Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften
School of Engineering
INE Institut für Nachhaltige Entwicklung

# HW & SW: Zustandsdiagramme & Markov-Analysen

Ralf Mock, 9. November 2015

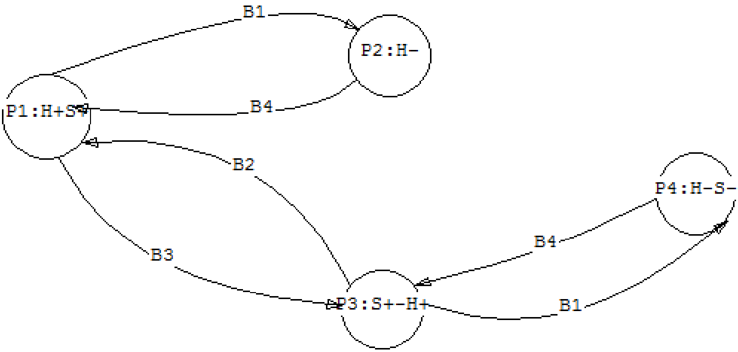
## Modellierung von Hardware- und Software-Ausfällen

Mit Markov-Zustandsdiagrammen lässt sich auch das Zusammenwirken von HW und SW auf die System-Zustandswahrscheinlichkeiten berechnen. Im Beispiel wird davon ausgegangen, dass sich HW- und SW-Fehler beseitigen lassen. Zustände und Kenngrössen sind:

| **Zustandswahrscheinlichkeiten** | **Raten und Beschreibung** |
|---|---|
| $P_1$ : HW + SW voll funktionsfähig | $\lambda_H$ : Ausfallrate der HW (B1)* |
| $P_2$ : Ausfall der HW | $\mu_S$ : Reparaturrate der SW (B2) |
| $P_3$ : Teilausfall der SW; HW funktionsfähig | $\lambda_S$ : Ausfallrate der SW (B3) |
| $P_4$ : Ausfall der HW + SW (Systemausfall) | $\mu_H$ : Reparaturrate der HW (B4) |

**Anmerkungen**: In (B ...) stehen die Bezeichnungen der Raten für das folgende Zustandsdiagramm. Beispiel gem. [?] (ohne Berechnungen, Daten und Simulationen). Simulation mit CARMS.

## Zustandsdigramm



## Stationärer Systemzustand ($t \to \infty$)

$$
\begin{aligned}
0 &= \mu_S \cdot P_3 - \lambda_S \cdot P_1 \\
0 &= \mu_H \cdot P_2 - \lambda_H \cdot P_1 \\
0 &= -\mu_S \cdot P_3 + \lambda_S \cdot P_1 - \lambda_H \cdot P_3 + \mu_H \cdot P_4 \\
0 &= -\mu_H \cdot P_4 + \lambda_H \cdot P_3
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Mit $1 = \sum_i P_i$ ist dann Gl. ?? zu lösen:

$$
\begin{aligned}
0 &= 1 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 \\
0 &= \mu_H \cdot P_2 - \lambda_H \cdot P_1 \\
0 &= -\mu_S \cdot P_3 + \lambda_S \cdot P_1 - \lambda_H \cdot P_3 + \mu_H \cdot P_4 \\
0 &= -\mu_H \cdot P_4 + \lambda_H \cdot P_3
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Auflösen des 4. Terms der Gl. ?? nach $P_4$ ergibt

$$
P_4 = \frac{\lambda_H \cdot P_3}{\mu_H} \tag{3}
$$

Einsetzen von $P_4$ in Gl. ?? ergibt

$$\begin{aligned}
0 &= 1 - P_1 - P_2 - P_3 - \frac{\lambda_H \cdot P_3}{\mu_H} \\
0 &= \mu_H \cdot P_2 - \lambda_H \cdot P_1 \\
0 &= -\mu_S \cdot P_3 + \lambda_S \cdot P_1 - \lambda_H \cdot P_3 + \frac{\mu_H \cdot \lambda_H \cdot P_3}{\mu_H}
\end{aligned} \tag{4}$$

Der 3. Term der Gl. ?? vereinfacht sich; auflösen des 2. Terms nach $P_2$ ergibt

$$P_2 = \frac{\lambda_H \cdot P_1}{\mu_H} \tag{5}$$

Einsetzen von $P_2$ in Gl. ?? ergibt

$$\begin{aligned}
0 &= 1 - P_1 - \frac{\lambda_H \cdot P_1}{\mu_H} - P_3 - \frac{\lambda_H \cdot P_3}{\mu_H} \\
0 &= -\mu_S \cdot P_3 + \lambda_S \cdot P_1
\end{aligned} \tag{6}$$

Auflösen des 2. Terms der Gl. ?? nach $P_3$ ergibt

$$P_3 = \frac{\lambda_S \cdot P_1}{\mu_S} \tag{7}$$

Einsetzen von $P_3$ in die Gl. ?? ergibt einen Ausdruck, der nur noch von $P_1$ abhängt:

$$0 = 1 - P_1 - \frac{\lambda_H \cdot P_1}{\mu_H} - \frac{\lambda_S \cdot P_1}{\mu_S} - \frac{\lambda_H \cdot \lambda_S \cdot P_1}{\mu_H \cdot \mu_S} \tag{8}$$

Gl. ?? ist umzuformen und nach $P_1$ aufzulösen.

Umformen und Auflösen der Gl. ??

$$1 = P_1 + \frac{\lambda_H \cdot P_1}{\mu_H} + \frac{\lambda_S \cdot P_1}{\mu_S} + \frac{\lambda_H \cdot \lambda_S \cdot P_1}{\mu_H \cdot \mu_S} \tag{9}$$

Ausklammern von $P_1$ in Gl. ?? ergibt

$$1 = P_1 \cdot \left(1 + \frac{\lambda_H}{\mu_H} + \frac{\lambda_S}{\mu_S} + \frac{\lambda_H \cdot \lambda_S}{\mu_H \cdot \mu_s}\right) \tag{10}$$

Hauptnenner bilden in Gl. ?? ergibt

$$1 = P_1 \cdot \left(\frac{\mu_H^2 \cdot \mu_S^2 + \lambda_H \cdot \mu_S \cdot (\mu_H \cdot \mu_S) + \lambda_S \cdot \mu_H \cdot (\mu_H \cdot \mu_S) + \lambda_H \cdot \lambda_S \cdot \mu_H \cdot \mu_S}{\mu_h \cdot \mu_S \cdot \mu_H \cdot \mu_S}\right) \tag{11}$$

Zusammenfassen der Gl. ?? und nach $P_1$ ausklammern

$$P_1 = \frac{\mu_H^2 \cdot \mu_S^2}{\mu_H^2 \cdot \mu_S^2 + \lambda_H \cdot \mu_S^2 \cdot \mu_H + \lambda_S \cdot \mu_H^2 \cdot \mu_S + \lambda_H \cdot \lambda_S \cdot \mu_H \cdot \mu_S} \tag{12}$$

## Stationäre Zustandswahrscheinlichkeiten

$$P_1 = \frac{\mu_H^2 \cdot \mu_S^2}{\mu_H^2 \cdot \mu_S^2 + \lambda_H \cdot \mu_S^2 \cdot \mu_H + \lambda_S \cdot \mu_H^2 \cdot \mu_S + \lambda_H \cdot \lambda_S \cdot \mu_H \cdot \mu_S}$$

$$P_2 = \frac{\lambda_H \cdot P_1}{\mu_H}$$

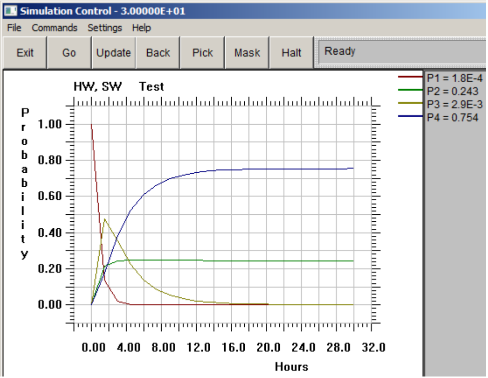
$$P_3 = \frac{\lambda_S \cdot P_1}{\mu_S}$$

$$P_4 = \frac{\lambda_H \cdot P_3}{\mu_H} = \frac{\lambda_H \cdot \lambda_S \cdot P_1}{\mu_H \cdot \mu_s}$$

## Eingabewerte und Ergebnis

| Eingabewerte $\left[\frac{1}{h}\right]$ | Ergebnisse |
|---|---|
| $\lambda_H = 3.3 \cdot 10^{-1}$ | $P_1 = 3.0208 \cdot 10^{-7}$ |
| $\mu_S = 10^{-4}$ | $P_2 = 9.9688 \cdot 10^{-5}$ |
| $\lambda_S = 1$ | $P_3 = 3.000 \cdot 10^{-3}$ |
| $\mu_H = 10^{-3}$ | $P_4 = 9.969 \cdot 10^{-1}$ |

## Simulation mit CARMS: zeitabhängige Zustandswahrscheinlichkeiten (Abb.: nach 30 Stunden)




Nach einem Einschwingvorgang nähern sich hier die zeitabhängigen den stationären Wahrscheinlichkeiten sehr langsam an. Im Beispiel sind erst nach ca. 20'000 Stunden die Wahrscheinlichkeiten (fast) gleich.

# Literatur