LifLF – Théorie des langages formels

Sylvain Brandel
2019 – 2020
sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

CM 4

AUTOMATES À ÉTATS FINIS DÉTERMINISATION

Elimination du non-déterminisme

- Définition
  - 2 automates finis (déterministes ou non) sont équivalents ssi L(M) = L(M').

- Théorème

  Pour tout automate non déterministe, il existe un automate déterministe équivalent, et il existe un algorithme pour le calculer

  Cet algorithme est appelé déterminisation d'un automate.

Elimination du non-déterminisme
Preuve

- Soit $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ un automate non déterministe.
- Problème : $M' = (K', \Sigma, \delta', s', F')$? (M' déterministe)
- Démarche
  - Méthode pour construire M’
  - Montrer
    - M’ déterministe
    - M’ équivalent à M

Elimination du non-déterminisme

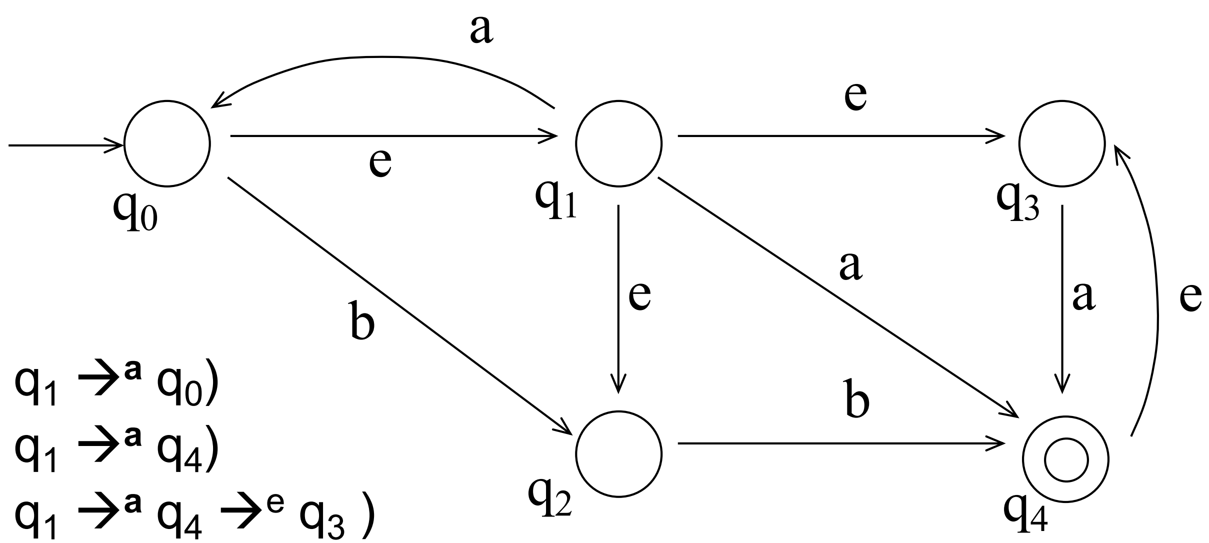
Preuve

- L'idée est la suivante :
  - Pour toute lettre σ de Σ, on considère l'ensemble des états qu'on peut atteindre en lisant σ.
  - On rassemble ces états et on considère des états étiquetés par des parties de K (P(K))
  - L'état initial de M' est l'ensemble des états atteignables en ne lisant aucune lettre.
  - Les états finaux de M' sont les parties (atteignables) de P(K) contenant au moins un état final (de M).

Elimination du non-déterminisme

Preuve

- Exemple



$q_0 \rightarrow^{\mathbf{a}}$ $\quad q_0\ (q_0 \rightarrow^{e} q_1 \rightarrow^{\mathbf{a}} q_0)$

$\quad q_4\ (q_0 \rightarrow^{e} q_1 \rightarrow^{\mathbf{a}} q_4)$

$\quad q_3\ (q_0 \rightarrow^{e} q_1 \rightarrow^{\mathbf{a}} q_4 \rightarrow^{e} q_3\ )$

$\quad q_1\ (q_0 \rightarrow^{e} q_1 \rightarrow^{\mathbf{a}} q_0 \rightarrow^{e} q_1)$

$\quad q_2\ (q_0 \rightarrow^{e} q_1 \rightarrow^{\mathbf{a}} q_0 \rightarrow^{e} q_1 \rightarrow^{e} q_2)$

$q_0 \rightarrow^{\mathbf{b}}$ $\quad q_2\ (q_0 \rightarrow^{\mathbf{b}} q_2)$

$\quad q_4\ (q_0 \rightarrow^{e} q_1 \rightarrow^{e} q_2 \rightarrow^{\mathbf{b}} q_4)$

$\quad q_3\ (q_0 \rightarrow^{e} q_1 \rightarrow^{e} q_2 \rightarrow^{\mathbf{b}} q_4 \rightarrow^{e} q_3)$

état initial : $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

Elimination du non-déterminisme
Preuve

- Prise en compte des ε-transitions : ε-clôture
- Soit $q \in K$, on note $E(q)$ l'ensemble des états de M atteignables sans lire aucune lettre :

$$E(q) = \{p \in K : (q, \varepsilon) \vdash_M^* (p, \varepsilon)\}$$

$E(q)$ est la clôture de $\{q\}$ par la relation binaire $\{(p, r) \mid (p, \varepsilon, r) \in \Delta\}$

- Construction de $E(q)$

$E(q) := \{q\}$
<u>tant que</u> il existe une transition $(p, \varepsilon, r) \in \Delta$ avec $p \in E(q)$ et $r \notin E(q)$
    $E(q) := E(q) \cup \{r\}$

Elimination du non-déterminisme
Preuve

- $\rightarrow M' = (K', \Sigma, \delta', s', F')$

avec $K' = P(K)$

$s' = E(s)$

$F' = \{Q \subset K : Q \cap F \neq \varnothing\}$

$\delta' = P(K) \times \Sigma \rightarrow P(K)$

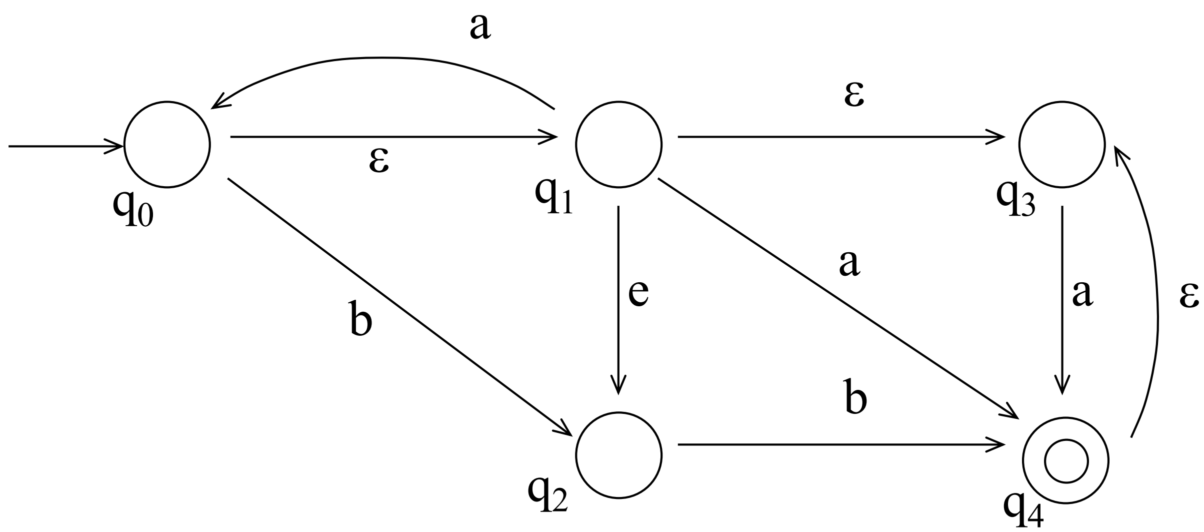
$\forall\, Q \subset K, \forall\, a \in \Sigma,$

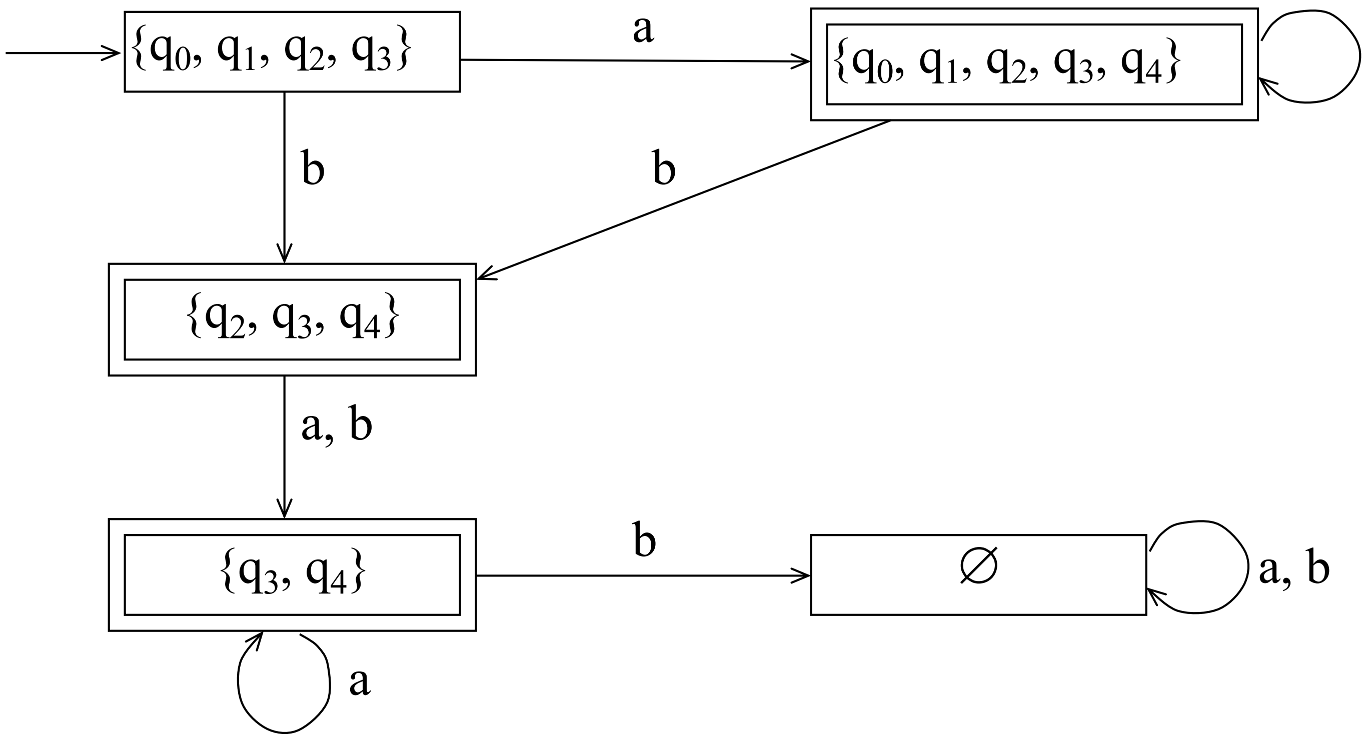
$$\delta'(Q, a) = \cup \{E(p) \mid \exists\, q \in Q : (q, a, p) \in \Delta\}$$

$\delta'(Q, a)$: ensemble de tous les états (de M) dans lesquels M peut aller en lisant a (y compris ε)

Elimination du non-déterminisme

Exemple



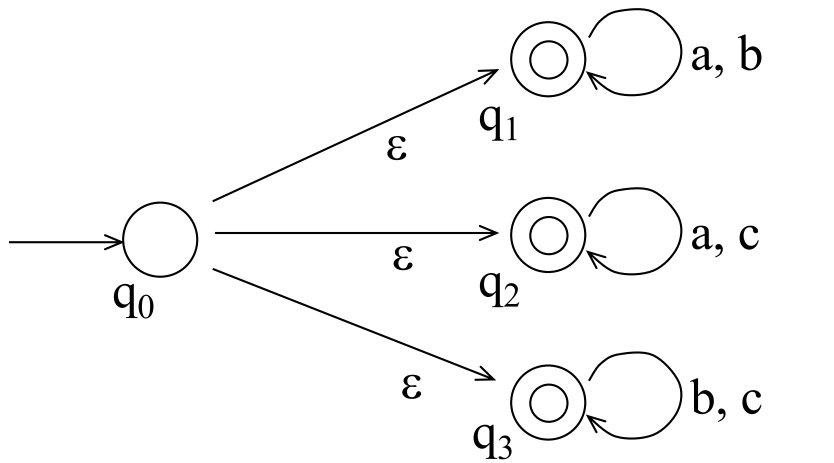


Elimination du non-déterminisme

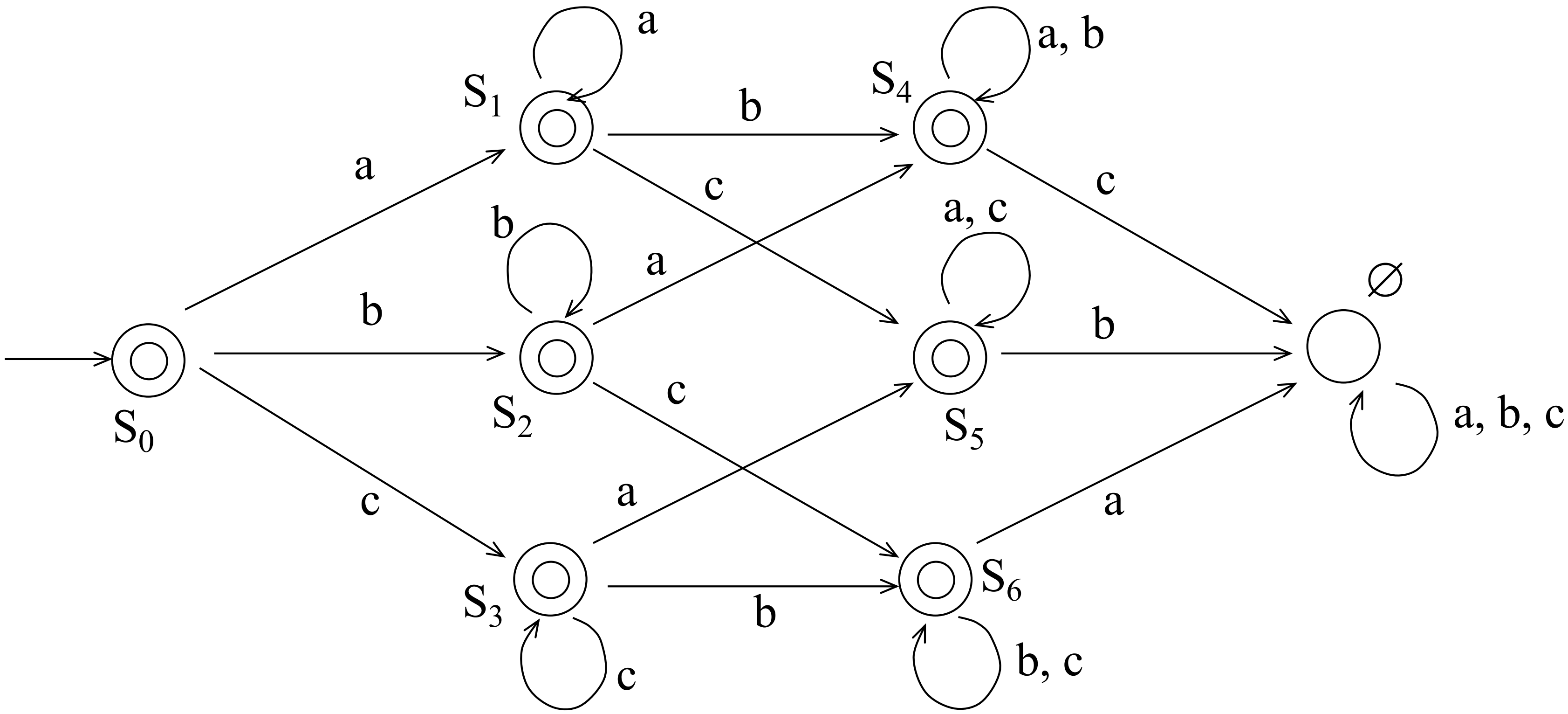
Autre exemple

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$L(M) = (a \cup b)^* \cup (a \cup c)^* \cup (b \cup c)^*$



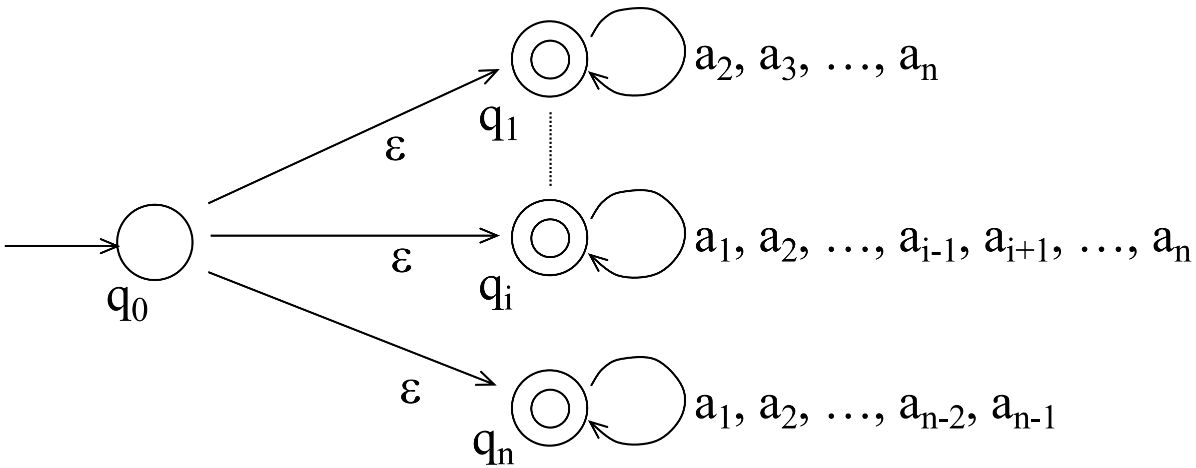
4 états



8 états

Elimination du non-déterminisme

Généralisation



$\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$\Sigma_1 = \Sigma - \{a_1\}$

…

$\Sigma_i = \Sigma - \{a_i\}$

$\rightarrow L(M) = \cup_{i=1}^{n} \Sigma_i^*$