Introduction à la programmation linéaire

Saida.bouakaz@univ-lyon1.fr

Objet de la programmation linéaire :

La programmation linéaire peut être vue comme un outil permettant d'allouer, de façon optimale, des ressources disponibles en quantités limitées, à une ou des activités pour obtenir le meilleur résultat ou le meilleur rendement.

Introduction par un exemple

- **Énoncé**

Un ébéniste fabrique des chaises et des tables.
Il peut consacrer au plus 1040 heures et 38 morceaux de bois.

Une pièce de chaque produit nécessite une quantité donnée de matière première et consomme une durée donnée de travail. les deux produits ne sont pas vendu au même prix

- **Objectif**

maximiser les gains en respectant les contraintes suivante (temps, fourniture).

➔ Trouver le nombre de fauteuil , le nombre de table qui permettent de maximiser les gains en respectant les contraintes

Introduction : exemple1-suite

On a les données suivantes :

1 table prend 50 heures
Nécessite 2 morceaux de bois

1 table rapporte 420 €.

1 chaise prend 40 heures
Nécessite 1 morceau de bois

1 Fauteuil rapporte 300 €.

Quelle doit être la production pour que le gain soient maximal ?

Modélisation : modélisation du problème

Nbre de tables et de fauteuils

Pour un gain maximal

X_1 le nombre de tables

$X_1 \geq 0$

X_2 le nombre de chaises

$X_2 \geq 0$

Soit Z le gain de l'ébéniste : $Z = 420\ X_1 + 300\ X_2$

Z est la fonction à maximiser.

Contraintes :

$50\ X_1 + 40\ X_2 \leq 1040$: Contrainte de temps de production

$2\ X_1 + X_2 \leq 38$: Contrainte de quantité de bois

Modélisation : mise en équation

Ecriture formelle

PL : Expression standardisée

$Z = 420\, x_1 + 300\, x_2 \rightarrow$ fonction objectif

$$\left.\begin{array}{l} 50\, x_1 + 40\, x_2 \leq 1040 \\ 2\, x_1 + x_2 \leq 38 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array}\right\}\ \text{contraintes}$$

Ecriture standard

Ecriture matricielle (canonique)

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 50 & 40 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 1040 \\ 38 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 420 & 300 \end{pmatrix}$$

- Le vecteur X code la quantité de production possible (dans l'exemple nombre de tables et chaises)
- La matrice A code le coût de production d'un élément de chaque type (dans l'exemple : coût en temps et matière d'une table / d'une chaise)
- Le vecteur B code les limites de capacité de production en temps et en matière (dans l'exemple : bois)
- Le vecteur C code les bénéfices de production (dans l'exemple les bénéfices de vente des tables et fauteuils)

Ecriture Sdt

Forme canonique

- Le système s'écrit :

$$Max\ Z = CX$$

Sous les contraintes $\begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$

- Instanciation du système pour l'exemple 1

$$Max\ Z = CX = 420x_1 + 300x_2$$

$$AX \leq B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 50 & 40 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \leq \begin{pmatrix} 1040 \\ 38 \end{pmatrix}$$

$$X \geq 0$$

Caractéristiques de la PL

Définition :

Un programme linéaire est un problème d'optimisation (maximisation ou minimisation) défini par :

- n variables de décision (variables à calculer)
- une fonction objectif linéaire (à optimiser)
- des contraintes sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires

Modélisation : généralisation

- Modélisation du problème
  - Spécification des contraintes du problème
    - Contraintes liées à la disponibilité des fournitures
    - Contraintes liées au respect des proportions

    \+ Contraintes de non négativité (grandeur positives)
  - Spécification de la fonction objectif
    - Maximisation un gain, retour sur investissement, profit, …

      Ou bien
    - Minimisation du coût, ….

Expression PL

Dans ce cas le programme linéaire (PL) s'écrit

$$\max Z = CX$$

- Sous les contraintes : $\begin{cases} AX \leq B \\ X_i \geq 0 \end{cases}$

- Avantage de cette écriture : générique

→l'écriture est dite normalisée.

Proprietés d'un modèle de programmation linéaire

- Linéarité

  Équations polynômiales de degré 1

  $$a_1 X_1^1 + a_2 X_2^1 + \dots + a_n X_n^1$$

- Divisibilité & continuité

  Domaine des variables partie de R (ou bien tout R)

- Séparabilité & additivité

  $$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

- Fonction objectif unique

  Min coût ou Max profit, …

Forme générale d'un problème d'optimisation

Max (ou Min Z) $\quad Z = f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_1 \\ \quad\vdots \\ \quad\vdots \\ f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b_k \\ \quad\vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_m \\ x_1 \geq 0 \,;\ x_2 \geq 0 \,;\ \ldots,\ x_n \geq 0 \end{cases}$$

Si les fonctions f_i sont linéaires alors on a un (PL)

Exemple -2

Une entreprise fournit deux types de machines: A et B.

objectif : réaliser la meilleure rentabilité sous les contraintes

Coût de la production/élément

	A	B
Pompes	1	1
Main d'oeuvre	9 heures	6 heures
Tuyaux	12 m	16 m

Rentabilité/élément

	A	B
Prix unitaire	350 €.	300 €.

On dispose de 200 pompes,

On a 2880 mètres de tuyaux disponibles

On peut consacrer jusqu'à 1566 heures (max)

Les étapes pour la formulation du problème PL

1. Comprendre le problème : dégager l'objectif

2. Identifier les variables de decision(s)

   x_1 = nbre de machines de type A produites

   x_2 = nbre de machines de type B produites

3. Définir les contraintes en une combinaison linéaire de variables décisionnelles.

   $1x_1 + 1x_2 \leq 200$ → nombre de pompes

   $9x_1 + 6x_2 \leq 1566$ → coût Main-d'oeuvre.

   $12x_1 + 16x_2 \leq 2880$ → longueur tuyaux

Les étapes pour la formulation du problème PL

4. traduire la fonction objectif par une combinaison linéaire du rendement de chaque élément → variables décisionnelles

Max: 350 x_1 + 300 x_2

5. Identifier les limites supérieures ou inférieures des variables de décision (espace de recherche des solutions)

- $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$
- Posons $x_2 = 0$ --- > on se déplace sur l'axe x_1, on examine les contraintes sur la variable décisionnelle x_1

1ère contrainte : $1x_1 \leq 200$ → $x_1 \leq 200$

2° contrainte : $9\, x_1 \leq 1566$ → $x_1 \leq 174$

3° contrainte : $12\, x_1 \leq 2880$ → $x_1 \leq 240$

Exemple

Retour à l'exemple de l'ébéniste

$$\text{Max : } 350\,x_1 + 300\,x_2$$

$$\text{Sous les contraintes} \begin{cases} 1\,x_1 + 1\,x_2 \leq 200 \\ 9\,x_1 + 6\,x_2 \leq 1566 \\ 12\,x_1 + 16\,x_2 \leq 2880 \\ x_1 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Résoudre le problème PL: Une approche intuitive (Suite)

Si x_2=0, la valeur maximale de x_1 est 174 et le profit total est:

(350 € * **174**) + (300 € * **0**) = **60 900** €

C'est une solution possible mais est-elle ***optimale***?

Non!

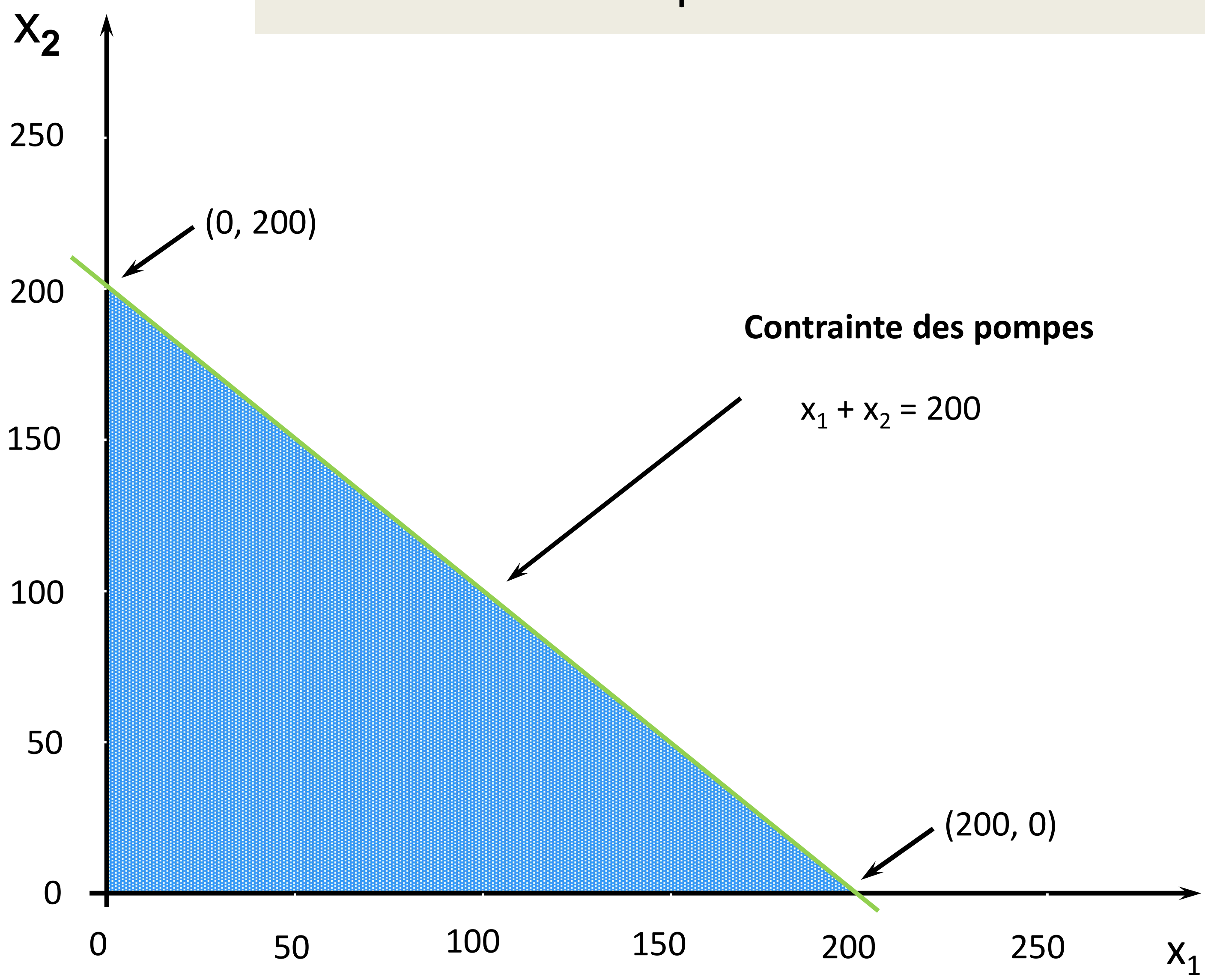
Résolution du problème PL
Une approche graphique

- Les contraintes d'un problème PL définissent la région de faisabilité.
- Le meilleur point dans la zone de faisabilité correspond à la solution optimale.
- Pour des problèmes à deux (resp. 3) variables, il est facile de tracer la zone de faisabilité et de trouver la solution optimale dans le plan (resp. dans l'espace).

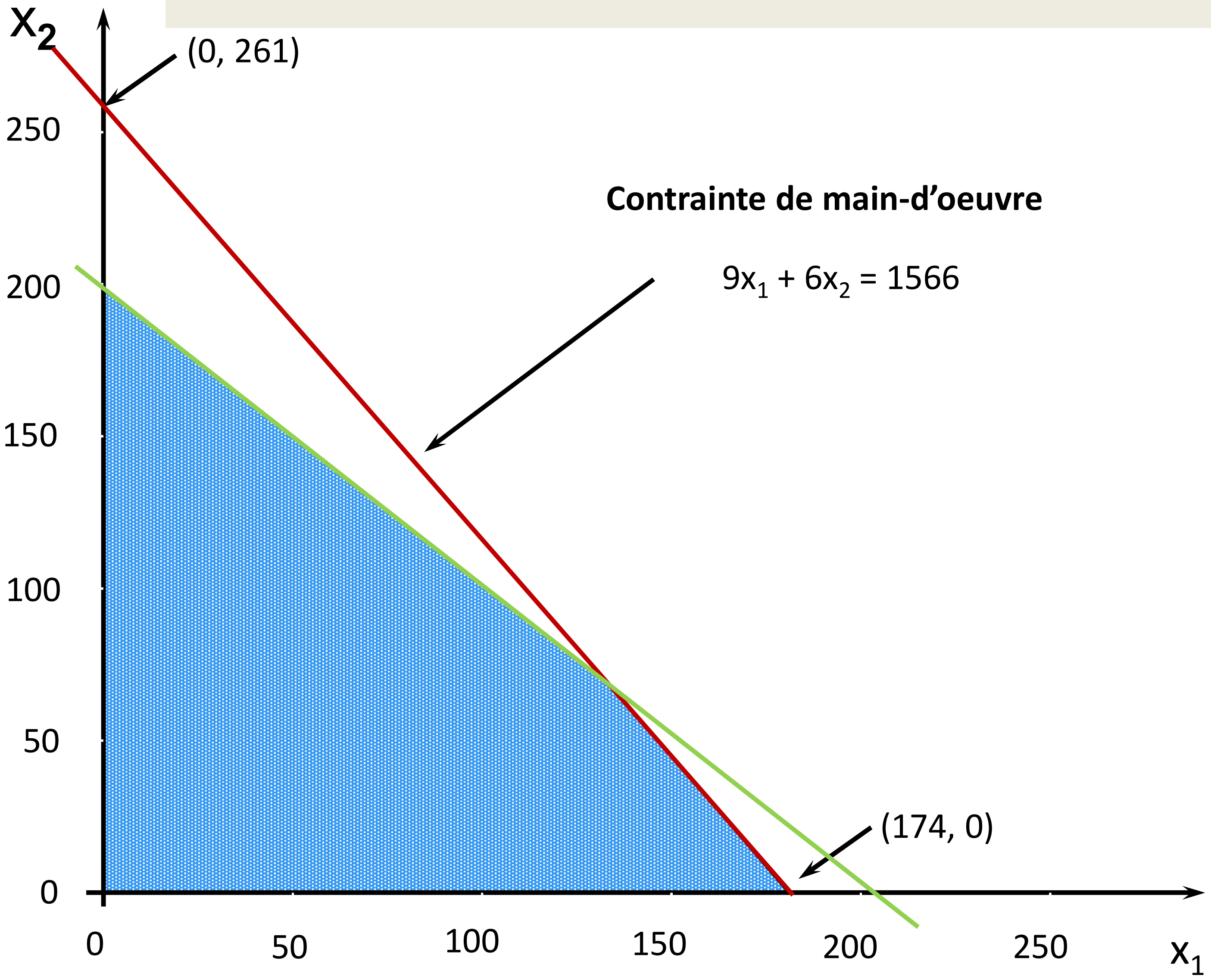
- Attention !! Cette approche est envisageable dans R^2

- Au delà de 3 variables ?!!

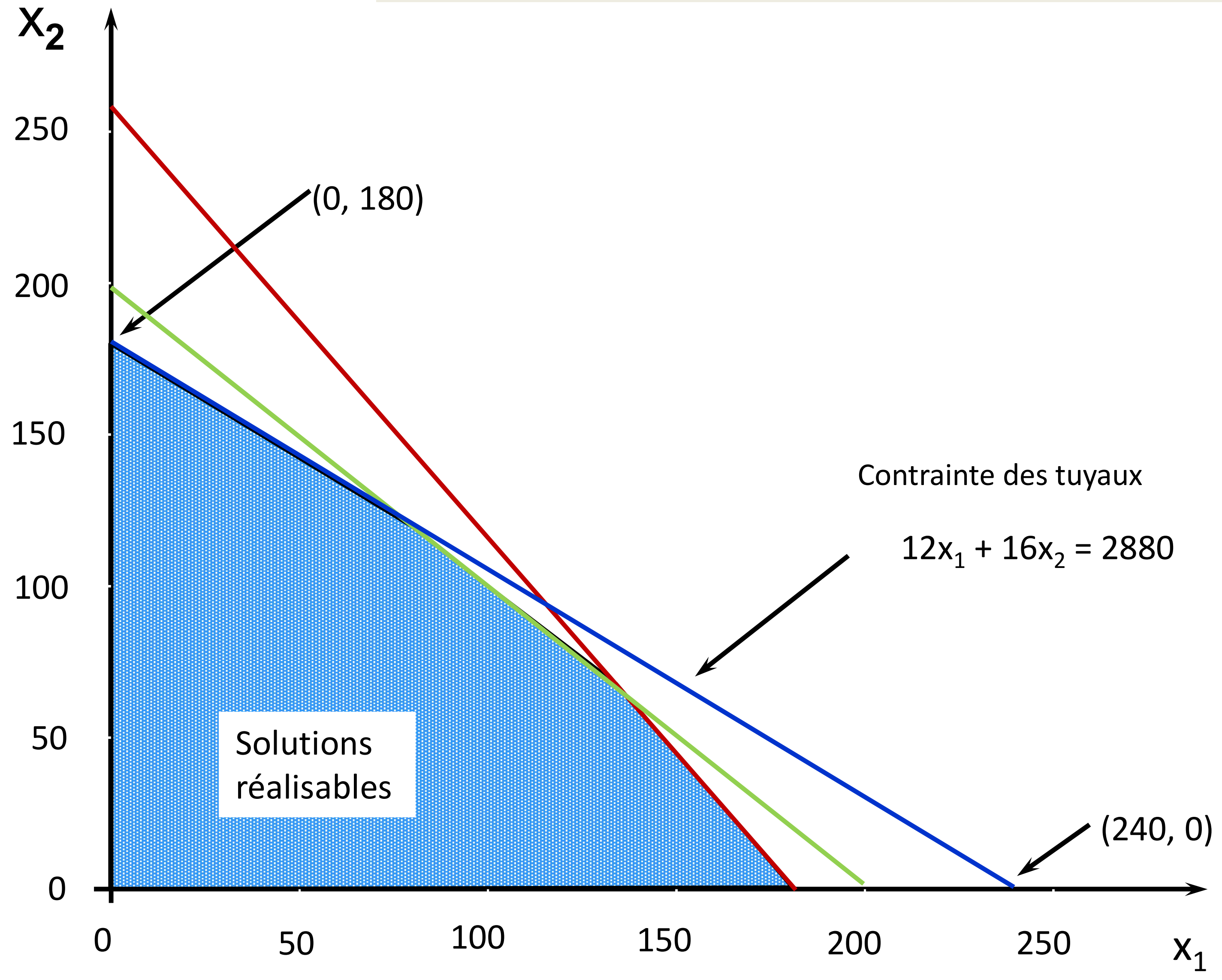
Tracé de la première contrainte



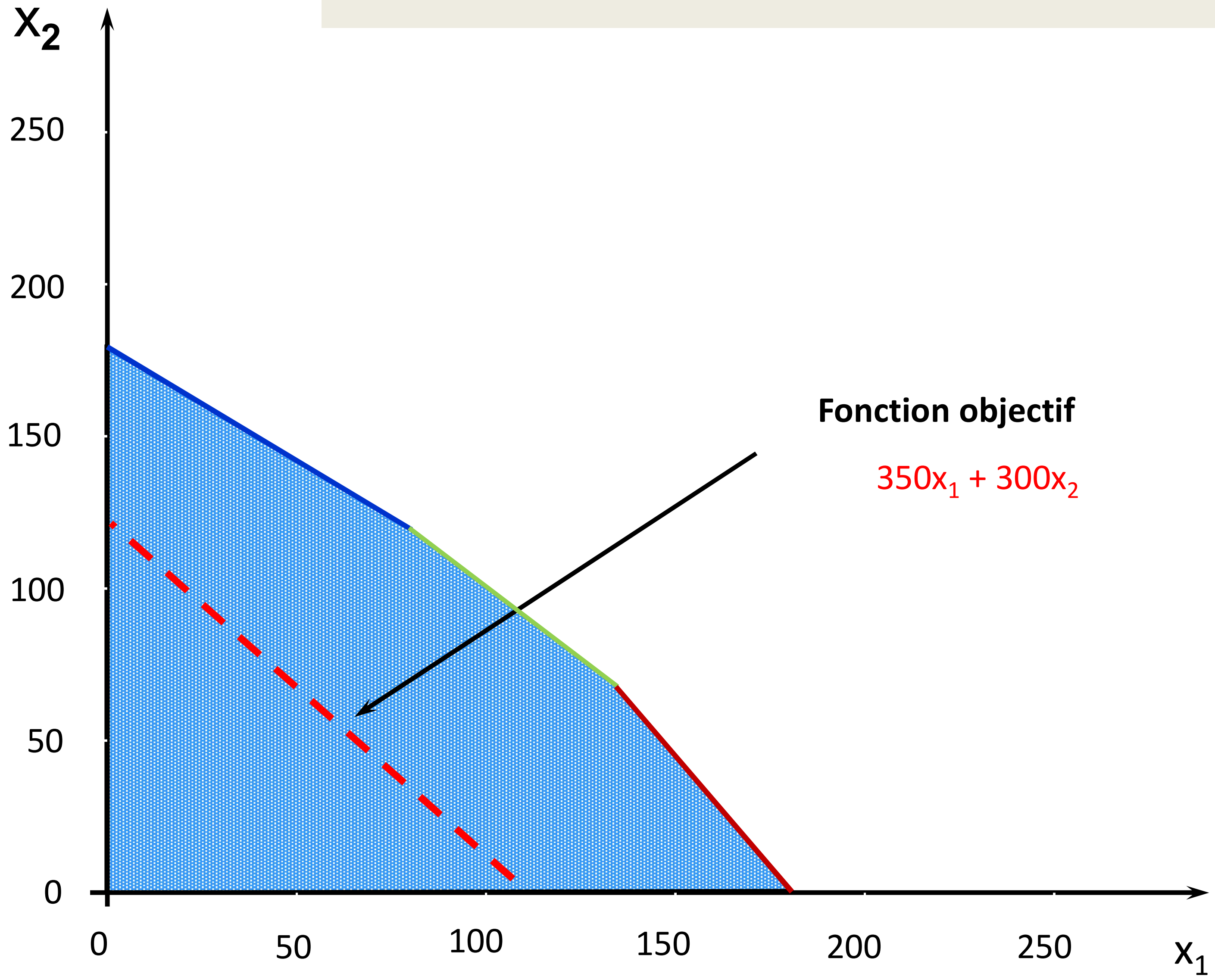
Tracé de la deuxième contrainte



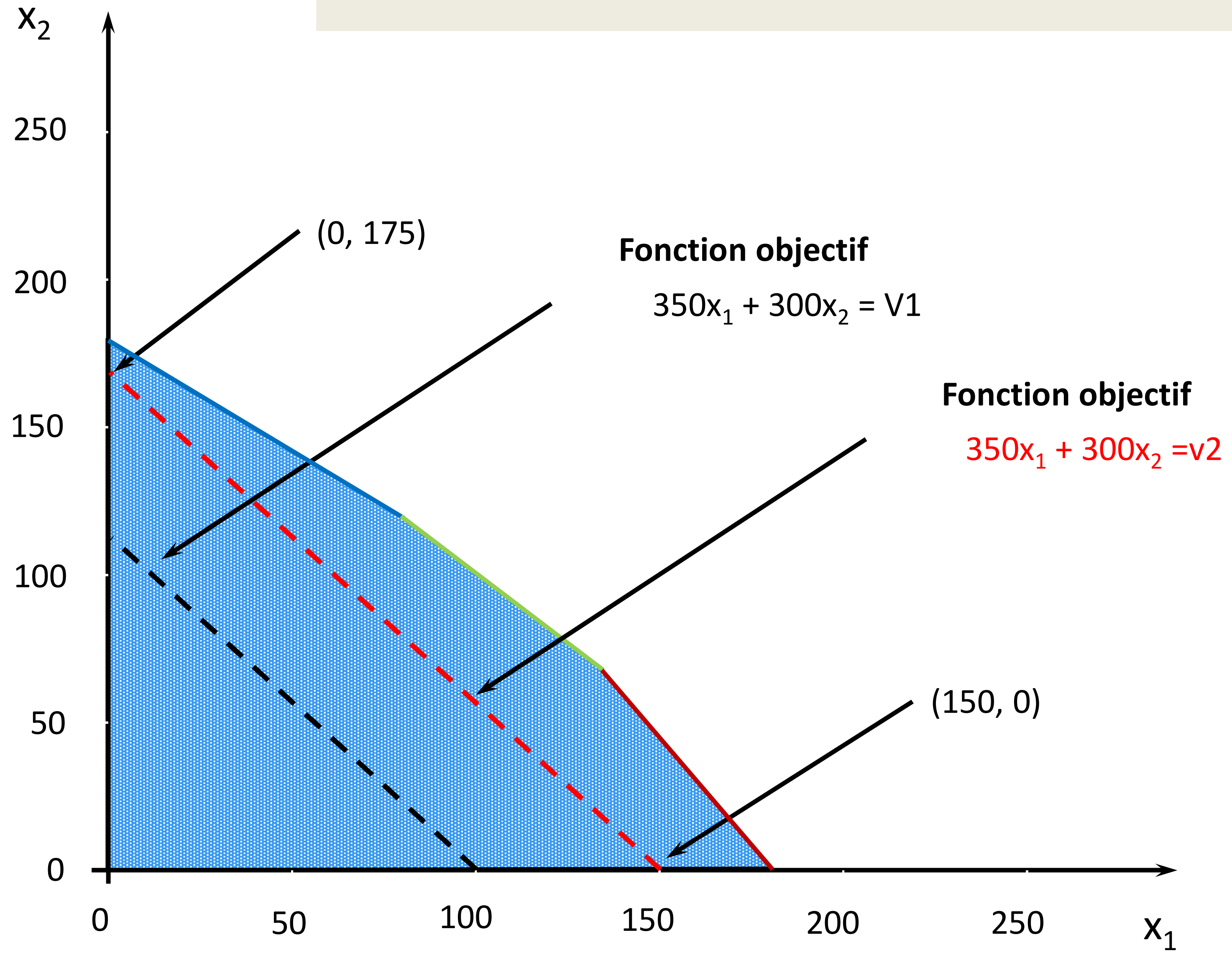
Tracé de la troisième contrainte



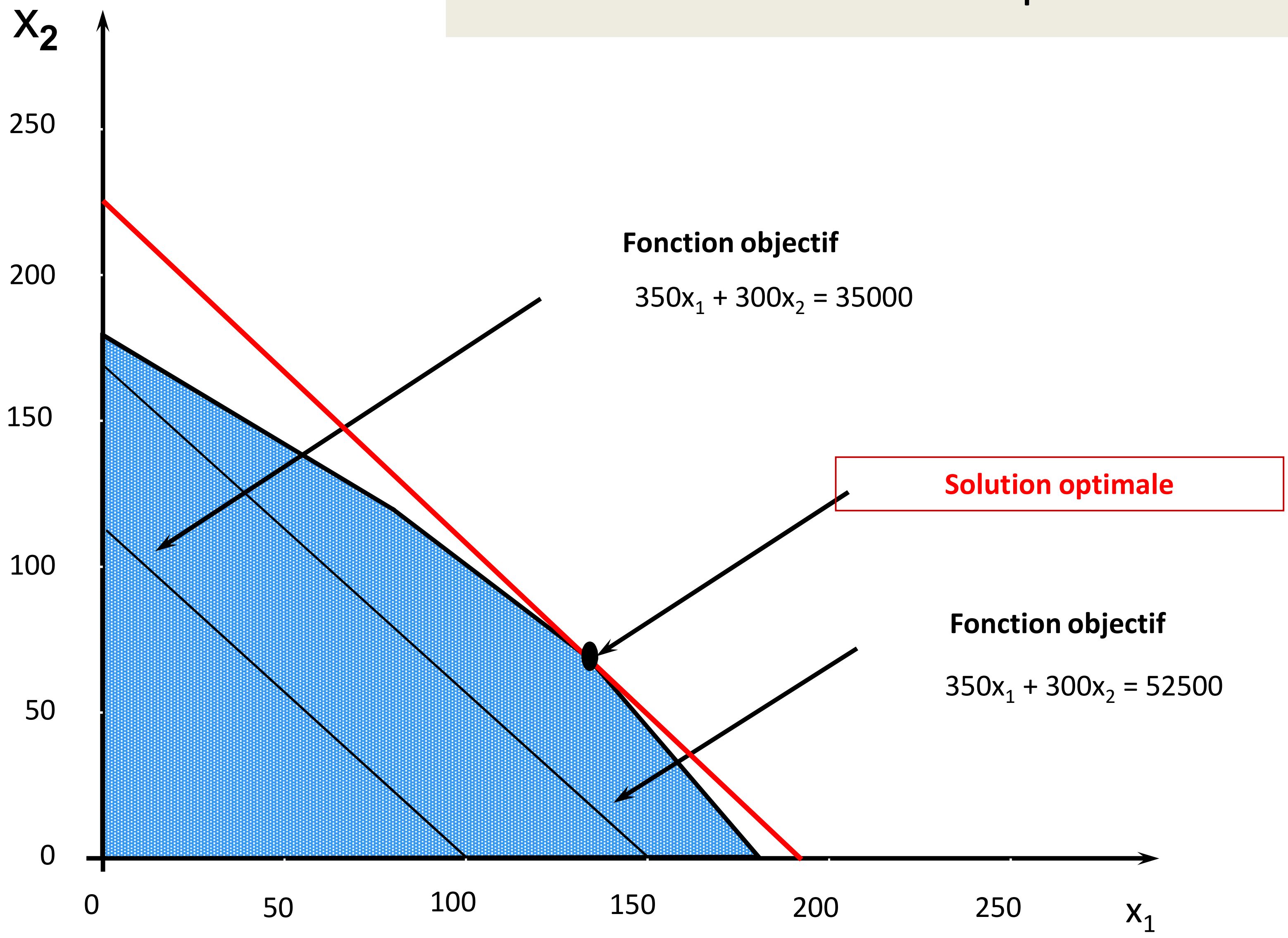
Tracé d'une droite de la fonction objectif



Deuxième tracé d’une droite de la fonction objectif



Tracé de la solution optimale



Calcul de la solution optimale

Comment déterminer la solution ?

La solution optimale est l'un des sommets du polygone (polyèdre) convexe qui délimite le domaine des solutions réalisables.
Un sommet correspond à l'intersection de 2 (ou plus) contraintes.

La solution maximise la fonction objective

Calcul de la solution optimale

Pour l'exemple :

La solution optimale se trouve à l'intersection des contraintes de pompes et de main d'œuvre.

Soit :

$$x_1 + x_2 = 200 \qquad (1)$$

$$9x_1 + 6x_2 = 1566 \qquad (2)$$

On résout le système :

$$x_2 = 200 - x_1 \qquad (3)$$

Calcul de la solution optimale (Suite)

Par substitution on obtient :

$$9x_1 + 6\,(200 - x_1) = 1566$$

d'où $x_1 = 122$

La solution optimale est :

$x_1 = 122$

$x_2 = 200 - x_1 = 78$

Profit total = (350 € * **122**) + (300 € * **78**) = **66 100** €

Situations spéciales : Remarque 1

- Plusieurs anomalies peuvent survenir:
  - Solutions optimales multiples
  - Contraintes redondantes
  - Problème non-contraint (“Unbounded Solutions”)
  - Non réalisable

Situations spéciales : Remarque 2

- ATTENTION !!! Certaines contraintes peuvent ne pas agir car elles sont au-delà de ce que d’autres imposent → contrainte redondante

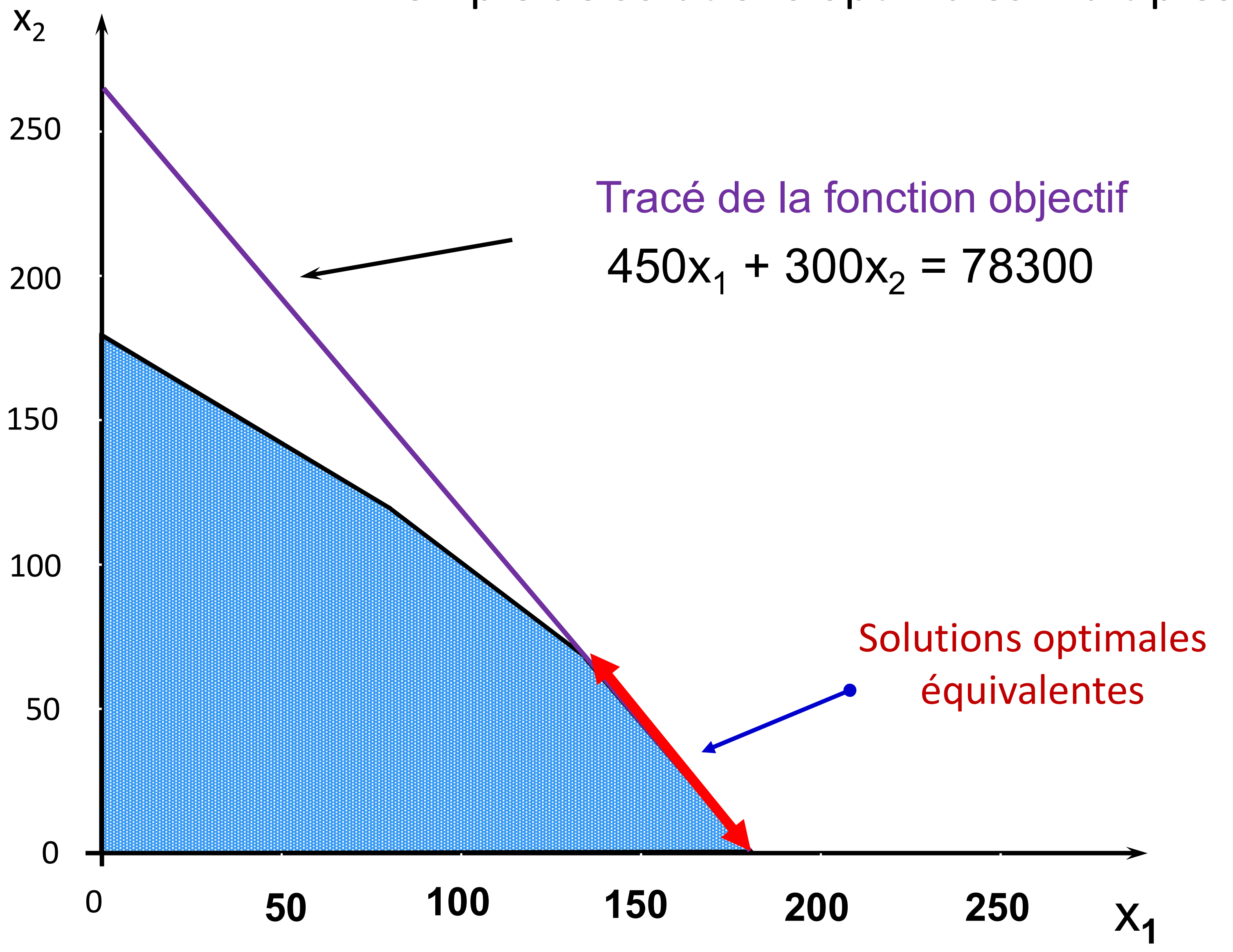
- On peut remplacer la recherche d’un maximum par la recherche d’un minimum, dans ce cas on transforme le pbme en 1 problème équivalent → voir chapitre : problème dual.

Remarques -3

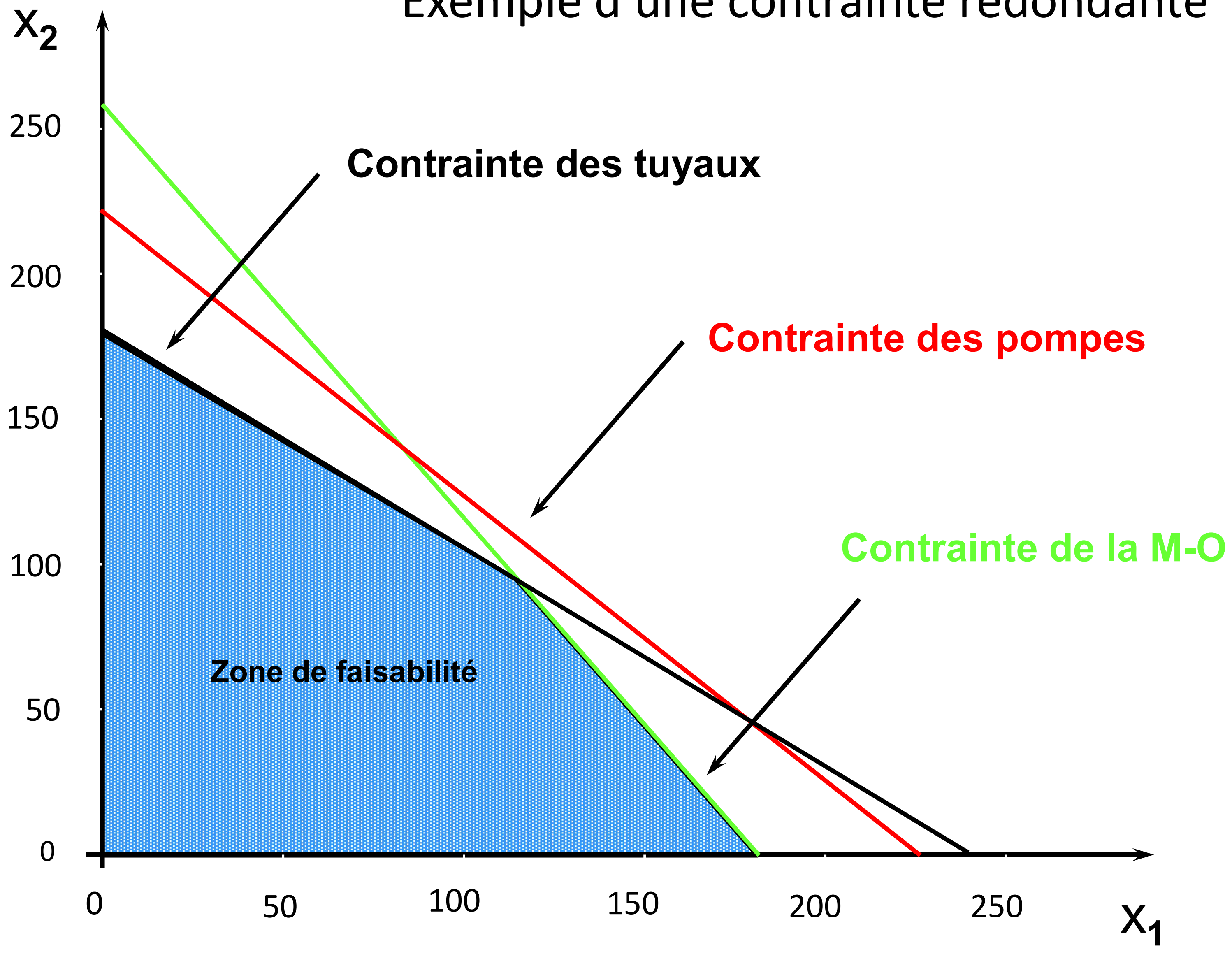
- Les $a_{i,j}$, b_i, c_j ne sont pas nécessairement positifs (voir suite du cours)

- Plusieurs situations peuvent se rencontrer
  - Il n'existe pas de x_j satisfaisant les inéquations (1)
  - Parmi les x_j satisfaisant les inéquations la somme peut être aussi grande que l'on veut (2)
  - Il existe plusieurs valeurs donnant l'optimum
  - Il existe une et une seule valeur donnant l'optimum

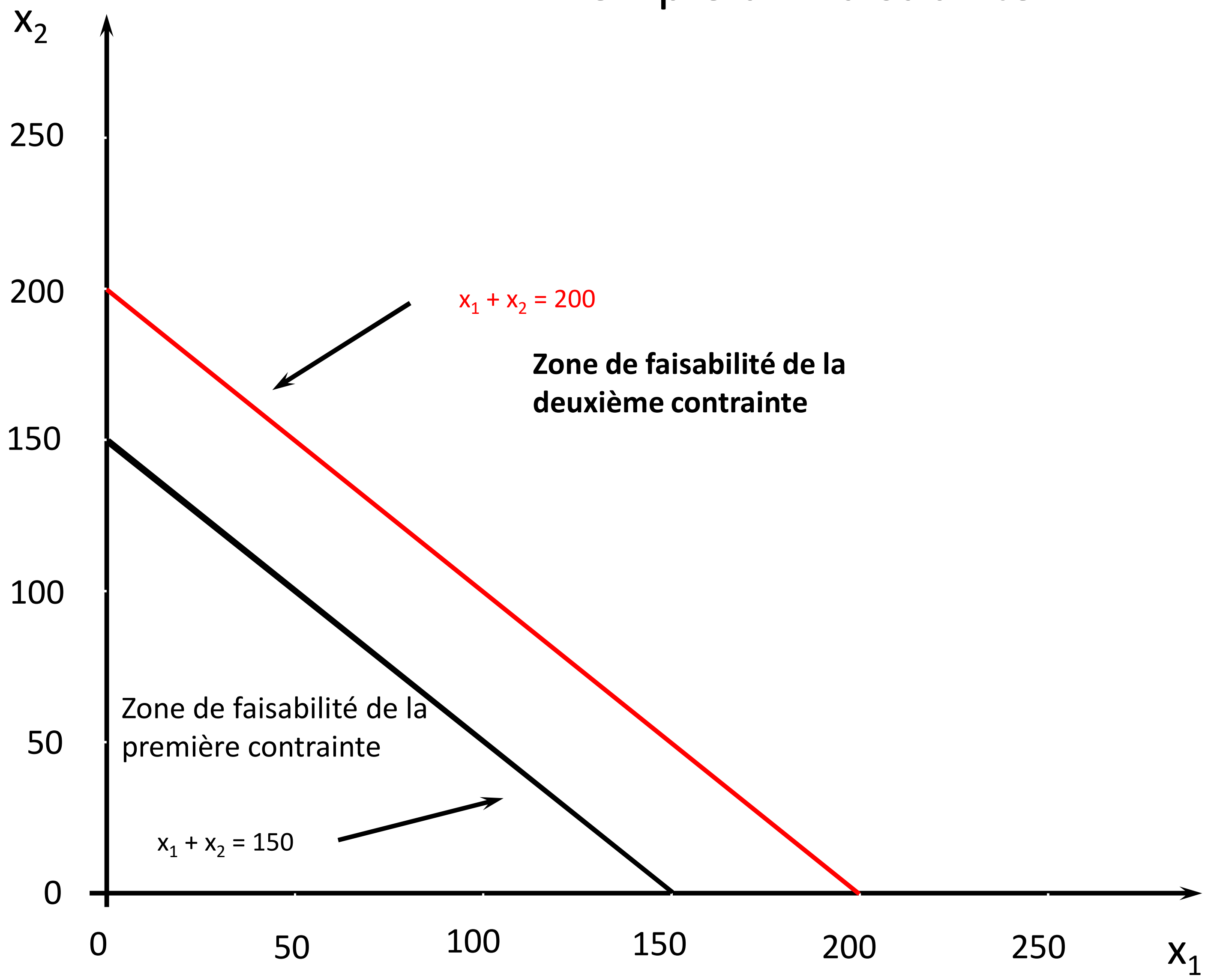
Exemple de solutions optimales multiples



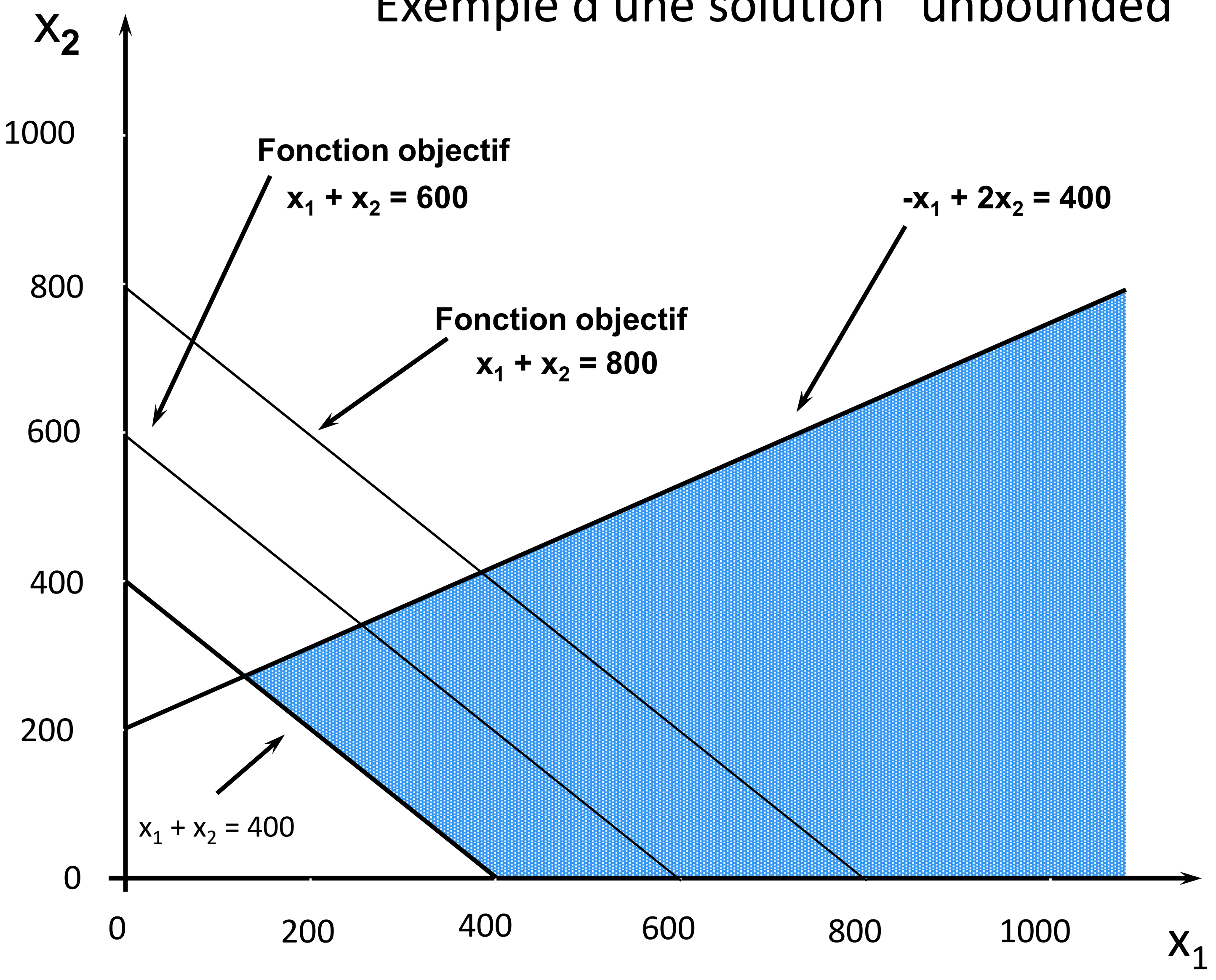
Exemple d'une contrainte redondante



Exemple d'infaisabilité



Exemple d'une solution "unbounded"



Remarques -4

- Une solution **réalisable**, c'est une instanciation de x qui vérifie les contraintes.

- Une solution **réalisable optimale** est une solution réalisable qui maximise Z (ou minimise Z).

- Mathématiquement l'ensemble des solutions réalisables optimales décrit une partie d'un hyperplan de R^n avec n la dimension de x.

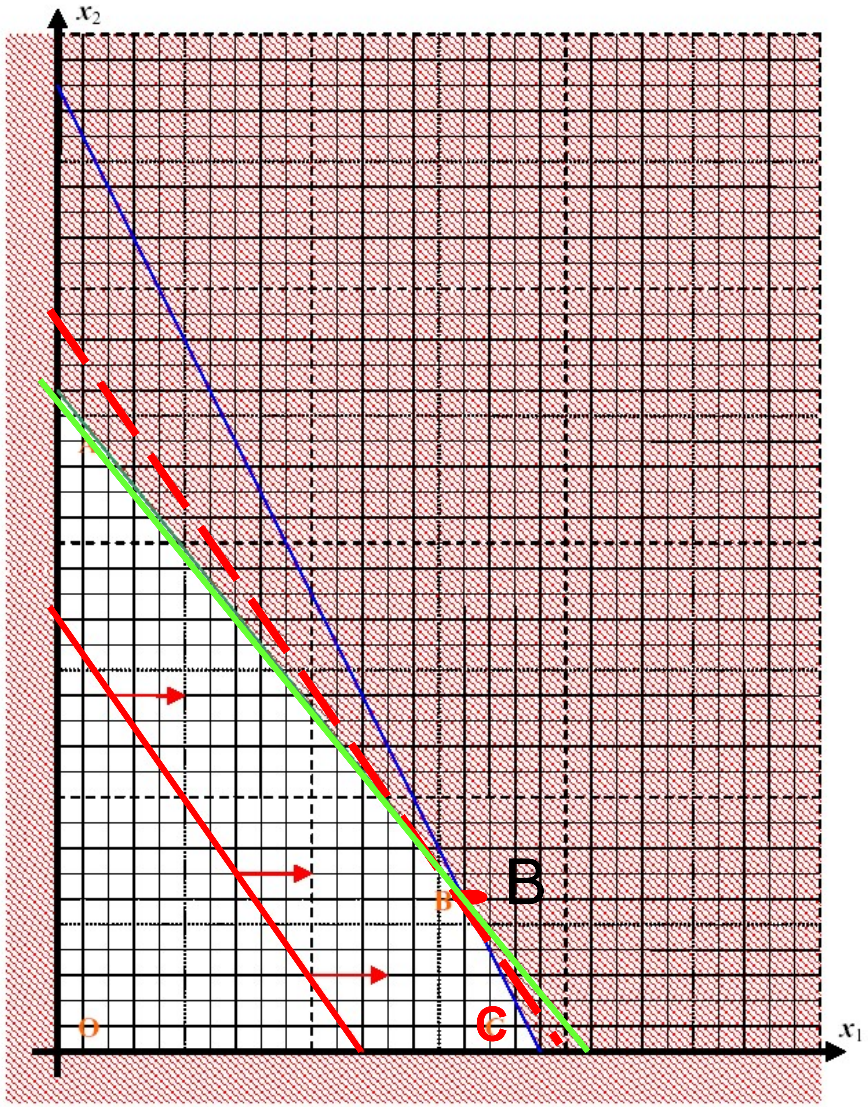
Résolution graphique de l'exemple 1

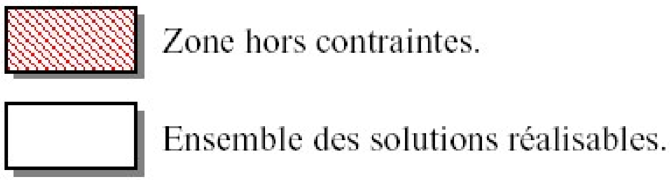
- On a 2 contraintes donc 2 droites :

  - En vert : $50\ x_1 + 40\ x_2 = 1040$
    $\Leftrightarrow 5\ x_1 + 4\ x_2 = 104$
    et on a les points (0 , 26) et (20.8 , 0)
  - En bleu : $2\ x_1 + x_2 = 38$
    et on a les points (0 , 38) et (19 , 0)

- La droite de maximalisation sera une parallèle à la droite en rouge : $420\ x_1 + 300\ x_2 = A$

  Trouver x_1 ,x_2 qui maximisent A (x_1 , x_2) est l'un des sommets du polygone





On teste les différentes valeurs point B de coordonnées (6 , 16) unique solution réalisable optimale.
On applique donc les coordonnées de B dans *Z pour*
On voit que le gain est maximal et on obtient :
420 * 16 +300 * 6 = 8520 € .

il faut donc produire :

16 tables et **6** chaises

Exercice

Exercice :

Un fleuriste dispose de 50 lys, 80 roses et 80 jonquilles.

Il doit réaliser des bouquets il a les possibilités suivantes :

1- Des bouquets qu'il vend 40 euros comprenant

8 lys, 10 roses et 20 jonquilles,

2- des bouquets qu'il vend 50 euros qui comprennent

5 lys, 20 roses et 10 jonquilles.

Comment le fleuriste doit il former les bouquets pour réaliser une recette maximale ? → voir solution en TD

Résolution algébrique -1

Rappel

Soit une matrice A de dimension (m, n) telle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ avec m} < \text{n}$$

Une base de *A est un ensemble de* ***m*** *colonnes de A formant une matrice carrée inversible*

C'est une sous matrice de A de taille

Rappel

Une matrice carrée C est inversible si :

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \;;\; \det(c) \neq 0$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} cofact(c_{11}) & \cdots & cofact(c_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cofact(c_{n1}) & \cdots & cofact(c_{nn}) \end{pmatrix}^{t}$$

Résolution algébrique -2

Base et Variables basiques

- Toute matrice B formé de m colonnes linéairement indépendantes de A est une base (ordonnée) du système
- Les colonnes de B sont dites basiques, les autres sont dites hors base
- Les variables associées aux colonnes de B sont dites variable basiques, les autres variable sont dites **hors base**
- La liste ordonnée des variables basique (ou de leurs indices) sera aussi appelée base.

Résolution algébrique -3

Transformation d'une inéquation:

On complète chaque équation par une variable d'écart $\boxed{x_n}$
d'écart :

$$\underbrace{a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n \leq b_1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n + x_{n+1} = b_1}$$

En appliquant ce principe aux m inéquations :

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n + x_{n+1} = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

Résolution algébrique -4

Ecriture matricielle

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & \cdots & \cdots & a_{1n}x_n & x_{n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & \cdots & \cdots & a_{mn}x_n & 0_1 & \cdots & 0 & x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

B

N

X = [x_B,x_N]

La solution particulière obtenue en fixant à zéro les variables hors base est appelée solution basique associée à la base B.

Résolution algébrique -5

Ecriture matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} & 0_1 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

on doit alors adapter C :

$$C = c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + \cdots + c x_n \underbrace{+0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \cdots + 0x_{n+m}}$$

Résolution algébrique - 6

On obtient les sous matrices ***B*** et ***N*** de ***A*** ainsi que x_B et x_N de $\boldsymbol{X}$ **:**

$$
\left(
\overbrace{\begin{matrix}
a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn}
\end{matrix}}^{B}
\;
\overbrace{\begin{matrix}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \vdots \\
0_1 & \cdots & 0 & 1
\end{matrix}}^{N}
\right)
\begin{pmatrix}
x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m}
\end{pmatrix}
$$

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$

on a donc :

$$Ax = (B, N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

Résolution algébrique – 7

Récapitulatif :

La matrice *A passe à une matrice de dimension* (m, n+m)
X *passe à une matrice de dimension (n+m, 1) et C à une dimension (1, n+m) (C est* complétée avec m « 0 »).

On a remplacé les inégalités par des égalités pour avoir un système d'équations qu'on peut exprimer par une formulation matricielle, **mais** on augmente le nombre de variables (variables d'écarts). On obtient un système lié.

une variable d'écart exprime le surplus pour la ressource exprimée par la contrainte.

Retour à l'exemple 1

Rappel de l'exo1

Un ébéniste fabrique des chaises et des tables.

Il peut consacrer au plus 1040 heures et 38 tronçons de bois.

On transforme les matrices pour faire disparaître les inégalités :

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 420 & 300 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = 420x_1 + 300x_2$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{La matrice A est de dim 2, les bases seront des matrices de dimension (2,2)}$$

x_3 : exprime le reste en main d'œuvre par rapport à la limite fixée

x_4 : exprime le reste en quantité de bois par rapport à la limite fixée

Comment faire ?

On transforme les différentes matrices pour faire disparaître les inégalités des contraintes :

$$\begin{pmatrix} 50 & 40 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1040 \\ 38 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 420 & 300 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice *A est de dimension 2 donc les bases seront des matrices de dimension (2, 2). Pour une base M de A, On utilisera les* formules suivantes :

Retour à l'exemple 1

$$\det M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \Leftrightarrow$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Transformation : système étendu :

$$Ax = (B, N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b$$

$$d'où \quad Bx_B = b - Nx_N$$

Suite

$x_B = B^{-1}\ Nx_N$

D'où : $Bx_B = b - Nx_N$ → on cherche les cas où $x_N = 0$

$$B = \begin{pmatrix} 50 & 40 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ \det B = -30 \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{30} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ; x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{30} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1040 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix}$$

C'est le point **B** du graphique

$$\boxed{x = (16 \quad 6 \quad 0 \quad 0)^t}$$

Suite

$$B_2 = \begin{pmatrix} 50 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \det B_2 = -2; B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -25 \end{pmatrix}$$

$$x_N = (0 \quad 0)^t; x_B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1040 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 90 \end{pmatrix}$$

C'est le point **C** du graphique

$$\boxed{x = (19 \quad 0 \quad 90 \quad 0)^{\,t}}$$

Retour à l'exemple 1

$$B_3 = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ \det B_3 = 50 \quad \Rightarrow B_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{50} & 0 \\ -\frac{1}{25} & 1 \end{pmatrix} \ ; \ x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_B = \begin{pmatrix} 20.8 \\ 3.6 \end{pmatrix}$$

C'est le point ***hors contraintes*** du graphique

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} 20.8 & 0 & 0 & 3.6 \end{pmatrix}^t}$$

suite

$$B_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -40 \end{pmatrix} \;;\; x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} 38 \\ -480 \end{pmatrix}$$

$$B_5^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{40} & 0 \\ \frac{1}{40} & 1 \end{pmatrix} \;;\; x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} 26 \\ 12 \end{pmatrix}$$

x * est le point ***hors contraintes*** du graphique ; x ** est le point ***A*** du graphique

$$x^* = (0 \quad 38 \quad -480 \quad 0)^t$$

$$x^{**} = (0 \quad 26 \quad 0 \quad 12)^t$$

suite

$$B_6^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_B = \begin{pmatrix} 1040 \\ 38 \end{pmatrix}$$

C' est le point ***O*** du graphique

$$x^* = (0 \quad 0 \quad 1040 \quad 38)^t$$

Le report des différentes valeurs dans Z montrent que B est bien la valeur qui optimise Z=Cx

Solution $x = (16 \quad 6 \quad 0 \quad 0)^t$

Propriétés

- L'ensemble des sommets du polygone convexe formé par l'ensemble des solutions réalisables correspondent à l'ensemble de base réalisable

- La maximisation (ou minimisation) de Z est obtenue en un des sommets du polygone convexe formé par l'ensemble des solutions réalisables, c'est donc une solution de base réalisable.

MÉTHODE du SIMPLEXE

- INTRODUCTION
  - développée initialement par George Dantzig en 1947 pour répondre à des problèmes de logistiques de la chaîne d'approvisionnement de l’armée américaine.
  - seule méthode exacte pour résoudre des problèmes linéaires de grande taille (calcul systématique)

  - Principe : méthode itérative algébrique où l’on circule séquentiellement sur les sommets en empruntant les arêtes jusqu’à l’obtention de la solution optimale

QUELQUES DÉFINITIONS

- Systèmes d'équations équivalents
  - Systèmes qui possèdent le même ensemble de solutions
- Variable de base
  - Variable qui a un coefficient unitaire positif dans une des équations du système et des coefficients nuls partout ailleurs
- Opérations pivot
  - Opération de Gauss pour transformer un système d'équations équivalent dans lequel une variable devient de base
- Système canonique
  - Système d'équations où il y a **une** variable de base par équation
- Solution de base
  - Système d'équations où les variables hors base sont fixées à zéro résolu pour les variables de base

Introduction à la méthode du simplexe

Retour sur l'exemple de l' ébéniste

$$Max\ \ Z = 420x_1 + 300x_2 + 0x_3 + 0\ x_4$$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} 50x_1 + 40x_2 + x_3 + 0\ x_4 = 1040 \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 38 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Ecriture standard avec l'ajout des variables d'écart

Méthode du simplexe

$$\begin{cases} x_3 = 1040 - 50x_1 - 40x_2 \\ x_4 = 38 - 2x_1 - x_2 \\ Z = 420x_1 + 300x_2 \end{cases}$$

Idée

$(0, 0, \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_4})$ solution réalisable $\Rightarrow$ *au point « O » et on a Z = 0*

On change de base

On va exprimer les variables de la ***base en fct*** *des variable* ***hors base :***

$\boldsymbol{(x_3, x_4) = fct(x_1, x_2)}$

Méthode du simplexe

Idée

- Augmenter une variable ayant un coefficient positif dans Z augmenter cette variable tant que les autres ne deviennent pas négatives

$$\begin{cases} x_3 = 1040 - 50x_1 - 40x_2 \\ x_4 = 38 - 2x_1 - x_2 \\ Z = 420x_1 + 300x_2 \end{cases}$$

Méthode du simplexe

1. On cherche la variable x_i dont le coef maximise Z (en supposant les autres nulles ici : x_1
2. cette variable x_1 passe dans la base
3. on fait sortir une autre variable de la base

➔ variables à gauche des signe « = » variables «en base»
les autres = variables «hors base»

!! Pour garder l'admissibilité de la solution (solution réalisable), l'augmentation de x_i doit être stoppée dès qu'une contrainte n'est plus vérifiée.

On fait sortir de la base la variable dont l'expression minimise x_i , quand celles qui apparaissent sont nulles (respect des contraintes) .

Méthode du simplexe

On cherche la valeur limite (admissible) de x_1 avec $x_2 = 0$
Ces valeurs sont déduites des contraintes du problèmes

$$\begin{cases} x_3 = 1040 - 50x_1 \geq 0 \\ x_4 = 38 - 2x_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 20.8 \\ x_1 \leq 19 \end{cases} \Rightarrow x_1 \leq 19$$

On voit que c'est $\boldsymbol{x}_4$ qui doit sortir de la base et x_1 rentre en base

⇒ on travaille avec la contrainte $2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 38$

d'où $x_1 = 19 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4$

$$\begin{cases} x_3 = 1040 - 50\left(19 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4\right) - 40x_2 \\ x_1 = 19 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ Z = 420\left(19 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4\right) + 300x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 90 - 15x_2 + 25x_4 \\ x_1 = 19 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ Z = 7980 + 90x_2 - 210x_4 \end{cases}$$

Méthode du simplexe

On recommence la même manipulation avec ce nouveau système

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \leq 38 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

On fait sortir x_3 de la base. On recalcule le nouveau système

$$\begin{cases} x_2 = 6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_1 = 19 - \frac{1}{2}\left(6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{4}x_4\right) - \frac{1}{2}x_4 \\ Z = 7980 + 90\left(6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{3}x_4\right) - 210x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_1 = 16 + \frac{1}{30}x_3 - \frac{4}{3}x_4 \\ Z = 8520 - 6x_3 - 60\,x_4 \end{cases}$$

Méthode du simplexe

$$\begin{cases} x_2 = 6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_1 = 19 - \frac{1}{2}\left(6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{4}x_4\right) - \frac{1}{2}x_4 \\ Z = 7980 + 90\left(6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{3}x_4\right) - 210x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 6 - \dfrac{1}{15}x_3 + \dfrac{5}{3}x_4 \\ x_1 = 16 + \dfrac{1}{30}x_3 - \dfrac{4}{3}x_4 \\ Z = 8520 - 6x_3 - 60\,x_4 \end{cases}$$

On voit qu'il n'y a plus de variable à coefficient positif dans Z

Il n'y a plus de variable à calculer dans Z

Max Z et la valeur de x_1 , x_2 sont obtenues en mettent x_3 , x_4 à 0 dans le dernier système. (Z=8520, x_1 =16, x_2 =6)

Algorithme du simplexe

1. **Choisir** une solution initiale réalisable $x^{(0)}$
2. **Exprimer** les variables en base (≠ 0 à l'initialisation) en fonction des variables hors base (= 0 à l'initialisation)
3. **Si tous** les coefficients dans Z sont négatifs alors (on est à l'optimum) les variables en base donnent la solution optimale → Arrêt
4. **Sinon // il existe** des coefficients positifs dans Z,

   Soit x_j la variable ayant le plus fort coefficient **positif (**dans Z)
5. **calculer** la valeur maximale de x_j sous la contrainte : variables en base restent positives ou nulles. Soit x_i une des variables en base qui correspond à la contrainte retenue
6. **Faire entrer** la variable x_i en base et passer x_j dans l'ensemble des variables hors base (faire sortir x_j de la base)
7. **Exprimer** les variables en base en fonction des variables hors base
8. **Retourner** en **3**

Rappel

On obtient les sous matrices ***B*** et ***N*** de ***A*** ainsi que $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$ et $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ de $\boldsymbol{X}$ **:**

$$\left(\begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{matrix}}^{B} & \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0_1 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}}^{N} \end{matrix}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}}\right\} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{matrix}}\right\} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{matrix}$$

on a donc : $Ax = (B, N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$

Simplexe : notation en tableau

On part du système avec les variables d'écart

$$Ax_B + Nx_N = b$$
$$Z = \underbrace{C_B x_B}_{vect.\ base} + \underbrace{C_N x_N}_{hors\ base}$$

ou bien: $Ax = (B,N)\binom{x_B}{x_N}$

Notation en tableau

D'où

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$B^{-1}b = \text{cste}$$

$B^{-1}Nx_N$ comb. de variables hors base

$$Z = Cx = C_B x_B + C_N x_N$$

$$= C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)x_N$$

Notation en tableau : exemple

On part du système avec les variables d'écart

$$Z = \underbrace{C_B b}_{Z_B} + (\underbrace{C_N - N}_{\Delta_N})x_N + 0x_B$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	50	40	1	0	1040
x_4	2	1	0	1	38
	420	300	0	0	0

$$\underbrace{}_{\Delta_N x_N} \quad \underbrace{}_{0x_B} \quad \underbrace{}_{-Z_B}$$

Notation en tableau : exemple

Retour à l'exemple : initialisation $x_1 = 0$; $x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 1040$; $x_4 = 38$

	x_1	x_2	x_3	x_4	B	
x_3	**50**	**40**	***1***	**0**	1040	→1040/50=20.8
x_4	**2**	**1**	**0**	**1**	38	→38/2=19
Z	**420**	**300**	**0**	**0**	**0**	

Le coefficient maximal (non nul) de la matrice C (s'il existe) désigne la variable x_i qui passe en base → x_1

On divise la colonne de B par la valeur du coefficient correspondant de la colonne x_i → Coef de x_1

→ la valeur minimale obtenue donne la variable qui passe en base → x_4

Notation en tableau : exemple

On fait rentrer x_1 en base et on normalise la ligne du pivot en mettant le pivot à 1 et on annule les autres coefficient de la même colonne c.a.d
Combinaison linéaire entre la ligne courante et la ligne du pivot pour annuler les coefficients correspondant sur la colonne du pivot (élimination de gauss) sauf l'élément qui rentre en base

(1')=(1)-50(2')
(2')=.5(2)
(3')=(3)-420(2')

	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_3	**0**	**15**	**1**	**-25**	90	→ 90/15 = 6
x_1	**1**	**1/2**	**0**	**1/2**	19	→ 19/(1/2) = 28
Z	**0**	**90**	**0**	**-210**	**-7980**	Z - 420x_1

Notation en tableau : exemple

On vient de calculer les éléments du premier tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	**0**	**15**	***1***	**-25**	90
x_1	**1**	**1/2**	**0**	**1/2**	19
Z	**0**	**90**	**0**	**-210**	**-7980**

On applique de nouveau la même méthode puisque dans la ligne « Z » du tableau (bleu) il reste au moins un coeff. positif

Notation en tableau : exemple

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	**0**	**1**	**1/(15)**	**-5/3**	6
x_1	**1**	**0**	**-1/30**	**4/3**	16
Z	**0**	**0**	**-6**	**-60**	**- 8520**

C'est le dernier tableau car il n'y a plus de nombres positifs sur la dernière ligne

On a la solution qui maximise Z : x_1= 16 ; x_2= 6; x_3 =0 ; x_4 =0
Z = 8520

Algorithme général

	x_1	x_2	…	x_n	
x_{n-a}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
x_{n-a-1}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
x_n	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
	c_1	c_2	…	c_n	0

	x_1	x_2	…	x_n	
x_{n-a}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
x_{n-a-1}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
x_n	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
	c_1	c_2	…	c_n	0

On suppose ici que c_2 est maximal donc la colonne 2 est celle du pivot

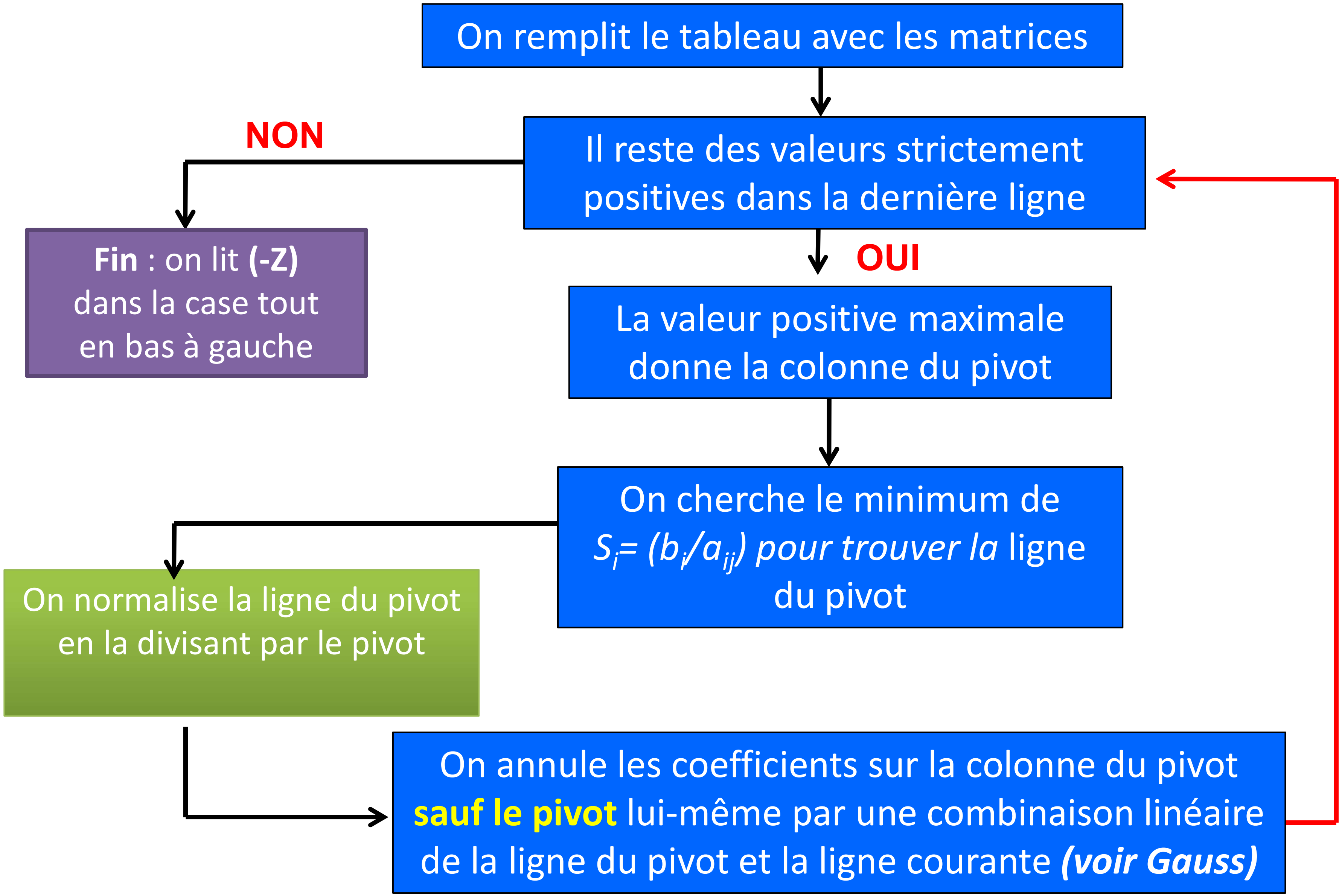
Algorithme général

	x_1	x_2	…	x_n	
x_{n-a}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
x_{n-a-1}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
x_n	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
	c_1	c_2	…	c_n	0

On suppose ici que b_2 est minimal donc la ligne 2 est celle du pivot

Combinaison		x_1	x_2	…	x_n	
$1'=1-2'.a_{11}$	x_{n-a}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
$2'=2/a_{22}$	x_{n-a-1}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
$m'=m-2'.a_{m2}$	x_n	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
$L'=L-2'.C_2$		c_1	c_2	…	c_n	0

Algorithme général



Récapitulatif: choix des variables entrantes

choisir une variable dont le coeff dans la fonction objectif est > 0

→ Règle ambigüe

plusieurs variables peuvent être candidates

But : choisir la variable pour minimiser le nombre d'itérations dans l'algorithme

Règle du plus grand accroissement de z

Choisir de faire entrer la variable qui fait le plus augmenter la fonction objectif

La règle du plus grand coefficient est plus souvent utilisée que la règle du plus grand accroissement car elle est calculable plus facilement

Lorsque plusieurs variables sont candidates à entrer en base (selon un certain critères) choisir celle qui a le plus petit indice dans le tableau. Faire de même avec les variables sortant de la base.

Théorème — Bland (1977)
si on applique cette dernière règle, l'algorithme du simplexe ne peut pas cycler.

Problème de la base initiale

Rappel de la forme standard : $\begin{cases} \max Z & = & CX \\ AX & \leq & b \\ X_i & \geq & 0 \end{cases}$

Dans le cas où b ≥ 0, on a une solution de base réalisable triviale X= 0 .

Mais pour un PL sous forme standard, il n'y a pas toujours de solution de base réalisable évidente, si b < 0

Choix de la base initiale

1. Cas favorable

Le point **O (0,…,0)** est l'un des sommet du polygone (c'est solution réalisable) on applique directement le simplexe, en partant de ce point.

2. Cas où une solution est connue

Par exemple on dispose de l'un des sommets du polygone.
solution de base réalisable : on est sur le bord du polygone des solutions.

Il faut que ce soit une solution de base réalisable sinon on ne serait pas sur le bord du polygone de solutions

$$\text{On a le système : } \begin{cases} 50x_1 + 40x_2 + x_3 = 1040 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 38 \\ x_i \geq 0 \\ \max Z = 420x_1 + 300x_2 \end{cases}$$

Par exemple : $(19, 0, 90, 0)^T$ (voir cours précédent)

Choix de la base initiale

1. Cas de la base initiale triviale

Le point **O (0,…,0)** est l'un des sommet du polygone (c'est solution réalisable) on applique directement le simplexe, en partant de ce point.

2. Cas où une solution est connue

Par exemple on dispose de l'un des sommets du polygone.
solution de base réalisable : on est sur le bord du polygone des solutions
Par exemple : $(19, 0, 90, 0)^T$ (voir exercice d'avant : les solutions trouvées)

$$\text{On a le système : } \begin{cases} 50x_1 + 40x_2 + x_3 = 1040 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 38 \\ x_i \geq 0 \\ \max Z = 420x_1 + 300x_2 \end{cases}$$

$$\text{d'où : } B = \begin{pmatrix} 50 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -25 \end{pmatrix}$$

Choix de la base initiale (suite)

D′où : $Ax = b$ alors $Bx_B + Nx_N = b$
$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$ en remplaçant on obtient :

$$Z = \underbrace{C_B B^{-1}}_{Z_B} b + \underbrace{(C_N - C_B B^{-1} N)}_{\Delta_N} x_N =$$

$$(420 \quad 0)\begin{pmatrix}19\\90\end{pmatrix} + \left[(300 \quad 0) - (420 \quad 0)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 15 & -25\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}$$

on obtient : $\mathrm{Z} = 7980 + 90x_2 - 210x_4$

Problème de la base initiale

$$Z = 7980 + 90x_2 - 210x_4$$

On vient d'obtenir une solution réalisable initiale, on peut lancer le processus du simplexe.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	1/2	0	1/2	19
x_3	0	15	1	-25	90
z	0	90	0	- 210	$-Z_B$ = -7980

Le processus est lancé à partir de cette solution intiale.

3. Cas général

La solution initiale n’est pas facile à trouver
La valeur correspondant à $(0,0,\ldots,x_{n+1}\ x_{n+m})$ n’est pas toujours une solution réalisable (elle est hors contraintes – cas général)

Rappel de l’algorithme de simplexe

1. Mettre le PL sous la forme standard.
2. Trouver une solution initiale de base réalisable (SBR initiale).
3. Ecrire le PL sous la forme canonique relative à la SBR initiale.

4. Itérations :
   4.1 Si le critère d'arrêt est satisfait, donner le résultat final (solution optimale) ; sinon aller à l'étape 4-2.
   4.2 Déterminer la variable entrante (ou la colonne pivot) selon le 1er critère de DANTZIG
   4.3. Déterminer la variable sortante (ou la ligne pivot) selon le 2ème critère de DANTZIG
   4.4. Calculer le nouveau tableau en effectuant une opération de pivot. Retour à 4-1.

Méthode de simplexe à deux phases

Rappel : la méthode du simplexe pour un Problème Linéaire Sous Contraintes

On part de la forme canonique $\Rightarrow$ suppose qu'on peut facilement identifier une *Solution Basique Réalisable (SBR)* initiale : en générale la solution triviale (0, … ,0)

! Parfois, ceci n'est pas évident, par exemple

Méthode de simplexe à deux phases

Rappel : la méthode du simplexe pour un Problème Linéaire Sous Contraintes

On part de la forme canonique $\Rightarrow$ suppose qu'on peut facilement identifier une *Solution Basique Réalisable (SBR)* initiale : en générale la solution triviale (0, … ,0)

! Parfois, ceci n'est pas évident, par exemple

$$(P) : \text{Max } Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{SC:} \quad \left| \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 \geq 15 \\ x_1 + x_2 = 10 \\ 2x_1 - x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

En mettant ce PL sous la forme standard, avec ajout des variables d'écart on obtient :

$$(P) : \text{Max } Z = 4x_1 + 3x_2 + 0\, e_1 + 0\, e_2$$

$$\text{SC:} \left| \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - e_1 = 15 \\ x_1 + x_2 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + e_2 = 20 \\ x_1, x_2, e_1, e_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Dans ce système la valeur triviale $(0,0, e_1, e_2)$ n'est pas une solution réalisable car elle ne vérifie pas la 1ère contrainte $(2_1 - x_2 - e_1 = 15)$ ni la 2eme contrainte $(x_1 + x_2 = 10)$

Pour chercher une solution initiale, on introduit des variables dites <u>artificielles</u> à chaque contrainte '≥' et à chaque contrainte '=', on obtient alors (P') :

$$(P') : \text{Max } Z = 4x_1 + 3x_2 + 0\,e_1 + 0\,e_2 + s_1 + s_2$$

$$\text{SC:} \left| \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - e_1 + s_1 = 15 \\ x_1 + x_2 + s_2 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + e_2 = 20 \\ \\ x_1, x_2, e_1, e_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Ainsi on passe du problème (P) au problème (P’)

Une SBR de (P’) est donnée par une variable basique

$$VB = \{s_1 , s_2 , e_2 \}$$

Pour ne pas changer la nature du problème, les variables artificielles non seulement doivent avoir un effet nul dans la fonction objectif mais doivent également être nulles dans une SBR de (P).

! Lorsqu’une variable artificielle est non nulle, ceci indique que la solution est non réalisable dans (P).

Donc le but va être d’annuler les variables artificielles dans (P’).

$$\text{Min } Z' = s_1 + s_2$$

$$\text{SC: } \left|\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - e_1 + s_1 = 15 \\ x_1 + x_2 + s_2 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + e_2 = 20 \\ \\ x_1, x_2, e_1, e_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

2 cas de figure :

- ***Z'>0* le PL n'a pas de solution car au moins une contrainte n'est pas vérifiée.**

- ***Z'*=0 la solution trouvée est un des sommets du polygone convexe du PL initial.

À partir de là, il y a 2 méthodes :

- La méthode des 2 phases.
- La méthode du « grand M ».

Pour la méthode des 2 phases

$(\text{Min } Z' = s_1 + s_2) \Leftrightarrow (\text{Max } Z^* = - s_1 - s_2)$

SC:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - e_1 + s_1 = 15 \\ x_1 + x_2 + s_2 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + e_2 = 20 \\ \\ x_1, x_2, e_1, e_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

→ <u>Phase I</u> : Résoudre P_I par la méthode de Simplexe

$$(\text{Max } Z^* = -s_1 - s_2) = -(25 - 3x_1 + e_1) = -25 + 3x_1 - e_1$$

SC:	$2x_1 - x_2 - e_1 + s_1 = 15$ $x_1 + x_2 + s_2 = 10$ $2x_1 - x_2 + e_2 = 20$ $x_1, x_2, e_1, e_2, s_1, s_2 \geq 0$

On exprime Z* en fonction des variable : $Z^* = -25 + 3x_1 - e_1$

# 1	x_1	x_2	e_1	e_2	s_1	s_2	
s_1	2	-1	-1	0	1	0	15
s_2	1	1	0	0	0	1	10
e_2	2	-1	0	1	0	0	20
Z*	3	0	-1	0	0	0	+25

# 2	x_1	x_2	e_1	e_2	s_1	s_2	
x_1	1	-1/2	-1/2	0	1 /2	0	15/2
s_2	0	3/2	1/2	0	-1/2	1	5/2
e_2	0	0	1	1	-1	0	5
	0	3/2	1/2	0	-3/2	0	5/2

simplexe
Méthode des 2 phases

# 3	x_1	x_2	e_1	e_2	s_1	s_2	B
x_1	1	0	-1/3	0	1/3	1/3	25/3
x_2	0	1	1/3	0	-1/3	2/3	5/3
e_2	0	0	1	1	-1	0	5
Z	0	0	0	0	-1	-1	0

- Tableau optimal de la phase I (cas 2) : VB = $\{x_1, x_2, e_2\}$

- ***Rq***: On peut éliminer du tableau la colonne d'une variable artificielle dès que celle-ci sort de la base.

Phase II : on part de la solution qu'on vient de trouver

On réécrit ***Z*** en fonction des variables en base

## 1	x_1	x_2	e_1	e_2	
x_1	1	0	-1/3	0	25/3
x_2	0	1	1/3	0	5/3
e_2	0	0	1	1	5
Z (initial voir les données)	4	3	0	0	
Z (exprimé en fonction de e_1)	0	0	1/3	0	-115/3

## 2	x_1	x_2	e_1	e_2	
x_1	1	0	0	1/3	10
x_2	0	1	0	-1/3	0
e_1	0	0	1	1	5
	0	0	0	-1/3	-40

La solution optimale est $Z = 40$

$X1 = 10$

$X2 = 0$

Résoudre le problème suivant à l'aide de la méthode des 2 phases.

$$\max_{x_1,x_2} z = 2x_1 - x_2 \qquad s.c.$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \leq -19 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 32 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Transformation : ajout des variables d'écart ce qui nous donne le système suivant :

$$\max z = 2x_1 - x_2 \qquad s.c.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - e_1 = 19 \\ 3x_1 + 4x_2 + e_2 = 32 \end{cases}$$

On exprime le système sous forme standard complété des variables artificielles
le nouveau problème est donc :

$$\max z = 2x_1 - x_2 + s_1 \qquad \text{s.c.}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - e_1 + s_1 = 19 \\ 3x_1 + 4x_2 + e_2 = 32 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, s_1 \geq 0 \end{cases}$$

Dont une base valide est cette fois (s_1, e_2).

But : trouver une solution réalisable au problème initial

On résout le problème :

$$\min z' = s_1 \qquad s.c.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - e_1 + s_1 = 19 \\ 3x_1 + 4x_2 + e_2 = 32 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, s_1 \geq 0 \end{cases}$$

Dans la méthode à deux phases, on remplace ce problème par la maximisation (-z' =z '')

$$\max z'' = -s_1 \qquad s.c.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - e_1 + s_1 = 19 & (1) \\ 3x_1 + 4x_2 + e_2 = 32 & (2) \\ x_1, x_2, e_1, e_2, s_1 \geq 0 \end{cases}$$

On travaille avec la (1) ; la contrainte 2 ne contient pas de variables artificielles

$$2x_1 + 3x_2 - e_1 + s_1 = 19 \Leftrightarrow -s_1 = 2x_1 + 3x_2 - e_1 - 19$$

On obtient :

$$\max z'' = 2x_1 + 3x_2 - e_1 - 19 \qquad s.c.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - e_1 + s_1 = 19 \\ 3x_1 + 4x_2 + e_2 = 32 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, s_1 \geq 0 \end{cases}$$

On fait appel à la méthode du simplexe classique.

D'où la 1ere phase du simplexe

$$z'' = 2x_1 + 3x_2 - e_1 - 19$$

$$\begin{cases} s_1 = 19 - 2x_1 - 3x_2 + e_1 \\ e_2 = 32 - 3x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

x_2 entre en base (plus grand coefficient) et sort de la base

On exprime x_2 en fonction des nouvelles variables hors base

$$x_2 = \frac{19}{3} - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{3}s_1$$

$$z'' = -s_1$$

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{19}{3} - \dfrac{2}{3}x_1 + \dfrac{1}{3}e_1 - \dfrac{1}{3}s_1 \\ e_2 = \dfrac{20}{3} - \dfrac{1}{3}x_1 - \dfrac{4}{3}e_1 + \dfrac{4}{3}s_1 \end{cases}$$

Ce qui termine l'optimisation avec la solution $\left(0, \frac{19}{3}, 0, \frac{20}{3}, 0\right)$ où on a bien $s_1 = 0$.

On revient au problème initial, mais avec $s_1 = 0$

On a $z = 2x_1 - x_2 = -\frac{19}{3} + \frac{8}{3}x_1 - \frac{1}{3}e_1$

$$z = -\frac{19}{3} + \frac{8}{3}x_1 - \frac{1}{3}e_1$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{19}{3} - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}e_1 \\ e_2 = \frac{20}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}e_1 \end{cases}$$

x_1 entre dans la base (plus grand coefficient), et x_2 sort de la base

$$x_1 = \frac{19}{2} - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}e_1$$

$$z = 19 - 4x_2 + e_1$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{19}{2} - \dfrac{3}{2}x_2 + \dfrac{1}{2}e_1 \\ e_2 = \dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{3}{2}e_1 \end{cases}$$

e_1 entre en base (plus grand coefficient), et e_2 en sort

$$e_1 = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}e_2$$

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{3}x_2 - \dfrac{2}{3}e_2 \\ x_1 = \dfrac{32}{3} - \dfrac{4}{3}x_2 - \dfrac{1}{3}e_2 \\ z = \dfrac{64}{3} - \dfrac{11}{3}x_2 - \dfrac{2}{3}e_2 \end{cases}$$

Ce qui termine l'optimisation avec la solution $\left(\frac{32}{3}, 0, \frac{7}{3}, 0\right)$,

Avec : $x_1 = \frac{32}{3}, x_2 = 0$ *pour un coût maximal* $z = \frac{64}{3}$.

Dualité

Soit le problème linéaire :

(PL) $\begin{cases} AX & \leq & B \\ x_i & \geq & 0 \\ Max\ Z & = & CX \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ (P'L) $\begin{cases} A^T Y & \geq & C \\ y_i & \geq & 0 \\ Min\ Z' & = & B^T Y \end{cases}$

(PL) est appelé problème primal $\Leftrightarrow$ (P'L) problème Dual du problème (PL)

Le dual du $\begin{cases} AX & \geq & B \\ y_i & \geq & 0 \\ Min\ Z & = & CX \end{cases}$ est le (PL) $\begin{cases} A^T Y & \leq & C \\ x_i & \geq & 0 \\ Max\ Z & = & B^T X \end{cases}$

Tout problème linéaire (primal) possède un problème linéaire **dual**

Le dual du dual de (PL) est (PL) lui même

Dualité

Le PL dual du (PL dual) est le PL primal.
Le nombre de variables du dual est égale au nombre de conditions du primal

Cela peut donc être plus facile de résoudre le dual (peut-être moins de variables) que le primal selon le nombre d'équations.

Retour à l'exemple :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 50 & 40 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1040 \\ 38 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 420 & 300 \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

Dualité

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 50 & 40 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} & \geq \begin{pmatrix} 420 \\ 300 \end{pmatrix} \\ y_i & \geq 0 \\ Min\ Z' & = 1040\ y_1 + 38\ y_2 \end{cases}$$

Pour la solution on lit les valeurs directement dans le tableau de résolution du problème primal résolu dans le chapitre précédent

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	1	1/15	-5/3	6
x_1	1	0	-1/30	4/3	16
	0	0	$\underbrace{-6}_{-y_1}$	$\underbrace{-60}_{-y_2}$	$\underbrace{-8520}_{-Z_{min}}$

$y_1 = 6$
$y_2 = 60$
$Z_{min} = 8520$

Programmation linéaire en nombres entiers

1. Définition : un **PLNE** est un programme linéaire du type :

$$Max\ (Z = CX)$$

$$SC\ \left|\begin{array}{l} \sum_i a_i\, x_i \ \leq\ b_j \quad ;\ \mathrm{j} =\ 1,2, \ldots\mathrm{m} \\ \qquad\qquad x_i\ \in\ N \end{array}\right.$$

Remarque : même si on avait A et B entiers, cela ne garantit pas que le PLNE admet une solution en nombres entiers.

- Difficulté du PLNE

- Comment résoudre ?

2. PLNE relaxé

- **Difficulté du PLNE**

Est-il suffisant d'appliquer le simplexe sur le PL en nombre réels obtenu après relaxation de la contrainte linéaire ($x \in R$), puis d'effectuer un arrondi de la solution réelle obtenue ?

NON !

L'arrondi de la solution du PL relaxé n'est pas forcément la solution du PLNE.
Le polygone de solutions peut être non vide et le PLNE n'avoir aucune solution.

3. PLNE relaxé

• Résolution des PLNE

Le ***PLNE relaxé est le programme linéaire où on considère*** les variables du PLNE comme des variables **réelles**. On relaxe la contraintre $(x_i \in N)$

Ainsi, on peut utiliser le simplexe pour résoudre le PL relaxé.

La solution du PLNE n'est pas forcément un sommet du polygone des solutions.

- Si la solution du PL relaxé est entière alors c'est la solution du PLNE.

Nous avons :

- Min $(Z_{PL}) \leq Z_{PLNE} \leq Z_{PLarrondi}$
- Max$(Z_{PL\text{-}arrondi}) \leq Z_{PLNE} \leq Z_{PL}$

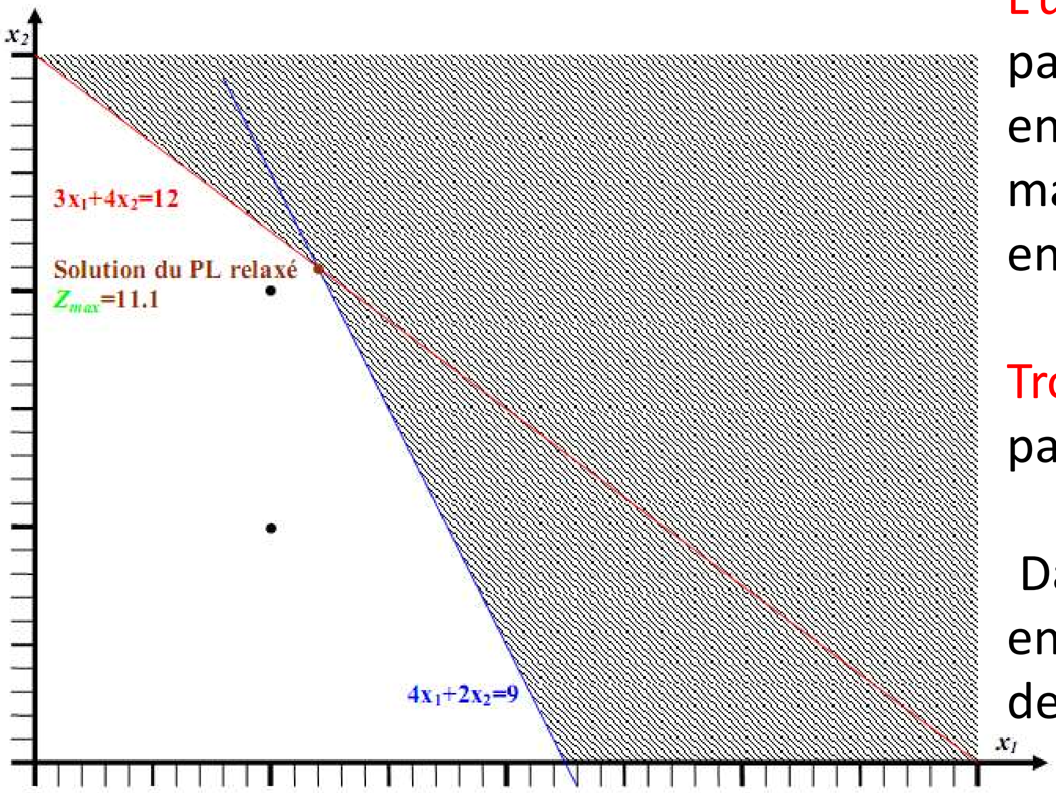
- La valeur ***Zmax*** *du PL relaxé est la borne sup pour* le ***Zmax*** *du PLNE.*

Soit le système

$$\begin{cases} \max \quad Z = \max(4x_1 + 3x_2) \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ x_i \in N \end{cases}$$

On obtient le graphique

(solution du PLNE relaxé : x_1=1.2 ; X_2= 2.1 ----→ X_2= 2.1)



L'une des possibilité est de parcourir toutes les valeurs entières du domaine réalisable (le maillage formé des coordonnées entières) ➔ trop complexe

Trouver 1 stratégie pour limiter le parcours.

Dans l'exemple, les solutions entières sont symbolisées par des points noirs.

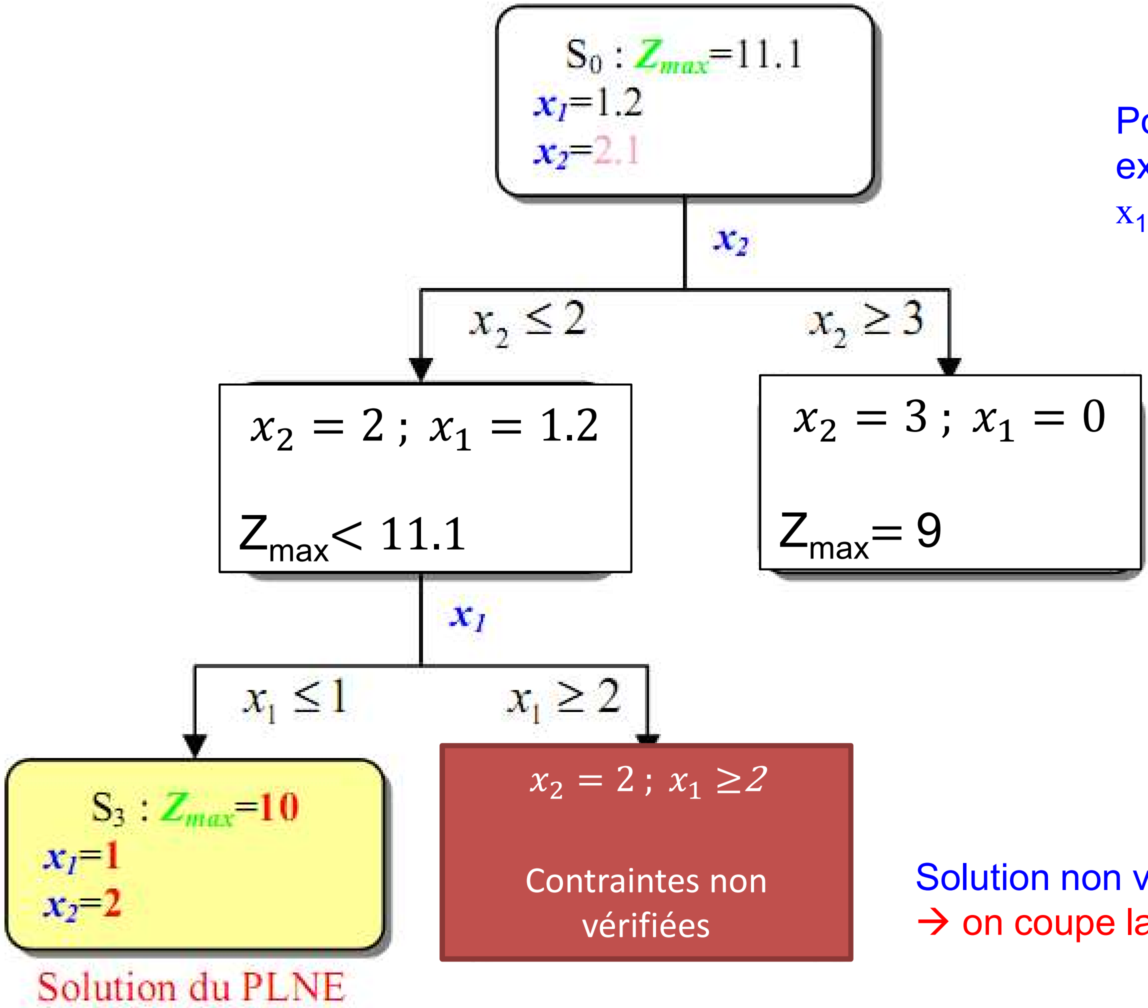
Comment procéder ?

Rappel du problème

$$\begin{cases} \max \quad Z = \max(4x_1 + 3x_2) \\ \qquad 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ \qquad 4x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ \qquad\quad x_i \in N \end{cases}$$

Idée : Découper le problème en arbre, suivre les branches, et les couper en cas d'impossibilités/(non satisfaction des contraintes)

On sépare le PLNE en 2 sous-problèmes correspondant au 2 sous ensembles suivants : $x_2 \leq 2 \quad et \quad x_2 \geq 3$



Pour chacune des valeurs de x_2 on examine les valeurs possible pour x_1 , en respectant les contraintes

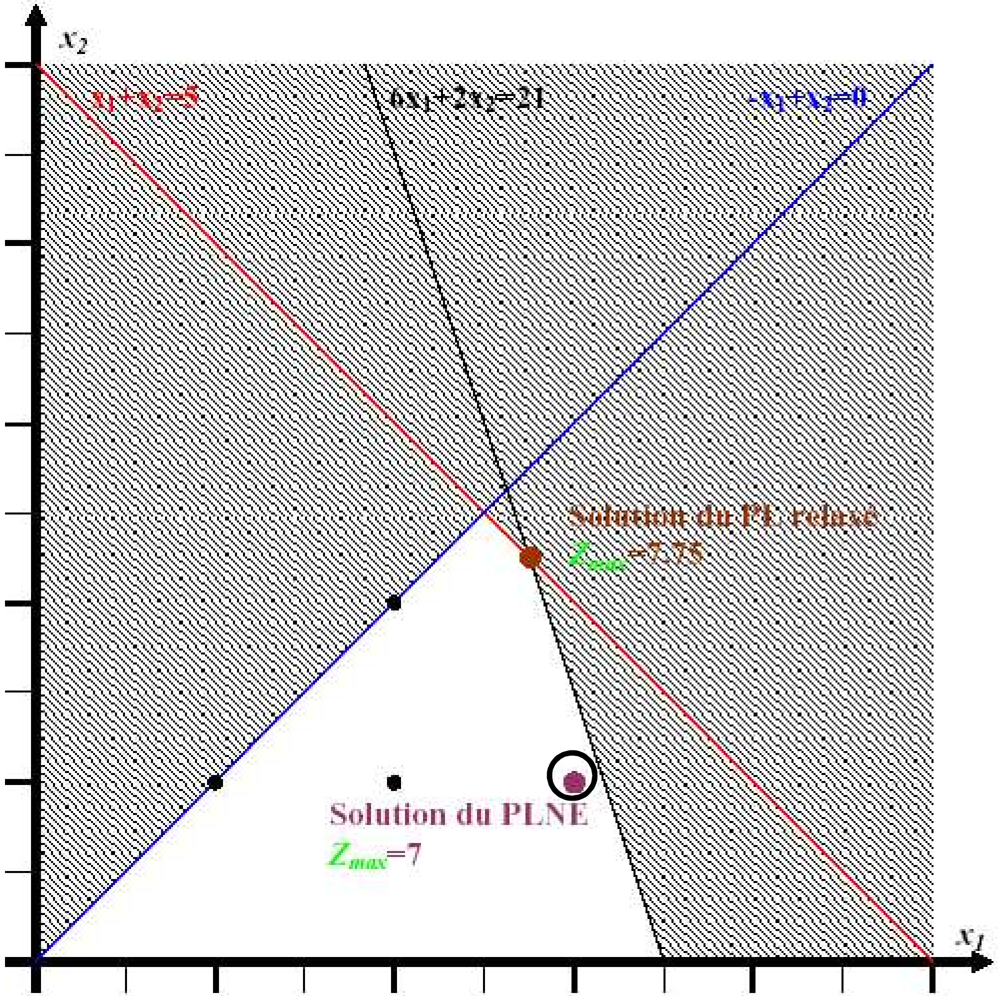
Solution non valide (voir contraintes)
→ on coupe la branche

Soit le système

$$\begin{cases} \max \quad Z = \max(2x_1 + x_2) \\ \quad -x_1 + x_2 \leq 0 \\ \quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ \quad 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ \quad x_i \in N \end{cases}$$

Donner la solution graphique et numérique du PLNE relaxé
En déduire la solution du PLNE

On obtient le graphique



L'une des possibilité est de parcourir toutes les valeurs entières du domaine réalisable (le maillage formé des coordonnées entières) ➔ trop complexe

Trouver 1 stratégie pour limiter le parcours.

Les solutions entières sont symbolisées par des points noirs.

PLNE : cas où les deux programmes sont équivalents

Solution réalisable du PLNE $\Leftrightarrow$ un point dans le polytope de solutions réalisables avec toutes ses coordonnées entières

Si le polytope est long et étroit il n'est pas sûr qu'il ait de tels points

Décider si un PLNE possède des solutions réalisables est un exemple d'un problème NP-complet ; une classe de problèmes pour lesquels personne ne sait s'il existe ou non un algorithme efficace (opérant en temps polynomial)

Les meilleurs algorithmes connus sont capables de traiter des programmes avec quelques dizaines de variables
(par comparaison, on peut traiter des PL de plusieurs milliers de variables)

Méthodes → **heuristiques**

PLNE : Les Méthodes de ``Séparation et Evaluation''

On résout le PL relaxé

On choisit une variable qui a une fourchette de valeurs possibles, [min,max]
On construit deux nouveaux problèmes:
un problème avec [min,mid], et **l'autre** avec [mid+1,max]
(~ dichotomie : mid = (min + max)/2)

séparation
On utilise la borne sur chaque problème fourni par son programme relaxé
évaluation

Si cette borne est inférieure (pour un problème de **maximisation**) à une solution déjà trouvée, terminer cette branche/ couper la branche

Si le programme relaxé n'est pas faisable éliminer la branche
Sinon continuer

A chaque moment il y a une branche de problèmes à résoudre la solution optimale est l'une des 2 cas :

une meilleure solution est déjà trouvée
la meilleure de celles des problèmes contenus dans l'arbre

PLNE : Algorithme de Dakin

La méthode de Dakin consiste à explorer les possibilité en parcourant l’arbre en profondeur

1. Parcourir l'arbre en profondeur

2. Sélectionner , à chaque étape, la branche qui possède la meilleure solution de son **problème relaxé**

3. Séparer sur une variable dont la valeur (dans la solution optimale du programme relaxé) est la plus **proche** d'un entier val est cette valeur (arrondie)

Remarques

Si un PL, admet une solution optimale entière

Alors le PLNE et le PL ont la même valeur optimale

→ résolution du PL

Essentiellement des problèmes sur des réseaux

Des programmes où chaque variable est présente dans deux contraintes au maximum et avec des coefficients de ±1

PLNE : un exemple

- Une entreprise fabrique deux types de produit
  - Un objet du premier produit nécessite 1 homme/mois de temps de travail et 9 k€ de fourniture ;
  - Un objet du second produit nécessite 1 homme/mois de travail et 5 k€ de fourniture ;
  - L'unité dispose de 6 homme/mois de temps de travail et 45 k€ de fourniture pour toute la fabrication.
  - Un objet de type 1 rapporte 8 k€, un objet de type 2 rapporte 5 k€.

→ Quelle doit être la production de l'unité pour maximiser le gain.

$$\max \quad Z \quad = 8x_1 + 5x_2$$

$$\left|\begin{array}{lr} 9x_1 + 5x_2 \leq 45 & (c1) \\ x_1 + x_2 \leq 6 & (c2) \\ x_i \in N & (c3) \end{array}\right.$$

PLNE : un exemple

- En appliquant le simplexe au problème relaxé on obtient la solution suivante :

$$z = \frac{165}{4} \qquad x_1 = \frac{15}{4} \quad ; \quad x_2 = \frac{9}{4}$$

- La solution n'est pas en entiers, la valeur de Z est une borne supérieure pour l'optimum

- On décompose le problème en 2 sous Pbmes sous contraintes (pb2, pb3) :
  - pb2 : problème initial + contrainte $x_1 \geq 4$
  - pb3 : problème initial + contrainte $x_1 \leq 3$

PLNE

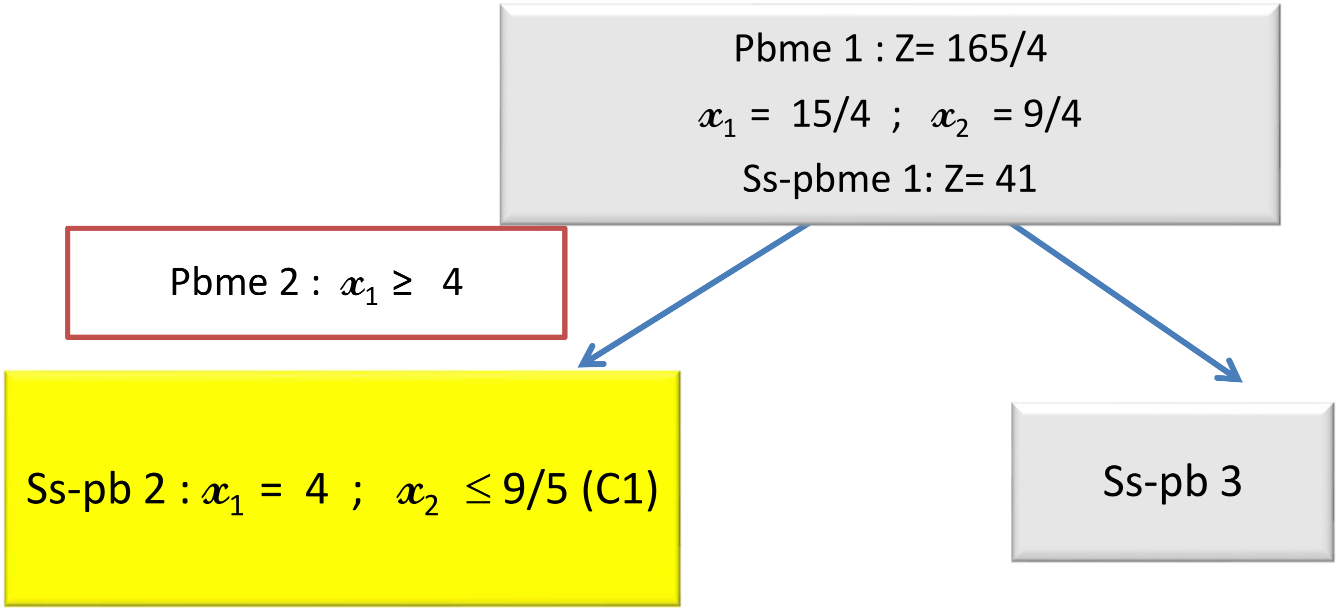
- On peut résoudre les 2 sous Pbmes sous contraintes LP relaxé
  - On choisit l'un des 2
  - Par exemple → pb2 : problème initial + contrainte $x_1 \geq 4$

- Le problème relaxé donne la solution suivante :

$$z \quad = 41 \qquad x_1 = 4 \quad ; \quad x_2 \leq \frac{9}{5} \quad \text{(voir C1)}$$

- On vient de créer une branche d'un arbre :
  - Comme x_2 =(9/5) est FRACTIONNAIRE, on aura à séparer cette variable $\Rightarrow$ 2 zones : $x_2 \geq 2$; $x_2 \leq 1$ (les valeurs entières qui encadrent x_2

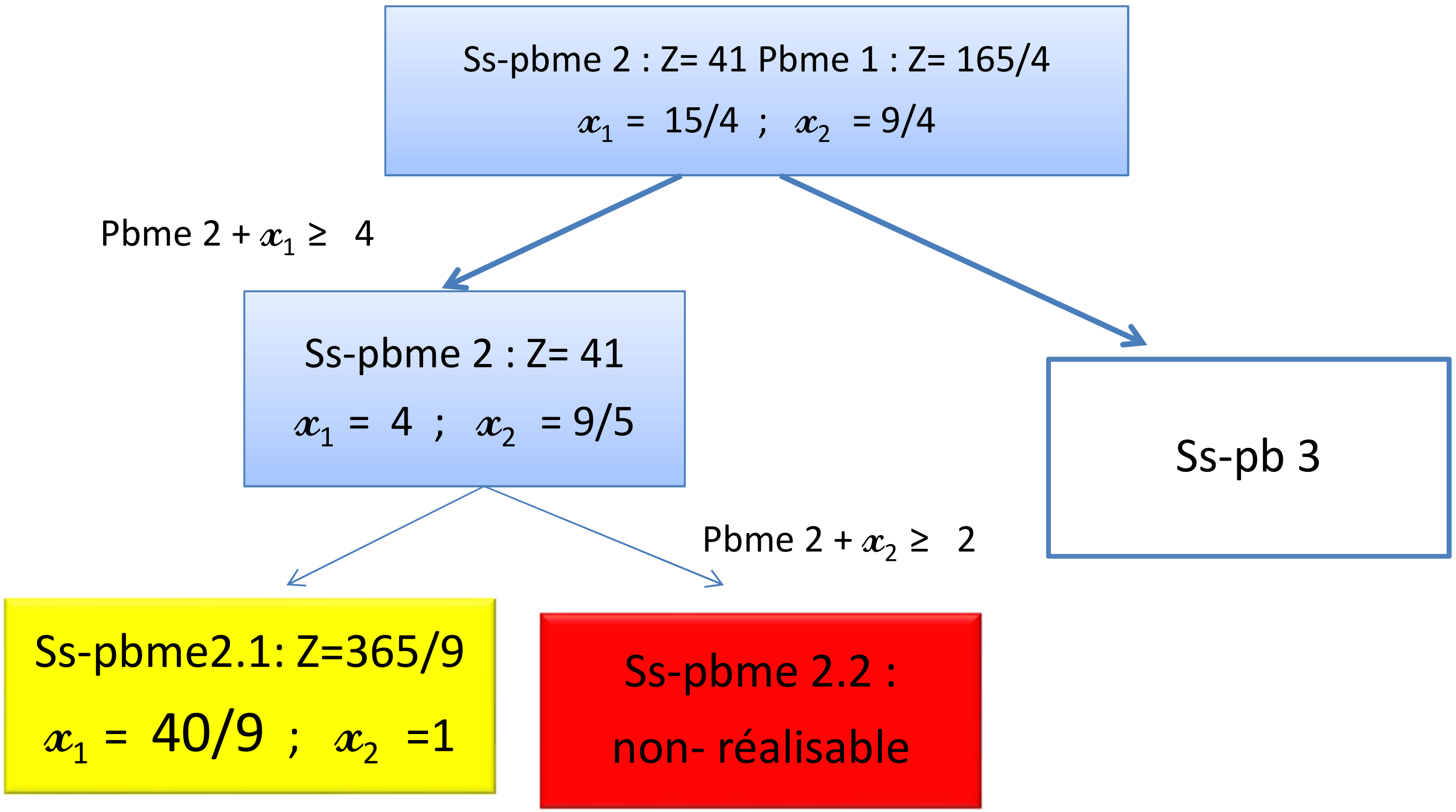
PLNE : un exemple → Récursion (2+3)



- 2 nouveaux ss-Pb : nouvelle séparation
  - 4 → Pb 2 + contrainte $x_2 \geq 2$
  - 5 → Pb 2 + contrainte $x_2 \leq 1$

PLNE : un exemple → Récursion (4+5)

- On résout le Pb 5 relaxé:
  - $z = 365/9$; $x_1 = 40/9$, $x_2 = 1$
- Il faut séparer sur x_1 , avec les contraintes :
  - 6 → Pbme 5 + contrainte $x_1 \geq 5$
  - 7 → Pbme 5 + contrainte $x_1 \leq 4$



PLNE : un exemple → Récursion (6+7)

- Il faut séparer sur x_1 , avec les contraintes :
  - 6 → Pbme 5 + contrainte $x_1 \geq 5$ (→ borne $x_1 = 5$ contrainte C2)
  - 7 → Pbme 5 + contrainte $x_1 \leq 4$

Pbme 1 : Z= 165/4 $x_1 = 15/4$; $x_2 = 9/4$

$x_1 \geq 4$

$x_1 \leq 3$

Ss-pbme 3

Ss-pbme 2 : $x_1 = 4$
$x_2 \leq 9/5$

(*)

Ss-pbme2.1: $x_1 = 4$; $x_2 = 1$
Z=37

Ss-pbme2.1: $x_1 = 4$; $x_2 = 0$
Z= 32 moins bonne que (*)

Ss-pbme2.2: $x_1 = 4$; $x_2 = 2$
: Z= 42 non réalisable

$x_1 = 5$

Ss-pbme2.3: $x_1 = 5$; $x_2 \leq 1$
Z= 40

Ss-pbme2.3: Z= 40
$x_1 = 5$; $x_2 = 0$

(**)

Ss-pbme2.2: $x_1 = 5$; $x_2 = 1$
: Z= non réalisable

PLNE : un exemple → Récursion (6+7)

- La solution 7 est réalisable mais non optimale
- La solution 6 est optimale : on ne décompose plus dans cette branche

Ss-pbme 1 : Z= 41Pbme 1 : Z= 165/4
x_1 = 15/4 ; x_2 = 9/4

$x_1 \geq 4$

$x_1 \leq 3$

Ss-pb 3 :
x_1 = 3 ; x_2 = 3 ;
z = 39

Ss-pbme 2 : x_1 = 4
$x_2 \leq 9/5$

Ss-pbme2.1: x_1 = 4 ; x_2 =1 (*)
Z=37

Ss-pbme2.1: x_1 = 4 ; x_2 =0 Z= 32 moins bonne que (*)

Ss-pbme2.2: x_1 = 4 ; x_2 =2 :
Z= 42 non réalisable

On évalue la solution (3) ; on trouve :
x_1 = 3 ; x_2 = 3
z = 39

x_1 = 5

Ss-pbme2.3: x_1 = 5 ; $x_2 \leq 1$
Z= 40

Ss-pbme2.3: Z= 40
x_1 = 5 ; x_2 = 0 (**)

Ss-pbme2.2: x_1 = 5 ; x_2 =1 :
Z= non réalisable

Z est inférieur à 40, cette branche ne peut pas produire un meilleur résultat que **(**)**

Matrice totalement unimodulaire

Définitions

La matrice A est totalement unimodulaire ou **TU** si toute sous matrice carrée de ***A de déterminant non nul est unimodale***

Une matrice carrée inversible est unimodale si son déterminant est égal à ***-1 ou 1. Cela implique que A est constituée de -1, 0 ou 1*** uniquement.

Condition suffisante pour que ***A soit TU :***

- A ne contient que des -1, 0 ou 1.
- Chaque colonne ne contient pas plus de 2 éléments non nuls.
- On peut partitionner ses lignes en 2 sous ensembles L1 et L2 tels que :
  - Si une colonne a 2 éléments non nuls de même signe alors l'un est dans L1 et l'autre dans L2.
  - Si une colonne a 2 éléments non nuls de signes opposés alors ils sont tous les 2 dans L1 ou L2.

Exemples

Exemples

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \text{L1} = \{l1, l2\} \\ \text{L2} = \{l3, l4\} \end{cases}$$

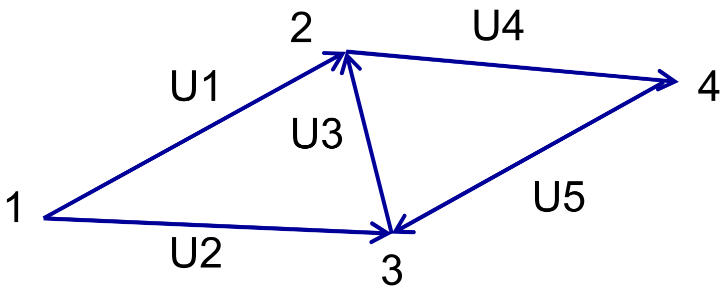
Par contre

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ne vérifie pas la condition mais elle est néanmoins TU

Exemples

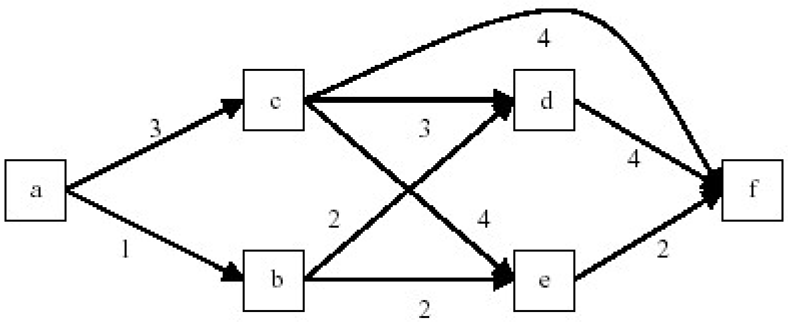
Soit le graphe



$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{cases} L_1 = \{ligne1, ligne2, ligne3, ligne4\} \\ L_2 = \{\emptyset\} \end{cases}$$

Pour un problème où on cherche le plus court chemin on a le graphe suivant :



on utilise des valeurs binaires pour symboliser chaque trajet :

0 si pas de trajet entre 2 villes.
1 si un trajet existe entre 2 villes.

On obtient la fonction à minimiser :

$$Z = 3x_{ac} + x_{ab} + 3x_{cd} + 4x_{ce} + 4x_{cf} + 2x_{be} + 2x_{bd} + 4x_{df} + 2x_{ef}$$

Pour un problème où on cherche le plus court chemin :

Rappel de la fonction à minimiser :

$$Z = 3x_{ac} + x_{ab} + 3x_{cd} + 4x_{ce} + 4x_{cf} + 2x_{be}$$
$$+2x_{bd} + 4x_{df} + 2x_{ef}$$

Comme un seul chemin partira de a à chaque trajet évalué, on a la contrainte suivante :

$$1 = x_{ac} + x_{ab}$$

Un seul chemin arrivera à f donc on a la contrainte suivante :

$$1 = x_{cf} + x_{df} + x_{ef}$$

Comme on a 1 ou 0 chemin entrant ou sortant pour chaque point on a les contraintes supplémentaires :

$$\begin{cases} x_{ab} - x_{be} - x_{bd} = 0 \\ x_{ac} - x_{cf} - x_{ce} - x_{cd} = 0 \\ x_{cd} + x_{bd} - x_{df} = 0 \\ x_{ce} + x_{be} - x_{ef} = 0 \end{cases}$$

PVC : Problème du Voyageur représentant de Commerce

1. Problématique

On cherche à minimiser f(x) avec $x \epsilon S = \{x_1, x_2, x_{13}, \cdots, x_n,\}$ ensemble discret

*Idée : x prend un certain nombre de valeur contenu dans S de manière à converger le plus rapidement possible vers une solution x * qui optimise au mieux S dans un temps de calcul raisonnable (x * : optimale) .*

2. Problème classique : le pblme du voyageur de commerce : PVC

Le **P**roblème du **V**oyageur de **C**ommerce **(PVC)** ou **T**raveller **S**aleman **P**roblem **(TSP)** c'est n villes à parcourir en ne rentrant et ne sortant qu'une et une seule seule fois dans (et de) chaque ville. Il s'agit de minimiser la distance parcourue. Les n villes impliquent $\frac{1}{2}(n-1)\,!$ trajets possibles.

Ici x représente un des trajets possibles et S tous les trajets possibles.

(ex n=20) : Impossible d'évaluer toutes les solutions potentielles

PLNE : heuristiques et méta-heuristiques

Le problème du voyageur de commerce (PVC ou TSP) consiste à passer par chacune des n villes, une et une seule fois, et minimiser la distance totale parcourue.

$$\begin{cases} \text{min } z = \Sigma_{i,j} d_{ij}.x_{ij} \\ \Sigma_i x_{ij} = 1, \ \forall j \\ \Sigma_j x_{ij} = 1, \ \forall i \\ \{(i,j)/x_{ij} = 1\} \text{ est un circuit} \end{cases}$$

La matrice de dissimilarité (ou matrice des distances) D = [d_{ij}]) est connue pour les n villes. La matrice D (D=[d_{ij}]) n'est pas obligatoirement symétrique ; elle vérifie les relations suivantes :

$$\begin{cases} d_{xy} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y \\ d_{xz} \leq d_{xy} + d_{yz} \end{cases}$$

Le PL : pour résoudre le PVC

Technique

On utilisera un PL à valeurs binaire

a_{ij}= 1 pour la présence de l'arc (chemin) entre les ville i et j.
a_{ij}= 0 pour l'absence de l'arc entre i et j.

→ on n'entre qu'une seule fois dans chaque ville et on ne sort qu'une seule fois

On pose d_{ij} *la distance entre i et j* ⇒ *la longueur d'un trajet complet à minimiser est*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}a_{ij}$$

sous les contraintes :

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \ \forall j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad \forall i \\ \sum_{(i,j)\in T}^{n} a_{ij} \leq |T| - 1 \quad \forall\, T \end{array}\right.$$

Remarque

Le PL donne la bonne solution mais, selon le nombre de villes, pas forcément en un temps acceptable (n grand)
Le PL n'est pas la méthode la plus adaptée pour résoudre le **TSP**,, mais c'est une méthode exacte

→Pour certains problèmes, des méthodes basée sur des heuristiques ou méta heuristiques seront plus adéquates Mais .....
→Mais ces méthodes ne donneront pas forcément la solution optimale (gobale)

Pour traiter le TSP Il faut se poser la question de savoir si on veut la meilleure solution ou si on peut se contenter d'une solution « la meilleure », pour un coût de calcul supportable.

PLNE : Résoudre le PVC : **algorithme de Little**

C’est un algorithme exact, qui donne la meilleur solution si on le déroule jusqu’au bout. Il est dédié au PVC (TSP).

Algorithme de Little : basé sur l’heuristique du regret.
Le regret évalue le coût de l’inopportunité de la non incorporation d’un arc à la solution : il évalue ce coût, et l’ajoute comme pénalité

Pour le calcul les distances doivent subir une réduction (au préalable) pour retrancher le coût minimal requis pour toute solution (choix).

On découvre la méthode à travers un exemple

PLNE : Résoudre le PVC : algorithme de Little

Rappel : c'est un algorithme exact, qui donne la meilleur solution si on le déroule jusqu'au bout. Il est dédié au **TSP**.

On part d'une matrice de coût évalué par les distances entre les villes (matrice carrée :
Exemple pour un graphe à 6 sommets qui représente six villes A,B,C,D,E,F

On calcul le coût minimal requis par ligne

	A	B	C	D	E	F	
A	∞	1	7	3	14	2	+1
B	3	∞	6	9	1	24	+1
C	6	14	∞	3	7	3	+3
D	2	3	5	∞	9	11	+2
E	15	7	11	2	∞	4	+2
F	20	5	13	4	18	∞	+4
							+13

Résoudre le PVC : algorithme de Little

Même démarche pour les colonnes après réduction de la matrice : on calcul le coût minimal pour chaque Colonne après avoir enlevé celui de chaque ligne et on le somme à celui des lignes :

	A	B	C	D	E	F	
A	∞	0	6	2	13	1	+1
B	2	∞	5	8	0	23	+1
C	3	11	∞	0	4	0	+3
D	0	1	3	∞	7	9	+2
E	13	5	9	0	∞	2	+2
F	16	1	9	0	14	∞	+4
	0	0	+3	**0**	0	0	+13+3 =16

PLNE : Résoudre le PVC : algorithme de Little

On a ainsi calculé la borne inférieure des surcoûts minimaux pour les trajets. On va maintenant chercher le 1er chemin qui permet de ne pas augmenter ces surcoûts.

Une fois la matrice des coûts réduite en soustrayant les coûts minimaux des colonnes.

On regarde le coût induit par l'éviction de l'arc (la non présence du chemin dans le circuit d'où la stratégie du regret) où le surcoût est nul → ici AB, BE, CD, CF, DA, DC, ED, FD :

16	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
A	∞	0_2	3	2	13	1
B	2	∞	2	8	0_6	23
C	3	11	∞	0_0	4	0_1
D	0_2	1	0_2	∞	7	9
E	13	5	6	0_2	∞	2
F	16	1	6	0_1	14	∞

Le surcoût induit par la non présence du chemin x_{ij} est :

$co\hat{u}t_{ij} = \underline{\min_{k\neq j} d_{ik}} + \underline{\min_{h\neq i} d_{hj}}$ (= Min sur la ligne + min sur la colonne)

PLNE : Résoudre le PVC : algorithme de Little

Ainsi l'éviction de BE c'est celle qui engendre le plus de pénalité

On examine les 2 possibilités :

- Sans BE : on ajoute le coût d'éviction : 16+6 = 22
- Avec BE : On a 16 et on joute le coût de réduction éventuelle

↗	A	B	C	D	E	F
A	∞	0_2	3	2	13	1
B	2	∞	2	8	0_6	23
C	3	11	∞	0_0	4	0_1
D	0_3	1	0_2	∞	7	9
E	13	5	6	0_2	∞	2
F	16	1	6	0_1	14	∞

sans BE : on supprime la ligne B et la colonne E (éviction de BE) ; on neutralise le chemin EB également (EB=∞)

PLNE : Résoudre le PVC : algorithme de Little

Avec BE

On supprime la ligne **B** et la colonne **E** ainsi que la case **EB** (chemin inverse), on recommence avec la nouvelle matrice ainsi obtenu jusqu'à obtenir une matrice nulle

16	A	B	C	D	F	
A	∞	0_{2}	3	2	1	0
C	3	11	∞	0_{0}	0_{1}	0
D	0_{3}	1	0_{3}	∞	9	0
E	13	∞	6	0_{2}	2	0
F	16	1	6	0_{1}	∞	0
	0	0	0	0	0	**0**

Sans BE =22

Avec BE =16

Là encore on aura 2 possibilités

- Sans DA : on ajoute le coût d'éviction : 16 +3
- Avec DA : On joute le coût de réduction éventuelle :

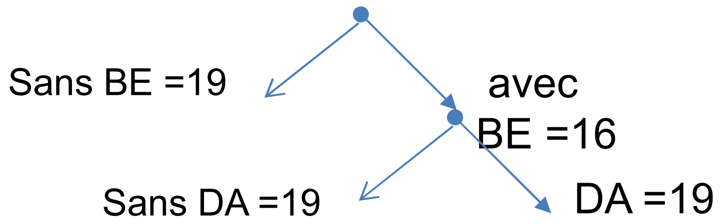
PLNE : Résoudre le PVC : algorithme de Little

Avec DA : on réduit la matrice

16	B	C	D	F	
A	0_2	3	∞	1	0
C	11	∞	0_0	0_1	0
E	∞	6	0_2	2	0
F	1	6	0_1	∞	0
	0	3	0	0	**3**

Tableau réduit

16 +3	B	C	D	F
A	0_0	0_3	∞	1
C	11	∞	0_0	0_1
E	∞	3	0_2	2
F	1	3	0_1	∞

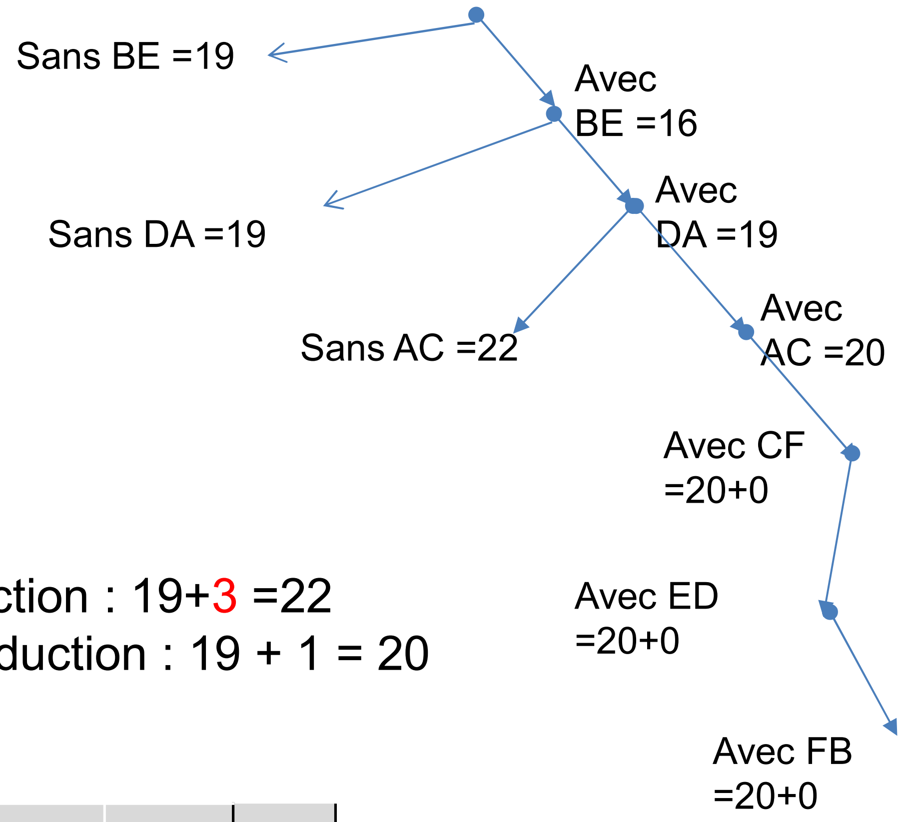


Là encore on aura 2 possibilités

- Sans DA : on ajoute le coût d'éviction : 16 +3=19
- Avec DA : On joute le coût de réduction : 16 +3 =19

PLNE : Résoudre le PVC : algorithme de Little

16 +3=19	B	C	D	F
A	0_0	0_3	∞	1
C	11	∞	0_0	0_1
E	∞	3	0_2	2
F	1	3	0_1	∞



2 possibilités

- Sans AC : on ajoute le coût d'éviction : 19+3 =22
- Avec AC : On joute le coût de réduction : 19 + 1 = 20
  (coût de la réduction +1)

19	B	D	F	
C	11	∞	0_2	0
E	∞	0_2	2	0
F	1	0_0	∞	0
	1	0	0	1

Avec AC =19+1

20	B	D	F
C	10	∞	0_{12}
E	∞	0_2	2
F	0_{10}	0_0	∞

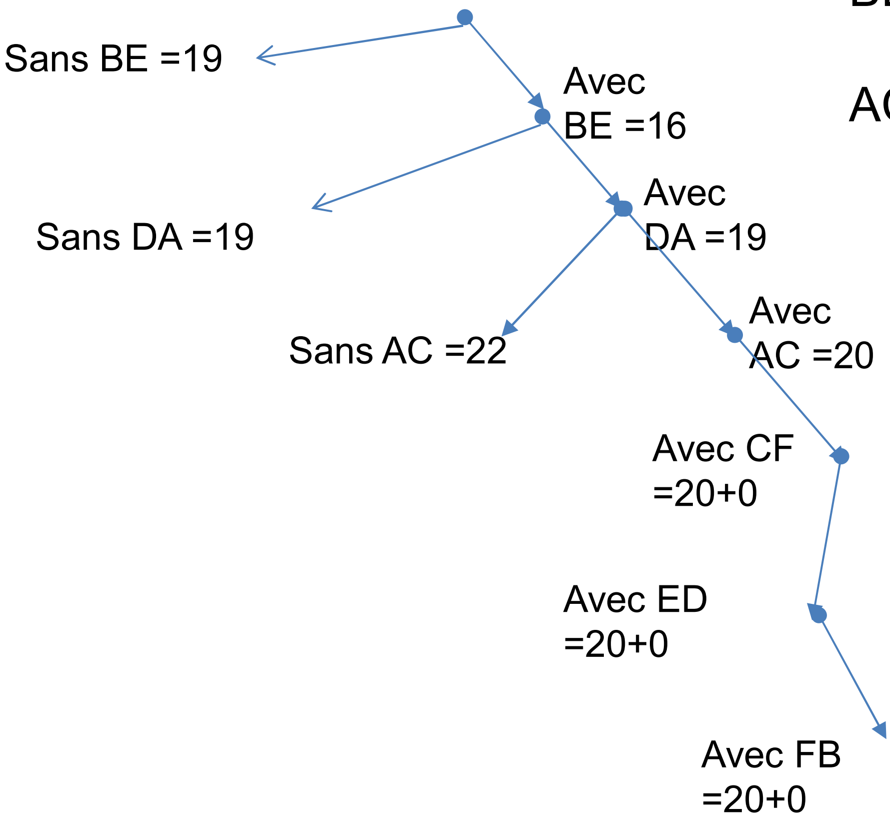
Avec CF =20+0
Avec CF =20+0
sans CF =20+12 = 32

19	B	D
E	∞	0_2
F	0_{10}	0_0

PVC : algorithme de Little

Le circuit final comprend :
BE , DA, AC, CF, FB, ED

ACFBEDA

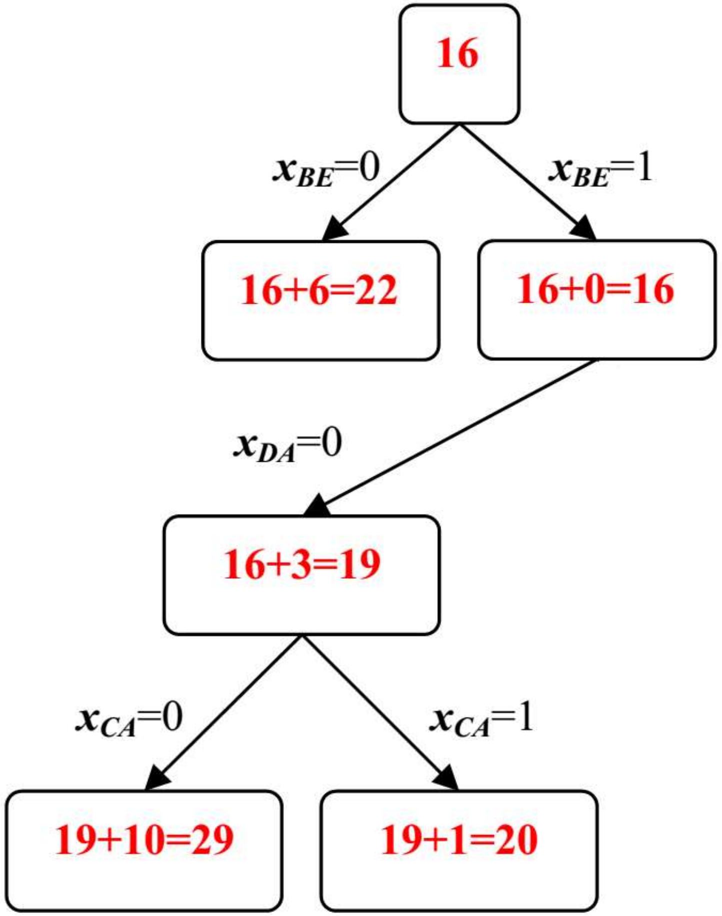


PLNE : Résoudre le PVC : algorithme de Little

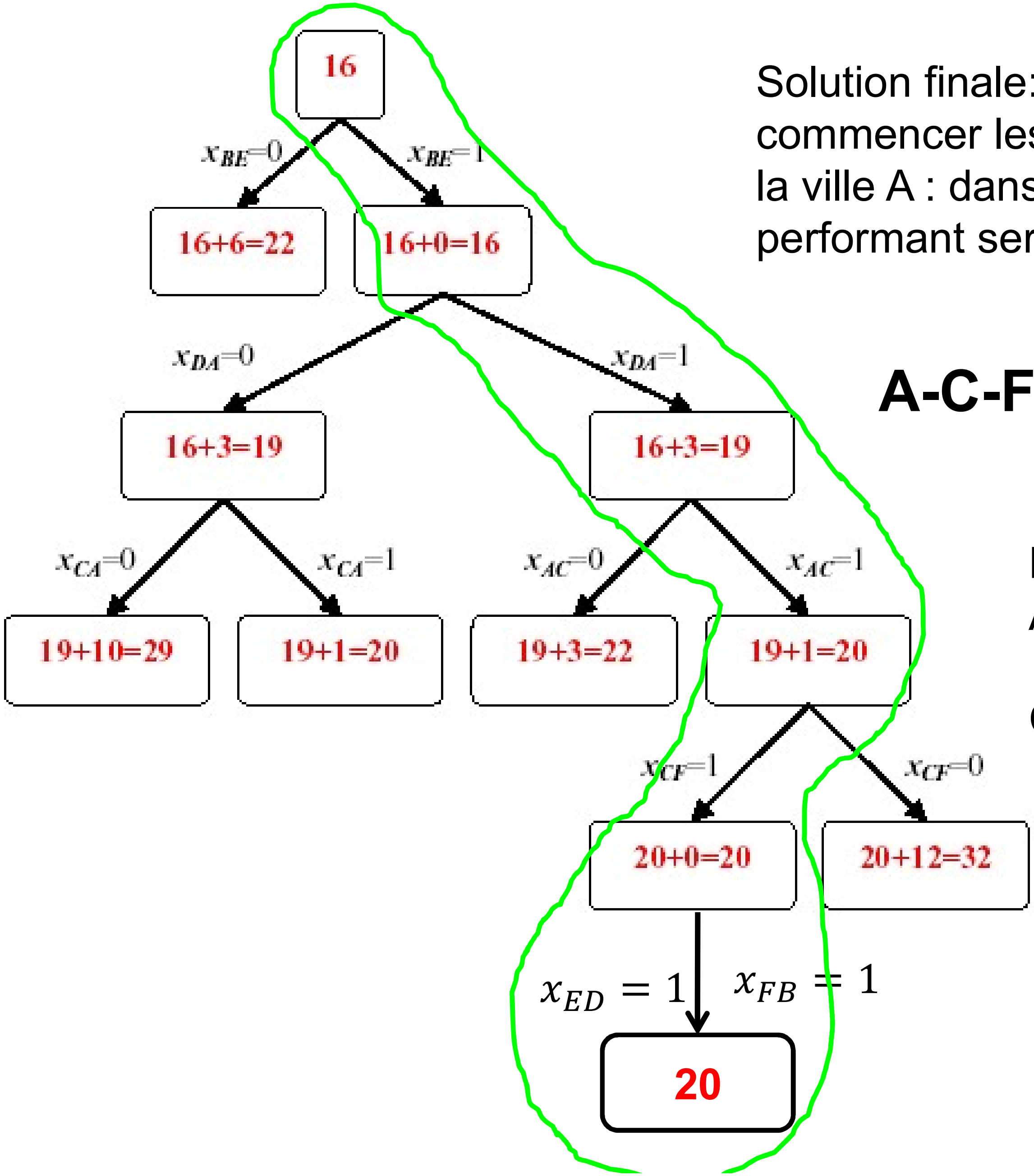
Explorer la branche sans DA →CA et on réduit la matrice

19+10	A	B	C	D	F	
A	-	0_{2}	3	2	1	+0
C	0_{10}	11	-	0_{0}	0_{1}	+0
D	-	1	0_{4}	-	9	+0
E	10	-	6	0_{2}	2	+0
F	13	1	6	0_{1}	-	+0
	+0	+0	+0	+0	+0	+ 0

19+1	B	D	F	
C	10	0_{0}	0_{1}	+0
E	-	0_{2}	2	+0
F	1	0_{1}	-	+0
	+1	+0	+0	+1



PLNE : Résoudre le PVC : algorithme de Little



Solution finale: On choisit une ville pour commencer les déplacements par exemple la ville A : dans ce cas le circuit le plus performant sera le suivant :

A-C-F-B-E-D-A de coût 20

Départ : de A :
A→ C→F→ B→E → D → A

Coût = 20