第二章 随机信号概论

本章要点：

1、随机过程的概念

可理解为依赖于时间**t**的一族随机变量或随机试验得到的一族时间**t**的函数。

2、随机过程的概率分布

$$p_X(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)$$

$$=\frac{\partial^2 F_X(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n}$$

3、随机过程的数字特征

数学期望 $m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x;t) dx$

均方值 $\Phi_X^2(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x;t) dx$

方差 $\sigma_X^2(t) = D[X(t)] = E[\{X(t) - m(t)\}^2]$

自相关函数 $\boxed{R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1) X(t_2)]}$

协方差函数

$$C_X(t_1, t_2) = E[\{X(t_1) - m_X(t_1)\}\{X(t_2) - m_X(t_2)\}]$$

随机过程**X(t)**和**Y(t)**的互相关函数

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]$$

互协方差函数

$$C_{XY}(t_1,t_2)=E[\{X(t_1)-m_X(t_1)\}\{Y(t_2)-m_Y(t_2)\}]$$

两随机过程**X(t)**和**Y(t)**之间的统计独立、不相关和正交概念

随机过程的特征函数

4、随机序列及其统计特性

重点及要求：

会计算随机信号的概率分布及各种数字特征；

对两随机过程**X(t)**和**Y(t)**之间的统计独立、不相关和正交概念有明确认识；

2.2

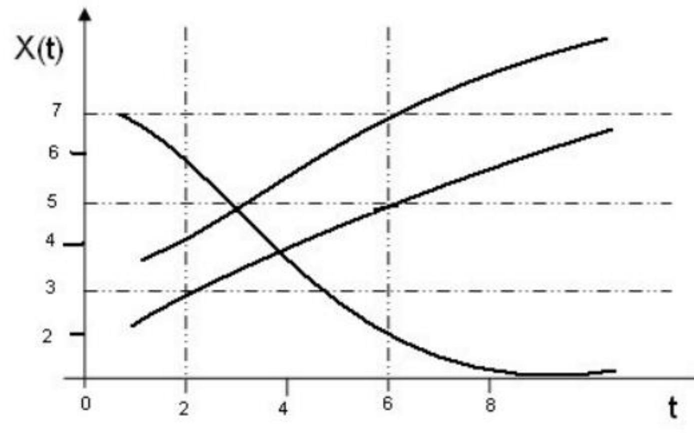
解：（1）由于随机过程X(t)的样本具有确定的函数形式（ 为常数1，2，3），所以该随机过程是确定性随机过程。

（2）显然，任意时刻对应的随机变量是离散随机变量，且具有相同的分布，所以概率密度为：

$$p(x,t)=0.6\delta(x-1)+0.3\delta(x-2)+0.1\delta(x-3)$$

2.6 解:由图可得下表

	ξ_1	ξ_2	ξ_3
X(2)	3	4	6
X(6)	5	7	2



所以:

$$E[X(2)]=\frac{1}{3}(3+4+6)=\frac{13}{3};$$

$$E[X(6)]=\frac{1}{3}(5+7+2)=\frac{14}{3};$$

$$E[X(2)X(6)]=\frac{1}{3}(3\times5+4\times7+6\times2)=\frac{55}{3};$$

出现一个典型的错误:

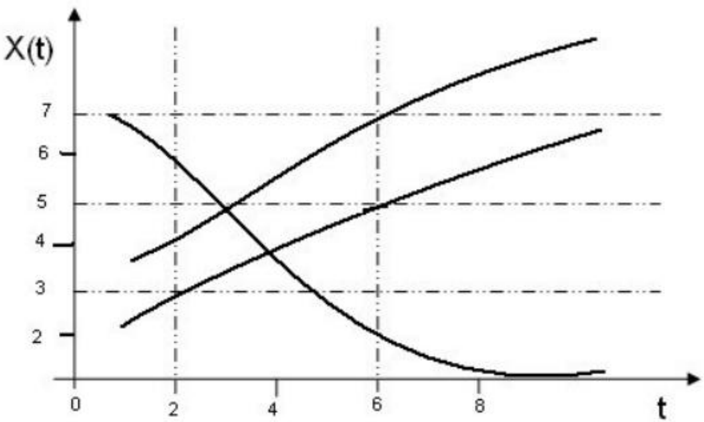
$$E[X(2)X(6)]=E[X(2)]E[X(6)]=\frac{182}{9};$$

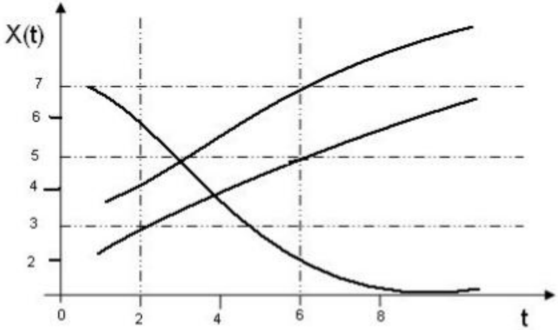
由定义可知： $F_X(x,2)=P(X\le x,2);$

显然在**2**这一时刻的可能取值为**3**，**4**，**6**；

可得：

$$P(X\le x,2)=\begin{cases}0, & x<3\\ 1/3, & 3\le x<4\\ 2/3, & 4\le x<6\\ 1, & x\ge 6\end{cases}$$





同理可得：

$$F_X(x;6) = P(X \le x, 6) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 1/3, & 2 \le x < 5 \\ 2/3, & 5 \le x < 7 \\ 1, & x \ge 7 \end{cases}$$

问题

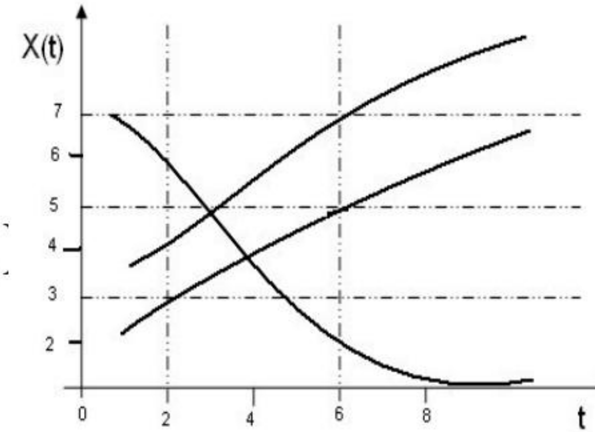
$$F_X(x;2) = P\{X(2) \le x\}$$

$$= \begin{cases} 3; & \frac{1}{3} \\ 4; & \frac{2}{3} \\ 6; & 1 \end{cases} \qquad = \begin{cases} \frac{1}{3}; & x \le 3 \\ \frac{2}{3}; & x \le 4 \\ 1; & x \le 6 \end{cases}$$

$$F_X(x;2) = P\{X(2) \le x\} = \int_0^x p(x)dx = \frac{1}{3}x$$

$$F_X(x_1,x_2;2,6)=P\{X(2)\le x_1, X(6)\le x_2\};$$

$$=P\{(X(2)\le x_1 \bigcap X(6)\le x_2$$



用表格来表示所求的联合分布：

x_2 \ x_1	$x_1<3$	$3\le x_1<4$	$4\le x_1<6$	$x_1\ge 6$
$x_2<2$	0	0	0	0
$2\le x_2<5$	0	0	0	1/3
$5\le x_2<7$	0	1/3	1/3	2/3
$x_2\ge 7$	0	1/3	2/3	1

问题

x_2 \ x_1	$x_1<3$	$3\le x_1<4$	$4\le x_1<6$	$x_1\ge 6$
$x_2<2$	0	0	0	0
$2\le x_2<5$	0	1/9	2/9	1/3
$5\le x_2<7$	0	2/9	4/9	2/3
$x_2\ge 7$	0	1/3	2/3	1

$$P(X\le x,2)=\begin{cases}0, & x<3\\ \frac{1}{3}, & 3\le x<4\\ \frac{2}{3}, & 4\le x<6\\ 1, & x\ge 6\end{cases}$$

$$P(X\le x,6)=\begin{cases}0, & x<2\\ \frac{1}{3}, & 2\le x<5\\ \frac{2}{3}, & 5\le x<7\\ 1, & x\ge 7\end{cases}$$

2.7 解：**(1)** 由题意可知

$$p(\xi_1) = p(\xi_2) = p(\xi_3) = \frac{1}{3};$$

所以 $E[X(t)] = p(\xi_1)X(t,\xi_1) + p(\xi_2)X(t,\xi_2) + p(\xi_3)X(t,\xi_3)$

$$= \frac{1}{3}(1 + \sin t + \cos t)$$

（2）解：由定义可知：

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)];$$

由题知：

	ξ_1	ξ_2	ξ_3
$X(t_1)$	1	$\sin t_1$	$\cos t_1$
$X(t_2)$	1	$\sin t_2$	$\cos t_2$

所以：

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)];$$

$$=\frac{1}{3}(1+\sin t_1\sin t_2+\cos t_1\cos t_2);$$

2.8 解：由定义出发：

$$E[Y(t)] = E[X(t) + f(t)];$$

$$= E[X(t)] + E[f(t)];$$

$$= m_X(t) + f(t)$$

由协方差的定义：

$$C_Y(t_1,t_2) = E\{[Y(t_1) - m_Y(t_1)][Y(t_2) - m_Y(t_2)]\}$$

$$= E\{[X(t_1) + f(t_1) - m_X(t_1) - f(t_1)]$$

$$[X(t_2) + f(t_2) - m_X(t_2) - f(t_2)]\}$$

$$= E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]\}$$

$$= C_X(t_1,t_2)$$

2.9 解：（1）直接由定义可得：

$$E[X(t)] = E[A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)]$$

$$= E[A]\cos(\omega_0 t) + E[B]\sin(\omega_0 t)$$

$$= 0$$

（2）由自相关函数的定义：

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$= E\{[A\cos\omega_0 t_1 + B\sin\omega_0 t_1][A\cos\omega_0 t_2 + B\sin\omega_0 t_2]\}$$

$$= E[A^2\cos\omega_0 t_1 \cos\omega_0 t_2 + B^2\sin\omega_0 t_1 \sin\omega_0 t_2$$

$$= \sigma^2[\cos\omega_0 t_1 \cos\omega_0 t_1 + \sin\omega_0 t_1 \sin\omega_0 t_2]$$

$$= \sigma^2\cos\omega_0\tau, \text{其中} \tau = t_1 - t_2$$

2.10 解：由均值的定义：

$$E[X(t)]=\int_0^{2\pi}a\cos(\omega_0 t+\varphi)p(\varphi)d\varphi=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega_o t+\varphi)d\varphi$$

$$=0$$

由定义先求出均方值，就可以得到方差：

$$E[X^2(t)]=E[a^2\cos^2(\omega_0 t+\Phi)]$$

$$=E[a^2\frac{1+\cos(2\omega_0 t+2\Phi)}{2}]$$

$$=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2\omega_0 t+2\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{a^2}{2}$$

所以：

$$D[X(t)] = E[X^2(t)] - E[X(t)]^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\ &= E[a^2 \cos(\omega_0 t_1 + \Phi)\cos(\omega_0 t_2 + \Phi)] \\ &= \frac{a^2}{2} E[\cos(\omega_0(t_1 - t_2)) + \cos(\omega_0 t_1 + \omega_0 t_2 + 2\Phi)] \\ &= \frac{a^2}{2}\cos[\omega_0(t_1 - t_2)] + 0 \\ &= \frac{a^2}{2}\cos\tau \quad \text{其中} \ \tau = t_1 - t_2 \end{aligned}$$

2.11 解：

$$
\begin{aligned}
E[X(t)] &= E[A\cos(\omega_0 t+\Phi)] \\
&= E[A]E[\cos(\omega_0 t+\Phi)] \\
&= \int_0^1 ada\int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 t+\varphi)\frac{1}{2\pi}d\varphi \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_X(t_1,t_2) &= E[A^2\cos(\omega_0 t_1+\Phi)\cos(\omega_0 t_2+\Phi)] \\
&= E[A^2]E[\cos(\omega_0 t_1+\Phi)\cos(\omega_0 t_2+\Phi)] \\
&= \frac{1}{6}\cos\omega_0\tau
\end{aligned}
$$

2.12 证明:

$$E[X(t)\frac{dX(t)}{dt}]$$

$$=E[X(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{E[X(t)X(t+\Delta t)]-E[X(t)X(t)]}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{R_X(t,t+\Delta t)-R_X(t,t)}{\Delta t}$$

$$=\frac{dR_X(t,t)}{dt}$$

证毕。

§ 1-2 逻辑代数基础