Récriture (premier ordre) confluence

Questions :

- Existence du résultat $\rightsquigarrow$ terminaison
- Unicité du résultat $\rightsquigarrow$ confluence, convergence

R confluent si

$$u \leftarrow^\star s \rightarrow^\star v \Rightarrow \exists t,\ u \rightarrow^\star t \leftarrow^\star v$$

R localement confluent si

$$u \leftarrow s \rightarrow *v \Rightarrow \exists t,\ u \rightarrow^\star t \leftarrow^\star v$$

Récriture (premier ordre) confluence

Exemple.

$$\begin{array}{lcl} x \cdot 0 & = & x \\ x \cdot x^{-1} & = & 0 \\ (x \cdot y) \cdot z & = & x \cdot (y \cdot z) \end{array}$$

Orienter brutalement ?

$$\begin{array}{lcl} x \cdot 0 & \rightarrow & x \\ x \cdot x^{-1} & \rightarrow & 0 \\ (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \end{array}$$

Récriture (premier ordre) confluence

Exemple.

$$\begin{array}{lcl} x \cdot 0 & \rightarrow & x \\ x \cdot x^{-1} & \rightarrow & 0 \\ (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \end{array}$$

$$x \cdot (x^{-1} \cdot z) \quad \leftarrow \quad (x \cdot x^{-1}) \cdot z \quad \rightarrow \quad 0 \cdot z$$

Récriture (premier ordre) confluence

Décidabilité

Donnée : système R (fini)
Question : R confluent ?

Indécidable — admis (réd. pb. du mot)

Récriture (premier ordre) confluence

Paire critique : $r\rho\sigma = (l\rho[d]_p)\sigma$ où

- $l \to r \in R, \quad g \to d \in R$
- p position non variable de l
- ρ renommage de l
- σ unificateur principal de $l|_p$ et g (unifiables !)

Ensemble des paires critiques de R : $\mathrm{PC}(R)$

Récriture (premier ordre) confluence

Théorème

Confluence locale des paires de $\mathrm{PC}(R)$ $\Leftrightarrow$ confluence locale de R

Théorème (Lemme de Newman)

Si $\underset{R}{\to}$ fortement normalisante alors confluence locale $\Leftrightarrow$ confluence

Dém. par induction bien fondée sur $\underset{R}{\leftarrow}$

$\rightsquigarrow$ Décidable pour les systèmes finis fortement normalisants

Récriture (premier ordre) confluence

Très souvent R non confluent : paire critique non confluente.

Exemple.

$$\begin{array}{lcl} x \cdot e & \to & x \\ x \cdot x^{-1} & \to & e \\ (x \cdot y) \cdot z & \to & x \cdot (y \cdot z) \end{array}$$

$$x \cdot (x^{-1} \cdot z) \leftarrow (x \cdot x^{-1}) \cdot z \to e \cdot z$$

Idée : ajouter $x \cdot (x^{-1} \cdot z) \to e \cdot z$

Récriture (premier ordre) confluence

Équations vers système convergent (et même calcul) : complétion

$$\begin{array}{lcl} e \cdot x & = & x \\ x^{-1} \cdot x & = & e \\ (x \cdot y) \cdot z & = & x \cdot (y \cdot z) \end{array}$$

Récriture (premier ordre) — confluence

Équations vers système convergent (et même calcul) : complétion

$e \cdot x$	$\to$	x	e^{-1}	$\to$	e
$x \cdot e$	$\to$	x	$(x \cdot y)^{-1}$	$\to$	$y^{-1} \cdot x^{-1}$
$x^{-1} \cdot x$	$\to$	e	$x \cdot (x^{-1} \cdot y)$	$\to$	y
$x \cdot x^{-1}$	$\to$	e	$x^{-1} \cdot (x \cdot y)$	$\to$	y
$(x \cdot y) \cdot z$	$\to$	$x \cdot (y \cdot z)$	$(x^{-1})^{-1}$	$\to$	x

Récriture (premier ordre) — confluence

$e \cdot x = x \cdot e$?

$$e \cdot x \xleftrightarrow[N]{2} e \cdot (x \cdot e) \xleftrightarrow[I]{22} e \cdot (x \cdot (x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1})) \xleftrightarrow[A]{2} e \cdot ((x \cdot x^{-1}) \cdot (x^{-1})^{-1})$$

$$\xleftrightarrow[I]{21} e \cdot (e \cdot (x^{-1})^{-1}) \xleftrightarrow[A]{\Lambda} (e \cdot e) \cdot (x^{-1})^{-1} \xleftrightarrow[N]{1} e \cdot (x^{-1})^{-1}$$

$$\xleftrightarrow[I]{1} (x \cdot x^{-1}) \cdot (x^{-1})^{-1} \xleftrightarrow[A]{\Lambda} x \cdot (x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1}) \xleftrightarrow[I]{2} x \cdot e$$

$$\xleftrightarrow[N]{\Lambda} x$$

Récriture (premier ordre) — confluence

$e \cdot x = x \cdot e$?

$$e \cdot x \xleftrightarrow[N]{2} e \cdot (x \cdot e) \xleftrightarrow[I]{22} e \cdot (x \cdot (x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1})) \xleftrightarrow[A]{2} e \cdot ((x \cdot x^{-1}) \cdot (x^{-1})^{-1})$$

$$\xleftrightarrow[I]{21} e \cdot (e \cdot (x^{-1})^{-1}) \xleftrightarrow[A]{\Lambda} (e \cdot e) \cdot (x^{-1})^{-1} \xleftrightarrow[N]{1} e \cdot (x^{-1})^{-1}$$

$$\xleftrightarrow[I]{1} (x \cdot x^{-1}) \cdot (x^{-1})^{-1} \xleftrightarrow[A]{\Lambda} x \cdot (x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1}) \xleftrightarrow[I]{2} x \cdot e$$

$$\xleftrightarrow[N]{\Lambda} x$$

$$e \cdot x \to x \equiv x \leftarrow x \cdot e$$

Fonctions récursives

Trois grands modèles :

1. Machines de Turing (Turing 36, Post 36)
2. Fonctions récursives (Gödel 31, Kleene ∼40, Ackermann ∼40)
3. λ-calcul (Church ∼30)
   $\leadsto$ λ-calculs typés (Church ∼40...)

Fonctions récursives

Définition axiomatique et pas comme langage

$\leadsto$ règles de génération des fonctions

Dans la suite : $\mathcal{F}_k = \{f \mid f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}\}$

Fonctions récursives primitives

Constantes

$$C_{k,c} \in \mathcal{F}_k, \quad C_{k,c}(x_1, \ldots, x_k) = c$$

Successeur

$$S \in \mathcal{F}_1, S(x) = x + 1$$

Projections

$$\pi_{k,i} \in \mathcal{F}_k, \quad \pi_{k,i}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k) = x_i$$

Fonctions récursives primitives

Schéma de Composition :

- f à n arguments
- $g_1, \ldots, g_n$ à m arguments

$\leadsto$ h à m arguments

$$h(x_1, \ldots, x_m) = f(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m))$$

$h = \mathit{Comp}_{n,m}(f, g_1, \ldots, g_n)$

Fonctions récursives primitives

Schéma de récursion primitive

- b à n arguments
- h à $n+2$ arguments

$\rightsquigarrow$ f à $n+1$ arguments

$$\begin{aligned} f(0, x_1, \ldots, x_n) &= b(x_1, \ldots, x_n) \\ f(k+1, x_1, \ldots, x_n) &= h(k, x_1, \ldots, x_n, \underbrace{f(k, x_1, \ldots, x_n)}) \end{aligned}$$

$f = \textit{Rec}(b, h)$

Fonctions récursives primitives

Ensemble $\mathscr{RP}$ des fonctions récursives primitives :

- Constantes
- Projections
- Successeur
- Clos par composition
- Clos par récursion primitive

Ex. : addition ? multiplication ?

Fonctions récursives primitives

Prédicat récursif primitif : fonction à valeur dans $\{0, 1\}$

Ex. : $<, >, \leq, \geq, =, \neq, \ldots$

Ex. : composition avec $\neg, \wedge, \vee$

Bijection réc. prim $\alpha : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ avec réciproques $\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}$ réc. prim.

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha_1^{-1}(x), \alpha_2^{-1}(x)) &= x \\ \alpha_1^{-1}(\alpha(x, y)) &= x \\ \alpha_2^{-1}(\alpha(x, y)) &= y \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Codage des n-uplets (x, y) codé $\alpha(x, y)$

Fonctions récursives primitives

Hiérarchie de Grzegorczyk

Niveaux de fonctions

Par niveau : croissance plus rapide que niveaux inférieurs

$$\begin{aligned} \xi_0(x) &= x + 1 \\ \xi_{n+1}(0) &= \xi_n(1) \\ \xi_{n+1}(x+1) &= \xi_n(\xi_{n+1}(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} n = 1 & \xi_1(x) = & x + 2 \\ n = 2 & \xi_2(x) = & 2x + 3 \\ n = 3 & \xi_3(x) = & 2^{x+3} - 3 \\ n = 4 & \xi_4(x) = & \ldots \end{array}$$

Fonctions récursives primitives

Ackermann-Péter :

$$\begin{aligned}
\mathit{Ack}(0,x) &= x+1 \\
\mathit{Ack}(x+1,0) &= \mathit{Ack}(x,1) \\
\mathit{Ack}(x+1,y+1) &= \mathit{Ack}(x,\mathit{Ack}(x+1,y))
\end{aligned}$$

Totale ? équiv. : « termine ? »

Qq. ex. . .

Fonctions récursives primitives

Ackermann-Péter :

$$\begin{aligned}
\mathit{Ack}(0,x) &= x+1 \\
\mathit{Ack}(x+1,0) &= \mathit{Ack}(x,1) \\
\mathit{Ack}(x+1,y+1) &= \mathit{Ack}(x,\mathit{Ack}(x+1,y))
\end{aligned}$$

Notation : $A_n(x) = \mathit{Ack}(n,x)$ $\in \mathscr{RP}$

Et *Ack* ? $\notin \mathscr{RP}$!

Fonctions récursives

Schéma de minimisation :

- g à $n+1$ arguments

$\rightsquigarrow$ f à n arguments

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \min\{k \mid g(k,x_1,\ldots,x_n) = 0\}$$

$f = \mathit{Min}(g)$

Si pas de $\min$ $\rightsquigarrow$ indéfini

Fonctions récursives

Ensemble $\mathscr{R}$ des fonctions récursives :

- Constantes
- Projections
- Successeur
- Clos par composition
- Clos par récursion primitive
- Clos par minimisation

Ex. : pred non déf. en 0 ? nulle part ?

Fonctions récursives

Fonctions récursives totales = fonctions récursives définies partout...

$$\mathscr{RP} \subset \mathscr{R}_{\text{tot}} \subset \mathscr{R}$$

Ensemble E récursif = χ_E récursive totale

Ensemble E récursivement énumérable = χ_E récursive définie sur tout E

Récursive $\Rightarrow$ Turing-calculable

XU - UCBL1 - M1if09 2020/2021 UN JEU DE SLIDES N'EST PAS UN POLY DE RÉFÉRENCE 84

XU - UCBL1 - M1if09 2020/2021 UN JEU DE SLIDES N'EST PAS UN POLY DE RÉFÉRENCE 84