TD1 – Rappels mathématiques, alphabets et langages

1. Les ensembles suivants sont-ils stables pour l'opération indiquée ? Si la réponse est négative, donnez leur clôture.
   a) L'ensemble des entiers naturels pour l'addition.
   b) L'ensemble des entiers naturels pour la soustraction.
   c) L'ensemble des entiers relatifs pour la soustraction.
   d) L'ensemble des entiers impairs pour la multiplication.
   e) L'ensemble des entiers négatifs pour la soustraction.
   f) L'ensemble des entiers négatifs pour la multiplication.
   g) L'ensemble des intervalles de **N** pour $\cup$.
   h) L'ensemble des intervalles de **N** pour $\cap$.

2. Comme les relations sont des ensembles, on peut parler de fermeture d'une relation (ensemble) par une autre relation (opération).
   - la fermeture réflexive transitive d'une relation R, notée R^* est la fermeture de R pour les relations de réflexivité et de transitivité,
   - la fermeture transitive de R est notée R^+

Donnez la fermeture réflexive transitive de la relation R = {(a, a), (a, c), (a, d), (d, d), (d, e), (e, b), (e, e)}

3. Soit un ensemble E. On définit sur P(E) la relation binaire R : X R Y $\Leftrightarrow$ X et Y ont le même nombre d'éléments. Montrez que R est une relation d'équivalence.

4. Soient R_1 et R_2 deux ordres partiels sur un même ensemble E. Montrez que $R_1 \cap R_2$ est également un ordre partiel.

5. Soient A et B deux ensembles finis. Combien existe-t-il d'applications de A vers B ? Combien sont injectives ? Combien sont surjectives ?

6. Montrez que **N** \ {3,4,5} est dénombrable.

7. Montrez que s'il existe une injection d'un ensemble E dans **N**, alors E est fini ou dénombrable.

8. Montrez que s'il existe une surjection de **N** vers un ensemble E, alors E est fini ou dénombrable.

9. Soit E un ensemble dénombrable, et E' $\subset$ E. Montrez que E' est également dénombrable.

10. Montrez que **N** $\times$ **N** est dénombrable.

11. Montrez que le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

12. Montrez que l'ensemble $\mathbf{Q}^+$ des nombres rationnels positifs est dénombrable.

13. Montrez par induction le théorème suivant :
    Soit A un ensemble fini. $|P(A)| = 2^{|A|}$.

14. Montrez que l'ensemble des parties d'un ensemble dénombrable n'est pas dénombrable.

15. Soit Σ un alphabet tel que $|\Sigma| = n$. Combien existe-t-il de mots de longueur $k \geq 0$? Combien existe-t-il de mots de longueur au plus $k \geq 0$?

16. Montrez que pour tout langage L, $L^* = (L^*)^*$.

17. Montrez qu'il existe des langages L_1 et L_2 tels que
    - $(L_1 \cup L_2)^* \neq L_1^* \cup L_2^*$
    - $(L_1 . L_2)^* \neq L_1^* . L_2^*$

18. Donnez un algorithme pour énumérer tous les mots de longueur au plus k sur un alphabet à n symboles.