

第七章

窄带随机过程

主要内容

- 7.1 希尔伯特变换和解析过程
- 7.2 窄带随机过程表示
- 7.3 窄带随机过程包络和相位的特性
- 7.4 正弦信号与窄带SP之和的包络和相位的特性

准备知识

- 1 单边谱信号对应的时域是?
- 2 从实信号中分解出单边谱信号
- 3 从实信号到解析信号

1 单边谱信号对应的时域是?

实信号的频谱包含有正负频率成分→双边谱

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

$$f^*(t) \neq f(t)$$

单边谱信号的时域→复信号

2 从实信号中分解出单边谱信号

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(-\omega) e^{-j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]^* \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] = \operatorname{Re} \left[\tilde{s}(t) \right] \end{aligned}$$

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

为具有单边谱的解析信号,其频谱为:

$$\tilde{S}(\omega) = 2S(\omega) \cdot U(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega), \omega \geq 0 \\ 0, \omega < 0 \end{cases}$$

• 3 从实信号到解析信号

$$\tilde{s}(t) = \text{Re}[\tilde{s}(t)] + \text{Im}[\tilde{s}(t)] = s(t) + j \cdot \hat{s}(t)$$

$$\tilde{S}(\omega) = 2S(\omega) \cdot U(\omega)$$

$$U(\omega) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[\delta(t) - \frac{1}{j\pi t} \right]$$

$$\tilde{s}(t) = s(t) * \frac{1}{2} \left[\delta(t) - \frac{1}{j\pi t} \right] = s(t) * \delta(t) + j \cdot s(t) * \frac{1}{\pi t}$$

7.1 希尔伯特变换

7.1.1 希尔伯特变换和解析信号的定义

1. 希尔伯特变换

设有一个实值函数 $x(t)$ ，它的希尔伯特变换记作 $\hat{x}(t)$
(或记作 $H[x(t)]$)

$$H[x(t)] = \hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

希尔伯特逆变换

$$x(t) = H^{-1}[\hat{x}(t)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

■ $x(t)$ 的希尔伯特变换为 $x(t)$ 与 $1/\pi t$ 的卷积。因此，可以把希尔伯特变换看作是信号通过一个冲激响应为 $1/\pi t$ 的线性时不变系统的输出。

经积分变量替换后有：

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t-\tau)}{\tau} d\tau = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t+\tau)}{\tau} d\tau \quad (7.2.3)$$

$$x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(t-\tau)}{\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(t+\tau)}{\tau} d\tau \quad (7.2.4)$$

希尔伯特变换的单位冲激响应及其传递函数

$$h_H(t) = \frac{1}{\pi t} \leftrightarrow H_H(j\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} -j & \omega \geq 0 \\ +j & \omega < 0 \end{cases}$$

证明：由对称性性质：若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ ，则

$$F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

因为 $\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$ ，所以 $\frac{2}{jt} \leftrightarrow 2\pi \operatorname{sgn}(-\omega) = -2\pi \operatorname{sgn}(\omega)$

整理得：
$$h_H(t) = \frac{1}{\pi t} \leftrightarrow H_H(j\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega)$$

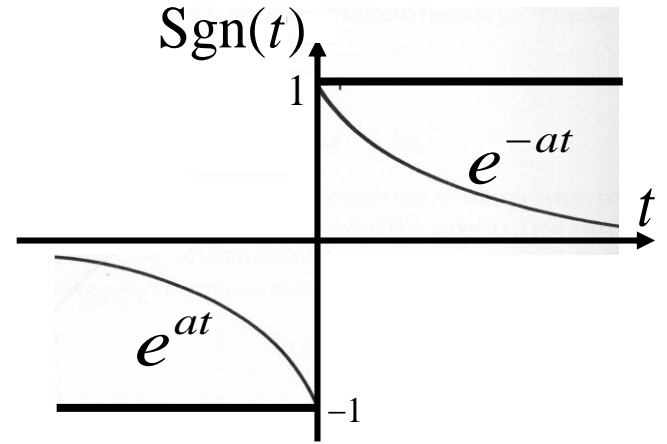
$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$ 的证明:

$$\text{Sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at} u(t) - e^{at} u(-t)]$$

$$\mathbb{F}[\text{Sgn}(t)] = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega} \right]$$

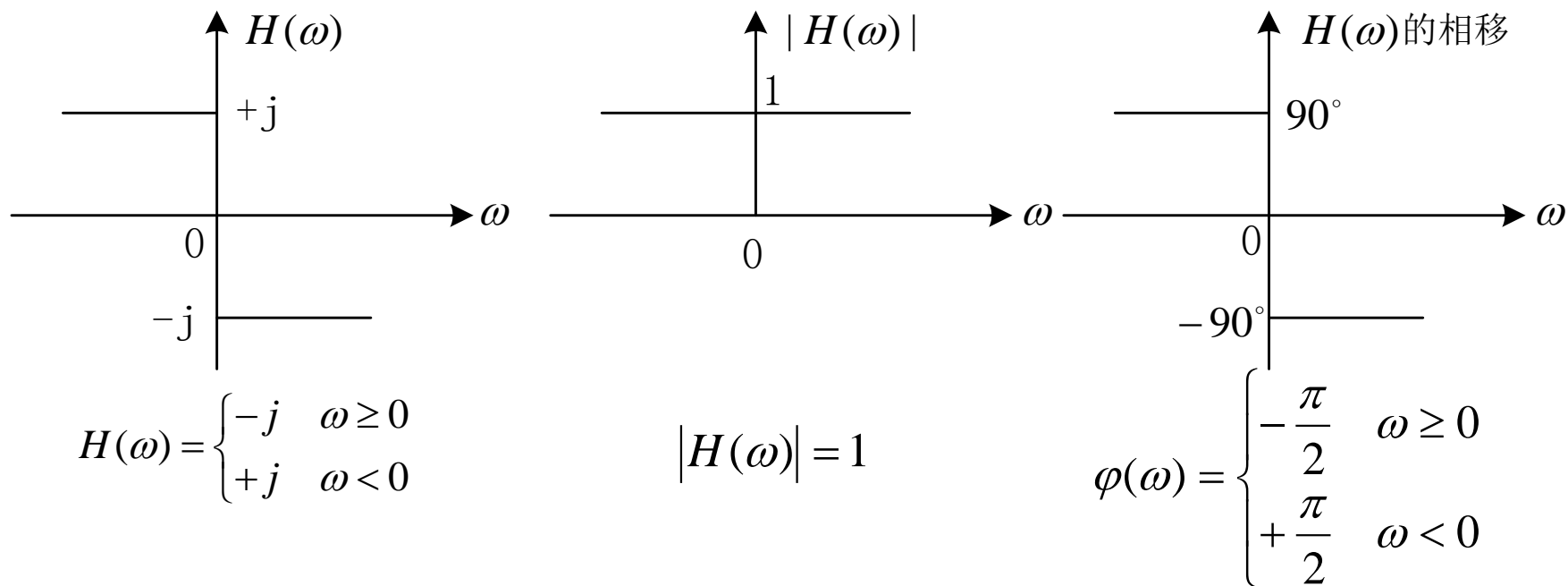
$$= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-j2\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \text{Sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}$$



可见，希尔伯特变换相当于一个正交滤波器

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} \quad h(t) = 1/\pi t$$



■ 结 论:

希尔伯特变换器本质上是一个理想的 90° 移相器。

希尔伯特逆变换

$$\begin{aligned}x(t) = H^{-1}[\hat{x}(t)] &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau \\&= -\frac{1}{\pi} * \hat{x}(t)\end{aligned}$$

$h_{H1}(t) = -\frac{1}{\pi t}$ 为希尔伯特逆变换的单位冲激响应

2. 解析信号

由实信号 $x(t)$ 作实部， $x(t)$ 的希尔伯特变换 $\hat{x}(t)$ 作虚部，构成的复信号 $j(t)$ 称为 $x(t)$ 的解析信号。

$$j(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \quad (7.2.6)$$

由于 $\hat{x}(t)$ 是 $x(t)$ 与 $1/\pi t$ 的卷积。则：

$$\hat{X}(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) X(\omega) \quad (7.2.7)$$

则解析信号 $j(t)$ 的频谱 $J(\omega)$ 为：

$$J(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}$$

$$J(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} \quad (7.2.8)$$

由此，解析信号 $\mathbf{j(t)}$ 的实部包含了实信号 $\mathbf{x(t)}$ 的全部信息，虚部则与实部有着确定的关系。解析信号仅有单边谱，即仅在正频域有值，且为实信号 $\mathbf{x(t)}$ 频谱正频率分量的两倍。

对解析信号求自相关函数，可以得到

$$R_J(\tau) = 2[R_X(\tau) + jR_{X\hat{X}}(\tau)] = 2[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)]$$

求傅里叶变换，可以得到解析信号的功率谱

$$\begin{aligned} G_J(\omega) &= \begin{cases} 4G_X(\omega) & \omega \geq 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases} \\ &= 4G_X(\omega)u(\omega) \end{aligned}$$

7.1.2 希尔伯特变换的性质

性质1: $\hat{x}(t)$ 的希尔伯特变换为 $-x(t)$;

证明: 由 (7.2.1) 和 (7.2.2)

$$H[\hat{x}(t)] = \hat{x}(t) * \frac{1}{\pi t} = -\hat{x}(t) * \left(-\frac{1}{\pi t}\right) = -x(t)$$

两次希尔伯特变换相当于一个倒相器

性质2:若 $y(t) = h(t) * x(t)$,则 $y(t)$ 的希尔伯特变换:

$$\hat{y}(t) = h(t) * \hat{x}(t) = \hat{h}(t) * x(t) \quad (7.2.9)$$

证明: 利用卷积运算满足结合律和交换律容易得出:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= h(t) * x(t) * \frac{1}{\pi t} = h(t) * [x(t) * \frac{1}{\pi t}] = h(t) * \hat{x}(t) \\ &= [h(t) * \frac{1}{\pi t}] * x(t) = \hat{h}(t) * x(t) \end{aligned}$$

性质4: 平稳随机过程 $X(t)$ 的希尔伯特变换 $\hat{X}(t)$, 有

$$R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau) \quad (7.2.12)$$

证明:

$$S_{\hat{X}}(\omega) = S_X(\omega) |H(j\omega)|^2 = S_X(\omega) \quad |H(j\omega)|^2 = 1$$

经付氏反变换, 得: $R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau)$

可见, 希尔伯特变换是线性变换, 线性系统输入为平稳过程, 输出也为平稳过程。

推论1: 由 $R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau)$ 得到:

$$R_{\hat{X}}(0) = R_X(0)$$

即经过希尔伯特变换后, 平均功率不变。(性质3)

推论2:

$$S_{\hat{X}}(\omega) = S_X(\omega) |H(j\omega)|^2 = S_X(\omega)$$

即, $X(t)$ 经希尔伯特变换后功率谱不变。


性质3: $\hat{x}(t)$ 与 $x(t)$ 的能量及平均功率相等,即:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}^2(t)dt \quad (7.2.10)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \hat{x}^2(t)dt \quad (7.2.11)$$

希尔伯特变换是一个全通滤波器, 信号通过它只改变了信号的相位, 不会改变信号的能量和功率。

性质5: $R_{\hat{X}X}(\tau) = -\hat{R}_X(\tau)$ $R_{XX\hat{X}}(\tau) = \hat{R}_X(\tau)$


$$R_{XX\hat{X}}(\tau) = -R_{\hat{X}X}(\tau)$$

证明

$$R_{XX\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau) * \left(\frac{1}{\pi\tau}\right) = \hat{R}_X(\tau)$$

$$R_{\hat{X}X}(\tau) = R_X(\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) = -\hat{R}_X(\tau)$$

综合可得:

$$R_{\hat{X}X}(\tau) = R_{XX\hat{X}}(-\tau) = -\hat{R}_X(\tau) = -R_{\hat{X}X}(\tau)$$

性质5: $R_{\hat{X}X}(\tau) = -\hat{R}_X(\tau)$ $R_{XX}(\tau) = \hat{R}_X(\tau)$

$$R_{XX}(\tau) = -R_{\hat{X}X}(\tau)$$

证明 $R_{\hat{X}X}(\tau) = E[\hat{X}(t)X(t+\tau)]$ 代入 $\hat{X}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\eta)}{t-\eta} d\eta$

$$R_{\hat{X}X}(\tau) = E\left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\eta)}{t-\eta} d\eta \bullet X(t+\tau)\right]$$

令 $t - \eta = \lambda$

$$R_{\hat{X}X}(\tau) = E\left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(t-\lambda)X(t+\tau)}{\lambda} d\lambda\right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t-\lambda)X(t+\tau)] \frac{1}{\lambda} d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_X(\tau+\lambda)}{\lambda} d\lambda \quad \begin{matrix} \tau+\lambda=\lambda' \\ \text{====} \end{matrix} -\hat{R}_X(\tau)$$

综合可得:

$$R_{\hat{X}X}(\tau) = R_{XX}(-\tau) = -\hat{R}_X(\tau) = -R_{XX}(\tau)$$

$$R_{\hat{X}X}(\tau) = R_{XX\hat{}}(-\tau) = -\hat{R}_X(\tau) = -R_{XX\hat{}}(\tau)$$

$$R_{\hat{X}X}(-\tau) = -R_{\hat{X}X}(\tau) \quad \longrightarrow \quad R_{\hat{X}X}(0) = -R_{\hat{X}X}(0)$$

$$R_{\hat{X}X}(0) = 0$$

平稳随机过程 $X(t)$ 在同一时刻是正交的，
其他的互相关函数是奇函数。

性质6 设具有有限带宽 $\Delta\omega$ 的信号 $a(t)$ 的付氏变换为 $A(\omega)$, 假定 $\omega_0 > \Delta\omega/2$, 则有:

$$H[a(t)\cos\omega_0 t] = a(t)\sin\omega_0 t \quad (7.2.16)$$

$$H[a(t)\sin\omega_0 t] = -a(t)\cos\omega_0 t \quad (7.2.17)$$

$$\begin{aligned} F\{H[a(t)\cos\omega_0 t]\} &= F\left\{a(t)\cos\omega_0 t * \frac{1}{\pi t}\right\} \\ &= -F\{a(t)\cos\omega_0 t\} j \operatorname{sgn}(\omega) \\ &= -\left[\frac{1}{2}A(j(\omega+\omega_0)) + \frac{1}{2}A(j(\omega-\omega_0))\right] j \operatorname{sgn}(\omega) \\ &= \frac{1}{2j}A(j(\omega-\omega_0)) - \frac{1}{2j}A(j(\omega+\omega_0)) \end{aligned}$$

由于 $\omega_0 > \Delta\omega/2$,

$$\begin{aligned}
 F\{a(t)\sin\omega_0 t\} &= \frac{1}{2\pi j} A(j\omega) * \pi(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)) \\
 &= \frac{1}{2j} A(j(\omega - \omega_0)) - \frac{1}{2j} A(j(\omega + \omega_0))
 \end{aligned}$$

可以发现两个函数的傅里叶变换相等，因此，

$$H[a(t)\cos\omega_0 t] = a(t)\sin\omega_0 t$$

7.2 窄带随机过程表示

7.2.1 窄带随机过程

定义：若 $x(t)$ 的功率谱密度满足

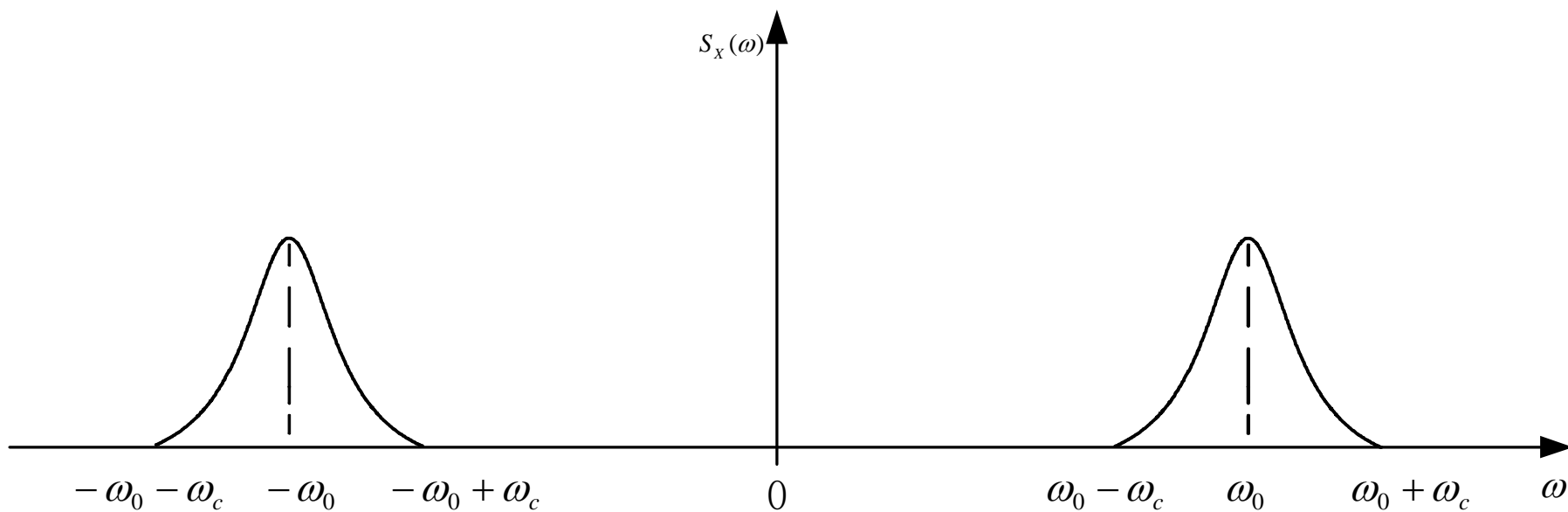
$$S_X(\omega) = \begin{cases} S_X(\omega) & \omega_0 - \omega_c \leq |\omega| \leq \omega_0 + \omega_c \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

且 $\omega_c \ll \omega_0$ ，称

$X(t)$ 为高频窄带随机过程，简称窄带随机过程

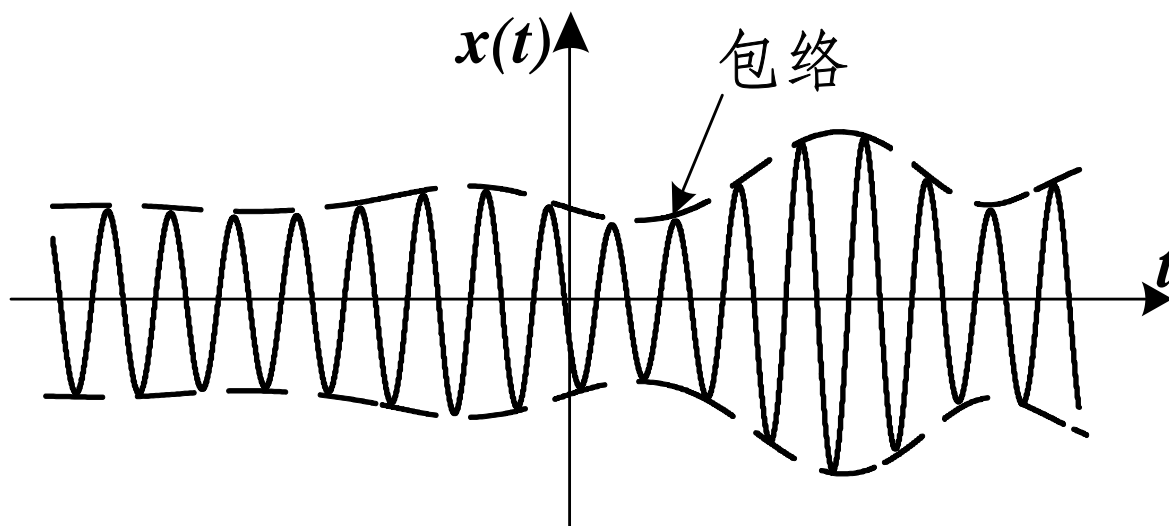
7.2 窄带随机过程表示

7.2.1 窄带随机过程



7.2 窄带随机过程表示

7.2.1 窄带随机过程



7.2 窄带随机过程表示

7.2.2 窄带随机过程的表达式

中心频率

$$X(t) = \underbrace{A(t)}_{\text{包络}} \cos[\underbrace{\omega_0 t}_{\text{中心频率}} + \underbrace{\varphi(t)}_{\text{相位}}]$$

$$X(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = \underbrace{A(t) \cos \omega_0 t \cos \varphi(t)}_{a(t) = A(t) \cos \varphi(t)} - \underbrace{A(t) \sin \omega_0 t \sin \varphi(t)}_{b(t) = A(t) \sin \varphi(t)}$$

$$X(t) = a(t) \cos \omega_0 t - b(t) \sin \omega_0 t$$
$$A(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}$$
$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{b(t)}{a(t)}$$

7.2 窄带随机过程表示

7.2.2 窄带随机过程的表达式

中心频率

$$X(t) = \underbrace{A(t)}_{\text{包络}} \cos[\underbrace{\omega_0 t}_{\text{中心频率}} + \underbrace{\varphi(t)}_{\text{相位}}]$$

$$X(t) = a(t) \cos \omega_0 t - b(t) \sin \omega_0 t$$

$$\hat{X}(t) = a(t) \sin \omega_0 t + b(t) \cos \omega_0 t$$

$$a(t) = X(t) \cos \omega_0 t + \hat{X}(t) \sin \omega_0 t$$

$$b(t) = -X(t) \sin \omega_0 t + \hat{X}(t) \cos \omega_0 t$$

莱斯表达式

7.2 窄带随机过程表示

$$a(t) = X(t) \cos \omega_0 t + \hat{X}(t) \sin \omega_0 t$$

7.2.3 莱斯表达式的性质

$X(t)$ 为平稳过程，且假设其均值为0。

$a(t)$ $b(t)$ 都是实随机过程

$$E[a(t)] = E[b(t)] = 0$$

$a(t)$ $b(t)$ 都是平稳随机过程，且联合平稳

$$E[a^2(t)] = E[b^2(t)] = E[X^2(t)]$$

$$R_{ab}(\tau) = -R_X(\tau) \sin \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \cos \omega_0 \tau$$

$$R_{ab}(0) = 0$$

$$R_X(\tau) = R_a(\tau) \cos \omega_0 \tau + R_{ba}(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

$$S_a(\omega) = S_b(\omega) = \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) + S_X(\omega - \omega_0)]$$

$$S_{ab}(\omega) = -j \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) - S_X(\omega - \omega_0)]$$

7.2 窄带随机过程表示

7.2.3 莱斯表达式的性质

$a(t)$ $b(t)$ 都是实随机过程



证明：因为 $X(t)$ 和 $\hat{X}(t)$ 都是实过程。

$$\text{由 } a(t) = X(t) \cos \omega_0 t + \hat{X}(t) \sin \omega_0 t$$

$$b(t) = -X(t) \sin \omega_0 t + \hat{X}(t) \cos \omega_0 t$$

所以 $a(t)$ $b(t)$ 都是实随机过程

7.2 窄带随机过程表示

$$a(t) = X(t) \cos \omega_0 t + \hat{X}(t) \sin \omega_0 t$$

7.2.3 莱斯表达式的性质

$a(t)$ $b(t)$ 都是实随机过程

$$E[a(t)] = E[b(t)] = 0$$

$a(t)$ $b(t)$ 都是平稳随机过程，且联合平稳

$$E[a^2(t)] = E[b^2(t)] = E[X^2(t)]$$

$$R_{ab}(\tau) = -R_X(\tau) \sin \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \cos \omega_0 \tau$$

$$R_{ab}(0) = 0$$

$$R_X(\tau) = R_a(\tau) \cos \omega_0 \tau + R_{ba}(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

$$S_a(\omega) = S_b(\omega) = \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) + S_X(\omega - \omega_0)]$$

$$S_{ab}(\omega) = -j \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) - S_X(\omega - \omega_0)]$$

7.2 窄带随机过程表示

7.2.3 莱斯表达式的性质

$$E[a(t)] = E[b(t)] = 0$$


证明：因为由假设，

$$E[X(t)] = 0$$

所以，

$$E[\hat{X}(t)] = 0$$

因此，

$$E[a(t)] = E[X(t)] \cos \omega_0 t + E[\hat{X}(t)] \sin \omega_0 t = 0$$

7.2 窄带随机过程表示

7.2.3 莱斯表达式的性质

$a(t)$ $b(t)$ 都是实随机过程

$$E[a(t)] = E[b(t)] = 0$$

$a(t)$ $b(t)$ 都是平稳随机过程，且联合平稳

$$E[a^2(t)] = E[b^2(t)] = E[X^2(t)]$$

$$R_{ab}(\tau) = -R_X(\tau) \sin \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \cos \omega_0 \tau$$

$$R_{ab}(0) = 0$$

$$R_X(\tau) = R_a(\tau) \cos \omega_0 \tau + R_{ba}(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

$$S_a(\omega) = S_b(\omega) = \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) + S_X(\omega - \omega_0)]$$

$$S_{ab}(\omega) = -j \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) - S_X(\omega - \omega_0)]$$

7.2 窄带随机过程表示

7.2.3 莱斯表达式的性质

$$a(t) = X(t) \cos \omega_0 t + \hat{X}(t) \sin \omega_0 t$$

$a(t)$ $b(t)$ 都是平稳随机过程，且联合平稳

证明： $R_a(\tau) = E[a(t)a(t+\tau)]$

$$\begin{aligned} &= E[\{X(t) \cos \omega_0 t + \hat{X}(t) \sin \omega_0 t\} \cdot \\ &\quad \{X(t+\tau) \cos \omega_0(t+\tau) + \hat{X}(t+\tau) \sin \omega_0(t+\tau)\}] \\ &= R_X(\tau) \cos \omega_0 t \cos \omega_0(t+\tau) + R_{X\hat{X}}(\tau) \cos \omega_0 t \sin \omega_0(t+\tau) \\ &\quad + R_{\hat{X}X}(\tau) \sin \omega_0 t \cos \omega_0(t+\tau) + R_{\hat{X}}(\tau) \sin \omega_0 t \sin \omega_0(t+\tau) \end{aligned}$$

因为：

$$R_{X\hat{X}}(\tau) = -R_{\hat{X}X}(\tau) \quad R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau), \text{ 所以}$$

$$R_a(\tau) = R_X(\tau) \cos \omega_0 \tau + R_{X\hat{X}}(\tau) \sin \omega_0 \tau \quad \text{它与} t \text{ 无关}$$

$$E[a^2(t)] = R_a(0) = R_X(0) < \infty$$

7.2 窄带随机过程表示

7.2.3 莱斯表达式的性质

$a(t)$ $b(t)$ 都是实随机过程

$$E[a(t)] = E[b(t)] = 0$$

$a(t)$ $b(t)$ 都是平稳随机过程，且联合平稳

$$E[a^2(t)] = E[b^2(t)] = E[X^2(t)]$$

$$R_{ab}(\tau) = -R_X(\tau) \sin \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \cos \omega_0 \tau$$

$$R_{ab}(0) = 0$$


$$R_X(\tau) = R_a(\tau) \cos \omega_0 \tau + R_{ba}(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

$$S_a(\omega) = S_b(\omega) = \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) + S_X(\omega - \omega_0)]$$

$$S_{ab}(\omega) = -j \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) - S_X(\omega - \omega_0)]$$

7.2 窄带随机过程表示

7.2.3 莱斯表达式的性质

$$E[a^2(t)] = E[b^2(t)] = E[X^2(t)]$$


证明：由性质3，当 $\tau = 0$

$$E[a^2(t)] = E[b^2(t)] = E[X^2(t)]$$

7.2 窄带随机过程表示

$$a(t) = X(t) \cos \omega_0 t + \hat{X}(t) \sin \omega_0 t$$

7.2.3 莱斯表达式的性质

$a(t)$ $b(t)$ 都是实随机过程

$$E[a(t)] = E[b(t)] = 0$$

$a(t)$ $b(t)$ 都是平稳随机过程，且联合平稳

$$E[a^2(t)] = E[b^2(t)] = E[X^2(t)]$$

$$R_{ab}(\tau) = -R_X(\tau) \sin \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \cos \omega_0 \tau$$

$$R_{ab}(0) = 0$$

$$R_X(\tau) = R_a(\tau) \cos \omega_0 \tau + R_{ba}(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

$$S_a(\omega) = S_b(\omega) = \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) + S_X(\omega - \omega_0)]$$

$$S_{ab}(\omega) = -j \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) - S_X(\omega - \omega_0)]$$

7.2 窄带随机过程表示

7.2.3 莱斯表达式的性质

$$R_{ab}(\tau) = -R_X(\tau) \sin \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \cos \omega_0 \tau \quad R_{ab}(\tau) = -R_{ba}(\tau) = -R_{ab}(-\tau)$$


证明： $R_{ab}(\tau) = E[a(t)b(t+\tau)]$

$$= E[\{X(t) \cos \omega_0 t + \hat{X}(t) \sin \omega_0 t\} \bullet$$

$$\{-X(t+\tau) \sin \omega_0(t+\tau) + \hat{X}(t+\tau) \cos \omega_0(t+\tau)\}]$$

$$= -R_X(\tau) \cos \omega_0 t \sin \omega_0(t+\tau) + R_{\hat{X}}(\tau) \sin \omega_0 t \cos \omega_0(t+\tau) \\ - R_{\hat{X}X}(\tau) \sin \omega_0 t \sin \omega_0(t+\tau) + R_{XX}(\tau) \cos \omega_0 t \cos \omega_0(t+\tau)$$

$$R_{XX}(\tau) = -R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) \quad R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau) \quad R_{X\hat{X}}(\tau) = \hat{R}_X(\tau)$$

7.2 窄带随机过程表示

7.2.3 莱斯表达式的性质

$a(t)$ $b(t)$ 都是实随机过程

$$E[a(t)] = E[b(t)] = 0$$

$a(t)$ $b(t)$ 都是平稳随机过程，且联合平稳

$$E[a^2(t)] = E[b^2(t)] = E[X^2(t)]$$

$$R_{ab}(\tau) = -R_X(\tau) \sin \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \cos \omega_0 \tau$$

$$R_{ab}(0) = 0$$


$$R_X(\tau) = R_a(\tau) \cos \omega_0 \tau + R_{ba}(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

$$S_a(\omega) = S_b(\omega) = \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) + S_X(\omega - \omega_0)]$$

$$S_{ab}(\omega) = -j \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) - S_X(\omega - \omega_0)]$$

7.2 窄带随机过程表示

7.2.3 莱斯表达式的性质

$$R_{ab}(0) = 0$$


证明：由性质5，

$$R_{ab}(\tau) = -R_{ab}(-\tau)$$

7.2 窄带随机过程表示

7.2.3 莱斯表达式的性质

$a(t)$ $b(t)$ 都是实随机过程

$$E[a(t)] = E[b(t)] = 0$$

$a(t)$ $b(t)$ 都是平稳随机过程，且联合平稳

$$E[a^2(t)] = E[b^2(t)] = E[X^2(t)]$$

$$R_{ab}(\tau) = -R_X(\tau) \sin \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \cos \omega_0 \tau$$

$$R_{ab}(0) = 0$$


$$R_X(\tau) = R_a(\tau) \cos \omega_0 \tau + R_{ba}(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

$$S_a(\omega) = S_b(\omega) = \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) + S_X(\omega - \omega_0)]$$

$$S_{ab}(\omega) = -j \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) - S_X(\omega - \omega_0)]$$

7.2 窄带随机过程表示

7.2.3 莱斯表达式的性质

$$R_X(\tau) = R_a(\tau) \cos \omega_0 \tau + R_{ba}(\tau) \sin \omega_0 \tau$$


证明: $R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$

$$\begin{aligned} &= E[\{a(t) \cos \omega_0 t - b(t) \sin \omega_0 t\} \bullet \\ &\quad \{a(t+\tau) \cos \omega_0(t+\tau) - b(t+\tau) \sin \omega_0(t+\tau)\}] \\ &= R_a(\tau) \cos \omega_0 t \cos \omega_0(t+\tau) - R_{ba}(\tau) \sin \omega_0 t \cos \omega_0(t+\tau) \\ &\quad - R_{ab}(\tau) \cos \omega_0 t \sin \omega_0(t+\tau) + R_b(\tau) \sin \omega_0 t \sin \omega_0(t+\tau) \end{aligned}$$
$$R_a(\tau) = R_b(\tau) \quad R_{ab}(\tau) = -R_{ba}(\tau)$$

7.2 窄带随机过程表示

7.2.3 莱斯表达式的性质

$a(t)$ $b(t)$ 都是实随机过程

$$E[a(t)] = E[b(t)] = 0$$

$a(t)$ $b(t)$ 都是平稳随机过程，且联合平稳

$$E[a^2(t)] = E[b^2(t)] = E[X^2(t)]$$

$$R_{ab}(\tau) = -R_X(\tau) \sin \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \cos \omega_0 \tau$$

$$R_{ab}(0) = 0$$

$$R_X(\tau) = R_a(\tau) \cos \omega_0 \tau + R_{ba}(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

$$S_a(\omega) = S_b(\omega) = \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) + S_X(\omega - \omega_0)]$$

$$S_{ab}(\omega) = -j \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) - S_X(\omega - \omega_0)]$$

7.2 窄带随机过程表示

7.2.3 莱斯表达式的性质

$$S_a(\omega) = S_b(\omega) = \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) + S_X(\omega - \omega_0)]$$


证明：由性质3，有

$$\begin{aligned} R_a(\tau) &= R_b(\tau) = R_X(\tau) \cos \omega_0 \tau + R_{X\hat{X}}(\tau) \sin \omega_0 \tau \\ &= \frac{1}{2} R_X(\tau) [e^{i\omega_0 \tau} + e^{-i\omega_0 \tau}] + \frac{1}{2j} R_{X\hat{X}}(\tau) [e^{i\omega_0 \tau} - e^{-i\omega_0 \tau}] \end{aligned}$$

两边取付氏变换，注意

$$S_{X\hat{X}}(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) S_X(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

7.2 窄带随机过程表示

7.2.3 莱斯表达式的性质

$$S_a(\omega) = S_b(\omega) = \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) + S_X(\omega - \omega_0)]$$

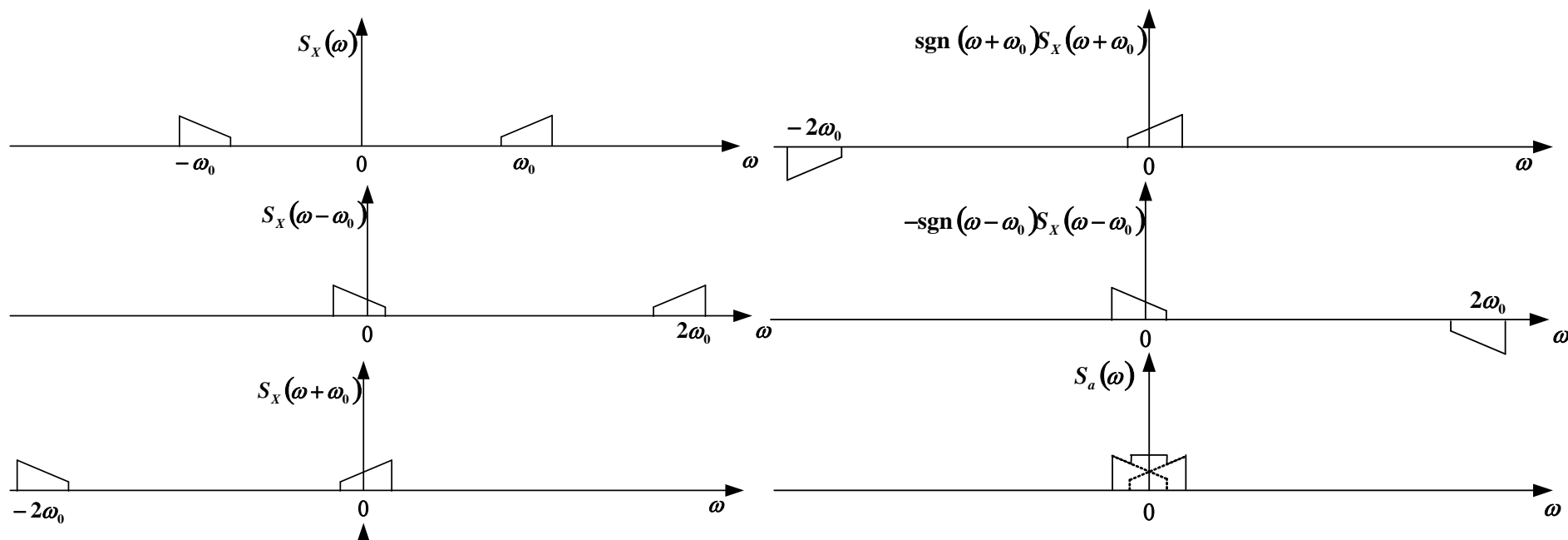

证明：

$$\begin{aligned} S_a(\omega) &= \frac{1}{2} [S_X(\omega - \omega_0) + S_X(\omega + \omega_0)] \\ &\quad + \frac{1}{2j} [-j \operatorname{sgn}(\omega - \omega_0) S_X(\omega - \omega_0) + j \operatorname{sgn}(\omega + \omega_0) S_X(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2} [S_X(\omega - \omega_0) + S_X(\omega + \omega_0)] \\ &\quad + \frac{1}{2} [-\operatorname{sgn}(\omega - \omega_0) S_X(\omega - \omega_0) + \operatorname{sgn}(\omega + \omega_0) S_X(\omega + \omega_0)] \\ &= \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) + S_X(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

7.2 窄带随机过程表示

7.2.3 莱斯表达式的性质

$$S_a(\omega) = S_b(\omega) = \text{LOWPASS}[S_X(\omega + \omega_0) + S_X(\omega - \omega_0)]$$



7.3 窄带随机过程包络和相位的特性

工程上应用最多的窄带随机过程是窄带高斯过程，因为不仅热噪声是高斯过程，很多宽带噪声通过窄带系统后也成为窄带高斯过程。因此，重点讨论窄带高斯过程是很有必要的，当接收机中放输出的窄带随机过程经过检波器或鉴频器进行非线性处理时，先分析窄带过程的包络或相位的统计特性，可使问题大为简化。

7.3 窄带随机过程包络和相位的特性

7.3.1 窄带随机过程包络与相位的慢变化特性

定理：当 $X(t)$ 为窄带随机过程，即 $X(t)$ 的功率谱带宽 $\Delta\omega \ll \omega_0$ ， $A(t)$ 和 $\varphi(t)$ 是慢变换的随机过程。

证明： 因为 $a(t)$ $b(t)$ 是低频限带随机过程，

即它们的功率谱只在 $0 \leq |\omega| \leq \omega_c$ 区间内非0，且

$|\omega_c| \ll |\omega_0|$ 则

$$\begin{aligned} E\{[a(t+\tau) - a(t)]^2\} &= E[a^2(t+\tau) + a^2(t) - 2a(t)a(t+\tau)] \\ &= 2R_a(0) - 2R_a(\tau) \end{aligned}$$

7.3 窄带随机过程包络和相位的特性

证明：

此式说明：若 $\tau \ll \frac{1}{\omega_c}$ ，在时间 t 到 $t + \tau$ 的时间内， $a(t)$ 的变化的均方值远小于 $a(t)$ 的均方值。

因为 $\omega_c \ll \omega_0$ ，即 $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \ll T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$ ，令 $\tau = T_0$

$$\tau = T_0 \ll \frac{1}{\omega_c}$$

由切比雪夫不等式： $P\{|x - E(x)| > \varepsilon\} \leq \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2}$

令 $x = a(t + T_0) - a(t)$ ，注意 $E(x) = E[a(t + T_0)] - E[a(t)] = 0$

代入上式，得： $P\{|[a(t + T_0) - a(t)] - 0| > \varepsilon\} \leq \frac{E\{[a(t + T_0) - a(t)]^2\}}{\varepsilon^2}$

7.3 窄带随机过程包络和相位的特性

证明：

$$\text{即} \quad P\{|a(t+T_0)-a(t)| > \varepsilon\} \leq \frac{\omega_c^2 T_0^2 E[a^2(t)]}{\varepsilon^2}$$

$\omega_c T_0 \ll 1$ 即 T_0 足够小时，对于给定的 $\varepsilon > 0$

右式趋近于0。这就是说， $x(t)$ 为窄带随机过程时，在一个高频周期

T_0 内， $a(t)$ 的变化大于 ε 的概率趋于0。也就是说，

$a(t)$ 为慢变换的随机过程，同理，

$b(t)$ 也为慢变化随机过程，则包络 $A(t)$ 相位 $\varphi(t)$

也是慢变化的随机过程。

7.3 窄带随机过程包络和相位的特性

7.3.2 包络和相位的一维概率密度

假设窄带高斯实随机过程 $X(t)$ 的均值为 0, 方差为 σ^2

表示成莱斯表示式

$$X(t) = a(t) \cos \omega_0 t - b(t) \sin \omega_0 t \quad \begin{cases} a(t) = A(t) \cos \varphi(t) \\ b(t) = A(t) \sin \varphi(t) \end{cases}$$

令 t 固定, $\begin{cases} a_t = A_t \cos \varphi_t \\ b_t = A_t \sin \varphi_t \end{cases}$

$$f_{ab}(a_t, b_t) \longrightarrow f_{A\varphi}(A_t, \varphi_t) \longrightarrow f_A(A_t), f_\varphi(\varphi_t)$$

二维r.v.函数的概率密度变换

边沿概率密度

7.3 窄带随机过程包络和相位的特性

7.3.2 包络和相位的一维概率密度

$$\begin{aligned}f_{ab}(a_t, b_t) &= f_a(a_t)f_b(b_t) \\&= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{a_t^2 + b_t^2}{2\sigma^2}\right\} \\&= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}\right\}\end{aligned}$$

7.3 窄带随机过程包络和相位的特性

7.3.2 包络和相位的一维概率密度

利用二维随机变量函数的概率密度变换有：

$$f_{A\varphi}(A_t, \varphi_t) = |J| f_{ab}(a_t, b_t)$$

式中J为雅可比行列式，有

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_t}{\partial A_t} & \frac{\partial a_t}{\partial \varphi_t} \\ \frac{\partial b_t}{\partial A_t} & \frac{\partial b_t}{\partial \varphi_t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_t & -A_t \sin \varphi_t \\ \sin \varphi_t & A_t \cos \varphi_t \end{vmatrix} = A_t$$

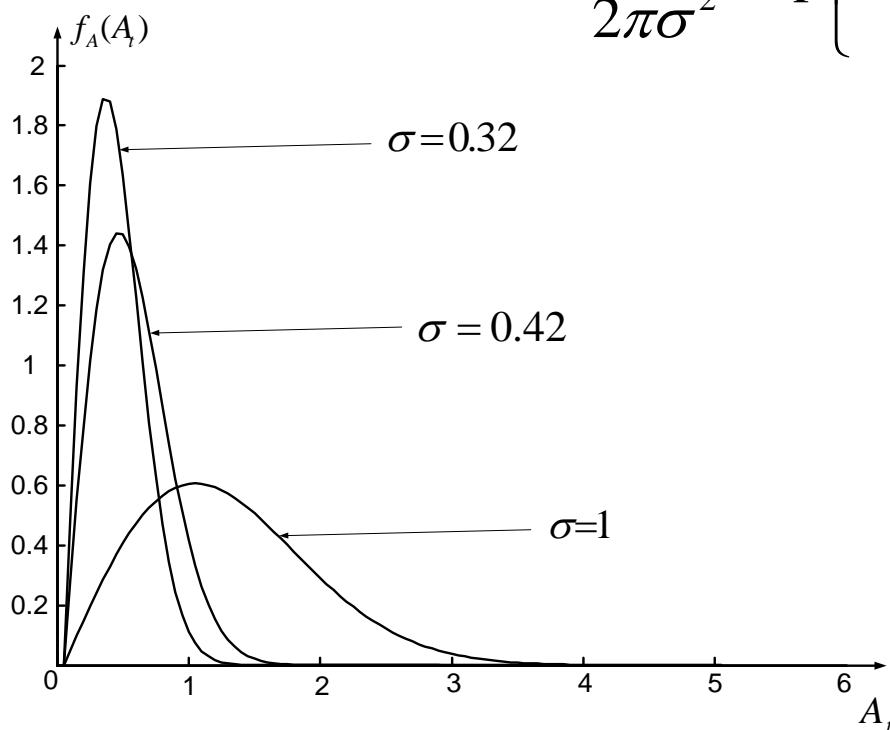
$$f_{A\varphi}(A_t, \varphi_t) = \begin{cases} \frac{A_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}\right\} & A_t \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 & else \end{cases}$$

7.3 窄带随机过程包络和相位的特性

7.3.2 包络和相位的一维概率密度

$$\begin{aligned} f_A(A_t) &= \int_0^{2\pi} f_{A\varphi}(A_t, \varphi_t) d\varphi_t = f_{A\varphi}(A_t, \varphi_t) \int_0^{2\pi} d\varphi_t \\ &= \frac{A_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}\right\} 2\pi = \frac{A_t}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned}$$

瑞利分布



$$f_{\varphi}(\varphi_t) = \int_0^{\infty} f_{A\varphi}(A_t, \varphi_t) dA_t = \frac{1}{2\pi}$$

均匀分布

$$0 \leq \varphi_t \leq 2\pi$$

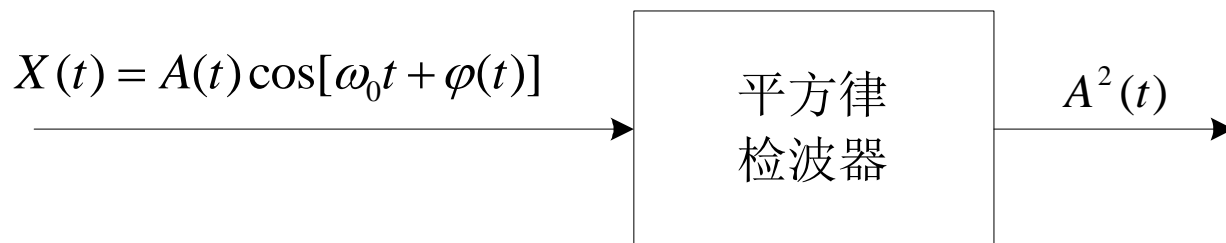
$$f_{A\varphi}(A_t, \varphi_t) = f_A(\varphi_t) f_{\varphi}(\varphi_t)$$

结论：

- 1、窄带高斯随机过程包络的一维概率分布为瑞利分布。
- 2、窄带高斯随机过程相位的一维概率分布为均匀分布。
- 3、窄带高斯随机过程的包络和相位在**同一时刻**的状态，是两个统计独立的随机变量。

7.3 窄带随机过程包络和相位的特性

3.7.3 窄带高斯随机过程包络平方的概率密度



已经推导出 $f_A(A_t) = \frac{A_t}{\sigma^2} \exp(-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}), A_t \geq 0$ $u_t = A_t^2$

$$A_t = h(u_t) = +\sqrt{u_t} \quad A_t \geq 0$$

$$f_u(u_t) = f_A(A_t) |h'(u_t)| = \frac{1}{2\sqrt{u_t}} \frac{\sqrt{u_t}}{\sigma^2} \exp(-\frac{u_t}{2\sigma^2}) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp(-\frac{u_t}{2\sigma^2})$$

概率密度为指数函数

7.3 窄带随机过程包络和相位的特性

7.3.4 窄带高斯随机过程包络与相位的二维概率密度函数

7.4 正弦信号与窄带SP之和的包络和相位的特性

7.4.1 正弦信号与窄带随机过程之和的包络与相位概率密度函数

假设 $X(t) = S(t) + N(t)$

$$S(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta)$$

式中 a 、 ω_0 为已知常数；

均匀分布的随机变量 $(0, 2\pi)$

$$N(t)$$

平稳窄带实高斯随机过程，具有零均值和方差 σ^2

功率谱密度对称于 $\pm\omega_0$

$N(t)$ 表示成莱斯表示式 $N(t) = a(t) \cos \omega_0 t - b(t) \sin \omega_0 t$

7.4 正弦信号与窄带SP之和的包络和相位的特性

7.4.1 正弦信号与窄带随机过程之和的包络与相位概率密度函数

$$X(t) = [a \cos \theta + a(t)] \cos \omega_0 t - [a \sin \theta + b(t)] \sin \omega_0 t$$

$$\text{令} \quad \left. \begin{aligned} a_1(t) &= a \cos \theta + a(t) \\ b_1(t) &= a \sin \theta + b(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\text{于是, } X(t) = a_1(t) \cos \omega_0 t - b_1(t) \sin \omega_0 t$$

低频限带随机过程

同样 $X(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ 准正弦振荡

$$A(t) = \sqrt{a_1^2(t) + b_1^2(t)}$$

$$\varphi(t) = \arctg[b_1(t) / a_1(t)]$$

慢变化随机过程

概率密度函数?

7.4 正弦信号与窄带SP之和的包络和相位的特性

7.4.1 正弦信号与窄带随机过程之和的包络与相位概率密度函数

先把 θ 固定，再把 t 固定，得到随机变量

$$\begin{cases} a_{1t} = a \cos \theta + a_t \\ b_{1t} = a \sin \theta + b_t \end{cases} \quad \text{互相独立的高斯变量}$$

1、求条件二维联合概率密度函数 $f_{a_1 b_1 | \theta}(a_{1t}, b_{1t} | \theta)$

$$E[a_{1t} | \theta] = a \cos \theta$$

$$E[b_{1t} | \theta] = a \sin \theta$$

$$D(a_{1t} | \theta) = D(b_{1t} | \theta) = \sigma^2$$

$$f_{a_1 b_1 | \theta}(a_{1t}, b_{1t} | \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(a_{1t} - a \cos \theta)^2 + (b_{1t} - a \sin \theta)^2] \right\}$$

7.4 正弦信号与窄带SP之和的包络和相位的特性

7.4.1 正弦信号与窄带随机过程之和的包络与相位概率密度函数

2、由随机变量的函数的概率分布求 $f_{A\varphi|\theta}(A_t, \varphi_t|\theta)$

$$\begin{cases} a_{1t} = A_t \cos \varphi_t \\ b_{1t} = A_t \sin \varphi_t \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi_t & -A_t \sin \varphi_t \\ \sin \varphi_t & A_t \cos \varphi_t \end{vmatrix} = A_t$$

$$f_{A\varphi|\theta}(A_t, \varphi_t|\theta) = |J| f_{a_1 b_1|\theta}(a_{1t}, b_{1t}|\theta)$$

$$= \frac{A_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[A_t^2 + a^2 - 2a(a_{1t} \cos \theta + b_{1t} \sin \theta)]\right\}$$

7.4 正弦信号与窄带SP之和的包络和相位的特性

7.4.1 正弦信号与窄带随机过程之和的包络与相位概率密度函数

$$\begin{aligned}f_{A\varphi|\theta}(A_t, \varphi_t|\theta) &= |J| f_{a_1 b_1|\theta}(a_{1t}, b_{1t}|\theta) \\&= \frac{A_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[A_t^2 + a^2 - 2a(a_{1t} \cos \theta + b_{1t} \sin \theta)]\right\} \\&= \frac{A_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[A_t^2 + a^2 - 2aA_t(\cos \varphi_t \cos \theta + \sin \varphi_t \sin \theta)]\right\} \\&= \frac{A_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[A_t^2 + a^2 - 2aA_t \cos(\theta - \varphi_t)]\right\} \\0 \leq \varphi_t &\leq 2\pi \quad A_t \geq 0\end{aligned}$$

7.4 正弦信号与窄带SP之和的包络和相位的特性

7.4.1 正弦信号与窄带随机过程之和的包络与相位概率密度函数

3. 由边缘分布求 $f_{A|\theta}(A_t|\theta)$ $f_{\varphi|\theta}(\varphi_t|\theta)$

A_t 的条件概率密度为

$$\begin{aligned} f_{A|\theta}(A_t|\theta) &= \int_0^{2\pi} f_{A\varphi|\theta}(A_t, \varphi_t|\theta) d\varphi_t \\ &= \frac{A_t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_t^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{aA_t}{\sigma^2} \cos(\theta - \varphi_t)\right] d\varphi_t \\ &= \frac{A_t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_t^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{aA_t}{\sigma^2}\right) \quad A_t \geq 0 \end{aligned}$$

因此正弦型信号加窄带高斯噪声包络的一维概率密度为

$$f_A(A_t) = \frac{A_t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_t^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{aA_t}{\sigma^2}\right)$$

7.4 正弦信号与窄带SP之和的包络和相位的特性

7.4.1 正弦信号与窄带随机过程之和的包络与相位概率密度函数

3. 由边缘分布求 $f_{A|\theta}(A_t|\theta)$ $f_{\varphi|\theta}(\varphi_t|\theta)$

本章总结

1. 希尔伯特变换

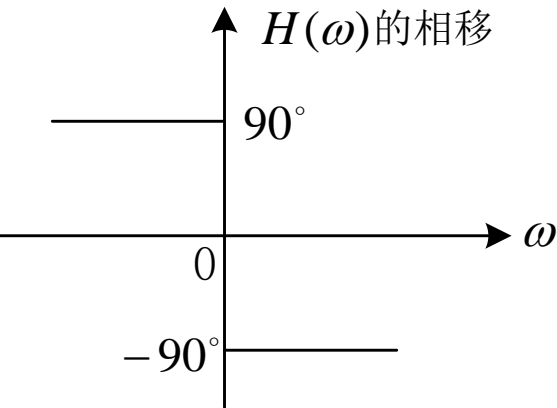
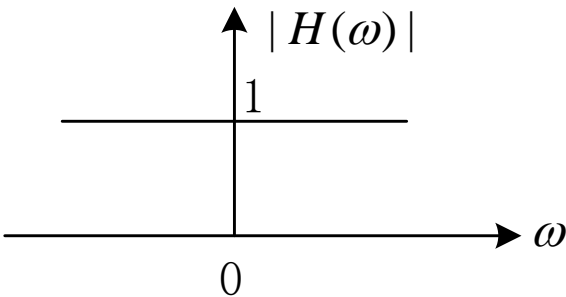
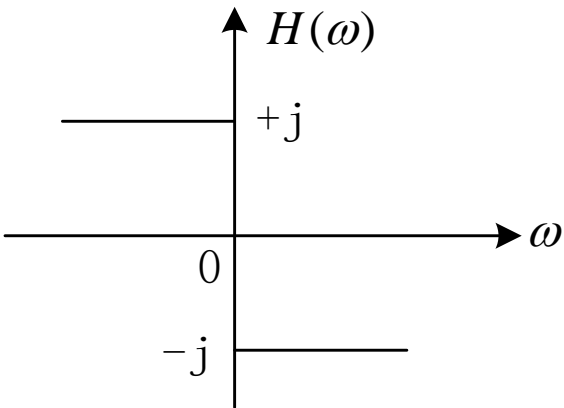
设有一个实值函数 $x(t)$ ，它的希尔伯特变换记作 $\hat{x}(t)$
(或记作 $H[x(t)]$)

$$H[x(t)] = \hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

■ $x(t)$ 的希尔伯特变换为 $x(t)$ 与 $1/\pi t$ 的卷积。因此，可以把希尔伯特变换看作是信号通过一个冲激响应为 $1/\pi t$ 的线性时不变系统的输出。

希尔伯特变换的单位冲激响应及其传递函数

$$h_H(t) = \frac{1}{\pi t} \leftrightarrow H_H(j\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} -j & \omega \geq 0 \\ +j & \omega < 0 \end{cases}$$



$$H(\omega) = \begin{cases} -j & \omega \geq 0 \\ +j & \omega < 0 \end{cases}$$

$$|H(\omega)| = 1$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \omega \geq 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \omega < 0 \end{cases}$$

希尔伯特逆变换

$$\begin{aligned}x(t) = H^{-1}[\hat{x}(t)] &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau \\&= -\frac{1}{\pi} * \hat{x}(t)\end{aligned}$$

$h_{H1}(t) = -\frac{1}{\pi t}$ 为希尔伯特逆变换的单位冲激响应

2. 解析信号

由实信号 $x(t)$ 作实部， $x(t)$ 的希尔伯特变换 $\hat{x}(t)$ 作虚部，构成的复信号 $j(t)$ 称为 $x(t)$ 的解析信号。

$$j(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \quad (7.2.6)$$

由于 $\hat{x}(t)$ 是 $x(t)$ 与 $1/\pi t$ 的卷积。则：

$$\hat{X}(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) X(\omega) \quad (7.2.7)$$

则解析信号 $j(t)$ 的频谱 $J(\omega)$ 为：

$$J(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}$$

7.1.2 希尔伯特变换的性质

性质1: $\hat{x}(t)$ 的希尔伯特变换为 $-x(t)$;

两次希尔伯特变换相当于一个倒相器

性质2: 希尔伯特变换是线性变换, 线性系统输入为平稳过程, 输出也为平稳过程, 且输入与输入输出信号联合平稳。(第五章性质)

性质3: 平稳随机过程 $X(t)$ 的希尔伯特变换 $\hat{X}(t)$, 有

$$R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau)$$

即, 自相关函数相同、平均功率相同、功率谱相同

性质4:

希尔伯特变换是一个全通滤波器，信号通过它只改变了信号的相位，不会改变信号的能量和功率。

性质5: 互相关函数 $R_{x\hat{x}}(\tau)$ 为自相关函数的希尔伯特变换，即

$$R_{x\hat{x}}(\tau) = \hat{R}_x(\tau)$$

同理，有 $R_{\hat{x}x}(\tau) = -\hat{R}_x(\tau)$

$$R_{\hat{x}x}(\tau) = R_{x\hat{x}}(-\tau) = \hat{R}_x(-\tau) = -R_{x\hat{x}}(\tau)$$

$$R_{\hat{x}x}(-\tau) = -R_{x\hat{x}}(\tau) \longrightarrow R_{\hat{x}x}(0) = -R_{x\hat{x}}(0)$$

$$R_{\hat{x}x}(0) = 0$$

平稳随机过程 $X(t)$ 在同一时刻是正交的，其他他们的互相关函数是奇函数。

结论：

- 1、窄带高斯随机过程包络的一维概率分布为瑞利分布。
- 2、窄带高斯随机过程相位的一维概率分布为均匀分布。
- 3、窄带高斯随机过程的包络和相位在**同一时刻**的状态，是两个统计独立的随机变量。