第六次作业

1. 设 V 是所以次数小于 n 的实系数多项式组成的实线性空间，$U=\left\{f(x)\in V: f(1)=0\right\}$。证明 U 是 V 的子空间，并求 V 的一个补空间。

2. 设 $U=\left[(1,2,3,6)^T,(4,-1,3,6)^T,(5,1,6,12)^T\right]$，$W=\left[(1,-1,1,1)^T,(2,-1,4,5)^T\right]$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的两个子空间，
（1）求 $U\cap W$ 的基；
（2）扩充 $U\cap W$ 的基，使其成为 U 的基；
（3）扩充 $U\cap W$ 的基，使其成为 W 的基；
（4）求 $U+W$ 的基。

3. 设 $U=\left\{(x,y,z,w): x+y+z+w=0\right\}$，$W=\left\{(x,y,z,w): x-y+z-w=0\right\}$。求 $U\cap W$，$U+W$ 的维数与基。

4. 设 A，B 分别是 $n\times m, m\times p$ 矩阵，V 是齐次线性方程组 $xAB=0$ 的解空间。证明 $U=\left\{y=xA: x\in V\right\}$ 是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间，并求 U 的维数。

5. 分别求导数运算 $\partial: f(x)\mapsto f'(x)$ 在标准基 $1,x,x^2,\dots,x^{n-1}$ 与基 $1,(x-a),(x-a)^2,\dots,(x-a)^{n-1}$ 下的矩阵。问 ∂ 的行列式与迹是多少？解释之。

6. 设 $V=\mathbb{R}\left[x\right]_n$，其上的内积为
$$(f(x),g(x))=\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$$
设 $U=\left\{f(x)\in V: f(0)=0\right\}$.
(1) 证明 U 是 V 的一个 $n-1$ 维子空间，并求 U 的一组基；
(2) 当 $n=3$ 时，求 U 的正交补 $U^\perp$。

7. 设 α_0 是欧式空间 V 中的单位向量，$\sigma(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\alpha_0)\alpha_0, \alpha\in V$。证明
(1) α 是线性变换；
(2) α 是正交变换。

8. （复数、位似与旋转矩阵）设 σ 是 $\mathbb{C}$ 到自身的线性变换，其定义为
$$\sigma: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$
其中，

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

将$(x,y)^T$记为普通复数$x+y\mathrm{i}$，证明$\sigma((x,y)^T)=(a-b\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})$。请解释之。

9. 已知$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，线性空间$V=\left\{X=(x_{ij})\in M_2(\mathbb{R}):\mathrm{tr}X=0\right\}$的线性变换$\sigma$为$\sigma(X)=B^TX-X^TB, X\in V$。试求$V$的一个基，使得$\sigma$在该基下的矩阵尽可能简单。

10. 设A是n阶正规矩阵，x是任意复数。证明

(1) $A-xI$也是正规矩阵；

(2) 对于任意向量x，向量Ax与A^Hx的长度相同；

(3) A的任一特征向量都是A^H的特征向量；

(4) A的属于不同特征值的特征向量正交。

11. 设A是正规矩阵，证明

(1) A是 Hermite 矩阵$\Leftrightarrow$ A的特征值全为实数；

(2) A是酉阵$\Leftrightarrow$ A的特征值的模都是 1；

(3) A是幂等阵$\Leftrightarrow$ A的特征值只能是 0 与 1；

(4) 若A的全部特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$，则$AA^H$与$A^HA$的全部特征值为$|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,\ldots,|\lambda_n|^2$。此结论对非正规矩阵成立吗？

12. 设A是正规矩阵，证明

(1) 若A是幂等阵，则A是 Hermite 矩阵；

(2) 若$A^3=A^2$，则$A^2=A$；

(3) 若A又是 Hermite 矩阵，而且也是一个幂幺阵（即$A^k=I$），则A是对合阵（即$A^2=I$）。

13. 设变换$\sigma:\sigma x=x-a(x,w)w,\forall x\in\mathbb{R}^n$，其中$w$为长度为 1 的向量。问$a$取何值时，$\sigma$为正交变换？如果$w$是任意向量，你的结论又如何？

14. 设$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$的秩为$r>0$，$A$的奇异值分解为$A=U\mathrm{diag}(s_1,\ldots,s_r,0,\ldots,0)V^H$，求矩阵

$B=\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$的奇异值分解。

15. 假设$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$为可逆矩阵，求$A^{-1}$的奇异值分解。

16. 令A是一个$m\times n$矩阵，并且$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$是矩阵$A^H A$的特征值，相对应的特征向量为$u_1,\cdots,u_n$。证明$A$的奇异值$\sigma_i$等于范数$\|Au_i\|$，即$\sigma_i=\|Au_i\|,i=1,\cdots,n$。

17. 令$\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_n$和$u_1,u_2,\cdots,u_n$分别是矩阵$A^H A$的特征值和特征向量。假定矩阵$A$有$r$个非零的奇异值，证明$\{Au_1,Au_2,\cdots,Au_r\}$是列空间$col(A)$的一组正交基，并且$rank(A)=r$。

18. 用矩阵$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ $(m\geq n)$的奇异向量表示$\begin{bmatrix} O & A^T \\ A & O \end{bmatrix}$的特征向量。