

LifLF – Théorie des langages formels

Sylvain Brandel

2019 – 2020

sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

CM 5

CARACTÉRISATION

Lien avec les langages rationnels

Stabilité

- Propriété de stabilité des langages reconnus par des automates finis.

- Théorème

La classe des langages acceptés par les automates finis est stable par :

- *Union*
- *Concaténation*
- *Fermeture itérative*
- *Complément*
- *Intersection*



ordre de la démonstration

- Preuve constructive
 - Construction de l'automate pour chaque opération

Lien avec les langages rationnels

Stabilité

- Union

$$\begin{array}{lll} L_1 = L(M_1) & (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1) & \rightarrow \text{Même } \Sigma \\ L_2 = L(M_2) & (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2) & \rightarrow \text{Hyp. } K_1 \cap K_2 = \emptyset \end{array}$$

Posons s tel que $s \notin K_1$ et $s \notin K_2$.

$$\rightarrow M_{\cup} : (\{s\} \cup K_1 \cup K_2, \Sigma, \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(s, \varepsilon, s_1), (s, \varepsilon, s_2)\}, s, F_1 \cup F_2)$$

$$w \in L(M_{\cup}) \Leftrightarrow (s, w) \vdash_M (s_1, w) \vdash_M^* (f_1, \varepsilon) (f_1 \in F_1) \quad \leftarrow L_1$$

ou

$$(s, w) \vdash_M (s_2, w) \vdash_M^* (f_2, \varepsilon) (f_2 \in F_2) \quad \leftarrow L_2$$

$$\Leftrightarrow w \in L_1 \cup L_2$$

Lien avec les langages rationnels

Stabilité

- Concaténation

$$L_1 = L(M_1) \quad (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1) \quad \rightarrow \text{Même } \Sigma$$

$$L_2 = L(M_2) \quad (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2) \quad \rightarrow \text{Hyp. } K_1 \cap K_2 = \emptyset$$

$$\rightarrow M_c : (K_1 \cup K_2, \Sigma, \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(f_i, \varepsilon, s_2) \mid f_i \in F_1\}, s_1, F_2)$$

Lien avec les langages rationnels

Stabilité

- Etoile de Kleene

$$L_1 = L(M_1) \quad (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$$

$$\rightarrow M_K : (K_1 \cup \{s\}, \Sigma, \Delta_1 \cup \{(s, \varepsilon, s_1)\} \cup \{(f_i, \varepsilon, s_1) \mid f_i \in F_1\}, s, F_1 \cup \{s\})$$

Lien avec les langages rationnels

Stabilité

- Complément

$$L_1 = L(M_1) \quad (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$$

$$\rightarrow M_{\neg} : (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, \neg F_1) \text{ avec } \neg F_1 = K_1 - F_1$$

Attention M_1 doit être déterministe

Lien avec les langages rationnels

Stabilité

- Intersection

$$\begin{array}{lll} L_1 = L(M_1) & (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1) & \rightarrow \text{Même } \Sigma \\ L_2 = L(M_2) & (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2) & \rightarrow \text{Hyp. } K_1 \cap K_2 = \emptyset \end{array}$$

- Deux méthodes :

- $L(M_1) \cap L(M_2) = \overline{\overline{L(M_1)} \cup \overline{L(M_2)}}$

- Automate produit

- $M_{\cap} : (K_1 \times K_2, \Sigma,$
 $\{((p_1, p_2), \sigma, (q_1, q_2)) \mid (p_1, \sigma, q_1) \in \Delta_1 \text{ et } (p_2, \sigma, q_2) \in \Delta_2\},$
 $(s_1, s_2), F_1 \times F_2)$
 - Quadratique en le nombre d'états

Lien avec les langages rationnels

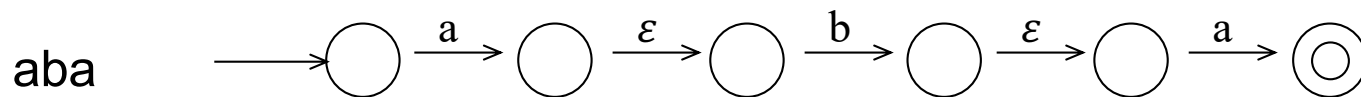
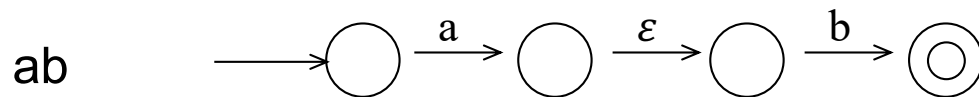
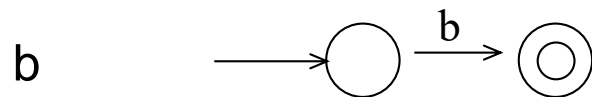
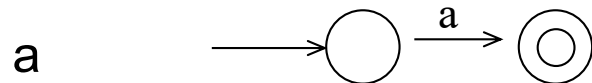
Inclusion des classes de langages

- Théorème

La classe des langages acceptés par les automates finis contient les langages rationnels.

- Exemple

$(ab \cup aba)^*$



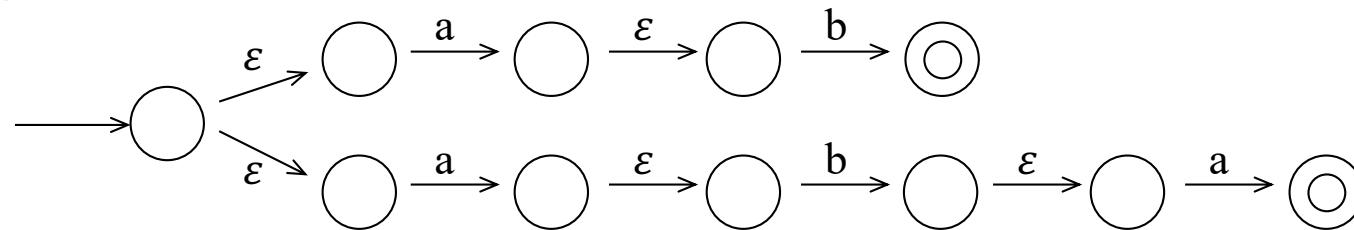
Lien avec les langages rationnels

Inclusion des classes de langages

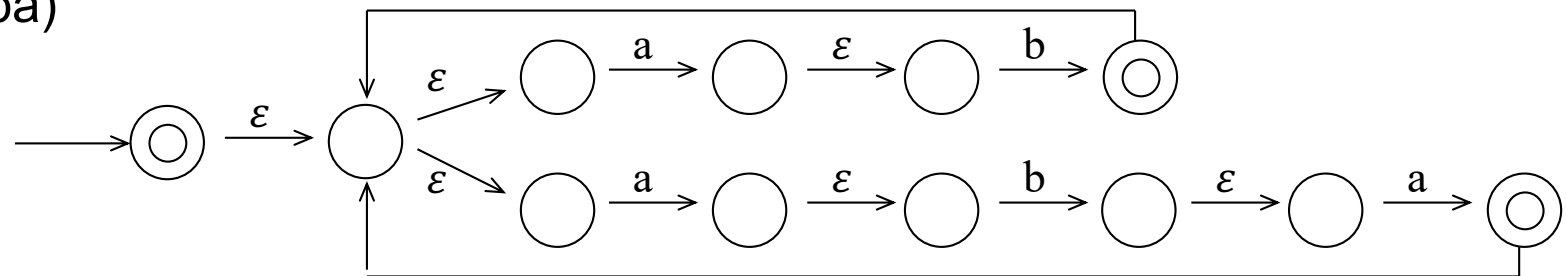
- Exemple

$(ab \cup aba)^*$

$ab \cup aba$



$(ab \cup aba)^*$



Lien avec les langages rationnels

Caractérisation des langages rationnels

- Théorème

*Un langage est rationnel **ssi** il est accepté par un automate fini.*

- Preuve

On suppose qu'on a numéroté (ordonné) les états.

Soit $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ un automate fini (déterministe ou non).

$$K = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}, s = q_1$$

Le langage reconnu par M est la **réunion** de tous les langages reconnus en parcourant tous les chemins possibles dans le graphe.

→ À chaque chemin allant de s à f ($\in F$), on associe le langage trouvé.

Lien avec les langages rationnels

Caractérisation des langages rationnels

- On pose $R(i, j, k)$ = l'ensemble des mots obtenus par lecture de l'automate M
 - en partant de l'état q_i ,
 - en arrivant dans l'état q_j (avec le mot vide),
 - en ne passant que par des états dont le numéro est inférieur ou égal à k .
- $R(i, j, k)$ est un langage
- $R(i, j, k) = \{w \mid (q_i, w) \vdash_M^* (q_j, \varepsilon) \text{ sans passer par des états dont le numéro est supérieur à } k\}$

$$R(i, j, n) = \{w \mid (q_i, w) \vdash_M^* (q_j, \varepsilon)\}$$

$$L(M) = \bigcup_{i \mid q_i \in F} R(1, i, n)$$

Lien avec les langages rationnels

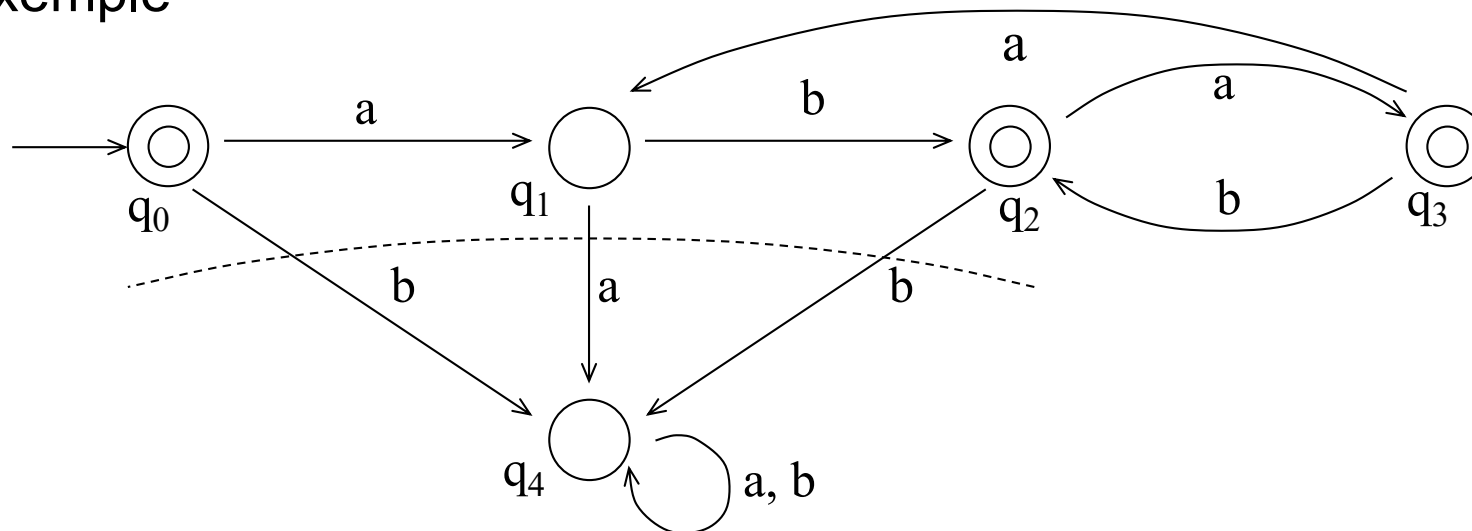
Caractérisation des langages rationnels

- $R(i, j, k)$ est un **langage rationnel** dont on peut calculer la représentation par récurrence sur k .

- Preuve

$$R(i, j, k) = R(i, j, k-1) \cup R(i, k, k-1) \cdot (R(k, k, k-1))^* \cdot R(k, j, k-1)$$

- Exemple

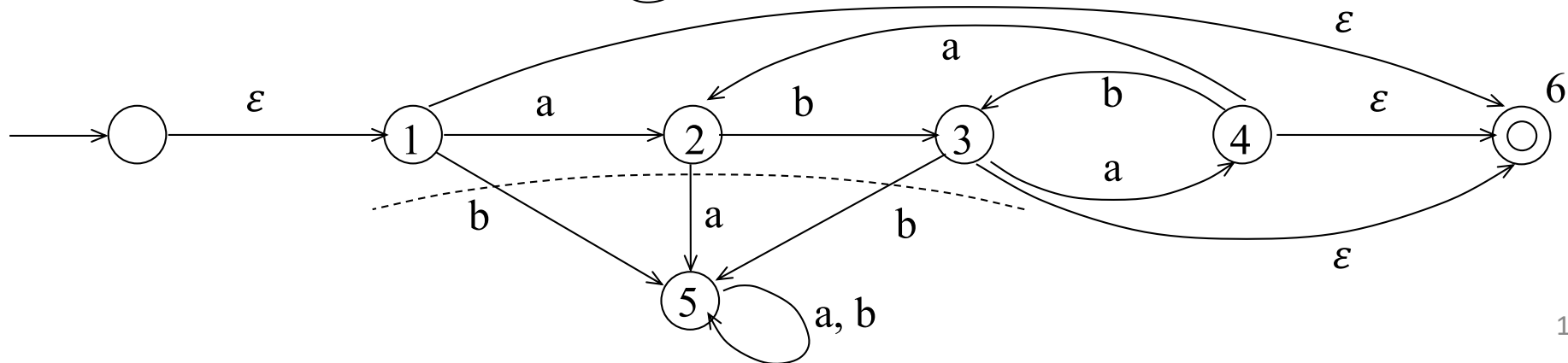
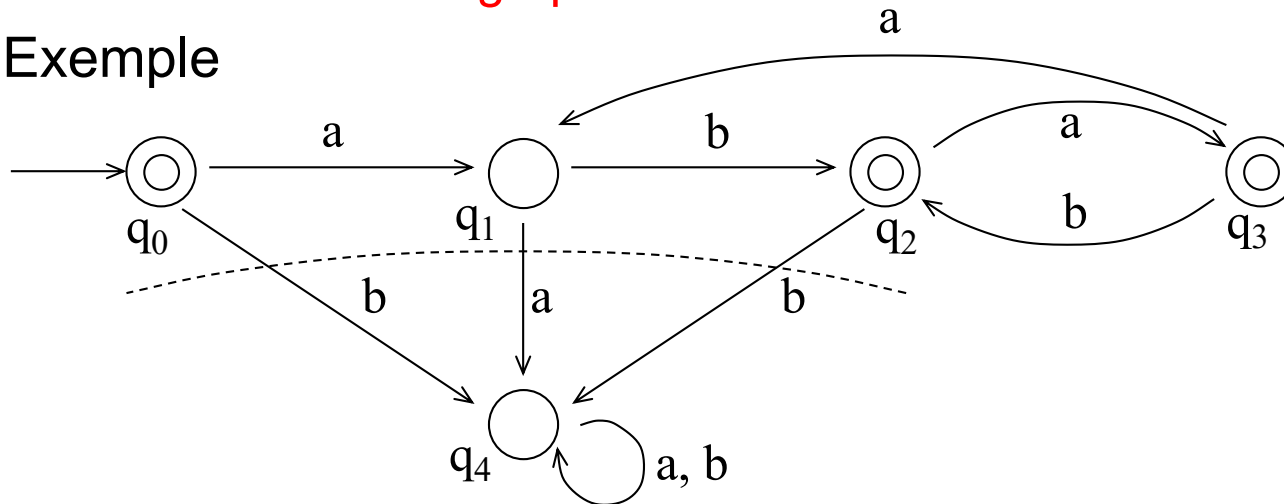


Lien avec les langages rationnels

Caractérisation des langages rationnels

- Pour simplifier on « arrange » le graphe :
 - Un seul état final
 - Pas de retour de f vers le graphe
 - Pas de retour du graphe vers l'état initial

- Exemple



Lien avec les langages rationnels

Caractérisation des langages rationnels

- Exemple

- $R(i, j, 0) \rightarrow$ **étiquettes** sur les flèches.

- Principe : calculer $R(1, 6, 6)$

$$\begin{aligned} R(1, 6, 6) &= R(1, 6, 5) \cup R(1, 6, 5) R(6, 6, 5)^* R(6, 6, 5) \\ &= R(1, 6, 4) \cup R(1, 5, 4) R(5, 5, 4)^* R(5, 6, 4) \cup \dots \cup \dots \end{aligned}$$

Fastidieux \Rightarrow on calcule les $R(i, j, k)$ de proche en proche.

\rightarrow On supprime q_1 (ce qui revient à calculer $R(i, j, 1)$)

\rightarrow On supprime q_2 (ce qui revient à calculer $R(i, j, 2)$)

...

