第三章

Chapter 3

==

3.2 随机过程 $X(t)$ 为 $X(t)=A\,cos(\omega_0 t+\Phi)$ 式中，**A** 具有瑞利分布，其概率密度为 $P_A(a)=\frac{a}{\sigma^2}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}$，$a>0$，$\Phi$在$(0,2\pi)$上均匀分布，$\Phi$与$A$是两个相互独立的随机变量，$\omega_0$为常数，试问 **X(t)**是否为平稳过程。

解：由题意可得**:**

$$E[X(t)]=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}a\,cos(\omega_0 t+\phi)\frac{a}{\sigma^2}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}*\frac{1}{2\pi}da\,d\phi=\int_0^{\infty}a\frac{a}{\sigma^2}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}da\underline{\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}cos(\omega_0 t+\phi)d\phi}\Rightarrow 0=0$$

$$R_{XX}(t_1,\ t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}a\,cos(\omega_0 t_1+\phi)a\,cos(\omega_0 t_2+\phi)\frac{1}{2\pi}\frac{a}{\sigma^2}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}da\,d\phi$$

$$=\int_0^{\infty}a^2\frac{a}{\sigma^2}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}da\int_0^{2\pi}cos(\omega_0 t_1+\phi)cos(\omega_0 t_2+\phi)\frac{1}{2\pi}d\phi$$

$$=-\int_0^{\infty}a^2e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}d\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}cos\,\omega_0(t_2-t_1)+\underline{\frac{1}{2}cos[\omega_0(t_1+t_2)+2\phi]}\right\}d\phi$$

$$=-\int_0^{\infty}a^2de^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\times\frac{1}{2}cos\,\omega_0(t_2-t_1)=-\left\{a^2e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{\infty}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}da^2\right\}\times\frac{1}{2}cos\,\omega_0(t_2-t_1)$$

$$=-2\sigma^2\int_0^{\infty}1de^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\times\frac{1}{2}cos\,\omega_0(t_2-t_1)=2\sigma^2\times\frac{1}{2}cos\,\omega_0(t_2-t_1)=\sigma^2cos\,\omega_0(t_2-t_1)$$

可见$E[X(t)]$与 **t** 无关，$R_{XX}(t_1,\ t_2)$与 **t** 无关，只与(t_2-t_1)有关。

$\therefore X(t)$是平稳过程

另解**:**

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}(t)] = E[A\cos(\omega_0 t + \Phi)] = E[A]E[\cos(\omega_0 t + \Phi)] = E[A]x0 = 0;$$

$$R(t, t+\tau) = E\left[A^2 \cos(\omega_0 t + \Phi)\cos(\omega_0 (t+\tau) + \Phi)\right] = E\left[A^2\right]E\left[\cos(\omega_0 t + \Phi)\cos(\omega_0 (t+\tau) + \Phi)\right]$$

$$= \frac{E\left[A^2\right]}{2}E\left[\cos((2\omega_0 t + \omega_0\tau) + 2\Phi) + \cos(\omega_0\tau)\right]$$

$$= \frac{E\left[A^2\right]}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

$\therefore X(t)$是平稳过程

3.3 设 **S(t)** 是一个周期为 **T** 的函数，随机变量Φ在（0，T）上均匀分布，称 X(t)=S（t+Φ）, 为随相周期过程，试讨论其平稳性及各态遍历性。

解：

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}(t)] = \mathrm{E}[\mathrm{S}(t+\Phi)] = \int_0^T S(t+\phi)\frac{1}{T}d\phi = \int_0^T S(t+\phi)\frac{1}{T}d\phi = \frac{1}{T}\int_t^{T+t} S(t+\phi)d\phi$$

$$= \frac{1}{T}\int_\tau^{T+\tau} S(\phi')d\phi' = \frac{1}{T}\int_\tau^{T+\tau} S(x)dx = \frac{1}{T}\int_0^T S(x)dx = constan\,t$$

$$R(t, t+\tau) = \mathrm{E}[\mathrm{S}(t+\Phi)\mathrm{S}(t+\tau+\Phi)] = \int_0^T S(t+\phi)\mathrm{S}(t+\tau+\phi)\frac{1}{T}d\phi = \frac{1}{T}\int_0^T S(t+\phi)\mathrm{S}(t+\tau+\phi)d\phi$$

$$= \frac{1}{T}\int_t^{T+t} S(\phi')\mathrm{S}(\tau+\phi')d\phi' = \frac{1}{T}\int_0^T S(\phi')\mathrm{S}(\tau+\phi')d\phi' = R(\tau)$$

$\therefore X(t)$是平稳过程

3.4 设 **X(t)**随相周期过程，图？给出了其一个样本函数，周期 T, 幅度 a 都是常数，t0 为（0，T）上均匀分布。求均值。

解：　　样本函数为：

$$x(t)=\begin{cases}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{8a}{T}(t-t_0-nT) & t_0+nT\le t\le t_0+nT+\frac{T}{8}\\ \sum_{-\infty}^{\infty}\left[-\frac{8a}{T}(t-t_0-\frac{T}{4}-nT)\right] & t_0+nT+\frac{T}{8}\le t\le t_0+nT+\frac{T}{4}\end{cases}$$

$$\mathbf{E[X(t)]=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt_0=\frac{8a}{T^2}\left[\int_{t_0\text{-}T/8}^{t_0}(t-t_0)dt_0-\int_{t_0-T/4}^{t_0\text{-}T/8}(t-t_0-\frac{T}{4})dt_0\right]}$$

$$\mathbf{=-\frac{4a}{T^2}\left[(t-t_0)^2\Big|_{t\text{-}T/8}^{t}-(t-t_0-\frac{T}{4})^2\Big|_{t\text{-}T/4}^{t\text{-}T/8}\right]}$$

$$\mathbf{=-\frac{4a}{T^2}\left[-(T/8)^2-(\frac{T}{8})^2\right]=\frac{a}{8}}$$

$$E[X(t)]=0 \qquad \text{otherwise}$$

3.6随机过程 $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Phi)$ **A** 或为随机变量或不是， 式中 ω_0 为常数，$\Phi\sim(0,2\pi)$ 上均匀分布，求：（**1**）时间自相关函数及集自相关函数。（**2**）**A** 具备什么条件两种自相关函数才相等。

解：

(1) 集自相关

$$R(t_1,t_2)=E\{A^2\cos(\omega_0 t_1+\Phi)\cos(\omega_0 t_2+\Phi)\}$$
$$=E[A^2]E\{\cos(\omega_0(t_1+t_2)+2\Phi)+\cos(\omega_0(t_1-t_2))\}$$
$$=E[A^2]\frac{1}{2}\cos(\omega_0(t_1-t_2))$$
$$=E[A^2]\frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

（**2**）时间自相关

$$\overline{\mathbf{R}}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A^2\cos(\omega_0 t+\Phi)\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau+\Phi)dt$$
$$=A^2\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T2}\int_{-T}^{T}[\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+\Phi)+\cos(\omega_0\tau)]dt$$
$$=A^2\frac{\cos(\omega_0\tau)}{2}$$

$\therefore E[A^2]=A^2$时， 即 **A** 为常数时，两者相等。

3.7 随机过程 $X(t)=A\sin t+B\cos t$ 式中，**A**，**B** 均为零均值的随机变量，求证：**X(t)** 是均值各态历经， 而均方值无各态历经性。

解：

E[X(t)]= $E[A\sin t+B\cos t]=E[A]\sin t+E[B]\cos t=0$

$$\overline{\mathbf{E}}[\mathbf{X(t)}]=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}[A\sin t+B\cos t]dt=0$$

$$E[X^2(t)]=E[(A\sin t+B\cos t)^2]=E[A^2]\sin^2 t+E[B^2]\cos^2 t+2E[A]E[B]\cos t\sin t$$
$$=E[A^2]\sin^2 t+E[B^2]\cos^2 t$$

$$\overline{\mathbf{E}}[\mathbf{X}^2(\mathbf{t})]=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}[A\sin t+B\cos t]^2 dt=\frac{1}{4\pi}(A^2+B^2)$$

故，**X(t)**均值各态遍历，均方值则非。

3.8 设 **X(t)** 与 **Y(t)**为统计独立的平稳过程，求证他们的乘积构成的随机过程 **Z(t)=X(t)Y（t）**也是平稳的。

解： $E[Z(t)]=E[X(t)Y(t)]=E[X(t)]E[Y(t)]=m_X m_Y$

$$R_Z(t_1,t_2)=E\{X(t_1)Y(t_1)X(t_2)Y(t_2)\}$$
$$=E\{X(t_1)X(t_2)\}E\{Y(t_2)Y(t_2)\}$$
$$=R_X(t_1,t_2)R_Y(t_1,t_2)$$

$\therefore X(t)$是平稳过程

3.9 设 **X(t)** 与 **Y(t)**为单独和联合平稳，求：

（**1**）**Z**（**t**）**=X(t)+Y(t)**的自相关函数

（**2**）**X(t)**与 **Y**（**t**）统计独立时的结果

（**3**）**X(t)**与 **Y**（**t**）统计独立时且均值为零时的结果。

解：

$$
\begin{aligned}
&R_Z(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)+Y(t_1)][X(t_2)+Y(t_2)]\}\\
&=E\{X(t_1)X(t_2)+Y(t_1)X(t_2)+X(t_1)Y(t_2)+Y(t_2)Y(t_2)\}\\
&=R_X(\tau)+R_Y(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{XY}(\tau)\\
&R_Z(\tau)=R_X(\tau)+R_Y(\tau)+2m_Xm_Y\\
&R_Z(\tau)=R_X(\tau)+R_Y(\tau)
\end{aligned}
$$

3.10 平稳过程 **X(t)**的自相关系数为：$R_X(\tau)=4e^{-|\tau|}\cos\pi\tau+\cos3\pi\tau$

（**1**） 求 **E[X2(t)]**和σ^2

（**2**） 若将正弦分量视为信号，其他为噪声，求功率信噪比

解：

（**1**）

$$E[X^2(t)]=R（0)=4+1=5$$

$$m_X{}^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}R（\infty)=0$$

$$\sigma^2=\psi^2-m_X{}^2=5$$

$R_S(\tau)=\cos3\pi\tau$；　　$R_S(0)=1$

$R_N(\tau)=4e^{-|\tau|}\cos\pi\tau$；　　$R_N(0)=4$

$$\frac{S}{N}=1/4$$

3.12 随机过程 **X(t)**为： $X(t)=A\cos(\omega t+\Phi)$，式中 **A,**$\omega_0$**，**$\Phi$统计独立随机变量， 其中 **A** 的均值为 **2**，方差位 **4**， $\Phi\sim(-\pi,\pi)$上均匀分布。$\omega\sim[-5,5]$上均匀分布，**X**（他 **t**）是否各态历经，并求出相关函数。

解：

$$
\begin{aligned}
&E[X(t)]=E[A]E[\cos(\omega\ t+\Phi)]\\
&=E[A]E[\cos\omega\ t\cos\Phi-\sin\omega\ t\sin\Phi]\\
&=E[A]\{E[\cos\omega t]E[\cos\Phi]-E[\sin\omega\ t]E[\sin\Phi\}]\\
&=0
\end{aligned}
$$

$$
\overline{E}[X(t)]=\frac{\omega_i}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega_i}a_i\cos(w_i t+\Phi_i)dt=0
$$

所以是均值各态历经。

3.13 设 **X(t)** 与 **Y(t)**为平稳过程，且相互独立，他们的自相关函数分别为：

$$R_X(\tau)=2e^{-2|\tau|}\cos\omega\tau$$

$$R_Y(\tau)=9+e^{-3|\tau^2|}$$

设 **Z**（**t**）**=VX(t)Y(t)**

V 是均值为 **2**，方差为 **9** 的随机变量，求 **Z(t)**的均值，方差，和相关函数。

解：

$$\mathbf{R_X}(0)=2e^{-2|\tau|}\cos\omega\tau=2$$
$$\mathbf{R_Y}(0)=9+e^{-3|\tau^2|}=10$$
$$\mathbf{R_X}(\infty)=2e^{-2|\tau|}=0=m_X^2$$
$$\mathbf{R_Y}(\infty)=9+e^{-3|\tau^2|}=9=m_Y^2$$

$$\mathbf{R_Z(t_1,t_2)=E\{[VX(t_1)Y(t_1)][VX(t_2)Y(t_2)]\}}$$
$$=E[V^2]\mathbf{E\{X(t_1)X(t_2)\}E\{Y(t_2)Y(t_2)\}}$$
$$=E[V^2]\mathbf{R_X(\tau)R_Y(\tau)}$$
$$\mathbf{R_Z}(\tau)=26e^{-2|\tau|}\cos\omega\tau*\left(9+e^{-3|\tau^2|}\right)$$

$$\mathbf{E[Z(t)]}=0$$
$$\mathbf{R_Z}(0)=260$$
$$\sigma^2 z=\mathbf{R_Z}(0)-\mathbf{R_Z}(\infty)=260$$

3.14 设 **X(t)**是雷达的发射信号，遇到目标后的回波信号 $aX(t-\tau), a<<1, \tau_1$是信号返回时间，回报信号必然伴有噪声，计为 **N(t),** 于是接收到的全信号为：

$$\mathrm{Y(t)=aX(t-\tau_1)+N(t)}$$

（**1**） 若 **X**（**t**）和 **Y**（**t**）联合平稳，求互相关函数$\mathrm{R_{XY}}(\tau)$

（**2**） 在（**1**）条件下，**N(t)**均值为零，并与 **X(t)**相互独立，求$\mathrm{R_{XY}}(\tau)$

解：

$$\mathrm{R_{XY}(t_1,t_2)=E\{[(aX(t_1-\tau_1)+N(t_1)]X(t_2)\}}$$
$$\mathrm{=a^2E\{X(t_1-\tau_1)X(t_2)\}+E\{N(t_1)X(t_2)\}}$$
$$\mathrm{=a^2R_X(\tau-\tau_1)+R_{XN}(t_1,\ t_2)}$$

（**2**）

$$
\begin{aligned}
&R_{XY}(t_1,t_2)=E\{[(aX(t_1-\tau_1)+N(t_1)]X(t_2)\}\\
&=a^2E\{X(t_1-\tau_1)X(t_2)\}+E\{N(t_1)X(t_2)\}\\
&=a^2R_X(\tau-\tau_1)+R_{XN}(t_1,\ t_2)\\
&=a^2R_X(\tau-\tau_1)
\end{aligned}
$$

3.15

设 **X(t)** 与 **Y(t)**单独且联合平稳，且相互独立，

$$
\begin{aligned}
&X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Phi)\\
&Y(t)=b\sin(\omega_0 t+\Phi)
\end{aligned}
$$

式中 **a,b** 为常量，$\Phi\sim(-\pi,\pi)$上均匀分布。

求 互相关函数$R_{XY}(\tau)$，并讨论在本题的具体情况下，$\tau=0$的互相关函数的意义。

解：

$$
\begin{aligned}
&R_{XY}(t_1,t_2)=E\{[a\cos(\omega_0 t_1+\Phi)\ b\sin\ (\omega_0(t_1+\tau)+\Phi)\}\\
&=\frac{ab}{2}E\{\sin(\omega_0(2t_1+\tau)+2\Phi)+\sin(\omega_0\tau)\}\\
&=\frac{ab}{2}E\{\sin(\omega_0(2t_1+\tau)+2\Phi)+\sin(\omega_0\tau)\}\\
&=\frac{ab}{2}E\{\sin(\omega_0(2t_1+\tau)+2\Phi)\}+\frac{ab}{2}\sin(\omega_0\tau)\\
&=\frac{ab}{2}\sin(\omega_0\tau)
\end{aligned}
$$

$R_{XY}(\tau=0)=0$ 表明了 **X(t)**，**Y**（**t**）两过程同时刻正交。

3.16 设 **X(t)** 与 **Y(t)**为非平稳过程，且相互独立，

$$
\begin{aligned}
&X(t)=A(t)\cos(\omega_0 t)\\
&Y(t)=B(t)\sin(\omega_0 t)
\end{aligned}
$$

式中 **A**（**t**）**,B(t)**为相互独立且均值为零的平稳过程，并有相同的相关函数，求证：**Z**（**t**）**=X(t)+Y(t)**

是宽平稳过程。

证明：

$$E[Z(t)] = E[A(t)\cos(t) + B(t)\sin(t)] = 0$$

$$\begin{aligned}
&R_Z(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) + Y(t_1)][X(t_2) + Y(t_2)]\} \\
&= E[A(t_1)A(t_2)\cos t_1 \cos t_2 + 2A(t)B(t)\cos t \sin t + B(t_1)B(t_2)\sin t_1 \sin t_2] \\
&= 0.5R_A(\tau)[\cos(t_1 + t_2) + \cos(t_1 - t_2)] + 0.5R_B(\tau)[\cos(t_1 - t_2) - \cos(t_1 + t_2)] \\
&= R_A(\tau)\cos(\tau)
\end{aligned}$$

3.17 如图所示的随机过程 **X(t)**的样本函数，它在$t_0 + nt_a$时刻有宽度为 **b** 的矩形脉冲，脉冲幅度以等概率取$\pm a$，t_0是在周期t_a上均匀分布的 随机变量，而且t_0

解：

$$x(t) = c[U(t - t_0 - nt_s) - U(t - t_0 - nt_s + b)], n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \ c = \pm a$$

$$\begin{aligned}
&R_Z(t_1, t_2) = E\{c^2[U(t_1 - t_0 - nt_s) - U(t_1 - t_0 - nt_s + b)][U(t_2 - t_0 - nt_s) - U(t_2 - t_0 - nt_s + b)]\} \\
&= E[c^2]E\{[U(t_1 - t_0 - nt_s) - U(t_1 - t_0 - nt_s + b)][U(t_2 - t_0 - nt_s) - U(t_2 - t_0 - nt_s + b)]\} \\
&= E[c^2]\frac{1}{t_s}\int_0^{t_s}[U(t_1 - t_0 - nt_s) - U(t_1 - t_0 - nt_s + b)][U(t_2 - t_0 - nt_s) - U(t_2 - t_0 - nt_s + b)]dt \\
&= E[c^2]\frac{1}{t_s}\{(t_1 - t_0 - n_1 t_s + b) - (t_2 - t_0 - n_2 t_s)\} \\
&= \begin{cases} E[c^2]\dfrac{1}{t_s}(|b - \tau|) & b - (i-1)t_s \le \tau \le b - it_s \\ 0 & others_s \end{cases} \quad --
\end{aligned}$$

$$E[X^2(t)] = R_X(0) = E[c^2]\frac{1}{t_s}b = a^2\frac{b}{t_s}$$

3.20 设 **X(t)**为零均值的高斯平稳过程，若又有一个新的随

机过程 **Y(t)**满足 $Y(t)=X^2(t)$ **,**求证： $R_Y(\tau)=R_X^2(0)+2R_X^2(\tau)$

证明：

$$R_Y(t_1,t_2)=E[X^2(t)X^2(t+\tau)]=E[X^2(t)]$$
$=$

？？？？？？？？？？？？

3.21 设 **U**（**t**）是电阻热噪声产生的电压随机过程，并有平稳高斯分布，若 **RC=10-3s**

$C=3x1.38x10^{-9}F$ **,T=300K,** 并知热噪声电压的自相关函数为：

$$R_U(\tau)=\frac{kT}{C}c^{-a|\tau|},\alpha=\frac{1}{RC}$$

式中 $k=1.38x10^{-23}J/K,$ 为波尔兹曼常数，求热噪声电压的均值，方差，及在某一时刻电压超过 **1uV** 的概率。

解：

$$m_X{}^2=R_U(\infty)=\frac{kT}{C}c^{-a|\tau|}=0;$$

$$\psi_X{}^2=R(0)=\frac{kT}{C}$$

$$\sigma_X{}^2=R(0)-R_U(\infty)=\frac{kT}{C}=10^{-12}$$

$$f(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{kT}{C}}}\exp\left[-\frac{v^2}{2\frac{kT}{C}}\right]$$

$$P\{v>10^{-6}\}=1-P\{v\le 10^{-6}\}=1-\int_{-\infty}^{10^{-6}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{kT}{C}}}\exp\left[-\frac{v^2}{2\frac{kT}{C}}\right]dv$$

$$=1-\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{v^2}{2}\right]dv$$

$$=1-0.8413=0.1587$$

3.14 设 **X(t)**是雷达的发射信号，遇到目标后的回波信号 $aX(t-\tau),a<<1,\tau_1$是信号返回时间，回报信号必然伴有噪声，计为 **N(t),** 于是接收到的全信号为：

$$Y(t)=aX(t-\tau_1)+N(t)$$

（**3**） 若 **X**（**t**）和 **Y**（**t**）联合平稳，求互相关函数$R_{XY}(\tau)$

（**4**） 在（**1**）条件下，**N(t)**均值为零，并与 **X(t)**相互独立，求$R_{XY}(\tau)$

解：

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E\{[(aX(t_1-\tau_1)+N(t_1)]X(t_2)\}$$
$$=a^2E\{X(t_1-\tau_1)X(t_2)\}+E\{N(t_1)X(t_2)\}$$
$$=a^2R_X(\tau-\tau_1)+R_{XN}(t_1,t_2)$$

（**2**）

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E\{[(aX(t_1-\tau_1)+N(t_1)]X(t_2)\}$$
$$=a^2E\{X(t_1-\tau_1)X(t_2)\}+E\{N(t_1)X(t_2)\}$$
$$=a^2R_X(\tau-\tau_1)+R_{XN}(t_1,t_2)$$
$$=a^2R_X(\tau-\tau_1)$$

3.7 随机过程$X(t)=A\sin t+B\cos t$ 式中，**A**，**B** 均为零均值的随机变量，求证：**X(t)** 是均值各态历经， 而均方值无各态历经

性。

解：

E[X(t)]= $E[A\sin t+B\cos t]=E[A]\sin t+E[B]\cos t=0$

$$\overline{E}[X(t)]=\int_0^{2\pi}[A\sin t+B\cos t]dt=0$$

$$E[X^2(t)]=E[(A\sin t+B\cos t)^2]=E[A^2]\sin^2 t+E[B^2]\cos^2 t+2E[A]E[B]\cos t\sin t$$
$$=E[A^2]\sin^2 t+E[B^2]\cos^2 t$$

$$\overline{E}[X^2(t)]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[A\sin t+B\cos t]^2 dt=\frac{1}{4\pi}(A^2+B^2)$$

故，**X(t)**均值各态遍历，均方值则非。