

CCF

Exercice 1

Une expression du λ -calcul c'est (3 cas):

• $N = x \Leftrightarrow N$ est une variable $x \in V$ ok.

• N est de la forme: $\lambda x. N'$

Par induction, N' est une variable^① ou de la forme^②
 $\lambda x_1 \dots [y E_1] \dots$

et donc N est aussi de la même forme

① \rightarrow une variable y , alors $N = \lambda x. y$ ok.

② $\rightarrow \lambda x_1 \dots (y E_1) \dots$ et $N = \lambda x. \lambda x_1 \dots (y E_1) \dots$ ok.

• $N = [E_1 E_2]$

\downarrow
 E_1 appliqué à E_2

Or, comme N est en forme normale (FN)

E_1 et E_2 sont en FN.

Par induction:

• E_1 et E_2 sont soit des variables soit de la 2^{ème} forme.

donc:

• si E_1 et E_2 sont des variables ok.

par induction \rightarrow si E_1 est de la forme $\lambda x_1 \dots ((\lambda y E_1') \dots E_n')$
alors comme N est FN

$n=0$ (pas de lambda au début de E_1)

$\rightarrow E_1 = ((\lambda y E_1') \dots E_n')$

$N = (\text{pas de } \lambda \text{ } \overbrace{\hspace{1cm}}^{\text{OK}} E_2)$

Exercice 2

1) $I = \lambda x. x$ $S = \lambda x. \lambda y. \lambda z. (x z)(y z)$
 $K = \lambda x. \lambda y. x$

2) $(I x) \rightarrow x$ donc $((S K) K) x$
 $\rightarrow ((K x) (K x))$
 $\rightarrow x$
donc pas besoin de I

3) $\Phi(\lambda x. \lambda y. (y x))$ $\downarrow (c)$
 $= \Phi(\lambda x. \Phi(\lambda y. (y x)))$
 $= \Phi(\lambda x. ((S \Phi(\lambda y. y)) \Phi(\lambda y. x)))$ $\downarrow (d)$
 $= \Phi(\lambda x. ((S I) (K \Phi(x))))$ \rightarrow car application, donc cas (b)
 $= \Phi(\lambda x. ((S I) (K x)))$ $\downarrow 1.$
 $= ((S \Phi(\lambda x. (S I))) \Phi(\lambda x. (K x)))$ $\downarrow (d)$
 $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$

$\textcircled{1} \rightarrow x$ non libre, donc on applique (a)

$$\begin{aligned} & \Phi(\lambda x. (S I)) \\ &= (K \Phi((S I))) \quad \downarrow (a) \\ &= K (S I) \quad \downarrow (z) \end{aligned}$$

$\textcircled{2} \Phi(\lambda x. (K x))$

$$\begin{aligned} & ((S \Phi(\lambda x. K)) \Phi(\lambda x. x)) \quad \downarrow (d) \\ &= ((S (K K)) I) \quad \downarrow (a) \end{aligned}$$

donc $((S (K (S I))) (S (K K) I))$