Ensembles inductifs caractérisation 2

Proposition.
$X \subseteq E$ induit de (E, R) :

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \qquad \text{avec } X_0 = B, X_{i+1} = X_i \cup R(X_i)$$

$X \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ par induction sur X : règles de construction de X

- $B = X_0 \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$
- Si $(x_1, \ldots, x_n) \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ alors $\in X_{i_0}$ donc image $\in X_{i_0+1} \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$

donc $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ partie close donc contient la plus petite partie close c.-à-d. X

Ensembles inductifs caractérisation 2

Proposition.
$X \subseteq E$ induit de (E, R) :

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \qquad \text{avec } X_0 = B, X_{i+1} = X_i \cup R(X_i)$$

$X \supseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ par induction sur $\mathbb{N}$: règles de construction de $\mathbb{N}$

- $X_0 = B \subseteq X$
- Si $X_i \subseteq X$, $R(X_i) \subseteq X$ car X clos par R donc $X_{i+1} \subseteq X$

donc $\{i \in \mathbb{N} \mid X_i \subseteq X\}$ clos par $\{\to 0; n \to n+1\}$ donc $\supseteq$ plus petite close = $\mathbb{N}$

Ensembles inductifs caractérisation 2

Proposition.
$X \subseteq E$ induit de (E, R) :

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \qquad \text{avec } X_0 = B, X_{i+1} = X_i \cup R(X_i)$$

Idée : X = éléments *accessibles* depuis B par nombre fini d'étapes de R

Idée' : X = éléments permettant de « descendre » et atteindre B en nombre fini d'étapes de R à l'envers

Ensembles inductifs caractérisation 2

Ordre strict sur E : relation binaire sur E, irreflexive et transitive

Ordre strict $<$ bien fondé : il n'existe pas de $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ t.q. pour tout i, $x_{i+1} < x_i$

Idée : « descendre » et atteindre minimum en nombre fini d'étapes

E et $<$ bien fondé sur E

$$\begin{cases} \quad \to u & \text{pour tout } u \text{ minimal pour } < \\ u \to v & \text{pour tout } u < v \end{cases}$$

schéma inductif définissant E

$\rightsquigarrow$ fonctions...

$\rightsquigarrow$ preuves...

Ensembles inductifs — caractérisation 2

E et $<$ bien fondé sur E

Fonctions récursives : appels sur valeurs décroissantes pour $<$
pour un $<$ bien choisi

Preuve par *induction bien fondée* : comme avant clos par schéma...

Reformulation : soit $F \subseteq E$ les éléments satisfaisant la propriété

Si pour tout $x \in E$, lorsque pour tout $y \in F$ et $y < x$ alors $x \in F$
alors pour tout $x \in E$, $x \in F$

EX. factorisation

Logique propositionnelle — syntaxe

$X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ un ensemble infini de variables propositionnelles

Ensemble $\mathcal{F}$ des formules du calcul propositionnel : ensemble inductif

- (B.1) : x variable propositionnelle alors $x \in \mathcal{F}$
- (B.2) : $\bot \in \mathcal{F}$
- (I.1) Si $F \in \mathcal{F}$ alors $\neg F \in \mathcal{F}$
- (I.2) : Si $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{F}$ alors $F \diamond G \in \mathcal{F}$ où $\diamond \in \{\Rightarrow, \vee, \wedge\}$

Notation : $F \Leftrightarrow G : (F \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow F)$

Précédence : $\neg$ plus forte priorité, puis $\wedge$, puis $\vee$, puis $\Rightarrow$
Associativité : à gauche pour $\vee$ et $\wedge$, à droite pour $\Rightarrow$

Logique propositionnelle — sémantique

Sens des formules $\rightsquigarrow$ interprétation dans algèbre de Boole

Interprétation (du calcul propositionnel) : fonction $I : X \mapsto \mathbb{B}$

Étendue I à $\mathcal{F}$:

- Cas des variables déjà traité,
- $I(\bot) = 0$,
- $F \in \mathcal{F}$ alors $I(\neg F) = \overline{I(F)}$
- $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{F}$ alors $I(F \vee G) = I(F) + I(G)$
- $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{F}$ alors $I(F \wedge G) = I(F) \cdot I(G)$
- $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{F}$ alors $I(F \Rightarrow G) = I(F) \dot{\Rightarrow} I(G)$

Seule vérité autorisée

Algèbre de Boole — G. Boole 1815-1864

Booléens : oui, non ; 0, 1 ; haut, bas ; bleu, rouge, etc.

Relation d'ordre : 0 < 1

Opérations classiques :

- $\bar{\ } : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — complément
- $+ : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — $\bigcup$, ou, $\max$
- $\cdot : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — $\bigcap$, et, $\min$
- ...

Algèbre de Boole — G. Boole 1815-1864

·	a	b	a · b
	1	1	1
	1	0	0
	0	1	0
	0	0	0

+	a	b	a + b
	1	1	1
	1	0	1
	0	1	1
	0	0	0

$\dot{\Rightarrow}$	a	b	a $\dot{\Rightarrow}$ b
	1	1	1
	1	0	0
	0	1	1
	0	0	1

$-$	a	$\bar{a}$
	1	0
	0	1

Algèbre de Boole — G. Boole 1815-1864

Propriétés :

- 0 minimum, 1 maximum
- $x \cdot 1 = x \quad x \cdot 0 = 0$
- $x + 0 = x \quad x + 1 = 1$
- Complément : $x \cdot \overline{x} = 0 \quad x + \overline{x} = 1$
- Commutativité de $\min$ et $\max$
- Associativité de $\min$ et $\max$
- Distributivité
- Morgan : $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x + y} \quad \overline{x} + \overline{y} = \overline{x \cdot y}$

Algèbre de Boole — tables de vérité

Idée: notation par extension

- Une ligne par valeurs possibles des variables
- Présentation des sous fonctions en colonnes

Fonctions booléennes : par extention $\rightsquigarrow$ une par table de vérité combien ?

Interprétations — satisfaction, déduction...

- $I(F) = 1$: I satisfait F, noté $I \vDash F$.
- Si Σ ens. de formules, si $I \vDash F$ pour toute $F \in \Sigma$: I satisfait $\Sigma \quad (I \vDash \Sigma)$

Si $I(p) = I(q) = I(r) = 0$ alors $I \vDash p \vee q \Rightarrow r$
Si $I(p) = I(r) = 0$ et $I(q) = 1$ alors I ne satisfait pas $p \vee q \Rightarrow r$
Si $I(p) = 1$ alors $I \vDash \{p \vee q, \neg p \Rightarrow r\}$
Si $I(p) = 1$ alors I ne satisfait pas $\{p \vee q, \neg p\}$

Interprétations — satisfaction, déduction...

- $I(F) = 1$: I satisfait F, noté $I \models F$.
- Si Σ ens. de formules, si $I \models F$ pour toute $F \in \Sigma$: I satisfait Σ $(I \models \Sigma)$
- F tautologie ($\models F$) si pour toute interprétation I, $I \models F$

$p \vee \neg p, \quad p \Rightarrow p, \quad (p \Rightarrow r) \vee (\neg p \Rightarrow r)$
$(p \Rightarrow r) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$

Interprétations — satisfaction, déduction...

- $I(F) = 1$: I satisfait F, noté $I \models F$.
- Si Σ ens. de formules, si $I \models F$ pour toute $F \in \Sigma$: I satisfait Σ $(I \models \Sigma)$
- F tautologie ($\models F$) si pour toute interprétation I, $I \models F$
- Σ contradictoire si aucune interprétation I telle que $I \models \Sigma$

$\{p \wedge \neg p\}, \{p, \neg q, p \Rightarrow q\}$
$\{p \wedge q\}, \{p, q, p \Rightarrow q\}$

Interprétations — satisfaction, déduction...

- $I(F) = 1$: I satisfait F, noté $I \models F$.
- Si Σ ens. de formules, si $I \models F$ pour toute $F \in \Sigma$: I satisfait Σ $(I \models \Sigma)$
- F tautologie ($\models F$) si pour toute interprétation I, $I \models F$
- Σ contradictoire si aucune interprétation I telle que $I \models \Sigma$
- Σ déduit sémantiquement F $(\Sigma \models F)$
  si toute interprétation satisfaisant Σ satisfait aussi F

$\{p, p \Rightarrow q\} \models q, \quad \{p \vee q, p \Rightarrow q\} \models q$
$\{p, q \Rightarrow p\}$ ne permet pas de déduire q

Interprétations — satisfaction, déduction...

- $I(F) = 1$: I satisfait F, noté $I \models F$.
- Si Σ ens. de formules, si $I \models F$ pour toute $F \in \Sigma$: I satisfait Σ $(I \models \Sigma)$
- F tautologie ($\models F$) si pour toute interprétation I, $I \models F$
- Σ contradictoire si aucune interprétation I telle que $I \models \Sigma$
- Σ déduit sémantiquement F $(\Sigma \models F)$
  si toute interprétation satisfaisant Σ satisfait aussi F
- F et G sémantiquement équivalentes $(F \equiv G)$ si $\{F\} \models G$ et $\{G\} \models F$.

$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q, \quad p \equiv \neg\neg p$
$p \Rightarrow q \not\equiv q \Rightarrow p, \quad (p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q) \not\equiv q$

Logique propositionnelle modélisation

Un logicien écoute un de ses étudiants énumérer ses sentiments à propos des cours que ce dernier suit :

1. J'aime la logique ou j'aime l'informatique,
2. Si j'aime l'informatique alors j'aime la logique.

Le logicien conclut que l'étudiant aime la logique.

Pourquoi ?

Logique propositionnelle modélisation

a et b deux variables représentant respectivement "j'aime la logique" et "j'aime l'informatique"

Les deux phrases de l'étudiant *représentées* par :

1. $a \vee b$
2. $b \Rightarrow a$

Déduction du logicien *représentée* par : a

Démontrer $a \vee b, b \Rightarrow a \models a$? plusieurs façons...

- Par table de vérité
- Par raisonnement sémantique:
  Trouver I telle que $I \models \{a \vee b, b \Rightarrow a\}$ et montrer $I \models a$.
  - Si $I \models a$ alors fini
  - Si $I \models b$, alors puisque $I \models b \Rightarrow a$, on a $I \models a$