杭州电子科技大学2004年《信号与系统》期末考试卷

一．本题共有8小题，每小题5分，共40分。

1．已知 $f(t)$ 的波形如图1，画出 $f(2t-4)$ 的波形。

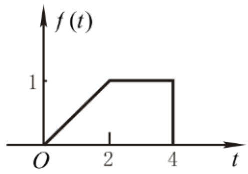
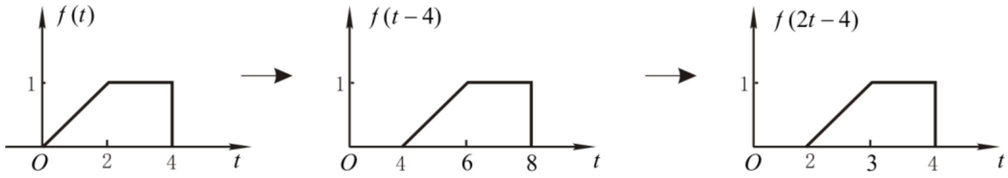


图1．题一（1）用图

解：



2．线性时不变系统的方程为 $\frac{d}{dt}r(t)+ar(t)=e(t)$，在输入 $e(t)$ 作用下系统的零状态响应为 $r(t)=(1-e^{-t})u(t)$，求输入 $e(t)$ 及 a 的值。（提示：用 s 变换计算）

解：$H(s)=\frac{1}{s+a}$， $R(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s(s+1)}$， $E(s)=\frac{R(s)}{H(s)}=\frac{s+a}{s(s+1)}$。

注：由于题目本身不够严密，此题只能解答至此。只有题干明确给定 a 的值（而不是待求 a 的值），才能求得输入 $e(t)$。例如：

当 $a=0$ 时， $E(s)=\frac{1}{s+1}$，则 $e(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$； 当 $a=1$ 时， $E(s)=\frac{1}{s}$，则 $e(t)=u(t)$。

3．线性时不变系统，当在输入 $e_1(t)=u(t)$ 作用时系统的零状态响应为 $r_1(t)=e^{-2t}u(t)$。求当在输入 $e_2(t)=\delta(t)$ 作用时系统的零状态响应 $r_2(t)$ 的频谱 $R_2(\mathrm{j}\omega)$。

解：$r_2(t)=r_1'(t)=-2\mathrm{e}^{-2t}u(t)+\delta(t)$，

$$R_2(\mathrm{j}\omega)=\frac{-2}{\mathrm{j}\omega+2}+1=\frac{\mathrm{j}\omega}{\mathrm{j}\omega+2}\text{。}$$

4．计算 $f(t)=tu(t)+\mathrm{e}^{-t}u(t-2)$ 的拉氏变换 $F(s)$。

解：$tu(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^2}$， $\mathrm{e}^{-t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+1}$，则 $\mathrm{e}^{-t}u(t-2)=\mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t-2)\leftrightarrow\mathrm{e}^{-2}\cdot\mathrm{e}^{-2s}\cdot\frac{1}{s+1}$，

$$F(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{\mathrm{e}^{-2(s+1)}}{s+1}\text{。}$$

5．已知离散信号 $x(n)$ 的 Z 变换为 $X(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$（$|z|>2$），求 $x(n)$。

解： 由于 $\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{z-2}$，

所以 $X(z)=\dfrac{z}{z-1}+\dfrac{z}{(z-2)^2}-\dfrac{z}{z-2}$ 。

由于收敛域 $|z|>2$ ， $x(n)$ 是右边序列，故 $x(n)=u(n)+n2^{n-1}u(n)-2^n u(n)$ 。

6．求差分方程 $y(n)+2y(n-1)+y(n-2)=2^n u(n)$ 的特解。

解：特征方程 $\alpha^2+2\alpha+1=0$，特征根 $\alpha_{1,2}=-1$。

由于 2 不是特征根，设 $y_{\mathrm{p}}(n)=D2^n u(n)$，代入求得 $D=\dfrac{4}{9}$ 。

所以特解 $y_{\mathrm{p}}(n)=\dfrac{4}{9}2^n u(n)$ 。

7．已知 $x_1(n)=u(n)$， $x_2(n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(n)+\delta(n-2)$，计算 $x_1(n)*x_2(n)$ 。

解： $x_1(n)*x_2(n)=u(n)*\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(n)+u(n)*\delta(n-2)=u(n)*\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(n)+u(n-2)$，

而 $u(n)*\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(n)=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{2}}u(n)=\left[2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]u(n)=(2-2^{-n})u(n)$，

故 $x_1(n)*x_2(n)=2u(n)-2^{-n}u(n)+u(n-2)$ 。

8．系统的信号流图如图 2，写出系统的输入-输出微分方程。

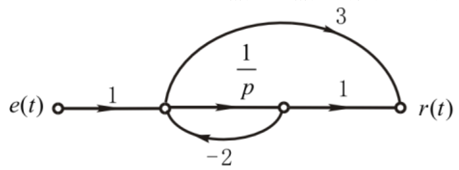


图 2．题一（8）用图

解：由梅森公式求得 $H(p)=\dfrac{\dfrac{1}{p}+3}{1+\dfrac{2}{p}}=\dfrac{3p+1}{p+2}$，由于 $H(p)=\dfrac{r(t)}{e(t)}$，即

$pr(t)+2r(t)=3pe(t)+e(t)$，得到系统的微分方程为 $r'(t)+2r(t)=3e'(t)+e(t)$ 。

二、（10 分）已知 $f(t)$ 的波形如图 3，计算其频谱 $F(\mathrm{j}\omega)$ 。

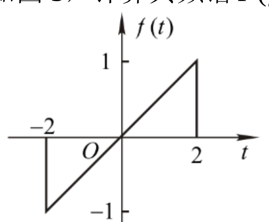


图 3．题二用图

解：对 $f(t)$ 求一次导数，令 $f_1(t)=f'(t)$，再对 $f'(t)$ 求一次导数，令 $f_2(t)=f''(t)$，

求得 $f_2(t)=-\delta'(t+2)-\delta'(t-2)+\dfrac{1}{2}\delta(t+2)-\dfrac{1}{2}\delta(t-2)$，所以

$$F_2(\mathrm{j}\omega)=-\mathrm{j}\omega(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega})+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}=-2\mathrm{j}\omega\cos(2\omega)+\mathrm{j}\sin(2\omega)，\quad F_2(0)=0。$$

由于 $f_1(t)=f_2^{(-1)}(t)$，所以 $F_1(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{F_2(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}=-2\cos(2\omega)+\dfrac{\sin(2\omega)}{\omega}$，并且 $F_1(0)=0$。

由于 $f(t)=f_1^{(-1)}(t)$，所以 $F(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{F_1(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}=-\dfrac{2\cos(2\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\dfrac{\sin(2\omega)}{\mathrm{j}\omega^2}$。

三、（10 分）已知系统方程为 $\dfrac{d^2}{dt^2}r(t)+3\dfrac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\dfrac{d}{dt}e(t)+3e(t)$，输入为 $e(t)=\delta(t)$，$r(0_-)=r'(0_-)=1$。求零输入响应、零状态响应和完全响应。

解：设 $r(t)\leftrightarrow R(s)$，则

$r'(t)\leftrightarrow sR(s)-r(0_-)=sR(s)-1$，$r''(t)\leftrightarrow s^2R(s)-sr(0_-)-r'(0_-)=s^2R(s)-s-1$；

$e(t)=\delta(t)\leftrightarrow E(s)=1$；

$$\left[s^2R(s)-s-1\right]+3\left[sR(s)-1\right]+2R(s)=(s+3)E(s)，$$

$$R(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}E(s)+\frac{s+4}{s^2+3s+2}。$$

零输入响应 $R_{\mathrm{zi}}(s)=\dfrac{s+4}{s^2+3s+2}=\dfrac{3}{s+1}+\dfrac{-2}{s+2}$，$r_{\mathrm{zi}}(t)=(3\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t})u(t)$；

零状态响应 $R_{\mathrm{zs}}(s)=\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}E(s)=\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}=\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{-1}{s+2}$，$r_{\mathrm{zs}}(t)=(2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$；

完全响应 $r(t)=r_{\mathrm{zi}}(t)+r_{\mathrm{zs}}(t)=(5\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t})u(t)$。

四、（10 分）图 4 所示电路，已知在 $t<0$ 时处于稳态。开关在 $t=0$ 瞬间断开，用 s 变换方法求 $t>0$ 时的电流 $i(t)$。

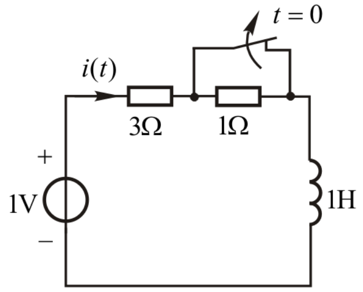
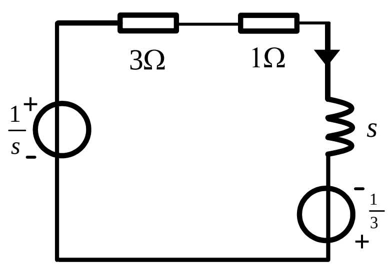


图 4．题四用图



$t>0$ 时的 s 域电路如图

解：求得 $i_{\mathrm{L}}(0_-)=\dfrac{1}{3}\mathrm{A}$，$t>0$ 时的 s 域电路如图所示。

KVL 有 $I(s)=\dfrac{\frac{1}{s}+\frac{1}{3}}{s+4}=\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{3}{s}+\dfrac{1}{s+4}\right)$，所以 $i(t)=\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}\mathrm{e}^{-4t}\right)u(t)$。

五、（10 分）系统的方框图如图 5 所示，求当 $x(n)=2^n u(n)\, ,y(-1)=1$ 时的响应。

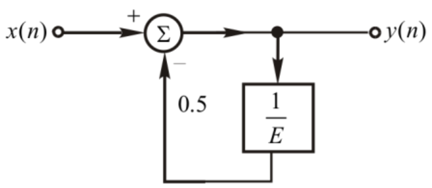


图 5．题五用图

解：由梅森公式求得 $H(E)=\dfrac{1}{1+\dfrac{0.5}{E}}$，系统的差分方程为 $y(n)+0.5y(n-1)=x(n)$，

$x(n)=2^n u(n) \leftrightarrow X(z)=\dfrac{z}{z-2}$。

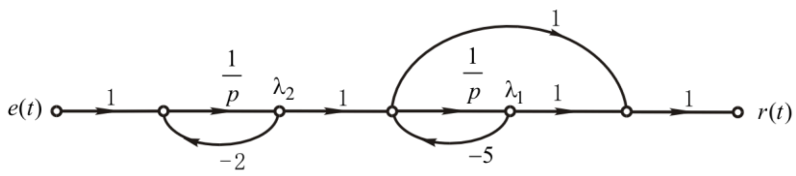
设 $y(n) \leftrightarrow Y(z)$，则 $Y(z)+0.5\left[z^{-1}Y(z)+y(-1)\right]=X(z)$，

$Y(z)=\dfrac{X(z)-0.5}{1+0.5z^{-1}}=\dfrac{z(0.5z+1)}{(z-2)(z+0.5)}=\dfrac{4}{5}\dfrac{z}{z-2}-\dfrac{3}{10}\dfrac{z}{z+0.5}$，$y(n)=\left[\dfrac{4}{5}2^n-\dfrac{3}{10}(-0.5)^n\right]u(n)$。

六、（10 分）已知系统的 $H(p)=\dfrac{p+1}{(p+2)(p+5)}$，用串联结构来实现，画出其信号流图，并写出状态方程和输出方程。

解：$H(p)=\dfrac{p+1}{(p+2)(p+5)}=\dfrac{1}{p+2}\cdot\dfrac{p+1}{p+5}$

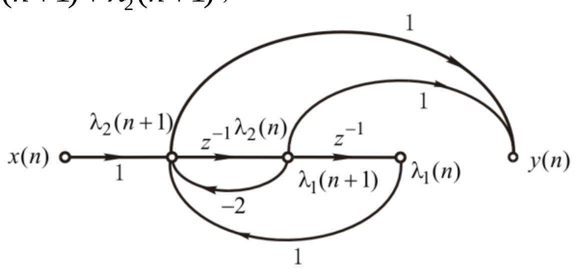
信号流图为



状态方程和输出方程为 $\dot{\lambda}_1=-5\lambda_1+\lambda_2$，$\dot{\lambda}_2=-2\lambda_2+e(t)$，$r(t)=\lambda_1+\dot{\lambda}_1=-4\lambda_1+\lambda_2$。

七、（10 分）已知系统的状态变量方程为 $\lambda_1(n+1)=\lambda_2(n)$，$\lambda_2(n+1)=\lambda_1(n)-2\lambda_2(n)+x(n)$，$y(n)=\lambda_1(n)-\lambda_2(n)+x(n)$。画出其信号流图，写出后向差分方程。

解：$y(n)=\lambda_1(n)-\lambda_2(n)+x(n)=\lambda_1(n+1)+\lambda_2(n+1)$，



从信号流图求得

$$H(E)=\dfrac{1+\dfrac{1}{E}}{1+\dfrac{2}{E}-\dfrac{1}{E^2}}=\dfrac{y(n)}{x(n)}$$，后向差分方程为 $y(n)+2y(n-1)-y(n-2)=x(n)+x(n-1)$。