定义

3.7

设一元函数 $f(z)$ 能够展开为 z 的幂级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k \quad (|z|<r) \tag{3.3.1}$$

其中 $r>0$ 表示该幂级数的收敛半径。当 n 阶矩阵 A 的谱半径 $\rho(A)<r$ 时，把收敛的矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k$ 的和称为矩阵函数，记为 $f(A)$，即

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k \tag{3.3.2}$$

3.9

如果函数矩阵 $A(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$ 的每一个元素 $a_{ij}(t)$ 是变量 t 的可导/函数，则称 $A(t)$ 可导，其导数（微商）定义为

$$A'(t)=\frac{d}{dt}A(t)=(\frac{d}{dt}a_{ij}(t))_{,\times n} \tag{3.4.1}$$

3.10

如果函数矩阵 $A(t)$ 的每个元素 $a_{ij}(t)$ 都是区间 $[t_0,\ t_1]$ 上的可积函数，则定义 $A(t)$ 在 $[t_0,\ t_1]$ 上的积分为

$$\int_{t_0}^{t_1}A(t)dt=(\int_{t_0}^{t_1}a_{ij}(t)dt)_{m\times n} \tag{3.4.8}$$

容易验证以下的运算规则成立：

$$\int_{t_0}^{t_1}(A(t)+B(t))dt=\int_{t_0}^{t_1}A(t)dt+\int_{t_0}^{t_1}B(t)dt \tag{3.4.9}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}A(t)Bdt=(\int_{t_0}^{t_1}A(t)dt)B \quad (B\text{与}t\text{无关}) \tag{3.4.10}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}A\cdot B(t)dt=A(\int_{t_0}^{t_1}B(t)dt) \quad (A\text{与}t\text{无关}) \tag{3.4.11}$$

当 $a_{ij}(t)$ 都在 $[t_0, t_1]$ 上连续时，就称 $A(t)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上连续，且有

$$\frac{d}{dt}\int_a^t A(s)ds = A(t) \tag{3.4.12}$$

当 $a'_{ij}(t)$ 都在 $[a, b]$ 上连续时，则

$$\int_a^b A'(t)dt = A(b) - A(a) \tag{3.4.12}$$

定理

3.7

如果 $AB = BA$，则 $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$

3.8

设 $A(t)$，$B(t)$ 是能够进行下面运算的两个可导的函数矩阵，则有

$$\frac{d}{dt}(A(t)+B(t)) = \frac{d}{dt}A(t) + \frac{d}{dt}B(t) \tag{3.4.2}$$

$$\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = \frac{d}{dt}A(t)\cdot B(t) + A(t)\cdot\frac{d}{dt}B(t) \tag{3.4.3}$$

$$\frac{d}{dt}(aA(t)) = \frac{da}{dt}\cdot A(t) + a\frac{d}{dt}A(t) \tag{3.4.4}$$

这里，$a = a(t)$ 为 t 的可导函数

3.9

设 n 阶矩阵 A 与 t 无关，则有

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A \tag{3.4.5}$$

$$\frac{d}{dt}cos(tA) = -A(sin(tA)) = -(sin(tA))A \tag{3.4.6}$$

$$\frac{d}{dt}sin(tA) = A(cos(tA)) = (cos(tA))A \tag{3.4.7}$$

例题

3.3

$$
\begin{aligned}
cos(A+B) = \frac{1}{2}(e^{j(A+B)}+e^{-j(A+B)}) = \frac{1}{2}(e^{jA}e^{jB}+e^{-jA}e^{-jB}) \\
= \frac{1}{2}(\frac{(e^{jA}+e^{-jA})(e^{jB}+e^{-jB})}{2}+\frac{(e^{jA}-e^{-jA})(e^{jB}-e^{-jB})}{2}) \\
= \frac{e^{jA}+e^{-jA}}{2}\frac{e^{jB}+e^{-jB}}{2}-\frac{e^{jA}-e^{-jA}}{2j}\frac{e^{jB}-e^{-jB}}{2j} \\
= cosAcosB - sinAsinB
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
cos2A = cos(A+A) = \frac{1}{2}(e^{j(A+A)}+e^{-j(A+A)}) = \frac{1}{2} \ \ (e^{jA}e^{jA}+e^{-jA}e^{-jA} \\
= \frac{1}{2}(\frac{(e^{jA}+e^{-jA})(e^{jA}+e^{-jA})}{2}+\frac{(e^{jA}-e^{-jA})(e^{jA}-e^{-jA})}{2}) \\
= \frac{e^{jA}+e^{-jA}}{2}\frac{e^{jA}+e^{-jA}}{2}-\frac{e^{jA}-e^{-jA}}{2j}\frac{e^{jA}-e^{-jA}}{2j} \\
= cos^2A - sin^2A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
sin(A+B) = \frac{1}{2j}(e^{j(A+B)}-e^{-j(A+B)}) = \frac{1}{2j}(e^{jA}e^{jB}-e^{-jA}e^{-jB}) \\
= \frac{1}{2j}(\frac{(e^{jA}-e^{-jA})(e^{jB}+e^{-jB})}{2}+\frac{(e^{jA}+e^{-jA})(e^{jB}-e^{-jB})}{2}) \\
= \frac{e^{jA}-e^{-jA}}{2j}\frac{e^{jB}+e^{-jB}}{2}+\frac{e^{jA}+e^{-jA}}{2}\frac{e^{jB}-e^{-jB}}{2j} \\
= sinAcosB + cosAsinB
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
sin2A = sin(A+A) = \frac{1}{2j}(e^{j(A+A)}-e^{-j(A+A)}) = \frac{1}{2j}(e^{jA}e^{jA}-e^{-jA}e^{-jA}) \\
= \frac{1}{2j}(\frac{(e^{jA}-e^{-jA})(e^{jA}+e^{-jA})}{2}+\frac{(e^{jA}+e^{-jA})(e^{jA}-e^{-jA})}{2}) \\
= \frac{e^{jA}-e^{-jA}}{2j}\frac{e^{jA}+e^{-jA}}{2}+\frac{e^{jA}+e^{-jA}}{2}\frac{e^{jA}-e^{-jA}}{2j} \\
= 2sinAcosA
\end{aligned}
$$

3.4

$$\because f(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k \ \ (|z|<1)$$

由定义 3.7，当方阵 A 的谱半径 $\rho(A)<1$ 时，有

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}A^k$$

由定理 3.4

$$f(A)=(I-A)^{-1}$$

3.5

$\rho(\lambda)=det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3$，容易求得 A 的最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda-2)^2$，取 $\psi(\lambda)=(\lambda-2)^2$

(1)

取 $f(\lambda)=e^{\lambda}$，设 $f(\lambda)=\psi(\lambda)g(\lambda)+(a+b\lambda)$，则有

$$\begin{cases} f(2)=e^2 \\ f'(2)=e^2 \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} a+2b=e^2 \\ \qquad b=e^2 \end{cases}$$

解方程组，得 $a=-e^2, \quad b=e^2$. 故 $\rho(\lambda)=e^2(\lambda-1)$，从而

$$e^A=f(A)=r(A)=e^2(A-I)=e^2\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$$

(2)

取 $f(\lambda)=e^{t\lambda}$，设 $f(\lambda)=\psi(\lambda)g(\lambda)+(a+b\lambda)$，则有

$$\begin{cases} f(2)=e^{2t} \\ f'(2)=te^{2t} \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} a+2b & =e^{2t} \\ \qquad b & =te^{2t} \end{cases}$$

解方程组得 $a=(1-2t)e^{2t}$, $b=te^{2t}$. 于是 $r(\lambda)=e^{2t}[(1-2t)+t\lambda]$，从而

$$e^{tA}=f(A)=r(A)=e^{2t}[(1-2t)I+tA]=e^{2t}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ t & 1-t & t\\ t & -t & 1+t\end{bmatrix}$$

3.7

$\varphi(\lambda)=det(\lambda I-A)=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$，$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，特征向量 $p_1=(-1,1,1)^T$，$p_@=(-2,1,0)^T$，$p_3=(0,0,1)^T$，构造矩阵

$$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix},\quad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$$

可得

$$e^{A}=P\begin{bmatrix}e^{-2} & & \\ & e & \\ & & e\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}2e-e^{-2} & 2e-2e^{-2} & 0\\ e^{-2}-e & 2e^{-2}-e & 0\\ e^{-2}-e & 2e^{-2}-2e & e\end{bmatrix}$$

$$e^{tA}=P\begin{bmatrix}e^{-2t} & & \\ & e^{t} & \\ & & e^{t}\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}2e^{t}-e^{-2t} & 2e^{t}-2e^{-2t} & 0\\ e^{-2t}-e^{t} & 2e^{-2t}-e^{t} & 0\\ e^{-2t}-e^{t} & 2e^{-2t}-2e^{t} & e^{t}\end{bmatrix}$$

$$cosA=P\begin{bmatrix}cos(-2) & & \\ & cos1 & \\ & & cos1\end{bmatrix}p^{-1}=\begin{bmatrix}2cos1-cos2 & 2cos1-2cos2 & 0\\ cos2-cos1 & 2cos2-cos1 & 0\\ cos2-cos1 & 2cos2-2cos1 & cos1\end{bmatrix}$$

习题

3.3.5

$\varphi(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$

$$P=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -3 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 4 & 2\end{bmatrix},\quad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$$

可得

$$e^{A}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6e^{2} & 4e^{2}-3e-e^{-1} & 2e^{2}-3e+e^{-1}\\ 0 & 3e+3e^{-1} & 3e-3e^{-1}\\ 0 & 3e-3e^{-1} & 3e+3e^{-1}\end{bmatrix}$$

$$e^{tA}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6e^{2t} & 4e^{2t}-3e^{t}-e^{-t} & 2e^{2t}-3e^{t}+e^{-t}\\ 0 & 3e^{t}+3e^{-t} & 3e^{t}-3e^{-t}\\ 0 & 3e^{t}-3e^{-t} & 3e^{t}+3e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$sinA=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}sin2 & 4sin2-2sin1 & 2sin2-4sin1\\ 0 & 0 & 6sin1\\ 0 & 6sin1 & 0\end{bmatrix}$$

3.3.6

(1)

$$P=\begin{bmatrix} & & & 1\\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix},\quad J=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1\\ & & & 1\end{bmatrix}$$

$$lnA=PlnJP^{-1}=\begin{bmatrix}0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & 0\end{bmatrix}$$

(2)

$$A=\begin{bmatrix}J_1 & \\ & J_2\end{bmatrix},\quad 其中\quad J_1\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$lnJ_1=\begin{bmatrix}ln2 & \frac{1}{2}\\ 0 & ln2\end{bmatrix},\quad lnJ_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$lnA=\begin{bmatrix}lnJ_1 & \\ & lnJ_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ln2 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ & ln2 & 0 & 0\\ & & 0 & 1\\ & & & 0\end{bmatrix}$$

3.4.4

$$f(x) = x^T A x - b^T x + c = Ax^2 - (b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n) + c$$

$$\therefore f'(x) = 2Ax - b$$