ldots, t_k)) = P_I(I_\nu(t_1), \ldots, I_\nu(t_k))$ pour $P \in \mathcal{S}$
- $I_\nu(F \vee G) = I_\nu(F) + I_\nu(G)$ pour F et G formules
- $I_\nu(F \wedge G) = I_\nu(F) \cdot I_\nu(G)$ pour F et G formules
- $I_\nu(\bot) = 0$ • $I_\nu(\neg F) = \overline{I_\nu(F)}$ pour F formule
- $I_\nu(\forall x, F) = \{1$ si pour tout $d \in D,$ on a $I_{\nu[x/d]}(F) = 1,$ 0 sinon
- $I_\nu(\exists x, F) = \{1$ s'il existe un $d \in D,$ tel que $I_{\nu[x/d]}(F) = 1,$ 0 sinon

Premier ordre — sémantique

Petit retour de syntaxe : variables sous quantificateur

$$P(x,z) \land \forall x, R(f(x,y), g(y))$$

et puis « muettes »

$$P(x,z) \land \forall z, R(f(z,y), g(y))$$
$$P(x,z) \land \forall v, R(f(v,y), g(y))$$
mais pas y !
$$P(x,z) \land \forall y, R(f(y,y), g(y))$$

Premier ordre — sémantique

Petit retour de syntaxe : variables libres

Variables libres d'un terme :

- $\mathsf{FV}_T(x) = \{x\}$ pour $x \in X$
- $\mathsf{FV}_T(f(t_1, \dots, t_n)) = \mathsf{FV}_T(t_1) \cup \dots \cup \mathsf{FV}_T(t_n)$

d'une formule :

- $\mathsf{FV}(P(t_1, \dots, t_k)) = \mathsf{FV}_T(t_1) \cup \dots \cup \mathsf{FV}_T(t_k)$
- $\mathsf{FV}(F \diamond G) = \mathsf{FV}(F) \cup \mathsf{FV}(G)$ pour $\diamond \in \{\Rightarrow, \land, \lor\}$
- $\mathsf{FV}(\neg F) = \mathsf{FV}(F)$
- $\mathsf{FV}(\bot) = \varnothing$
- $\mathsf{FV}(\forall x, F) = \mathsf{FV}(\exists x, F) = \mathsf{FV}(F) \setminus \{x\}$

Premier ordre — sémantique

Petit retour de syntaxe : variables sous quantificateur

Quid de la substitution étendue aux formules ?

$\rightsquigarrow$ remplacement des variables libres... facile ?

Pour $\sigma = \{y \to t \dots\}$

- Blabla sur constructions formules...
- $(\forall x, F)\sigma = \forall x, F\sigma$ si $x \neq y$ et $x \notin \mathsf{FV}(t)$
- $(\exists x, F)\sigma = \forall x, F\sigma$ si $x \neq y$ et $x \notin \mathsf{FV}(t)$

Exemple capture

Solution ? renommer les occ. liées (non libres)

Premier ordre — sémantique

F formule, I interprétation, $I_\nu(F)$ ne dépend pas des variables liées

Si F telle que $\mathsf{FV}(F) = \varnothing$ alors $I_\nu(F) = I_\mu(F)$ pour toutes valuations ν, μ

- Si $I_\nu(F) = 1$ alors I_ν satisfait F, noté $I_\nu \models F$
- Si $I_\nu \models F$ pour tout $F \in \Gamma$ alors I_ν satisfait Γ, noté $I_\nu \models \Gamma$
- S'il n'existe aucune I_ν telle que $I_\nu \models \Gamma$ alors Γ contradictoire
- Si $I_\nu \models F$ pour tout I et tout ν alors F valide
- Si $I_\nu \models F$ pour tout I et tout ν telles que $I_\nu \models \Gamma$ alors $\Gamma \models F$

- F et G équivalentes : $F \models G$ et $G \models F$

Premier ordre — quelques résultats

Proposition.
F et G formules, Γ ensemble de formules.

1. $\Gamma \models F \Rightarrow G$ si et seulement si $\Gamma \cup \{F\} \models G$
2. $\Gamma \models F$ si et seulement si $\Gamma \cup \{\neg F\}$ contradictoire.

Premier ordre — quelques équivalences

Celles de la logique propositionnelle +

$$\begin{aligned} \forall x, \forall y, F &\equiv \forall y, \forall x, F \\ \exists x, \exists y, F &\equiv \exists y, \exists x, F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg\forall x, F &\equiv \exists x, \neg F \\ \neg\exists x, F &\equiv \forall x, \neg F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\forall x, F_1) \wedge F_2 &\equiv \forall x, F_1 \wedge F_2 \quad \text{si } x \notin \mathsf{FV}(F_2) \\ (\exists x, F_1) \wedge F_2 &\equiv \exists x, F_1 \wedge F_2 \quad \text{si } x \notin \mathsf{FV}(F_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\forall x, F_1) \vee F_2 &\equiv \forall x, F_1 \vee F_2 \quad \text{si } x \notin \mathsf{FV}(F_2) \\ (\exists x, F_1) \vee F_2 &\equiv \exists x, F_1 \vee F_2 \quad \text{si } x \notin \mathsf{FV}(F_2) \end{aligned}$$

Premier ordre — sémantique

Dans les faits...

Exemple : $\{Z:0; S:1; Plus:2; Mult:2\}$

$Mult(Z, Plus(S(Z), S(Z))$?

Premier ordre — sémantique

Dans les faits...

Exemple : $\{Z:0; S:1; Plus:2; Mult:2\}$

$Mult(S(x), Plus(S(Z), y))$

$\nu(x) = 3 \qquad \nu(y) = 2$

$$D = \mathbb{N} \qquad \begin{aligned} I_{\mathcal{F}}(Z) &= 0 & I_{\mathcal{F}}(S) &= x \mapsto x +_{\mathbb{N}} 1 \\ I_{\mathcal{F}}(Plus) &= x, y \mapsto x +_{\mathbb{N}} y & I_{\mathcal{F}}(Mult) &= x, y \mapsto x \times_{\mathbb{N}} y \end{aligned}$$

Premier ordre — sémantique

Dans les faits...

Exemple : $\{Z:0; S:1; Plus:2; Mult:2\}$

$Mult(S(x), Plus(S(Z), y))$

D = 10 places de parking en ligne

$I_{\mathcal{F}}(Z) =$ la place la plus à droite

$I_{\mathcal{F}}(S) = p \mapsto$ la place à droite de p ou p si pas de place à droite de p

$I_{\mathcal{F}}(Plus) = p_1, p_2 \mapsto$ la place plus proche du milieu de p_1 et p_2, en privilégiant la plus à gauche en cas d'égalité.

$I_{\mathcal{F}}(Mult) = p_1, p_2 \mapsto$ la place plus proche du milieu de p_1 et p_2, en privilégiant la plus à droite en cas d'égalité.

Premier ordre — déduction naturelle

Extension des séquents au premier ordre — couple ensemble / formules

Séquents prouvables définis inductivement par

- Déduc. nat. logique propositionnelle
- $\dfrac{\Gamma \vdash F \text{ où } x \text{ non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x, F}\ (\forall_i)$
- $\dfrac{\Gamma \vdash \forall x, F}{\Gamma \vdash F[x \to t]}\ (\forall_e)$
- $\dfrac{\Gamma \vdash F[x \to t]}{\Gamma \vdash \exists x, F}\ (\exists_i)$
- $\dfrac{\Gamma \vdash \exists x, F \quad \Gamma \cup \{F\} \vdash G \quad x \text{ libre ni dans } \Gamma \text{ ni dans } G}{\Gamma \vdash G}\ (\exists_e)$

Premier ordre — déduction naturelle

Théorème.
Si F formule sans variable libre,

alors $\vdash F$ séquent prouvable si et seulement $\models F$

$\rightsquigarrow$ extensible sans perte de cohérence (difficile)

Exemple : $\dfrac{}{\Gamma \vdash t = t}\ (=_i)$ reflexivity $\qquad \dfrac{\Gamma \vdash F[x \to t] \quad \Gamma \vdash t = s}{\Gamma \vdash F[x \to s]}\ (=_e)$