

## אלגוריתם למציאת שידוך עם דירוג מקסימלי בגרף דו-צדדי:

## הגדרות:

 $A$  קבוצת מועמדים $P$  קבוצת משרות

- עבור כל מועמד ב- $A$  קיימת רשימת העדפות בה המועמד מדרג את המשרות עם דירוג מ-1 ל- $|P|$   $r \leq$  כך ש-1 ההעדפה הכי גבוהה וניתן לדרג באותו מספר משרות שונות.
- **שידוך** הוא קבוצה של זוגות סדורים של מועמדים ומשרות כך שכל משרה וכל מועמד מופיעים פעם אחת בין כל הזוגות.
  - **שידוך מדורג מקסימלי** הוא כזה בו מספר המקבלים את ההעדפה הגבוהה שלהם הוא הגדול ביותר בכפוף לזה מספר המקבלים את ההעדפה השנייה הגבוהה שלהם הוא הגדול ביותר וכן הלאה. נוכל להסתכל על בעיה זו כמציאת שידוך עם דירוג מקסימלי בגרף דו-צדדי עם קבוצות הקודקודים  $A$  ו- $P$ . נגדיר  $G = (A \cup P, E)$  כאשר  $E$  היא קבוצת הצלעות בין קבוצות הקודקודים  $A$  ו- $P$ . כל צלע מקבלת דירוג  $i$  ו- $E_i$  היא תת קבוצה של  $E$  ומכילה את כל הצלעות המדורגות בדירוג  $i$ . יהי  $M$  שידוך מקסימלי בגרף  $G$ .
  - **קודקוד חופשי** הוא קודקוד שלא מחובר לצלע ששייכת ל- $M$ .
  - **מסלול שיפור** הוא מסלול המתחיל ומסתיים בקודקוד חופשי וצלעותיו משודכות לסירוגין. נחלק את הקודקודים ל-3 קבוצות:  $O, EV, U$ .
  - $EV$  ו- $O$  הן קבוצות הקודקודים כך שקיים מסלול משודך לסירוגין המתחיל מקודקוד חופשי ואורכו זוגי או אי זוגי בהתאמה.
  - $U$  היא קבוצת הקודקודים שלא ניתן להגיע אליהם מקודקוד חופשי ע"י מסלול משודך לסירוגין.
  - עבור קודקוד מקבוצה  $A$  ומקבוצה  $B$  **הצלע ביניהם תקרא  $AB$** . נגדיר  $M_1$  ב- $G_1 = (A \cup P, E_1)$  שידוך מקסימלי ונגדיר את  $U_1, O_1, EV_1$  להיות קבוצות הקודקודים עפ"י החלוקה המתוארת לעיל.

## האלגוריתם:

אתחול: מתחילים בגרף  $G_1 = G'_1$  ועם שידוך מקסימלי  $M_1$ .עבור כל איטרציה מ- $i = 1$  עד  $r - 1$  נבצע את השלבים הבאים והפלט הוא  $M_r$ :

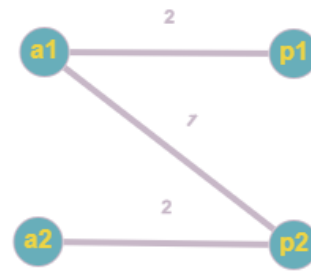
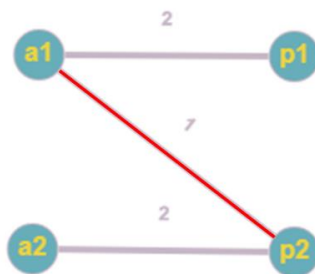
1. נחלק את הקודקודים  $A \cup P$  ל-3 קבוצות זרות:  $U_i, O_i, EV_i$ . מכילות את הקודקודים שהמסלול אליהן מקודקוד חופשי משודך לסירוגין ואורכו הוא אי זוגי או זוגי בהתאמה.  $U_i$  מכיל את הקודקודים אשר לא ניתן להגיע אליהם מקודקוד חופשי ע"י מסלול משודך לסירוגין.
2. נמחק את כל הצלעות השייכות ל- $E_j$  כך ש- $j > i$  ומחברות לקודקוד השייך ל- $U_i$   $U_i U_i$ . מכילה את כל הקודקודים המשודכים ע"י שידוך מקסימלי ב- $G'_i$ . נמחק מ- $G'_i$  את כל הצלעות  $O_i U_i$  ו- $O_i O_i$ . צלעות אלו הם לא חלק מהשידוך המקסימלי של  $G'_i$ . נוסיף לגרף  $G'_i$  את הצלעות של  $E_{i+1}$  וזה יהיה הגרף  $G'_{i+1}$ .
3. נמצא שידוך מקסימלי  $M_{i+1}$  ב- $G'_{i+1}$  ע"י שניקה את המסלול הסימטרי למסלול השיפור  $M_i$ .

דוגמאות:

דוגמא 1:

קלט:

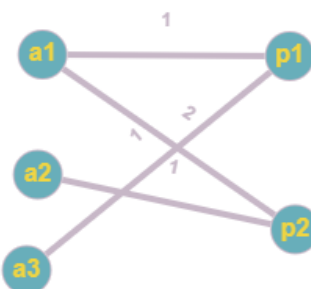
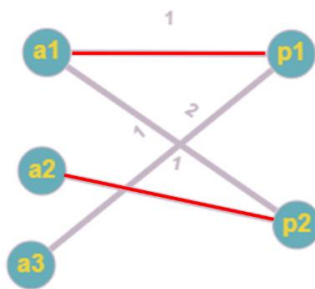
פלט:  $(1,0)$  . לדוגמא:  $M = \{(a1,p2)\}$



דוגמא 2:

קלט:

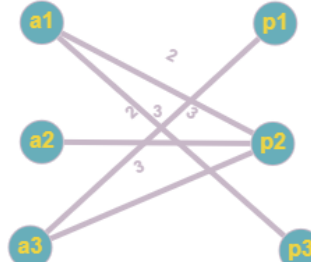
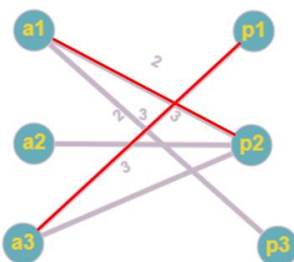
פלט:  $(2,0)$  . לדוגמא:  $M = \{(a2,p2), (a1,p1)\}$



דוגמא 3:

קלט:

פלט:  $(0,2,0)$  . לדוגמא:  $M = \{(a1,p2), (a3,p1)\}$



דוגמא 4:

קלט:



פלט: (0,2,0) . לדוגמא:

$M = \{(a1,p1),(a2,p3),(a3,p5),(a4,p4),(a5,p2)\}$

