LIFLC – TD5

Lundi 21 octobre

Notions abordées : déduction naturelle au premier ordre

1 Échauffement propositionnel

Question 1. Montrer que $\overline{\Gamma \vdash A \vee \neg A}$ est dérivable.

Question 2. En admettant que $\overline{\Gamma \vdash A \vee \neg A}$ est dérivable, démontrer que $\dfrac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$ (t.e.) est dérivable.

2 Premier ordre

Question 3. On suppose que :
- Tout athlète est fort,
- Toute personne intelligente et forte réussira sa carrière,
- Pierre est un athlète intelligent.

En traduisant ce problème dans la logique du premier ordre, montrer à l'aide de la déduction naturelle que Pierre réussira sa carrière.

Question 4. Montrer que toute involution est bijective.

Question 5. Montrer que la règle suivante est dérivable en déduction naturelle.

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad x \text{ non libre dans } \Gamma, B}{\Gamma, \exists x, A \vdash B} \; (\exists_g)$$

Question 6. Montrer en utilisant la déduction naturelle que toute relation binaire symétrique, transitive et sans élément maximal est réflexive.

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\ (\text{ax}) \qquad \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, G \vdash F}\ (\text{aff})$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \wedge G}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash F}\ (\wedge_e^g) \quad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash G}\ (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vee_i^g) \quad \frac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \vee G}\ (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \vee G \quad \Gamma, F \vdash H \quad \Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash H}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg F \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\ (\bot_c)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \text{ où } x \text{ non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x, F}\ (\forall_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x, F}{\Gamma \vdash F[x \to t]}\ (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F[x \to t]}{\Gamma \vdash \exists x, F}\ (\exists_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x, F \quad \Gamma \cup \{F\} \vdash G \quad x \text{ libre ni dans } \Gamma \text{ ni dans } G}{\Gamma \vdash G}\ (\exists_e)$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}\ (=_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash F[x \to t] \quad \Gamma \vdash t = s}{\Gamma \vdash F[x \to s]}\ (=_e)$$