Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften
zh
aw
School of
Engineering
INE Institut für
Nachhaltige Entwicklung

Markov-Modelle

Ralf Mock, 9. November 2015

Lernziele

Die Teilnehmendem können

- die Grundlagen von Markov-Modellen skizzieren
- Zustandsdiagramme zeichnen
- einfache Markov-Modelle von Komponenten erstellen
- Anwendbarkeit und Ergebnisse beurteilen.

Allgemeines

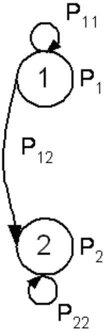
- Die bisherigen Betrachtungen gelten nur für nicht-instandsetzbare Einheiten („Teststand für Glühbirnen").
- Instandsetzung („Reparaturen") beeinflusst die Verfügbarkeit eines Systems wesentlich: Es gibt Schleifen von Funktion – Ausfall – Funktion.
- **Gesucht:** Methode, um Zustandswahrscheinlichkeiten von Systemen einschl. Instandsetzung mathematisch beschreiben zu können.

Weiterführende Literatur

Es gibt viel Literatur zu Markov-Modellen (auch Markoff, Markow geschrieben). Für den Einstieg und praxisnah sind: [1], [2] und [Wikipedia].

Nicht-instandsetzbare Einheit: Eine Einheit geht in Abhängigkeit von der Zeit t vom Ausgangszustand „ Funktion“ in den Endzustand „Ausfall“.

Überführung in ein Zustandsdiagramm



- 1: Zustand 1 ≡ „Funktion“; 2: Zustand 2 ≡ „Ausfall“
- $P_1 : P_1(t)$: Zustandswahrscheinlichkeit, dass sich die Einheit zum Zeitpunkt t oder Zeitintervall $t = t + \Delta t$ im Zustand 1 befindet (P_2 : entsprechend P_1)
  - $P_1 : P_1(t+\Delta t) = [P_1(t) \wedge P_{11}(\Delta t)]$
  - $P_2 : P_2(t+\Delta t) = [P_1(t) \wedge P_{12}(\Delta t)] \vee [P_2(t) \wedge P_{22}(\Delta t)]$
- $P_{11} : P_{11}(\Delta t)$: Wahrscheinlichkeit, dass die Einheit im Zeitintervall von t bis $t+\Delta t$ im Zustand 1 bleibt (P_{22} : entsprechend P_{11})
- $P_{12} : P_{12}(\Delta t)$: Übergangswahrscheinlichkeit, dass die Einheit im Zeitintervall von t bis $t+\Delta t$ vom Zustand 1 in den Zustand 2 übergeht, also ausfällt

Erstellen eines Gleichungssystems

- **Annahmen**
  - $P = \lambda \cdot t$, wobei λ = konstant $\Rightarrow$ Exponentialverteilung
  - Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t=0) = 0$
- **Gleichungssystem (1)**

$$P_1(t+\Delta t) - P_1(t) = -\lambda \Delta t \cdot P_1(t)$$
$$P_2(t+\Delta t) - P_2(t) = +\lambda \Delta t \cdot P_1(t)$$

wobei: $\lambda \cdot \Delta t = P$: Wahrscheinlichkeit, dass die Einheit zwischen t und $t + \Delta t$ ausfällt

- als *Differentialgleichungssystem*

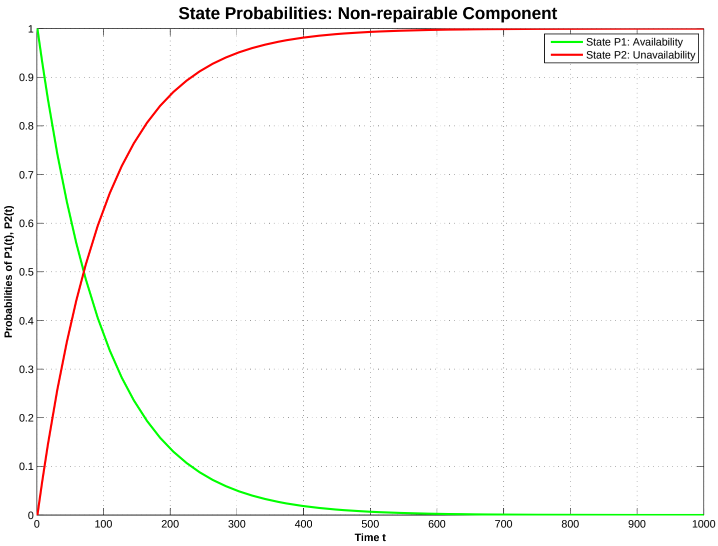
$$\frac{d}{dt} P_1(t) = -\lambda \cdot P_1(t)$$

$$\frac{d}{dt} P_2(t) = +\lambda \cdot P_1(t)$$

- in *Matrizenschreibweise*

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ +\lambda & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}$$

Zustandswahrscheinlichkeiten mit $P_{12} = 0.01$



Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften
zh aw School of Engineering
INE Institut für Nachhaltige Entwicklung

Exkurs Zuverlässigkeitstheorie

- Ausfalldichte $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$
- „Modell Exponentialverteilung"
  - Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t) = 1 - \exp(-\lambda \cdot t)$,
  - Überlebenswahrsch. $R(t) = 1 - F(t) = \exp(-\lambda \cdot t)$
  - Ausfalldichte $f(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot t)$
- mit $P_i = \int_0^\infty \frac{dP_i}{dt}$ und $P_1 \equiv R(t)$ ist Gleichungssystem (1):

$$\frac{d}{dt}P_1(t) = -\lambda \cdot P_1(t) = -\lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot t)$$

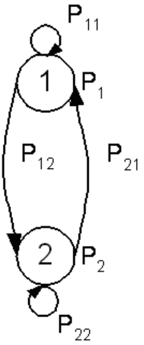
$$\frac{d}{dt}P_2(t) = +\lambda \cdot P_1(t) = +\lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot t)$$

und über die Integration folgt dann das Ergebnis

  - $P_1(t) = \exp(-\lambda \cdot t)$
  - $P_2(t) = 1 - \exp(-\lambda \cdot t)$

Instandsetzbare Einheit: Eine Einheit geht in Abhängigkeit von der Zeit t vom Ausgangszustand „Funktion“ in den Zustand „Ausfall“ und dann wieder in den Ausgangszustand „Funktion“ zurück.

Überführung in ein Zustandsdiagramm



- 1: Zustand 1 $\equiv$ „Funktion“; 2: Zustand 2 $\equiv$ „in Reparatur“
- $P_1 : P_1(t)$ s. o. (P_2 : entspr. P_1)
  - $P_1 : P_1(t+\Delta t) = [P_1(t) \wedge P_{11}(\Delta t)] \vee [P_2(t) \wedge P_{21}(\Delta t)]$
  - $P_2 : P_2(t+\Delta t) = [P_1(t) \wedge P_{12}(\Delta t)] \vee [P_2(t) \wedge P_{22}(\Delta t)]$
- $P_{11} : P_{11}(\Delta t)$: s.o.
- $P_{12} : P_{12}(\Delta t)$: s.o.
- $P_{21} : P_{21}(\Delta t)$: Übergangswahrscheinlichkeit, dass die Einheit im Zeitintervall von t bis $t+\Delta t$ vom Zustand 2 wieder in den Zustand 1 übergeht, also instandgesetzt wird.

Einbezug der Reparaturrate μ

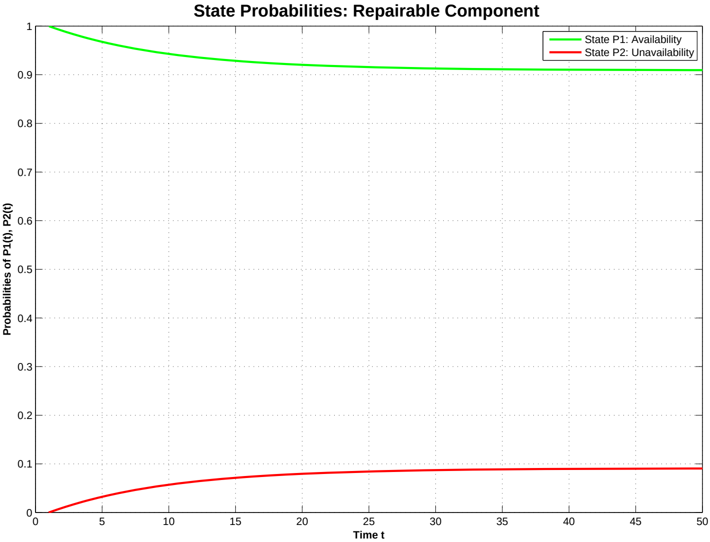
- μ entspricht der Definition der Ausfallrate und wird hier als konstant angenommen. Damit gilt: Reparaturwahrscheinlichkeit $F_R = 1 - \exp[-\mu \cdot t]$
- MTTR (Mean Time to Repair) ist der Kehrwert von μ. Kennt man die mittlere Reparaturdauer, dann ist der Kehrwert die gesuchte (konstante) Reparaturrate.

Gleichungssystem (1) wird zu (2) erweitert

$$\frac{d}{dt}P_1(t) = -\lambda \cdot P_1(t) + \mu \cdot P_2(t)$$
$$\frac{d}{dt}P_2(t) = +\lambda \cdot P_1(t) - \mu \cdot P_2(t)$$

Dieses Gleichungssystem verlangt andere Lösungsverfahren, z.B. die La Place-Transformation. Allerdings gibt es Tools zur Berechnung und Darstellung von Diffentialgleichungssystemen, z.B. CARMS (veraltet), ES-SaRel, Matlab.

Zustandswahrscheinlichkeiten mit $P_{12} = 0.01; P_{21} = 0.1$



Vereinfachung: stationäre Zustandswahrscheinlichkeiten für $t \to \infty$

- Die Ableitung einer Funktion zeigt deren Steigung
- Die Steigung der Zuverlässigkeitsfunktion $P_i(t)$ strebt nach „unendlich" langer Zeit gegen null, d.h.
- $\frac{d}{dt} P_i(t \to \infty) = 0$

Beispiel: eine instandsetzbare Einheit

Gleichungssystem (2) wird zum stationären Gl.-System (3)

$$0 = -\lambda \cdot P_1(\infty) + \mu \cdot P_2(\infty)$$
$$0 = +\lambda \cdot P_1(\infty) - \mu \cdot P_2(\infty)$$

Gleichungssystem (3) ist nicht lösbar, da der $N-$te Zustand aus den vorherigen Zuständen folgt $(F = 1 - R)$

- Zusätzliche Information: $\sum_i P_i(\infty) = 1$

Für das stationäre Gleichungssystem (3) bedeutet dies

$$0 = -\lambda \cdot P_1(\infty) + \mu \cdot P_2(\infty)$$
$$0 = 1 - P_1(\infty) - P_2(\infty)$$

oder

$$0 = 1 - P_1(\infty) - P_2(\infty)$$
$$0 = \lambda \cdot P_1(\infty) - \mu \cdot P_2(\infty)$$

Beispiel linke Gleichung: Auflösen nach $P_2(\infty) = 1 - P_1(\infty)$ und Einsetzen in die obere Gleichung ergibt eine Gleichung, die nur noch von $P_1(\infty)$ abhängt: $0 = -\lambda \cdot P_1(\infty) + \mu \cdot (1 - P_1(\infty))$.

Auflösen nach $P_1(\infty)$ ergibt die stationäre Wahrscheinlichkeit für den Zustand 1 „Funktion" - d.h. die stationäre Verfügbarkeit

$$P_1(\infty) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

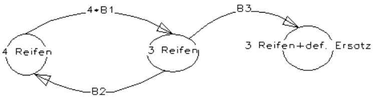
Die stationäre Ausfallwahrscheinlichkeit (bzw. Nichtverfügbarkeit) ist dann

$$P_2(\infty) = 1 - P_1(\mu) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Beispiel: PW in der Wüste

Ein Fahrer ist alleine mit dem PW in einer Wüste unterwegs. Ein Reservereifen wird mitgeführt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Fahrzeug mit Reifenschaden stehen bleibt?

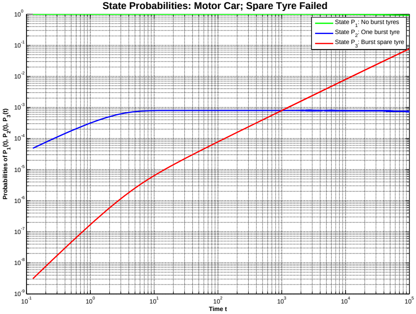
Zustandsdiagramm



Zustände

- 1: vier Reifen intakt (Reserverad wird nicht gebraucht!)
- 2: drei Reifen intakt, d.h. ein Reifen platt
- drei Reifen intakt und Reservereifen platt.

Quantifizierung: Simulation



Kenngrössen

- B1: Versagen eines Reifens: $\lambda = 10^{-4}\left[\frac{1}{h}\right]$
- B3: Versagen des Reservereifens $\lambda_R = 10^{-3}\left[\frac{1}{h}\right]$
- B2: Reparaturdauer 2 $[h]: \mu = 0.5\left[\frac{1}{h}\right]$

Rahmenbedingung

$P_1(t=0) = 1;\ P_2(t=0) = P_3(t=0) = 0$

Anmerkung: Kenngrössen sind willkürlich.

Ergebnisse: Nach 10^5 Stunden ist das Fahrzeug

- **verfügbar**: $P_1(t = 1 \cdot 10^5\,[h]) = 0.9226 \approx 92.3\%$
- **nicht verfügbar:** $P_2(t = 1 \cdot 10^5\,[h]) + P_3(t = 1 \cdot 10^5\,[h]) = 7.00 \cdot 10^{-4} + 7.67 \cdot 10^{-2} = 0.0774 \approx 7.7\%$

Beispiel: PW in der Wüste, stationär

Gleichungssystem (4)

$$0 = -4 \cdot \lambda \cdot P_1(\infty) + \mu \cdot P_2(\infty)$$
$$0 = 4 \cdot \lambda \cdot P_1(\infty) - \lambda_R \cdot P_2(\infty) - \mu \cdot P_2(\infty)$$
$$1 = P_1(\infty) + P_2(\infty) + P_3(\infty)$$

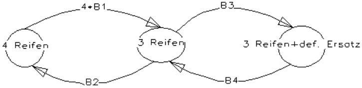
Lösung des Gleichungssystems (4)

- $P_1(\infty) = 0$
- $P_2(\infty) = 0$
- $P_3(\infty) = 1$

Fazit: nach (unendlich) langer Zeit wird der PW zu 100% nicht verfügbar sein; Zustand 3 ist absorbierend.

Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften
zh aw School of Engineering
INE Institut für Nachhaltige Entwicklung

erweitertes Beispiel: PW in der Wüste: Ein Reservereifen ist ersetzbar. Um einen Reifen zu holen und wieder zum PW zu kommen braucht der Fahrer eine Woche (B4: $\mu_R \approx 6 \cdot 10^{-3}\,[1/\mathrm{h}]$). Die restlichen Kenngrössen bleiben gleich.



Gleichungssystem (5)

$$0 = -4 \cdot \lambda \cdot P_1(\infty) + \mu \cdot P_2(\infty)$$

$$1 = P_1(\infty) + P_2(\infty) + P_3(\infty)$$

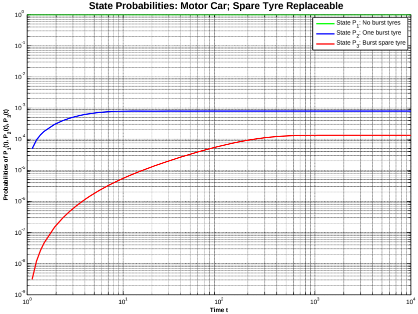
$$0 = \lambda_R \cdot P_2(\infty) - \mu_R \cdot P_3(\infty)$$

Lösung (stationär)

- $P_1(\infty) = \frac{\mu \cdot \mu_R}{\mu \cdot \mu_R + 4 \cdot \lambda \mu_R + 4 \cdot \lambda \cdot \lambda_R} = 0.99907$
- $P_2(\infty) = \frac{4 \cdot \lambda \cdot \mu_R}{\mu \cdot \mu_R + 4 \cdot \lambda \mu_R + 4 \cdot \lambda \cdot \lambda_R} = 7.9925 \cdot 10^{-4}$
- $P_3(\infty) = \frac{4 \cdot \lambda \cdot \lambda_R}{\mu \cdot \mu_R + 4 \cdot \lambda \mu_R + 4 \cdot \lambda \cdot \lambda_R} = 1.3321 \cdot 10^{-4}$

Fazit: Der PW ist auf lange Sicht fast immer verfügbar.

erweitertes Beispiel: PW in der Wüste; Simulation



Kenngrössen

- B1: Versagen eines Reifens: $\lambda = 10^{-4} \left[\frac{1}{h}\right]$
- B3: Versagen des Reservereifens $\lambda_R = 10^{-3} \left[\frac{1}{h}\right]$
- B2: Reparaturdauer $2\,[h] : \mu = 0.5 \left[\frac{1}{h}\right]$
- B4: Reserverad ersetzen: $\mu_R \approx 6 \cdot 10^{-3} \left[\frac{1}{h}\right]$)

Rahmenbedingung

$P_1(t=0) = 1;\ P_2(t=0) = P_3(t=0) = 0$

Anmerkung: Kenngrössen sind willkürlich.

Ergebnisse: Nach 10^4 Stunden ist das Fahrzeug

- **verfügbar**: $P_1(t = 10^4\,[h]) = 0.9991 \approx 99.9\%$
- **nicht verfügbar:** $P_2(t = 10^4\,[h]) + P_3(t = 10^4\,[h]) = 8.00 \cdot 10^{-4} + 1.00 \cdot 10^{-4} = 9.00 \cdot 10^{-4} \approx 0.1\%$

[1] PUKITE, J. and P. PUKITE: *Modeling for Reliability Analysis. IEEE Press Series on Engineering of Complex Computer Systems.*
IEEE Press Series on Engineering of Complex Computer Systems, New York, 1998.

[2] VDI-4008: *Markoff-Zustandsänderungsmodelle mit endlich vielen Zuständen.*
Technical Report VDI-4008-Blatt 3, Beuth Verlag, Berlin, 1999.