杭州电子科技大学学生考试卷（ B ）卷

考试课程	随机信号原理	考试日期	2016 年 6 月 21 日	成绩	
课程号	B0802060	教师号	41434	任课教师	杨萌
学生姓名		学号（8位）		班级	

一、填空题（共 20 分，填空题每空 2 分，选择题每题 2 分）

1、随机过程 $X(t)$，数学期望为 $m_x(t)$，协方差函数为 $C_X(t_1,t_2)$，$f(t)$ 为确定的时间函数。则随机过程 $Y(t)=X(t)+f(t)$ 的均值为________（$m_x(t)+f(t)$）。

2、随机过程 $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi)$，其中，$A$ 和 ω_0 为常数，ϕ 为 $(0,2\pi)$ 上均匀分布的随机变量。则随机过程 $X(t)$ 的均值为________（0）。

3、随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 单独和联合平稳。则随机过程 $Z(t)=X(t)+Y(t)$ 的自相关函数为________（$R_X(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{YX}(\tau)+R_Y(\tau)$）。

4、随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 独立，且均值分别为 m_X 和 m_Y，则互功率谱 $G_{XY}(\omega)$ 是 $2\pi m_X m_Y\delta(\omega)$。

5、高斯平稳随机信号通过线形时不变系统的输出信号仍为____高斯平稳____信号。

6、随机过程 $X(t)=at$，$-\infty<t<+\infty$，a 是在 $(0,1)$ 上服从均匀分布的随机变量，则 $E[X(t)]$ 是____C____

A. t；

B. $2t$；

C. $t/2$；

D. $3t/2$。

7、下列描述正确的是___A_____

A. 两个随机过程相互独立则必然不相关；

B. 两个随机过程不相关则必然相互独立；

C. 两个随机过程相互正交则必然不相关；

D. 两个随机过程相互正交则必然相互独立。

8、平稳相依随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数为 $R_{XY}(\tau)$，则________

A. $R_{XY}(\tau)=R_{YX}(\tau)$；

B. $R_{XY}(\tau)$ 是偶函数；

C. $R_{XY}(0)=R_{YX}(0)$；

D. $R_{XY}(\tau)=R_X(\tau)R_Y(\tau)$。

9、某线性时不变系统输入信号、输出信号的功率谱密度分别为 $G_X(\omega)$ 和 $G_Y(\omega)$，其中，系统的传输函数为 $\mathrm{H}(\omega)$。则正确反映三者关系的为___D_____

A. $G_Y(\omega)=G_X(\omega)|\mathrm{H}(\omega)|$；

B. $G_Y(\omega)=G_X(\omega)\mathrm{H}(\omega)$；

C. $G_X(\omega)=G_Y(\omega)|\mathrm{H}(\omega)|^2$；

D. $G_Y(\omega)=G_X(\omega)|\mathrm{H}(\omega)|^2$。

四、（15 分）两个统计独立的平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$，其均值都为 0，自相关函数分别为

$R_X(\tau)=e^{-|\tau|}$，$R_Y(\tau)=\cos 2\pi\tau$，试求：

(1) $Z(t)=X(t)+Y(t)$ 的自相关函数；

(2) $W(t)=X(t)-Y(t)$ 的自相关函数；

(3) 互相关函数 $R_{ZW}(\tau)$。

解：

(1)

$$R_Z(t+\tau,t)=E[Z(t+\tau)Z(t)]=E\{[X(t+\tau)+Y(t+\tau)]\times[X(t)+Y(t)]\}$$

$$=E[X(t+\tau)X(t)]+E[Y(t+\tau)Y(t)]=R_X(\tau)+R_Y(\tau)=e^{-|\tau|}+\cos(2\pi\tau)$$

(2)

$$R_W(t+\tau,t)=E[W(t+\tau)W(t)]=E\{[X(t+\tau)-Y(t+\tau)]\times[X(t)-Y(t)]\}$$

$$=E[X(t+\tau)X(t)]+E[Y(t+\tau)Y(t)]=R_X(\tau)+R_Y(\tau)=e^{-|\tau|}+\cos(2\pi\tau)$$

(3)

$$R_{ZW}(t+\tau,t)=E[W(t+\tau)Z(t)]=E\{[X(t+\tau)-Y(t+\tau)]\times[X(t)+Y(t)]\}$$

$$=R_X(\tau)-R_Y(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{YX}(\tau)$$

又由于 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 零均值相互独立，同时彼此正交，则 $R_{XY}(\tau)+R_{YX}(\tau)=0$

$$\therefore R_{ZW}(t+\tau,t)=R_X(\tau)-R_Y(\tau)=e^{-|\tau|}-\cos(2\pi\tau)$$

五、（15 分）设随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 平稳，且相互独立，它们的自相关函数分别为

$$R_X(\tau)=2e^{-2|\tau|}\cos\omega_0\tau \qquad R_Y(\tau)=9+e^{-3|\tau^2|}$$

令 $Z(t)=VX(t)Y(t)$，其中，V 为均值为 2，方差为 9 的随机变量，且与 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 两两独立。求

(1) $Z(t)$ 的均值

(2) $Z(t)$ 的方差

(3) $Z(t)$ 的自相关函数

解：

均值：$EX(t)=0, EY(t)=\pm 3$，$EZ(t)=0$

自相关函数：

$$R_Z(t,t+\tau)=EZ(t)Z(t+\tau)=E[V^2X(t)Y(t)X(t+\tau)Y(t+\tau)]$$

$$=E[V^2]E[X(t)X(t+\tau)]E[Y(t)Y(t+\tau)]$$

$$=13R_X(\tau)R_Y(\tau)=26e^{-2|\tau|}\cos(\omega_0\tau)(e^{-3|\tau^2|}+9)$$

方差：$R_Z(0)-E(Z(t))^2=260$

所以

(1) $Z(t)$ 的均值为 0

(2) $Z(t)$ 的方差为 260

(3) $Z(t)$ 的自相关函数为 $26e^{-2|\tau|}\cos(\omega_0\tau)(e^{-3|\tau^2|}+9)$

杭州电子科技大学学生考试卷（A）卷

考试课程	随机信号原理	考试日期	2015 年 月 日	成绩	
课程号		教师号		任课教师姓名	
考生姓名		学号（8位）		年级	专业

一、填空题（每空 2 分，共 10 分）。

1. 随机变量 X 和 Y 的概率密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，均值分别不为零的 m_X 和 m_Y；又已知两者服从联合正态分布，且相互独立，则联合概率密度 $f_{XY}(x,y)$ = $f_X(x)\ f_Y(y)$，二者的正交性为__正交__（正交 or 不正交），二者的相关性为__不相关__（相关 or 不相关）。

2. 对信号进行希尔伯特变换等价于该信号通过一线性时不变系统，此等价系统的传输特性 $H(\omega)$ 等于 $-j\,\mathrm{sgn}(\omega)$，其单位冲激响应为 $1/\pi t$。

二、（12 分）设有正弦波随机过程 $X(t)=A\sin(\pi t)$，其中 A 是均值为零，方差为 σ_A^2 的高斯随机变量。

（1）求 $X\left(\frac{1}{4}\right)$ 的概率密度函数；

$X\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}A$，均值 0，方差 $\sigma_A^2/2$

$f_X(x,1/4)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\delta_A}e^{-\frac{x^2}{\delta_A^2}}$

（2）求 $X\left(\frac{1}{4}\right)$ 与 $X\left(\frac{3}{4}\right)$ 的相关系数。

$X\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}A$，相关系数为 1

三、（12 分）若随机过程 $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Phi)$，其中 A 可以是也可以不是随机变量，Φ 是在 $(0,2\pi)$ 上均匀分布的随机变量。求：

（1）$X(t)$ 的时间自相关函数和统计自相关函数；

（2）A 具备什么条件时自相关函数满足遍历性。

解：（1）时间自相关函数为：

$\overline{X}=\frac{1}{2}A^2\cos\omega_0\tau$，

统计自相关为：

$R_X(t,t+\tau)=\frac{1}{2}E[A^2]\cos\omega_0\tau$

（2）A 为常数时，两种自相关函数相等。

四、(16 分)对于线性时不变的因果系统，若输入随机信号是宽平稳的，求证系统输出是否宽平稳？输入信号与输出信号是否联合宽平稳？

解：

输出宽平稳

输入和输出联合宽平稳

五、(6 分) 已知平稳随机过程 $X(t)=\sum_{i=1}^{N}a_iY_i(t)$，式中 a_i 是一组常实数，而随机过程 $Y_i(t)$ 皆为平稳过程且相互正交，其功率谱用 $G_{Y_i}(\omega)$ 表示，求 $X(t)$ 的功率谱。

$$R_X(t,t+\tau)=\sum_{i=1}^{N}E\left[a_i^{\,2}Y_i(t)Y_i(t+\tau)\right]=\sum_{i=1}^{N}a_i^{\,2}R_{Y_i}(\tau)$$ （由相互正交条件可知其中的交叉项为 0）

$$G_X(\omega)==\sum_{i=1}^{N}a_i^{\,2}G_{Y_i}(\omega)$$

六、（10 分）设 $X(t)$ 是雷达发射信号，其自相关函数为 $R_X(\tau)$，遇到目标后的回波信号 $aX(t-\tau_1)$，$a<<1$，τ_1 是信号返回时间，回波信号中包含噪声 $N(t)$，于是接收机收到的全信号为 $Y(t)=aX(t-\tau_1)+N(t)$。已知 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 联合平稳，并且 $X(t)$ 和 $N(t)$ 的互相关函数为 $R_{XN}(\tau)$，

(1)求互相关函数 $R_{XY}(\tau)$；

(2)在上述条件(1)下，若 $N(t)$ 均值为零，并与 $X(t)$ 相互独立，求互相关函数 $R_{XY}(\tau)$。

（1） $R_{XY}(\tau)=aR_X(\tau-\tau_1)+E[X(t)N(t+\tau)]$

（2） $R_{XY}(\tau)=aR_X(\tau-\tau_1)$

七、（12 分）统计独立、零均值平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 功率谱密度为:

$$G_X(\omega)=\frac{\omega^2}{\omega^4+3\omega^2+2}$$

$$G_Y(\omega)=\frac{\omega^2+3}{\omega^4+3\omega^2+2}$$

（1）求 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的平均功率；（6 分）

(2) 求 $Z(t)=X(t)+Y(t)$ 的功率谱密度；（3 分）

（3）求 $V(t)=X(t)-Y(t)$ 的功率谱密度；（3 分）

(1).

$$G_X(\omega)=\frac{\omega^2}{\omega^4+3\omega^2+2}=\frac{2}{\omega^2+2}-\frac{1}{\omega^2+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2\sqrt{2}}{\omega^2+2}-\frac{1}{2}\frac{2}{\omega^2+1}$$

$$R_X(\tau)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\sqrt{2}|\tau|}-\frac{1}{2}e^{-|\tau|}$$

$$P_X=R_X(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$$

$$G_Y(\omega)=\frac{\omega^2+3}{\omega^4+3\omega^2+2}=\frac{2}{\omega^2+1}-\frac{1}{\omega^2+2}=\frac{2}{\omega^2+1}-\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{2\sqrt{2}}{\omega^2+2}$$

$$R_Y(\tau)=e^{-|\tau|}-\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\sqrt{2}|\tau|}$$

$$P_Y=R_Y(0)=1-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

(2).

X(t)和Y(t) 统计独立，$E[X(t)Y(t+\tau)]=E[Y(t)X(t+\tau)]=0$

$$R_Z(t,t+\tau)=E[Z(t)Z(t+\tau)]=E[(X(t)+Y(t))(X(t+\tau)+Y(t+\tau))]$$
$$=R_X(\tau)+R_Y(\tau)$$

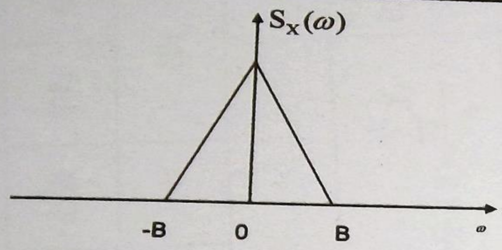
$$G_Z(\omega)=G_X(\omega)+G_Y(\omega)=\frac{2\omega^2+3}{\omega^4+3\omega^2+2}$$

(3).

$$R_V(t,t+\tau)=E[V(t)V(t+\tau)]=E[(X(t)-Y(t))(X(t+\tau)-Y(t+\tau))]$$
$$=R_X(\tau)+R_Y(\tau)$$

$$G_V(\omega)=G_X(\omega)+G_Y(\omega)=\frac{2\omega^2+3}{\omega^4+3\omega^2+2}$$

八、（10 分）已知随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度如下图所示，其中 $S_X(\omega)=0$，$|\omega|>B$。取常数 $\omega_0>>B$，构造一个新的随机过程 $Y(t)=X(t)\cos(\omega_0 t)-\hat{X}(t)\sin(\omega_0 t)$，求 Y(t)的功率谱密度 $S_Y(\omega)$，并画图表示 $S_X(\omega)$ 和 $S_Y(\omega)$ 的关系。

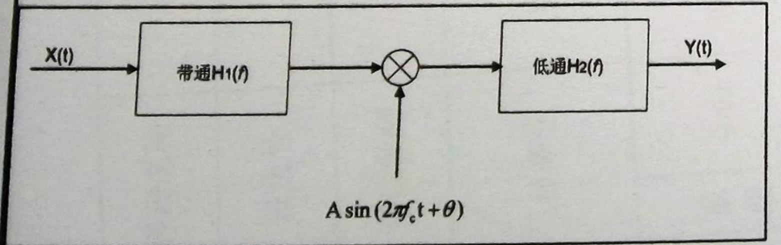


$$R_Y(t,t+\tau)=R_X(\tau)\cos\omega_0\tau+\hat{R}_X(\tau)\sin\omega_0\tau$$

$$G_Y(\omega)==\frac{1}{2}[G_X(\omega+\omega_0)+G_X(\omega-\omega_0)-\mathrm{sgn}(\omega-\omega_0)G_X(\omega-\omega_0)+\mathrm{sgn}(\omega+\omega_0)G_X(\omega+\omega_0)]$$

图形表示为将 X 的功率谱密度分别向正负 ω_0 搬移，正半轴上保留其中左半部分，负半轴上保留其中右半部分。

九、.(12 分)如图所示系统的输入是谱密度为 $N_0/2$ 的零均值白高斯噪声 X(t)，A 为均值为 2，方差为 4 的高斯随机变量，θ 在 $(0,2\pi)$ 上均匀分布，A、 θ 和 X(t)相互统计独立。$H_1(f)$为中心频率为 f_c,带宽为 B Hz 的单位增益理想带通滤波器，$H_2(f)$为带宽为 B/2 Hz 的单位增益理想低通滤波器。(1)求输出过程 Y(t)的功率谱密度 $S_Y(f)$;（2）求 Y(t)的方差。



H1 的输出设为 X1 ，H2 的输入端设为 Y1

$$Y1(t)=AX1(t)\sin(2\pi f_c t+\theta)$$

$$R_{Y1}(\tau)=E(A^2)R_{X1}(\tau)[\sin(2\pi f_c t+\theta)\sin(2\pi f_c(t+\tau)+\theta)]=4R_{X1}(\tau)\cos(2\pi f_c\tau)$$

$$G_{Y1}(\omega)=2[G_{X1}(\omega-2\pi f_c)+G_{X1}(\omega+2\pi f_c)]$$

X1 的功率谱为带通，N0/2

Y1 的功率谱将带通搬移，再经低通后 Y 的功率谱仅剩低通部分，功率谱为 N0+N0=2N0

$$\sigma_Y{}^2=P_Y=\frac{1}{2\pi}\int_{-B/2}^{B/2}2N0d\omega=2BN0$$