Lundi 27 Avril 2015 - UE LIFO63
Durée 1h30 min - Noté sur 15

Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables et les ordinateurs sont interdits.
Une calculatrice simple est autorisée.

EXERCICE 1 : **Interpolation** *[3pts +0.5]*

Soit la fonction $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$, on souhaite créer un polynôme p de degré 2 qui interpole f. Pour ceci nous utilisons les points d'abscisse $x = \{0, 1, 2\}$.

Question 1.1.A [1 point] Calculer le polynôme p par la méthode d'interpolation de **Lagrange**.

Dans la méthode d'interpolation de Lagrange le polynôme est de la forme : $P(x) = p_0(x) + \cdots + p_n(x)$ avec $n + 1$ points de support et

$$p_i(x) = y_i \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

Les points de support sont : (0,-1) (1,-2) et (2,-3).

Donc ici nous avons :

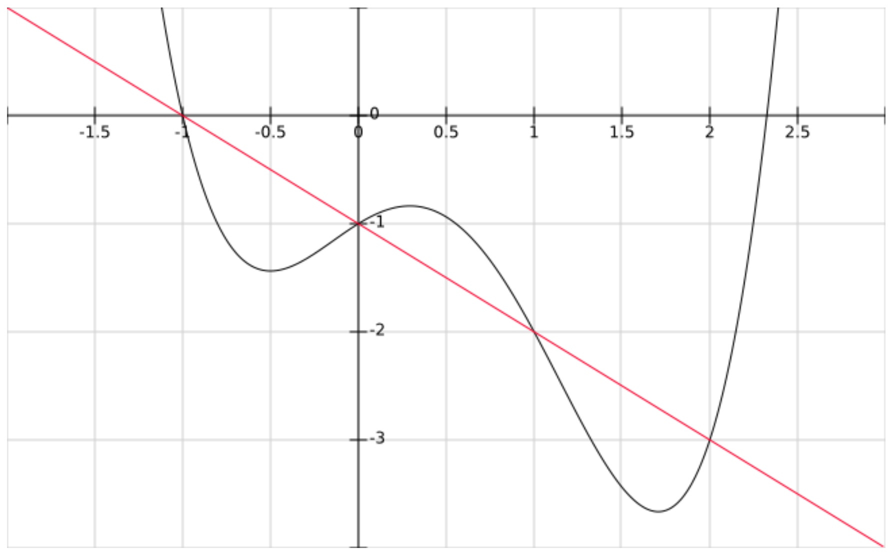
$$p_0(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = -1 \frac{x - 1}{0 - 1} \frac{x - 2}{0 - 2} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$$
$$p_1(x) = y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = -2 \frac{x - 0}{1 - 0} \frac{x - 2}{1 - 2} = 2x^2 - 4x$$
$$p_2(x) = y_2 \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = -3 \frac{x - 0}{2 - 0} \frac{x - 1}{2 - 1} = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$$

Finalement on obtient :

$$P(x) = p_0(x) + p_1(x) + p_2(x) = -x - 1$$

Question 1.1.B [0.25 point] Que constatez-vous ? Ce résultat était-il prévisible dès le départ (justification) ?

Le polynôme se réduit en fait à une droite car les trois points de support sont alignés.



Question 1.2 [0.25 point] Calculer et expliquer l'erreur d'interpolation commise en utilisant p pour le point d'abscisse $x = 1$.

Pour le point d'abscisse $x = 1$, nous avons $p(1) = -1 - 2 = -2$ qui donne une erreur d'interpolation nulle bien sur puisque ce point est un point de support.

Question 1.3 [0.5 point] Calculer l'erreur d'interpolation commise en utilisant p pour le point d'abscisse $x = \frac{1}{2}$.

Calculons la valeur de l'interpolation pour $x = \frac{1}{2}$. Nous avons $p\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$
Alors que nous avons la valeur originale $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{16} = -0.9375$
L'erreur commise est donc $e = \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - p\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{9}{16} = 0.5625$

Question 1.4 [1 point] Donner l'expression de l'erreur théorique d'interpolation de f par p dans l'intervalle $[0,2]$ (il n'est pas demandé de calculer sa majoration). Et expliquer si l'erreur obtenue en question 1.3 est plus grande ou plus petite que l'erreur théorique maximale.

Si p est le polynôme d'interpolation d'une fonction f pour support les points $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, l'erreur commise en remplaçant la valeur $f(x)$ par $p(x)$ est donnée en fonction de ξ par l'expression suivante :

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

Ici, avec nos trois points de support :

$$e(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = \frac{24\xi - 12}{6}x(x-1)(x-2)$$

avec $\xi \in [0,2]$

L'erreur obtenue à la question 1.3 est nécessairement plus petite que l'erreur théorique maximale, puisque cette erreur est donnée pour un point particulier (i.e. $-\frac{1}{2}$) alors que l'erreur théorique maximale est la pire des erreurs possible pour l'ensemble de l'intervalle.

Question Bonus [0.5 point] Donner une majoration de l'erreur théorique.

Il nous faut trouver un majorant de $e(x)$ pour tout $x \in [0,2]$. Bien sûr on choisit $\xi = 2$. Il reste à étudier $g(x) = x(x-1)(x-2)$ pour en trouver un majorant. On a $g'^{(x)} = 3x^2 - 6x + 2$ qui s'annule en $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ donnant une majoration $|g(x)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Nous avons donc :

$$|e(x)| \leq \frac{24 \times 2 - 12}{6} \times \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2.31$$

EXERCICE 2 : Splines cubiques d'interpolation [3 pts]

Le tableau ci-dessous donne un extrait de relevés de terrain pour la modélisation d'un tracé $y = f(x)$

x_i	0	1	2
$y_i = f(x_i)$	y_0	y_1	y_2

On modélise ce tracé par une spline cubique d'interpolation $\boldsymbol{S(x)}$ passant par les 3 points $\{(x_i, y_i)\}$ qui s'écrit sous la forme :

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ S_2(x) & \text{si} \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

Question 2.1 [1.5 points] En appliquant la définition, préciser les 6 conditions que doivent vérifier $\mathrm{S}_1(\mathrm{x})$ et $\mathrm{S}_2(\mathrm{x})$ aux points $(\mathrm{x_i}, \mathrm{y_i})$ pour que la fonction S soit une fonction spline cubique d'interpolation.

Nous avons les six conditions :

$$\begin{cases} S_1(0) = y_0 \\ S_1(1) = y_1 \\ S_1(1) = S_2(1) \\ S_2(2) = y_2 \\ S_1'(1) = S_2'(1) \\ S_1''(1) = S_2''(1) \end{cases}$$

Question 2.2 [0.5 point] Compléter les conditions données en 2.1 ci-dessus pour que $\mathrm{S(x)}$ soit une fonction spline cubique d'interpolation naturelle.

Pour que la spline soit naturelle il faut les 2 conditions supplémentaires suivantes :

$$\begin{cases} S_1''(0) = 0 \\ S_2''(2) = 0 \end{cases}$$

La fonction $S(x)$ est donnée par :

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = \boldsymbol{A} - 2x + x^3 & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ S_2(x) = 4 - \boldsymbol{B}x + \boldsymbol{C}x^2 + \boldsymbol{D}x^3 & \text{si} \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

et le tableau

x_i	0	1	2
y_i	2	1	4

Question 2.3 [1 point] Déterminer les coefficients A, B, C, D de sorte que $\boldsymbol{S(x)}$ soit la spline cubique naturelle qui passe par ces 3 points.

On exprime les conditions de continuité de S et de ses dérivées S' et S'' aux points de jonction donnés dans le tableau {(0,2) ; (1,1) ; (2,4)} on obtient :

$$\begin{cases} S_1(0) = y_0 \\ S_1(1) = y_1 \\ S_1(1) = S_2(1) \\ S_2(2) = y_2 \\ S_1'(1) = S_2'(1) \\ S_1''(1) = S_2''(1) \\ S_1''(0) = 0 \\ S_2''(2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A - 2\times 0 + 0^3 = 2 \\ A - 2\times 1 + 1^3 = 1 \\ A - 2\times 1 + 1^3 = 4 - B\times 1 + C\times 1^2 + D\times 1^3 \\ 4 - B\times 2 + C\times 2^2 + D\times 2^3 = 4 \\ -2 + 3\times 1^2 = -B + 2C\times 1 + 3D\times 1^2 \\ 6\times 1 = 2C + 6D\times 1 \\ 6\times 0 = 0 \\ 2C + 6D\times 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ A = 2 \\ A = 5 - B + C + D \\ -2B + 4C + 8D = 0 \\ 1 = -B + 2C + 3D \\ 3 = C + 3D \\ 0 = 0 \\ 2C + 12D = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne $\mathrm{A} = 2, \mathrm{B} = 8, \mathrm{C} = 6, \mathrm{D} = -1$

EXERCICE 3 : Approximation [5 pts]

Le tableau ci-dessous donne les bénéfices de la banque BANKROOT au 1er Janvier des années 2011 à 2015.

Année	2011	2012	2013	2014	2015
Indice année	1	2	3	4	5
Bénéfice (M€)	2	6	9	10	9

On souhaite modéliser l'évolution des bénéfices des 3 dernières années (2013 à 2015 inclus) par une fonction quadratique ; on opte pour la méthode d'interpolation de Newton.

Question 3.1.A [1 point] Donner le tableau des différences divisées pour cette fonction.

On calcule les coefficients du polynôme p par tableau :

$x_0 = 3$	$f[x_0] = 9 = a_0$		
$x_1 = 4$	$f[x_1] = 10$	$f[x_0, x_1] = \frac{9-10}{3-4} = 1 = a_1$	
$x_2 = 5$	$f[x_2] = 9$	$f[x_1, x_2] = \frac{10-9}{4-5} = -1$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1+1}{3-5} = -1 = a_2$

Question 3.1.B [1 point] En utilisant les résultats obtenus en (3.1.A), donner le polynôme d'interpolation de Newton. Donner l'expression canonique de ce polynôme.

Le polynôme final est donné par :

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Ici nous avons donc :

$$p(x) = 9 + (x - 3) - (x - 3)(x - 4) = -x^2 + 8x - 6$$

Question 3.2 [2 points] Afin d'affiner le modèle de l'évolution des bénéfices, on ajoute des données antérieures (années 2011 et 2012). On retient le modèle quadratique et on opte pour une approximation. En utilisant la méthode des moindres carrées, donner la nouvelle fonction quadratique exploitant les données sur les cinq (5) années.

Le polynôme est défini par $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ dont les coefficients sont solutions de :

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum x_i & \sum {x_i}^2 \\ \sum x_i & \sum {x_i}^2 & \sum {x_i}^3 \\ \sum {x_i}^2 & \sum {x_i}^3 & \sum {x_i}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i {x_i}^2 \end{bmatrix}$$

Ici on a les sommes suivantes :

x_i	${x_i}^2$	${x_i}^3$	${x_i}^4$	y_i	$y_i x_i$	$y_i {x_i}^2$
1	1	1	1	2	2	2
2	4	8	16	6	12	24
3	9	27	81	9	27	81
4	16	64	256	10	40	160
5	25	125	625	9	45	225
$\sum = 15$	$\sum = 55$	$\sum = 225$	$\sum = 979$	$\sum = 36$	$\sum = 126$	$\sum = 492$

Nous avons donc le système linéaire en matrice :

$$\begin{bmatrix} 5 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 126 \\ 492 \end{bmatrix}$$

La solution de ce système est :

$$a_0 = -\frac{21}{5} = -4.2 \quad , \quad a_1 = \frac{243}{35} \approx 6.943 \quad , \quad a_2 = -\frac{6}{7} \approx -0.857$$

Finalement le polynôme $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = -\frac{6}{7}\, x^2 + \frac{243}{35}\, x - \frac{21}{5}$

Question 3.4 [1 point] En supposant que cette dernière modélisation reste valide dans les années à venir, quel serait le bénéfice de la banque au 1er Janvier 2016 ?

Si cette modélisation reste valide alors on peut prévoir que le bénéfice au 1er Janvier 2016 sera :

$$p(6) = -\frac{6}{7} \times 6^2 + \frac{243}{35} \times 6 - \frac{21}{5} = \frac{33}{5} = 6.6 \text{ M€}$$