Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften
School of Engineering
INE Institut für Nachhaltige Entwicklung

(Praktische) Zuverlässigkeitskenngrössen-schätzungen

Ralf Mock, 19. Oktober 2015

Lernziele

Die Teilnehmenden können

- die Grundlagen der Zuverlässigkeitskenngrössenschätzung skizzieren
- einfache ZKG von Komponenten berechnen
- das Wahrscheinlichkeitsmodell der Exponential-Verteilung anwenden
- eine Datengrundlage erstellen und Ergebnisse einschätzen.

Wahrscheinlichkeit (Probability *Pr*)

Dimensionslose Grösse zwischen 0 und 1
(Basis: Axiomsystem von Kolmogoroff)

- **klassisch**
  (frequentistisch): relative Häufigkeiten (bzw. %)
- **subjektiv**: Grad der Erwartung oder des Vertrauens eines Individuums in die Aussage, dass ein Ereignis eintrifft, ein Sachverhalt zutrifft usw.

Häufigkeit (frequency)

Häufigkeiten beruhen auf Daten und gehören zu einer Stichprobe.

- **absolut:** Anzahl eingetroffener Ereignisse n
- **relativ**
  - *bezogen auf ein Ereignis:* Anzahl Fälle n, bei denen dieses Ereignis eingetreten ist, dividiert durch die Anzahl der Fälle N, bei denen es hätte eintreten können.

    Die rel. Häufigkeit ist ein Schätzer ($\widehat{\ }$) für die Wahrscheinlichkeit:

    $$\widehat{p} = \frac{n}{N} \tag{1}$$
  - *bezogen auf Zeit:* Rate, Frequenz

Frequenz (frequency)

zeitbezogene Häufigkeit.

Rate (Rate)

- momentane Veränderung einer Grösse in Einheiten der Veränderung einer anderen Grösse (üblicherweise Zeit).
- Schätzung Durchschnitts (rel. Häufigkeit) über ein längeres Zeitintervall Δt .

  Beispiel: empirische Ausfallrate

$$\widehat{\lambda} = \frac{\widehat{p}}{\Delta t} \tag{2}$$

Ausfall (theoretisch)

Verlust der Fähigkeit einer Einheit, bei Einhaltung spezifizierter Bedingungen die geforderte Funktion zu erfüllen [6].

Ausfall (praxisnah)

Alle Ereignisse laut Betriebsunterlagen, die zu einem bemerkbaren Eingriff an einer Einheit führen bzw. führen sollten, werden als Ausfall betrachtet [2].

Basis: beschreibende Statistik

Zur Ermittlung von ZKG dienen die Regeln der deskriptiven Statistik, aber teilweise mit anderen Bezeichnungen der Grössen.

Beispiel: Glühbirnen-Teststand

100 (fabrikneue und baugleiche) Glühbirnen werden auf einem Teststand im Dauertest gleichzeitig auf ihre Lebensdauer getestet. Nach dem Einschalten fallen die Glühbirnen nach und nach zufällig aus. Die Zeit, wann eine Glühbirne ausfällt, wird notiert (d.h. ihre Brenndauer). Der Test ist beendet, wenn keine Glühbirne mehr leuchtet.

Zufallsvariable: Lebensdauer T

Für die einzelne nicht instandsetzbare Einheit beobachtete Zeitspanne von Beanspruchungsbeginn $t = 0$ bis zum Ausfallzeitpunkt [6]

Anmerkung: Ohne besondere Angabe ist die Lebensdauer eine Betriebszeit.

Beispiel: Glühbirnen-Teststand

Die Zufallsvariable ist die Brenndauer der Glühbirnen. In der Zuverlässigkeitsanalytik (ZA) wird die Variable Lebensdauer T genannt. Jeder Zufallsvariablen T ist die Ausfallzeit $t_i, i = 1, \ldots, n$ zugeordnet: $T = t_i$

- Geordnete Liste: Lebensdauer $T =$
- $t_1 = 0.5$ Tage; $t_2 = 10$ Tage; $t_3 = 25$ Tage;
  $t_4 = t_5 = 30$ Tage; $t_6 = \ldots$

Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$

Anzahl der **bis** zum Zeitpunkt t ausgefallenen Einheiten bezogen auf die Anzahl der zum Zeitpunkt $t = 0$ funktionsfähigen Einheiten.

$F(t)$ ist somit der Anteil der bis zu einem bestimmten Zeitpunkt T ausgefallenen Komponenten (F: Failure)

$$F(t) = Pr(T \leq t) \tag{3}$$

(Merksatz: Prozentualer Anteil der **bis** zur Zeit t ausgefallenen Einheiten)

Rahmenbedingungen für $F(t)$

$$F(t) = Pr(T \leq t) = \begin{cases} 0 & : \quad t = 0 \\ 1 & : \quad t = \infty \end{cases} \tag{4}$$

Eine Einheit ist zum Zeitpunkt $t = 0$ funktionsfähig und wird nach unendlich langer Zeit ausgefallen sein.

Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$

Die zu $F(t)$ komplementäre Grösse heisst Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$ (R: Reliability).

$$R(t) = Pr(T > t) = 1 - Pr(T \leq t) = 1 - F(t), \tag{5}$$

wobei gilt

- $R(t = 0) = 1$
- $R(t = \infty) = 0$

(Merksatz: Prozentualer Anteil der **bis** zur Zeit t funktionierenden Einheiten)

Punktschätzer:

empirische Ausfallwahrscheinlichkeit $\widehat{F}(t)$

$$\widehat{F}(t) = \frac{N_F(t)}{N_R(0)} \tag{6}$$

Treppenfunktion: emp. Ausfallwahrscheinlichkeit $\widehat{F}(t)$

$$\widehat{F}(t) = Pr(T \leq t) = \sum_{t \leq t_i} Pr(T = t_i) \tag{7}$$

- $N_F(t)$: Anzahl der zur Zeit t ausgefallenen Einheiten
- $N_R(0)$: Anzahl zu $t = 0$ funktionsfähigen Einheiten

Punktschätzer: empirische Überlebenswahrscheinlichkeit $\widehat{R}(t)$

$$\widehat{R}(t) = \frac{N_R(t)}{N_R(0)} \tag{8}$$

- $N_R(t)$: Anzahl der zur Zeit t funktionsfähigen Einh.
- $N_R(0)$: Anzahl zu $t = 0$ funktionsfähigen Einheiten
- $\widehat{F}(t) + \widehat{R}(t) = 1$

Punktschätzer: empirische Ausfalldichte $\widehat{f}(t)$

$$\widehat{f}(t) = \frac{\Delta N_F(t, \Delta t)}{N_R(0) \cdot \Delta t} \tag{9}$$

- $\Delta N_F(t, \Delta t)$: Anzahl der im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ aus-gefallenen Einheiten
- Δt: Zeitintervall $[t_i, t_{i+1}]$

Punktschätzer: emp. Ausfallrate $\widehat{\lambda}(t)$

$$\widehat{\lambda}(t) = \frac{\Delta N_F(t, \Delta t)}{N_R(t) \cdot \Delta t} \tag{10}$$

- $\Delta N_F(t, \Delta t)$: Anzahl der im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ ausgefallenen Einheiten
- $N_R(t)$: Anzahl der zur Zeit t funktionsfähigen Einh.
- Δt: Zeitintervall $[t_i, t_{i+1}]$

Zuverlässigkeitsanalyse

Liegt nur ein Zeitintervall vor, so geht $\widehat{\lambda}(t)$ über in die häufig verwendete Form:

$$\widehat{\lambda}(t) = \frac{N_F}{\sum_{j=1}^{k} \left(N_j \cdot t_{betr,\ j}\right)} \tag{11}$$

- N_F: Anzahl ausgefallener Einheiten
- N_j: Anzahl gleicher Einheiten in einer Baugruppe j; $j = 1, \ldots, k$
- $t_{betr,\ j}$: Betriebszeit einer Baugruppe j
- **Voraussetzungen**: $N_F > 5 \; \left(Poisson: N_j > 100, N_F / N_j < 0{,}1\right)$

Beispiel: Schätzung einer emp. Ausfallrate $\widehat{\lambda}(t)$

Für zwei Grossraumbüros wurden folgende Ausfalldaten erhoben:

	Büro $i = 1$	Büro $i = 2$
PC-Ausfälle $N_{F,i}$	4	6
PC-Anzahl $N_{j,i}$	20	30
Betriebzeit $t_{betr,j,i}$	2 Jahre	3 Jahre

Berechnung

$$\widehat{\lambda}(t) = \frac{4+6}{20 \cdot 2[a] + 30 \cdot 3[a]} = \frac{10}{130[a]} = 7.7 \cdot 10^{-2} \left[\frac{1}{a}\right] =$$

$$8.9 \cdot 10^{-6} \left[\frac{1}{h}\right]$$

Allgemeine Definition der Ausfallrate

Die Ausfallrate $\lambda(t)$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit Pr pro dt, dass eine Einheit, die bis zum Zeitpunkt t überlebt hat, im Intervall $[t, t+dt]$ ausfallen wird

$$\lambda(t) = \frac{Pr\left(t < T \leq t+dt \,|\, T > t\right)}{dt} \tag{12}$$

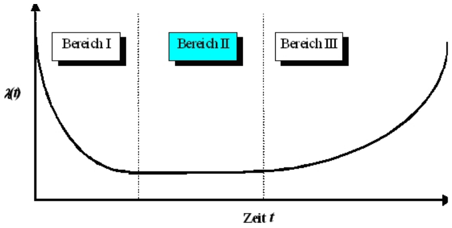
Anmerkungen

Diese Definition gilt für alle Wahrscheinlichkeitsmodelle.

Badewannenkurve

beschreibt den Verlauf der Ausfallrate $\lambda(t)$ einer Gruppe von Einheiten

- Eine Grundgesamtheit von Einheiten „ist im Einsatz“, z.B. ab Markteinführung eines neuen Auto-Modells
- Ermittlung der emp. Ausfallraten in aufeinanderfolgenen Intervallen, z.B. pro Jahr

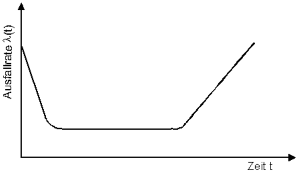


Bereiche der Badewannenkurve

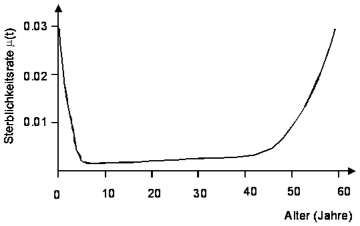
- **I (sinkend):**
  Phase der Frühausfälle („Optimierungsphase“)
- **II (konstant):**
  Phase der zufälligen Ausfälle (keine systematischen Fehler mehr)
- **III (steigend):**
  Phase der Spätausfälle (z. B. Verschleiss, Alterungs-prozesse)

Vergleich zwischen Ausfall- und Sterblichkeitsrate

Ausfallrate: Wahrscheinlichkeit pro dt, dass eine Einheit, die bis zum Zeitpunkt t überlebt hat, im Intervall $[t; t + dt]$ ausfallen wird

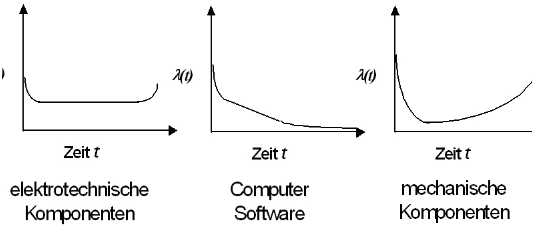


Sterblichkeitsrate: Wahrscheinlichkeit bei gegebenem Alter im folgenden Jahr zu sterben.



für Männer in England und Wales 1960 bis 1962)

Badewannenkurven für Komponentenarten



Quelle: [1]

Anmerkungen Die Hypothese einer konstanten Ausfallrate ist im Einzelfalle mit statistischen Verfahren zu überprüfen. Sie gilt nur und nur dann, wenn das Wahrscheinlichkeitsmodell der Exponentialverteilung zutrifft.

MTTF: Mean Time To Failure (mittlere Lebensdauer)

Quotient aus beobachteter Betriebszeit t_{betr} einer einzelnen Einheit zur Gesamtzahl ihrer Ausfälle im Beobachtungszeitraum n_{Beob} [6]

$$MTTF = \frac{t_{betr}}{n_{Beob}}$$

- Entspricht dem Kehrwert der für diesen Zeitraum geltenden Ausfallrate ($\lambda_{konst} = \frac{1}{MTTF}$)
- Nur bei nicht instandsetzbaren Einheiten anwenden

MTBF: Mean Time Between Failures (mittlerer Ausfallabstand)

Arithmetischer Mittelwert der Zeitspannen zwischen aufeinander folgenden Ausfällen [6]

- Die Anwendung des Kennwertes ist nur sinnvoll für den Zeitraum innerhalb der Lebensdauer einer Einheit, in dem eine konstante Ausfallrate vorherrscht
- Entspricht dem Kehrwert der für diesen Zeitraum geltenden Ausfallrate ($\lambda_{konst} = \frac{1}{MTBF}$)
- Nur bei instandsetzbaren Einheiten anwenden

Beispiele für Kennzahlen

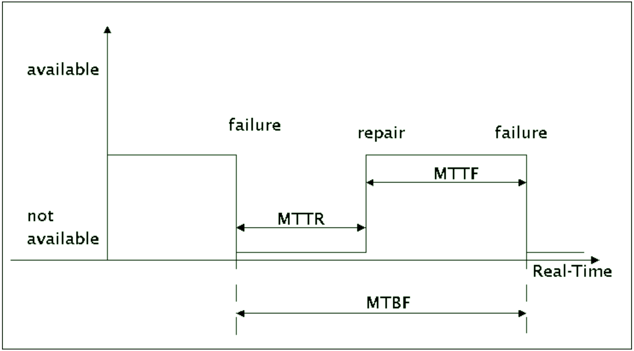
Ausfallursache	**MTBF**	**MTTR**
Stromversorgung	2000 [h]	1 [h]
Telefonverbindungen		
Soft	0.1 [h]	0.1 [s]
Hard	4000 [h]	10 [h]
Hardware-Module	10 000 [h]	10 [h]
Software	1 Bug /1000 Programmzeilen	–

Quelle: [5] - dort aus: Gray, J. „A Census of Tandem Systems Availability: 1985 – 1990“ Tandem Computers TR.1, 1990 (wobei [5] eine phantasievolle Übernahme der Daten vornimmt ...)

MTTR: Mean Time to Repair (mittlere Reparaturdauer)

Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften
zh aw School of Engineering
INE Institut für Nachhaltige Entwicklung

Zusammenhänge MTTF, MTTR und MTBF



Quelle: http://www.fbmnd.fh-frankfurt.de/ doeben/I-RT/I-RT-TH/VL3/i-rt-vl-vl3.html

- (stationäre) Verfügbarkeit: $A = \frac{MTBF}{MTBF+MTTR} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$
- μ: Reparaturrate (analog zu Ausfallrate λ)

Exponentialverteilung

Die Ausfälle (identischer) Komponenten erfolgen im Einzelnen zufällig, im Ganzen nach statistischen Gesetzen. Für eine grosse Grundgesamtheit kann man daher „Ausfallgesetze“ (Wahrscheinlichkeitsmodelle) formulieren.

- In den sehr kurzen, gleichlangen Zeitabschnitten dt fallen jeweils dN Komponenten aus
- **Annahmen**: dN ist proportional
  - → zu den noch funktionsfähigen Komponenten N: $dN \sim N$
  - → zu dt: $dN \sim dt$
  - – innerhalb dt ist N eine Gerade mit der negativer Steigung.
  - → Zusammenfassung: $dN \sim -N \cdot dt$
- proportional heisst, es gibt einen konstanten Faktor, der beide Grössen bestimmt (z.B. 3x mehr Ausfälle in 3 Zeitintervallen)
- Der Proportionalitätsfaktor ist die konstante Ausfallrate λ. Sie gibt den Bruchteil $\frac{dN}{N}$ an, der von N funktionsfähigen Komponenten in der Zeit dt ausfällt:

  $$\lambda = \frac{dN}{N \cdot dt}$$

  Dies entspricht, in etwas anderer Schreibweise, der bisherigen Definition der (empirischen) Ausfallrate.

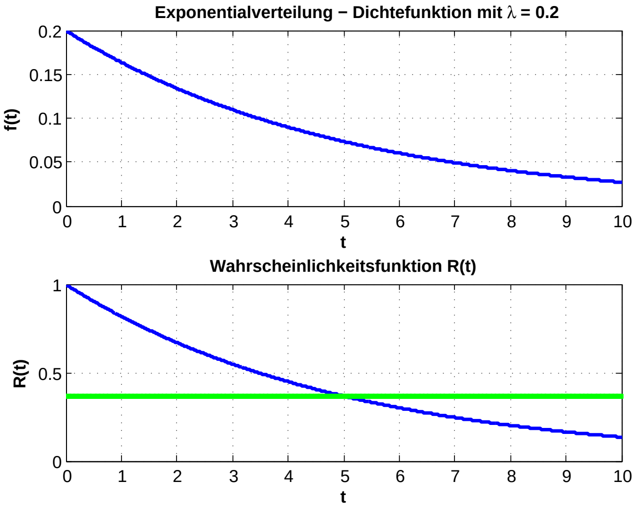
Berechnung

- damit: $dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$ | umstellen
- $-\lambda \cdot dt = \frac{1}{N} \cdot dN$ | beide Seiten integrieren
- $\int_{t_0'=0}^{t_1'=t} -\lambda \cdot dt' = \int_{N_0'=0}^{N_1'=t} \frac{1}{N'} \cdot dN'$ | Integration
- $-\lambda \cdot t = ln\left(\frac{N}{N_0}\right)$ | auflösen nach N
- $e^{-\lambda \cdot t} = \frac{N}{N_0}$
- $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ | umstellen

Exponentialverteilung

$$\frac{N(t)}{N_0} = R(t) = e^{-\lambda \cdot t}$$

$R(t)$: Überlebenswahrscheinlichkeit


Exponentialverteilung − Dichtefunktion mit λ = 0.2
f(t)
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
t
Wahrscheinlichkeitsfunktion R(t)
R(t)
1
0.5
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
t

Logarithmus: Umkehrung des Potenzierens

- allgemein: $b^x = a \Longleftrightarrow x = log_b\ a$, wobei $a, b \in R; a, b > 0; b \neq 1$
- Dekadische Logarithmen: Basis 10; $log_{10} = lg$
  $lg\ a = x \Longleftrightarrow a = 10^x$
- Natürliche Logarithmen: Basis Eulersche Zahl
  $e = 2,718281828459\ldots$: $log_e = ln$
  $ln\ a = x \Longleftrightarrow a = e^x$

wichtiges Logarithmengesetz

- $log_b \frac{a}{c} = log_b\ a - log_b\ c$

Datensammlungen

- Datensammlungen zu Zuverlässigkeitskenngrössen sind in der IT selten, und falls verhanden, oft veraltet oder unbrauchbar
- bessere Quellenlage: elektrotechnische Komponenten
  Beispiele: MIL-HDBK-217, Bellcore/Telcordia

  Zusammenstellung von Links: reliasoft, Ross Gemini Centre
- European Industry Reliability Data Bank: EIReDA 1998 [4]
- Offshore Reliability Data Handbook: OREDA 2015 [3]

Schätzungen

- mit Angaben, die sich direkt in die Gleichungen für $\widehat{p}$ und $\widehat{\lambda}$ einsetzen lassen
- geschicktes Schätzen (expert judgement)

  Beispiel

  - Ein Server hat im Mittel alle 1.5 Jahre eine Störung und damit
    $\text{MTTF} = 1.5\,[\text{a}]$ bzw. $\lambda = 1/MTTF \approx 0.67\,[1/\text{a}]$
  - Wie gross ist die Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$ des Servers nach einem Jahr?
  - $F(t = 1\,[\text{a}]) = 1 - e^{-0.67[1/\text{a}]\cdot 1[\text{a}]} \approx 0.49$
- **Bayes-Statistik:** weit verbreitete (und hilfreiche) Methode zur Schätzung von Kenngrössen unter Einbezug von Erfahrungen, Schätzungen und anderer Datenquellen.

Literatur

[1] Lewis, E.E.: *Introduction to Reliability Engineering.*
John Wiley & Sons, New York, 1987.

[2] Mock, R., A. Meyna and A. Tietze: *Statistische Untersuchungen zum Ausfallverhalten des Versuchskernkraftwerkes des AVR.*
Technical Report Jül-Spez-514 Bd II, Kernforschungsanlage Jülich GmbH, August 1991.

[3] OREDA: *OREDA: Offshore Reliability Data Handbook*, volume 1, 2.
SINTEF, NTNU, 6. edition, 2015.

[4] Procaccia, H., S. P. Arsenis and P. Aufort: *European Industry Reliability Data Bank: EIReDA 1998.*
Crete University Press, Iraklion, 3. Edition edition, 1998.

[5] Siewiorek, Daniel P. and Robert S. Swarz: *Reliable Computer Systems: Design and Evaluation.*
A K Peters, Natik (USA), 3. Ed. edition, 1998.

[6] VDI-4001: *Begriffsbestimmungen zum Gebrauch des VDI-Handbuches Technische Zuverlässigkeit.*
Technical Report VDI-4001-Blatt-2, Beuth Verlag, Juni 1986.

Vom Schätzern zu Exponential-Funktionen

Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$

$$\widehat{F}(t) = \frac{N_F(t)}{N_R(0)} \tag{13}$$

- $N_F(t)$: Anzahl der zur Zeit t ausgefallenen Einheiten
- $N_R(0)$: Anzahl zu $t = 0$ funktionsfähigen Einheiten

Übergang von $\Delta t \to dt$

- $\widehat{F}(t) = \frac{N_F(t)}{N_R(0)} \to F(t)$
- Exponential-Verteilung: $F(t) = 1 - \exp[-\lambda \cdot t]$

Ausfalldichte $f(t)$

$$\widehat{f}(t) = \frac{\Delta N_F(t, \Delta t)}{N_R(0) \cdot \Delta t} \tag{14}$$

- $\Delta N_F(t, \Delta t)$: Anzahl der im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ ausgefallenen Einheiten
- Δt: Zeitintervall $[t_i, t_{i+1}]$

Übergang von $\Delta t \to dt$

- 1. Zeitintervall von 0 bis t
  (Vereinfachung: $[t, t + \Delta t] \Rightarrow [0, 0 + (t - 0)] = [0, t]$)
- $\widehat{f}(t) = \frac{\Delta N_F(t, \Delta t)}{N_R(0) \cdot \Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta N_F(t)}{N_R(0) \cdot \Delta t} = \frac{\frac{\Delta N_F(t)}{N_R(0)}}{\Delta t} \Rightarrow f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$
- Exponential-Verteilung:
  $f(t) = \frac{1 - \exp[-\lambda \cdot t]}{dt} = \lambda \cdot \exp[-\lambda \cdot t]$

Ausfallrate $\lambda(t)$

$$\widehat{\lambda}(t) = \frac{\Delta N_F(t, \Delta t)}{N_R(t) \cdot \Delta t} \tag{15}$$

- $\Delta N_F(t, \Delta t)$: Anzahl der im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ ausgefallenen Einheiten
- $N_R(t)$: Anzahl der zur Zeit t funktionsfähigen Einh.
- Δt: Zeitintervall $[t_i, t_{i+1}]$

Übergang von $\Delta t \to dt$

- 1. Zeitintervall (Vereinfachung)
- $\widehat{\lambda}(t) = \frac{\Delta N_F(t,\Delta t)}{N_R(t)\cdot\Delta t} = \frac{\Delta N_F(t,\Delta t)}{N_R(t)\cdot\Delta t} \cdot \frac{N_R(0)}{N_R(0)} = \frac{\frac{\Delta N_F(t)}{N_R(0)\cdot\Delta t}}{\frac{N_R(t)}{N_R(0)}} \Rightarrow \frac{f(t)}{R(t)}$
- Exponential-Verteilung: $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda\cdot\exp[-\lambda\cdot t]}{1-(1-\exp[-\lambda\cdot t])} = \lambda$