杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷

考试课程	数学物理方法	考试日期	2015 年 6 月 18 日	成 绩	
课程号	A0803020	教师号		任课教师姓名	
考生姓名		学号（8 位）		年级	专业

、单项选择题（共 30 分，每小题 5 分）

$\mathrm{Re}(z)<0$ 在复数平面上表示 C

（A） 左半复平面包含虚轴　　（B）下半复平面包含实轴

（C） 左半复平面不包含虚轴　　（D）下半复平面不包含实轴

$\cos\alpha + i\sin\alpha$（α 是实常数）的模是 C

（A） $2\sin\dfrac{a}{2}$　　（B） $\sin\dfrac{a}{2}$

（C） 1　　（D） $1-\cos\alpha$

幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}z^k$ 的收敛域为 A

（A） $|z|<1$　　（B） $|z|=1$

（C） $|z|<\infty$　　（D） $|z|=\infty$

、挖去孤立奇点的环域上的洛朗展开级数没有负幂项的是 C

（A）非孤立奇点　　（B）本性奇点

（C）可去奇点　　（D）单极点

、幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^k$ 收敛半径分别是 R_1 和 R_2，则 $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k-b_k)z^k$ 的收敛半径是 A

（A）至少等于 R_1 和 R_2 中较小的一个　　（B） R_1-R_2

（C） $R_1 * R_2$　　（D） R_1+R_2

6、a 为闭合曲线 l 所围的区域内的一点，那么积分 $\oint_l \frac{1}{z-a}dz=$ A

（A） $2\pi i$　　（B） $1/2\pi i$

（C） $2\pi i f(a)$　　（D） 1

二、填空题（20 分，每小题 4 分）

1、$f(z)=\dfrac{4+3i}{3-4i}$ 的实部为 ~~2~~ ~~5~~ 0

2、幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k}+\frac{1}{k!})(z-i)^k$ 的收敛域为 $|z-i|<1$

3、函数 $f(z)=e^z$，那么积分 $\oint_l \frac{e^z}{z}dz$ 为 $2\pi i$

4、复变函数 $f(z)=u(\rho,\varphi)+iv(\rho,\varphi)$，$(z=\rho e^{i\varphi})$，若 $f(z)$ 解析，则极坐标系 $(z=\rho e^{i\varphi})$ 中的 C-R 条件是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}\\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial \rho}\end{cases}$$

5、$f(z)=\dfrac{\sin z}{z^n-1}$ 在 $z_0=1$ 的留数是 $\dfrac{\sin 1}{n}$

三、计算题（20 分，每小题 5 分）

1、将函数 $e^{1/(1-z)}$ 在 $z_0=0$ 展开为泰勒级数。

解：$f(z)=e^{(1-z)^{-1}}$

$f'(z)=1\cdot e^{(1-z)^{-1}}(1-z)^{-2}$

$f''(z)=1\cdot 2\, e^{(1-z)^{-1}}(1-z)^{-3}+1\cdot e^{(1-z)^{-1}}(1-z)^{-4}$

$\cdots\ \cdots$

于是

$f(0)=e \quad f'(0)=e \quad f''(0)=3e$

所以

$e^{1/(1-z)}=e+\frac{e}{1!}z+\frac{3e}{2!}z^2+\cdots$

、将函数 $1/(z-2)(z-5)$ 在 $5>|z|>2$ 展开为幂级数。

解：$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-5)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-5}-\frac{1}{z-2}\right]$

令 $g(z)=\frac{1}{z-5}$ $\quad h(z)=\frac{1}{z-2}$

当 $|z|<5$ 时

$$g(z)=\frac{1}{z-5}=-\frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{z}{5}}=-\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^k$$

当 $|z|>2$ 时

$$h(z)=\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k$$
$$=\frac{1}{z}\sum_{k=-\infty}^{0}\left(\frac{z}{2}\right)^k$$

于是

$$f(z)=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^k+\frac{1}{z}\sum_{k=-\infty}^{0}\left(\frac{z}{2}\right)^k\right]$$

计算 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$ 在奇点处的留数。

解：$f(z)=\frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2}$

于是

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=\lim_{z\to i}\frac{1}{(2-1)!}\left\{\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z-i)^2\frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2}\right]\right\}$$
$$=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+i)^2}$$
$$=\lim_{z\to i}\left[2z(z+i)^{-2}-2z^2(z+i)^{-3}\right]=-\frac{i}{4}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)=\lim_{z\to -i}\frac{1}{(2-1)!}\left\{\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z+i)^2\frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2}\right]\right\}$$
$$=\lim_{z\to i}\left[2z(z-i)^{-2}-2z^2(z-i)^{-3}\right]$$
$$=\frac{i}{4}$$

4、留数定理计算实变函数定积分：$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^3+1}dx$ 。

解：令 $f(z)=\frac{1}{z^3+1}$

于是

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)\left(z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}.$$

单极点 $z=-1$ $\quad \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^3+1}dx=2\pi i\operatorname{Res}f\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\pi i\operatorname{Res}f(-1)$$
$$=-\frac{1}{6}$$

四、解答题（30 分，每小题 10 分）

1、若 $f(z)=u+iv$ 解析，且 $u=x^3-3xy^2$，$f(0)=0$，试求 $f(z)$。

解： $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2=\frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-6xy=-\frac{\partial v}{\partial x}$

于是

$dv=6xy\,dx+(3x^2-3y^2)\,dy$

$=d(3x^2y-y^3)$

所以

$v=3x^2y-y^3+c$

又 $f(0)=0$

所以 $f(z)=x^3-3xy^2+(3x^2y-y^3)i$

2、在区域 $|z|>0$ 将函数 $f(z)=z^5e^{\frac{1}{z}}$ 展开为洛朗级数。

解： $f(z)=z^5e^{\frac{1}{z}}$

$=z^5\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z}\right)^k$

$=z^5\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,z^k}$

$=z^5\sum_{k=-\infty}^{0}\frac{1}{(-k)!}z^k$

$=\sum_{k=-\infty}^{0}\frac{1}{(-k)!}z^{k+5}$

离变数法求解定解问题

$$u_{tt}-u_{xx}=0,\quad (0<x<l)$$
$$u_x\big|_{x=0}=0,\ u_x\big|_{x=l}=0$$
$$u\big|_{t=0}=\sin\frac{2\pi}{l}x,\ u_t\big|_{t=0}=0$$

解：用分离变量法

令 $u=X(x)T(t)$

代入得：$\dfrac{X''}{X}=\dfrac{T''}{T}=-\lambda$

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X_x\big|_{x=0}=0\quad X_x\big|_{x=l}=0 \end{cases}\qquad (1分)$$

$X=C\cos\dfrac{n\pi x}{l}$ $\quad\lambda=\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$ $\quad$ (3分)

$T''+\lambda T=0$

$T=A\cos\dfrac{n\pi t}{l}+B\sin\dfrac{n\pi t}{l}$

故 $u=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\dfrac{n\pi t}{l}+B_n\sin\dfrac{n\pi t}{l}\right)\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ $\quad$ (3分)

利用初始条件得

$B_n=0$

$A_0=\dfrac{1}{l}\int_0^l\sin\dfrac{2\pi\xi}{l}d\xi=\dfrac{1}{2\pi}(\cos 2\pi-1)=0$

$A_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l\sin\dfrac{2\pi}{l}\xi\cos\dfrac{n\pi\xi}{l}d\xi=\begin{cases}1 & n=2\\ 0 & n\neq 2\end{cases}$

$u=\cos\dfrac{2\pi t}{l}\sin\dfrac{2\pi x}{l}$ $\quad$ (3分)