Faculté des Sciences et Technologies
Dpt Informatique

LIF064 - Optimisation – TD2
Méthode des deux phases

Exercice 1

Résoudre le problème suivant à l'aide de la méthode des 2 phases.

$$\max_{x_1,x_2} z = 2x_1 - x_2 \qquad \text{s.c.} \qquad \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \leq -19 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 32 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le système de contrainte est équivalent à $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 19 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 32 \end{cases}$

Afin de convertir les inéquations en équations, nous devons introduire des variables d'écart (à coefficient négatif pour les supériorités et positif pour les infériorités). Ce qui nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - e_1 = 19 \\ 3x_1 + 4x_2 + e_2 = 32 \end{cases}$$

Mais (e_1, e_2) n'est pas une base, la valeur triviale $(0,0,-19,32)$ n'est pas solution car e_1 doit être positif ou nul. Nous introduisons donc des variables artificielles (pour les supériorités et les égalités). Ici juste la première contrainte est concernée, et devient $2x_1 + 3x_2 - e_1 + s_1 = 19$.

Le nouveau problème est donc :

$$\max z = 2x_1 - x_2 + s_1 \qquad \text{s.c.} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - e_1 + s_1 = 19 \\ 3x_1 + 4x_2 + e_2 = 32 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, s_1 \geq 0 \end{cases}$$

Dont une base valide est cette fois (s_1, e_2).

Pour trouver une solution réalisable au problème initial, on veut que $s_1 = 0$ dans la solution optimale de ce second problème. On le vérifie en calculant sa valeur minimale et en la comparant à zéro, c.-à-d. :

$$\min z' = s_1 \qquad \text{s.c.} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - e_1 + s_1 = 19 \\ 3x_1 + 4x_2 + e_2 = 32 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, s_1 \geq 0 \end{cases}$$

Dans la méthode à deux phases, on remplace ce problème par la maximisation de l'opposé de la variable artificielle :

$$\max z'' = -s_1 \qquad \text{s.c.} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - e_1 + s_1 = 19 \\ 3x_1 + 4x_2 + e_2 = 32 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, s_1 \geq 0 \end{cases}$$

Or on a $2x_1 + 3x_2 - e_1 + s_1 = 19 \Leftrightarrow -s_1 = 2x_1 + 3x_2 - e_1 - 19$, d'où :

$$\max z'' = 2x_1 + 3x_2 - e_1 - 19 \qquad \text{s.c.} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - e_1 + s_1 = 19 \\ 3x_1 + 4x_2 + e_2 = 32 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, s_1 \geq 0 \end{cases}$$

Ce problème peut être résolu par la méthode du simplexe classique.

$$\begin{cases} s_1 = 19 - 2x_1 - 3x_2 + e_1 \\ e_2 = 32 - 3x_1 - 4x_2 \\ z'' = 2x_1 + 3x_2 - e_1 - 19 \end{cases}$$

On choisit x_2 pour entrer en base (plus grand coefficient) et s_1 pour en sortir (plus bas ratio). En exprimant x_2 en fonction des nouvelles variables hors base $x_2 = \frac{19}{3} - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{3}s_1$ on obtient le système :

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{19}{3} - \dfrac{2}{3}x_1 + \dfrac{1}{3}e_1 - \dfrac{1}{3}s_1 \\ e_2 = \dfrac{20}{3} - \dfrac{1}{3}x_1 - \dfrac{4}{3}e_1 + \dfrac{4}{3}s_1 \\ z'' = -s_1 \end{cases}$$

Ce qui termine l'optimisation avec la solution $\left(0, \frac{19}{3}, 0, \frac{20}{3}, 0\right)$ où on a bien $s_1 = 0$.

Nous pouvons revenir à notre problème initial, mais avec $s_1 = 0$ (i.e. sans les variables artificielles). On peut résoudre le système initial par une deuxième phase de résolution par simplexe, en partant de la dernière itération de la résolution précédente qui nous donne une base valide. Il faut juste exprimer z en fonction des variables hors bases (et non plus z''). On a $z = 2x_1 - x_2 = -\frac{19}{3} + \frac{8}{3}x_1 - \frac{1}{3}e_1$

On peut résoudre le système initial par une deuxième phase de résolution par simplexe :

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{19}{3} - \dfrac{2}{3}x_1 + \dfrac{1}{3}e_1 \\ e_2 = \dfrac{20}{3} - \dfrac{1}{3}x_1 - \dfrac{4}{3}e_1 \\ z = -\dfrac{19}{3} + \dfrac{8}{3}x_1 - \dfrac{1}{3}e_1 \end{cases}$$

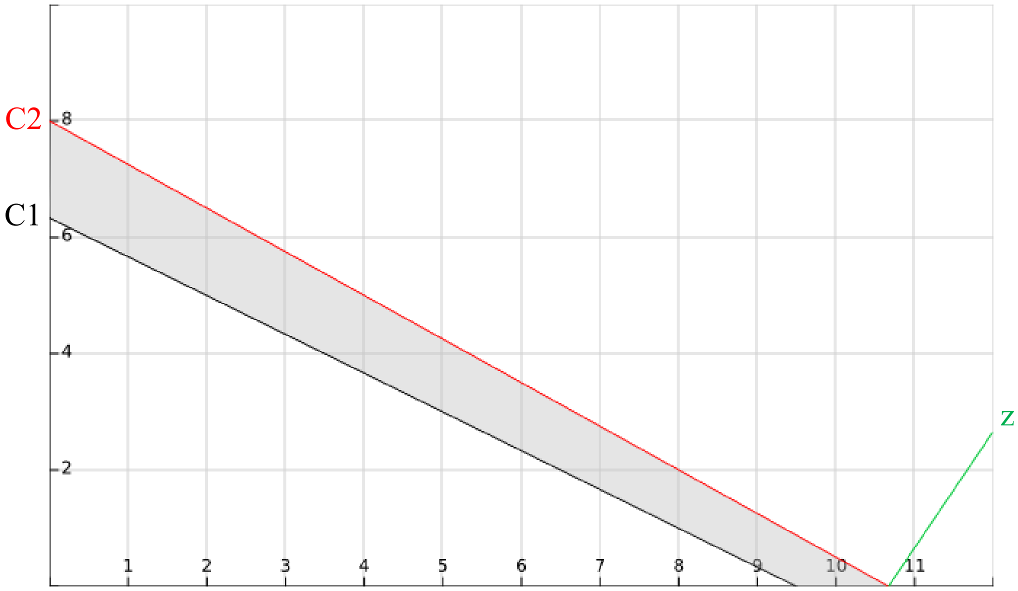
On choisit x_1 pour entrer dans la base (plus grand coefficient), et x_2 pour en sortir (plus petit ratio). En exprimant x_1 en fonction des nouvelles variables hors base $x_1 = \frac{19}{2} - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}e_1$ on obtient le système :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{19}{2} - \dfrac{3}{2}x_2 + \dfrac{1}{2}e_1 \\ e_2 = \dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{3}{2}e_1 \\ z = 19 - 4x_2 + e_1 \end{cases}$$

On choisit e_1 pour entrer dans la base (plus grand coefficient), et e_2 pour en sortir (plus petit ratio). En exprimant e_1 en fonction des nouvelles variables hors base $e_1 = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}e_2$ on obtient le système :

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{3}x_2 - \dfrac{2}{3}e_2 \\ x_1 = \dfrac{32}{3} - \dfrac{4}{3}x_2 - \dfrac{1}{3}e_2 \\ z = \dfrac{64}{3} - \dfrac{11}{3}x_2 - \dfrac{2}{3}e_2 \end{cases}$$

Ce qui termine l'optimisation avec la solution $\left(\frac{32}{3}, 0, \frac{7}{3}, 0\right)$, donc $x_1 = \frac{32}{3}, x_2 = 0$ pour un coût maximal $z = \frac{64}{3}$.



Exercice 2

Résoudre le problème suivant à l'aide de la méthode des 2 phases.

$$\max_{x_1,x_2} z = 1000x_1 + 1200x_2 \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} 10x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ 2x_1 + 3x_2 = 60 \\ x_1 \leq 12 \\ x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Afin de convertir les inéquations en équations, nous devons introduire des variables d'écart (à coefficient négatif pour les supériorités et positif pour les infériorités). Ce qui nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 + e_1 = 200 \\ 2x_1 + 3x_2 = 60 \\ x_1 + e_2 = 12 \\ x_2 - e_3 = 6 \end{cases}$$

La valeur triviale $(0,0,200,12,-6)$ n'est pas solution car e_3 doit être positif ou nul. Nous introduisons donc des variables artificielles (pour les supériorités et les égalités). Le nouveau problème est donc :

$$\max z = 1000x_1 + 1200x_2 + s_1 + s_2 \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} 10x_1 + 5x_2 + e_1 = 200 \\ 2x_1 + 3x_2 + s_1 = 60 \\ x_1 + e_2 = 12 \\ x_2 - e_3 + s_2 = 6 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dont une base valide est cette fois (e_1, s_1, e_2, s_2).

Pour trouver une solution réalisable au problème initial, on veut que $s_1 = s_2 = 0$ dans la solution optimale de ce second problème. On le vérifie en calculant la somme de leur valeur minimale et en la comparant à zéro, c.-à-d. :

$$\min z' = s_1 + s_2 \qquad \text{s.c.} \qquad \begin{cases} 10x_1 + 5x_2 + e_1 = 200 \\ 2x_1 + 3x_2 + s_1 = 60 \\ x_1 + e_2 = 12 \\ x_2 - e_3 + s_2 = 6 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dans la méthode à deux phases, on remplace ce problème par la maximisation de l'opposé de la somme :

$$\max z'' = -s_1 - s_2 \qquad \text{s.c.} \qquad \begin{cases} 10x_1 + 5x_2 + e_1 = 200 \\ 2x_1 + 3x_2 + s_1 = 60 \\ x_1 + e_2 = 12 \\ x_2 - e_3 + s_2 = 6 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Or on a
$2x_1 + 3x_2 + s_1 = 60 \Leftrightarrow -s_1 = -60 + 2x_1 + 3x_2$, et
$x_2 - e_3 + s_2 = 6 \Leftrightarrow -s_2 = -6 + x_2 - e_3$, d'où :

$$\max z'' = 2x_1 + 4x_2 - e_3 - 66 \qquad \text{s.c.} \qquad \begin{cases} 10x_1 + 5x_2 + e_1 = 200 \\ 2x_1 + 3x_2 + s_1 = 60 \\ x_1 + e_2 = 12 \\ x_2 - e_3 + s_2 = 6 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ce problème peut être résolu par la méthode du simplexe classique (ici par tableau).

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	s_1	s_2	
e_1	10	5	1	0	0	0	0	200
s_1	2	3	0	0	0	1	0	60
e_2	1	0	0	1	0	0	0	12
s_2	0	1	0	0	-1	0	1	6
z''	2	4	0	0	-1	0	0	66

On choisit x_2 pour entrer en base (plus grand coefficient) et s_2 pour en sortir (plus bas ratio).

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	s_1	s_2		
e_1	10	0	1	0	5	0	-5	170	$e_1 - 5x_2$
s_1	2	0	0	0	3	1	-3	42	$s_1 - 3x_2$
e_2	1	0	0	1	0	0	0	12	Déjà à 0
x_2	0	1	0	0	-1	0	1	6	Déjà à 1
z''	2	0	0	0	3	0	-4	42	$z'' - 4x_2$

On choisit e_3 pour entrer en base (plus grand coefficient) et s_1 pour en sortir (plus bas ratio).

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	s_1	s_2		
e_1	20/3	0	1	0	1	-5/3	0	100	$e_1 - 5e_3$
e_3	2/3	0	0	0	1	1/3	-1	14	$e_3/3$
e_2	1	0	0	1	0	0	0	12	Déjà à 0
x_2	2/3	1	0	0	0	1/3	0	20	$x_2 + e_3$
z''	0	0	0	0	0	-1	-1	0	$z'' - 3e_3$

Tous les coefficients sont négatifs donc l'optimisation par la méthode du simplexe est finie. La solution obtenue est (0,20,100,12,14,0,0), où on a bien $s_1 = s_2 = z = 0$.

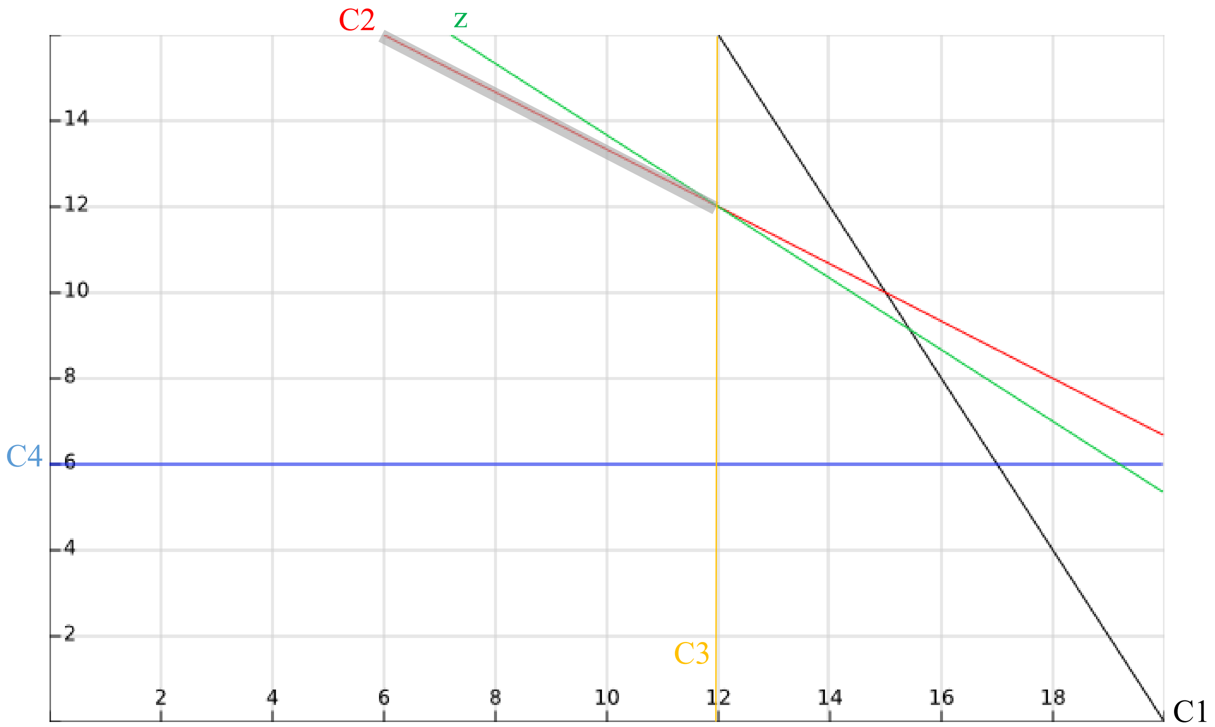
Nous pouvons revenir à notre problème initial, mais avec $s_1 = s_2 = 0$ (i.e. sans les variables artificielles). On peut résoudre le système initial par une deuxième phase de résolution par simplexe, en partant de la dernière itération de la résolution précédente qui nous donne une base valide. Il faut juste exprimer z en fonction des variables hors bases (et non plus z''). On a $z = 1000x_1 + 1200x_2 = 1000x_1 + 1200\left(20 - \frac{2}{3}x_1\right) = 200x_1 + 24000$

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	20/3	0	1	0	1	100
e_3	2/3	0	0	0	1	14
e_2	1	0	0	1	0	12
x_2	2/3	1	0	0	0	20
z	200	0	0	0	0	-24000

On choisit x_1 pour entrer en base (plus grand coefficient et le seul) et e_2 pour en sortir (plus bas ratio).

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3		
e_1	0	0	1	-20/3	1	20	$e_1 - 20x_1/3$
e_3	0	0	0	-2/3	1	6	$e_3 - 2x_1/3$
x_1	1	0	0	1	0	12	Déjà à 1
x_2	0	1	0	-2/3	0	12	$x_2 - 2x_1/3$
z	0	0	0	-200	0	-26400	$z - 200x_1$

Ce qui termine l'optimisation avec la solution $(12,12,20,0,6)$, donc $x_1 = 12, x_2 = 12$ pour un coût maximal $z = 26400$.



Exercice 3

Résoudre le problème suivant à l'aide de la méthode des 2 phases.

$$\min_{x_1,x_2} z = 6x_1 + 3x_2 \qquad \text{s.c.} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ 3x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Afin de minimiser z, nous allons maximiser $-z$ avec les mêmes contraintes. Afin de convertir les inéquations en équations, nous devons introduire des variables d'écart (à coefficient négatif pour les supériorités et positif pour les infériorités). Ce qui nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - e_1 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - e_2 = 1 \\ 3x_2 + e_3 = 2 \end{cases}$$

La valeur triviale $(0,0,-1,-1,2)$ n'est pas solution car e_1 et e_2 doivent être positifs ou nuls. Nous introduisons donc des variables artificielles (pour les supériorités et les égalités). Le nouveau problème est donc :

$$\max z = -6x_1 - 3x_2 + s_1 + s_2 \qquad \text{s.c.} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - e_1 + s_1 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - e_2 + s_2 = 1 \\ 3x_2 + e_3 = 2 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dont une base valide est cette fois (s_1, s_2, e_3).

Pour trouver une solution réalisable au problème initial, on veut que $s_1 = s_2 = 0$ dans la solution optimale de ce second problème. On le vérifie en calculant la somme de leur valeur minimale et en la comparant à zéro, c.-à-d. :

$$\min z' = s_1 + s_2 \qquad \text{s.c.} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - e_1 + s_1 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - e_2 + s_2 = 1 \\ 3x_2 + e_3 = 2 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dans la méthode à deux phases, on remplace ce problème par la maximisation de l'opposé de la somme :

$$\max z'' = -s_1 - s_2 \qquad \text{s.c.} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - e_1 + s_1 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - e_2 + s_2 = 1 \\ 3x_2 + e_3 = 2 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Or on a
$x_1 + x_2 - e_1 + s_1 = 1 \Leftrightarrow -s_1 = -1 + x_1 + x_2 - e_1$, et
$2x_1 - x_2 - e_2 + s_2 = 1 \Leftrightarrow -s_2 = -1 + 2x_1 - x_2 - e_2$, d'où :

$$\max z'' = 3x_1 - e_1 - e_2 - 2 \qquad \text{s.c.} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - e_1 + s_1 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - e_2 + s_2 = 1 \\ 3x_2 + e_3 = 2 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ce problème peut être résolu par la méthode du simplexe classique (ici par tableau).

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	s_1	s_2	
s_1	1	1	-1	0	0	1	0	1
s_2	2	-1	0	-1	0	0	1	1
e_3	0	3	0	0	1	0	0	2
z''	3	0	-1	-1	0	0	0	2

On choisit x_1 pour entrer en base (plus grand coefficient) et s_2 pour en sortir (plus bas ratio).

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	s_1	s_2		
s_1	0	3/2	-1	1/2	0	1	-1/2	1/2	$s_1 - x_1$
x_1	1	-1/2	0	-1/2	0	0	1/2	1/2	$x_1/2$
e_3	0	3	0	0	1	0	0	2	Déjà à 0
z''	0	3/2	-1	1/2	0	0	-3/2	1/2	$z'' - 3x_1$

On choisit x_2 pour entrer en base (plus grand coefficient) et s_1 pour en sortir (plus bas ratio).

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	s_1	s_2		
x_2	0	1	-2/3	1/3	0	2/3	-1/3	1/3	$2x_2/3$
x_1	1	0	-1/3	-1/3	0	1/3	1/3	2/3	$x_1 + x_2/2$
e_3	0	0	2	-1	1	-2	1	1	$e_3 - 3x_2$
z''	0	0	0	0	0	-1	-1	0	$z'' - 3x_2/2$

Tous les coefficients sont négatifs donc l'optimisation par la méthode du simplexe est finie. La solution obtenue est $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0,0,1,0,0\right)$, où on a bien $s_1 = s_2 = z = 0$. Nous pouvons revenir à notre problème initial, mais avec $s_1 = s_2 = 0$ (i.e. sans les variables artificielles). On peut résoudre le système initial par une deuxième phase de résolution par simplexe, en partant de la dernière itération de la résolution précédente qui nous donne une base valide. Il faut juste exprimer z en fonction des variables hors bases (et non plus z''). On a $z = -6x_1 - 3x_2 = -6\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2\right) - 3\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2\right) = -5 - 4e_1 - e_2$

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
x_2	0	1	-2/3	1/3	0	1/3
x_1	1	0	-1/3	-1/3	0	2/3
e_3	0	0	2	-1	1	1
z	0	0	-4	-1	0	-5

L'optimisation est déjà terminée (pas de coefficient positif). On a la solution $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0,0,1\right)$ avec $z = 5$.