第五次作业

1、当α取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} (\alpha+3)x_1+x_2+2x_3=\alpha \\ 3(\alpha+1)x_1+\alpha x_2+(\alpha+3)x_3=3 \\ \alpha x_1+(\alpha-1)x_2+x_3=\alpha \end{cases}$$

有唯一解，无解和无穷多解。

2、已知向量组

$$a_1=\begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} \quad a_2=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad a_3=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} 1 \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

试分别求出满足以下条件的a, b, c值

（1） b可由a_1, a_2, a_3线性表示，且唯一。

（2） b不能由a_1, a_2, a_3线性表示。

（3） b可由a_1, a_2, a_3线性表示，但表示不唯一。

3、证明：

（1） 若B为实的非奇异方阵，则$A=BB^T$正定。

（2） 若 $\det(c)\neq 0$,则$A=CC^T$ Hermite 正定。

4、证明$\det(I_n+UV^T)=1+U^TV$，其中U与V为 n 维列向量。

5、令矩阵 n 阶方阵 A 的特征值为λ_i, $(i=1,2,\ldots,n)$, c为常数。证明：

（1） 矩阵I_n+cA的特征值为 $1+c\lambda_i$, $i=(1,2,\ldots,n)$.

（2） 矩阵$A-cI$的特征值为阵λ_i-c.

6、设$n\times n(n>3)$矩阵A有如下形式

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & a & \ldots & a \\ a & 1 & a & \ldots & a \\ a & a & 1 & \ldots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

当a取何值时，矩阵A的秩为$n-1$；

7、证明可逆矩阵A有如下性质：

（1） $\det(A^{-1})=(\det(A))^{-1}$

（2） $(A^{-1})^{-1}=A$

（3） $(A^{H})^{-1}=(A^{-1})^{H}$

（4） 若$A^{H}=A$,则$(A^{-1})^{H}=A^{-1}$

8、证明，如果$\lambda\neq 0$是可逆矩阵A的特征值，则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1}的特征值，反之亦然。

9、若$Y=(AX+B)(CX+D)^{-1}$, 试用Y表示X.

10、证明：多个正交矩阵的乘积仍然是正交矩阵。

11、令A是实对称矩阵，B为实反对称矩阵（即$B^{T}=-B$）, 且$AB=BA$。证明：若$A-B$是非奇异的，则

$$(A+B)(A-B)^{-1}$$

是正交矩阵。

12、证明下列叙述等价：

（1）U是酉矩阵

（2）U是非奇异的，并且$U^{H}=U^{-1}$

（3）$UU^{H}=U^{H}U=I$

（4）U^{H}是酉矩阵

13、假设A与S是$n\times n$的矩阵，且S非奇异，证明：

$$(S^{-1}AS)^{k}=S^{-1}A^{k}S, k=1,2,3,\ldots.$$

14、证明幂等矩阵 $A^{2}=A$具有以下性质：

（1）特征值只取 1 和 0 两个数值。

（2）所有幂等矩阵 A（单位矩阵除外）都是奇异矩阵。

（3）$rank(A)=tr(A)$.

（4）A^{H}也是幂等矩阵。

15、证明：若投影算子P_1和P_2是可交换的，即$P_1P_2=P_2P_1$, 则它们的乘积

$P=P_1P_2$是一个投影算子，并求P的值域$range(P)$和核空间$\ker(P)$.

16、已知

$$U_1 = (-1, 2, -4, 3, 1)^T$$

$$U_2 = (5, 6, 2, -2, -1)^T$$

$$U = (U_1, U_2)$$

令$v = (-31, -18, -34, 28, 11)^T$

（1） 问向量v是否在空间$\langle U \rangle = span\{u_1, u_2\}$中？

（2） 在空间$\langle U \rangle$中找到一个向量v_0, 使之与v的距离最小。

即求 $v_0 = \underset{x \in \langle U \rangle}{\operatorname{argmin}} \|v - x\|$