Bases de l'Intelligence Artificielle

CM4 : Raisonnement logique

Marie Lefevre

2020-2021

Université Claude Bernard Lyon 1

De quoi va-t-on parler ?

- Pourquoi s'intéresser à la logique en IA ?
- Logique des propositions
- Logique des prédicats
- Passer du texte à la logique
- Pour aller plus loin

La logique, pour quoi faire ?

- Exploitation de la logique dans la perspective
  de la démonstration automatique

- Plusieurs logiques
  - Logique d'ordre 0 = logique des propositions
  - Logique d'ordre 1 = logique des prédicats
  - D'autres logiques
    - Logiques de description, temporelles, floue, de croyances …

- Calcul logique
  - Mécanismes permettant d'automatiser la démonstration logique par des calculs symboliques
  - Permet de mener l'inférence

- Résolution de problèmes
  - Modélisation en logique pour permettre sa résolution automatique

De quoi va-t-on parler ?

- Pourquoi s'intéresser à la logique en IA ?
- Logique des propositions
- Logique des prédicats
- Passer du texte à la logique
- Pour aller plus loin

Logique des propositions

- Logique propositionnelle
  - Logique très simple qui est la base de presque toutes les logiques
  - Logique d'ordre 0

- Aspects syntaxiques
  - Comment écrire les formules ?
  - Pour cela, on se donne un alphabet, i.e. un ensemble de symboles
  - Parmi les mots que l'on peut écrire avec cet alphabet, on regarde ceux qui correspondent à des **expressions logiques bien formées**, i.e. les formules

- Aspects sémantiques
  - Comment déterminer la valeur de vérité d'une formule ?
  - On parle de l'**interprétation** d'une formule, i.e. de l'affectation d'une valeur vrai ou faux à chacune des variables propositionnelles qui la compose

- Aspects déductifs
  - Comment démontrer (automatiquement) de nouveaux résultats ?

Logique des propositions

- Notion de proposition
  - Une proposition est un énoncé du langage ordinaire considéré du point de vue formel
  - Un énoncé est soit vrai, soit faux mais pas les deux : principe du tiers exclu
  - Exemple : « La Rochelle est en Charente-Maritime »
    « La hauteur de la Tour Eiffel est inférieure à 300 m »
    « Le cours d'IA est intéressant »

- Notion de valeur de vérité
  - Une proposition est vraie si il y a adéquation entre la proposition et les faits du monde réel, fausse sinon
  - Exemple : « La Rochelle est en Charente-Maritime » est vrai
    « La hauteur de la Tour Eiffel est inférieure à 300 m » est faux
    « Le cours d'IA est intéressant » est vrai ☺

- Paradoxe du menteur
  - Il faut faire attention aux affirmations ni tout à fait vrai, ni tout à fait fausse
  - Exemple : « Je mens » n'est pas une proposition
    Si je dit « je mens »
    Alors si je dis la vérité je mens et si je mens je dis la vérité ….

Logique des propositions : Aspects syntaxiques

- L'alphabet est constitué
  - De connecteurs logique : {¬, ∧, ∨, →, ↔}
  - Des deux constantes propositionnelles : V et F
  - D'un ensemble infini dénombrable de propositions ou variables propositionnelles : = {p, q, r,...}

- Une formule est une combinaison de propositions
  - $(p) \wedge (\neg q \rightarrow (r))$

- Attention aux règles d'élimination des parenthèses
  - Ordre de priorité des connecteurs : ¬, ∧, ∨, →, ↔

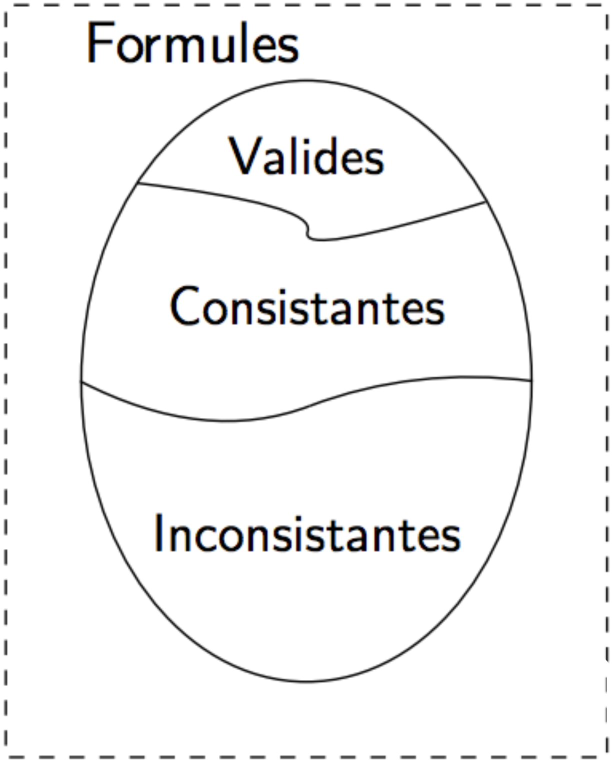
Logique des propositions : Aspects sémantiques

- Notion d'interprétation
  - Pour chaque formule F, on définit l'interprétation associée à chaque connecteur grâce aux tables de vérité et aux valeurs de vérité des propositions
    - $\delta(F) \rightarrow \{ \text{faux} , \text{vrai} \}$

p	**q**	**¬p**	**p∧q**	**p∨q**	**p→q**
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

Logique des propositions : Aspects sémantiques

- Formule satisfiable
  - Une formule est satisfiable si et seulement si :
    $\exists\delta\ \delta(F) = \text{vrai}$
  - On dit aussi que F est consistante
  - Exemple $F = (\neg p \rightarrow q) \land (q \leftrightarrow r)$
    est satisfiable pour
    $\delta(p) = \text{vrai}$ et $\delta(q) = \delta(r) = \text{vrai}$
- Formule insatisfiable
  - Une formule est insatisfiable si et seulement si :
    $\forall\delta\ \delta(F) = \text{faux}$
  - On dit aussi que F est inconsistante
  - Exemple $F = p \land \neg p$ est insatisfiable
- Tautologie
  - Une formule F est une tautologie si et seulement si :
    $\forall\delta\ \delta(F) = \text{vrai}$
  - On dit aussi que F est valide
  - On note $\vdash F$
  - Exemple $p \lor \neg p$ est une tautologie



Logique des propositions : Aspects sémantiques

- Lorsque l'on traduit un énoncé en formule
  - La multiplication des connecteurs alourdie l'écriture
  - Solution : réduire les formules
    - Limiter le nombre de connecteurs utilisés
    - Normaliser l' « allure » des formules manipulées

- Pour réduire les formules :
  - Lois logiques (tautologies)
    - Tiers-exclu, idempotence, absorption, lois de Morgan….
  - Forme normale disjonctive (FND)
    - Disjonction de conjonction de propositions : $(\ldots \wedge \ldots) \vee (\ldots \wedge \ldots)$
  - Forme normale conjonctive (FNC)
    - Conjonction de disjonction de propositions: $(\ldots \vee \ldots) \wedge (\ldots \vee \ldots)$

Logique des propositions : Aspects sémantiques

- La forme normale conjonctive (FNC) est aussi appelée forme clausale

- Pour mettre sous forme clausale :
  - Eliminer les ↔ par des →
  - Utiliser les lois de De Morgan
  - Eliminer les doubles négations
  - Appliquer les règles de distributivité

- Attention : non unicité de la forme clausale

Logique des propositions : Aspects sémantiques

Exemple : $p \wedge ((p \rightarrow q) \rightarrow r)$

$\cong p \wedge ((\neg p \vee q) \rightarrow r)$	Remplacer $X \rightarrow Y$ par $\neg X \vee Y$
$\cong p \wedge (\neg(\neg p \vee q) \vee r)$	
$\cong p \wedge ((p \wedge \neg q) \vee r)$	Descendre les ¬ avec De Morgan et supprimer les doubles ¬
$\cong (p \wedge (p \wedge \neg q)) \vee (p \wedge r)$	Distributivité
$\cong (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r)$	=> FND
$\cong p \wedge ((p \vee r) \wedge (\neg q \vee r))$	Distributivité
$\cong p \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$	
$\cong p \wedge (\neg q \vee r)$	=> FNC

Logique des propositions : Aspects déductifs

- Conséquence logique
  - Soit $A = \{F_1,\ldots,F_n\}$ un ensemble de formules et G une formule
  - On dit que G est conséquence logique de A si et seulement si toute distribution de valeur de vérité satisfaisant simultanément toutes les formules de A satisfait G
  - On note $A \vdash G$
  - Exemple : $\{p \rightarrow q, p\} \vdash q$

- Une règle d'inférence
  - Un ensemble de conditions $A_1,\ldots,A_n$
  - Et la conclusion qu'on peut en tirer C
  - On note $A_1,\ldots,A_n \models C$

- Principales règles d'inférences
  - Modus ponens $p \rightarrow q , p \models q$
  - Modus tollens $p \rightarrow q , \neg q \models \neg p$
  - Syllogisme : $p \rightarrow q , q \rightarrow r \models p \rightarrow r$

Logique des propositions : Aspects déductifs

- Principe de réfutation :
  - A ⊢ F ssi A ∪ {¬F } insatisfaisable

- Notons □ la clause vide

- Complétude du principe de résolution
  - Un ensemble S de clauses est insatisfiable si et seulement si S mène par résolution à la clause vide
  - On note $S \vdash_{reso} \square$

- Donc $A \vdash C$ ssi $A \cup \{\neg C\} \vdash_{reso} \square$

Formule de réfutation

i.e. avec $A = \{F_1,\ldots,F_n\}$: $A \vdash C$ ssi $\boxed{F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg C} \vdash_{reso} \square$

Logique des propositions : Aspects déductifs

Algorithme de résolution (Robinson, 1965)

Pour montrer que F est valide (toujours vraie)

- Construire la formule de réfutation
  i.e. la négation de F
- Mettre sous forme clausale
- Tant que la clause vide n'est pas rencontrée et qu'il existe des paires réductibles faire
  - Chercher des clauses résolvantes
  - Ajouter ce résultat à la liste des clauses
- Fin Tant que
- Si on trouve la clause vide
- Alors F est valide
- Sinon F est invalide

Si $F = H \vdash C$

$\neg(H \rightarrow C) \cong H \wedge \neg C$

Logique des propositions : Aspects déductifs

Exemple : Considérons les arguments suivants :

Si Didier est l'auteur de ce bruit, il est stupide ou dépourvu de principes.
Didier n'est ni stupide ni dépourvu de principes.
Donc Didier n'est pas l'auteur de ce bruit.

Pour nous convaincre de la validité de ce raisonnement, on le décompose.

Les propositions : D : « Didier est l'auteur de ce bruit »
S : « Didier est stupide »
P : « Didier est dépourvu de principes »

Les formules :

H1 : « Si Didier est l'auteur de ce bruit, il est stupide ou dépourvu de principes » : $(D \rightarrow (S \vee P))$

H2 : « Didier n'est pas stupide » : $\neg S$

H3 : « Didier n'est pas dépourvu de principes » : $\neg P$

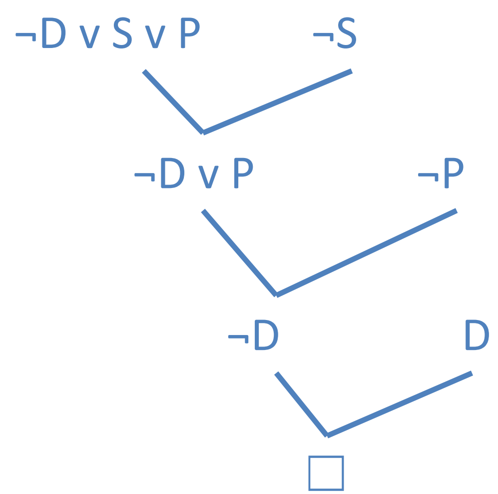
C : « Didier n'est pas l'auteur de ce bruit » : $\neg D$

On pose la question : $\{H1, H2, H3\} \models C$?

Logique des propositions : Aspects déductifs

Exemple (suite) : Résolution par réfutation

On dispose des connaissances {H1, H2, H3} soit {(D → (S v P)), ¬S, ¬P}.
On ramène sous forme clausale : {¬D v S v P, ¬S, ¬P}.
On cherche à déduire ¬D.
On prend donc la négation, soit D.
On fait une preuve par réfutation de {¬D v S v P, ¬S, ¬P, D}.



Donc H1 ∧ H2 ∧ H3 ∧ ¬C est invalide
Donc H1 ∧ H2 ∧ H3 ⊢ C est valide

Logique des propositions

- Logique propositionnelle ou logique d'ordre 0
  - Avantage : Principe de résolution par réfutation
  - Limite : Pouvoir d'expression limité…

Si Sylvain est fils de Philippe, et Philippe fils de Jean,
alors Jean est grand-père de Sylvain,
ainsi que de Marion, fille aussi de Philippe,
et que cela est vrai dans plein d'autres cas.

Comment exprimer ce raisonnement sans avoir à énumérer tous les liens de parentés pour toutes les familles ?

- Introduction de prédicats et de variables
  - $\text{Fils}(x, y) \land \text{Fils}(y, z) \leftrightarrow \text{Grand\_pere}(z, x)$

De quoi va-t-on parler ?

- Pourquoi s'intéresser à la logique en IA ?
- Logique des propositions
- Logique des prédicats
- Passer du texte à la logique
- Pour aller plus loin

Logique des prédicats

- Logique des prédicats
  - Logique du premier ordre
  - Par nature plus expressive que la logique des propositions
  - Construite à partir de la logique propositionnelle
  - S'inspire du langage naturel pour définir :
    - des variables, par exemple « IA », « sociologie », « Julien »
    - des fonctions sur ces objets, « TD d'IA », « cours de sociologie »
    - des relations entre ces objets, « Julien assiste au cours d'IA »

- Remarque :
  - Dans un langage du 1er ordre, seules les variables sont quantifiées
  - Dans un langage du 2nd ordre, on peut aussi quantifier les relations et les fonctions

- Comme pour la logique des propositions, étude du calcul des prédicats en 3 étapes :
  - Comment écrire les formules ? => aspects syntaxiques
  - Comment déterminer la valeur de vérité d'une formule ? => aspects sémantiques
  - Comment démontrer (automatiquement) de nouveaux résultats ? => aspects déductifs

Logique des prédicats : Aspects syntaxiques

- L'alphabet est constitué
  - De connecteurs logique : $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - De délimiteurs : les parenthèses ( )
  - Des deux constantes propositionnelles : {vrai, faux}
  - De constantes C = {A, B, C,…}
  - De variables V = {x, y, z, …}
  - De prédicats (ou relations) R = {P, Q, R, …}
  - De fonctions F = {f , g , . . .}, ensemble disjoint de R
  - De quantificateurs : $\{\exists, \forall\}$

Logique des prédicats : Aspects syntaxiques

- Notion d'arité
  - A chaque symbole de relation R ou F,
    on associe un entier $n \geq 0$
  - On dit alors que R ou F est un symbole d'arité n
  - i.e. une relation ou fonction à n arguments ou n variables

- Si le prédicat est d'arité 0, il correspond à la notion de proposition de la logique des propositions
- Si la fonction est d'arité 0, elle correspond à la notion de constante

Logique des prédicats : Aspects syntaxiques

- Les quantificateurs
  - ∀ (universel) : « pour tout », « quel que soit », ...
  - ∃ (existentiel) : « il existe au moins un ... tel que ... »

- Quantificateurs imbriqués : l'ordre peut être important
  - $\forall x\ (\exists y\ Aime(x, y))$
    - « tout le monde aime quelqu'un »
  - $\exists x\ (\forall y\ Aime(x, y))$
    - « il y a quelqu'un qui aime tout le monde »

Logique des prédicats : Aspects syntaxiques

- Un prédicat
  - Formule logique qui dépend de n variables libres (n > 0)
  - Noté P(x), Q(x, y)…

- Exemple : « x est un nombre entier » est un prédicat

- Remarque :
  - Lorsque que nous utilisions une proposition, nous nous contentions de lui mettre une valeur de vérité « vrai » ou « faux »
  - Ici, la valeur de vérité dépend de la valeur de x

Logique des prédicats : Aspects syntaxiques

- Un terme est :
  - Soit une constante
  - Soit une variable
  - Soit une fonction $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ où $t_1, t_2, ..., t_n$ sont des termes

- Exemple :
  - La constante X est un terme
  - La variable b est un terme
  - Les fonction fils(X), successeur(X) sont des termes
  - La fonction poids(b) est un terme
  - La fonction successeur(poids(b)) est un terme
  - Le prédicat P(X, bleu) n'est pas un terme
  - La fonction poids(P(X)) n'est pas un terme

Logique des prédicats : Aspects syntaxiques

- Un atome est :
  - Soit une proposition (prédicat d'arité 0)
  - Soit un prédicat $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ où $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont des termes

- Exemple :
  - Le prédicat P(X, bleu) est un atome
  - Le prédicat père(X, Y) est un atome
  - La proposition VIDE est un atome
  - Le prédicat ENTRE(table, X, appui(fenetre)) est un atome
  - La fonction successeur(X) n'est pas un atome
  - La fonction appui(fenetre) n'est pas un atome

Logique des prédicats : Aspects syntaxiques

- Les formules du calcul des prédicats
  1. Un atome est une formule
  2. Si F et G sont des formules
     Alors $\neg$(F), (F) $\wedge$ (G), (F) $\vee$ (G), (F) $\rightarrow$ (G), (F) $\leftrightarrow$ (G) sont des formules
  3. Si F est une formule et x une variable
     Alors $\forall$x (F) et $\exists$x (F) sont des formules
  4. Toute formule est générée par un nombre fini d'applications des règles 1, 2 et 3.

- Exemple : $\forall x \, \exists y \, (R(x,f(a,y),z) \rightarrow \neg T(g(b),z))$

Logique des prédicats : Aspects syntaxiques

- Exercice : Exprimer les énoncés suivants en logique du premier ordre.

- « Tous les lions sont féroces. »
  - ➢
- « Quelques lions ne boivent pas de café. »
  - ➢
- « Aucun singe n'est soldat. »
  - ➢
- « Tous les singes sont malicieux. »
  - ➢

Logique des prédicats : Aspects syntaxiques

- Occurrence d'une variable x dans F
  - Chaque endroit où x apparaît dans F non immédiatement précédée d'un quantificateur
  - Une occurrence de x est liée dans F si elle est dans le champ d'un quantificateur ∀ ou ∃ qui l'utilise ou si elle le suit
    Sinon elle est libre

- Exemples : $A = \forall X\ (\exists Y\ P(X, Y) \wedge Q(X, Z)) \wedge R(X)$
  $B = \forall X\ ((\exists Y\ Q(X, Y)) \wedge P(X, Y, Z))$

Logique des prédicats : Aspects syntaxiques

- Variable libre
  - Une variable est libre (ou parlante) si elle a au moins une occurrence libre
  - Une variable n'ayant aucune occurrence libre est dite liée (ou muette)

  - Exemples : $A = \forall X\ (\exists Y\ P(X, Y) \wedge Q(X, \mathbf{Z})) \wedge R(\mathbf{X})$

    variables libres = {Z, X}

    $B = \forall X\ ((\exists Y\ Q(X, Y)) \wedge P(X, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}))$

    variables libres = {Y, Z}
- Formule close
  - Une formule sans variable libre est dite close (ou fermée)
  - Sinon elle est ouverte

Logique des prédicats : Aspects syntaxiques

- Pour simplifier les formules…
  - Ordre de priorité des connecteurs : $\neg$, $\exists$, $\forall$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

- Substitution
  - Soient F une formule, x une variable et t un terme
  - La substitution de t à x, noté F[t/x], est la formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences libres de x dans F par t
  - Exemple : Soit $F = \forall y\ (P(z) \rightarrow R(y))$
    La substitution de f(x) à z dans F donne :
    $F[f(x)/z] = \forall y\ (P(f(x)) \rightarrow R(y))$

Logique des prédicats : Aspects syntaxiques

- Substituabilité
  - Soient F une formule, x une variable et t un terme.
  - t est substituable à x (i.e. t est libre pour x) si et seulement si aucune occurrence libre de x dans F ne devient une occurrence liée dans F[t/x]
  - Dans le cas contraire, il faut renommer les variables liées de la proposition ou les variables du terme pour pouvoir effectuer la substitution

Exemple :

Soit F =$\forall \mathbf{x}\ \mathbf{(}\exists v\ P(\mathbf{x}, v) \rightarrow \forall \mathbf{z}\ Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \wedge \forall u\ \exists t\ S(f(t), u)\mathbf{)}$

Alors, la substitution de **y** par **f(h(z),x)** dans F donne

F[f(h(z),x)/y] =

$\forall \mathbf{w}\ (\exists v\ P(\mathbf{w}, v) \rightarrow \forall \mathbf{y}\ Q(\mathbf{w}, f(h(z), x), \mathbf{y}) \wedge \forall u \exists t\ S(f(t), u))$

Logique des prédicats : Aspects sémantiques

- Une interprétation d'une formule F est définie par les cinq étapes suivantes :
  - Choix d'un domaine d'interprétation non vide D :
    un ensemble de valeurs que peuvent prendre les variables
  - Assignation à chaque constante de F d'un élément de D
  - Assignation à chaque proposition de F d'un élément de {vrai, faux}
  - Assignation à chaque prédicat d'arité n ($n \geq 1$)
    d'une application $I_p : D^n \rightarrow \{vrai, faux\}$
  - Assignation à chaque fonction d'arité n ($n \geq 1$)
    d'une application $I_f : D^n \rightarrow D$

Logique des prédicats : Aspects sémantiques

- Exemples d'interprétation :
- G1 : $(\forall X)\ P(X)$

Soit une interprétation i1 de G1

i1 : $D1 = \{1, 2\}$

où $i1[P(1)] = F$
$i1[P(2)] = V$

- G2 : $(\forall X)\ (\exists Y)\ Q(X, Y)$

Soit une interprétation I2 de G2

i2 : $D2 = \{1, 3\}$

où $i2[Q(1, 1)] = F$
$i2[Q(1, 3)] = V$
$i2[Q(3, 1)] = F$
$i2[Q(3, 3)] = F$

- G3 : $(\forall X)\ (R(X) \land T(f(X), a))$

Soit une interprétation i3 de G3

i3 : $D1 = \{4, 5\}$
$a = 4$
$f(4) = 5$
$f(5) = 4$

où $i3[R(4)] = V$
$i3[R(5)] = F$
$i3[T(4, 4)] = V$
$i3[T(5, 4)] = V$

Logique des prédicats : Aspects sémantiques

- Pour une interprétation I, on appelle valuation des variables, une application de l'ensemble des variables dans D

- La valeur de vérité d'une formule est calculée à partir de celles des atomes la constituant :
  - La valeur de vérité d'un atome est l'interprétation du prédicat
  - La valeur de vérité d'une formule non atomique, construite à partir d'atomes valués, est calculée au moyen des tables de vérité des connecteurs du calcul propositionnel
  - La valeur de vérité des formules contenant des variables quantifiées est calculée ainsi :
    - $\forall x\, P(x)$ est vrai ssi P est vrai pour toute interprétation de x
    - $\exists x\, P(x)$ est vrai ssi P est vrai pour au moins une interprétation de x

➢ La valeur de vérité d'une formule ne dépend que de la valuation de ses variables libres

Logique des prédicats : Aspects sémantiques

- Modèle
  - Pour une formule close F, on dit que l'interprétation I satisfait la formule F ssi la valeur de vérité prise par F dans I est vraie
  - On note $I \models F$ i.e. I est un modèle de F

- Formule universellement valide
  - Une formule F est dite universellement valide ssi pour toute interprétation et pour toute valuation, F est vraie
  - On note $\vdash F$ i.e. F est une tautologie

Logique des prédicats : Aspects sémantiques

- Formule valide
  - Une formule F est dite valide ssi il existe une interprétation I telle que pour toute valuation, F soit vraie
  - NB : I est un modèle de F

- Formule satisfiable
  - Une formule F est dite satisfiable ssi il existe une interprétation I et une valuation, telles que F soit vraie

- Formule insatisfiable / inconsistante / contradictoire
  - Une formule F est dite insatisfiable ssi pour toute interprétation I et pour toute valuation, F est fausse

Logique des prédicats : Aspects sémantiques

- Une formule F est sous forme normale prénexe
  ssi elle s'écrit : $Q_1x_1\ Q_2x_2 \ldots Q_nx_n\ A$
  où Q_i est un quantificateur $\forall$ ou $\exists$ et A une formule sans quantificateurs

- Théorème : toute formule du calcul des prédicats est équivalente à une formule sous forme prénexe

Logique des prédicats : Aspects sémantiques

- Propriétés des quantificateurs pour la mise sous forme prénexe :

Signe mutificateur $\forall x\, F(x, x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \forall y\, F(y, x_1,\ldots,x_n)$

Dualité (lois de De Morgan)

$\forall x\, F \leftrightarrow \neg\exists x\, \neg F$ $\quad\quad \neg\forall x\, F \leftrightarrow \exists x\, \neg F$

$\exists x\, F \leftrightarrow \neg\forall x\, \neg F$ $\quad\quad \neg\exists x\, F \leftrightarrow \forall x\, \neg F$

Commutativité

$\forall x\, \forall y\, F \leftrightarrow \forall y\, \forall x\, F$

$\exists x\, \exists y\, F \leftrightarrow \exists y\, \exists x\, F$

Attention à la différence entre $\forall x\, \exists y$ et $\exists y\, \forall x$

Distributivité

$(\forall x\, F) \land (\forall x\, H) \leftrightarrow \forall x\, (F \land H)$

$(\exists x\, F) \lor (\exists x\, H) \leftrightarrow \exists x\, (F \lor H)$

Logique des prédicats : Aspects sémantiques

- Propriétés des quantificateurs (suite)

Si x ne possède aucune occurrence dans H, on a :

$((\forall x\ F) \vee H) \leftrightarrow \forall x\ (F \vee H)$

$((\exists x\ F) \wedge H) \leftrightarrow \exists x\ (F \wedge H)$

$(\forall x\ H) \leftrightarrow H$

$(\exists x\ H) \leftrightarrow H$

Logique des prédicats : Aspects sémantiques

- Mise sous forme prénexe
  1. Eliminer les connecteurs $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$
  2. Transporter les symboles de négation devant les atomes
  3. Renommer si nécessaire les variables pour pouvoir utiliser les propriétés de $\forall$ et $\exists$
  4. Transporter les quantificateurs devant la formule

Logique des prédicats : Aspects sémantiques

- Exemples de mise sous forme prénexe

$(\forall X)\ P(X) \rightarrow (\exists X)\ Q(X)$

$\cong (\neg((\forall X)\ P(X))) \vee (\exists X)\ Q(X)$

$\cong (\exists X)\ \neg P(X)) \vee (\exists X)\ Q(X)$

$\cong \exists X\ (\neg P(X) \vee Q(X))$

$(\exists X\ (P(X) \rightarrow Q(X))) \rightarrow (\forall X\ P(X) \rightarrow \exists X\ Q(X))$

$\cong \neg(\exists X\ (P(X) \rightarrow Q(X))) \vee (\forall X\ P(X) \rightarrow \exists X\ Q(X))$

$\cong \neg(\exists X\ (\neg P(X) \vee Q(X))) \vee (\neg(\forall X\ P(X)) \vee \exists X\ Q(X))$

$\cong (\forall X\ (P(X) \wedge \neg Q(X))) \vee (\exists X\ (\neg P(X)) \vee \exists X\ Q(X))$

$\cong (\forall X\ (P(X) \wedge \neg Q(X))) \vee (\exists X\ (\neg P(X) \vee Q(X)))$

$\cong (\forall X\ (P(X) \wedge \neg Q(X))) \vee (\exists Y\ (\neg P(Y) \vee Q(Y)))$

$\cong \forall X\ \exists Y\ ((P(X) \wedge \neg Q(X)) \vee (\neg P(Y) \vee Q(Y)))$

Logique des prédicats : Aspects sémantiques

- Forme de Skolem
  - Une formule F sous forme prénexe est dite sous forme de Skolem ssi F s'écrit sous la forme :
    $\exists x_1 \ldots \exists x_n \, \forall y_1 \ldots \forall y \;\; A(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_p)$
    où A est un énoncé sans quantificateur

- Forme de Herbrand
  - Une formule F sous forme prénexe est dite sous forme de Herbrand ssi F s'écrit sous la forme :
    $\forall y_1 \ldots \forall y \; \exists x_i \ldots \exists x_n \;\; A(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_p)$
    où A est un énoncé sans quantificateur

➢ Théorème : toute formule du calcul des prédicats est équivalente à une formule sous forme de Skolem

Logique des prédicats : Aspects sémantiques

- Fonctions de Skolem
  - Concrètement, lorsqu'on rencontre l'expression $\forall x\ \exists y\ A(x,y)$
  - On remplace y par une fonction $f : E \to E,\ x \to y$
  - On obtient ainsi l'expression : $\exists f\ \forall x\ A(x\ ,\ f\ (x\ ))$
  - f est appelée une fonction de Skolem.
  - On dit aussi qu'on « skolémise » la variable y

- Forme standard de Skolem
  - Une formule sous forme de Skolem est dite sous forme standard de Skolem ssi la partie sans quantificateurs est sous FNC

➢ Théorème : toute formule du calcul des prédicats est équivalente à une formule sous forme standard de Skolem

Logique des prédicats : Aspects sémantiques

- Méthode de Skolémisation (pour obtenir une forme standard de Skolem)

Soit $G = (Q_1\ X_1)\ (Q_2\ X_2)\ldots\ (Q_n\ X_n)\ M(X_1, X_2,\ldots X_n)$ une FN prénexe

1. Eliminer les quantificateurs existentiels Q_r
   (en général de la gauche vers la droite mais l'ordre importe peu)
   a. Si aucun quantificateur universel n'apparaît avant Q_r
      i.e. dans $(Q_1\ X_1)\ \ldots\ (Q_{r-1}\ X_{r-1})$ on choisit un symbole de constante C différent de toute constante apparaissant dans M
      on supprime $Q_r\ X_r$ et on remplace X_r par C dans M
   b. Si $Q_1\ Q_2\ldots\ Q_m$ sont m quantificateurs universels apparaissant avant Q_r
      on choisit une fonction f d'arité m différente de toute fonction apparaîssant dans M on supprime Q_rX_r et on remplace tout X_r dans M par $f(X_1, X_2,\ldots X_m)$
2. On itère le processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de quantificateur existentiel dans le préfixe

Logique des prédicats : Aspects sémantiques

- Exemple Skolémisation

Soit $G = \exists X\ \exists Y\ \forall Z\ \forall T\ \exists V\ P(X,Y,Z,T,V)$

Etape a/X	$\exists Y\ \forall Z\ \forall T\ \exists V\ P(a,Y,Z,T,V)$
Etape b/Y	$\forall Z\ \forall T\ \exists V\ P(a,b,Z,T,V)$
Etape f(Z,T)/V	$\forall Z\ \forall T\ P(a,b,Z,T,f(Z,T))$

Logique des prédicats : Aspects sémantiques

- Les littéraux dans le calcul des prédicats sont les formules atomiques (appelés littéraux positifs) ou leurs négations (appelées littéraux négatifs)
- Une clause est une disjonction finie de littéraux
  - Une clause concrète est une clause sans variable
  - Une clause de Horn est une clause comportant au plus un littéral positif

- Forme clausale
  - La forme clausale d'une formule F est constituée de l'ensemble des clauses de la forme standard de Skolem de cette formule où :

1. Les variables quantifiées universellement sont conservées
   et les fonctions (y compris les fonctions de Skolem) ne sont pas modifiées
2. Les variables quantifiées existentiellement sont remplacées par des constantes (toutes différentes)
3. Les variables sont renommées d'une clause à l'autre

Logique des prédicats : Aspects sémantiques

- Mise sous forme clausale

1. Mise sous forme normale conjonctive (FNC) comme en logique des propositions
   - $F = F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots F_n$
2. Mise sous forme prénexe
   - $F = Q_1x_1\ Q_2x_2 \ldots Q_nx_n\ A$
3. Skolémisation
   - $F = \exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y_1 \ldots \forall y\ A(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_p)$
   - On fixe les $\exists x_i$
4. Mise sous forme clausale
   - Il ne reste que des $\forall$: on allège la notation en les supprimant
   - On élimine les $\wedge$ pour avoir un ensemble de clause $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$

Logique des prédicats : Aspects déductifs

- Théorème de Herbrand (1929)
  - Lien entre calcul des prédicats et calcul des proposition
    - Dans le calcul des propositions : il est possible de déterminer de manière certaine si une proposition est démontrable ou pas
    - Dans le calcul des prédicats : c'est plus délicat…

➢ Le théorème de Herbrand répond partiellement à cette question :

  ➢ La méthode de Herbrand permet de ramener
  la satisfaisabilité d'une formule des prédicats
  à la satisfaisabilité d'un ensemble infini de formules propositionnelles

Logique des prédicats : Aspects déductifs

- Univers de Herbrand d'un ensemble de clauses E
  - L'ensemble des termes de base que l'on peut construire à partir des fonctions et des constantes qui apparaissent dans E
  - Si aucune constante n'apparaît, on en fixe une arbitrairement et $H_0 = \{ a \}$
  - Exemple : $E = \{\neg P(f(x)) \vee Q(a), R(g(x))\}$
    $H0 = \{a, f(a), g(a)\}$
    $H\infty = \{a, f(a), g(a), f(f(a)), f(g(a)), g(f(a)), ...\}$

- Base de Herbrand d'un ensemble de clauses E
  - La base de Herbrand de E est l'ensemble des atomes de base qui peuvent être construits à partir des prédicats de E appliqués aux termes de l'univers de Herbrand de E
  - Exemple : $E = \{\neg P(f(x)) \vee Q(a), R(g(x))\}$
    La base de Herbrand est
    $\{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), P(g(a)), ...\}$

Logique des prédicats : Aspects déductifs

- Interprétation de Herbrand d'un ensemble de clauses E
  - Obtenue en remplaçant les variables de E
    par des éléments de l'univers de Herbrand de E
  - Une interprétation de Herbrand est une interprétation
    mais pas le contraire
  - Exemple : $E = \{\neg P(f(x)) \vee Q(a), R(g(x))\}$
    Une interprétation possible est
    $I = \{\neg P(f(a)) \vee Q(a), R(g(a))\}$

- Modèle de Herbrand d'un ensemble de clauses E
  - C'est une interprétation de Herbrand de E
    qui est un modèle de E de la logique des prédicats
  - i.e. une interprétation qui est vraie pour toutes les valuations des variables

Logique des prédicats : Aspects déductifs

- Théorème de Herbrand
  - Un ensemble de clauses E est insatisfiable
    ssi il existe un ensemble fini d'interprétations
    de Herbrand de E qui soit insatisfiable

- Pour montrer qu'une formule F est valide :
  - On construit F', la forme normale de Skolem de sa négation
  - On trouve une interprétation de Herbrand
  - On montre par résolution que cette interprétation est insatisfiable
  - F' est insatisfiable et donc F est valide

Logique des prédicats : Aspects déductifs

- Soit deux clauses : $C_1 = P(x_1) \vee Q(x_1)$ et $C_2 = \neg P(f\,(x_2)) \vee R(x_2)$

➢ On ne peut pas appliquer directement le principe de résolution

- C'est le théorème de Herbrand qui nous le permet :
  - en substituant $f(a)$ à x_1 dans C1 et a à $x_2$dans C2
    on obtient les instances de bases
    $C_1' = P(f(a)) \vee Q(f(a))$ et $C_2' = \neg P(f(a)) \vee R(a)$
    qui permettent la résolution
  - en substituant $f(x_1)$ à x_1 dans C1 et x_1 à $x_2$dans C2
    on obtient une résolvante plus générale
    $C_1'' = P(f(x_1)) \vee Q(f(x_1))$ et $C_2'' = \neg P(f\,(x_1)) \vee R(x_1)$

➢ Le principe de résolution doit être étendu au calcul des prédicats à travers un mécanisme d'unification

Logique des prédicats : Aspects déductifs

- Une substitution est un ensemble fini de la forme $\{t_1/v_1, \ldots , t_n/v_n\}$ où les v_i sont des variables et chaque t_i est un terme différent de v_i
  - Les variables ont au plus une occurrence à droite des « / »
  - Exemple : $\{a/x, f(a)/y, g(f(b))/z\}$

    On dit : « a remplace x, f(a) remplace y et g(f(b)) remplace z »

- Soit une formule F et une substitution $\theta = \{t_1/v_1, \ldots , t_n/v_n\}$, on obtient une instance de F en remplaçant dans F chaque occurrence de v_i par le terme t_i
  - Exemple : Pour $\theta = \{a/x, f(a)/y, g(f(b))/z\}$

    $F = P(x,y,z)$

    on obtient : $F\theta = P(a, f(a), g(f(b)))$

Logique des prédicats : Aspects déductifs

- Unificateur
  - Une substitution θ est appelée unificateur d'un ensemble $\{E_1, ..., E_k\}$ si et seulement si $E_1\theta = ... = E_k\theta$
  - L'ensemble $\{E_1, ..., E_k\}$ est alors dit unifiable
  - Exemple : $E = \{P(a,x), P(a,f(y))$
    $\theta_1 = \{f(a)/x, a/y\}$ est un unificateur de E
    $\theta_2 = \{f(y)/x\}$ est un autre unificateur de E

Logique des prédicats : Aspects déductifs

- Principe de résolution pour le calcul des prédicats
  = Théorème de Herbrand + algorithme d'unification

- Résolution comme en logique des propositions
  mais en passant par l'unification :
  - Si F_1 et F_2 deux clauses, elles sont résolvables
    ssi elles contiennent une paire opposée de formules atomiques
    $P(x_1, \ldots, X_n)$ et $\neg P(x_1, \ldots, X_n)$
    et si elles peuvent être unifiées par un unificateur θ
  - La résolvante est alors l'union de $\theta(F_1 \backslash \{P\})$ et $\theta(F_2 \backslash \{\neg P\})$

➢ La résolution est saine et complète au sens de la réfutation

Logique des prédicats : Aspects déductifs

- Exemple : Valider le raisonnement suivant :
  - Aucun avare n'est altruiste
  - Les personnes qui conservent les coquilles d'œufs sont avares
  - Donc aucune personne altruiste ne conserve les coquilles d'œufs

- Etape 1 – formalisation
  - On considère les prédicats suivants :
    - av(x) pour « x est avare »
    - al(x) pour « x est altruiste »
    - coq(x) pour « x conserve les coquilles d'œufs »
  - On obtient :
    - $\forall x \, (av(x) \rightarrow \neg al(x))$
    - $\forall x \, (coq(x) \rightarrow av(x))$
    - $\forall x \, (al(x) \rightarrow \neg coq(x))$

Logique des prédicats : Aspects déductifs

- Etape 2 – forme clausale
  - On avait :
    - $\forall x\ (av(x) \rightarrow \neg al(x))$
    - $\forall x\ (coq(x) \rightarrow av(x))$
    - $\forall x\ (al(x) \rightarrow \neg coq(x))$
  - On obtient :
    - C1 : $\{\neg av(x1) \vee \neg al(x1)\}$
    - C2 : $\{\neg coq(x2) \vee av(x2))$
    - C3 : $\{\neg al(x3) \vee \neg coq(x3))$
    - Négation de C3 => C4 : $\{al(a)\ ,\ coq(a)\}$

Logique des prédicats : Aspects déductifs

- Etape 3 – preuve par réfutation
  - E = {C1, C2, C4}
    E = {¬av(x1) ∨ ¬al(x1), ¬coq(x2) ∨ av(x2), al(a) , coq(a)}
  - H∞ = {a}

¬av(x1) ∨ ¬al(x1)   al(a)

unification {al(x1), al(a)} = {a/x1}

¬av(a)   ¬coq(x2) ∨ av(x2)

unification {av(x2), av(a)} = {a/x2}

¬coq(a)   coq(a)

□

Logique des prédicats : Aspects déductifs

- Etape 4 – conclusion
  - On a identifié un ensemble d'instances de base insatisfiable :
    $\{al(a), \neg av(a) \lor \neg al(a), \neg coq(a) \lor av(a), coq(a)\}$
  - En appliquant le théorème de Herbrand,
    on montre que le raisonnement est valide

Complétude et décidabilité

- Propriétés des règles d'inférences
  - Si la règle d'inférence ne produit que des phases vraies
    Elle préserve la vérité – Elle est cohérente
  - Si la règle d'inférence produit toutes les phases vraies
    Elle est complète
- Une théorie complète est décidable s'il existe un algorithme qui permet de déterminer si un énoncé quelconque est (logiquement) vrai ou non

➢ A l'ordre 0 : le calcul des propositions est complet et décidable

➢ A l'ordre 1 : le calcul des prédicats du premier ordre est complet (Gödel, 1930), mais indécidable (Church, Turing, 1936)

➢ A l'ordre 2 : le calcul des prédicats du second ordre est incomplet

De quoi va-t-on parler ?

- Pourquoi s’intéresser à la logique en IA ?
- Logique des propositions
- Logique des prédicats
- Passer du texte à la logique
- Pour aller plus loin

La logique c'est …

- Logique des propositions
  = Logique d'ordre 0
  = $(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \ldots)$
- Logique des prédicats
  = Logique du premier ordre
  = $(\forall, \exists, R, S, T, f, g, x, y, \ldots)$

Représentation des connaissances en logique

- Le sens des connecteurs de la logique
  ne veut pas dire exactement la même chose
  que ceux du langage naturel

- La capacité d'expression
  dans la représentation de la connaissance en logique
  est beaucoup moins riche qu'en langage naturel

- Mais toutefois les connecteurs logiques
  ont des correspondances ou "équivalents"
  dans la langue naturelle

La conjonction

- $P \wedge Q$ peut se traduire :
  - P et Q
  - Q et P
  - à la fois P et Q
  - P, Q
  - P bien que Q
  - P quoique Q
  - P mais Q (sous-entendu mais aussi)
  - Non seulement P mais Q
  - P et pourtant Q
  - P tandis que Q
  - …

La disjonction

- P ∨ Q peut se traduire :

  - P ou Q
  - ou P ou Q
  - ou bien P ou bien Q
  - soit P soit Q
  - P à moins que Q
  - P sauf si Q
  - P ou Q ou les deux (OU inclusif)
  - …

Le conditionnel / L'implication

- Dans le langage courant
  - « H implique C »
  - « si une hypothèse H est vérifiée, alors on observe la conclusion C »
- En mathématiques
  - H est une condition suffisante de C

- « si 2+2=5, alors Tokyo est la capitale du Japon »
  - Pas beaucoup de sens pour nous
  - Pourtant cet énoncé est vrai du point de vue de la logique !
  - En effet on ne s'intéresse pas à la véracité de l'hypothèse

- En résumé, en logique :
  - L'énoncé « H implique C » est vrai
    dans le cas où C est vrai et dans le cas où H est faux
  - Pour s'en convaincre :
    l'unique cas raisonnable pour que « H implique C » soit faux
    est lorsque H est vrai et C est faux
    Dans tous les autres cas, la règle est que l'énoncé est vrai

Le conditionnel / L'implication

- $P \rightarrow Q$ peut traduire :
  - si P alors Q
  - P condition suffisante de Q
  - Q condition nécessaire de P
  - P alors Q
  - Q si P
  - Q lorsque P
  - P seulement si Q
  - Q pourvu que P
  - …

L'équivalence

- $P \leftrightarrow Q$ peut traduire :
  - P si et seulement si Q
  - P si Q et Q si P
  - P condition nécessaire et suffisante de Q
  - …

Les quantificateurs

- L'universelle affirmative : $\forall x\ (F(x) \rightarrow G(x))$
  - Tous les F sont des G
  - Tout F est G
  - Tout ce qui est F est G
  - N'importe quel F est G
  - Les F sont tous G
  - Si un être quelconque est F, il est G
  - Chaque F est G
  - Seuls les G sont F

Les quantificateurs

- L'universelle négative : $\forall x\ (F(x) \rightarrow \neg\ G(x))$
  - Aucun F n'est G
  - Il n'y a aucun F et G
  - Rien n'est à la fois F et G
  - Les F et G n'existent pas

Les quantificateurs

- La particularité affirmative : $\exists X\ (F(x) \land G(x))$

  - Quelques F sont G
  - Quelque F est G
  - Il y a des F et G
  - Quelque chose est à la fois F et G
  - Il y a un F et G
  - Des F et G existent

Les quantificateurs

- La particularité négative : $\exists x\ (F(x) \land \neg\ G(x))$
  - Quelques F ne sont pas G
  - Quelque F n'est pas G
  - Il y a des F et non G
  - Quelque chose est à la fois F et non G
  - Il y a un F et non G
  - Des F et non G existent

Attention aux ambiguïtés

- Les ressemblances entre les connecteurs logiques et ceux de la langue naturelle sont limitées :
  - « Il mange ou il dort » et « il dort ou il mange » semblent synonymes
  - Par contre, « il a faim et il mange » n'est pas semblable à « il mange et il a faim » car le « et » a une connotation de causalité et de temps
  - Le « ou » du français est parfois exclusif : « la porte est ouverte ou la porte est fermée »

➢ La traduction est en général liée au contexte

➢ Il peut aussi exister plusieurs traductions possibles

De quoi va-t-on parler ?

- Pourquoi s'intéresser à la logique en IA ?
- Logique des propositions
- Logique des prédicats
- Passer du texte à la logique
- Pour aller plus loin

Pour aller plus loin

- Sur l'histoire de la logique, l'explication de tous les « termes » utilisés et de comment on définit un langage formel pour l'utiliser en logique (qqsoit l'ordre)
  - liris.cnrs.fr/marie.lefevre/ens/BIA/Cours_Logique_Christophe_Roland.pdf

- Sur toutes les définitions de la logique d'ordre 0 et 1
  - liris.cnrs.fr/marie.lefevre/ens/BIA/Cours_Logique_Dominique_Pastre.pdf
  - Contient des énoncés d'exercices… sans correction

- Sur l'exemple d'un langage formel: le système PEU
  - http://liris.cnrs.fr/alain.mille/enseignements/Master_PRO/BIA/chap2.htm

- Sur les autres logiques
  - Artificial Intelligence : A Modern Approach, Stuart Russell & Peter Norvig

- Sources pour construire ce cours
  - Les cours de Narendra Jussien et Marie-Pierre Gleizes