LIFO63 – Algorithme numérique – TD 1

Opérations sur les matrices et systèmes linéaires

Solutions

Exercice 1

Question 1.1

Une matrice carrée est appelée diagonale lorsque ces éléments a_{ij} valent zéro pour $i \neq j$. Une matrice est dite triangulaire supérieure (resp. stricte) si ses éléments en dessous de la diagonale valent zéro (resp. diagonale incluse). Une matrice est dite triangulaire inférieure (resp. stricte) si ses éléments au-dessus de la diagonale valent zéro (resp. diagonale incluse).

Donner une décomposition possible de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ en la somme de trois matrices :

- D : matrice diagonale
- TSS : matrice triangulaire supérieure stricte
- TIS : matrice triangulaire inférieure stricte

Comme $A = D + TSS + TIS$ avec les propriétés définies dans l'énoncé, la solution est obtenue en sélectionnant dans D les éléments pour chaque matrice et mettre les autres éléments à zéro. Ici, on a donc les trois matrices :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad TSS = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad TIS = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Question 1.2

Donner le produit des matrices A et B suivantes.

Produit 1 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Produit 2 : $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (i.e. multiplication de B et A du produit 1)

Produit 3 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Produit 4 : même A que le produit 3 et B^T la matrice transposée de B du produit 3

Produit 5 : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Rappel : $AB = C$ avec $c_{ij} = \sum_k^n a_{ik} b_{kj}$

Produit 1 :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \times 0 + 2 \times 1 & 1 \times -1 + 2 \times 2 \\ 2 \times 0 + 1 \times 1 & 2 \times -1 + 1 \times 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Produit 2 :

$$AB = \begin{bmatrix} 0 \times 1 - 1 \times 2 & 0 \times 2 - 1 \times 1 \\ 1 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times 2 + 2 \times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

On note que $AB \neq BA$.

Produit 3 :
Le calcul du produit est impossible, le nombre de colonnes de A doit valoir le nombre de lignes de B. La taille de la matrice produit est le nombre de lignes de A par le nombre de colonnes de B.

Produit 4 :
Pour calculer la transposée, il suffit d'inverser lignes et colonnes.

$$AB^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Produit 5 :

$$AB = [2 \times -5 + 3 \times 1 + 2 \times 3] = [-1]$$

Une matrice peut être de taille 1x1.

Question 1.3

Si on multiplie deux matrices, l'une des deux matrices étant la matrice nulle, est-ce que le résultat est toujours la matrice nulle?

Si on multiplie deux matrices et que le résultat est une matrice nulle, est-ce que cela veut dire qu'au moins une des deux matrices multipliées doit être nulle ?

Oui. On peut le voir dans la formule du produit : $AB = C$ avec $c_{ij} = \sum_k^n a_{ik} b_{kj}$. Si tous les a_{ik} sont nuls, ou si tous les b_{kj} sont nuls, alors tous les c_{ij} seront nuls.

Non. Voici un contre-exemple : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Question 1.4

Le déterminant d'une matrice est le volume signé couvert par les vecteurs colonnes d'une matrice. Il vaut la somme des produits des éléments d'une ligne ou colonne quelconque avec ses cofacteurs. Un cofacteur d'un élément a_{ij} d'une matrice A de taille $n \times n$ est le déterminant de la matrice A' de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la i$^{\text{ème}}$ ligne et la j$^{\text{ème}}$ colonne, multipliée par -1^{i+j}.

Calculer le déterminant des matrices suivantes.

- $A1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$
- $A2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $A3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Nous choisissons toujours la ligne ou colonne qui demande le moins de calcul (ex. celle où il y a le plus de zéro).

Pour la première matrice, prenons la première ligne.

$$|A1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 0 - 1(24 - 30) + 2(21 - 24) = 0$$

Pour la deuxième matrice, prenons encore la première ligne.

$$|A2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

On calcule les déterminants des deux matrices 3x3 en utilisant leur dernière ligne.

$$|A2| = -\left(0 - 0 + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) + \left(0 - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0\right) = -(-2 - 4) + (-2 - 4) = 0$$

Pour la troisième matrice, prenons encore la première ligne.

$$|A3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1 + 4) + 1(-1 + 2) - 2(-2 + 1) = 9$$

En supposant que nous voulons transformer un bloc rectangulaire de taille 1x1x2 par la transformation linéaire $T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Quel est le volume du bloc transformé ?

Le rapport entre le volume du bloc initial et du bloc transformé est donné par la valeur absolue du déterminant de la matrice de transformation.

Ici, nous avons (en utilisant la dernière ligne) $|T| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1(-1+3) = -2$

Donc le rapport entre les deux volumes est de 2. Comme le bloc initial avait un volume de 1x1x2=2, alors le bloc transformé à un volume de 2x2=4. (Faire dessin bloc 2D transformé par ex. par $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$).

Question 1.5

Etudions la transformation linéaire $T1$ dans l'espace 3D (x,y,z) qui effectue une rotation de $90°$ autour de l'axe x, c'est-à-dire que l'image de x est lui-même, l'image de y est z et l'image de z est -y. Donner cette matrice de transformation (matrice 3x3). Quel est son déterminant ?

Etudions maintenant la transformation linéaire $T2$ dans l'espace 3D (x,y,z) qui effectue une symétrie par rapport au plan (x,y), c'est-à-dire que les composantes z sont opposées. Donner cette matrice de transformation (matrice 3x3). Quel est son déterminant ?

Etudions maintenant la transformation linéaire $T3$ dans l'espace 3D (x,y,z) qui effectue une projection sur le plan (x,y), c'est-à-dire que les composantes z sont annulées. Donner cette matrice de transformation (matrice 3x3). Quel est son déterminant ?

Donner la relation entre le déterminant et les matrices de transformation étudiées.

La matrice de transformation est juste la mise en vecteur des images des axes (x,y,z).

Pour la rotation, on a :

$$T1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Son déterminant est $|T1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 1$

Pour la symétrie, on a :

$$T2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Son déterminant est $|T2| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

Pour la projection, on a :

$$T3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Son déterminant est $|T3| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Le déterminant représente le volume signé couvert par les images des axes (x,y,z). Dans le cas d'une rotation, le déterminant sera toujours égal à 1 car ni le volume ni les directions relatives des images ne changent. Dans le cas d'une symétrie, le volume ne change pas (donc la valeur absolue du déterminant vaut 1), mais les directions relatives des vecteurs changent (le signe du déterminant dépend alors du nombre de symétries effectuées). Dans le cas d'une projection 3D -> 2D, le volume change et devient nul, donc le déterminant sera nul. De manière générale le déterminant est nul lorsque les images des axes (x,y,z) sont linéairement dépendants.

Question 1.6

Soient les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. En appliquant les règles d'élimination de Gauss, donner les matrices triangulaires supérieures représentant le même système. A chaque étape de l'élimination, indiquer le déterminant de la matrice.

Pour la matrice A (le déterminant vaut toujours 3) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Pour la matrice B (le déterminant vaut toujours 0) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les opérations d'éliminations de Gauss ne change pas le déterminant.

Exercice 2

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et le vecteur $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, résoudre $A \cdot X = B$ pour X :

1. Par la méthode de Gauss.

La matrice élargie du système est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Le premier chiffre de la première ligne est le pivot : 1 donc pas de normalisation nécessaire. On multiplie d'abord cette ligne par le premier élément de la deuxième ligne (i.e. 1 donc elle ne change pas) puis on la soustrait à la deuxième ligne (résultat dans la deuxième ligne). Ceci afin d'obtenir un zéro au premier chiffre de la deuxième ligne. On obtient :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

On recommence avec la première et la troisième ligne, où les valeurs à soustraire sont 2*$[1 \quad 2 \quad 3 \mid 2]$ car le premier élément de la troisième ligne est 2. Le résultat est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \end{array}\right]$$

La première itération est finie. On passe à la seconde où maintenant le pivot est le l'élément $A_{22}^{(2)}$ de la nouvelle matrice : $A_{22}^{(2)}$ =-3. On normalise donc la ligne. Mais comme la seule ligne qui reste à traiter est la troisième ligne. On divise par (-3) et on multiet qu'elle a aussi un chiffre -3 en deuxième position, nous pouvons directement faire la soustraction (rappel que le but est d'obtenir un zéro à cette position). On obtient donc :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$ (rappel : $l_i^{(k+1)} = l_i^{(k)} - m_{ik} l_k^{(k)} \quad avec\ m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad i = K+1, \cdots, n$)

La matrice élargie est triangulaire, nous pouvons lire directement le résultat dans le système :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ \quad - 3x_2 - 4x_3 = -2 \\ \quad\quad - x_3 = 1 \end{cases}$$

Donc obtient la solution en remontant de bas en haut, en commençant par $x_3 = -1$ que l'on substitue dans la deuxième équation pour trouver $x_2 = -\frac{1}{3}\left(-2 + 4 \times (-1)\right) = 2$. On substitue nos deux variables dans la première équation pour trouver $x_1 = 2 - 2 \times 2 - 3 \times (-1) = 1$. La solution est donc $X = (1,2,-1)^T$.

2. Par la méthode de la décomposition LU, en utilisant la méthode du pivot de Gauss pour réaliser la décomposition (expliciter toutes les étapes).

Dans la décomposition LU, la matrice carrée A est décomposée en un produit de matrice ($A = L \times U$) où L est triangulaire inférieure formée de 1 sur la diagonale et U est triangulaire supérieure. Après décomposition, la solution du système est calculée en 2 étapes en posant $U \times X = Y$. D'abord en résolvant $L \times Y = B$ pour Y par descente (de 1 à n) puis $U \times X = Y$ pour X par remontée (de n à 1).

Nous effectuons la décomposition en utilisant la méthode du pivot de Gauss (cf. question précédente) qui nous donne la matrice $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. La matrice L est composée des coefficients utilisés lors des soustractions et est de la forme $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{2,1} & 1 & 0 \\ c_{3,1} & c_{3,2} & 1 \end{bmatrix}$ où $c_{i,j}$ est le coefficient utilisé lors de la soustraction de la i^{ème} ligne à la j^{ème} ligne. Nous savons que le coefficient de 1 a été utilisé lors de la soustraction de la première et deuxième ligne donc $c_{2,1} = 1$ (les deux chiffres étant des 1). Un coefficient de 2 a été utilisé lors de la soustraction de la première et troisième ligne donc $c_{3,1} = 2$. Un coefficient de 1 a été utilisé lors de la soustraction de la deuxième et troisième ligne donc $c_{3,2} = 1$ (les deux chiffres étant des -3).

Nous avons donc la matrice $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *D'autres méthodes pour obtenir L sont possibles (cf cours).*

Nous pouvons donc maintenant résoudre le système $L \times U \times X = B$ par les deux étapes de descente et remontée. On commence par résoudre $L \times Y = B$ pour Y par descente (de 1 à n). On a :

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ ce qui nous donne le système linéaire $\begin{cases} y_1 & = & 2 \\ y_1 + y_2 & = & 0 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 & = & 3 \end{cases}$ qui est résolu dans l'ordre ascendant des i : $\begin{cases} y_1 & = & 2 \\ y_2 & = & -2 \\ y_3 & = & 1 \end{cases}$

Donc $Y = (2, -2, 1)^T$

On résout finalement $U \times X = Y$ pour X par remontée (de n à 1). On a :

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ce qui nous donne le système linéaire $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ -3x_2 - 4x_3 & = & -2 \\ -x_3 & = & 1 \end{cases}$ qui est résolu dans l'ordre descendant des i : $\begin{cases} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & -1 \end{cases}$

Donc $X = (1, 2, -1)^T$ ce qui est bien la même solution que par le pivot de Gauss. L'intérêt de cette méthode est que l'on peut réutiliser les matrices L et U pour résoudre le système avec un autre jeu de données B (la méthode du pivot de Gauss devrait refaire tous les calculs sur B). Ici, seules les deux résolutions simples (montée et descente) sont nécessaires (coût de O(n^2) contre O(n^3) pour Gauss). Par contre si le système change, une nouvelle décomposition est nécessaire, en O(n^3) également. Cette décomposition est aussi utilisée pour calculer l'inverse et le déterminant d'une matrice (produit des déterminants de L et de U).

Exercice 3

Donner la factorisation LU de la matrice A, puis résoudre $A \cdot X = B$ pour :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Utilisons cette fois directement l'algorithme d'identification pour décomposer A en un produit LU (parce qu'une matrice 4x4 n'est pas encore trop grande, mais à éviter pour plus).

On remarque que le produit LU (ou LR) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 & 0 \\ l_{4,1} & l_{4,2} & l_{4,3} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} & r_{1,4} \\ 0 & r_{2,2} & r_{2,3} & r_{2,4} \\ 0 & 0 & r_{3,3} & r_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & r_{4,4} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r_{1,1}} & \boldsymbol{r_{1,2}} & \boldsymbol{r_{1,3}} & \boldsymbol{r_{1,4}} \\ \boldsymbol{l_{2,1}} r_{1,1} & l_{2,1} r_{1,2} + \boldsymbol{r_{2,2}} & l_{2,1} r_{1,3} + \boldsymbol{r_{2,3}} & l_{2,1} r_{1,4} + \boldsymbol{r_{2,4}} \\ \boldsymbol{l_{3,1}} r_{1,1} & l_{3,1} r_{1,2} + \boldsymbol{l_{3,2}} r_{2,2} & l_{3,1} r_{1,3} + l_{3,2} r_{2,3} + \boldsymbol{r_{3,3}} & l_{3,1} r_{1,4} + l_{3,2} r_{2,4} + \boldsymbol{r_{3,4}} \\ \boldsymbol{l_{4,1}} r_{1,1} & l_{4,1} r_{1,2} + \boldsymbol{l_{4,2}} r_{2,2} & l_{4,1} r_{1,3} + l_{4,2} r_{2,3} + \boldsymbol{l_{4,3}} r_{3,3} & l_{4,1} r_{1,4} + l_{4,2} r_{2,4} + l_{4,3} r_{3,4} + \boldsymbol{r_{4,4}} \end{bmatrix}$$

Ce système peut se résoudre très simplement de haut en bas et de gauche à droite (éléments en rouge). On peut aussi noter l'ordre dans lequel la résolution est effectuée pour comprendre l'algorithme de Crout. La solution est donnée par le système à 16 équations :

$$\begin{cases} r_{1,1} & = & 4 \\ l_{2,1} & = & -\dfrac{1}{4} \\ l_{3,1} & = & 0 \\ l_{4,1} & = & \dfrac{1}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r_{1,2} & = & 3 \\ r_{2,2} & = & 2 - \left(-\dfrac{1}{4} \times 3\right) = \dfrac{11}{4} \\ l_{3,2} & = & \dfrac{4}{11} \times \left(2 - (0 \times 3)\right) = \dfrac{8}{11} \\ l_{4,2} & = & \dfrac{4}{11} \times \left(1 - \left(\dfrac{1}{4} \times 3\right)\right) = \dfrac{1}{11} \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\begin{cases} r_{1,3} & = & 1 \\ r_{2,3} & = & 1 - \left(-\dfrac{1}{4} \times 1\right) = 5/4 \\ r_{3,3} & = & 1 - \left(0 \times 1 + \dfrac{8}{11} \times \dfrac{5}{4}\right) = 1/11 \\ l_{4,3} & = & 11\left(2 - \left(\dfrac{1}{4} \times 1 + \dfrac{1}{11} \times \dfrac{5}{4}\right)\right) = 18 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r_{1,4} & = & 0 \\ r_{2,4} & = & 4 - \left(-\dfrac{1}{4} \times 0\right) = 4 \\ r_{3,4} & = & 4 - \left(0 \times 0 + \dfrac{8}{11} \times 4\right) = 12/11 \\ r_{4,4} & = & 1 - \left(\dfrac{1}{4} \times 0 + \dfrac{1}{11} \times 4 + 18 \times \dfrac{12}{11}\right) = -19 \end{cases}$$

Donnant ainsi les matrices :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8/11 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/11 & 18 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } U = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 11/4 & 5/4 & 4 \\ 0 & 0 & 1/11 & 12/11 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{bmatrix}$$

Grâce à ces deux matrices nous pouvons calculer la solution de $A \times X = L \times U \times X = B$ en posant $U \times X = Y$. On résout $L \times Y = B$ pour Y :

$$\begin{cases} y_1 & = & 6 \\ -\dfrac{1}{4} y_1 + y_2 & = & 4 \\ \dfrac{8}{11} y_2 + y_3 & = & 2 \\ \dfrac{1}{4} y_1 + \dfrac{1}{11} y_2 + 18 y_3 + y_4 & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 & = & 6 \\ y_2 & = & 11/2 \\ y_3 & = & -2 \\ y_4 & = & 35 \end{cases}$$

Puis on résout $U \times X = Y$ pour X :

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 6 \\ \frac{11}{4}x_2 + \frac{5}{4}x_3 + 4x_4 & = & 11/2 \\ \frac{1}{11}x_3 + \frac{12}{11}x_4 & = & -2 \\ -19x_4 & = & 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & -2 \\ x_2 & = & 88/19 \\ x_3 & = & 2/19 \\ x_4 & = & -35/19 \end{cases}$$

La solution est donc $X = \left(-2\,, \frac{88}{19}, \frac{2}{19}, -\frac{35}{19}\right)^T$.

Exercice 4

Donner la factorisation LU de la matrice A, puis résoudre $A \cdot X = B$ pour :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -4 \\ 17 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Nous effectuons la décomposition en utilisant la méthode du pivot de Gauss.
Au départ:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix}$$

Le premier pivot est le 2 de la première ligne de A qui doit valoir 1 dans L.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{3/2} & 1 & 0 \\ \mathbf{5/2} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant ces coefficients on obtient :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{3/2} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1/2} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 5/2 & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix}$$

Le deuxième pivot est le $3/2$ de la deuxième ligne de A qui doit valoir 1 dans L.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3/2 & -9 \\ 0 & -1/2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 5/2 & \mathbf{-1/3} & 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant ces coefficients on obtient :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3/2 & -9 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-5} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & \mathbf{3/2} & \mathbf{-9} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 5/2 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc la décomposition finale est :

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3/2 & -9 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 5/2 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons donc maintenant résoudre le système $L \times U \times X = B$ par les deux étapes de descente et remontée. On commence par résoudre $L \times Y = B$ pour Y par descente (de 1 à n). On a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 5/2 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 17 \\ -10 \end{bmatrix}$$ ce qui nous donne le système linéaire $$\begin{cases} y_1 & = & -4 \\ 3/2\, y_1 + y_2 & = & 17 \\ 5/2\, y_1 - y_2/3 + y_3 & = & -10 \end{cases}$$ qui est résolu dans l'ordre ascendant : $$\begin{cases} y_1 & = & -4 \\ y_2 & = & 23 \\ y_3 & = & 23/3 \end{cases}$$

Donc $Y = (-4{,}23{,}23/3)^T$

On résout finalement $U \times X = Y$ pour X par remontée (de n à 1). On a :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3/2 & -9 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 23 \\ 23/3 \end{bmatrix}$$ ce qui nous donne le système linéaire $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 & = & -4 \\ 3/2\, x_2 - 9x_3 & = & 23 \\ -5x_3 & = & 23/3 \end{cases}$$ qui est résolu dans l'ordre descendant : $$\begin{cases} x_1 & = & 62/15 \\ x_2 & = & 92/15 \\ x_3 & = & -23/15 \end{cases}$$

Donc $X = (62/15\,, 92/15\,, -23/15)^T$.

Exercice 5

Soit le système linéaire $A \cdot X = B$ donné par :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4+e & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \\ 13 \\ 46+e \end{bmatrix}$$

1. Vérifier que si $e \neq 0$ alors le système admet une solution unique $X = (1{,}2{,}3{,}4)^T$.

Utilisons le pivot de Gauss pour résoudre le système sur la matrice élargie:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 30 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 13 \\ 4+e & 5 & 4 & 5 & 46+e \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{20} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1-e} & \mathbf{-e} & \mathbf{1-e} & \mathbf{6-9e} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -7 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-2+e} & \mathbf{-2+2e} & \mathbf{-14+11e} \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{7} \\ 0 & 0 & -2+e & -2+2e & -14+11e \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{e} & \mathbf{4e} \end{array}\right]$$

La dernière ligne signifie que $e \times x_4 = 4e$ c.-à-d. $x_4 = 4$ mais seulement si $e \neq 0$. Si c'est bien le cas alors en remontant on obtient la solution unique $X = (1{,}2{,}3{,}4)^T$.

2. On suppose que e est une valeur très petite ($e \to 0$) qui ne peut pas être représentée et donc arrondi à 0. Montrer que le système est indéterminé (singulier), et admet une infinité de solutions dont $X = (1,2,3,4)^T$.

Si e est considéré nul, on ne peut utiliser la dernière ligne de la matrice, et nous avons trois équations pour quatre inconnus, et donc une infinité de solutions. On peut donner par exemple à x_4 une valeur arbitraire et calculer les autres en remontant. Par exemple, si on donne la valeur de zéro à x_4, on obtient la solution $X = (-3,6,7,0)^T$. Si on lui donne la valeur de 4 alors on retrouve la solution de la première question.

Exercice 6

Soit la composition du produit brut d'un aliment pour bétail, représentée dans le tableau ci-dessous :

Produit brut	Teneur en orge	Teneur en arachide	Teneur en sésame
protéine	12	52	42
graisse	2	2	10

Calculer la composition d'une ration obtenue en mélangeant orge, arachide et sésame, avec 22% de protéines et 3.6% de graisses.

On peut décrire le problème par le système suivant :

$$\begin{cases} 1 &= o + a + s \\ p &= 0.12o + 0.52a + 0.42s \\ g &= 0.02o + 0.02a + 0.10s \\ p &= 0.22(o+a+s) \\ g &= 0.036(o+a+s) \end{cases} \quad \text{ou bien plus simplement} \quad \begin{cases} 1 &= o + a + s \\ 0.22 &= 0.12o + 0.52a + 0.42s \\ 0.036 &= 0.02o + 0.02a + 0.10s \end{cases}$$

Où o, a et s sont respectivement les teneurs en orge, arachide et sésame, et p et g sont respectivement les produits bruts protéine et graisse.
Ce système peut s'écrire sous la forme $A \cdot X = B$ à résoudre pour X :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0.12 & 0.52 & 0.42 & -1 & 0 \\ 0.02 & 0.02 & 0.1 & 0 & -1 \\ 0.22 & 0.22 & 0.22 & -1 & 0 \\ 0.036 & 0.036 & 0.036 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} o \\ a \\ s \\ p \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La décomposition LU de la matrice A est :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/25 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/50 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11/50 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9/250 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 3/10 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/25 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Grâce à ces deux matrices nous pouvons calculer la solution de $A \times X = L \times U \times X = B$ en posant $U \times X = Y$.

On résout $L \times Y = B$ pour Y :

$$\begin{cases} y_1 & = & 1 \\ \frac{3}{25}y_1 + y_2 & = & 0 \\ \frac{1}{50}y_1 + y_3 & = & 0 \\ \frac{11}{50}y_1 + y_4 & = & 0 \\ \frac{9}{250}y_1 + y_5 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 & = & 1 \\ y_2 & = & -3/25 \\ y_3 & = & -1/50 \\ y_4 & = & -11/50 \\ y_5 & = & -9/250 \end{cases}$$

Puis on résout $U \times X = Y$ pour X :

$$\begin{cases} o + a + s & = & 1 \\ \frac{2}{5}a + \frac{3}{10}s - p & = & -3/25 \\ \frac{2}{25}s - g & = & -1/50 \\ -p & = & -11/50 \\ -g & = & -9/250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} o & = & \frac{7}{10} & = & 0.7 \\ a & = & \frac{1}{10} & = & 0.1 \\ s & = & \frac{1}{5} & = & 0.2 \\ p & = & \frac{11}{50} & = & 0.22 \\ g & = & \frac{9}{250} & = & 0.036 \end{cases}$$

La composition de la ration est donc 70% orge, 10% arachide et 20% sésame.

Exercice 7

Résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Par la méthode itérative de Jacobi (cinq itérations à partir de la solution nulle).

Dans la méthode de Jacobi, on pose $A = D - E - F$ avec D diagonale, E triangulaire inférieure stricte et F triangulaire supérieure stricte. On les arrange en $M = D$ et $N = E + F$.

On a les trois matrices :

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La formule de résolution est :

$$X^{k+1} = M^{-1} \times N \times X^k + M^{-1} \times B$$

Avec ici :

$$M^{-1} = D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \qquad N = E + F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc on a la formule récurrente :

$$X^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ -1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{1}{4}\left(1 + x_2^k\right) \\ x_2^{k+1} = \dfrac{1}{3}\left(1 - x_1^k\right) \end{cases}$$

On a donc les valeurs successives :

Itération k	x_1^k	x_2^k
0	0	0
1	$1/4 = 0.25$	$1/3 \approx 0.333$
2	$1/3 \approx 0.333$	$1/4 = 0.25$
3	$5/16 \approx 0.312$	$2/9 \approx 0.222$
4	$11/36 \approx 0.307$	$11/48 \approx 0.229$
5	$59/192 \approx 0.307$	$25/108 \approx 0.231$

Ou bien en utilisant la formule de calcul direct :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)}\right) \ ; 1 \leq i \leq n$$

Ici nous avons :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{1}{4}\left(1 - (0) - (-1 \times x_2^k)\right) = \dfrac{1}{4}\left(1 + x_2^k\right) \\ x_2^{k+1} = \dfrac{1}{3}\left(1 - \left(1 \times x_1^k\right) - (0)\right) = \dfrac{1}{3}\left(1 - x_1^k\right) \end{cases}$$

On obtient les mêmes relations donc les mêmes valeurs successives.

2. Par la méthode itérative de Gauss-Seidel (trois itérations à partir de la solution nulle).

Dans la méthode de Gauss-Seidel, on a toujours $A = D - E - F$ avec D diagonale, E triangulaire inférieure stricte et F triangulaire supérieure stricte. Mais on les arrange autrement avec $M = D - E$ et $N = F$.

On a les trois mêmes matrices de base :

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La formule de résolution est la même :

$$X^{k+1} = M^{-1} \times N \times X^k + M^{-1} \times B$$

Mais avec ici :

$$M^{-1} = (D-E)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/12 & 1/3 \end{bmatrix} \qquad N = F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc on a la formule récurrente :

$$X^{k+1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/12 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/12 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 0 & -1/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{4}\left(1 + x_2^k\right) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3} x_2^k\right) \end{cases}$$

On a donc les valeurs successives :

Itération k	x_1^k	x_2^k
0	0	0
1	$1/4 = 0.25$	$1/4 = 0.25$
2	$5/16 \approx 0.312$	$11/48 \approx 0.229$
3	$59/192 \approx 0.307$	$133/576 \approx 0.231$

Ou bien en utilisant la formule de calcul direct :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(\boldsymbol{k+1})} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)}\right) \;;1 \le i \le n$$

Ici nous avons :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{4}\left(1 - (0) - \left(-1 \times x_2^k\right)\right) = \frac{1}{4}\left(1 + x_2^k\right) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{3}\left(1 - \left(1 \times x_1^{k+1}\right) - (0)\right) = \frac{1}{3}\left(1 - x_1^{k+1}\right) \end{cases}$$

On a bien l'équivalence entre les deux méthodes car $x_2^{k+1} = \frac{1}{3}\left(1 - x_1^{k+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\left(1 + x_2^k\right)\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3} x_2^k\right)$

On obtient donc bien les mêmes valeurs successives.

3. Comparer les deux résultats avec la solution exacte.

La solution exacte peut être trouvée par la méthode de Jordan.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 13 & 3 \end{array}\right]$$

Qui donne le système : $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 1 \\ 13x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4/13 \approx 0.308 \\ x_2 = 3/13 \approx 0.231 \end{cases}$

Les deux méthodes itératives s'approchent de cette solution exacte après quelques itérations, plus rapidement par Gauss-Seidel que par Jacobi.

2 phases :
- **éliminations** $\rightarrow$ système triangulaire équivalent
- **substitutions** $\rightarrow$ résolution

On suppose que A est de rang n

$\boxed{1}$ On suppose a_{11} non nul (sinon on fait un échange de lignes).
On résout la première équation par rapport à x_1 et on remplace dans les autres équations.

On obtient le système équivalent

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}^{(2)}x_2 + ... + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \qquad\quad ... \\ \qquad\quad a_{n1}^{(2)}x_1 + a_{n2}^{(2)}x_2 + ... + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{array}\right.$$

avec $\left|\begin{array}{l} a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}/a_{11} \\ b_i^{(2)} = b_i - a_{i1}b_1/a_{11} \end{array}\right.$ pour $2 \leq i, j \leq n$
et $\left| a_{i1}^{(2)} = 0 \right.$ pour $i \geq 2$

On recommence avec le pivot $a_{22}^{(2)}$ supposé non nul sinon on fait un échange de lignes, etc ...

En posant $A_{.,n+1} = B$ et $A^{(1)} = A$, **à l'étape k**, avec le **pivot** $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$, on a $A^{(k+1)} =$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & ... & a_{1k}^{(1)} & & & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & ... & a_{2k}^{(2)} & & & a_{2,n+1}^{(2)} \\ ... & & & ... & & & ... \\ 0 & & & a_{k,k}^{(k)} & & & a_{k,n+1}^{(k)} \\ 0 & & & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & ... & a_{k+1,n+1}^{(k+1)} \\ ... & & & ... & ... & & ... \\ 0 & & & 0 & a_{n,k+1}^{(k+1)} & ... & a_{n,n+1}^{(k+1)} \end{array}\right]$$

$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)}a_{kj}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$
pour $k+1 \leq i \leq n$ et $k+1 \leq j \leq n+1$
$a_{ij}^{(k+1)} = 0$ pour $k+1 \leq i \leq n$ et $j = k$
$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)}$ sinon

Remarque : $dét(A) = \pm$ le produit des pivots.