Chapitre 3

Racines de fonctions F(x)=0
F : fonction non linéaire

Problème général

Soit une fonction f : $R^n \to R^p$.

Le problème est de trouver (en temps fini) par une méthode approchée, des solutions de l'équation f(x) = 0

$f:\ R$ ⍰ $R.$

Théorème (zéro d'une fonction)
Soit f une fonction continue
$f: [a,\ b] \to R$
$si\ f(a)f(b) \leq 0, \quad alors$

$$\exists\ \alpha \in\ ]a, b[\ tel\ que\ \ f(\alpha) = 0$$

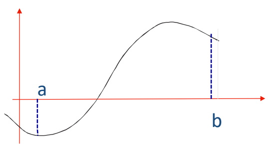


Schéma général de l'approche pour la résolution

$f : R \to R.$

On transforme la forme de l'équation:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = x$ on construit la suite :

$X^{k+1} = \varphi(X^k)$ et $\lim_{k\to\infty} X^k = x$

on s'appuie sur le principe du point fixe : X^* tq : $\varphi(X^*) = X^*$

La solution est déterminée avec une précision ε donnée :

$|\varphi(x^{(k)}) - x^{(k-1)}| \leq \varepsilon$

On passe par des méthodes itératives ; il faut avoir :

- un point de départ $x^{(0)}$ → initialisation
- la fonction $\varphi(x) = x$ pour chaque méthode (règle de l'itération).
- définir les conditions d'arrêt de l'itération

Fonction d'itération $\begin{cases} x^{(1)} = \varphi(x^{(0)}) \\ x^{(2)} = \varphi(x^{(1)}) \\ x^{(k)} = \varphi(x^{(k-1)}) \end{cases}$ on suppose $x^{(k-1)}$ connu

➢ Si la suite $x^{(k)}$ converge une limite x^* lorsque $k \to \infty$

Alors x^* est solution de l'équation $x = \varphi(x)$

➢critère d'arrêt : $x^{(k)}$ proche d'une solution de l'équation $x = \varphi(x)$.

❖ Par exemple :

✓ la suite $X^{(n)}$ devient stationnaire : $|X^{(k)} - X^{(k-1)}| \leq \epsilon$

✓ $|f(X^{(k)})| \leq \epsilon$

❖ Récapitulatif

On considère l'équation (1) f(x)= 0 : f continue et dérivable.

Résoudre le problème (1) ⇔ répondre aux 3 points suivants :

- Définir une suite itérative $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$ (trouver une méthode adaptée).
- Trouver un point de départ $x^{(0)}$ (voir conditions de convergence).
- Déterminer un critère d'arrêt (précision).

Temps fini ⇒ la vitesse de convergence de la suite $(x^{(k)})$.

Remarques : Convergence → existence de la solution + choix de $x^{(0)}$.
Propagation d'erreur peut entraîner une divergence

- Condition d'existence : *théorème des valeurs intermédiaires*
  - Si : f est continue sur $[x_1 , x_2]$ et $f(x_1)*f(x_2) \leq 0$
  - Alors $\exists\, x_0 \in [x_1 , x_2] : f(x_0) = 0$

- Méthode d'itération : Théorème du point fixe (f continue) :
  - $f(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = x \rightarrow$ on construit la suite
  - $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$ et $\lim x^{(k)} = x^* \Rightarrow \varphi(x^*) = x^*$

- Condition de convergence : application du théorème des accroissements finies

Rappel du Théorème des accroissements finis

f : [a, b] → R, continue sur [a, b], dérivable sur]a, b[, il existe c ∈]a, b[tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

50

- Cqce du Th. des accroissement finis : φ contractante ssi :
  - $| \varphi(x) - \varphi(y) | \leq c|x-y|$
  - $x= x(k) , y=x(k-1) \Rightarrow |x(k+1) -x(k) | \leq c| x(k) -x(k-1) | \leq c^k | x(1) -x(0) |$

- Si φ n'est définie que sur un domaine D, il faut choisir x(0) dans D et vérifier que $\varphi(D) \subset D$.

51

- *Ordre de convergence : Soit $x^{(*)}$, un point fixe de φ*
  - si pour tout $x^{(k)}$ dans le voisinage de x^*, on a la relation :

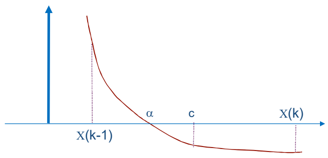
  $$|x^{(k+1)} - x^* | \leq C \cdot | x^{(k+1)} – x^* |^p$$

  pour tout $k \geq 0$, avec $C < 1$ si $p \geq 1$; on dit que φ est d'ordre au moins **p** pour déterminer $x^{(*)}$.

- p = 1 : convergence linéaire
- p = 2 : convergence quadratique

52

Méthode de la bissection (dichotomie)



$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$$

La règle de production

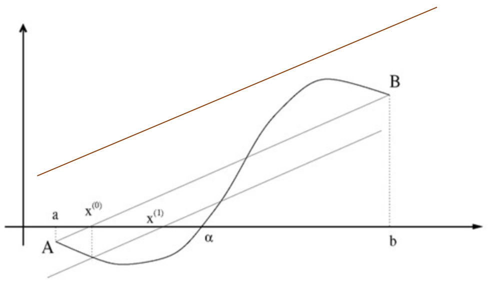
Algorithme : méthode de dichotomie

$a^{(0)} = a$, $b^{(0)} = b$, et $x^{(0)} = \frac{a^{(0)}+b^{(0)}}{2}$.

Pour $k \geq 0$ et tant que $|I_k| = |b^{(k)} - a^{(k)}| > \epsilon$

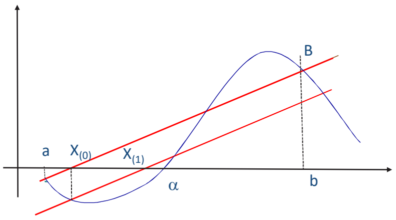
- Si $f(x^{(k)}) = 0$ alors $x^{(k)}$ est la racine α.
- Si $f(x^{(k)})f(a^{(k)}) < 0$
  - $a^{(k+1)} = a^{(k)}$, $b^{(k+1)} = x^{(k)}$
- Si $f(x^{(k)})f(b^{(k)}) < 0$
  - $a^{(k+1)} = x^{(k)}$, $b^{(k+1)} = b^{(k)}$
- $x^{(k+1)} = \frac{a^{(k)}+b^{(k)}}{2}$

Méthode de la corde



Si la méthode converge, elle converge avec un ordre $p = 1$.

Méthode de la corde (ou la sécante)



$$f(x_n) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_{n+1} - x_n) = 0$$

On peut exprimer la suite recherchée par:

$$\varphi(x_n) = x_{n+1} = x_n - \frac{b-a}{f(b) - f(a)} f(x_n)$$

La méthode de la corde peut être écrite sous la forme d'itération de point fixe $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ où

$$\phi(x) = x - \frac{b-a}{f(b) - f(a)} f(x)$$

Puisque

$$\phi'(x) = 1 - \frac{b-a}{f(b) - f(a)} f'(x)$$

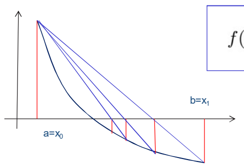
la condition de convergence locale $|\phi'(\alpha)| < 1$ est équivalente à

$$0 < \frac{b-a}{f(b) - f(a)} f'(\alpha) < 2$$

Sauf le cas exceptionnel où $\phi'(\alpha) = 0$, la convergence est linéaire.

Méthode de fausse position (Regula falsi)

Cette méthode combine les possibilités de la dichotomie et la méthode de la sécante. On considère un intervalle [a, b] qui contient un zéro de la fonction f. $(f(a).f(b) < 0\,;\quad f\ continue$

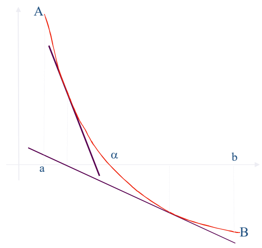


$$\boxed{f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x_{n+1} - x_n) = 0}$$

Ce qui donne :

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)}$$

Méthode de Newton (-Raphson)



Convergence locale: si $x^{(0)}$ est assez proche de α et $f'(\alpha) \neq 0$, la méthode converge avec un ordre $p = 2$.

59

Méthode de Newton : expression de la suite (x_n)

Pour la méthode de Newton on utilise le développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de (x_n) on obtient :

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n)$$

D'où, si on cherche le point (x_{n+1}) tel que $f(x_{n+1}) = 0)$
Obtient :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad avec\ f'(x_n) \neq 0$$

donc ici $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ $f'(x) \neq 0$

60

Pour la convergence

En supposant $f'(\alpha) \neq 0$ on obtient

$$\phi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow \phi'(\alpha) = 0$$

La méthode est convergente localement. On peut montrer qu'elle est convergente d'ordre $p = 2$.

61

A propos de la convergence

- $|I_0| = |b-a|$
- $|I_k| = |b^{(k)} - a^{(k)}| = \frac{|I_0|}{2^k} = \frac{|b-a|}{2^k}$ pour $k \geq 0$
- En notant $e^{(k)} = \alpha - x^{(k)}$ l' *erreur absolue* à l'étape k, on déduit que

$$|e^{(k)}| = |\alpha - x^{(k)}| \leq \frac{|I_k|}{2} = \frac{|b-a|}{2^{k+1}} \quad \text{pour } k \geq 0$$

ce qui entraîne

$$\lim_{k \to \infty} |e^{(k)}| = 0$$

- Donc la méthode de la bissection est *globalement convergente*.