Faculté des Sciences et Technologies
Dpt Informatique

LIFO63 – Algorithme numérique – TD 4

Approximation

Solutions

Exercice 1

Utiliser la méthode des moindres carrés pour déterminer une solution approchée du système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 2y = 0 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

Le système s'écrit matriciellement $Bv = c$ où :

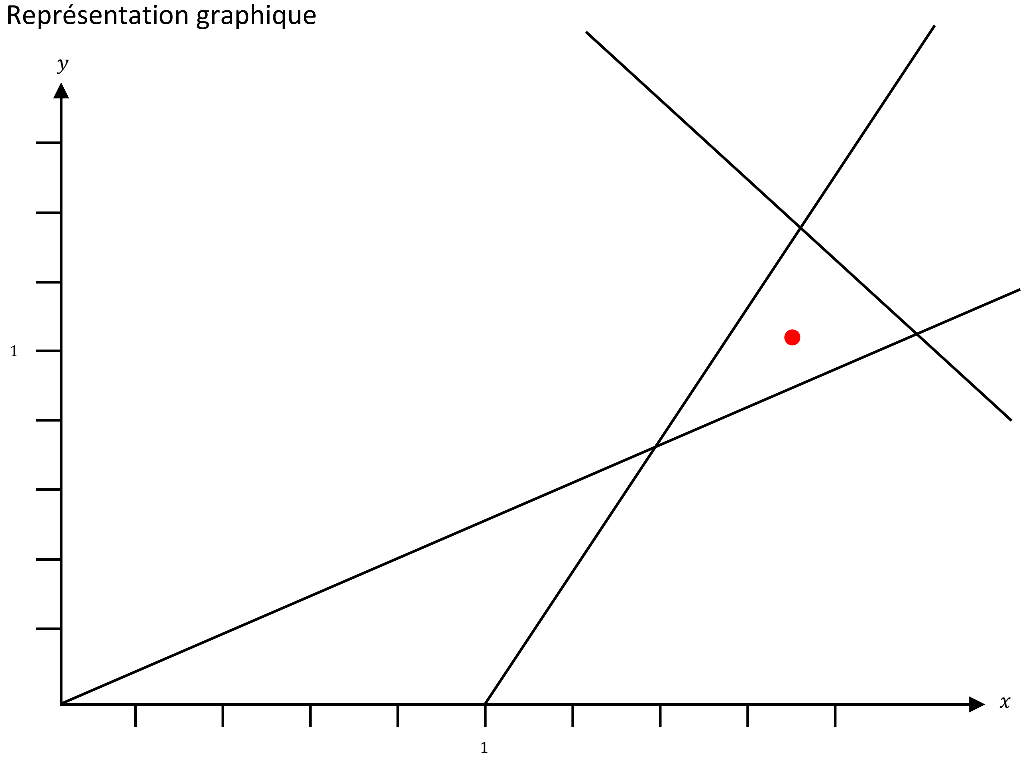
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad , \quad c = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Une solution approchée est obtenue en multipliant les deux membres par B^T, ce qui donne le système :

$$B^T B v = B^T c, \text{ soit } \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

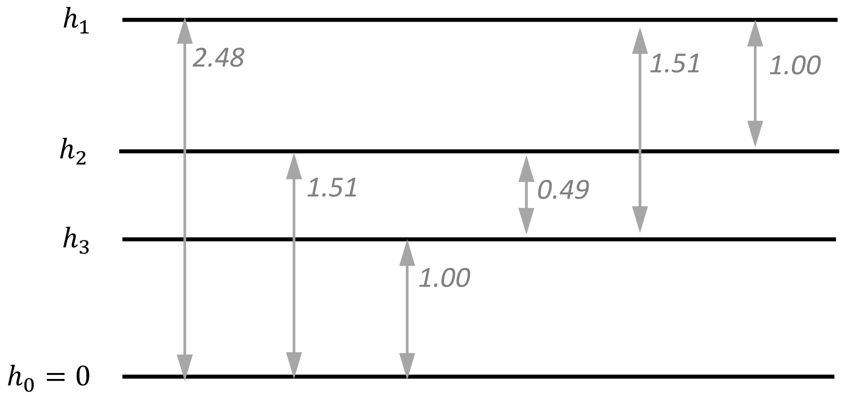
dont la solution est $x = \frac{5}{3}$, $y = 1$

Représentation graphique



Exercice 2

Pour tracer le plan d'un terrain, on cherche à estimer les hauteurs h_1, h_2, h_3 de différents niveaux. On procède en mesurant des différences de hauteurs pour plusieurs paires de niveaux. Les mesures relevées sont représentées dans le schéma ci-dessous.



Trouver les valeurs h_1, h_2, h_3 en utilisant la méthode des moindres carrés.

Dans la méthode des moindres carrés, le problème est représenté sous la forme $AX = Y + R$ c'est-à-dire que l'on modélise le problème exact en ajoutant un résidus R.
Ici nous avons cinq équations (i.e. 5 données) pour trois inconnues (les trois hauteurs). On voit facilement qu'il y aura des résidus car certaines données sont contradictoires. On cherche la solution optimale aux moindres carrés.
Les équations sont :

$$\begin{cases} h_1 = 2.48 \\ h_2 = 1.51 \\ h_3 = 1.00 \\ h_2 - h_3 = 0.49 \\ h_1 - h_3 = 1.51 \\ h_1 - h_2 = 1.00 \end{cases}$$

Ce problème peut se résoudre sont forme matricielle $A^T AX = A^T Y$ où :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 2.48 \\ 1.51 \\ 1.00 \\ 0.49 \\ 1.51 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

Or nous avons :

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^T A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^T Y = \begin{bmatrix} 4.99 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

En utilisant une méthode de résolution du type $AX = B$ (e.g. pivot de Gauss ou décomposition LU), on trouve :

$$X = (2.495, 1.4975, 0.9975)^T$$

Donc nous avons finalement $h_1 = 2.495, h_2 = 1.4975, h_3 = 0.9975$ (valeurs proches mais pas exactement les mêmes que celles données par les trois premières équations).

Exercice 3

Déterminer le polynôme de degré 2 qui réalise la meilleure approximation quadratique de la fonction $f(x) = |x|$ sur l'intervalle $[-1,1]$ basée sur cinq points équidistants.

1. Lorsque tous les points ont le même poids (i.e. 1).

On a les cinq points $\left\{(-1,1), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (0,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (1,1)\right\}$.

Le polynôme est défini par $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ dont les coefficients sont solutions de (par annulation des dérivées partielles de la fonction d'erreur)(rappel le polynôme ne passe pas forcément par les points) :

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum x_i & \sum {x_i}^2 \\ \sum x_i & \sum {x_i}^2 & \sum {x_i}^3 \\ \sum {x_i}^2 & \sum {x_i}^3 & \sum {x_i}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i {x_i}^2 \end{bmatrix}$$

Ici on a les sommes suivantes :

x_i	${x_i}^2$	${x_i}^3$	${x_i}^4$	y_i	$y_i x_i$	$y_i {x_i}^2$
-1	1	-1	1	1	-1	1
$-1/2$	$1/4$	$-1/8$	$1/16$	$1/2$	$-1/4$	$1/8$
0	0	0	0	0	0	0
$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	$1/2$	$1/4$	$1/8$
1	1	1	1	1	1	1
$\sum = 0$	$\sum = 5/2$	$\sum = 0$	$\sum = 17/8$	$\sum = 3$	$\sum = 0$	$\sum = 9/4$

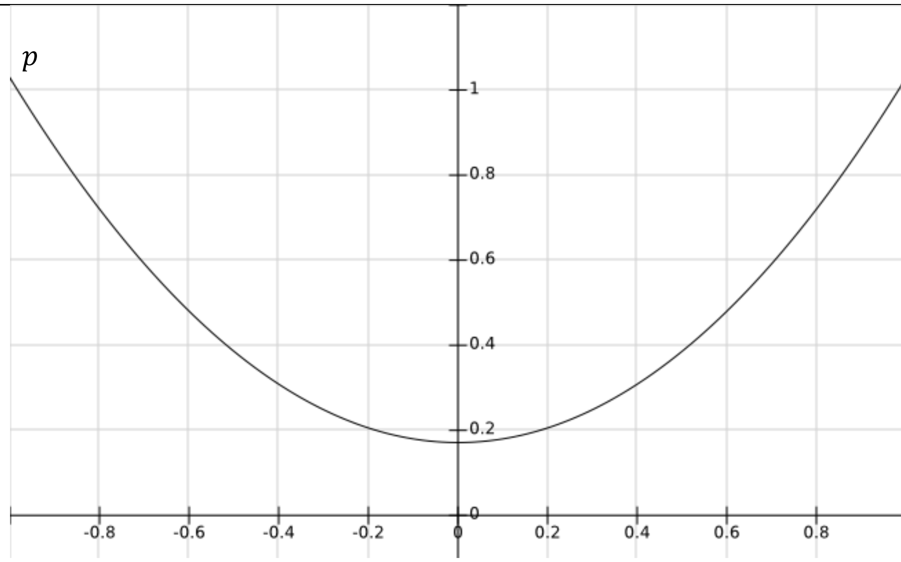
Nous avons donc le système linéaire en matrice :

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 5/2 \\ 0 & 5/2 & 0 \\ 5/2 & 0 & 17/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 9/4 \end{bmatrix}$$

La solution de ce système est :

$$a_0 = \frac{6}{35} \quad , \quad a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = \frac{6}{7}$$

Finalement le polynôme $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \frac{6}{35} + 0 \times x + \frac{6}{7} x^2 = \frac{6}{35}(5x^2 + 1)$



2ème solution :

On a les cinq points $\left\{(-1,1),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),(0,0),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),(1,1)\right\}$.

Le polynôme est défini par $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 3 inconnues à calculer, et cinq équations

$$(M^t \cdot M)\tilde{A} = M^t Y$$

On forme les matrices M, M^t et Y

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -{}^1/_2 & 0 & {}^1/_2 & 1 \\ 1 & {}^1/_4 & 0 & {}^1/_4 & 1 \end{pmatrix} \quad ; Y = \left(1\,,\ {}^1/_2\,,\ \ 0,\ {}^1/_2\,,\ 1\ \right)^t$$

$$M^t M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & 17/8 \end{pmatrix}; \qquad M^t Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ {}^9/_4 \end{pmatrix} \quad ; \quad (M^t M)^{-1} = \begin{pmatrix} 17/35 & 0 & -4/7 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ -4/7 & 0 & 8/7 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (M^t M)^{-1}(M^t Y) = \begin{pmatrix} 17/35 & 0 & -4/7 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ -4/7 & 0 & 8/7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ {}^9/_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/35 \\ 0 \\ 6/7 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien les mêmes valeurs que celles trouvées dans la solution 1 :

L'équation s'écrit : $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \frac{6}{35} + 0 \times x + \frac{6}{7}x^2 = \frac{6}{35} + \frac{6}{7}x^2 = \frac{6}{35}(5x^2 + 1)$

2. Lorsque les points ont les poids : 1, 2, 4, 2, 1.

On a les nouvelles sommes $(w_i x_i^k)$:

w_i	x_i	${x_i}^2$	${x_i}^3$	${x_i}^4$	y_i	$y_i x_i$	$y_i {x_i}^2$
1	-1	1	-1	1	1	-1	1
2	$-1/2$	$1/4$	$-1/8$	$1/16$	$1/2$	$-1/4$	$1/8$
4	0	0	0	0	0	0	0
2	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	$1/2$	$1/4$	$1/8$
1	1	1	1	1	1	1	1
$\sum = 10$	$\sum = 0$	$\sum = 3$	$\sum = 0$	$\sum = 9/4$	$\sum = 4$	$\sum = 0$	$\sum = 5/2$

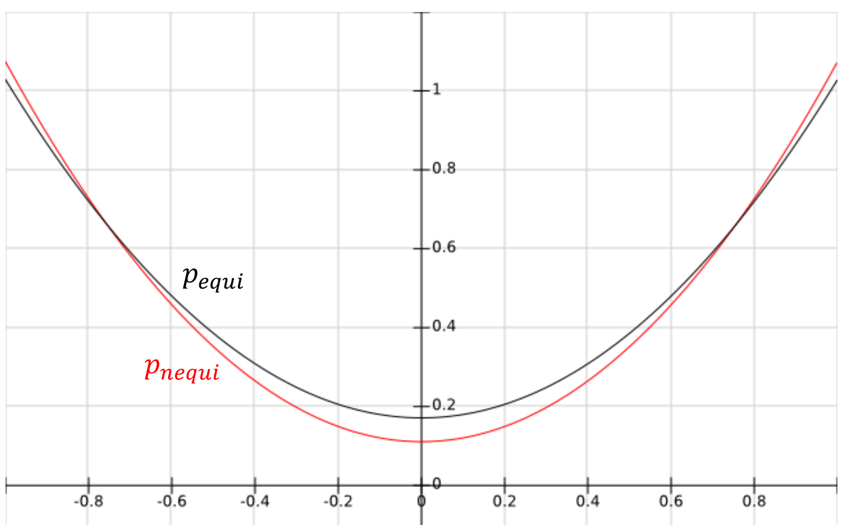
Nous avons donc le système linéaire en matrice (où $n+1$ devient $\sum w_i$):

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 9/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

La solution de ce système est :

$$a_0 = \frac{1}{9} \quad , \quad a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = \frac{26}{27}$$

Finalement le polynôme $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \frac{1}{27}(26x^2 + 3)$



Exercice 4

Calculer la droite de meilleure approximation de la fonction $f(x) = x^2 + 2x$ pour les points $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$.

On a les valeurs suivantes :

x_i	y_i	${x_i}^2$	$y_i x_i$
-1	-1	1	1
$-1/2$	$-3/4$	$1/4$	$3/8$
0	0	0	0
$1/2$	$5/4$	$1/4$	$5/8$
1	3	1	3
$\sum = 0$	$\sum = 5/2$	$\sum = 5/2$	$\sum = 5$

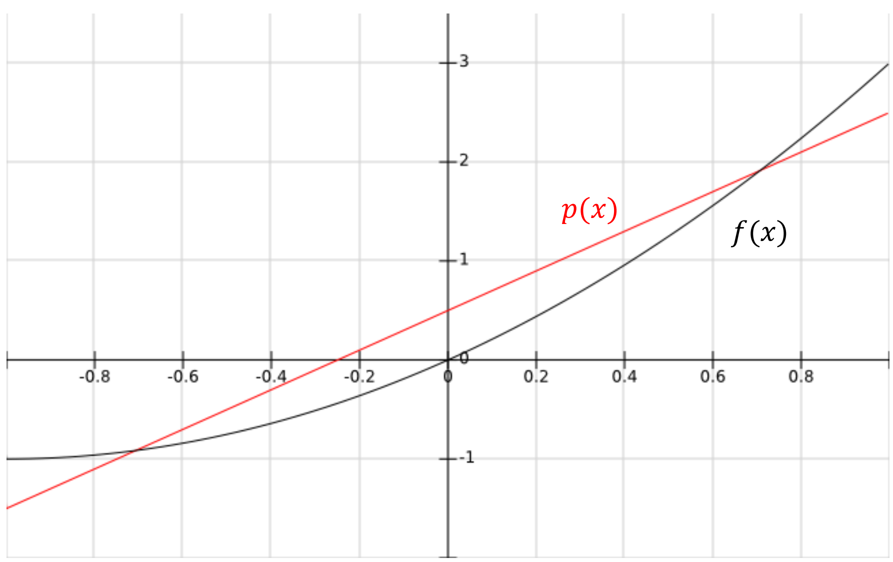
Nous avons donc le système linéaire en matrice :

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

La solution de ce système est :

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad , \quad a_1 = 2$$

Finalement le polynôme $p(x) = a_0 + a_1 x = \frac{1}{2} + 2x$



Il vous reste de faire la solution en passant par :

$$(\boldsymbol{M^t} \cdot \boldsymbol{M})\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{M^t Y}$$

A vous de jouer !!!!

Exercice 5 : Pour votre culture générale : n'a pas été vu en cours

Calculer la droite de meilleure approximation de la fonction $f(x) = x^2 + 2x$ sur $[-1,1]$.

On a la droite d'équation $p(x) = a_0 + a_1 x$
Les fonctions de base sont donc : $u_0 = 1$ et $u_1 = x$

On a la relation :

$$\begin{bmatrix} \langle u_0, u_0 \rangle & \langle u_0, u_1 \rangle \\ \langle u_1, u_0 \rangle & \langle u_1, u_1 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle u_0, f \rangle \\ \langle u_1, f \rangle \end{bmatrix} \text{ où } \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

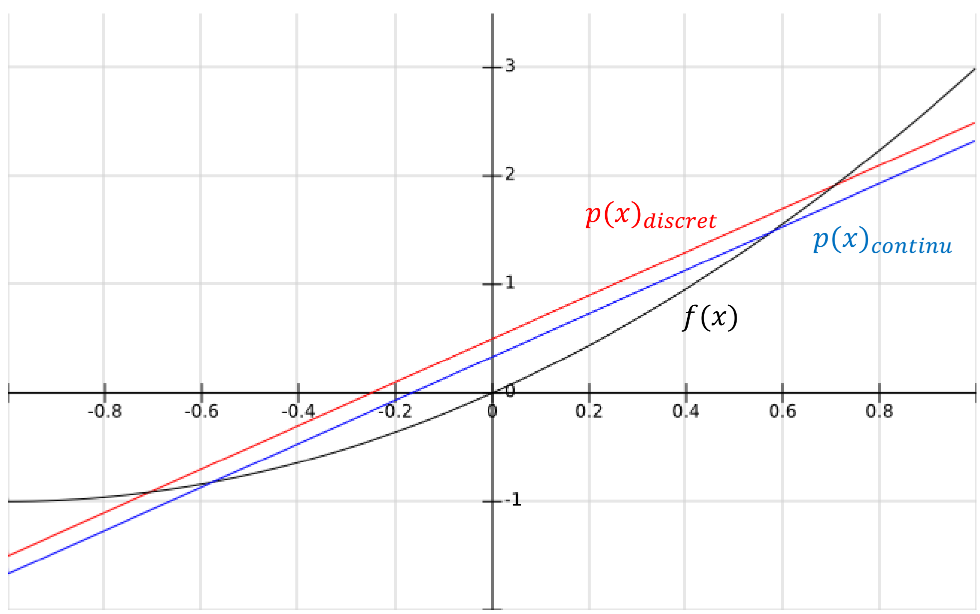
Donc ici on obtient :

$$\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} dx & \int_{-1}^{1} x\, dx \\ \int_{-1}^{1} x\, dx & \int_{-1}^{1} x^2\, dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} (x^2 + 2x)\, dx \\ \int_{-1}^{1} (x^2 + 2x) x\, dx \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

La solution de ce système est :

$$a_0 = \frac{1}{3} \quad , \quad a_1 = 2$$

Finalement le polynôme $p(x) = a_0 + a_1 x = \frac{1}{3} + 2x$



Exercice 6

Calculer la meilleure approximation de la forme $p(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \sin x$ pour la fonction $f(x) = x^2 - 2\pi x + 2$ sur $[0,2\pi]$.

Les fonctions de base sont : $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \cos x$ et $u_2 = \sin x$.

On a la relation :

$$\begin{bmatrix} \langle u_0, u_0\rangle & \langle u_0, u_1\rangle & \langle u_0, u_2\rangle \\ \langle u_1, u_0\rangle & \langle u_1, u_1\rangle & \langle u_1, u_2\rangle \\ \langle u_2, u_0\rangle & \langle u_2, u_1\rangle & \langle u_2, u_2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle u_0, f\rangle \\ \langle u_1, f\rangle \\ \langle u_2, f\rangle \end{bmatrix} \text{ où } \langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Donc ici on obtient :

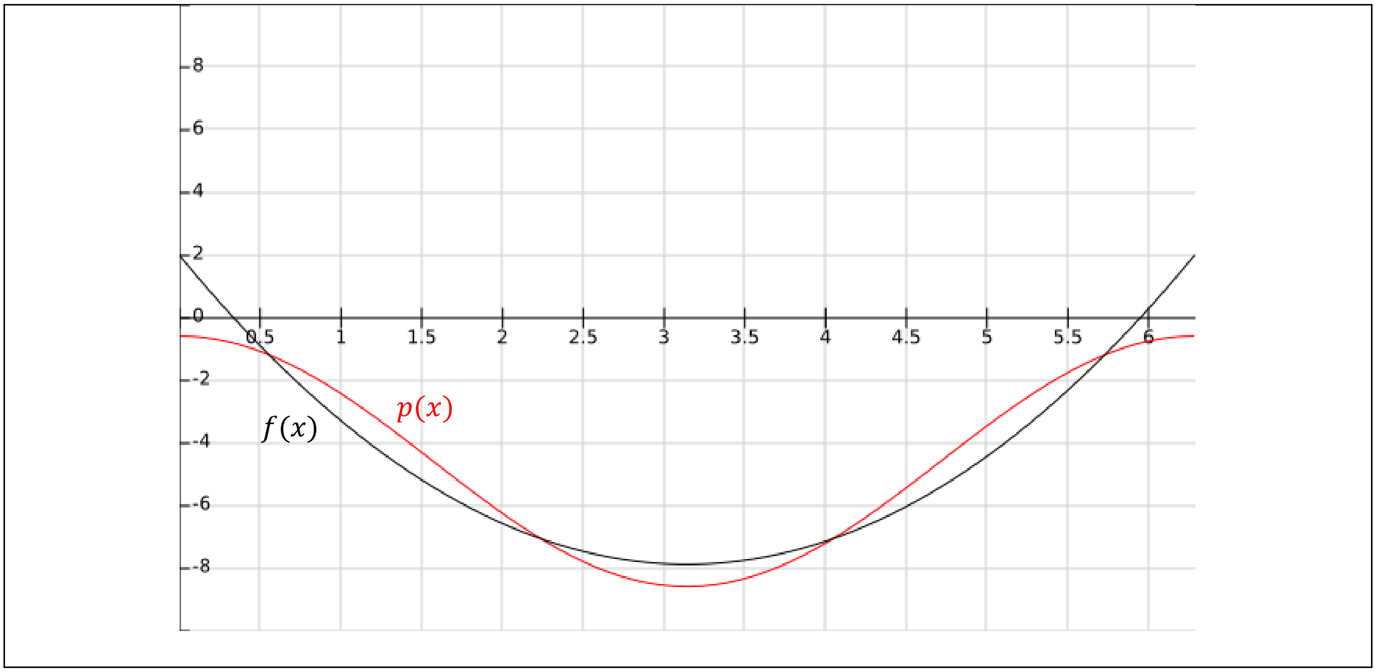
$$\begin{bmatrix} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} dx & \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cos x\, dx & \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin x\, dx \\ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cos x\, dx & \int_0^{2\pi} cos^2 x\, dx & \int_0^{2\pi} \sin x \cos x\, dx \\ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin x\, dx & \int_0^{2\pi} \sin x \cos x\, dx & \int_0^{2\pi} sin^2 x\, dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(x^2 - 2\pi x + 2)dx \\ \int_0^{2\pi} (x^2 - 2\pi x + 2)\cos x\, dx \\ \int_0^{2\pi} (x^2 - 2\pi x + 2)\sin x\, dx \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\pi^3 + 2\pi \\ 4\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution de ce système est :

$$a_0 = 4\left(1 - \frac{\pi^2}{3}\right) \quad , \quad a_1 = 4 \quad , \quad a_2 = 0$$

Le polynôme résultat est : $p(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \sin x = 2\left(1 - \frac{\pi^2}{3}\right) + 4\cos x$



8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
f(x)
p(x)