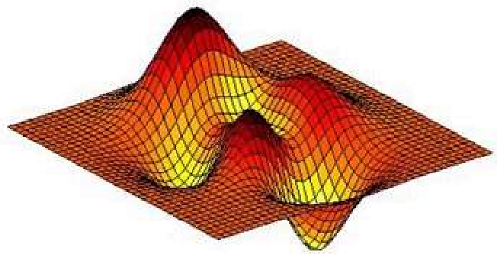
数字信号处理实验

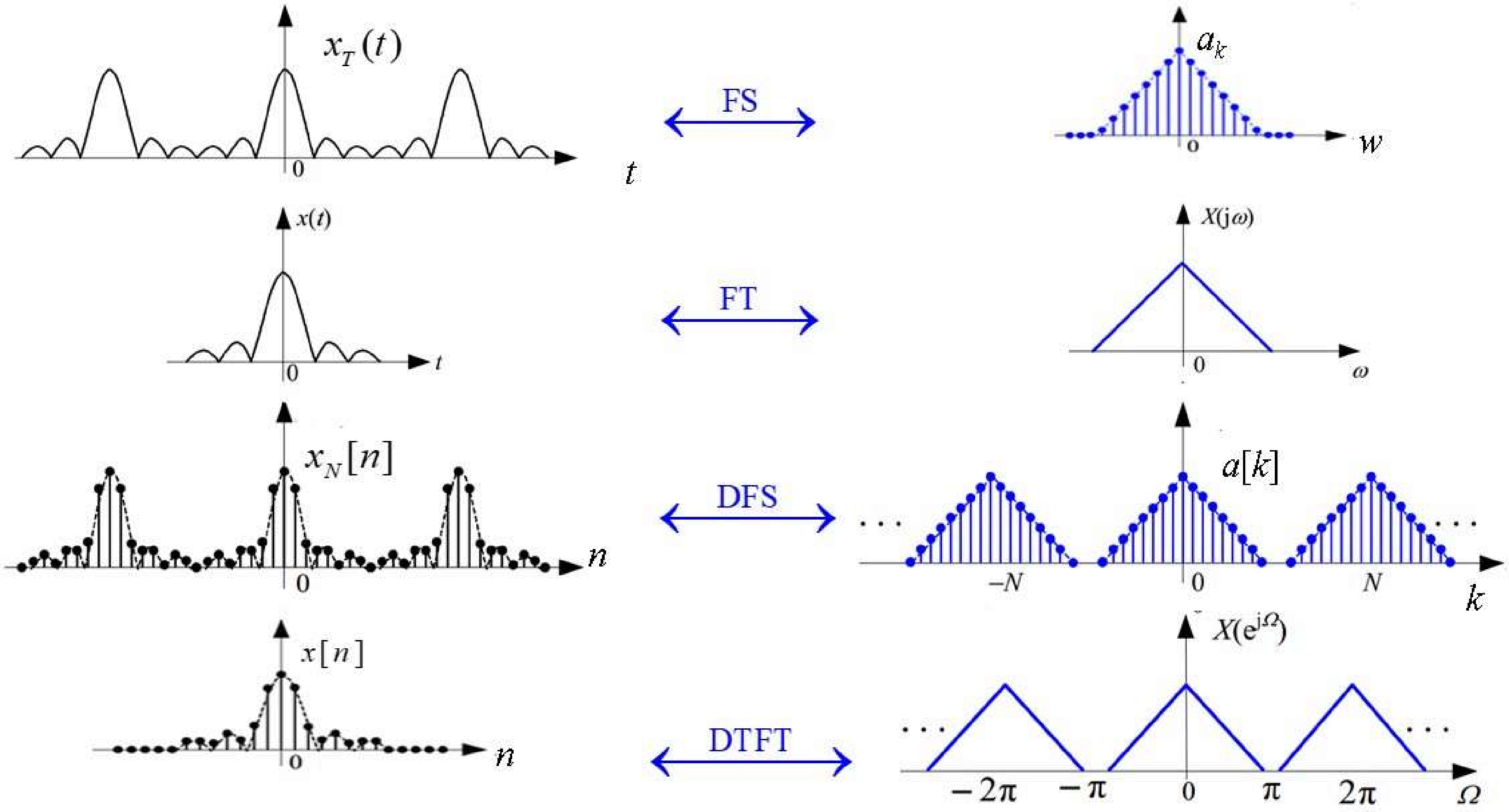
授课老师：何　美霖 (Meilin He)
单　　位：通信工程学院
邮　　箱：meilinhe@hdu.edu.cn

第3讲 DFT及信号的频谱分析

- 由FT演化到DTFT
- 由DTFT演化到DFT
- 频谱分析



4种傅里叶变换的比较



时域上离散化，频域上周期化。频域上离散化，时域上周期化。

傅里叶变换 → 离散时间傅里叶变换

- 傅里叶变换FT $X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\cdot \mathrm{e}^{-jwt}\mathrm{d}t$

信号离散化 $t=nT_s=n/f_s$

$$X(jw)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\cdot \mathrm{e}^{-jwnT_s}\cdot T_s=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n/f_s)\cdot \mathrm{e}^{-jwn/f_s}/f_s$$

时域间隔单位归一化

- 离散时间傅里叶变换DTFT $X(\mathrm{e}^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\,\mathrm{e}^{-jwn}$

连续周期频谱

离散时间傅里叶变换 → 离散傅里叶变换

- 离散时间傅里叶变换DTFT

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jwn}$$

连续周期频谱

对时限信号在频域内以2π/*N*为间隔对DTFT的变换结果进行频域采样：$w = 2\pi/N*k$

- 离散傅里叶变换DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$k = 0,\ldots,N\text{-}1$

DTFT: $X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,e^{-jwn}$

DT: $X[k] = \sum_{n=0}^{N} x[n]\,e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

混叠失真

- 混叠失真

设连续信号$x_a(t)$持续时间为T_p，最高频率为f_h. $x_a(t)$的傅里叶变换为$X_a(jf)$。若对$x_a(t)$进行等间隔抽样，抽样间隔为T。满足抽样定理，有：$T=1/f_s<1/2f_h$。$f_s=1/T$为抽样频率。

频域角度：对$X_a(jf)$在区间$[0,f_s]$上等间隔抽样N点，抽样间隔为F-频谱分辨率，即：$F=f_s/N=1/NT=1/T_p$。

因此，在满足抽样定理时，对连续信号的频谱分析可以通过对连续信号抽样并进行DFT分析近似得到。

DTFT: $X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jwn}$

DT: $X[k] = \sum_{n=0}^{N} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

混叠失真

- 注意：信号的最高频率f_h与频率分辨率F存在**矛盾**。

1). **频率成分f_h增加时**

随着f_h增加，时域抽样间隔T就一定减少，因为：

$$T=1/f_s<1/2f_h$$

即：f_h增加，意味f_s一定增加。

又因为：$F=f_s/N$，当N点数不变时，f_s增加，F则增加。

所以F分辨率产生了下降。

2). **提高分辨率F时（即F值下降）**

因为$F=f_s/N$，当N不变时，F提高，则要求fs下降。如果要求频谱不混叠，则**要求f_h下降**。

DTFT: $X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,e^{-jwn}$

DT: $X[k] = \sum_{n=0}^{N} x[n]\,e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

混叠失真

- 注意：信号的最高频率f_h与频率分辨率F存在**矛盾**。

3). 要想兼顾f_h和F, 即一个性能提高而另一个性能不变,

唯一办法是：**增加记录长度的点数N**，三者要满足：

$$N=f_s/F>2f_h/F$$

近似： $F=f_s/N=2f_h/N$

即：当f_h 增加时，保持F不变，需增加N点长度

当F 减小时，保持f_h不变，需增加N点长度

DTFT: $X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jwn}$

DT: $X[k] = \sum_{n=0}^{N} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

混叠失真

- 注意：信号的最高频率f_h与频率分辨率F存在**矛盾**。

4). **记录时长 T_p**

信号的持续时间，即为信号的记录时长。所以，采样点数 N * 采样间隔 T， $NT=T_p$ 。

又因为：F=fs/N, fs=1/T，

所以，$F=1/NT=1/T_p$ 。

因此，知道记录时长T_p，即可求出频谱分辨率F。

DTFT: $X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jwn}$

DT: $X[k] = \sum_{n=0}^{N} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

DTFT 和 DFT

■ 例1：试用DTFT和DFT进行频谱分析

```
clc; clear; close all;
f1 = 0.24; f2 = 0.26; %信号的频率成分
fs = 5; Ts = 1/fs; %抽样频率和抽样间隔
Tp = 20; %信号的记录时长
N = Tp/Ts; F = fs/N; %频谱分辨率
n = 0:N-1;
xa = cos(2*pi*f1*n/fs)+cos(2*pi*f2*n/fs); %信号
% %试用DTFT进行频谱分析
k1 = 0:999;
X_DTFT = xa*(exp(-1i*2*pi/length(k1))).^(n'*k1);
X_abs = abs(X_DTFT); X_angle = angle(X_DTFT);
% %试用DFT进行频谱分析
Xa = DFTfor(xa); Xa_abs = abs(Xa); Xa_angle = angle(Xa);
Xa_fft = fft(xa); Xa_absfft = abs(Xa_fft); Xa_anglefft = angle(Xa_fft);
```

```
function X = DFTfor(xn)
%利用for循环方法计算DFT
%xn为输入序列x(n)
%X为X = DFT[x(n)]
N = length(xn); % 输入序列的长度
X = zeros(1,N); %初始化
for k = 0: N-1
   for n = 0:N-1
      %按照定义计算频谱X(k)
      X(1, k+1) = X(1,
k+1)+xn(n+1)*exp(-1i*2*pi/N*n*k);
   end
end
end
```

DTFT: $X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jwn}$

DT: $X[k] = \sum_{n=0}^{N} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

DTFT 和 DFT

- 例1：试用DTFT和DFT进行频谱分析

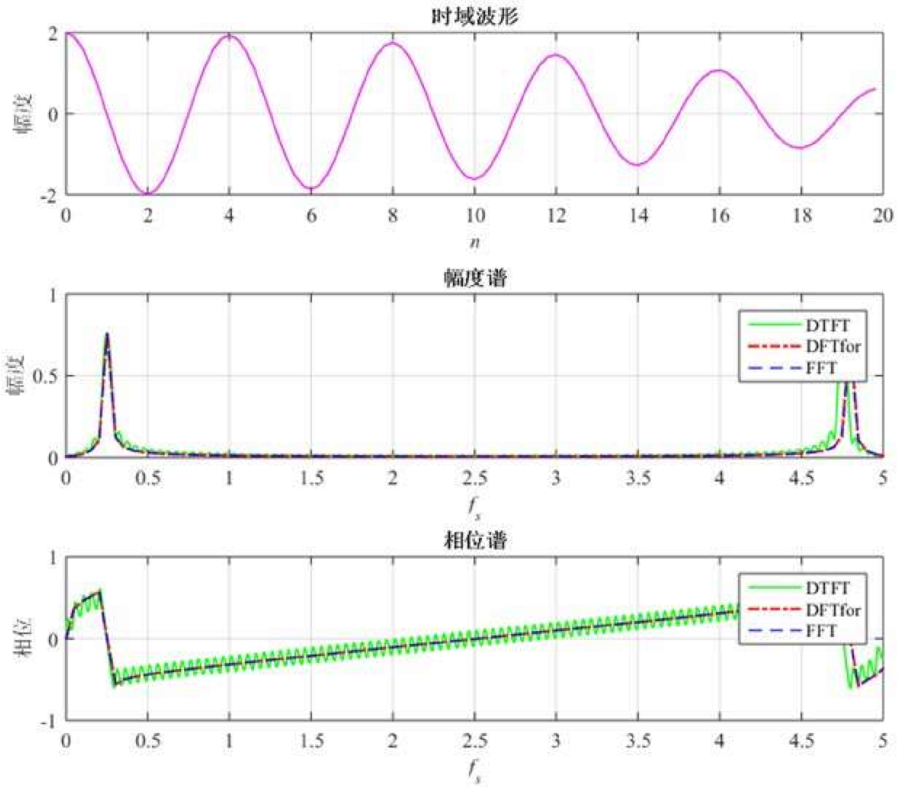
```
figure(1);
subplot(3,1,1); plot(n/fs, xa,'-m','linewidth',1.0); hold on;
xlabel('\itn'); ylabel('幅度'); title('时域波形');
subplot(3,1,2);
plot(0:(fs)/(length(k1)-1):fs,X_abs/N,'-g','linewidth',1.0); hold on;
plot(0:(fs)/(N-1):fs, Xa_abs/N, '-.r', 'Linewidth', 1.5); hold on;
plot(0:(fs)/(N-1):fs, Xa_absfft/N,'--b', 'Linewidth', 1.0); hold on;
legend('DTFT','DFTfor','FFT');
xlabel('{\it{f}}_{\it{s}}'); ylabel('幅度'); title('幅度谱');
subplot(3,1,3);
plot(0:(fs)/(length(k1)-1):fs,X_angle/pi,'-g','linewidth',1.0); hold on;
plot(0:(fs)/(N-1):fs, Xa_angle/pi, '-.r', 'Linewidth', 1.5); hold on;
plot(0:(fs)/(N-1):fs, Xa_anglefft/pi,'--b', 'Linewidth', 1.0); hold on;
legend('DTFT','DFTfor','FFT');
xlabel('{\it{f}}_{\it{s}}'); ylabel('相位'); title('相位谱');
```

DTFT 和 DFT

DTFT: $X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jwn}$

DT: $X[k] = \sum_{n=0}^{N} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

■ 例1：试用DTFT和DFT进行频谱分析



思考：

1.能否看出频率成分？

2.怎么办？

DTFT: $X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jwn}$

DT: $X[k] = \sum_{n=0}^{N} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

总结

- 傅里叶变换
  - 信号离散化：$t = nT_s = n/f_s$
  - 时域间隔单位归一化
- 离散时间傅里叶变换
  - 对时限信号在频域内以$2\pi/N$为间隔对DTFT的变换结果进行频域采样：$w = 2\pi/N*k$
- 离散傅里叶变换

操作验收习题

3.1 信号xa(t)由三个正弦组成，即:

$xa(t)=\sin(2\pi f1t)+\sin(2\pi f2t)+\sin(2\pi f3t)$, 其频率分别为f1=2Hz, f2=2.02Hz, f3=2.07Hz。利用DFT对信号xa(t)进行频谱分析，其抽样频率为fs=10Hz。试用DFT进行频谱分析。

(1)：若信号记录长度T_p=25.6s，能否分辨出信号x(t)中的频率成分；求出并画出此时频谱图。

(2)：若信号记录长度T_p=102.4s，求出并画出此时频谱图，分析比较两种情况得出结论。

注意：能否分辨出信号x(t)中的频率成分，分析比较两种情况得出结论均体现在实验报告中，上机验收只验收每一小题的图！！！

实验报告作业题和思考题

◆ 实验报告作业题：3.1 信号xa(t)由三个正弦组成，即：xa(t)=sin(2πf1t)+sin(2πf2t)+sin(2πf3t), 其频率分别为f1=2Hz, f2=2.02Hz, f3=2.07Hz。利用DFT对信号xa(t)进行频谱分析，其抽样频率为fs=10Hz。试用DFT进行频谱分析。

(1)：若信号记录长度T_p=25.6s，能否分辨出信号x(t)中的频率成分；求出并画出此时频谱图。

(2)：若信号记录长度T_p=102.4s，求出并画出此时频谱图，分析比较两种情况得出结论。

◆ **思考题：频谱泄漏、栅栏效应**

感谢聆听!