Faculté des Sciences et Technologies
Dpt Informatique

LIF064 - Optimisation – TD4

Programmation linéaire en nombres entiers (PLNE)

Exercice 1

Résoudre le problème suivant.

$$\max_{x_1,x_2} z = 2x_1 + x_2 \qquad \text{s.c.} \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ et } x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pour résoudre un PLNE, on résout d'abord le problème relaxé (i.e. sur $\mathbb{R}$) puis on explore les solutions optimales entières possibles (par exemple par l'algorithme de Dakin).

Premièrement on résout le problème relaxé avec la méthode du simplexe (par tableau).

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	-1	1	1	0	0	0
e_2	1	1	0	1	0	5
e_3	6	2	0	0	1	21
z	2	1	0	0	0	0

On choisit x_1 pour entrer dans la base et e_3 pour en sortir.

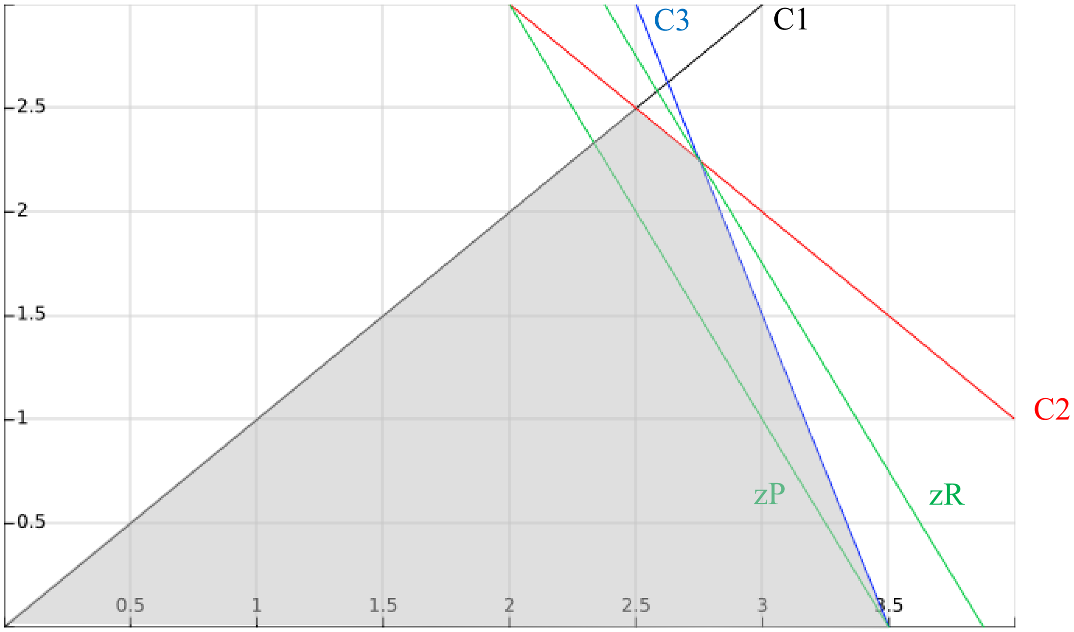
	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3		
e_1	0	4/3	1	0	1/6	7/2	$e_1 + x_1$
e_2	0	2/3	0	1	-1/6	3/2	$e_2 - x_1$
x_1	1	1/3	0	0	1/6	7/2	$x_1/6$
z	0	1/3	0	0	-1/3	-7	$z - 2x_1$

On choisit x_2 pour entrer dans la base et e_2 pour en sortir.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3		
e_1	0	0	1	-2	1/2	1/2	$e_1 - 4x_2/3$
x_2	0	1	0	3/2	-1/4	9/4	$3x_2/2$
x_1	1	0	0	-1/2	1/4	11/4	$x_1 - x_2/3$
z	0	0	0	-1/2	-1/4	-31/4	$z - x_2/3$

L'optimisation est terminée et la solution obtenue est $\left(\frac{11}{4}, \frac{9}{4}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$, d'où $x_1 = \frac{11}{4} = 2.75$ et $x_2 = \frac{9}{4} = 2.25$ avec un coût $z = \frac{31}{4} = 7.75$.

Mais ces valeurs ne sont pas entières, il faut donc rechercher les valeurs entières optimales, ici en utilisant l'algorithme de Dakin (parcours d'un arbre de recherche).



$$x_1 = \frac{11}{4} = 2.75 \ \text{ et } \ x_2 = \frac{9}{4} = 2.25 \text{ et } z = \frac{31}{4} = 7.75$$

$x_1 \leq 2$

$x_1 = 2$ et $x_2 = 2$ et $z = 6$
arrêt (solution entière)

$x_1 \geq 3$

$x_1 = 3$ et $x_2 = 1.5$ et $z = 7.5$

$x_2 \leq 1$

$$x_1 = \frac{19}{6} \approx 3.17 \text{ et } x_2 = 1 \text{ et } z = \frac{22}{3} \approx 7.33$$

$x_1 \leq 3$

$x_1 = 3$ et $x_2 = 1$ et $z = 7$
arrêt (solution entière)

$x_1 \geq 4$

Pas de solution

$x_2 \geq 2$

Pas de solution

La solution entière optimale est donc $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ pour un coût $z = 7$ un peu moins grand que celui sur les réels (pour rappel 7.75).

Exercice 2

Résoudre le problème suivant.

$$\max_{x_1,x_2} z = 8x_1 + 5x_2 \qquad \text{s.c.} \qquad \begin{cases} 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ et } x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On résout d'abord le problème relaxé avec la méthode du simplexe (par tableau).

	x_1	x_2	e_1	e_2	
e_1	9	5	1	0	45
e_2	1	1	0	1	6
z	8	5	0	0	0

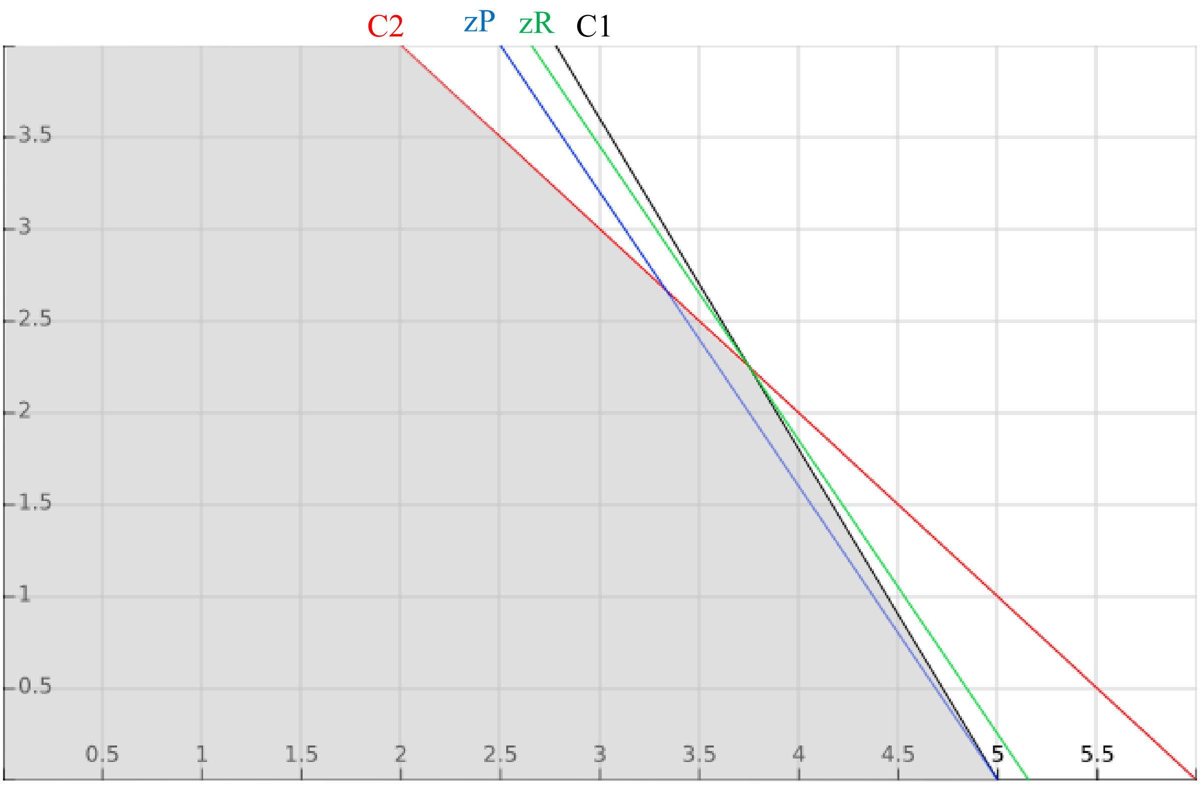
On choisit x_1 pour entrer dans la base et e_1 pour en sortir.

	x_1	x_2	e_1	e_2		
x_1	1	5/9	1/9	0	5	$x_1/9$
e_2	0	4/9	-1/9	1	1	$e_1 - x_1$
z	0	5/9	-8/9	0	-40	$z - 8x_1$

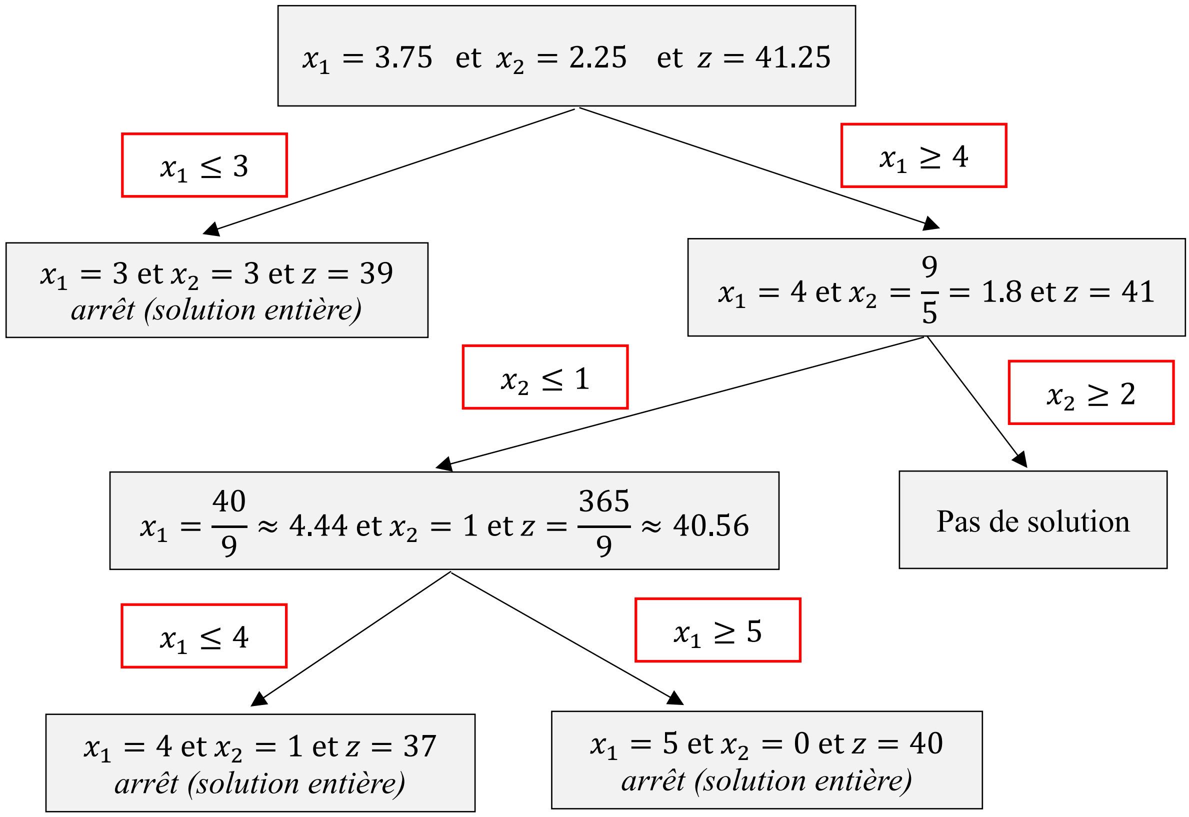
On choisit x_2 pour entrer dans la base et e_2 pour en sortir.

	x_1	x_2	e_1	e_2		
x_1	1	0	1/4	-5/4	15/4	$x_1 - 5x_2/9$
x_2	0	1	-1/4	9/4	9/4	$9x_2/4$
z	0	0	-3/4	-5/4	-41.25	$z - 5x_2/9$

L'optimisation est terminée et la solution obtenue est $\left(\frac{15}{4}, \frac{9}{4}, 0, 0\right)$, d'où $x_1 = \frac{15}{4} = 3.75$ et $x_2 = \frac{9}{4} = 2.25$ avec un coût $z = 41.25$.



Mais ces valeurs ne sont pas entières, il faut donc rechercher les valeurs entières optimales, ici en utilisant l'algorithme de Dakin (parcours d'un arbre de recherche).



La solution entière optimale est donc $x_1 = 5$, $x_2 = 0$ pour un coût $z = 40$ un peu moins grand que celui sur les réels (pour rappel 41.25).

Exercice 3

Résoudre le problème suivant.

$$\max_{x_1,x_2} z = 2x_1 + 3x_2 \qquad \text{s.c.} \qquad \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 11/2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ et } x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On utilise la méthode du simplexe par tableau pour déterminer la solution du problème relaxé.

	x_1	x_2	e_1	e_2	
e_1	-1	2	1	0	0
e_2	1	1	0	1	11/2
z	2	3	0	0	0

On choisit x_2 pour entrer en base et e_1 pour en sortir.

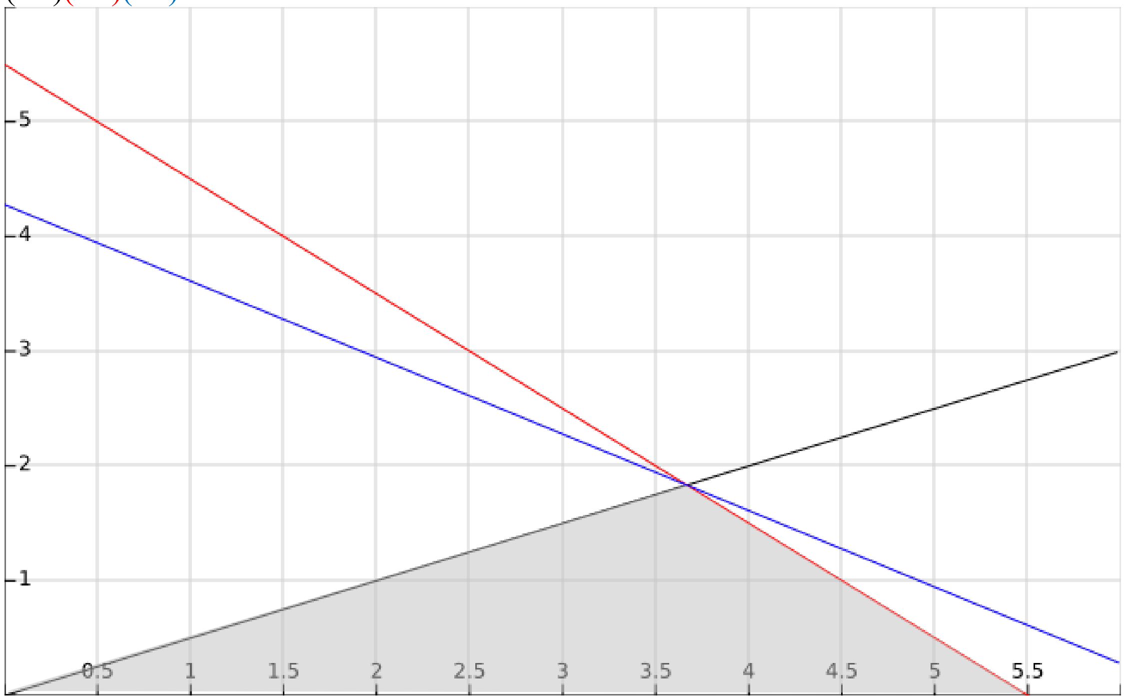
	x_1	x_2	e_1	e_2		
x_2	-0.5	1	0.5	0	0	$x_2/2$
e_2	1.5	0	-0.5	1	11/2	$e_2 - x_2$
z	3.5	0	-1.5	0	0	$z - 3x_2$

On choisit x_1 pour entrer en base et e_2 pour en sortir.

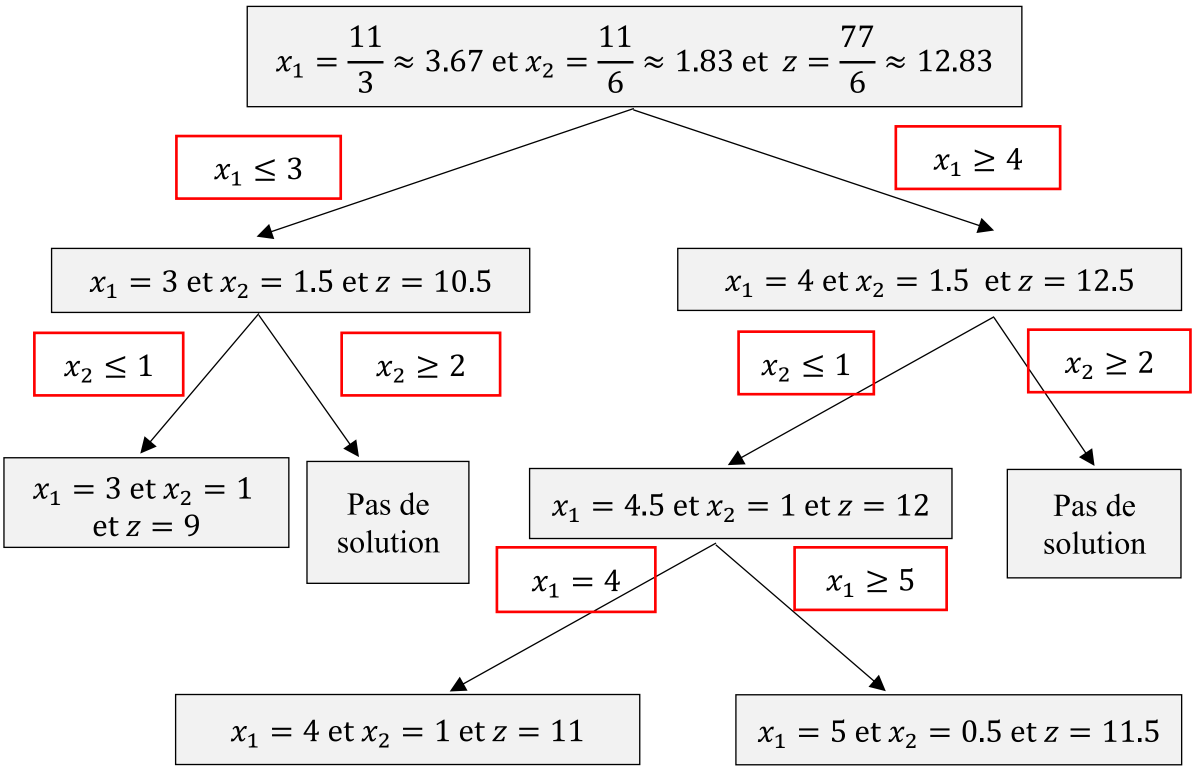
	x_1	x_2	e_1	e_2		
x_2	0	1	1/3	1/3	11/6	$x_2 + x_1/2$
x_1	1	0	-1/3	2/3	11/3	$x_1/1.5$
z	0	0	-1/3	-7/3	-77/6	$z - 3.5x_1$

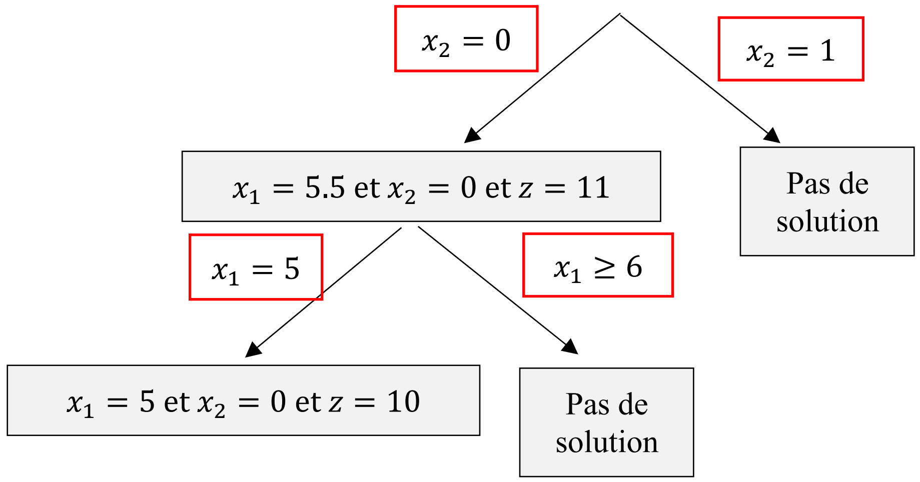
L'optimisation est terminée et la solution obtenue est $x_1 = \frac{11}{3} \approx 3.67$ et $x_2 = \frac{11}{6} \approx 1.83$ avec un coût $z = \frac{77}{6} \approx 12.83$.

(C1)(C2)(zR)



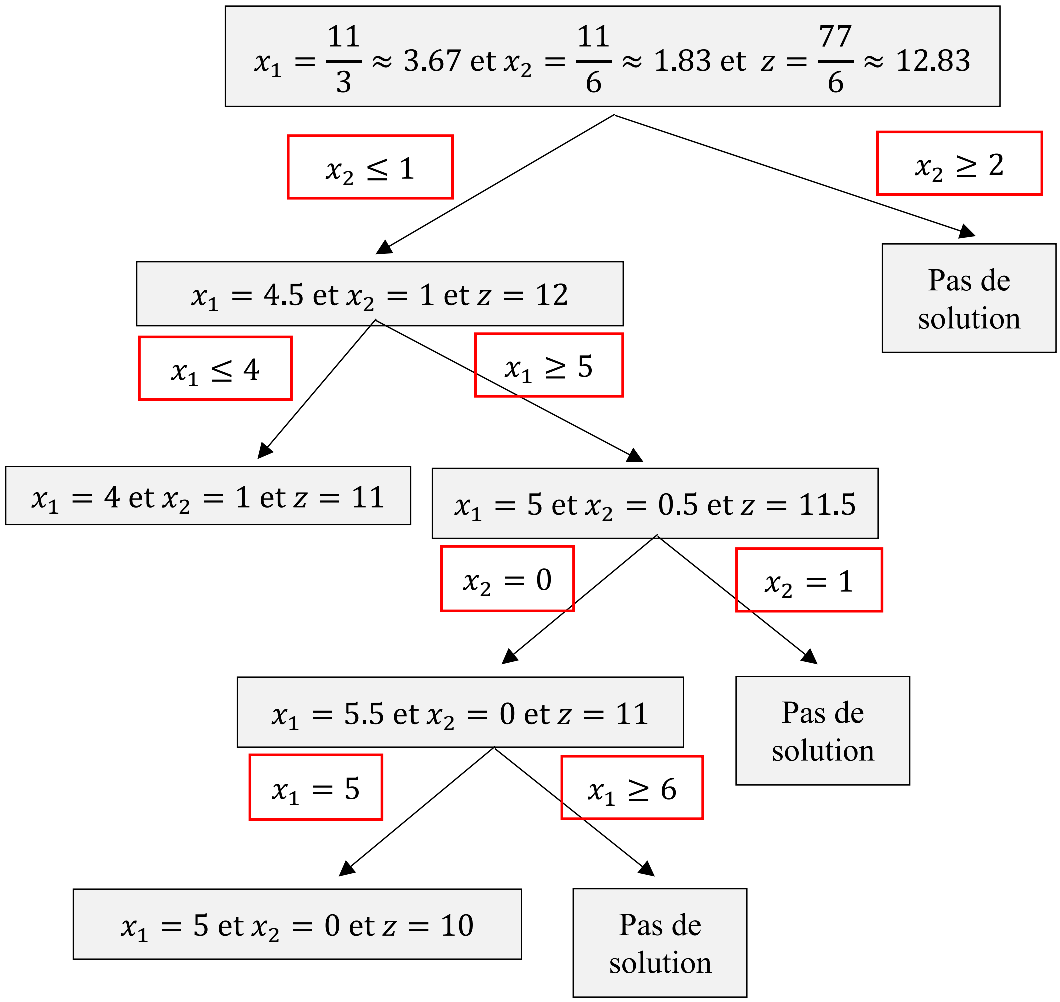
En choisissant x_1 comme première variable.





La solution entière optimale est donc $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ pour un coût $z = 11$ un peu moins grand que celui sur les réels (pour rappel 12.83).

En choisissant x_2 comme première variable.



On obtient bien sur la même solution (un peu plus rapidement).