LIFO63 – Algorithme numérique – TD 3

Interpolation

Solutions

Exercice 1

Soient les points $A=(1,3), B=(2,5), C=(3,3)$. Calculer le polynôme P de degré 2 passant par ces points.

1. En résolvant un système d'équation.

On a $P(x)=ax^2+bx+c$ passant par les trois points, d'où le système :

$$\begin{cases} a\times 1^2+b\times 1+c=3 \\ a\times 2^2+b\times 2+c=5 \\ a\times 3^2+b\times 3+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=3 \\ 4a+2b+c=5 \\ 9a+3b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=3 \\ 2b+3c=7 \\ 6b+8c=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=3 \\ 2b+3c=7 \\ c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=8 \\ c=-3 \end{cases}$$

Donc $P(x)=-2x^2+8x-3$

2. En utilisant la méthode d'interpolation de Lagrange.

Dans la méthode d'interpolation de Lagrange le polynôme est de la forme : $P(x)=p_0(x)+\cdots+p_n(x)$ avec $n+1$ points de support et

$$p_i(x)=y_i\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{x-x_k}{x_i-x_k} \quad ; \quad 0\leq i\leq n$$

Donc ici nous avons :

$$p_0(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2}=3\frac{x-2}{1-2}\frac{x-3}{1-3}=\frac{3(2-x)(3-x)}{2}=\frac{3x^2}{2}-\frac{15x}{2}+9$$
$$p_1(x)=y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=5\frac{x-1}{2-1}\frac{x-3}{2-3}=5(x-1)(3-x)=-5x^2+20x-15$$
$$p_2(x)=y_1\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=3\frac{x-1}{3-1}\frac{x-2}{3-2}=\frac{3(x-1)}{2}(x-2)=\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+3$$

Finalement on obtient :

$$P(x)=p_0(x)+p_1(x)+p_2(x)=\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-5\right)x^2+\left(-\frac{15}{2}+20-\frac{9}{2}\right)x+(9-15+3)=-2x^2+8x-3$$

Évidemment nous obtenons le même résultat que par la méthode de résolution par système linéaire.

3. En utilisant les différences divisées de Newton.

On calcule les coefficients du polynôme P par tableau :

$x_0 = 1$	$f[x_0] = 3 = a_0$		
$x_1 = 2$	$f[x_1] = 5$	$f[x_0, x_1] = \frac{3-5}{1-2} = 2 = a_1$	
$x_2 = 3$	$f[x_2] = 3$	$f[x_1, x_2] = \frac{5-3}{2-3} = -2$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{2+2}{1-3} = -2 = a_2$

Le polynôme final P est donné par :

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Ici nous avons donc :

$$P(x) = 3 + 2(x - 1) - 2(x - 1)(x - 2) = -2x^2 + 8x - 3$$

Évidemment nous obtenons toujours le même résultat (le polynôme de degré 2 est unique).

Exercice 2

Trouver le polynôme passant par les points $A = (0,0), B = (-2,4), C = (3,6)$ en utilisant la méthode d'interpolation de Lagrange.

Nous avons les termes suivants :

$$p_0(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = 0 \frac{(x+2)}{2} \frac{(x-3)}{-3} = 0$$

$$p_1(x) = y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = 4 \frac{(x-0)}{-2} \frac{(x-3)}{-5} = \frac{2}{5}(x^2 - 3x)$$

$$p_2(x) = y_2 \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 6 \frac{(x-0)}{3} \frac{(x+2)}{5} = \frac{2}{5}(x^2 + 2x)$$

Et donc:

$$P(x) = p_0(x) + p_1(x) + p_2(x) = \frac{2}{5}(x^2 - 3x) + \frac{2}{5}(x^2 + 2x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{5}x$$

Exercice 3

Calculer la valeur à $x = 2$ en utilisant l'interpolation de Lagrange aux points suivants :

1. $(-4,1)$ et $(3,2)$

Nous avons les termes suivants :

$$p_0(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = 1 \frac{(x-3)}{-3-4} = -\frac{1}{7}x + \frac{3}{7}$$

$$p_1(x) = y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = 2\frac{(x+4)}{3+4} = \frac{2}{7}x + \frac{8}{7}$$

Et donc:

$$P(x) = p_0(x) + p_1(x) = -\frac{1}{7}x + \frac{3}{7} + \frac{2}{7}x + \frac{8}{7} = \frac{1}{7}x + \frac{11}{7}$$

Finalement nous avons $P(2) = \frac{1}{7} \times 2 + \frac{11}{7} = \frac{13}{7}$

2. $(-2,-2), (3,-4.5)$ et $(1,-0.5)$

Nous avons les termes suivants :

$$p_0(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = -2\frac{(x-3)}{-2-3}\frac{(x-1)}{-2-1}$$
$$p_1(x) = y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = -4.5\frac{(x+2)}{3+2}\frac{(x-1)}{3-1}$$
$$p_2(x) = y_2 \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = -0.5\frac{(x+2)}{1+2}\frac{(x-3)}{1-3}$$

Et donc:

$$P(x) = p_0(x) + p_1(x) + p_2(x) = \ -\frac{1}{2}x^2$$

Finalement nous avons $P(2) = -\frac{1}{2}2^2 = -2$

Exercice 4

Nous souhaitons approcher la fonction cosinus.

1. Avec un polynôme de degré 1 en utilisant les points particuliers pour les deux angles 0 et π. Donner ce polynôme et calculer l'erreur au point 2π.

Nous avons :

$$p_0(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = 1\frac{x-\pi}{0-\pi} = -\frac{1}{\pi}x + 1$$
$$p_1(x) = y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = -1\frac{x-0}{\pi-0} = -\frac{1}{\pi}x$$

Et donc:

$$P(x) = p_0(x) + p_1(x) = -\frac{1}{\pi}x + 1 - \frac{1}{\pi}x = -\frac{2}{\pi}x + 1$$

Au point 2π, nous avons $P(2\pi) = -\frac{2}{\pi}2\pi + 1 = -3$, alors que nous souhaiterions 1. L'interpolation est très mauvaise en dehors de $[0, \pi]$.

2. Avec un polynôme de degré 2 en utilisant les points particuliers pour les trois angles : $0, \pi, 2\pi$. Donner ce polynôme et calculer l'erreur au point $\frac{\pi}{2}$.

Nous avons les termes :

$$p_0(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = 1 \frac{x - \pi}{0 - \pi} \frac{x - 2\pi}{0 - 2\pi} = \frac{x^2 - 3\pi x + 2\pi^2}{2\pi^2}$$

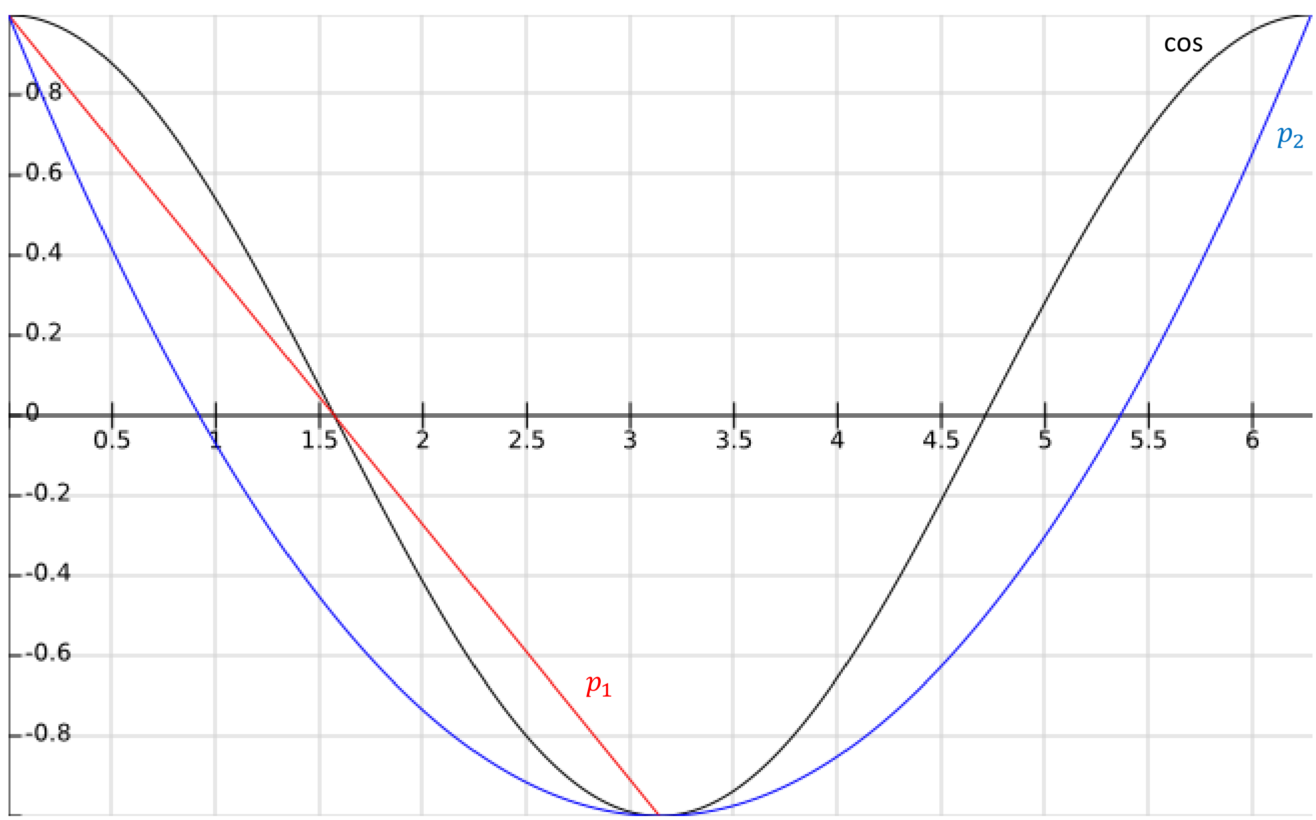
$$p_1(x) = y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = -1 \frac{x - 0}{\pi - 0} \frac{x - 2\pi}{\pi - 2\pi} = \frac{x^2 - 2\pi x}{\pi^2}$$

$$p_2(x) = y_2 \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1 \frac{x - 0}{2\pi - 0} \frac{x - \pi}{2\pi - \pi} = \frac{x^2 - \pi x}{2\pi^2}$$

Et donc:

$$P(x) = p_0(x) + p_1(x) + p_2(x) = \frac{x^2 - 3\pi x + 2\pi^2}{2\pi^2} + \frac{x^2 - 2\pi x}{\pi^2} + \frac{x^2 - \pi x}{2\pi^2} = \frac{2}{\pi^2} x^2 - \frac{4}{\pi} x + 1$$

Au point $\frac{\pi}{2}$, nous avons $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, alors que nous souhaiterions 0.



Exercice 5

On donne les valeurs numériques suivantes :

x	$f(x)$
1	0
1.5	1
2	2
2.5	-1.5

1. En utilisant les différences divisées de Newton, déterminer le polynôme qui interpole la fonction $f(x)$ sur les points de support donnés.

On calcule les coefficients du polynôme P par tableau :

$x_0 = 1$	$f[x_0] = 0$			
$x_1 = 1.5$	$f[x_1] = 1$	$f[x_0, x_1] = \dfrac{0-1}{1-1.5} = 2$		
$x_2 = 2$	$f[x_2] = 2$	$f[x_1, x_2] = \dfrac{1-2}{1.5-2} = 2$	$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{2-2}{1-2} = 0$	
$x_3 = 2.5$	$f[x_3] = -1.5$	$f[x_2, x_3] = \dfrac{2+1.5}{2-2.5} = -7$	$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{2+7}{1.5-2.5} = -9$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{0+9}{1-2.5} = -6$

Le polynôme final P est donné par :

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Ici nous avons donc :

$$P(x) = 0 + 2(x - 1) + 0(x - 1)(x - 1.5) - 6(x - 1)(x - 1.5)(x - 2) = -6x^3 + 27x^2 - 37x + 16$$

2. Évaluer $f(1.8)$

On évalue $f(1.8)$ en utilisant le polynôme : $f(1.8) \approx P(1.8) = 1.888$

Exercice 6

On considère une fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$. Soit p le polynôme de degré 1 qui interpole f pour le support $\{x_0, x_1\}$.

1. Quels points de support doit-on choisir entre $\{-1,1\}$ et $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ et pourquoi ?

Si p est le polynôme d'interpolation d'une fonction f pour support à deux points $\{x_0, x_1\}$, l'erreur commise en remplaçant la valeur $f(x)$ par $p(x)$ est donnée en fonction de ξ par l'expression suivante :

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

Ici, avec deux points de support :

$$e(x) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2}(x - x_0)(x - x_1)$$

Ainsi on cherche à majorer $f^{(2)}$ et $(x - x_0)(x - x_1)$ sur $[-1,1]$.

L'étude des fonctions $f_1(x) = (x+1)(x-1)$ et $f_2(x) = (x + \frac{\sqrt{2}}{2})(x - \frac{\sqrt{2}}{2})$ montrent que :

$$\begin{cases} \max\limits_{x\in[-1,1]} |(x+1)(x-1)| = 1 \\ \max\limits_{x\in[-1,1]} \left|\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On minimisera donc l'erreur en prenant les points support $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

2. Déterminer le polynôme d'interpolation de degré 1 qui interpole $f(x) = x^3$ sur le support $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ et donner une majoration de l'erreur pour tout $x \in [-1,1]$.

On peut déterminer le polynôme $P(x) = ax + b$ en résolvant le système linéaire :

$$\begin{cases} a\times\frac{\sqrt{2}}{2} + b = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \\ a\times-\frac{\sqrt{2}}{2} + b = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{2}}{4} - a\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a\times-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{2}}{4} - a\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a\times-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - a\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{2}}{4} - a\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $P(x) = \frac{x}{2}$

La formule de l'erreur donne pour $\xi \in [-1,1]$:

$$e(x) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2}(x - x_0)(x - x_1) = \frac{6\xi}{2}(x + \frac{\sqrt{2}}{2})(x - \frac{\sqrt{2}}{2})$$

En majorant $\xi \leq 1$ et $\left|(x + \frac{\sqrt{2}}{2})(x - \frac{\sqrt{2}}{2})\right| \leq \frac{1}{2}$ (*cf. question précédente*) on obtient :

$$|e(x)| \leq \frac{6\times1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Remarque : on peut être plus précis en étudiant la fonction erreur $e(x) = f(x) - p(x) = x^3 - x/2$ qui est majorée par 0.5 dans $[-1,1]$.

Exercice 7

Soient $f(x) = \cos x$ et $g(x) = e^{3x}$ définies sur $[0,1]$. Estimer le nombre minimum de points pour que l'erreur entre la fonction et son polynôme d'interpolation de Lagrange soit inférieur à 0.1, 0.01 et 0.001.

- Pour $f(x) = \cos x$

Rappel : $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ et $(\cos x)' = -\sin x$
On a $\cos^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \leq 1$ et $|x - y| \leq 1$ quels que soient $x, y \in [0,1]$, donc

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \leq \varepsilon$$

donne

$$(n+1)! \geq \varepsilon^{-1}$$

D'où pour
$\varepsilon = 0.1$ on a $\varepsilon^{-1} = 10$ et $n \geq 3$
$\varepsilon = 0.01$ on a $\varepsilon^{-1} = 100$ et $n \geq 4$
$\varepsilon = 0.001$ on a $\varepsilon^{-1} = 1000$ et $n \geq 6$

- Pour $g(x) = e^{3x}$

On a $g^{(n+1)}(x) = 3^{(n+1)}e^{3x}$ et $|x - y| \leq 1$ quels que soient $x, y \in [0,1]$, donc

$$|g(x) - p(x)| \leq \frac{3^{(n+1)}e^3}{(n+1)!} \leq \varepsilon$$

D'où pour
$\varepsilon = 0.1$ on a $n \geq 10$
$\varepsilon = 0.01$ on a $n \geq 12$
$\varepsilon = 0.001$ on $n \geq 14$

Exercice 8

Soient les fonctions définies par $f(x) = \sqrt{x - 1}$ et $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x - 1)\right)$ et trois points $x_0 = 1, x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 2$.

1. Montrer, sans le calculer, que f et g ont le même polynôme d'interpolation sur le support $\{x_0, x_1, x_2\}$.

Les deux polynômes sont les mêmes si les points de supports sont identiques, vérifions donc si $f(x_i) = g(x_i)$ pour $i = 0,1,2$.
On a $f(x_0) = f(1) = 0$ et $g(x_0) = g(1) = \sin(0) = 0$
On a $f(x_1) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $g(x_0) = g\left(\frac{3}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
On a $f(x_0) = f(2) = 1$ et $g(x_0) = g(2) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
Les trois points de support sont identiques donc les polynômes d'interpolation seront identiques.

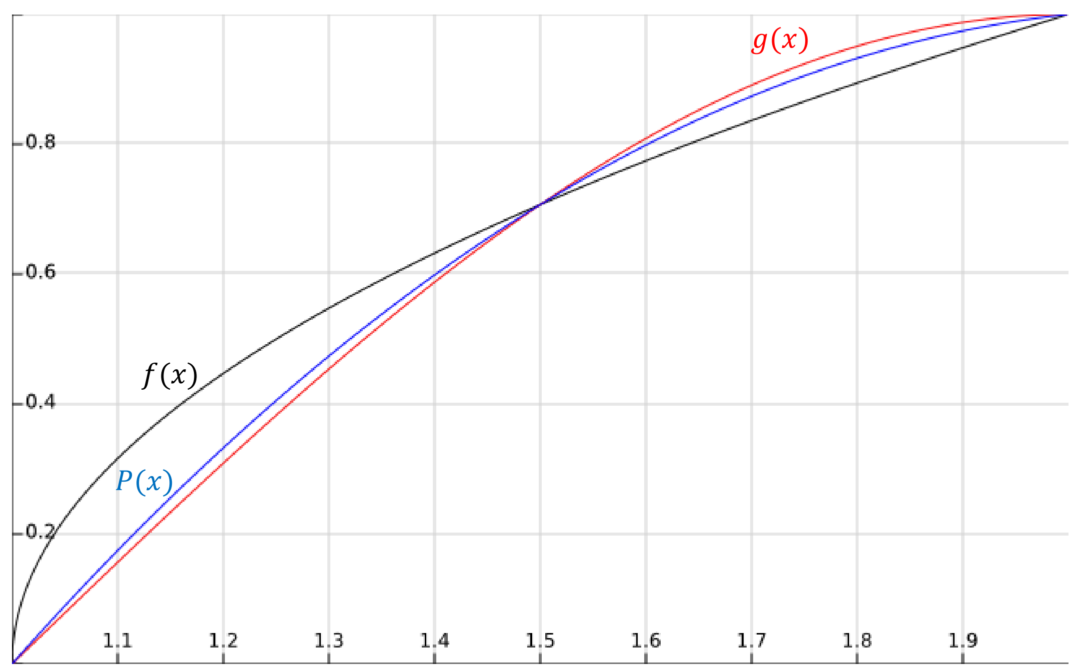
2. Calculer le polynôme de Lagrange qui interpole f et g sur le support donné.

Nous avons les termes suivant :

$$p_0(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = 0$$
$$p_1(x) = y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{x - 1}{\frac{3}{2} - 1} \frac{x - 2}{\frac{3}{2} - 2} = -2\sqrt{2}(x - 1)(x - 2)$$
$$p_2(x) = y_1 \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1 \frac{x - 1}{2 - 1} \frac{x - \frac{3}{2}}{2 - \frac{3}{2}} = 2(x - 1)(x - \frac{3}{2})$$

Finalement on obtient :

$$P(x) = p_0(x) + p_1(x) + p_2(x) = -2\sqrt{2}(x - 1)(x - 2) + 2(x - 1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$
$$= \left(2 - 2\sqrt{2}\right)x^2 - \left(5 - 6\sqrt{2}\right)x + 3 - 4\sqrt{2}$$



3. Trouver la valeur approchée de g au point $x = 1.75$ et donner une majoration de l'erreur d'interpolation sur l'intervalle $[1,2]$.

La valeur approchée de g au point $x = 1.75$ est donnée par $P(1.75) \approx 0.9053$. La valeur non interpolée est $g(1.75) \approx 0.9239$, donc une erreur ≈ 0.0186.

On a $\sin^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \leq \frac{\pi^3}{8}$ et (après étude) $\left|(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2)\right| \leq g\left(\frac{9-\sqrt{3}}{6}\right)$, on a :

$$|g(x) - P(x)| \leq \frac{1}{6} \times \frac{\pi^3}{8} \times 0.0482 \leq 0.0311$$

La majoration est en effet plus grande que l'erreur observée pour $x = 1.75$.

Exercice 9

On veut représenter la fonction $f(x) = e^x$ par un polynôme sur l'intervalle $[-1,1]$. On choisit les 3 points $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$.

1. Donner le polynôme d'interpolation de Lagrange sur le support donné.

On a les valeurs $f(x_0) = f(-1) = e^{-1}$ et $f(x_1) = f(0) = 1$ et $f(x_2) = f(1) = e$

Nous avons les termes suivants :

$$p_0(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{1}{e} \times \frac{x - 0}{-1 - 0} \times \frac{x - 1}{-1 - 1} = \frac{1}{2e}(x^2 - x)$$
$$p_1(x) = y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = 1 \times \frac{x + 1}{0 + 1} \frac{x - 1}{0 - 1} = (x + 1)(1 - x)$$
$$p_2(x) = y_1 \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = e \frac{x + 1}{1 + 1} \frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{e}{2}(x + 1)x$$

Finalement on obtient :

$$P(x) = p_0(x) + p_1(x) + p_2(x) = \frac{1}{2e}(x^2 - x) + (x + 1)(1 - x) + \frac{e}{2}(x + 1)x$$
$$= \left(\frac{1}{2e} - 1 + \frac{e}{2}\right)x^2 + \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2e}\right)x + 1$$

2. Donner une majoration de l'erreur.

On a la majoration $e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0) \cdots (x - x_n)$. Or $f^{(n+1)}(\xi) = e^{\xi} \leq e$ sur l'intervalle $[-1,1]$.
On cherche la majoration de $(x + 1)(x)(x - 1)$ sur l'intervalle $[-1,1]$ qui est $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. Nous avons donc :

$$|e(x)| \leq \frac{e}{6} \times \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0.1744$$

3. Donner les valeurs approchées aux points $x = -0.5, 0.5, -0.75, 0.75$ ainsi que les erreurs de précisions commises en ces points et comparer avec le résultat obtenu en question 2.

Les valeurs aux points demandées sont :

$P(-0.5) \approx 0.5482$ et $f(-0.5) \approx 0.6065$ donc une différence de $0.0583 \leq 0.1744$
$P(0.5) \approx 1.7234$ et $f(0.5) \approx 1.6487$ donc une différence de $0.0747 \leq 0.1744$
$P(-0.75) \approx 0.4241$ et $f(-0.75) \approx 0.4724$ donc une différence de $0.0483 \leq 0.1744$
$P(0.75) \approx 2.1869$ et $f(0.75) \approx 2.1170$ donc une différence de $0.0699 \leq 0.1744$

On observe que toutes les erreurs des valeurs approchées sont bien sous la majoration calculée en question 2.

Exercice 10

Soit la fonction $f(x) = x^3$ sur $[0,1]$

1. Écrire l'interpolation polynomiale P de degré 1 sur le support $\{(0,0),(1,1)\}$.

En regardant les points on pourrait voir directement que $p(x) = x$, mais calculons le sur le système linéaire :

$$\begin{cases} a \times 0 + b = 0 \\ a \times 1 + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

2. Calculer la valeur du point $c \in [0,1]$ tel que $f(x) - P(x) = \frac{f''(c)}{2} x(x-1)$.

On a $f(x) - P(x) = x^3 - x$ et $f''(c) = 6c$
Donc on peut calculer c :

$$x^3 - x = \frac{6c}{2} x(x-1) \Leftrightarrow 3c = \frac{x^3 - x}{x(x-1)} \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}(x+1)$$

Exercice 11

Soit la fonction $f(x) = 4^x - x - 2$ définie sur $[0,1] \to \mathbb{R}$. L'équation $f(x) = 0$ admet une solution $x^* \in [0,1]$.

1. À l'aide des différences divisées, calculer le polynôme P qui interpole f aux points $0, 0.5, 1$.

Pour les différences divisées, on a besoin des trois valeurs : $f(0) = -1$, $f(0.5) = -0.5$ et $f(1) = 1$.

On calcule les coefficients du polynôme P par tableau :

$x_0 = 0$	$f[x_0] = -1$		

$x_1 = 0.5$	$f[x_1] = -0.5$	$f[x_0, x_1] = \dfrac{-1 + 0.5}{0 - 0.5} = 1$	
$x_2 = 1$	$f[x_2] = 1$	$f[x_1, x_2] = \dfrac{-0.5 - 1}{0.5 - 1} = 3$	$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{1 - 3}{0 - 1} = 2$

Le polynôme final P est donné par :

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Ici nous avons donc :

$$P(x) = -1 + 1(x - 0) + 2(x - 0)(x - 0.5) = 2x^2 - 1$$

2. En utilisant le polynôme P, donner une valeur approchée de x^*.

Résoudre $f(x) = 0$ peut être approximé en résolvant $P(x) = 0$. Ce qui nous donne $2x^2 - 1 = 0$ donc $x^* = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071$ sur l'intervalle [0,1].
Cette valeur n'est pas vraiment racine de $f(x)$ car $f(x^*) \approx -0.042$, la vraie racine étant ≈ 0.7224.

Exercice 12

Soit la fonction $f(x) = (2x - \alpha)^4$ définie sur $[0, \alpha]$.

1. Donner le polynôme P de degré 1 interpolée aux bornes de l'intervalle.

Nous avons les points de support :$f(0) = \alpha^4$ et $f(\alpha) = \alpha^4$, donc le polynôme est $P(x) = \alpha^4$.

2. Calculer la ou les valeurs du point $c \in [0, \alpha]$ tel que $f(x) - P(x) = \frac{f''(c)}{2} x(x - \alpha)$.

On a d'un côté $f(x) - P(x) = (2x - \alpha)^4 - \alpha^4$
Et on a $f''(c) = 48(2c - \alpha)^2$
Donc on a l'égalité $(2x - \alpha)^4 - \alpha^4 = \frac{48(2c-\alpha)^2}{2} x(x - \alpha)$ ce qui donne $c = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2x-\alpha)^4-\alpha^4}{24x(x-\alpha)}} + \alpha$

Exercice 13

On veut approcher la fonction $f(x) = e^{2x}$ par un polynôme d'interpolation P avec points équidistants: $x_0, \cdots, x_n$ dans l'intervalle [0,1].

1. Rappeler la formule d'erreur

On a la formule d'erreur : $|f(x)-P(x)| \leq h^{n+1}\frac{1}{n+1}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ où $h=\frac{b-a}{n}$

2. Montrer que la formule d'erreur est monotone décroissante en fonction de n.

Pour f, on a $f^{(n+1)}(x)=2^{(n+1)}e^{2x}$, et $h=\frac{1}{n}$ donc on a :

$$|f(x)-P(x)| \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1}2^{(n+1)}e^{2x}$$

$$|f(x)-P(x)| \leq \frac{2^{(n+1)}}{n^{n+1}(n+1)}e^{2x}$$

Ce qui est bien monotone décroissant avec n.

Exercice 14

On étudie l'interpolation polynômiale de la fonction $f(x)=|x|$ sur $[-1,1]$. On connaît les cinq valeurs pour les abscisses $-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1$.

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange et l'erreur associée.

Nous avons les termes suivants :

$$p_0(x)=\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)x(x-\frac{1}{2})(x-1)$$

$$p_1(x)=-\frac{8}{3}(x+1)x(x-\frac{1}{2})(x-1)$$

$$p_2(x)=0$$

$$p_3(x)=-\frac{8}{3}(x+1)(x+\frac{1}{2})x(x-1)$$

$$p_4(x)=\frac{2}{3}(x+1)(x+\frac{1}{2})x(x-\frac{1}{2})$$

Et donc:

$$P(x)=\frac{4}{3}x^2\left(\frac{7}{4}-x^2\right)$$

L'erreur d'interpolation est :

$$e(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n)$$

Ici, avec cinq points de support :

$$|e(x)| \leq \frac{1}{120}(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)x(x-\frac{1}{2})(x-1) \leq 0.148$$

2. Confirmer le résultat par la méthode des différences divisées.

On calcule les coefficients du polynôme P par tableau :

$x_0 = -1$	1				
$x_1 = -1/2$	$1/2$	-1			
$x_2 = 0$	0	-1	0		
$x_3 = 1/2$	$1/2$	1	2	$4/3$	
$x_4 = 1$	1	1	0	$-4/3$	$-4/3$

Le polynôme final est bien : $P(x) = \frac{4}{3}x^2\left(\frac{7}{4} - x^2\right)$

3. Le polynôme de Tchebychev donne les abscisses optimales pour minimiser l'erreur d'approximation. Ces n abscisses sur $[a, b]$ (pas nécessairement équidistantes) sont données par :

$$\forall i \in \{0, \cdots, n\}, x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2(n-i)+1)\pi}{2(n+1)}$$

Déterminer le polynôme d'interpolation de f obtenu en utilisant cinq abscisses optimales sur $[-1,1]$.

Calculons d'abord ces abscisses optimales pour $n = 4$. Nous avons :

$$x_0 = \frac{-1+1}{2} + \frac{1+1}{2}\cos\frac{(2(4-0)+1)\pi}{2(4+1)} = \cos\frac{9\pi}{10} = -\cos\frac{\pi}{10} = -x_4$$
$$x_1 = \cos\frac{(2(4-1)+1)\pi}{10} = \cos\frac{7\pi}{10} = -\cos\frac{3\pi}{10} = -x_3$$

$$x_2 = \cos\frac{(2(4-2)+1)\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$
$$x_3 = \cos\frac{(2(4-3)+1)\pi}{10} = \cos\frac{3\pi}{10}$$
$$x_4 = \cos\frac{(2(4-4)+1)\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{10}$$

On détermine le polynôme, par exemple par les différences divisées de Newton, en fonction des abscisses.
Le polynôme est :

$$P(x) = \frac{x^2}{x_4x_3(x_4+x_3)}\left((x_4{}^2 + x_4x_3 + x_3{}^2) - x^2\right)$$

La majoration d'erreur d'interpolation est $\max_{x\in[-1,1]}|f(x)-P(x)| \leq 0.124$ ce qui est en effet plus petit que la majoration de l'erreur d'interpolation utilisant les abscisses équiréparties de la question 1.

4. Déterminer sur l'intervalle $[-1,1]$ la spline cubique naturelle d'interpolation de f passant par les points de support donnés en plus des bornes de l'intervalle. En déduire la valeur approchée de $|0.75|$ et $|-0.25|$.

L'expression de la spline sur un intervalle est:

$$p_i(x) = M_i\frac{(x-x_{i+1})^3}{-6h} + M_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h} + \left(-\frac{h}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1}}{h}\right)(x-x_i) + \left(\frac{h}{6}M_i - \frac{y_i}{h}\right)(x-x_{i+1})$$

La formule des moments M_i au nœud i est (2 intégrations à partir de l'interpolation entre les moments entre deux nœuds consécutifs) :

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_i+h_{i-1})M_i + h_iM_{i+1} = 6\left(\frac{1}{h_i}(y_{i+1}-y_i) - \frac{1}{h_{i+1}}(y_i-y_{i-1})\right)$$

On a ici $h_1 = x_1 - x_0 = -0.5 + 1 = 0.5 = h_2 = h_3 = h_4 = h$

On a également :

$\frac{1}{h}(y_2-y_1) - \frac{1}{h}(y_1-y_0) = 2(-0.5) - 2(-0.5) = 0$

$\frac{1}{h}(y_3-y_2) - \frac{1}{h}(y_2-y_1) = 2(0.5) - 2(-0.5) = 2$

$\frac{1}{h}(y_4-y_3) - \frac{1}{h}(y_3-y_2) = 2(0.5) - 2(0.5) = 0$

On pose $M_0 = M_4 = 0$ qui sont les moments aux extrémités valant zéro pour les splines naturelles.

Donc on a le système linéaire:

$$\begin{pmatrix} 4h & h & 0 \\ h & 4h & h \\ 0 & h & 4h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\times0 \\ 6\times2 \\ 6\times0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où l'on déduit :

$$M_1 = -\frac{12}{7}, M_2 = \frac{48}{7}, M_3 = -\frac{12}{7}$$

Il reste à reporter ces valeurs dans l'expression de la spline sur chaque intervalle.

Entre $[-1,-0.5]$:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 0 + M_1\frac{(x-x_0)^3}{6h} + \left(-\frac{h}{6}M_1 + \frac{y_1}{h}\right)(x-x_0) + \left(0 - \frac{y_0}{h}\right)(x-x_1) \\ &= -\frac{12}{7}\frac{(x+1)^3}{3} + \left(-\frac{1}{12}\left(-\frac{12}{7}\right) + 1\right)(x+1) + (-2)\left(x+\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{4}{7}(x+1)^3 + \frac{8}{7}(x+1) - (2x+1) \end{aligned}$$

Entre $[-0.5,0]$:

$$p_1(x) = M_1\frac{(x-x_2)^3}{-6h} + M_2\frac{(x-x_1)^3}{6h} + \left(-\frac{h}{6}M_2 + \frac{y_2}{h}\right)(x-x_1) + \left(\frac{h}{6}M_1 - \frac{y_1}{h}\right)(x-x_2)$$
$$= -\frac{12}{7}\frac{x^3}{-3} + \frac{48}{7}\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \left(-\frac{1}{12}\frac{48}{7}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{12}\left(-\frac{12}{7}\right) - 1\right)x$$
$$= \frac{4}{7}x^3 - \frac{8}{7}x + \frac{16}{7}\left(x+\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{4}{7}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

On remarque que p est paire car les points sont symétriques, donc on peut directement conclure que :

Entre $[0,0.5]$:
$$p_2(x) = -\frac{4}{7}x^3 + \frac{8}{7}x - \frac{16}{7}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{4}{7}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

Entre $[0.5,1]$:
$$p_3(x) = \frac{4}{7}(x-1)^3 - \frac{8}{7}(x-1) + (2x-1)$$

Calculons la valeur approchée de $|0.75|$.
On a $0.75 \in [0.5,1]$, donc $f(0.75) \approx p_3(0.75) \approx 0.78$

Calculons la valeur approchée de $|-0.25|$.
On a $-0.25 \in [-0.5,0]$, donc $f(-0.25) \approx p_1(-0.25) \approx 0.17$