Nom : **Groupe :**

LIFLC – Interro n°3

Lire les questions. Répondre dans le cadre. Écrire au stylo (pas de crayon). Tout document interdit.

Question 1. On considère les signatures suivantes :

— Symboles de termes : $\{\texttt{papillon} : 0,\ \texttt{mante} : 0,\ \texttt{frelon} : 0,\ \texttt{mirabelle} : 0\}$,

— Symboles de prédicats : $\{\texttt{Mange} : 2,\ \texttt{insecte} : 1,\ \texttt{fruit} : 1\}$.

Modéliser en logique du premier ordre les propositions suivantes :

1. S'il y a un insecte qui mange un fruit alors tout insecte est mangé par un insecte (pas forcément le même pour tous).

Question 2. Soit E un ensemble défini inductivement par

$$\begin{cases} & \rightarrow & F \\ e & \rightarrow & U(n,e) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ e_1, e_2 & \rightarrow & T(e_1, e_2) \end{cases}$$

1. Décrire comment prouver par induction qu'une propriété P est vérifiée par tout élément de E.
2. Que peut-on dire de E si on n'a pas la première règle ?

Question 3. On considère les signatures suivantes :

— Symboles de termes : $\{a : 0, b : 0\}$

— Symboles de prédicats : $\{A : 1, B : 1, C : 1, D : 1\}$

Montrer que le séquent suivant est prouvable à l'aide de la déduction naturelle :

$$\{(\forall z, C(z)), (\forall x, C(x) \Rightarrow A(x) \Rightarrow D(x)), A(p), \} \vdash \exists y, D(y)$$

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\ (\mathrm{ax}) \qquad \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, G \vdash F}\ (\mathrm{aff})$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \wedge G}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash F}\ (\wedge_e^g) \quad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash G}\ (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vee_i^g) \quad \frac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \vee G \quad \Gamma, F \vdash H \quad \Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash H}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg F \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\ (\bot_c)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \text{ où } x \text{ non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x, F}\ (\forall_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x, F}{\Gamma \vdash F[x \to t]}\ (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F[x \to t]}{\Gamma \vdash \exists x, F}\ (\exists_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x, F \quad \Gamma \cup \{F\} \vdash G \quad x \text{ libre } \textit{ni} \text{ dans } \Gamma\ \textit{ni} \text{ dans } G}{\Gamma \vdash G}\ (\exists_e)$$

Nom : **Groupe :**

LIFLC – Interro n°3

Lire les questions. Répondre dans le cadre. Écrire au stylo (pas de crayon). Tout document interdit.

Question 1. On considère les signatures suivantes :

— Symboles de termes : $\{\texttt{papillon} : 0,\ \texttt{mante} : 0,\ \texttt{frelon} : 0,\ \texttt{mirabelle} : 0\}$,

— Symboles de prédicats : $\{\texttt{Mange} : 2,\ \texttt{insecte} : 1,\ \texttt{fruit} : 1\}$.

Modéliser en logique du premier ordre la proposition suivante :

1. S'il y a un insecte qui mange un fruit alors tout insecte est mangé par un insecte (pas forcément le même pour tous).

Question 2. Soit E un ensemble défini inductivement par

$$\begin{cases} & \rightarrow & V(n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ e_1, e_2 & \rightarrow & T(e_1, e_2) \\ e_1, e_2 & \rightarrow & B(e_1, e_2) \end{cases}$$

1. Décrire comment prouver par induction qu'une propriété P est vérifiée par tout élément de E.
2. Que peut-on dire de E si on n'a pas la première règle ?

Question 3. On considère les signatures suivantes :

— Symboles de termes : $\{e_1 : 0, e_2 : 0\}$

— Symboles de prédicats : $\{H : 1, I : 1, J : 1, K : 1\}$

Montrer que le séquent suivant est prouvable à l'aide de la déduction naturelle :

$$\{(\forall z, J(z)), (\forall x, J(x) \Rightarrow I(x) \Rightarrow H(x)), I(e_1), \} \vdash \exists y, H(y)$$

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\ (\mathrm{ax}) \qquad \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, G \vdash F}\ (\mathrm{aff})$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \wedge G}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash F}\ (\wedge_e^g) \quad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash G}\ (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vee_i^g) \quad \frac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \vee G \quad \Gamma, F \vdash H \quad \Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash H}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg F \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\ (\bot_c)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \text{ où } x \text{ non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x, F}\ (\forall_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x, F}{\Gamma \vdash F[x \to t]}\ (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F[x \to t]}{\Gamma \vdash \exists x, F}\ (\exists_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x, F \quad \Gamma \cup \{F\} \vdash G \quad x \text{ libre } \textit{ni} \text{ dans } \Gamma\ \textit{ni} \text{ dans } G}{\Gamma \vdash G}\ (\exists_e)$$