

מטלה 10:

אלגוריתמים כלכליים:

שאלה 2:

שאלה 2: אלגוריתם הממוצע - יעילות פארטו

א. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא יעיל פארטו כשיש רק שני נושאים.

* ב. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא יעיל פארטו כשיש מספר כלשהו של נושאים.
רמז: השתמשו במשפט (שאוּלִי למדתם בקורס בהסתברות; חפשו בגוגל כדי להיזכר):
"the mean minimizes the mean squared error"

תשובה שאלה 2:

לפי הנתונים הקלט של אלגוריתם הממוצע הינו:

הקלט:

- כסף בקופה: C .
- נושאים: $1, \dots, m$ (סעיפי תקציב).
- אזרחים: $1, \dots, n$.
- לכל אזרח i יש תקציב אידיאלי:

$$p_{i,1}, \dots, p_{i,m}; \quad p_{i,1} + \dots + p_{i,m} = C$$

והפלט הינו:

הפלט:

- וקטור d המייצג תקציב: d_1, \dots, d_m .

$$d_1 + \dots + d_m = C.$$

כשאר d_i נקבע על ידי ממוצע של כל ערכי התקציב האידאלי של כל אזרח לנושא ה- i

לפי ההגדרה אלגוריתם יהיה יעיל פארטו אם אין לו שיפור פארטו

כשאר שיפור פארטו הינו:

- **מצב א נקרא שיפור פארטו (Pareto improvement)** של מצב ב, אם הוא טוב יותר לחלק מהמשתתפים, וטוב לפחות באותה מידה לכולם.

אם נניח בשלילה כי אלגוריתם הממוצע אינו יעיל פארטו, אזי זאת אומרת כי יש מצב, השונה מהמצב שהאלגוריתם מחזיר, אשר הוא שיפור פארטו של המצב הנתון מהאלגוריתם.

אזי לפי ההגדרה של מצב אשר הוא שיפור פארטו, ולפי הפלט של האלגוריתם קיים מצב אשר כל התוצאות שלו בפלט של וקטור התקציב (וקטור d) גדולות או שוות לפלט הווקטור מאלגוריתם הממוצע.

זאת אומרת:

אם נגדיר את וקטור התקציב מהפלט של אלגוריתם הממוצע כ וקטור d_1

כאשר מייצג תקציב d_1, \dots, d_m

$$d_1 + \dots + d_m = C$$

ונגדיר את וקטור התקציב אשר הוא שיפור פארטו של הפלט מאלגוריתם הממוצע, כווקטור $d1$ כאשר מייצג תקציב $d2_1, \dots, d2_m$

$$d2_1 + \dots + d2_m = C$$

לפי הגדרת שיפור פארטו לכל $1 \leq i \leq m$ נקבל כי $d1_i \leq d2_i$ וגם לא יתכן מצב אשר לכל $1 \leq i \leq m$ נקבל כי $d1_i = d2_i$, כי אז נקבל את אותו מצב והוא לא יהיה שיפור פארטו לכן בהכרח אחד מן התקציבים לנושא מסוים יהיה גדול יותר.

לאחר הרצת האלגוריתם נקבל תקציב לכל נושא, שהוא הממוצע מבין שני ההגדרות לתקציב אידיאלי של שני האזרחים לכל נושא.

אזי אם מצב $d2$ הוא שיפור פארטו של מצב $d1$, אז בהכרח אחד מן הערכים בווקטור תקציבים שלו גדול מן הערך של וקטור התקציבים של $d1$ ועקב כך התועלת של אחד השחקנים תגדל כי יקבל תקציב הקרוב יותר לערך האידיאלי שנתן לנושא המסוים בו הערך גבוה יותר בווקטור של $d2$.

אך לפי הגדרת התקציב הכללי, ראינו כי סכום התקציב הכללי שהאלגוריתם יכול לתת הינו C , המוגדר ככמות הכסף בקופה.

ומכיוון שלא יתאפשר שהממוצע קטן יותר וכך התקציב לנושא מסוים יהיה קטן יותר בווקטור התקציבים של $d2$, כי אז מצב $d2$ לא יוכל להיות שיפור פארטו לפי הגדרה למצב $d1$.

אזי קיבלנו סתירה לכך שמצב $d2$ הוא שיפור פארטו של מצב $d1$, מכיוון שחורג מן התקציב הכללי כדי להיות שיפור פארטו, סתירה להנחה בשלילה.

ומכאן סתירה לכך שיש שיפור פארטו למצב המוגדר מאלגוריתם הממוצע.

ולכן אלגוריתם הממוצע הינו יעיל פארטו לשני שחקנים

*ב. מצאו אלגוריתם המוצא תקציב יעיל-פארטו והוגן לקבוצות.

אלגוריתם חלוקת תקציב, אשר יעיל פארטו והוגן לקבוצות:

- 0) קלט: מספר המייצג את התקציב הכללי לחלוקה (יקרא C), רשימה של הנושאים המועמדים לחלוקת התקציב (subjects), רשימה המכילה רשימות אשר בכל תא ברשימה הפנימית יש שם של נושא שהשחקן מעוניין להשקיע בו ובנוסף גם את אחוז ההשקעה מהתקציב האישי של השחקן (יקרא Preferences), שחקן מחויב להשתמש בכל 100% שברשותו (תא יכיל זוג ערכים string ובנוסף float אשר יהיה בין 0-1)
- 1) הגדר את התקציב האישי לכל שחקן על ידי C/n כאשר n הינו משחק השחקנים (גודל הרשימה של preferences) הכנס למשתנה: self_budget
- 2) הגדר Map ריק אשר יכיל key אשר יוגדר לstring וערך אשר יוגדר לfloat, תקרא subjects_total_budget
- 3) עבור על כל הערכים (השחקנים) ב Preferences. ערך נוכחי יקרא בשם curr_player
- 3א) עבור על כל הערכים (העדפות) ב curr_player. ערך נוכחי יקרא בשם curr_subject_pres (יכיל את שם הנושא subject ואת הערך באחוזים values)
- 3אא) אם אין ערך ב subjects_total_budget ל curr_subject_pres הוסף אותו
- 3אב) הוסף לערך הנוכחי curr_subject_pres ב subjects_total_budget את $self_budget * curr_subject_pr.value$
- 4) צור רשימה ריקה של ערכים, רשימה זו תקרא subjects_final_budget
- 5) עבור על כל הנושאים ב subjects, ערך נוכחי יקרא curr_subject
- 5א) אם curr_subject מופיע ב subjects_total_budget, אזי הוסף ל subjects_final_budget את הערך של curr_subject ב subjects_total_budget
- 5ב) אחרת הוסף ל subjects_final_budget את הערך 0
- 6) החזר את subjects_final_budget, אשר ייצג את התקציב שכל נושא קיבל (לפי מיקום הנושא ברשימת subjects)

באופן כללי מאוד האלגוריתם נותן לכל שחקן תקציב אישי אשר הוא בדיוק $1/n$ כאשר n הוא מספר השחקנים והשחקן מחליט איך לחלק תפקיד זה לפי הנושאים שציין האחוז שרוצה לתת לכל נושא מהתקציב האישי שלו.

האלגוריתם הוגן לקבוצות לפי הגדרת הוגן לקבוצות :

תקציב הוגן לקבוצות

הגדרה. אלגוריתם לקביעת התקציב נקרא **הוגן לקבוצות** אם, כאשר האזרחים מחולקים לקבוצות וכל קבוצה j נותנת 100% מהתקציב לסעיף j , האלגוריתם מחלק את התקציב בין הסעיפים ביחס ישר לגודלי הקבוצות.

נראה כי אם נחלק את השחקנים לקבוצות וכל האזרחים בקבוצה מסוימת יצביעו לנושא מסויים ב-100% מהתקציב האישי שלהם. (אותו נושא שכל הקבוצה שלהם הצביעו)

נקבל כי התקציב שאותו נושא יקבל הוא לפחות כתקציב האישי, שהוא $1/n$ כאשר n הוא מספר השחקנים, כפול מספר השחקנים בקבוצה.

זה עונה על התנאי של בו האלגוריתם מחלק את התקציב בין הנושאים ביחס ישר לגודלי הקבוצות. בנוסף האלגוריתם הינו יעיל פארטו.

זאת מכיוון שלא נוכל למצוא מצב שהוא שיפור פארטו של המצב החוזר מהאלגוריתם

מכיוון שכל שחקן מקבל תקציב אישי שהוא חלק שווה בדיוק מהתקציב הכללי, והשחקן נותן אחוזים לכל אחד מן הנושאים אשר בחר לחלק את התקציב האישי שלו. אזי לא נוכל למצוא מצב שישפר את המצב הנוכחי כי התקציב הכללי שלנו קבוע. ואם נרצה לשפר תקציב של נושא אחד נצטרך להוריד מנושא אחר. מבחינת השחקנים התועלת תהיה לפי האחוזים שחולקו מהתקציב האישי שלהם לפי הגדרת פעולת האלגוריתם.

לכן עקב כך שלא נוכל למצוא מצב המשפר את המצב המחוזר מהאלגוריתם האלגוריתם יעיל פארטו