Faculté des Sciences et Technologies
Dpt Informatique

LIFO63 – Algorithme numérique – TD 1

Opérations sur les matrices et systèmes linéaires

Exercice 1

Question 1.1

Une matrice carrée est appelée diagonale lorsque ces éléments a_{ij} valent zéro pour $i \neq j$. Une matrice est dite triangulaire supérieure (resp. stricte) si ses éléments en dessous de la diagonale valent zéro (resp. diagonale incluse). Une matrice est dite triangulaire inférieure (resp. stricte) si ses éléments au-dessus de la diagonale valent zéro (resp. diagonale incluse).

Donner une décomposition possible de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ en la somme de trois matrices :

- D : matrice diagonale
- TSS : matrice triangulaire supérieure stricte
- TIS : matrice triangulaire inférieure stricte

Question 1.2

Donner le produit des matrices A et B suivantes.

Produit 1 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Produit 2 : $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (i.e. multiplication de B et A du produit 1)

Produit 3 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Produit 4 : même A que le produit 3 et B^T la matrice transposée de B du produit 3

Produit 5 : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Question 1.3

Si on multiplie deux matrices, l'une des deux matrices étant la matrice nulle, est-ce que le résultat est toujours la matrice nulle?

Si on multiplie deux matrices et que le résultat est une matrice nulle, est-ce que cela veut dire qu'au moins une des deux matrices multipliées doit être nulle ?

Question 1.4

Le déterminant d'une matrice est le volume signé couvert par les vecteurs colonnes d'une matrice. Il vaut la somme des produits des éléments d'une ligne ou colonne quelconque avec ses cofacteurs. Un cofacteur d'un élément a_{ij} d'une matrice A de taille $n \times n$ est le déterminant de la matrice A' de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne, multipliée par -1^{i+j}.

Calculer le déterminant des matrices suivantes.

- $A1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$
- $A2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $A3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

En supposant que nous voulons transformer un bloc rectangulaire de taille 1x1x2 par la transformation linéaire $T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Quel est le volume du bloc transformé ?

Question 1.5

Etudions la transformation linéaire $T1$ dans l'espace 3D (x,y,z) qui effectue une rotation de $90°$ autour de l'axe x, c'est-à-dire que l'image de x est lui-même, l'image de y est z et l'image de z est -y. Donner cette matrice de transformation (matrice 3x3). Quel est son déterminant ?

Etudions maintenant la transformation linéaire $T2$ dans l'espace 3D (x,y,z) qui effectue une symétrie par rapport au plan (x,y), c'est-à-dire que les composantes z sont opposées. Donner cette matrice de transformation (matrice 3x3). Quel est son déterminant ?

Etudions maintenant la transformation linéaire $T3$ dans l'espace 3D (x,y,z) qui effectue une projection sur le plan (x,y), c'est-à-dire que les composantes z sont annulées. Donner cette matrice de transformation (matrice 3x3). Quel est son déterminant ?

Donner la relation entre le déterminant et les matrices de transformation étudiées.

Question 1.6

Soient les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. En appliquant les règles d'élimination de Gauss, donner les matrices triangulaires supérieures représentant le même système. A chaque étape de l'élimination, indiquer le déterminant de la matrice.

Exercice 2

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et le vecteur $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, résoudre $A \cdot X = B$ pour X :

1. Par la méthode de Gauss.

2. Par la méthode de la décomposition LU, en utilisant la méthode du pivot de Gauss pour réaliser la décomposition (expliciter toutes les étapes).

Exercice 3

Donner la factorisation LU de la matrice A, puis résoudre $A \cdot X = B$ pour :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 4

Donner la factorisation LU de la matrice A, puis résoudre $A \cdot X = B$ pour :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -4 \\ 17 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Exercice 5

Soit le système linéaire $A \cdot X = B$ donné par :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4+e & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \\ 13 \\ 46+e \end{bmatrix}$$

1. Vérifier que si $e \neq 0$ alors le système admet une solution unique $X = (1,2,3,4)^T$.

2. On suppose que e est une valeur très petite ($e \to 0$) qui ne peut pas être représentée et donc arrondi à 0. Montrer que le système est indéterminé (singulier), et admet une infinité de solutions dont $X = (1,2,3,4)^T$.

Exercice 6

Soit la composition du produit brut d'un aliment pour bétail, représentée dans le tableau ci-dessous :

Produit brut	Teneur en orge	Teneur en arachide	Teneur en sésame
protéine	12	52	42
graisse	2	2	10

Calculer la composition d'une ration obtenue en mélangeant orge, arachide et sésame, avec 22% de protéines et 3.6% de graisses.

Exercice 7

Résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Par la méthode itérative de Jacobi (cinq itérations à partir de la solution nulle).

2. Par la méthode itérative de Gauss-Seidel (trois itérations à partir de la solution nulle).

3. Comparer les deux résultats avec la solution exacte.