一、填空题（40 分，每小题 4 分）

1、$\sqrt{i}$ 的值为 $e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$

1、i^i 的值为 $e^{-(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}$

2、$\mathrm{Re}\, z \le 0$ 在复数平面上表示 左半复平面包含虚轴

2、$\mathrm{Im}\, z \le 0$ 在复数平面上表示 下半复平面包含实轴

3、直角坐标系中的 C-R 条件是 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$

3、极坐标系中的 C-R 条件是 $\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial \rho}$

4、已知 $\vec{r}=x\vec{e_x}+y\vec{e_y}+z\vec{e_z}$，C 为常标量，则旋度 $\nabla\times(C\vec{r})=\begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Cx & Cy & Cz \end{vmatrix}$

4、已知 $\vec{r}=x\vec{e_x}+y\vec{e_y}+z\vec{e_z}$，C 为常标量，则散度 $\nabla\cdot(C\vec{r})=3C$。

5、已知 $\varphi=x^2y+y^3+x^2z^2$，则 $\nabla\times(\nabla\varphi)=$ 0 　　某一标量梯度的旋度值恒为零

5、已知 $\vec{B}=x^2\vec{e_x}+y^3\vec{e_y}+z\vec{e_z}$，则 $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B})=$ 0 　　某一矢量旋度的散度值恒为零

6、幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(z+1)^k$ 的收敛圆为 $|z+1|=\infty$

6、幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(z-i)^k$ 的收敛圆为 $|z-i|=1$

7、幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^k$ 收敛半径分别是 R_1 和 R_2，则 $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k-b_k)z^k$ 的收敛半径是

至少等于 R_1 和 R_2 中较小的一个

AB1

7、幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ 收敛半径分别是 R_1 和 R_2，则 $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k/b_k)z^k$（$b_k \neq 0$）的收敛半径是 $\underline{R_1/R_2}$

8、函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分别以点 z_0 为 m 阶和 n 阶极点，则 z_0 是函数 $f(z)g(z)$ 的何种性质的点？$\underline{m+n}$<u>阶极点</u>

8、函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分别以点 z_0 为 m 阶和 n 阶极点，则 z_0 是函数 $f(z)/g(z)$ 的何种性质的点？$\underline{m>n}$<u>时为</u>$\underline{m-n}$<u>阶极点；</u>$\underline{m<n}$<u>时为</u>$\underline{n-m}$<u>阶零点；</u>

9、函数 $ze^{1/z}$ 的奇点和对应的留数为：<u>奇点为</u>$\underline{z=0}$<u>，为本性奇点，留数为 1/2</u>

9、函数 $\frac{\sin z}{z}$ 的奇点和对应的留数为：<u>奇点为</u>$\underline{z=0}$<u>，为可去奇点，留数为 0</u>

10、$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = f(M,t)$ 是哪类边界条件？<u>第二类边界条件</u>

10、$\left.\left(u+H\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\Sigma} = f(M,t)$ 是哪类边界条件？<u>第三类边界条件</u>

二、计算题（24 分，每小题 6 分）

1、已知解析函数 $f(z)$ 的虚部 $v(x,y)=-2e^x\cos y$，求该解析函数。

解：由柯西-黎曼条件知，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2e^x\sin y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=2e^x\cos y$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=2e^x\sin y dx+2e^x\cos y dy=d(2e^x\sin y)$$

$$u(x,y)=2e^x\sin y+C$$

所以，$f(z)=2e^x\sin y-i2e^x\cos y+C=-2ie^z+C$。

1、已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u=x^2-y^2$，求虚部和该解析函数。

解：由柯西-黎曼条件知

AB2

根据留数定理知，$\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{z-\alpha}dz=\frac{1}{2\pi i}2\pi i \operatorname{Res} f(\alpha)=f(\alpha)$

4、在点 $z_0=0$ 的邻域上将函数 $\ln(1+e^z)$ 展开为泰勒级数。

解：求各阶导数

$f(z)=\ln(1+e^z)$, $\quad f(0)=\ln 2$

$f'(z)=e^z/(1+e^z)$, $\quad f'(0)=1/2$

$f''(z)=e^z/(1+e^z)^2$, $\quad f''(0)=1/4$

$f'''(z)=......$, $\quad f'''(0)=0$

因此泰勒展开为：

$$f(z)=\ln 2+\frac{1}{1!2}z+\frac{1}{2!4}z^2.......$$

4、在点 $z_0=1$ 的邻域上将函数 $f(z)=\cos(z-1)$ 展开为泰勒级数。

解：$f(z)=1-\frac{(z-1)^2}{2!}+\frac{(z-1)^4}{4!}-\frac{(z-1)^6}{6!}+..........=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z-1)^{2k}}{2k!}$

$|z|<\infty$，收敛半径为无穷大。

三、解答题（36 分，每小题 12 分）

1、将函数 $\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ 在区域 $|z|<1$，在 $1<|z|<2$，在 $|z|>2$ 分别展开成洛朗级数

课后习题

1、将函数 $\frac{z}{(z-1)^2(z-2)}$ 在区域 $|z|<1$，在 $1<|z|<2$，在 $|z|>2$ 分别展开成洛朗级数

课后习题变形

2、计算实变函数 $\int_0^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$ 的定积分

课后习题变形

2、计算实变函数 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ 的定积分

课后习题变形

$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=2y$，$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x$

利用凑全微分显式方法，即上式中 $v=\int 2ydx+2xdy=2xy+C$，

则 $f(z)=x^2-y^2+i2xy+iC$

所以，$f(z)=x^2-y^2+i2xy+iC=z^2+iC$

2、求标量场 $f(x,y,z)=xy^2+2z$ 在点 $(1,1,1)$ 沿着 $\vec{r}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_x}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_y}$ 方向的变化率。

解：梯度 $\vec{G}=\nabla f(x,y,z)=y^2\vec{e_x}+2xy\vec{e_y}+2\vec{e_z}$，方向单位矢量 $\vec{e_r}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_x}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_y}$

所以变化率 $\frac{\partial f}{\partial r}=\vec{G}\cdot\vec{e_r}=\frac{\sqrt{2}}{2}y^2-\sqrt{2}xy$

在点 $(1,1,1)$，变化率为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3、计算积分 $I=\oint_l (z-\alpha)^n dz$，（$n$ 为整数，α 在回路 l 内）

解：当 $n\geq 0$ 时，被积函数解析，$\oint_l (z-\alpha)^n dz=0$

当 $n<0$ 时，$z=\alpha$ 为奇点，作小圆 C，在 C 上 $z-\alpha=\mathrm{R}e^{i\phi}$

$$I=\oint_l (z-\alpha)^n dz=\oint_l R^n e^{in\phi} d(\alpha+\mathrm{R}e^{i\phi})=\int_0^{2\pi} R^n e^{in\phi}\,\mathrm{R}e^{i\phi}\, id\phi$$

$$=iR^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\phi}d\phi=iR^{n+1}\frac{1}{i(n+1)}e^{i(n+1)\phi}\Big|_0^{2\pi}$$

当 $n\neq -1$ 时，$I=iR^{n+1}\frac{1}{i(n+1)}e^{i(n+1)\phi}\Big|_0^{2\pi}=0$

当 $n=-1$ 时，$I=iR^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\phi}d\phi=2\pi i$

所以，$\frac{1}{2\pi i}\oint_l (z-\alpha)^n dz=0$（$n\neq -1$），$\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{1}{z-\alpha}dz=1$

3、应用留数定理计算回路积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{z-\alpha}dz$，函数 $f(z)$ 在 l 所围区域上是解析的，α 是区域内的一个内点。

解：设被积分函数为 $g(z)=\frac{f(z)}{z-\alpha}$，在积分回路内只有一个单极点 $z=\alpha$

求留数 $\mathrm{Res}f(\alpha)=\lim_{z\to\alpha}(\frac{f(z)}{z-\alpha}(z-\alpha))=f(\alpha)$

3、长度为l的均匀弦，两端固定，弦中张力为T，在中点的[illegible]

然松开。求解弦的振动情况，即定解问题：

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad \left(0\le x\le l\right),$$

初始条件为$u\big|_{t=0}=\begin{cases}\dfrac{F_0}{2T}x, & 0\le x\le \dfrac{l}{2}\\ \dfrac{F_0}{2T}(l-x), & \dfrac{l}{2}\le x\le l\end{cases}$，$u_t\big|_{t=0}=0$，边界条件为$u\big|_{x=0}=0$，$u\big|_{x=l}=0$。

解：初始条件为$u\big|_{t=0}=\begin{cases}\dfrac{h}{l/2}x, & 0\le x\le \dfrac{l}{2}\\ \dfrac{h}{l/2}(l-x), & \dfrac{l}{2}\le x\le l\end{cases}$，$h$待求。根据牛顿运动定律，则有

$F_0-2T\sin\alpha=0$，又$\sin\alpha=\dfrac{h}{l/2}$，因此，$\dfrac{F_0}{2T}=\dfrac{h}{l/2}$，$h=\dfrac{F_0}{4T}l$，代入初始条件方程，得

$u\big|_{t=0}=\begin{cases}\dfrac{F_0}{2T}x, & 0\le x\le \dfrac{l}{2}\\ \dfrac{F_0}{2T}(l-x), & \dfrac{l}{2}\le x\le l\end{cases}$，初速度条件为$u_t\big|_{t=0}=0$。

边界条件为$u\big|_{x=0}=0$，$u\big|_{x=l}=0$。

首先设 （1）

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

代入方程，并以u除方程的两端（同时除以a^2），有

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda \text{（常数）}$$

由此得到两个常微分方程 （2）

$$X''(x)+\lambda X(x)=0\left(0\le x\le l\right)$$

（3）

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$$

则方程（2）和这边界条件构成本征值问题$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$，再代入齐次边界条件，得到$X(0)=0$和$X(l)=0$，然后解此本征值问题，得到本征值和相应

的本征函数 $\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$ 和 $X(x) = C_2 \sin\dfrac{n\pi}{l}x$，（$n = 1,2,3,\cdots$）。

于是，方程（3）的相应解是 $T(t) = T_n(t) = A_n \cos\dfrac{n\pi a}{l}t + B_n \sin\dfrac{n\pi a}{l}t$（5）

将 $u(x,t)$ 在 $0 \le x \le l$ 上展为本征函数族 $\left\{\sin\dfrac{n\pi a}{l}t\right\}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ 得广义傅里叶级数，所以

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}[A_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + B_n \sin\frac{n\pi a}{l}t]\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (6)$$

为确定系数 A_n 和 B_n $(n = 0,1,2,\ldots)$，将（6）式代入初始条件中，有

$$\begin{cases} \dfrac{F_0}{2T}x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x, & 0 \le x \le \dfrac{l}{2} \\ \dfrac{F_0}{2T}(l-x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x, & \dfrac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$$ 和 $0 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x$，所以

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{F_0}{2T}x \sin\frac{n\pi}{l}x dx, & 0 \le x \le \dfrac{l}{2} \\ A_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{F_0}{2T}(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx, & \dfrac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$$ 和 B_n=0

解得，$A_n = -\dfrac{F_0 l}{n\pi T}(\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{n}{2}\pi - \dfrac{1}{n\pi}\sin\dfrac{n}{2}\pi)$，$0 \le x \le \dfrac{l}{2}$

$A_n = \dfrac{F_0 l}{n\pi T}(\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{n}{2}\pi + \dfrac{1}{n\pi}\sin\dfrac{n}{2}\pi)$，$\dfrac{l}{2} \le x \le l$，

因此，$A_n = \dfrac{2F_0 l}{n^2\pi^2 T}\sin\dfrac{n}{2}\pi$，代入（6）式，得 $u(x,t) = \dfrac{2F_0 l}{\pi^2 T}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{n}{2}\pi}{n^2}\cos\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x$