Juste un récapitulatif détaillé de comment résoudre cet exercice sur les splines.
On veut faire une interpolation avec des splines de f(x)=|x| sur [-1 ;1] avec les points suivants comme points d'attache

n	X	Y
0	-1	1
1	-0.5	0.5
2	0	0
3	0.5	0.5
4	1	1

Le principe des splines est que au lieu d'avoir un seul Polynôme P pr tt l'intervalle [-1 ; 1] on va avoir plusieurs polynômes, un pour chaque groupe de 2 points consécutifs (donc par exemple on va avoir P_0 qui est le polynôme pr l'interpolation entre les points x_0 et x_1).
Votre cours vous donne la formule suivante pour les polynômes :

$$P_i(x) = M_{i+1}\frac{(x-x_1)^3}{6h_i} - M_i\frac{(x-x_{i+1})^3}{6h_i} + a_i(x-x_i) + b_i$$

Avec

$$a_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i(M_{i+1} - M_i)}{6}$$

$$b_i = y_i - \frac{{h_i}^2 * M_i}{6}$$

Dans cette formule $h_i=x_{i+1}-x_i$ et les M_i sont les valeurs des dérivées secondes. Donc, par exemple, $M_0=P''_0(x_0)$. Le problème est que nous ne connaissons pas ces valeurs de M et par conséquent il va falloir les trouver. Pour ce faire on utilise le fait que les points intermédiaires (tous les points sauf 0 et 4 dans notre cas) font partis de deux polynômes. Par exemple le point x_1 fait partie des polynômes P_0 et P_1. Vu que la spline doit être 2 fois dérivable on a $P_0(x_1)= P_1(x_1)$; $P'_0(x_1)= P'_1(x_1)$ et $P''_0(x_1) = P''_1(x_1)$.

Grace à l'équation sur l'égalité des deux dérivée on peut obtenir la formule suivante (ou j'ai remis les i pour montrer qu'elle est valide pour TOUS les points intermédiaires)

$$M_{i-1}h_{i-1} + 2 * M_i(h_{i-1} + h_i) + M_{i+1}h_i = 6(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}})$$

Maintenant vous avez deux méthodes pour trouver les valeurs de M et résoudre le problème. Soit vous écrivez le système, soit vous apprenez directement la forme matricielle. Ici je vais le résoudre en écrivant le système pour que ça soit lisible mais si vous apprenez la forme matricielle vous pouvez directement l'écrire (gl pr ne pas faire d'erreur).

Donc dans notre cas nous avons 5 points en tout, ce qui va nous faire 3 points intermédiaires (1, 2, 3) et les deux points aux extrémités (0 et 4). Donc nous pouvons écrire 3 équations, une pour chaque point intermédiaire.

$$M_0h_0 + 2 * M_1(h_0 + h_1) + M_2h_1 = 6(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0})$$

$$M_1h_1 + 2 * M_2(h_1 + h_2) + M_3h_2 = 6(\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1})$$

$$M_2h_2 + 2 * M_3(h_2 + h_3) + M_4h_3 = 6(\frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2})$$

Maintenant, il nous faut remplacer toutes les variables pour lesquelles nous connaissons la valeur :

- Les valeurs de y_i sont connues vu qu'on connait les valeurs de x_i et que la fonction f(x)=|x|
- $h_i=x_{i+1}-x_i$ Or nos x_i sont tous séparés de 0.5 (vu que on a -1 ; -0.5 ; 0 ; 0.5 ; 1) donc on a $h_0=h_1=h_2=h_3=h_4=1/2$
- Enfin l'énoncé vous dis que l'on veut une spline naturelle, cela veut dire que la dérivée secondes des points aux extrémités vaut zéro donc $M_0=M_4=0$

En remplaçant toutes ces valeurs on obtient les équations suivantes

$$2 * M_1 + M_2/2 = 0$$
$$M_1/2 + 2 * M_2 + M_3/2 = 12$$
$$M_2/2 + 2 * M_3 = 0$$

On a donc maintenant 3 équations et trois inconnues M_1, M_2, M_3 . On peut donc réécrire le système sous forme de matrice et le résoudre (avec un pivot de gauss par exemple). Notons que cette matrice sera toujours une matrice carrée avec uniquement des valeurs dans la diagonale ainsi que les cases autour de la diagonale.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui nous donne $M_1=-7/12$; $M_2=48/7$; $M_3=-7/12$ et je rappelle qu'on a $M_0=M_4=0$

Et maintenant qu'on a les valeurs de M_i on peut les remplacer dans la formule de $P_i(x)$ qu'on avait au début. En passant il y une autre formulation de Pi(x) qui est celle donné dans la correction du TD qui est peut-être un peu plus simple à développer (c'est celle de la page wiki et elle ne donne pas le même développement sauf que je n'ai aucune idée de d'où elle sort vu qu'elle n'est pas dans votre cours)