

מטלה – תקציב השתתפותי

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות רגילות מזכות בנקודה אחת. שאלות או סעיפים עם כוכבית מזכים בנקודה נוספת.

יש להוכיח את נכונות התשובות. אפשר לכתוב אלגוריתם בפסאודו-קוד, אבל הוא צריך להיות מדויק ומפורט ברמה של שפת תיכנות.

שאלה 1: תקציב אוטיליטרי עם פונקציית-תועלת מינימום

בהרצאה הנחנו, שהתועלת של כל תורם שווה לסכום התרומות לנושאים שהוא תומך בהם:

$$u_i(d) = \text{Sum}[j=1, \dots, m; u_{i,j} > 0] d_j$$

לדוגמה, אם עמי תומך בנושאים א, ב, נושא א מקבל 4000 ו-ב 2000, אז התועלת של עמי היא 6000.

בשאלה זו, נניח שהתועלת של כל תורם שווה לתרומה הקטנה ביותר לנושא כלשהו שהוא תומך בו:

$$u_i(d) = \text{Min}[j=1, \dots, m; u_{i,j} > 0] d_j$$

בדוגמה למעלה, התועלת של עמי היא 2000.

א. הראו דוגמה שבה האלגוריתם שלמדנו בהרצאה, הנותן את כל התקציב לנושא עם הכי הרבה תומכים, אינו מחזיר תקציב אוטיליטרי.

ב. כתבו אלגוריתם יעיל לחישוב תקציב אוטיליטרי.

* ג. האם האלגוריתם המחזיר תקציב אוטיליטרי הוא מגלה-אמת? הוכיחו או הראו דוגמה נגדית.

שאלה 2: זכויות לפי גובה המס

נניח שאזרח i משלם מס בגובה C_i (התקציב C שווה לסכום המיסים שמשלמים כל האזרחים). אנחנו רוצים להגדיר מערכת לחלוקת תקציב, שתתן זכויות רבות יותר לאזרחים המשלמים יותר מיסים. לדוגמה, ההגדרה של תכונת "הוגנות ליחידים" תהיה: "התועלת של אזרח i היא לפחות C_i ".

א. כתבו הגדרה מוכללת של תקציב הוגן לקבוצות, ושל תקציב פריק.

ב. הוכיחו, שכל תקציב פריק הוא הוגן לקבוצות – בהתאם להגדרות של סעיף א.

* ג. נגדיר "תקציב נאש מוכלל" כתקציב d הממקסם את הסכום:

$$\text{Sum}[i=1, \dots, n] C_i * \log(u_i(d))$$

(מכפילים את הלוג של אזרח i בגובה המס ששילם אזרח i).

הוכיחו שתקציב נאש מוכלל הוא פריק (לפי ההגדרה של סעיף א).

שאלה 3: תיכנות - תקציב נאש

כתבו פונקציה כללית בפייתון, המוצאת תקציב-נאש ומחשבת את הפירוק שלו. כותרת הפונקציה:

```
def Nash_budget(  
    total: float, subjects: List[str],  
    preferences: List[List[str]])
```

הקלט הוא התקציב הכולל, רשימת הנושאים, וכן רשימת ההעדפות של השחקנים: לכל שחקן i יש רשימה של נושאים שהוא תומך בהם (תת-קבוצה של הרשימה הראשית). הפונקציה כותבת את הסכום המועבר לכל נושא, ואת הפירוק של התקציב לפי השחקנים. לדוגמה:

Citizen 0 gives 85 to Security and 15 to Education.

שאלה 4: תיכנות - תקציב אוטיליטרי על תנאי

כמו שאלה 3, רק עם האלגוריתם האוטיליטרי-על-תנאי.

שאלה 5: תקציב אגליטרי

הגדרה: תקציב אגליטרי הוא תקציב הממקסם את הערך הנמוך ביותר. כלומר, הוא פותר את הבעיה הבאה:

$$\max[d] \min[i] u_i(d)$$

לכל אחת מהתכונות למטה, הוכיחו שכל תקציב אגליטרי מקיים את התכונה הזאת, או הביאו דוגמה נגדית.

א. הוגן ליחידים.

ב. הוגן לקבוצות.

ג. יעיל פארטו.

ד. מגלה-אמת.

*** שאלה 6: שידוך לקסימין-אגליטרי

[שאלה זו מזכה בניקוד פי 4. יתקבלו רק תשובות עם הוכחות מלאות ודוגמאות מפורטות] נתונים n שחקנים ו- m חפצים בדידים. צריך לתת חפץ אחד בדיוק לכל שחקן, ללא כספים. תארו אלגוריתם יעיל (-) זמן ריצה פולינומיאלי ב- n) למציאת השמה לקסימין-אגליטרית.