מטלה – מיזוג הצעות תקציב

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות רגילות מזכות בנקודה אחת. שאלות או סעיפים עם כוכבית מזכים בנקודה נוספת.

שאלה 1: הוגנות ליחידים - תנאי משופר

שאלה זו מתייחסת לאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות. הוכחנו בהרצאה, שכאשר האזרחים מתחלקים לקבוצות "ממוקדות", כך שהאזרחים בכל קבוצה j נותנים 100% מהתקציב לנושא j, התקציב המתקבל מתחלק בין הנושאים ביחס ישר למספר התומכים של כל נושא: נושא שיש לו k תומכים יקבל לפחות C*k/n . בפרט, נושא שיש לו תומך אחד יקבל לפחות C/n.

עכשיו נניח שיש רק אזרח אחד ממוקד, הנותן 100% מהתקציב לנושא j. שאר האזרחים יכולים לחלק את התקציב באופן כלשהו – לא דווקא באופן ממוקד. לדוגמה נניח יש שלושה אזרחים ושלושה נושאים והתקציב הכולל הוא 30. הצבעות האזרחים:

- אזרח א: 30, 0, 0.
- אזרח ב: 0, 15, 15.
- אזרח ג: 0, 15, 15.

אזרח א ממוקד, אבל אזרחים ב, ג לא ממוקדים.

א. הוכיחו, שהאלגוריתם נותן לנושא א פחות מ-C/n מהתקציב. פרטו את שלבי החישוב בעזרת חיפוש בינארי.

* ב. הציעו שיפור לאלגוריתם (המשתמש בפונקציות שונות מהפונקציות שהראינו בהרצאה), המבטיח, שלכל אזרח ממוקד התומך בנושא j, נושא j יקבל לפחות C/n. הדגימו את האלגוריתם שלכם על הדוגמה למעלה, והוכיחו שהיא נכונה תמיד.

שאלה 2: אלגוריתם הממוצע - יעילות פארטו

א. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא יעיל פארטו כשיש רק שני נושאים.

* ב. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא יעיל פארטו כשיש מספר כלשהו של נושאים.
רמז: השתמשו במשפט (שאולי למדתם בקורס בהסתברות; חפשו בגוגל כדי להיזכר):
"the mean minimizes the mean squared error".

שאלה 3: מניפולציה קבוצתית

נתון אלגוריתם כלשהו לחלוקת משאבים. נאמר שלתת-קבוצה כלשהי של שחקנים יש **מניפולציה קבוצתית מוצלחת** אם הם יכולים לשנות את הקלט שלהם (להגיד ערכים שונים מהערכים האמיתיים שלהם), כך שלפחות שחקן אחד מהקבוצה ירוויח, וכל השחקנים בקבוצה לא יפסידו.

אלגוריתם הוא **מגלה-אמת לקבוצות** (באנגלית group strategyproof) אם לאף תת-קבוצה של שחקנים אין מניפולציה קבוצתית מוצלחת. שימו לב: אלגוריתם הוא מגלה-אמת (לפי ההגדרה שראינו באחד השיעורים הקודמים) אם לאף תת-קבוצה בגודל 1 אין מניפולציה קבוצתית מוצלחת. לכן, כל אלגוריתם מגלה-אמת-לקבוצות הוא גם מגלה-אמת.

א. הוכיחו, שמכרז ויקרי למכירת חפץ יחיד אינו מגלה-אמת-לקבוצות.

ב. הוכיחו, שאלגוריתם החציון הפשוט הוא מגלה-אמת-לקבוצות.

שאלה 4: פונקציית תועלת שונה

בהרצאה הגדרנו את פונקציית התועלת השלילית של כל שחקן **i** כסכום המרחקים בין התקציב האידיאלי שלו לבין התקציב בפועל:

$$- \mathbf{Sum}_j \ |d_j - p_{i,j}|$$

נניח שמגדירים את פונקציית התועלת השלילית של כל שחקן כסכום ריבועי המרחקים:

$$- \mathbf{Sum}_j \ (d_j - p_{i,j})^2$$

הוכיחו, שאלגוריתם החציון המוכלל עדיין מקיים את כל התכונות שהוכחנו בהרצאה:

א. לכל קבוצה של הצבעות קבועות, אלגוריתם החציון המוכלל מגלה-אמת.

ב. לכל קבוצה של לכל היותר **n-1** הצבעות קבועות, אלגוריתם החציון המוכלל יעיל-פארטו.

ג. עם **n-1** הצבעות קבועות המפולגות אחיד בין 0 ל-**C**, אלגוריתם החציון המוכלל הוגן-לקבוצות.

שאלה 5: תיכנות: חישוב תקציב

א. כתבו פונקציה בפייתון, המקבלת כקלט את כמות הכסף בקופה והצבעות האזרחים, ומחשבת את התקציב בעזרת אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות. כותרת הפונקציה:

```
def compute_budget(
     total_budget:float,
     citizen_votes:List[List]
) → List[float]
```

הנה דוגמת קריאה לפונקציה עבור תקציב עם שלושה סעיפים, ושני אזרחים:

```
compute_budget(100, [ [100, 0, 0], [0, 0, 100] ])
```

הערך המוחזר הוא רשימה עם מספרים כמספר הסעיפים, למשל:

```
[50, 0, 50]
```

צרפו דוגמאות-הרצה.

* ב. כתבו קוד, הבודק אם התוצאה של הפונקציה compute_budget מסעיף א היא הוגנת לקבוצות. הריצו את הפונקציה על עבור תקציב עם 3 נושאים, מדינה עם 10 אזרחים, וכל הצירופים הדרושים על-מנת לוודא שהתקציב הוא אכן הוגן לקבוצות.

* שאלה 6. זכויות לפי גובה המס [שידור חוזר מהמטלה הקודמת]

ניתן לפתור את שאלה **2 ג** מהמטלה הקודמת (להוכיח שכל תקציב נאש מוכלל הוא פריק לפי ההגדרה המתחשבת בגובה המס).