Logique propositionnelle — quelques résultats

Proposition.
$F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{F}$, Σ ensemble de formules.

1. $\Sigma \models F \Rightarrow G$ si et seulement si $\Sigma, F \models G$
2. $\Sigma \models F$ si et seulement si $\Sigma, \neg F$ contradictoire.

Logique propositionnelle — quelques résultats

Proposition.
$F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{F}$, p une variable, I une interprétation.

Soit I' définie comme :

$$\begin{cases} I'(p) = I(G) \\ I'(q) = I(q) \text{ si } q \neq p \end{cases}$$

On a : $I(F[p := G]) = I'(F)$.

Preuve : Par induction sur F.

Logique propositionnelle — quelques résultats

Proposition.
F, F', G et G' des formules, p une variable, alors :

1. Si $\models F$ alors $\models F[p := G]$
2. Si $F \equiv F'$ alors $F[x := G] \equiv F'[x := G]$
3. Si $G \equiv G'$ alors $F[x := G] \equiv F[x := G']$

Logique propositionnelle — quelques équivalences

$$\begin{array}{llll}
F \wedge F & \equiv F & F \vee F & \equiv F \\
F \wedge G & \equiv G \wedge F & F \vee G & \equiv G \vee F \\
F \wedge (G \wedge H) & \equiv (F \wedge G) \wedge H & F \vee (G \vee H) & \equiv (F \vee G) \vee H \\
F \wedge (G \vee H) & \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H) & F \vee (G \wedge H) & \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H) \\
\neg(F \wedge G) & \equiv \neg F \vee \neg G & \neg(F \vee G) & \equiv \neg F \wedge \neg G \\
F \Rightarrow G & \equiv \neg F \vee G & \neg(F \Rightarrow G) & \equiv F \wedge \neg G \\
\bot \wedge F & \equiv \bot & \bot \vee F & \equiv F \\
\neg\neg F & \equiv F & &
\end{array}$$

Encore des inductifs

Séquent : couple $\Gamma \vdash F$

- Γ ensemble de formules — contexte
- F formule — conclusion

Notation $\Gamma \cup \{F\} \leadsto \Gamma, F$

Encore des inductifs — schéma

$\to \Gamma, F \vdash F$ (ax)

$\Gamma \vdash F \to \Gamma, G \vdash F$ (aff)

$\Gamma, F \vdash G \to \Gamma \vdash F \Rightarrow G$ $(\Rightarrow_i)$

$\Gamma \vdash F \Rightarrow G, \Gamma \vdash F \to \Gamma \vdash G$ $(\Rightarrow_e)$

$\Gamma \vdash F, \Gamma \vdash G \to \Gamma \vdash F \wedge G$ $(\wedge_i)$ $\quad \Gamma \vdash F \wedge G \to \Gamma \vdash F$ $(\wedge_e^g)$ $\quad \Gamma \vdash F \wedge G \to \Gamma \vdash G$ $(\wedge_e^d)$

$\Gamma \vdash F \to \Gamma \vdash F \vee G$ $(\vee_i^g)$ $\quad \Gamma \vdash G \to \Gamma \vdash F \vee G$ $(\vee_i^d)$

$\Gamma \vdash F \vee G,\ \Gamma, F \vdash H,\ \Gamma, G \vdash H \to \Gamma \vdash H$ $(\vee_e)$

$\Gamma, F \vdash \bot \to \Gamma \vdash \neg F$ $(\neg_i)$ $\quad \Gamma \vdash \neg F,\ \Gamma \vdash F \to \Gamma \vdash \bot$ $(\neg_e)$ $\quad \Gamma, \neg F \vdash \bot \to \Gamma \vdash F$ $(\bot_c)$

Déduction naturelle — séquents prouvables

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\ (\text{ax}) \qquad \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, G \vdash F}\ (\text{aff})$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \wedge G}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash F}\ (\wedge_e^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash G}\ (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vee_i^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \vee G \quad \Gamma, F \vdash H \quad \Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash H}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg F \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\ (\bot_c)$$

Déduction naturelle — preuve

Séquent prouvable ? $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, p \Rightarrow q \vdash p \Rightarrow q}\ (\text{ax}) \qquad \dfrac{}{p, p \Rightarrow q \vdash p}\ (\text{ax})}{p, p \Rightarrow q \vdash q}\ (\Rightarrow_e)}{p \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}\ (\Rightarrow_i)}{\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}\ (\Rightarrow_i)$$

Déduction naturelle

preuve

Ajouter une règle sans risque ? (sans nouveau séquent prouvable)

Règle dérivable : but dérivable des prémisses

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B, C \vdash A}\ (\text{aff}_2)$$

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, C \vdash A}\ (\text{aff})}{\Gamma, B, C \vdash A}\ (\text{aff})$$

« Nouvelle » règle (aff_2) utilisable
Comme dérivable dans partie close $\leadsto$ pas de nouveau séquent prouvable !

Déduction naturelle

preuve

Théorème.
$\Gamma \vdash F$ prouvable par *déduction naturelle* si et seulement si $\Gamma \vDash F$

$\Rightarrow$ par induction sur $\Gamma \vdash F$

$\Leftarrow$ un peu plus de sport. . .

Preuve comme manipulation syntaxique