

# 数字信号处理实验

授课老师：何 美霖 (Meilin He)  
单 位：通信工程学院  
邮 箱：meilinha@hdu.edu.cn

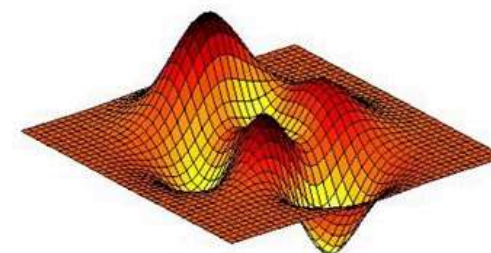
2024/11/11

数字信号处理实验

1

## 第4讲 离散序列圆周卷积及相关运算

- ◆ 线性卷积
- ◆ 圆周卷积（循环卷积）



## 线性卷积的定义

- 设有限长序列 $x(n)$ 和 $h(n)$ ，长度分别为 $N_1$ 和 $N_2$ ，则序列 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的线性卷积 $y(n)$ 为：

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

**注意：**  $y(n)$ 的序列长度为 $N_1 + N_2 - 1$

## 线性卷积的过程

- 翻转：先在坐标轴 $k$ 上画出 $x(k)$ 和 $h(k)$ ，将 $h(k)$ 以纵坐标为对称轴折叠成 $h(-k)$ 。
- 平移：将 $h(-k)$ 移位 $n$ ，得 $h(n-k)$ 。当 $n$ 为正数时，右移 $n$ ；当 $n$ 为负数时，左移 $n$ 。
- 加权：将 $h(n-k)$ 和 $x(k)$ 的对应取样值相乘。
- 叠加：把所有的乘积累加起来，即得 $y(n)$ 。

# 线性卷积的计算

- 例1：已知序列 $x_1(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $0 \leq n \leq 4$  和序列 $x_2(n) = \{1, 1, 1\}$ ,  $0 \leq n \leq 2$ , 求线性卷积和 $y(n)$ 。

解:

	k	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	
	$x_2(-k)$	1	1	1							
	$x_1(k)$			1	2	3	4	5			
$n=0$	$x_2(n-k)$	1	1	1							$y(0)=1$
$n=1$	$x_2(n-k)$		1	1	1						$y(1)=3$
$n=2$	$x_2(n-k)$			1	1	1					$y(2)=6$
$n=3$	$x_2(n-k)$				1	1	1				$y(3)=9$
$n=4$	$x_2(n-k)$					1	1	1			$y(4)=12$
$n=5$	$x_2(n-k)$						1	1	1		$y(5)=9$
$n=6$	$x_2(n-k)$							1	1	1	$y(6)=5$

# 线性卷积的计算

- 例1：已知序列 $x_1(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $0 \leq n \leq 4$  和序列 $x_2(n) = \{1, 1, 1\}$ ,  $0 \leq n \leq 2$ , 求线性卷积和 $y(n)$ 。

解：

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 & & \times & & & & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 \hline
 1 & 3 & 6 & 9 & 12 & 9 & 5
 \end{array}
 \end{array}$$



## 线性卷积的conv函数

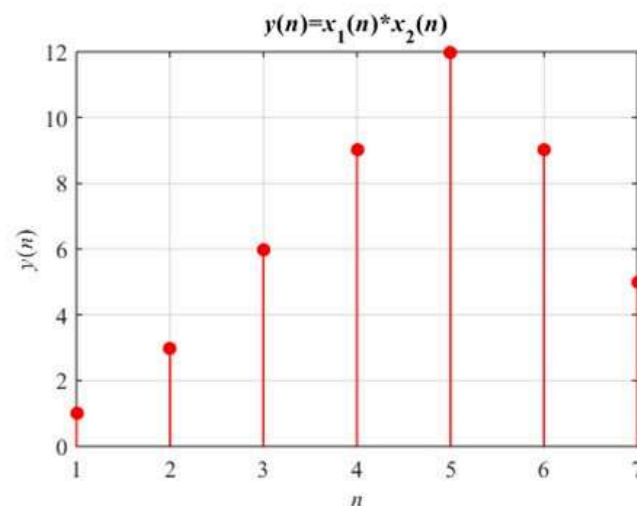
- 用conv函数也可获得两个离散序列的线性卷积：

$$y = \text{conv}(x_1, x_2)$$

- 例1：已知序列 $x_1(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $0 \leq n \leq 4$  和序列 $x_2(n) = \{1, 1, 1\}$ ,  $0 \leq n \leq 2$ , 求线性卷积和 $y(n)$ 。

```
clc; clear; close all;  
x1 = [1,2,3,4,5];  
x2 = [1,1,1];  
ylin = conv(x1,x2);  
figure(1);  
stem(ylin,'fill','r','linewidth',1.0);  
xlabel('\itn'); ylabel('\ity(\itn)');  
title('\ity(\itn)=\itx_1(\itn)  
*\itx_2(\itn)');
```

Workspace	
Name	Value
x1	[1,2,3,4,5]
x2	[1,1,1]
ylin	[1,3,6,9,12,9,5]



2024/11/11

数字信号处理实验

7

## 圆周卷积的定义

- 设有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ ,长度分别为 $N_1$ 和 $N_2$ ,  $N = \max[N_1, N_2]$ 。序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 $N$ 点圆周卷积为:

$$\begin{aligned} y(n) &= \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right] R_N(n) = x_1(n) \circledast x_2(n) \\ &= \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N \right] R_N(n) = x_2(n) \circledast x_1(n) \end{aligned}$$

**注意：圆周卷积的序列长度为 $N$**



## 圆周卷积的过程

- **圆周翻转**：先在坐标轴 $k$ 上画出 $x(k)$ 和 $h(k)$ ，将 $h(k)$ 以纵坐标为对称轴折叠成 $h(-k)$ ，然后用mod函数圆周翻转成 $h((-k))_N$ 。
- **圆周平移**：将 $h((-k))_N$ 圆周移位 $n$ ，得 $h((n-k))_N$ 。
- **加权**：将 $h((n-k))_N$ 和 $x(k)$ 的对应取样值相乘。
- **叠加**：把所有的乘积累加起来，即得 $y(n)$ 。

# 圆周卷积的计算

- 例2: 已知序列 $x_1(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $0 \leq n \leq 4$  和序列 $x_2(n) = \{1, 1, 1\}$ ,  $0 \leq n \leq 2$ , 求 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的5点、6点、7点、8点圆周卷积。

解:

	k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
	$x_2(-k)$	0	0	1	1	1					
	$x_1(k)$					1	2	3	4	5	
5点	$x_3(k)$					1	0	0	1	1	
$n=0$	$x_4(n-k)$					1	0	0	1	1	$y(0)=10$
$n=1$	$x_4(n-k)$					1	1	0	0	1	$y(1)=8$
$n=2$	$x_4(n-k)$					1	1	1	0	0	$y(2)=6$
$n=3$	$x_4(n-k)$					0	1	1	1	0	$y(3)=9$
$n=4$	$x_4(n-k)$					0	0	1	1	1	$y(4)=12$

# 圆周卷积的计算

- 例2: 已知序列 $x_1(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $0 \leq n \leq 4$  和序列 $x_2(n) = \{1, 1, 1\}$ ,  $0 \leq n \leq 2$ , 求 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的5点、6点、7点、8点圆周卷积。

解:

	k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
	$x_2(-k)$	0	0	0	1	1	1						
	$x_1(k)$						1	2	3	4	5	0	
6点	$x_3(k)$						1	0	0	0	1	1	
$n=0$	$x_4(n-k)$						1	0	0	0	1	1	$y(0)=6$
$n=1$	$x_4(n-k)$						1	1	0	0	0	1	$y(1)=3$
$n=2$	$x_4(n-k)$						1	1	1	0	0	0	$y(2)=6$
$n=3$	$x_4(n-k)$						0	1	1	1	0	0	$y(3)=9$
$n=4$	$x_4(n-k)$						0	0	1	1	1	0	$y(4)=12$
$n=5$	$x_4(n-k)$						0	0	0	1	1	1	$y(5)=9$

# 圆周卷积的计算

- 例2: 已知序列 $x_1(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $0 \leq n \leq 4$  和序列 $x_2(n) = \{1, 1, 1\}$ ,  $0 \leq n \leq 2$ , 求 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的5点、6点、7点、8点圆周卷积。

解:

	k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	
	$x_2(-k)$	0	0	0	0	1	1	1							
	$x_1(k)$							1	2	3	4	5	0	0	
7点	$x_3(k)$							1	0	0	0	0	1	1	
$n=0$	$x_4(n-k)$							1	0	0	0	0	1	1	$y(0)=1$
$n=1$	$x_4(n-k)$							1	1	0	0	0	0	1	$y(1)=3$
$n=2$	$x_4(n-k)$							1	1	1	0	0	0	0	$y(2)=6$
$n=3$	$x_4(n-k)$							0	1	1	1	0	0	0	$y(3)=9$
$n=4$	$x_4(n-k)$							0	0	1	1	1	0	0	$y(4)=12$
$n=5$	$x_4(n-k)$							0	0	0	1	1	1	0	$y(5)=9$
$n=6$	$x_4(n-k)$							0	0	0	0	1	1	1	$y(6)=5$



# 圆周卷积的计算

- 例2: 已知序列 $x_1(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $0 \leq n \leq 4$  和序列 $x_2(n) = \{1, 1, 1\}$ ,  $0 \leq n \leq 2$ , 求 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的5点、6点、7点、8点圆周卷积。

解:

	k	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	
	$x_2(-k)$	0	0	0	0	0	1	1	1								
	$x_1(k)$								1	2	3	4	5	0	0	0	
8点	$x_3(k)$								1	0	0	0	0	0	1	1	
$n=0$	$x_4(n-k)$								1	0	0	0	0	0	1	1	$y(0)=1$
$n=1$	$x_4(n-k)$								1	1	0	0	0	0	0	1	$y(1)=3$
$n=2$	$x_4(n-k)$								1	1	1	0	0	0	0	0	$y(2)=6$
$n=3$	$x_4(n-k)$								0	1	1	1	0	0	0	0	$y(3)=9$
$n=4$	$x_4(n-k)$								0	0	1	1	1	0	0	0	$y(4)=12$
$n=5$	$x_4(n-k)$								0	0	0	1	1	1	0	0	$y(5)=9$
$n=6$	$x_4(n-k)$								0	0	0	0	1	1	1	0	$y(6)=5$
$n=7$	$x_4(n-k)$								0	0	0	0	0	1	1	1	$y(7)=0$

# 圆周卷积的计算

- 例2: 已知序列 $x_1(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $0 \leq n \leq 4$  和序列 $x_2(n) = \{1, 1, 1\}$ ,  $0 \leq n \leq 2$ , 求 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的5点、6点、7点、8点圆周卷积。

解:

			1	2	3	4	5	
	×				1	1	1	
<hr/>								
			1	2	3	4	5	
		1	2	3	4	5		
	1	2	3	4	5			
<hr/>								
	1	3	6	9	12	9	5	
	9	5						
<hr/>								
	10	8	6	9	12			

			1	2	3	4	5	
	×				1	1	1	
<hr/>								
			1	2	3	4	5	
		1	2	3	4	5		
	1	2	3	4	5			
<hr/>								
	1	3	6	9	12	9	5	
	5							
<hr/>								
	6	3	6	9	12	9		



# 圆周卷积的计算

- 例2: 已知序列 $x_1(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $0 \leq n \leq 4$  和序列 $x_2(n) = \{1, 1, 1\}$ ,  $0 \leq n \leq 2$ , 求 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的5点、6点、7点、8点圆周卷积。

解:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc}
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 & \times & & & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 \hline
 1 & 3 & 6 & 9 & 12 & 9 & 5 \quad | \\
 \hline
 1 & 3 & 6 & 9 & 12 & 9 & 5
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc}
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 & \times & & & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 \hline
 1 & 3 & 6 & 9 & 12 & 9 & 5 & 0 \quad | \\
 \hline
 1 & 3 & 6 & 9 & 12 & 9 & 5 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

# 圆周卷积的计算

- 例2: 已知序列 $x_1(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $0 \leq n \leq 4$  和序列 $x_2(n) = \{1, 1, 1\}$ ,  $0 \leq n \leq 2$ , 求 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的5点、6点、7点、8点圆周卷积。

解:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \\ y[4] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1[0] & x_1[4] & x_1[3] & x_1[2] & x_1[1] \\ x_1[1] & x_1[0] & x_1[4] & x_1[3] & x_1[2] \\ x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & x_1[4] & x_1[3] \\ x_1[3] & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & x_1[4] \\ x_1[4] & x_1[3] & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2[0] \\ x_2[1] \\ x_2[2] \\ x_2[3] \\ x_2[4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \\ y[4] \\ y[5] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1[0] & x_1[5] & x_1[4] & x_1[3] & x_1[2] & x_1[1] \\ x_1[1] & x_1[0] & x_1[5] & x_1[4] & x_1[3] & x_1[2] \\ x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & x_1[5] & x_1[4] & x_1[3] \\ x_1[3] & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & x_1[5] & x_1[4] \\ x_1[4] & x_1[3] & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] & x_1[5] \\ x_1[5] & x_1[4] & x_1[3] & x_1[2] & x_1[1] & x_1[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2[0] \\ x_2[1] \\ x_2[2] \\ x_2[3] \\ x_2[4] \\ x_2[5] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2024/11/11

数字信号处理实验

16

## 圆周卷积的circonvtim函数

- 例2: 已知序列 $x_1(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $0 \leq n \leq 4$  和序列 $x_2(n) = \{1, 1, 1\}$ ,  $0 \leq n \leq 2$ , 求 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的5点、6点、7点、8点圆周卷积。

```
clc; clear; close all;
x1 = [1,2,3,4,5]; x2 = [1,1,1];
y1 = circonvtim(x1,x2,5); %5点循环/圆周卷积
y2 = circonvtim(x1,x2,6); %6点循环/圆周卷积
y3 = circonvtim(x1,x2,7); %7点循环/圆周卷积
y4 = circonvtim(x1,x2,8); %8点循环/圆周卷积
```

Workspace	
Name	Value
x1	[1,2,3,4,5]
x2	[1,1,1]
y1	[10,8,6,9,12]
y2	[6,3,6,9,12,9]
y3	[1,3,6,9,12,9,5]
y4	[1,3,6,9,12,9,5,0]

```
figure(1);
subplot(4,1,1); stem(y1,'fill','g','linewidth',1.0);
xlabel('\itn'); ylabel('\ity_1(\itn)'); axis([1 8 0 15]);
title('\ity_1(\itn)=\itx_1(\itn) \textcircled{5} \itx_2(\itn)');
subplot(4,1,2); stem(y2,'fill','b','linewidth',1.0);
xlabel('\itn'); ylabel('\ity_2(\itn)'); axis([1 8 0 15]);
title('\ity_2(\itn)=\itx_1(\itn) \textcircled{6} \itx_2(\itn)');
subplot(4,1,3); stem(y3,'fill','r','linewidth',1.0);
xlabel('\itn'); ylabel('\ity_3(\itn)'); axis([1 8 0 15]);
title('\ity_3(\itn)=\itx_1(\itn) \textcircled{7} \itx_2(\itn)');
subplot(4,1,4); stem(y4,'fill','m','linewidth',1.0);
xlabel('\itn'); ylabel('\ity_4(\itn)'); axis([1 8 0 15]);
title('\ity_4(\itn)=\itx_1(\itn) \textcircled{8} \itx_2(\itn)');
```

## 圆周卷积的circonvtim函数

### ■ 例2:

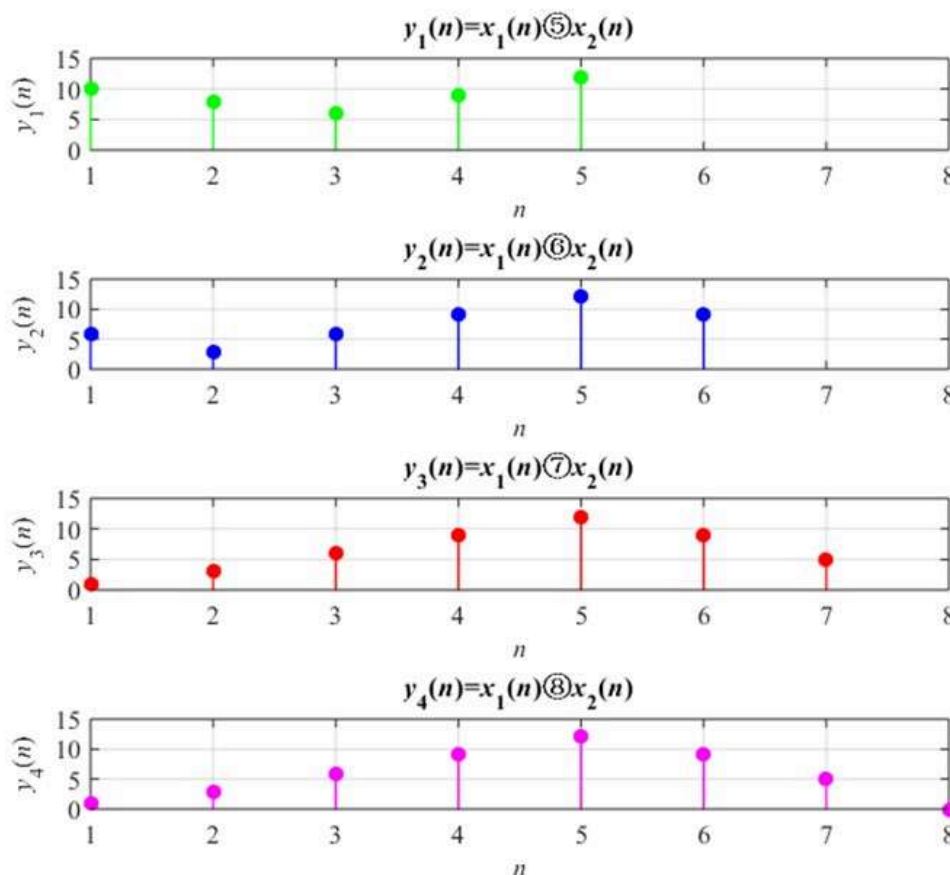
```
function y=circonvtim(x1,x2,N)
n=0:N-1;
x1=[x1,zeros(1,N-length(x1))];
x2=[x2,zeros(1,N-length(x2))];
x3=x2(mod(-n,N)+1);
for m=0:N-1
    x4=cirshfft(x3,m,N);
    x5=x1.*x4;
    y(m+1)=sum(x5);
end
```

```
function y=cirshfft(x,m,N)
if length(x)>N
    error
    ('N must be >=the length of x');
end
x=[x,zeros(1,N-length(x))];
n=0:N-1;
n=mod(n-m,N);
y=x(n+1);
```

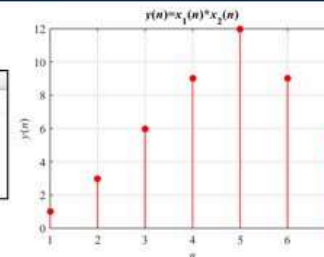


# 圆周卷积的circonvtim函数

## ■ 例2:



Name	Value
x1	[1,2,3,4,5]
x2	[1,1,1]
ylin	[1,3,6,9,12,9,5]



Name	Value
x1	[1,2,3,4,5]
x2	[1,1,1]
y1	[10,8,6,9,12]
y2	[6,3,6,9,12,9]
y3	[1,3,6,9,12,9,5]
y4	[1,3,6,9,12,9,5,0]

思考：线性卷积和圆周卷积的关系？

1.  $N \geq N_1 + N_2 - 1$ , 可替代。
2.  $N < N_1 + N_2 - 1$ , 序列混叠误差。

# 总结

- ◆ 线性卷积
  - 竖乘法、表格法
- ◆ 圆周卷积
  - 竖乘法、矩阵计算、表格法
- ◆ 线性卷积和圆周卷积之间的关系
  - $N \geq N_1 + N_2 - 1$ , 线性卷积可由圆周卷积替代。
  - $N < N_1 + N_2 - 1$ , 序列混叠误差。因为N点圆周卷积是线性卷积以N为周期的周期延拓序列的主值序列。



# 操作验收习题

4.1 已知序列 $x_1(n)=\{2,1,1,2\}$ 和 $x_2(n)=\{1,-1,-1,1\}$

(1): 计算圆周卷积 $x_1(n) \circledast x_2(n)$ ,  $N=4, 7$  和  $8$ ;

(2): 计算线性卷积 $x_1(n) * x_2(n)$

(3): 利用计算结果, 确定所需要的最小 $N$ 值使得在 $N$ 点区间内有相同的线性卷积与圆周卷积。

# 实验报告作业题和思考题

◆ 实验报告作业题：4.1 已知序列 $x_1(n) = \{2, 1, 1, 2\}$ 和 $x_2(n) = \{1, -1, -1, 1\}$

(1): 计算圆周卷积 $x_1(n) \circledast x_2(n)$ ,  $N=4, 7$  和  $8$ ;

(2): 计算线性卷积 $x_1(n) * x_2(n)$

(3): 利用计算结果, 确定所需要的最小 $N$ 值使得在 $N$ 点区间内有相同的线性卷积与圆周卷积。

◆ 思考题：周期卷积、线性卷积、圆周卷积