杭州电子科技大学学生期末考试卷（A）卷

考试课程	概率论与数理统计（2022-2023-1）	考试日期	2023 年　月　日	成 绩	
课程号	A0714040	教师号	***	任课教师姓名	
考生姓名		学号(8 位)	***	年级	专业

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
	15 分	15 分	6 分	6 分	15 分	15 分	8 分	6 分	5 分	9 分
得分										

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

得分	

1、设 A、B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$的充分必要条件是（C）。

（A）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　（B）$P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$　　（D）$P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$

$P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$

2、随机地向长方形区域：$\{0<x<2a,0<y<a\}$(a 为正数)内扔一个质点，质点落在长方形任何区域内的概率与区域面积成正比，则原点与落点的连线与 x 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为（C）。

$P(A)=\frac{1}{2a^2}$

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{1}{4}$　　（C）$\frac{3}{4}$　　（D）$\frac{\pi}{4}$

$\frac{2a^2-\frac{1}{2}a^2}{2a^2}=\frac{\frac{3}{2}a^2}{2a^2}=\frac{3}{4}$

3、对于任意随机变量 X，若 $E(X)$存在，则 $E\{E[E(X)]\}$的值为（B）。

（A）$E^3(X)$　　（B）E(X)　　(C) $E^2(X)$　　（D）D(X)

4、记z_α $(0<\alpha<1)$表示标准正态分布的上α分为点，以下说法正确的是（D）。

（A）$z_\alpha=z_{-\alpha}$　　（B）$z_\alpha=-z_\alpha$　　(C) $z_\alpha=z_{1-\alpha}$　　（D）$z_\alpha=-z_{1-\alpha}$

$P(Z>Z_{1-\alpha})=1-\alpha$
$=1-P(Z>Z_\alpha)$
$=1-P(Z\le -Z_\alpha)$
$=P(Z>-Z_\alpha)$

$-Z_\alpha$　Z_α

故有 $Z_{1-\alpha}=-Z_\alpha$ 即 $Z_\alpha=-Z_{1-\alpha}$

5、设$X_1,X_2,\ldots X_n$为来自总体 X 的一个随机样本，$E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$,为了使 $c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为σ^2的无偏估计，c 的值为（A）。

(A) $\frac{1}{2(n-1)}$　　(B) $\frac{1}{n-2}$　　(C) $\frac{1}{n-1}$　　(D) $\frac{1}{2(n+1)}$

$E(c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2)=\sigma^2$ (因是σ^2的无偏估计)

即 $c\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2=\sigma^2$

注意到 X_{i+1}与 X_i独立同分布

故 $E(X_{i+1}-X_i)^2$
$=E(X_{i+1}^2)-2E(X_{i+1})E(X_i)+E(X_i^2)$
$=\sigma^2+\mu^2-2\mu^2+\sigma^2+\mu^2$
$=2\sigma^2$

故 $c\cdot(n-1)\cdot 2\sigma^2=\sigma^2$

$c=\frac{1}{2(n-1)}$

二、填空题（每空 3 分，共 15 分）

得分	

1、设三次独立试验中，事件 A 出现的概率相等。若已知 A 至少出现一次的概率为$\frac{19}{27}$，则事件 A 的概率 P(A)= $\frac{1}{3}$ 。

一次未出现概率 $(1-p)^3=\frac{8}{27}$

$p=\frac{1}{3}$

2、设随机变量 $X\sim\pi(\lambda),\lambda>0$，且 $P\{X=2\}=2P\{X=1\}$，则λ= 4 。

$P(X=2)=\frac{\lambda^2e^{-\lambda}}{2!}$　$P(X=1)=\frac{\lambda^1e^{-\lambda}}{1!}$

故 $\lambda=4$

3、设连续型随机变量 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases}bx^a, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，其中 $a,b>0$，且 $F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$，则 $a=$ 2 ，$b=$ 3 。

$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_0^1 bx^a dx=\frac{b}{a+1}x^{a+1}\Big|_0^1=\frac{b}{a+1}=1$

$F(\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}bx^a dx=\frac{b}{a+1}x^{a+1}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{b}{a+1}(\frac{1}{2})^{a+1}$

$\Rightarrow (\frac{1}{2})^{a+1}=\frac{1}{8}$

$a=2$
$b=3$

4、设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，$X_1,X_2,\ldots X_{50}$为取自 X 的一个样本，$\bar{X}$表示样本均值，则 $D(\bar{X}-50)=$ $\frac{1}{100}$ 。

$f(x)=\begin{cases}-x, & -1<x<0\\ x, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$y=|x|$

$D(\bar{X}-50)=D(\bar{X})$
$=\frac{D(X)}{n}$

$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{0}x\cdot(-x)dx+\int_0^1 x\cdot x\,dx=-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1$
$=-(-\frac{1}{3}\times(-1))+\frac{1}{3}$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)$
$=\int_{-1}^{0}x^2\cdot(-x$
$+\int_0^1 x^2\cdot x$
$=-\frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{0}$
$=-(-\frac{1}{4}\times 1$
$=\frac{1}{2}$

故 $D(X)=E$
$=$
$D(\bar{X})=$

三、（本题 6 分）

得分	

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{3}$, $P\{X=0\}=P\{Y=0\}=\frac{2}{3}$，定义 $Z=\begin{cases}1, & X+Y 为偶数\\ 0, & X+Y 为奇数\end{cases}$，(1)求(X,Y)的联合分布律;(2)求 Z 的分布律。

解：由 X，Y相互独立，可得联合分布律为

Y \ X	0	1
0	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$P(Z=0)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)$
$=\frac{4}{9}$

$P(Z=1)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)$
$=\frac{5}{9}$

故Z的分布律为

Z	0	1
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$

四、（本题 6 分） | 得分 | |

从大批发芽率为0.9的种子中随机抽取10000粒，试用中心极限定理估计这10000粒种子中发芽粒数不低于8800的概率。（结果用$\Phi(\cdot)$表示）

解：$X \sim b(10000, 0.9)$

用棣莫弗-拉普拉斯定理

$\dfrac{X-10000\times 0.9}{\sqrt{10000\times 0.9\times 0.1}} \overset{近似}{\sim} N(0,1)$

$P(X \geq 8800) = P\left(\dfrac{X-9000}{30} \geq \dfrac{8800-9000}{30}\right)$

$= 1-P\left(\dfrac{X-9000}{30} \leq -\dfrac{20}{3}\right)$

$= 1-\Phi\left(-\dfrac{20}{3}\right)$

$= \Phi\left(\dfrac{20}{3}\right)$

五、（本题 15 分） | 得分 | |

设随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} xe^{-x}\dfrac{1}{(1+y)^2}, & x>0, y>0, \\ 0, & else \end{cases}$

求（1）$f_X(x), f_Y(y)$；(2) X与Y是否相互独立？说明理由。(3) $f_{X|Y}(x|y)$；（4）ρ_{XY}。

解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases}\int_0^{+\infty} xe^{-x}\dfrac{1}{(1+y)^2}\,dy, & x>0 \\ 0, & 其他\end{cases}$

$= \begin{cases} xe^{-x}\left(-\dfrac{1}{1+y}\Big|_0^{+\infty}\right), & x>0 \\ 0, & 其他\end{cases} = \begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0, & 其他\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases}\int_0^{+\infty} xe^{-x}\dfrac{1}{(1+y)^2}\,dx, & y>0 \\ 0, & 其他\end{cases}$

$= \begin{cases}\dfrac{1}{(1+y)^2}\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx, & y>0 \\ 0, & 其他\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{1}{(1+y)^2}, & y>0 \\ 0, & 其他\end{cases}$

$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$
$=\int_0^{+\infty} -x\,d(e^{-x})$
$= -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}\,d(-x)$
$= \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$
$= -e^{-x}\Big|_0^{+\infty}$
$= 1$

(2) 因 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故X与Y相互独立.

(3). $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0, & 其他\end{cases}$

(4) $\rho_{XY} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$，因$X$，$Y$相互独立
故 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$.
故可得 $\rho_{XY}=0$.

六、（本题 15 分）

设随机变量(X,Y)的分布律如右图：

X \ Y	-1	0	1	2
-2	0.2	0.25	0.1	0.1
1	0.1	0	0.25	0

求：(1) 关于 Y 的边缘分布律；(2)关于 Y 的分布函数 $F_Y(y)$；（3）$Z=X+Y^2$的分布律；(4) $E(X+Y)$。

解：(1)

Y	-1	0	1	2
P	0.3	0.25	0.35	0.1

(2) $F_Y(y)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ 0.3 & -1\leq x<0 \\ 0.55 & 0\leq x<1 \\ 0.9 & 1\leq x<2 \\ 1 & x\geq 2\end{cases}$

(3).

Y^2	0	1	4
P	0.25	0.65	0.1

X	-2	1
P	0.65	0.35

$Z=X+Y^2$ 可能取值为 $-2, -1, 1, 2, 5$

(X,Y)取$(-2,0)$
$P(Z=-2)=P(X=-2, Y=0)=0.25$

(X,Y)取$(-2,-1)$、$(-2,1)$
$P(Z=-1)=P(X=-2,Y=-1)+P(X=-2,Y=1)$
$=0.3$

(X,Y)取$(1,0)$
$P(Z=1)=P(X=1,Y=0)=0$

(X,Y)取$(1,-1),(1,1),(-2,2)$
$P(Z=2)=P(X=1,Y=-1)+P(X=1,Y=1)$
$+P(X=-2,Y=2)=0.45$

(X,Y)取$(1,2)$
$P(Z=5)=P(X=1,Y=2)=0$

得Z的分布律

Z	-2	-1	2
P	0.25	0.3	0.45

七、（本题 8 分） | 得分 | |

设总体$X\sim b(k,p)$，k为正整数，$0<p<1$，k,p均未知，设$X_1, X_2, \ldots X_n$为来自该总体的随机样本，求k,p的矩估计量

解：$\mu_1=E(X)=kp$

$\mu_2=E(X^2)=D(X)+(E(X))^2=kp(1-p)+k^2p^2$

令 $A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i=\bar{X}$ 和 $A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ 分别替代 μ_1, μ_2

可得 $\begin{cases} kp=A_1=\bar{X} \\ kp(1-p)=A_2-A_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2-\bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2\end{cases}$

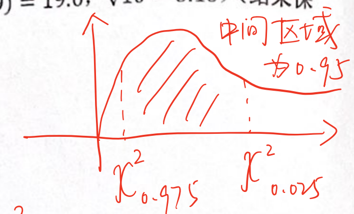
故可得k,p的矩估计量为

$\hat{k}=\dfrac{\bar{X}^2}{\bar{X}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2}$，$\hat{p}=\dfrac{\bar{X}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(X_i-\bar{X})^2}{\bar{X}}$

八、(本题 6 分)　得分

为了估计海尔某型号洗衣机使用时间的方差，某日测试了 10 台洗衣机，测得$\bar{x}$ = 1500 小时，s = 20 小时。已知洗衣机使用时间服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，求出σ^2的置信水平为 0.95 的置信区间。($\chi^2_{0.025}(9) = 2.7, \chi^2_{0.975}(9) = 19.0$，$\sqrt{10} = 3.16$)(结果保留一位小数)

$\chi^2_{0.025}(9)=19$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.7$



解：选取枢轴量 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$，

置信水平 $1-\alpha=0.95$

则 $P(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)) = 1-\alpha$

故可得 σ^2的置信水平为0.95的一个置信区间为

$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$　$\left(\frac{9S^2}{\chi^2_{0.025}(9)}, \frac{9S^2}{\chi^2_{0.975}(9)}\right)$

将数据代入可得 $\left(\frac{9\times 20^2}{19}, \frac{9\times 20^2}{2.7}\right)$

即σ^2的置信水平为0.95的置信区间为 $(189.5, 1333.3)$

九、(本题 5 分)　得分

$P(|X-\underset{E(X)}{\mu}|\geq\varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$　$\sigma^2\to D(X)$

利用切比雪夫不等式证明伯努利大数定律：设n_A是 n 重伯努利试验中 A 发生的次数，p 是 A 发生的概率，则对任何$\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{n_A}{n} - p| < \varepsilon\} = 1$$

解：设 X_i 表示第i次试验，事件A是否发生，则 $X_i=\begin{cases}1, & A发生\\ 0, & A不发生\end{cases}$

$E(X_i)=p$, $D(X_i)=p(1-p)$

$n_A=\sum_{i=1}^{n}X_i$，$X_i\sim b(1,p)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立同分布

$E(\frac{n_A}{n}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i) = \frac{1}{n}\cdot E(\sum_{i=1}^{n}X_i) = \frac{1}{n}\cdot nE(X_i) = p$

$D(\frac{n_A}{n}) = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i) = \frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot nD(X_i) = \frac{p(1-p)}{n}$

由切比雪夫不等式

$0 \leq P(|\frac{n_A}{n}-p|\geq\varepsilon) \leq \frac{D(\frac{n_A}{n})}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$

当$n\to\infty$时，$\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}\to 0$。故由夹逼定理可得 $\lim_{n\to\infty}P(|\frac{n_A}{n}-p|\geq\varepsilon)=0$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}P(|\frac{n_A}{n}-p|<\varepsilon)=1$

即证！

十、(本题 9 分)　得分

(1) 设某产品的某项质量指标 X 服从正态分布 $N(\mu,150^2)$，现从中随机地抽取了 25 个，测得该项指标的**平均值**为 1637。问能否认为这批产品的该项指标值为 1600。($\alpha = 0.05$，$Z_{0.025} = 1.96$)(先假设在检验)

(2)对某总体 $N(\mu,6^2)$，在显著水平为$\alpha = 0.05$ 下用 Z 检验法检验假设H_0:$\mu = 0$，H_1:$\mu \neq 0$时，如果拒绝域为$\{|\bar{X}| \geq 1.96\}$，问样本容量 n 应取多大？($Z_{0.025} = 1.96$)

解(1)：$H_0: \mu=\underset{\uparrow\mu_0}{1600}$　$H_1: \mu\neq\underset{\uparrow\mu_0}{1600}$

由于σ^2已知，故选取检验统计量 $Z=\frac{\bar{X}-1600}{\sigma/\sqrt{n}}$

拒绝域 $|Z|\geq Z_{\frac{\alpha}{2}}$

将数据 $\bar{x}=1637$，$\sigma=150$，$n=25$ 代入

$|Z| = \left|\frac{1637-1600}{150/\sqrt{25}}\right| = 1.233 < Z_{0.025}=1.96$

(没有落在拒绝域)

故接受H_0，从而认为这批产品的该项指标值为1600。

(2). $H_0: \mu=0$，　$H_1: \mu\neq 0$

由于$\sigma^2=6$已知，选取检验统计量 $Z=\frac{\bar{X}-0}{\sigma/\sqrt{n}}$

拒绝域为 $\left|\frac{\bar{X}-0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq 1.96$

$|\bar{X}|\geq \sigma/\sqrt{n}\times 1.96$

因拒绝域为 $|\bar{X}|\geq 1.96$，则 $\sigma/\sqrt{n}=1$，且$\sigma=6$

故 $n=36$.