Faculté des Sciences et Technologies
Dpt Informatique

UE-INF3040L Algorithmique Numérique

Partie 1 du rattrapage CC1 2017

Préambule : *aucun document n'est autorisé ; téléphones portables et ordinateurs sont strictement interdits. Une calculatrice « type collège » est autorisée.*

Exercice 1 : Systèmes linéaires [4.5 pts]

Soit le système d'équations **AX = B** avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Questions

1.1. [1 pt] On se propose de résoudre le système par la méthode itérative de Gauss-Seidel

a. [0.5pt] Rappeler la méthode de Gauss-Seidel

Pour la méthode de Gauss-Seidel voir le cours (l'essentiel c'est de souligner que c'est une méthode itérative ; et de la différencier de la méthode de Jacobi)

On a 2 façon de donner la réponse :

1ere possibilité forme équationnelle :

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{j=i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{j=n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \quad (*)$$

2ème possibilité forme matricielle : (un peu plus longue : donc, il ne faut pas être trop strict dans la notation → donner un petit bonis car plus délicate à manipuler

A partir de $A = D - E - F$ avec $\boldsymbol{D} =$ matrice diagonale, $-\boldsymbol{E}$ matrice triangulaire inférieure stricte, $-\boldsymbol{F}$ matrice triangulaire supérieur stricte

On répartit $D; E; F$ $\quad \mathrm{M} = (D-E)^{-1}$ et $\quad \mathrm{N} = (D-E)^{-1}B$

$$AX = b \Rightarrow X = (D-E)^{-1}F.X + (D-E)^{-1}B$$

Le calcul effectif peut se faire par un calcul matriciel

En calculant : $(D-E)^{-1}$:

$M = (D-E)^{-1}F$ et $N = (D-E)^{-1}B$

$$\begin{cases} X^{(0)} : \text{(vecteur initial fixé)} \\ X^{(k+1)} = MX^{(k)} + N \end{cases}$$

b. [0.5pt] Donner les matrices de décomposition selon la méthode **Gauss-Seidel,** pour la matrice A

$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ matrice diagonale, $-\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrice triangulaire inférieure stricte,

$-\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrice triangulaire supérieur stricte

1.2. [2.25 pts] En partant de la valeur initiale $X^{(0)} = (0,0,0)^t$ appliquer la méthode de Gauss-Seidel pour résoudre le système AX=B (on réalisera **3** itérations)

$$(D-E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \; ; \; -F = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 0 & 15 & 6 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$N = (D-E)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -\frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -2.25 \end{pmatrix}$$

$X^{(0)} = (0,0,0)^t$

$$X^{(0)} = (0,0,0)^t$$

$$X^{(1)} = MX^{(0)} + N = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 0 & 15 & 6 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -\frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -\frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -2.25 \end{pmatrix}$$

$$X^{(2)} = MX^{(1)} + N = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 0 & 15 & 6 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -\frac{9}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -\frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40.5 \\ -125.5 \\ -31.875 \end{pmatrix}$$

$$X^{(3)} = MX^{(1)} + N = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 0 & 15 & 6 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40.5 \\ -125.5 \\ -31.875 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -\frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 692.25 \\ -2080.75 \\ -520.6875 \end{pmatrix}$$

Remarque 1 : il faut surtout voir la démarche. Bien sûr ne pas donner la note entière si problème de calcul de produit de matrice (si l'étudiant.e ne sait pas calculer le produit de matrice)….

Les étudiants peuvent également opter pour la forme de l'équation (*), c'est également valable. Il faut vérifier cependant vérifier s'il ont respecté les $x_j^{(k)}$ et les $x_j^{(k+1)}$ dans la même expression

1.3. [0.75 pt] Peut-on affirmer avec certitude que le processus itératif converge ?

Comment peut-on transformer le système pour assurer la convergence de la méthode de Gauss-Seidel ?

La forme de la matrice ne permet pas d'affirmer que le système va converger. On peut même constater une divergence du système.

Pour assurer une convergence, on peut faire une permutation des ligne pour obtenir une matrice à diagonale dominante. On passe du système $AX = B$ au système $A'X = B'$

Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ au système $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ $B' = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1.4. [0.5 pt] Après avoir appliqué cette modification, en partant de la valeur initiale $X^{(0)} = (0,0,0)^t$ comment peut-on vérifier la tendance à la convergence du système (on ne vous demande pas de calculer les solutions).

On calcul à chaque étape la différence $\left|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right|$: peu importe comment ils peuvent définir cette norme. Le but est pouvoir estimer une erreur dans le cas d'un processus itératif

Exercice 2 (2016) : Systèmes linéaires [4.5 pts]

Soit le système d'équations **AX = B** avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Résoudre par la méthode de Gauss-Seidel

On a

$$(D - E) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et } -F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = (D - E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$N = (D - E)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$X^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} X^{(k)} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

On part de

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 17/4 \\ 7/8 \end{pmatrix} ; X^{(2)} = \begin{pmatrix} 7/16 \\ 27/16 \\ 25/32 \end{pmatrix} , \ldots..$$