Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften
School of Engineering
INE Institut für
Nachhaltige Entwicklung

Boolesche Algebra

Ralf Mock, 19. Oktober 2015

Lernziele

Die Teilnehmenden

- können die Grundlagen der Booleschen Algebra skizzieren
- verstehen die Problematik des Übergangs zur kanonischen Darstellung (Übergang zu Wahrscheinlichkeiten)

Ansatz

Für quantitative Risiko- und Zuverlässigkeitsanalysen wird meist davon ausgegangen, dass ein System und die Systemkomponenten nur zwei Zustände annehmen können, d.h. dass diese entweder funktionieren oder ausgefallen sind. Der Systemzustand wird über eine „Schalterlogik“der Komponentenzustände bestimmt. Damit gelten die Regeln der Booleschen Logik und Algebra (Schaltalgebra).

Theorie und Berechnung

- **Modell:** Der Zustand eines (technisches) System wird als Boolesche Funktionen dargestellt.
- **Gesucht:** Vorgehensweise, um mit diesem Modell die Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems zu berechnen
- **Problem:** Um mit Wahrscheinlichkeiten rechnen zu können, ist ein Übergang von einer Booleschen in die kanonische Darstellung nötig (Grund: „$\vee, \wedge$“$\not\equiv$ „$+, \cdot$“).

Vorgehensweise

Ermittle eine Boolesche Funktion $\rightarrow$ umformen in die kanonische Form (Erweiterung) $\rightarrow$ Ergebnis: lineare Systemfunktion (Einsetzen von Wahrscheinlichkeiten)

Boolesche Algebra

Boolesche Variable

$$X = \begin{cases} L & : \text{ Zustand erfüllt} \\ O & : \text{ Zustand } \textit{nicht} \text{ erfüllt} \end{cases}$$

Boolesche Operatoren

- UND: $\wedge$, $\cap$ (**Anm.:** Wird in Funktionen oft weggelassen, z. B. $X \wedge Y \equiv XY$)
- ODER: $\vee$, $\cup$

Boolesche Axiome (Schaltalgebra)

symbolisch	**Beschreibung**	**symbolisch**	**Beschreibung**
$X \wedge Y = Y \wedge X$ $X \vee Y = Y \vee X$	kommutative Gesetze	$\overline{\overline{X}} = X$ $\overline{O} = 1; \overline{L} = 0$	Verneinungsgesetze
$X \wedge Y \wedge Z = (X \wedge Y) \wedge Z$ $X \vee Y \vee Z = (X \vee Y) \vee Z$	assoziative Gesetze	$\left(\overline{X \wedge Y}\right) = \overline{X} \vee \overline{Y}$ $\left(\overline{X \vee Y}\right) = \overline{X} \wedge \overline{Y}$	de-Morgansches Gesetz
$X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$ $X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$	distributive Gesetze	$O \wedge X = O$ $L \vee X = L$	Extremalgesetze
$X \wedge X = X$ $X \vee X = X$	**Idempotenzgesetze**	$L \wedge X = X$ $O \vee X = X$	Neutralitätsgesetze
$X \wedge (X \vee Y) = X$ $X \vee (X \wedge Y) = X$	**Absorptionsgesetze**	$X \vee \left(\overline{X} \wedge Y\right) = X \vee Y$ $X \wedge \left(\overline{X} \vee Y\right) = X \wedge Y$	
$X \wedge \overline{X} = O$ $X \vee \overline{X} = L$	Komplementärgesetze		

Von der Booleschen zur linearen Funktion

- **Problem 1:** Vom Zustand $X = x_i$ zur Wahrscheinlichkeit $P\left(X = x_i\right)$
- **Problem 2:** ODER-Verknüpfung:
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  und damit gilt
  $P(A \cup B) \neq P(A) + r(B)$
- **Ansatz:** erstellte Boolesche Funktion $\Rightarrow$ kanonische Darstellung (Erweiterung in Normalform) $\Rightarrow$ lineare Systemfunktion (Wahrscheinlichkeitsberechnung)

Kanonische Darstellung Boolescher Funktionen

- **Disjunktive Normalform (DN)**
  $K_0 \vee K_1 \vee \cdots \vee K_{n-1} = \bigvee_{i=0}^{n-1} K_i$
  K_i : Konjunktionsterm, z.B. $x \wedge y$ aus einfachen oder negierten Booleschen Variablen
  Beispiel: Exklusiv-ODER
  $f(x_0, x_1) = (x_0 \wedge \overline{x}_1) \vee (\overline{x}_0 \wedge x_1)$
- **Ausgezeichnete DN (ADN):** in jedem K_i kommt jede Variable genau einmal vor (einfach oder negiert). Eine solche Konjunktion wird Minterm MI genannt.

  Vorgehensweise: „Unvollständige“ Konjunktionsterme K_i mit „1 “: $X \vee \overline{X} = L$ erweitern

$$
\begin{aligned}
x_0 \vee \overline{x}_1 &= x_0(x_1 \vee \overline{x}_1) \vee \overline{x}_1(x_0 \vee \overline{x}_0) \\
&= x_0x_1 \vee x_0\overline{x}_1 \vee x_0\overline{x}_1 \vee \overline{x}_0\overline{x}_1 \;|\text{Idempotenzgesetz} \\
&= x_0x_1 \vee x_0\overline{x}_1 \vee \overline{x}_0\overline{x}_1
\end{aligned}
$$

Vertiefung des Beispiels $x_0 \vee \overline{x}_1$

- ADN des Beispiels (s.o.): $x_0 \vee \overline{x}_1 = x_0 x_1 \vee x_0 \overline{x}_1 \vee \overline{x}_0 \overline{x}_1$
- Diese ADN enhält drei Minterme MI
  $MI_1 = x_0 x_1; \quad MI_2 = x_0 \overline{x}_1; \quad MI_3 = \overline{x}_0 \overline{x}_1$
- Scheinbar bleibt das „Summenproblem“ mit den ODER-Verknüpfungen. **Aber:** Eine paarweise Verknüpfung von Mintermen ergibt null, d.h.

$$
\begin{aligned}
MI_1 \wedge MI_2 &= x_0 x_0 x_1 \overline{x}_1 = 0 \\
MI_1 \wedge MI_3 &= x_0 \overline{x}_0 x_1 \overline{x}_1 = 0 \\
MI_2 \wedge MI_3 &= x_0 \overline{x}_0 \overline{x}_1 \overline{x}_1 = 0
\end{aligned}
$$

- Damit wird der Übergang zu Wahrscheinlichkeiten möglich:

$$
\begin{aligned}
& x_0 \vee \overline{x}_1 = x_0 x_1 \vee x_0 \overline{x}_1 \vee \overline{x}_0 \overline{x}_1 = x_0 x_1 + x_0 \overline{x}_1 + \overline{x}_0 \overline{x}_1 \\
\Rightarrow\ & P\left(x_0 \vee \overline{x}_1\right) = P\left(x_0\right) P\left(x_1\right) + P\left(x_0\right) \overline{x}_1 + P\left(\overline{x}_0\right) P\left(\overline{x}_1\right)
\end{aligned}
$$

Quelle: [1]

Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften
School of Engineering
INE Institut für Nachhaltige Entwicklung

Verfahren der Quantifizierung

In der Zuverlässigkeits- und Risikoanalytik gibt es viele Verfahren, um den Umgang mit Booleschen Systemfunktionen zu vereinfachen.

Beispiele

- Zuverlässigkeitsblockdiagramme
- Minimalschnitte und -pfade
- Funktions- bzw. Wahrheitstabellen
- Fehlerbäume

Literatur I

[1] VDI-4008: *Strukturfunktion und ihre Anwendung.*
Technical Report VDI-4008-Blatt 7, Beuth Verlag, Berlin, 1986.