

einfache Systemmodellierung: Zuverlässigkeitsblockdiagramme

Ralf Mock, 5. Oktober 2015

Lernziele

Grundlagen

Basissysteme

Notation

Systemvergleich

Systemanalyse

Zustandswahrsch.

Module

Funktionstabelle

Schnitt, Pfad

Literatur

Die Teilnehmenden können

- ▶ die beiden Basissystem-Typen bezeichnen und erklären (Serien-, Parallelsystem)
- ▶ die wichtigsten Berechnungsarten beschreiben
- ▶ die Zuverlässigkeit einfacher Systeme berechnen
- ▶ einfache Systemvarianten entwerfen und einschätzen.

Lernziele

Grundlagen

Basissysteme

Notation

Systemvergleich

Systemanalyse

Zustandswahrsch.

Module

Funktionstabelle

Schnitt, Pfad

Literatur

Zuverlässigkeitsblockdiagramm (ZBD)

- ▶ Ein ZBD zeigt das *Funktionieren* eines Systems
- ▶ Es ist eine grafische Darstellung einer Booleschen Gleichung
- ▶ Es gibt zwei Arten einfacher Basissysteme (Grundtypen)
 - Seriensystem
 - Parallelsystem
- ▶ Ein ZBD hat einen Eingang E und einen Ausgang A
- ▶ Ein ZBD vereinfacht die Berechnung von System-Zustandswahrscheinlichkeiten (Ausfall-, Überlebenswahrscheinlichkeit).

Literatur: [1]

Lernziele

Grundlagen

Basissysteme

Notation

Systemvergleich

Systemanalyse

Zustandswahrsch.

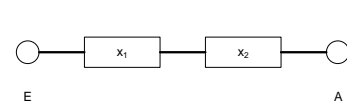
Module

Funktionstabelle

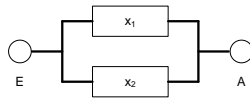
Schnitt, Pfad

Literatur

Basissysteme: Serien-, Parallelsystem



Seriensystem



Parallelsystem

- ▶ **Seriensystem:** Das System funktioniert, wenn beide Komponenten funktionieren
≡ fällt aus, wenn eine der Komponenten ausfällt
- ▶ **Parallelsystem:** Das System funktioniert, wenn eine der Komponenten funktioniert
≡ fällt aus, wenn beide Komponenten ausfallen

Notation

Lernziele

Grundlagen

Basissysteme

Notation

Systemvergleich

Systemanalyse

Zustandswahrsch.

Module

Funktionstabelle

Schnitt, Pfad

Literatur

Boole

► Boolesche Variable

$$X_i = \begin{cases} 1 & : \text{Komponente } i \text{ funktioniert} \\ 0 & : \text{Komponente } i \text{ funktioniert nicht (Ausfall)} \end{cases}$$

► in Kurzform: $(X_i = 1) = x_i$; $(X_i = 0) = \bar{x}_i$, d.h.

$$X_i = \begin{cases} 1 & : \text{Komponente } i \text{ funktioniert} \equiv x_i \\ 0 & : \text{Komponente } i \text{ funktioniert nicht} \equiv \bar{x}_i \end{cases}$$

► wichtige Gesetze aus der Booleschen Algebra

- Idempotenzgesetz: $A \wedge A = A$; $A \vee A = A$
- $x_i = 1 - \bar{x}_i$

Lernziele

Grundlagen

Basissysteme

Notation

Systemvergleich

Systemanalyse

Zustandswahrsch.

Module

Funktionstabelle

Schnitt, Pfad

Literatur

Wahrscheinlichkeitsrechnung

► Überlebenswahrscheinlichkeit: $P(X_i = 1) = P(x_i) = p_i$

► Ausfallwahrscheinlichkeit: $P(X_i = 0) = P(\bar{x}_i) = q_i$

⇒ $p_i + q_i = 1$ bzw. $p_i = 1 - q_i$

► Zur besseren Darstellung

- $R; (F)$: Überlebenswahrscheinlichkeit (Ausfallwahrscheinlichkeit) des Systems
- für zeitabhängige Grössen: $p_i(t)$, $q_i(t)$, $R(t)$, $F(t)$

Lernziele

Grundlagen

Basissysteme

Notation

Systemvergleich

Systemanalyse

Zustandswahrsch.

Module

Funktionstabelle

Schnitt, Pfad

Literatur

Serien- und Parallelsystem mit $n = 2$ Komponenten

Seriensystem

- Überleben: $X_S = x_1 \wedge x_2$
- Ausfall: $\bar{X}_S = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$
- System-Überlebenswahrsch.:

$$\begin{aligned} R_S &= P(X_S) = P(x_1 \wedge x_2) \\ &= p_1 \cdot p_2 \\ &= (1 - q_1) \cdot (1 - q_2) \\ &= 1 - q_1 - q_2 + q_1 \cdot q_2 \end{aligned}$$

- System-Ausfallwahrsch.:

$$\begin{aligned} F_S &= P(\bar{X}_S) = P(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \\ &= P(\bar{x}_1) + P(\bar{x}_2) - P(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \\ &= q_1 + q_2 - q_1 \cdot q_2 \\ &\equiv 1 - p_1 \cdot p_2 = 1 - R_S \end{aligned}$$

Parallelsystem

- Überleben: $X_P = x_1 \vee x_2$
- Ausfall: $\bar{X}_P = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$
- System-Ausfallwahrsch.:

$$\begin{aligned} F_P &= P(\bar{X}_P) = P(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \\ &= q_1 \cdot q_2 \\ &= (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \\ &= 1 - p_1 - p_2 + p_1 \cdot p_2 \end{aligned}$$

- System-Überlebenswahrsch.:

$$\begin{aligned} R_P &= P(X_P) = P(x_1 \vee x_2) \\ &= P(x_1) + P(x_2) - P(x_1 \wedge x_2) \\ &= p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2 \\ &\equiv 1 - q_1 \cdot q_2 = 1 - F_P \end{aligned}$$

Lernziele

Grundlagen

Basissysteme

Notation

Systemvergleich

Systemanalyse

Zustandswahrsch.

Module

Funktionstabelle

Schnitt, Pfad

Literatur

Serien- und Parallelsystem mit n Komponenten

Seriensystem

funktioniert, wenn alle n Komponenten des Seriensystems funktionieren (den Zustand 1 aufweisen)

$$R(t) = \prod_{i=1}^n p_i(t);$$

$$F(t) = 1 - \prod_{i=1}^n p_i(t)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - q_i(t)]$$

Parallelsystem

fällt aus, wenn alle n Komponenten des Parallelsystems ausfallen (den Zustand 0 aufweisen)

$$F(t) = \prod_{i=1}^n q_i(t);$$

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n q_i(t)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - p_i(t)]$$

Anm.: Die Ereignisse des Überlebens Die Ereignisse des Überlebens schliessen sich nicht gegenseitig aus; sie sind voneinander unabhängig.

Lernziele

Grundlagen

Basissysteme

Notation

Systemvergleich

Systemanalyse

Zustandswahrsch.

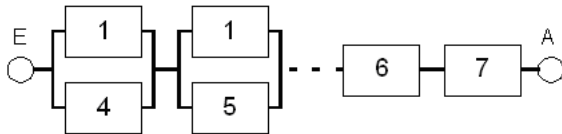
Module

Funktionstabelle

Schnitt, Pfad

Literatur

Beispiel für ein ZBD



Das System funktioniert, wenn Komponenten (1 ODER 4) funktionieren UND (1 ODER 5) UND ...(6 UND 7)

Anmerkung

- ▶ Im ZBD darf dieselbe Komponente (Element) mehrfach vorkommen
- ▶ ...: irgendwelche anderen Komponenten (hier nicht aufgeführt)

Lernziele

Grundlagen

Basissysteme

Notation

Systemvergleich

Systemanalyse

Zustandswahrsch.

Module

Funktionstabelle

Schnitt, Pfad

Literatur

verknüpfte Systeme

Die Zustandswahrscheinlichkeiten von Serien- und Parallelsystemen lassen sich einfach berechnen (s.o.). Diese Basissysteme sind jedoch oft zu einem komplizierteren Systems verknüpft.

Serien-Parallelsysteme, Parallel-Seriensysteme

- ▶ Aufteilung des Systems in Module, die nur aus Serien- oder Parallelsystemen bestehen. In der Modul-Darstellung wird das System ein einfaches Serien- oder Parallelsystem.
- ▶ Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten der Module
- ▶ Berechnung des Gesamtsystem-Zustandswahrscheinlichkeit mit Hilfe der Modul-Zustandswahrscheinlichkeiten
- ▶ Beachte: $F = 1 - R$

Lernziele

Grundlagen

Basissysteme

Notation

Systemvergleich

Systemanalyse

Zustandswahrsch.

Module

Funktionstabelle

Schnitt, Pfad

Literatur

Systemzustandswahrscheinlichkeiten über Erfolgswege W_i ermitteln.

Seriensystem

$$W_1 = \{x_1, x_2\}$$

W_i	x_1	x_2
W_1	1	1

$$S = x_1 \cdot x_2$$

$$R = p_1 \cdot p_2$$

Parallelsystem

$$W_1 = \{x_1\}, W_2 = \{x_2\}, W_3 = \{x_1, x_2\}$$

W_i	x_1	x_2
W_1	1	0
W_2	0	1
W_3	1	1

$$S = x_1 (1 - x_2) + (1 - x_1) x_2 + x_1 x_2 =$$

$$\dots = x_1 + x_2 - x_1 x_2$$

$$R = p_1 + p_2 - p_1 p_2$$

Anmerkung: Man erhält diese Ergebnisse auch „rein logisch“ mit Hilfe der ausgezeichneten disjunktiven Normalform ADN. Im Seriensystem enthält der (einzige) Konjunktionsterm S schon alle Variablen; die ODER-Verknüpfung (Disjunktion) im Parallelsystem muss hingegen erweitert werden.

$$S = x_1 \cdot x_2$$

$$R = p_1 \cdot p_2$$

$$S = x_1 \vee x_2 = x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_2 (x_1 \vee \bar{x}_1)$$

$$= \dots = x_1 + x_2 - x_1 x_2$$

$$R = p_1 + p_2 - p_1 p_2$$

Lernziele

Grundlagen

Basissysteme

Notation

Systemvergleich

Systemanalyse

Zustandswahrsch.

Module

Funktionstabelle

Schnitt, Pfad

Literatur

Schnitte, Pfade

Systemzustandswahrscheinlichkeiten über Minimalschnitte oder -pfade ermitteln.

► Minimalschnitte (Cut Sets):

Kleinste Menge ausgefallener Komponenten i , die im Zuverlässigkeitsblockdiagramm den Weg vom „Eingang“ zum „Ausgang“ versperrt:

$$\sigma_i = \{\bar{x}_1; \bar{x}_2; \dots\}; i = 1, 2, \dots, n$$

► Minimalpfade (Path Sets):

Kleinste Menge (funktionierender) Komponenten j , die im Zuverlässigkeitsblockdiagramm einen Weg vom „Eingang“ zum „Ausgang“ offen hält:

$$\pi_j = \{x_1; x_2; \dots\}; j = 1, 2, \dots, s$$

Lernziele

Grundlagen

Basissysteme

Notation

Systemvergleich

Systemanalyse

Zustandswahrsch.

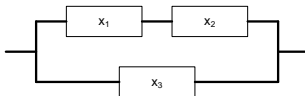
Module

Funktionstabelle

Schnitt, Pfad

Literatur

Schnitte, -pfade



Minimalschnitte (Cut Sets)	Minimalpfade (Cut Sets)
Mengen σ_i : $\sigma_1 = \{\bar{x}_1; \bar{x}_3\}$, $\sigma_2 = \{\bar{x}_2; \bar{x}_3\}$	Mengen π_j : $\pi_1 = \{x_1; x_2\}$, $\pi_2 = \{x_3\}$
$\bar{y} = 1 - \bigcap_{j=1}^n (1 - \sigma_j)$ $= 1 - [(1 - \bar{x}_1 \bar{x}_3) (1 - \bar{x}_2 \bar{x}_3)]$	$\bar{y} = 1 - \bigcap_{j=1}^s (1 - \pi_j) = (1 - x_1 x_2) (1 - x_3)$
$\bar{y} = 1 - [(1 - \bar{x}_1 \bar{x}_3) (1 - \bar{x}_2 \bar{x}_3)]$ $= 1 - [(1 - \bar{x}_1 \bar{x}_3 - \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3)]$ $= \bar{x}_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 - \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	$\bar{y} = 1 - x_1 x_2 - x_3 + x_1 x_2 x_3$

Lernziele

Grundlagen

Basissysteme

Notation

Systemvergleich

Systemanalyse

Zustandswahrsch.

Module

Funktionstabelle

Schnitt, Pfad

Literatur

Schnitte, -pfade

Minimalschnitte (Cut Sets)	Minimalschnitte (Cut Sets)
...	zum Vergleich mit Minimalschnitt: $\bar{y} = 1 - [(1 - \bar{x}_1)(1 - \bar{x}_2) - (1 - \bar{x}_3) + (1 - \bar{x}_1)(1 - \bar{x}_2)(1 - \bar{x}_3)]$ ausmultiplizieren $= \bar{x}_1\bar{x}_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3 - \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
$F = q_1q_3 + q_2q_3 - q_1q_2q_3$	$F = q_1q_3 + q_2q_3 - q_1q_2q_3$

Anmerkung:

- ▶ Es gelten die Regeln der Booleschen Algebra
- ▶ Alle Vorgehensweisen liefern dieselben Ergebnisse.

Lernziele

Grundlagen

Basissysteme

Notation

Systemvergleich

Systemanalyse

Zustandswahrsch.

Module

Funktionstabelle

Schnitt, Pfad

Literatur

Ergänzung: Herleitung der Gleichung für Minimalschnitte

Minimalschnitte (Cut Sets)	Bemerkungen
$\bar{y} = \bigcup_j \sigma_j = \bigcup_j \left(\bigcap_k \bar{x}_k \right)$	<p>Jeder Konjunktionsterm in () gibt einen „Zustand“ Ausfall an (Def. Minimalschnitte)</p> <p>Funktionszustände sind damit gegeben durch</p> $\bar{\sigma}_j = 1 - \sigma_j$
$\begin{aligned} \bar{\bar{y}} &= \overline{\bigcup_j \sigma_j} = \bigcap_j \bar{\sigma}_j \\ &= \bigcap_j (1 - \sigma_j) \end{aligned}$	<p>ODER-Verknüpfung macht Berechnung kompliziert. Abhilfe: De-Morgansches Gesetz der Negation (Doppelte Verneinung)</p> <p>$\bar{\bar{y}}$: Negierter Zustand „Ausfall“ entspricht „Funktion“</p>
$\bar{y} = 1 - \bigcap_j (1 - \sigma_j)$	<p>Da σ_j ein Boolescher Ausdruck ist, gilt auch:</p> $\bar{y} = 1 - y$

Literatur I

Lernziele

Grundlagen

Basissysteme

Notation

Systemvergleich

Systemanalyse

Zustandswahrsch.

Module

Funktionstabelle

Schnitt, Pfad

Literatur

- [1] DIN-EN61078: *Techniken für die Analyse der Zuverlässigkeit: Verfahren mit dem Zuverlässigkeitsblockdiagramm (DIN EN 61078: 1994-10)*.
Beuth Verlag, Oktober 1994.