第五次作业提示

3. (1). 对于任意向量 X，$X^TAX = X^TBB^TX = \|B^TX\|^2 \geq 0$

如果 $X^TAX = \|B^TX\|^2 = 0$，则有 $B^TX = 0$。由于 B 是非奇异的，$X=0$。

所以 $A = BB^T$ 是正定

(2). 与上面证明相似，转置T改为H即可。

4. 利用"行列式等于特征值之积"这一事实。

设λ为 $I_n + UV^T$ 的特征值，W 为其特征向量，即

$$(I_n + UV^T)W = \lambda W$$

因而有 $UV^TW = (\lambda - 1)W$。由此有两种情况。

(1). $V^TW = 0$，$\lambda = 1$。即 W 与 V 正交，$\lambda = 1$。

由于 W 与 V 正交的向量组成 $n-1$ 维空间，因而 $\lambda=1$ 要有 $n-1$ 重。

(2). $W = U/\|U\|$，$\lambda - 1 = \|U\| \cdot V^TW$。

从而有 $\lambda = 1 + \|U\| \cdot V^TW = 1 + \|U\| \cdot V^T \frac{U}{\|U\|} = 1 + V^TU$
$= 1 + U^TV$

所以，$\det(I_n + UV^T) = \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{n-1}(1+U^TV) = 1 + U^TV$。

5. (1). 由于 λ_i 为 A 的特征值，则存在 u_i，使得 $Au_i = \lambda_i u_i$

所以，$(I_n + cA)u_i = u_i + cAu_i = u_i + \lambda_i c u_i$

$= (1+\lambda_i c) u_i$

故 $1 + c\lambda_i$ 为矩阵 $(I_n + cA)$ 的特征值.

反之，假设 μ_i 为矩阵 $I_n + cA$ 的特征值. 则存在向量 v_i. 使得 $(I_n + cA)v_i = \mu_i v_i$

故有 $cAv_i = (\mu_i - 1)v_i$.

可以假设 $c \neq 0$. 从而有 $Av_i = \frac{1}{c}(\mu_i - 1)v_i$.

即 $\frac{1}{c}(\mu_i - 1)$ 为矩阵 A 的特征值. 故存在 λ_j，使得 $\frac{1}{c}(\mu_i - 1) = \lambda_j$. 即 $\mu_i = 1 + c\lambda_j$

(2). 与 (1) 同样可证.

7. (1). 由于 $A\cdot A^{-1}=I_n$. 故 $\det(A\cdot A^{-1})=\det(I_n)=1$

又由于 $\det(AA^{-1})=\det(A)\cdot\det(A^{-1})$

故有 $\det(A^{-1})=(\det(A))^{-1}$.

(2). 由于 $AA^{-1}=I_n$. 故有 $(A^{-1})^{-1}=A$

~~(3). 由于 $A^H(A^H)^{-1}=I_n$. 故 $(A^H)^{-1}=I$~~

~~又由于 $(A^H)^{-1}=(A^{-1})^H$~~

(3). 由于 $AA^{-1}=I_n$. 故有 $(AA^{-1})^H=(I_n)^H=I_n$

而 $(AA^{-1})^H=(A^{-1})^H\cdot A^H$, 得 $(A^{-1})^HA^H=I_n$

所以, $(A^H)^{-1}=(A^{-1})^H$.

(4). 利用(3)可得.

8. 由于λ是A的特征值，故存在向量u，使得 $Au=\lambda u$

从而 $A^{-1}\cdot Au=A^{-1}(\lambda u)$. 即 $A^{-1}u=\frac{1}{\lambda}u$。

反之，μ为A^{-1}的特征值，由上述可知，$\frac{1}{\mu}$为$(A^{-1})^{-1}=A$ 的特征值。

10. 证明：假设 Q_1, Q_2 为正交矩阵. 即 $Q_1^TQ_1=Q_2^TQ_2=I_n$

从而有 $(Q_1Q_2)^T(Q_1Q_2)=Q_2^TQ_1^T\cdot Q_1Q_2=Q_2^TQ_2=I_n$.

故 Q_1Q_2 为正交矩阵.

多个正交矩阵之积，情况也同样可以证明。

11. 证明：$\left((A+B)(A-B)^{-1}\right)^T\left((A+B)(A-B)^{-1}\right)$

$=\left((A-B)^{-1}\right)^T(A+B)^T(A+B)(A-B)^{-1}$

$=\left((A-B)^T\right)^{-1}(A^T+B^T)(A+B)(A-B)^{-1}$

$=(A^T-B^T)^{-1}(A-B)(A+B)(A-B)^{-1}$

$$= (A+B)^{-1}(A^2-BA+AB-B^2)(A-B)^{-1}$$

$$= (A+B)^{-1}(A^2-B^2)(A-B)^{-1} = (A+B)^{-1}(A+B)(A-B)(A-B)^{-1}$$

$$= I_n$$

12. 证明：(1) ⇒ (2). U是酉阵，即 $U^HU=I_n$. 故U可逆

且 $U^{-1}=U^H$

(2) ⇒ (3). 由于 $U^H=U^{-1}$，故有 $U^HU=I_n$, $UU^H=I_n$.

(3) ⇒ (4) 由于 $UU^H=I_n$. 故有 U^H为酉阵。

(4) ⇒ (1). U^H为酉阵，故 $U^H\cdot(U^H)^H=I_n$，即 $U^HU=I_n$.

故U为酉阵。

13. 用归纳法可证.

14. (1). 由于 $A^2=A$. 故有 $\lambda^2=\lambda$. 从而有 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$.

(2). $\det(A^2)=(\det(A))^2=\det(A)$. 故有 $\det(A)=1$ 或 $\det(A)=0$.

如果 $\det(A)=1$，则由(1)可知，A的特征值全为1。从而A为单位阵。从此可知，非单位阵的幂等矩阵的行列式为零。故为奇异矩阵。

(3). rank(A) 为非零特征值的个数，而 tr(A) 为矩阵 ~~三取~~ 特征值的之和，由(1)可知 rank(A) = tr(A).

(4). $(A^H)^2 = A^H \cdot A^H = (A \cdot A)^H = (A^2)^H = A^H$.

15. $P^H = (P_1 P_2)^H = P_2^H P_1^H = P_2 P_1 = P_1 P_2 = P$

$P^2 = (P_1 P_2)^2 = P_1 P_2 \cdot P_1 P_2 = P_1 P_1 P_2 P_2 = P_1^2 P_2^2 = P_1 P_2 = P$

故 P 为投影算子.

(投影算子 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $P^H = P$, $P^2 = P$)

可以证明. $range(P) = range(P_1) \cap range(P_2)$.

$Ker(P) = Ker(P_1) + Ker(P_2)$.