TD3 – Logique

Hugo Castaneda, Rémy Chaput, Nathalie Guin, Marie Lefevre

Rappels de cours sur atomes, termes, variables liées et libres, formules :

- Un **atome** (ou formule atomique) est un prédicat directement valuable à Vrai ou Faux
- Un **terme** est soit une variable, soit une constante, soit une fonction. Un terme prend sa valeur dans le domaine des variables.
- Une **variable** peut être liée ou libre selon qu'elle est quantifiée (par un quantificateur) ou non.
- Une **formule** est soit un atome, soit une composition de formules avec les connecteurs et les quantificateurs.

Rappels de cours sur la forme prénexe :

Une formule F est prénexe si elle est de la forme $Q_1x_1\, Q_2x_2 \dots Q_nx_n\, G$ avec G sans quantificateur et chaque Q_i étant soit $\forall$ soit $\exists$. Pour mettre sous forme prénexe une formule quelconque :

1. Eliminer les connecteurs $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ en appliquant les lois d'équivalence
$((P \rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$ et $(P \leftrightarrow Q) \equiv ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)))$.
2. Transporter les symboles de négation $\neg$ devant les formules atomiques
(lois de De Morgan, lois de double négation…)
3. Renommer si nécessaire les variables pour pouvoir appliquer les règles d'équivalence en cas de déplacement des quantificateurs
$\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$ mais pas vrai pour le $\vee$!
$\exists x\, (A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$ mais pas vrai pour le $\wedge$!
4. Transporter les quantificateurs devant la formule de façon à obtenir une formule prénexe.

Rappels de cours sur la méthode de skolémisation (pour obtenir une forme standard de Skolem) **:**

Soit F une FN prénexe i.e. $F = Q_1x_1\, Q_2x_2 \dots Q_nx_n\, G(x_1, x_2, \dots x_n)$

1. Eliminer les quantificateurs existentiels Qr
   - Si aucun $\forall$ n'apparaît avant Qr, on remplace par un nouveau symbole de constante C
   - Si m $\forall$ apparaissant avant Qr, on remplace par une nouvelle fonction de skolem f d'arité m
2. Itérer le processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de quantificateur existentiel dans le préfixe.

Rappels de cours sur la forme clausale de la logique d'ordre 1 :

La forme clausale d'une formule F est constituée de l'ensemble des clauses de la forme standard de Skolem de cette formule où :

1. Les variables quantifiées universellement sont conservées et les fonctions (y compris les fonctions de Skolem) ne sont pas modifiées
2. Les variables quantifiées existentiellement sont remplacées par des constantes (toutes différentes)
3. Les variables sont renommées d'une clause à l'autre

EXERCICE 1 : FORMULE UNIVERSELLEMENT VALIDE

Considérons la formule F suivante : $\exists x\ \forall y\ (((U(x) \rightarrow U(y)) \rightarrow T(x)) \rightarrow T(y))$

Nous allons essayer de monter qu'elle est universellement valide. Pour cela plusieurs étapes sont nécessaires :

1 : Dans cette formule, qu'est-ce qui est atomes, variables, termes, formules ?

2 : Quelle est la formule sur laquelle nous allons travailler pour montrer que F est universellement valide ?

3 : Mettre la formule trouvée sous forme normale conjonctive (conjonction de disjonction).

4 : Mettre sous forme prénexe.

5 : Skolémiser le résultat.

6 : Mettre sous forme clausale.

7 : Résoudre avec le principe de réfutation avec unification dans le monde de Herbrand.

EXERCICE 2 : VALIDER UN RAISONNEMENT

Pour une déduction, on établit d'abord ce qui est vrai (conjonction de prédicats) et pour établir la conclusion, on nie cette conclusion et on l'ajoute à la conjonction. Si la formule ainsi formée est impossible à satisfaire, c'est qu'il n'est pas possible de nier la conclusion en présence des prémisses et que donc la conclusion est une déduction logique des prémisses.

Valider le raisonnement suivant :

1. Quelques chandelles éclairent très mal
2. Les chandelles sont faites pour éclairer
3. donc : quelques objets qui sont faits pour éclairer le font très mal.

POUR S'ENTRAINER : MISE SOUS FORME PRENEXE… ET SES PIEGES !

Mettre ces deux formules sous forme prénexe :

$(\forall x\ \exists y\ \forall t\ R(x, z, y)) \rightarrow (\exists x\ \forall y\ \exists t\ S(x, z, t))$

$(\forall x\ \exists y\ \forall t\ R(x, z, t)) \rightarrow (\exists x\ \forall y\ \exists t\ S(x, z, t))$