MÉTHODE du SIMPLEXE

- INTRODUCTION
  - développée initialement par George Dantzig en 1947 pour répondre à des problèmes de logistiques de la chaîne d'approvisionnement de l'armée américaine.
  - seule méthode exacte pour résoudre des problèmes linéaires de grande taille (calcul systématique)
  - Principe : méthode itérative algébrique où l'on circule séquentiellement sur les sommets en empruntant les arêtes jusqu'à l'obtention de la solution optimale

57

QUELQUES DÉFINITIONS

- Systèmes d'équations équivalents
  - Systèmes qui possèdent le même ensemble de solutions
- Variable de base
  - Variable qui a un coefficient unitaire positif dans une des équations du système et des coefficients nuls partout ailleurs
- Opérations pivot
  - Opération de Gauss pour transformer un système d'équations équivalent dans lequel une variable devient de base
- Système canonique
  - Système d'équations où il y a **une** variable de base par équation
- Solution de base
  - Système d'équations où les variables hors base sont fixées à zéro résolu pour les variables de base

58

Introduction à la méthode du simplexe

Retour sur l'exemple de l' ébéniste

$$\boxed{min\ Z = 420x_1 + 300x_2 + 0x_3 + 0\ x_4}$$

Sous les contraintes
$$\begin{cases} 50x_1 + 40x_2 + x_3 + 0\ x_4 = 1040 \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 38 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ecriture standard avec l'ajout des variables d'écart

59

Méthode du simplexe

$$\begin{cases} x_3 = 1040 - 50x_1 - 40x_2 \\ x_4 = 38 - 2x_1 - x_2 \\ Z = 420x_1 + 300x_2 \end{cases}$$

Idée

$(0,0,\ x_3,\ x_4)$ solution réalisable $\Rightarrow$ *au point « O » et on a Z = 0*
On change de base

On va exprimer les variables de la ***base en fct*** *des variable* ***hors base :***
$(x_3, x_4) = fct(x_1, x_2)$

60

Méthode du simplexe

Idée
- Augmenter une variable ayant un coefficient positif dans Z augmenter cette variable tant que les autres ne deviennent pas négatives

$$\begin{cases} x_3 = 1040 - 50x_1 - 40x_2 \\ x_4 = 38 - 2x_1 - x_2 \\ Z = 420x_1 + 300x_2 \end{cases}$$

61

Méthode du simplexe

1. On cherche la variable x_i dont le coef maximise Z quand les autres sont nulles ici : x_1
2. cette variable x_1 passe dans la base
3. on fait sortir une autre variable de la base

➔ variables à gauche des signe « = » variables «en base»
les autres = variables «hors base»

!! Pour garder l'admissibilité de la solution (solution réalisable), l'augmentation de x_i doit être stoppée dès qu'une contrainte n'est plus vérifiée.

On fait sortir de la base la variable dont l'expression minimise x_i, quand celles qui apparaissent sont nulles (respect des contraintes) .

62

Méthode du simplexe

On cherche la valeur limite (admissible) de x_1 avec $x_2 = 0$
Ces valeurs sont déduites des contraintes du problèmes

$$\begin{cases} x_3 = 1040 - 50x_1 \geq 0 \\ x_4 = 38 - 2x_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 20.8 \\ x_1 \leq 19 \end{cases} \Rightarrow x_1 \leq 19$$

On voit que c'est $\boldsymbol{x}_4$ qui doit sortir de la base et x_1 rentre en base
⇒ on travaille avec la contrainte $2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 38$
d'où $x_1 = 19 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4$

$$\begin{cases} x_3 = 1040 - 50\left(19 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4\right) - 40x_2 \\ x_1 = 19 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ Z = 420\left(19 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4\right) + 300x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 90 - 15x_2 + 25x_4 \\ x_1 = 19 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ Z = 7980 + 90x_2 - 210x_4 \end{cases}$$

63

Méthode du simplexe

On recommence la même manipulation avec ce nouveau système

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \leq 38 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

On fait sortir x_3 de la base. On recalcule le nouveau système

$$\begin{cases} x_2 = 6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_1 = 19 - \frac{1}{2}\left(6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{4}x_4\right) - \frac{1}{2}x_4 \\ Z = 7980 + 90\left(6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{3}x_4\right) - 210x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_1 = 16 + \frac{1}{30}x_3 - \frac{4}{3}x_4 \\ Z = 8520 - 6x_3 - 60\,x_4 \end{cases}$$

64

Méthode du simplexe

$$\begin{cases} x_2 = 6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_1 = 19 - \frac{1}{2}\left(6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{4}x_4\right) - \frac{1}{2}x_4 \\ Z = 7980 + 90\left(6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{3}x_4\right) - 210x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_1 = 16 + \frac{1}{30}x_3 - \frac{4}{3}x_4 \\ Z = 8520 - 6x_3 - 60\,x_4 \end{cases}$$

On voit qu'il n'y a plus de variable à coefficient positif dans Z

Il n'y a plus de variable à calculer dans Z
Max Z et la valeur de $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ sont obtenues en mettent $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$ à 0 dans le dernier système. (Z=8520, $\boldsymbol{x}_1$=16, $\boldsymbol{x}_2$ =6)

65

Algorithme du simplexe

1. **Choisir** une solution initiale réalisable $x^{(0)}$
2. **Exprimer** les variables en base (≠ 0 à l'initialisation) en fonction des variables hors base (= 0 à l'initialisation)
3. **Si tous** les coefficients dans Z sont négatifs alors (on est à l'optimum) les variables en base donnent la solution optimale → Arrêt
4. **Sinon // il existe** des coefficients positifs dans Z,
   Soit x_j la variable ayant le plus fort coefficient **positif (**dans Z)
5. **calculer** la valeur maximale de x_j sous la contrainte : variables en base restent positives ou nulles. Soit x_i une des variables en base qui correspond à la contrainte retenue
6. **Faire entrer** la variable x_i en base et passer x_j dans l'ensemble des variables hors base (faire sortir x_j de la base)
7. **Exprimer** les variables en base en fonction des variables hors base
8. **Retourner** en **3**

66

Rappel

On obtient les sous matrices ***B*** et ***N*** de ***A*** ainsi que $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$ et $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ de $\boldsymbol{X}$:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{matrix}}^{B} & \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0_1 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}}^{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{matrix}$$

on a donc : $Ax = (B, N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$

67

Simplexe : notation en tableau

On part du système avec les variables d'écart

$$Ax_B + Nx_N = b$$
$$Z = \underbrace{C_B x_B}_{vect.\ base} + \underbrace{C_N x_N}_{hors\ base}$$

ou bien: $Ax = (B, N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$

68

Notation en tableau

D'où

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$B^{-1}b = \text{cste}$

$B^{-1}Nx_N$ comb. de variables hors base

$$Z = Cx = C_B x_B + C_N x_N$$

$$= C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)x_N$$

69

Notation en tableau

On part du système avec les variables d'écart

$$Z = \underbrace{C_B \text{Ø}^{-1}\ \ b}_{Z_B} + (\underbrace{C_N - \text{Ø}^{-1}\ \ N}_{\Delta_N})x_N + 0x_B$$

	X_N	X_B	
X_B	Δ_N	I	b
Z	C_B	0	0 =-Z

Méthode itérative : passage par une initialisation

70

Notation en tableau : exemple

On part du système avec les variables d'écart

$$Z = \underbrace{C_B \text{Ø}^{-1}\ \ b}_{Z_B} + (\underbrace{C_N - \text{Ø}^{-1}\ \ N}_{\Delta_N})x_N + 0x_B$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	50	40	1	0	1040
x_4	2	1	0	1	38
	420	300	0	0	0

$\Delta_N x_N$ $\quad 0x_B \quad$ $-Z_B$

71

Notation en tableau : exemple

On part du système avec les variables d'écart

$$Z = \underbrace{C_B \overset{-1}{\varnothing} \ \ b}_{Z_B} + (\underbrace{C_N - \overset{-1}{\varnothing} \ \ N}_{\Delta_N}) x_N + 0 x_B$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	50	40	1	0	1040
x_4	2	1	0	1	38
	420	300	0	0	0
	$\Delta_N x_N$		$0x_B$		$-Z_B$

72

Notation en tableau : exemple

Retour à l'exemple : initialisation $x_1 = 0$; $x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 1040$; $x_4 = 38$

	x_1	x_2	x_3	x_4	B	
x_3	50	40	1	0	1040	→1040/50=20.8
x_4	2	1	0	1	38	→38/2=19
Z	420	300	0	0	0	

Le coefficient maximal (non nul) de la matrice C (s'il existe) désigne la variable x_i qui passe en base.

On divise la colonne de B par la valeur du coefficient correspondant de la colonne x_i
→ la valeur minimale obtenue donne la variable qui passe en base

73

Notation en tableau : exemple

On fait rentrer x_1 en base et on normalise la ligne du pivot en mettant le pivot à 1 et on annule les autres coefficient de la même colonne c.a.d
Combinaison linéaire entre la ligne courante et la ligne du pivot pour annuler les coefficients correspondant sur la colonne du pivot (élimination de gauss) sauf l'élément qui rentre en base

(1')=(1)-50(2')—
(2')=.5(2)
(3')=(3)-420(2')

	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_3	0	15	1	-25	90	→ 90/15 = 6
x_1	1	1/2	0	1/2	19	→ 19/(1/2) = 28
Z	0	90	0	-210	-7980	Z - 420x_1

74

Notation en tableau : exemple

On vient de calculer les éléments du premier tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	15	1	-25	90
x_1	1	1/2	0	1/2	19
Z	0	90	0	-210	-7980

On applique de nouveau la même méthode puisque dans la ligne « Z » du tableau (bleu) il reste au moins un coeff. positif

75

Notation en tableau : exemple

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	1/(15)	-5/3	6
x_1	1	0	-1/30	4/3	16
Z	0	0	-6	-60	- 8520

C'est le dernier tableau car il n'y a plus de nombres positifs sur la dernière ligne

On a la solution qui maximise Z : x_1= 16 ; x_2= 6; x_3 =0 ; x_4 =0
Z = 8520

76

Algorithme général

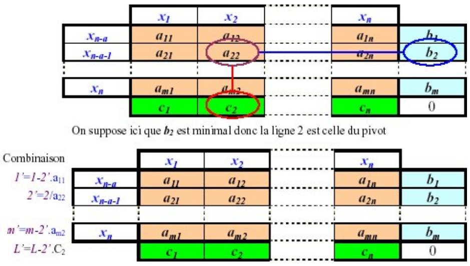
	x_1	x_2	...	x_n	
x_{n-a}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
x_{n-a-1}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
x_n	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
	c_1	c_2	...	c_n	0

	x_1	x_2	...	x_n	
x_{n-a}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
x_{n-a-1}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
x_n	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
	c_1	c_2	...	c_n	0

On suppose ici que c_2 est maximal donc la colonne 2 est celle du pivot

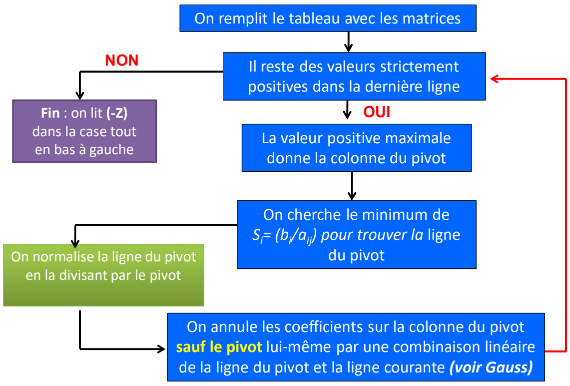
77

Algorithme général



78

Algorithme général



79

Récapitulatif: choix des variables entrantes

choisir une variable dont le coeff dans la fonction objectif est > 0

→ Règle ambigüe

plusieurs variables peuvent être candidates

But : choisir la variable pour minimiser le nombre d'itérations dans l'algorithme

Règle du plus grand accroissement de z

Choisir de faire entrer la variable qui fait le plus augmenter la fonction objectif

80

La règle du plus grand coefficient est plus souvent utilisée que la règle du plus grand accroissement car elle est calculable plus facilement

Lorsque plusieurs variables sont candidates à entrer en base (selon un certain critères) choisir celle qui a le plus petit indice dans le tableau. Faire de même avec les variables sortant de la base.

Théorème — Bland (1977)
si on applique cette dernière règle, l'algorithme du simplexe ne peut pas cycler.

81

Problème de la base initiale

Rappel de la forme standard : $\begin{cases} \max Z & = & CX \\ AX & \leq & b \\ X_i & \geq & 0 \end{cases}$

Dans le cas où b ≥ 0, on a une solution de base réalisable triviale X= 0 .

Mais pour un PL sous forme standard, il n'y a pas toujours de solution de base réalisable évidente, si b < 0

82

Choix de la base initiale

1. Cas favorable

Le point **O (0,…,0)** est l'un des sommet du polygone (c'est solution réalisable) on applique directement le simplexe, en partant de ce point.

2. Cas où une solution est connue

Par exemple on dispose de l'un des sommets du polygone.
solution de base réalisable : on est sur le bord du polygone des solutions.

Il faut que ce soit une solution de base réalisable sinon on ne serait pas sur le bord du polygone de solutions

On a le système : $\begin{cases} 50x_1 + 40x_2 + x_3 = 1040 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 38 \\ x_i \geq 0 \\ \max Z = 420x_1 + 300x_2 \end{cases}$

Par exemple : $(19, 0, 90, 0)^T$ (voir cours précédent)

83

Choix de la base initiale

1. Cas favorable

Le point **O (0,…,0)** est l'un des sommet du polygone (c'est solution réalisable) on applique directement le simplexe, en partant de ce point.

2. Cas où une solution est connue

Par exemple on dispose de l'un des sommets du polygone.
solution de base réalisable : on est sur le bord du polygone des solutions
Par exemple : (19, 0, 90, 0) ^{T} (voir exercice d'avant : les solutions trouvées)

$$\text{On a le système : } \begin{cases} 50x_1 + 40x_2 + x_3 = 1040 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 38 \\ x_i \geq 0 \\ \max Z = 420x_1 + 300x_2 \end{cases}$$

$$\text{d'où : } B = \begin{pmatrix} 50 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -25 \end{pmatrix}$$

84

Choix de la base initiale (suite)

D'où : $Ax = b$ alors $Bx_B + Nx_N = b$
$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$ en remplaçant on obtient :

$$Z = \underbrace{C_B B^{-1} b}_{Z_B} + \underbrace{(C_N - C_B B^{-1} N)}_{\Delta_N} x_N =$$

$$(420 \quad 0)\begin{pmatrix} 19 \\ 90 \end{pmatrix} + \left[(300 \quad 0) - (420 \quad 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 15 & -25 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

on obtient : $Z = 7980 + 90x_2 - 210x_4$

85

Problème de la base initiale

$Z = 7980 + 90x_2 - 210x_4$

On vient d'obtenir une solution réalisable initiale, on peut lancer le processus du simplexe.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	1/2	0	1/2	19
x_3	0	15	1	-25	90
z	0	90	0	- 210	$-Z_B$ = -7980

Le processus est lancé à partir de cette solution intiale.

86

Choix de la base initiale (suite)

3. Cas général

La solution initiale n'est pas facile à trouver
La valeur correspondant à $(0,0,\ldots,x_{n+1}\ x_{n+m})$ n'est pas toujours une solution réalisable (elle est hors contraintes – cas général)

87

Rappel de l'algorithme de simplexe

1. Mettre le PL sous la forme standard.
2. Trouver une solution initiale de base réalisable (SBR initiale).
3. Ecrire le PL sous la forme canonique relative à la SBR initiale.

4. Itérations :
   4.1 Si le critère d'arrêt est satisfait, donner le résultat final (solution optimale) ; sinon aller à l'étape 4-2.
   4.2 Déterminer la variable entrante (ou la colonne pivot) selon le 1er critère de DANTZIG
   4.3. Déterminer la variable sortante (ou la ligne pivot) selon le 2ème critère de DANTZIG
   4.4. Calculer le nouveau tableau en effectuant une opération de pivot. Retour à 4-1.

88

Choix de la base initiale (suite)

Méthode de simplexe à deux phases

Rappel : la méthode du simplexe pour un Problème Linéaire Sous Contraintes

On part de la forme canonique $\Rightarrow$ suppose qu'on peut facilement identifier une *Solution Basique Réalisable (SBR)* initiale : en générale la solution triviale (0, … ,0)

! Parfois, ceci n'est pas évident, par exemple

89

Choix de la base initiale (suite)

Méthode de simplexe à deux phases

Rappel : la méthode du simplexe pour un Problème Linéaire Sous Contraintes

On part de la forme canonique ⇒ suppose qu'on peut facilement identifier une *Solution Basique Réalisable (SBR)* initiale : en générale la solution triviale (0, … ,0)

! Parfois, ceci n'est pas évident, par exemple

(P) : Max $Z = 4x_1 + 3x_2$

SC:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 15 \\ x_1 + x_2 = 10 \\ 2x_1 - x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

90

En mettant ce PL sous la forme standard, avec ajout des variables d'écart on obtient :

(P) : Max $Z = 4x_1 + 3x_2 + 0\,e_1 + 0\,e_2$

SC:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - e_1 = 15 \\ x_1 + x_2 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + e_2 = 20 \\ x_1, x_2, e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

91

Dans ce système la valeur triviale (0,0, e_1, e_2) n'est pas une solution réalisable car elle ne vérifie pas la 1ère contrainte ($2_1 - x_2 - e_1 = 15$) ni la 2eme contrainte ($x_1 + x_2 = 10$)

Pour chercher une solution initiale, on introduit des variables dites artificielles à chaque contrainte '≥' et à chaque contrainte '=', on obtient alors (P') :

(P') : Max $Z = 4x_1 + 3x_2 + 0\,e_1 + 0\,e_2 + s_1 + s_2$

SC:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - e_1 + s_1 = 15 \\ x_1 + x_2 + s_2 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + e_2 = 20 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

92

Ainsi on passe du problème (P) au problème (P')

Une SBR de (P') est donnée par une variable basique

VB = $\{s_1, s_2, e_2\}$

Pour ne pas changer la nature du problème, les variables artificielles non seulement doivent avoir un effet nul dans la fonction objectif mais doivent également être nulles dans une SBR de (P).

! Lorsqu'une variable artificielle est non nulle, ceci indique que la solution est non réalisable dans (P).

Donc le but va être d'annuler les variables artificielles dans (P').

93

Min $Z' = s_1 + s_2$

$$\text{SC:} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - e_1 + s_1 = 15 \\ x_1 + x_2 + s_2 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + e_2 = 20 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

2 cas de figure :

- ***Z'>0* le PL n'a pas de solution car au moins une contrainte n'est pas vérifiée.**
- ***Z'*=0 la solution trouvée est un des sommets du polygone convexe du PL initial.

94

À partir de là, il y a 2 méthodes :

- La méthode des 2 phases.
- La méthode du « grand M ».

Pour la méthode des 2 phases

(Min $Z' = s_1 + s_2$) $\Leftrightarrow$ (Max $Z^* = - s_1 - s_2$)

$$\text{SC:} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - e_1 + s_1 = 15 \\ x_1 + x_2 + s_2 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + e_2 = 20 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

→ Phase I : Résoudre P_I par la méthode de Simplexe

95

(Max $Z^* = - s_1 - s_2$) = - ($25 - 3x_1 + e_1$) = $-25 + 3x_1 - e_1$

SC:
$2x_1 - x_2 - e_1 + s_1 = 15$
$x_1 + x_2 + s_2 = 10$
$2x_1 - x_2 + e_2 = 20$

$x_1, x_2, e_1, e_2, s_1, s_2 \geq 0$

96

On exprime Z* en fonction des variable : $Z^* = -25 + 3x_1 - e_1$

# 1	x_1	x_2	e_1	e_2	s_1	s_2	
s_1	2	-1	-1	0	1	0	15
s_2	1	1	0	0	0	1	10
e_2	2	-1	0	1	0	0	20
Z*	3	0	-1	0	0	0	+25

# 2	x_1	x_2	e_1	e_2	s_1	s_2	
x_1	1	-1/2	-1/2	0	1 /2	0	15/2
s_2	0	3/2	1/2	0	-1/2	1	5/2
e_2	0	0	1	1	-1	0	5
	0	3/2	1/2	0	-3/2	0	5/2

97

simplexe
Méthode des 2 phases

# 3	x_1	x_2	e_1	e_2	s_1	s_2	B
x_1	1	0	-1/3	0	1/3	1/3	25/3
x_2	0	1	1/3	0	-1/3	2/3	5/3
e_2	0	0	1	1	-1	0	5
Z	0	0	0	0	-1	-1	0

•Tableau optimal de la phase I (cas 2) : VB = $\{x_1, x_2, e_2\}$

•*Rq*: On peut éliminer du tableau la colonne d'une variable artificielle dès que celle-ci sort de la base.

98

Phase II : on part de la solution qu'on vient de trouver

On réécrit ***Z*** en fonction des variables en base

## 1	x_1	x_2	e_1	e_2	
x_1	1	0	-1/3	0	25/3
x_2	0	1	1/3	0	5/3
e_2	0	0	1	1	5
Z (initial voir les données)	4	3	0	0	
Z (exprimé en fonction de e_1)	0	0	1/3	0	-115/3

## 2	x_1	x_2	e_1	e_2	
x_1	1	0	0	1/3	10
x_2	0	1	0	-1/3	0
e_1	0	0	1	1	5
	0	0	0	-1/3	-40

99

La solution optimale est Z = 40
X1 = 10
X2 = 0

100

Résoudre le problème suivant à l'aide de la méthode des 2 phases.

$$\max_{x_1,x_2} z = 2x_1 - x_2 \quad s.c.$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \leq -19 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 32 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Transformation : ajout des variables d'écart ce qui nous donne le système suivant :

$$\max z = 2x_1 - x_2 \quad s.c.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - e_1 = 19 \\ 3x_1 + 4x_2 + e_2 = 32 \end{cases}$$

101

On exprime le système sous forme standard complété des variables artificielles
le nouveau problème est donc :

$$\max z = 2x_1 - x_2 + s_1 \qquad \text{s.c.}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - e_1 + s_1 = 19 \\ 3x_1 + 4x_2 + e_2 = 32 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, s_1 \geq 0 \end{cases}$$

Dont une base valide est cette fois (s_1, e_2).

102

But : trouver une solution réalisable au problème initial
On résout le problème :

$$\min z' = s_1 \qquad s.c.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - e_1 + s_1 = 19 \\ 3x_1 + 4x_2 + e_2 = 32 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, s_1 \geq 0 \end{cases}$$

Dans la méthode à deux phases, on remplace ce problème par la maximisation (-z' =z '')

$$\max z'' = -s_1 \qquad s.c.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - e_1 + s_1 = 19 & (1) \\ 3x_1 + 4x_2 + e_2 = 32 & (2) \\ x_1, x_2, e_1, e_2, s_1 \geq 0 \end{cases}$$

103

On travaille avec la (1) ; la contrainte 2 ne contient pas de variables artificielles

$$2x_1 + 3x_2 - e_1 + s_1 = 19 \Leftrightarrow -s_1 = 2x_1 + 3x_2 - e_1 - 19$$

On obtient :

$$\max z'' = 2x_1 + 3x_2 - e_1 - 19 \qquad s.c.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - e_1 + s_1 = 19 \\ 3x_1 + 4x_2 + e_2 = 32 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, s_1 \geq 0 \end{cases}$$

On fait appel à la méthode du simplexe classique.
D'où la 1ere phase du simplexe

104

$z'' = 2x_1 + 3x_2 - e_1 - 19$

x_2 entre en base (plus grand coefficient) et sort de la base

$$\begin{cases} s_1 = 19 - 2x_1 - 3x_2 + e_1 \\ e_2 = 32 - 3x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

On exprime x_2 en fonction des nouvelles variables hors base

$x_2 = \frac{19}{3} - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{3}s_1$ $\quad z'' = -s_1$

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{19}{3} - \dfrac{2}{3}x_1 + \dfrac{1}{3}e_1 - \dfrac{1}{3}s_1 \\ e_2 = \dfrac{20}{3} - \dfrac{1}{3}x_1 - \dfrac{4}{3}e_1 + \dfrac{4}{3}s_1 \end{cases}$$

Ce qui termine l'optimisation avec la solution $\left(0, \frac{19}{3}, 0, \frac{20}{3}, 0\right)$ où on a bien $s_1 = 0$.

105

On revient au problème initial, mais avec $s_1 = 0$

On a $z = 2x_1 - x_2 = -\frac{19}{3} + \frac{8}{3}x_1 - \frac{1}{3}e_1$

$$z = -\frac{19}{3} + \frac{8}{3}x_1 - \frac{1}{3}e_1$$

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{19}{3} - \dfrac{2}{3}x_1 + \dfrac{1}{3}e_1 \\ e_2 = \dfrac{20}{3} - \dfrac{1}{3}x_1 - \dfrac{4}{3}e_1 \end{cases}$$

x_1 entre dans la base (plus grand coefficient), et x_2 sort de la base

$$x_1 = \frac{19}{2} - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}e_1$$

106

$$z = 19 - 4x_2 + e_1$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{19}{2} - \dfrac{3}{2}x_2 + \dfrac{1}{2}e_1 \\ e_2 = \dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{3}{2}e_1 \end{cases}$$

e_1 entre en base (plus grand coefficient), et e_2 en sort

$$e_1 = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}e_2$$

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{3}x_2 - \dfrac{2}{3}e_2 \\ x_1 = \dfrac{32}{3} - \dfrac{4}{3}x_2 - \dfrac{1}{3}e_2 \\ z = \dfrac{64}{3} - \dfrac{11}{3}x_2 - \dfrac{2}{3}e_2 \end{cases}$$

Ce qui termine l'optimisation avec la solution $\left(\frac{32}{3}, 0, \frac{7}{3}, 0\right)$,
Avec : $x_1 = \frac{32}{3}, x_2 = 0$ *pour un coût maximal* $z = \frac{64}{3}$.

107