Machines de Turing — arrêt uniforme

Données : MT simple $\mathscr{M}$, question : arrêt de $\mathscr{M}$ sur toute entrée ?

Proposition.
Arrêt uniforme : non décidable.

Preuve : par réduction du problème de l'arrêt.

Proposition.
Arrêt uniforme : non semi-décidable.

Preuve : argument diagonal.

Problèmes de décision — à retenir

- $L_d = \{w_i \mid w_i \notin \mathcal{L}(\mathscr{M}_i)\}$ — non r.é.
- $\overline{L_d} = \{w_i \mid w_i \in \mathcal{L}(\mathscr{M}_i)\}$ — r.é. ; non réc.
- $L_u = \{\langle \mathscr{M}, w\rangle \mid \mathscr{M}$ accepte $w\}$ — r.é. ; non réc.
- $\overline{L_u} = \{\langle \mathscr{M}, w\rangle \mid \mathscr{M}$ n'accepte pas $w\}$ — non r.é.

Récriture (premier ordre) — termes

Signature : triplet $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \tau)$

- $\mathcal{S}$: ensemble $\neq \emptyset$ de sortes
- $\mathcal{F}$: ensemble de symboles
- τ : fonction $\mathcal{F} \to \mathcal{S}^{\mathbb{N}_+}$,

$$f \in \mathcal{F} \mapsto s_1 \times \ldots \times s_n \to s$$

n : arité de f

Récriture (premier ordre) — termes

$(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \tau)$,
$X = \cup_{s \in \mathcal{S}} X_s$: ensemble de variables

$\mathcal{T}(\mathcal{F}, X)$: plus petit ensemble tel que

- $x \in X_s$ terme de sorte s
- $f \in \mathcal{F}$, $f : s_1 \times \ldots \times s_n \to s$,
  $t_1 : s_1, \ldots \times t_n : s_n$
  $f(t_1, \ldots, t_n)$ terme de sorte s

Termes clos : $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \emptyset)$

Arbres $\rightsquigarrow$ définition alternative : avec des positions attention aux infinis

Récriture (premier ordre) — termes

Définition du sous-terme en fonction des positions

Sous-terme de t à position p, $t|_p$, défini par l'ensemble de positions :
$\{q \in \mathbb{N}_+^* \mid p \cdot q \in \mathcal{P}os(t)\}$

$$t|_p(q) = t(p \cdot q)$$

Si $t|_p$, $(p \in \mathcal{P}os(t))$ et u de même sorte,
Remplacement $t[u]_p$, défini par l'ensemble de positions :
$\{q \in \mathbb{N}_+^* \mid q \in \mathcal{P}os(t) \bigwedge p \not\leq_{\text{préf.}} q\} \cup \{p \cdot q \mid q \in \mathcal{P}os(u)\}$

$$t[u]_p(q) = t(q) \qquad \text{si } q \in \mathcal{P}os(t) \bigwedge p \not\leq_{\text{préf.}} q$$
$$t[u]_p(p \cdot q) = u(q)$$

Récriture (premier ordre) — substitutions

Substitution : application $X \to \mathcal{T}(\mathcal{F}, X)$ conservant les sortes
Généralement : identité sauf sur un ensemble fini

Notation postfixée

Extension naturelle unique aux termes

Renommage : rel. d'équiv. analogue à l'α-conversion

$$\sigma = \{x_1 \mapsto y_1, \cdots, x_n \mapsto y_n\} \qquad y_i \text{ distincts deux à deux}$$

Récriture (premier ordre)

Règle de récriture : couple de termes $s \to t$

$$s \xrightarrow[l\to r,\sigma]{p} t \quad \text{si} \quad s|_p \equiv l\sigma \quad t \equiv s[r\sigma]_p$$

Système de récriture : ensemble de règles

$\underset{R}{\to}$: $s \underset{R}{\to} t$ ssi $\exists l \to r \in R, \exists p \in \mathcal{P}\mathrm{os}(s), \exists\sigma, s \xrightarrow[l\to r,\sigma]{p} t$

En fait, extension monotone et stable du système

Clôture réflexive/transitive : $\underset{R}{\to}^{\star}$

Clôture transitive : $\underset{R}{\to}^{+}$

Récriture (premier ordre) exemple de calcul

Arithmétique binaire

Représentation de 6 : $\#110$.

$$\begin{cases} \#0 & \to & \# & & & \\ \#+x & \to & x & x+\# & \to & x \\ x0+y0 & \to & (x+y)0 & x1+y0 & \to & (x+y)1 \\ x0+y1 & \to & (x+y)1 & x1+y1 & \to & ((x+y)+\#1)0 \end{cases}$$

Récriture (premier ordre) exemple de calcul

- Ensemble de variables : $X = \{x\ ;\ y\}$;
- Signature : $\mathcal{F} = \{\#\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ +\}$;
- Ensemble de règles.

$$\begin{cases} \#0 & \to & \# & & & \\ \#+x & \to & x & x+\# & \to & x \\ x0+y0 & \to & (x+y)0 & x1+y0 & \to & (x+y)1 \\ x0+y1 & \to & (x+y)1 & x1+y1 & \to & ((x+y)+\#1)0 \end{cases}$$

Récriture (premier ordre) exemple de calcul

- Ensemble de variables : $X = \{x\ ;\ y\}$;
- Signature : $\mathcal{F} = \{\#\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ +\}$;
- Ensemble de règles.

$$\begin{cases} \#0 & \to & \# & & & \\ \#+x & \to & x & x+\# & \to & x \\ x0+y0 & \to & (x+y)0 & x1+y0 & \to & (x+y)1 \\ x0+y1 & \to & (x+y)1 & x1+y1 & \to & ((x+y)+\#1)0 \end{cases}$$

Relation $\to$ monotone : si $s \to t$ alors $C[s] \to C[t]$;

Récriture (premier ordre) — exemple de calcul

- Ensemble de variables : $X = \{x\ ;\ y\}$;
- Signature : $\mathcal{F} = \{\#\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ +\}$;
- Ensemble de règles.

$$\begin{cases} \#0 \to \# & \\ \#+x \to x & x+\# \to x \\ x0+y0 \to (x+y)0 & x1+y0 \to (x+y)1 \\ x0+y1 \to (x+y)1 & x1+y1 \to ((x+y)+\#1)0 \end{cases}$$

Relation $\to$ monotone : si $s \to t$ alors $C[s] \to C[t]$;
stable : si $s \to t$ alors $s\sigma \to t\sigma$.

Récriture (premier ordre) — exemple de calcul

- Ensemble de variables : $X = \{x\ ;\ y\}$;
- Signature : $\mathcal{F} = \{\#\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ +\}$;
- Ensemble de règles.

$$\begin{cases} \#0 \to \# & \\ \#+x \to x & x+\# \to x \\ x0+y0 \to (x+y)0 & x1+y0 \to (x+y)1 \\ x0+y1 \to (x+y)1 & x1+y1 \to ((x+y)+\#1)0 \end{cases}$$

$$\#10 + \#1$$

Récriture (premier ordre) — exemple de calcul

- Ensemble de variables : $X = \{x\ ;\ y\}$;
- Signature : $\mathcal{F} = \{\#\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ +\}$;
- Ensemble de règles.

$$\begin{cases} \#0 \to \# & \\ \#+x \to x & x+\# \to x \\ x0+y0 \to (x+y)0 & x1+y0 \to (x+y)1 \\ x0+y1 \to (x+y)1 & x1+y1 \to ((x+y)+\#1)0 \end{cases}$$

$$\#10 + \#1 \to (\#1 + \#)1$$

Récriture (premier ordre) — exemple de calcul

- Ensemble de variables : $X = \{x\ ;\ y\}$;
- Signature : $\mathcal{F} = \{\#\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ +\}$;
- Ensemble de règles.

$$\begin{cases} \#0 \to \# & \\ \#+x \to x & x+\# \to x \\ x0+y0 \to (x+y)0 & x1+y0 \to (x+y)1 \\ x0+y1 \to (x+y)1 & x1+y1 \to ((x+y)+\#1)0 \end{cases}$$

$$\#10 + \#1 \to (\#1 + \#)1 \to (\#1)1$$

Récriture (premier ordre) — exemple de calcul

- Ensemble de variables : $X = \{x\ ;\ y\}$;
- Signature : $\mathcal{F} = \{\#\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ +\}$;
- Ensemble de règles.

$$\left\{\begin{array}{lllll} \#0 & \to & \# & & \\ \# + x & \to & x & x + \# \to & x \\ x0 + y0 & \to & (x+y)0 & x1 + y0 \to & (x+y)1 \\ x0 + y1 & \to & (x+y)1 & x1 + y1 \to & ((x+y)+\#1)0 \end{array}\right.$$

$\#10 + \#1 \to (\#1 + \#)1 \to \#11$ Stop

Récriture (premier ordre)

Puissance de calcul : Turing complet

Questions :

- Existence du résultat $\leadsto$ terminaison
- Unicité du résultat $\leadsto$ confluence, convergence

Récriture (premier ordre) — terminaison

Automatisation ? $\leadsto$ correctes, incomplètes...

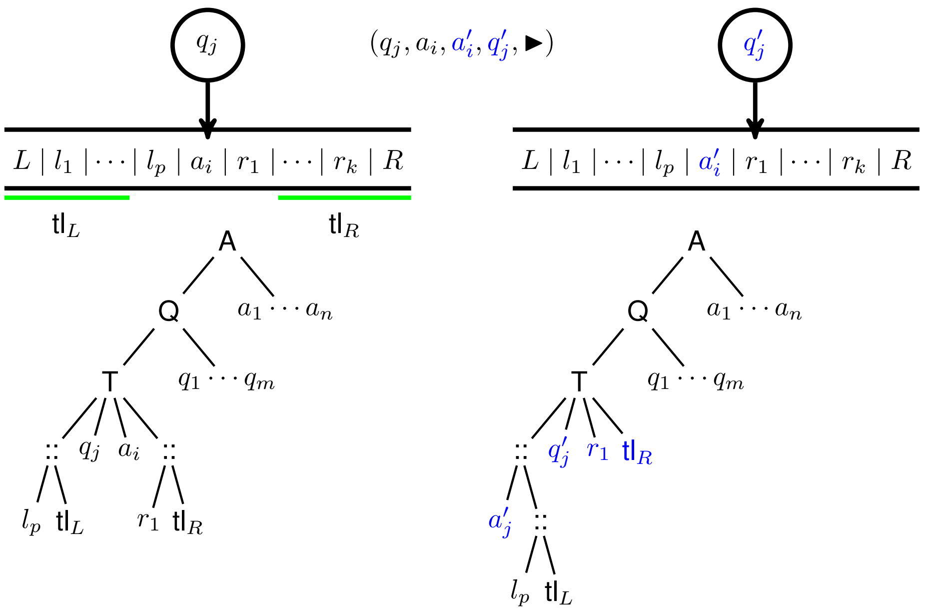
Toujours difficile.

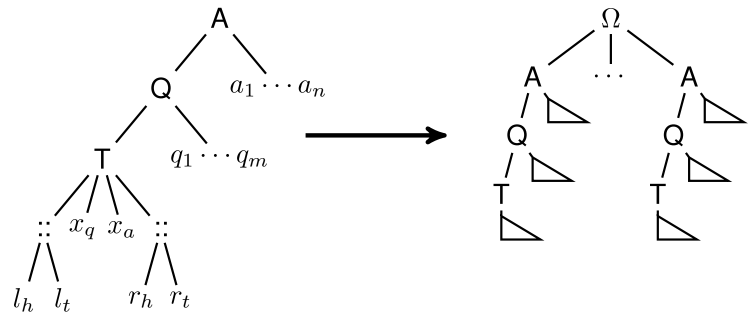
- $f(f(x)) \to f(x)$.
- $f(f(x)) \to f(g(f(x)))$.
- $f(a, b, x) \to f(x, x, x)$.
- > 1800 règles (> 1000 symboles).
- $\left\{\begin{array}{lll} a(a(x)) & \to & b(c(x)) \\ b(b(x)) & \to & a(c(x)) \\ c(c(x)) & \to & a(b(x)) \end{array}\right.$
- Syracuse...

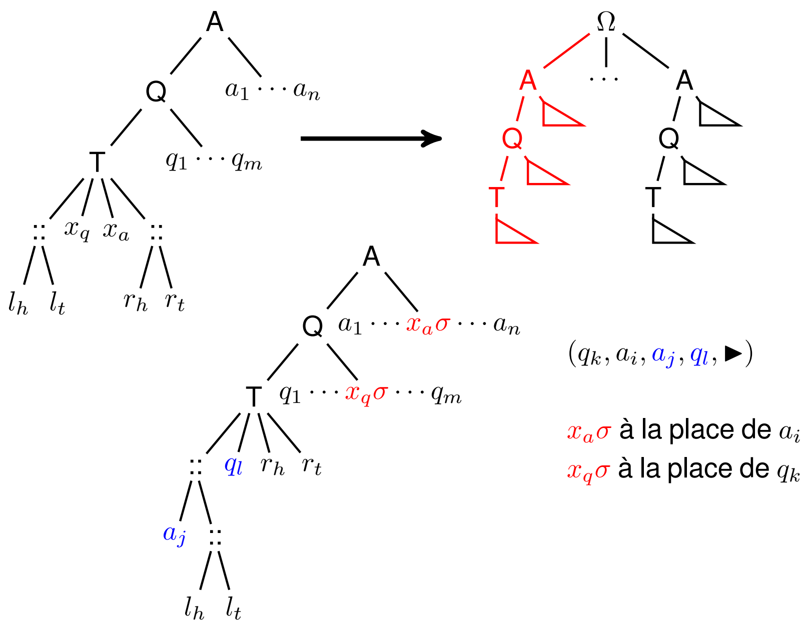
Récriture (premier ordre) — terminaison

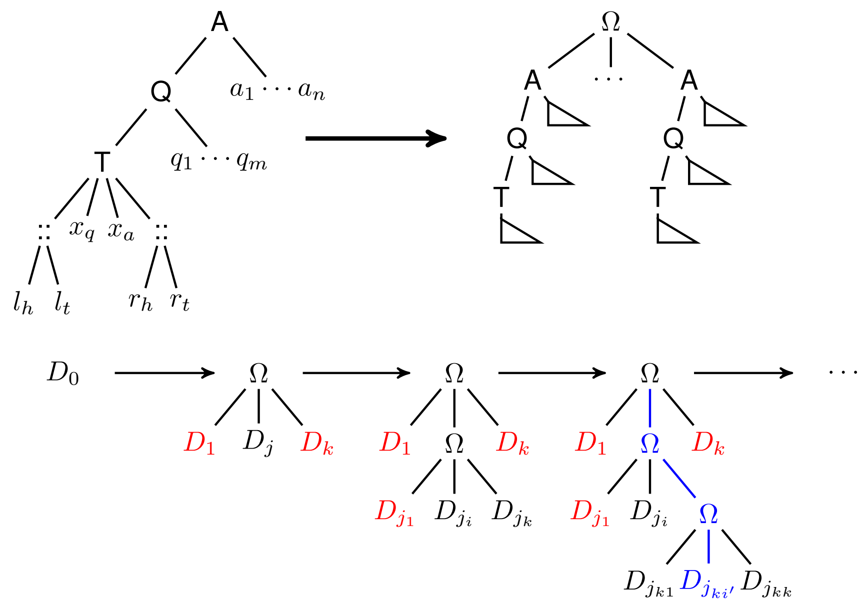
Décidabilité... Et si on restreint les règles ?

- Qualité : linéaires ?
- Quantité ?


q_j
$(q_j, a_i, a'_i, q'_j, \blacktriangleright)$
q'_j
$L \mid l_1 \mid \cdots \mid l_p \mid a_i \mid r_1 \mid \cdots \mid r_k \mid R$
$L \mid l_1 \mid \cdots \mid l_p \mid a'_i \mid r_1 \mid \cdots \mid r_k \mid R$
tl_L
tl_R
A Q $a_1 \cdots a_n$ T $q_1 \cdots q_m$ :: q_j a_i :: l_p tl_L r_1 tl_R
A Q $a_1 \cdots a_n$ T $q_1 \cdots q_m$ :: q'_j r_1 tl_R a'_j :: l_p tl_L


A Q $a_1 \cdots a_n$ T $q_1 \cdots q_m$ :: x_q x_a :: l_h l_t r_h r_t
Ω A $\cdots$ A Q T Q T


A Q $a_1 \cdots a_n$ T $q_1 \cdots q_m$ :: x_q x_a :: l_h l_t r_h r_t
Ω A $\cdots$ A Q T Q T
A Q $a_1 \cdots x_a\sigma \cdots a_n$ T $q_1 \cdots x_q\sigma \cdots q_m$ :: q_l r_h r_t a_j :: l_h l_t
$(q_k, a_i, a_j, q_l, \blacktriangleright)$
$x_a\sigma$ à la place de a_i
$x_q\sigma$ à la place de q_k


A Q $a_1 \cdots a_n$ T $q_1 \cdots q_m$ :: x_q x_a :: l_h l_t r_h r_t
Ω A $\cdots$ A Q T Q T
D_0
Ω D_1 D_j D_k
Ω D_1 Ω D_k D_{j_1} D_{j_i} D_{j_k}
Ω D_1 Ω D_k D_{j_1} D_{j_i} Ω $D_{j_{k1}}$ $D_{j_{ki'}}$ $D_{j_{kk}}$
$\cdots$

Récriture (premier ordre) terminaison

Décidabilité... Et si on restreint les règles ?

- Qualité : linéaires ?
- Quantité ?

Cool : indécidable même pour une seule règle linéaire à gauche