定义

4.1

如果方阵 A 可分解成一个下三角矩阵 L 和一个上三角矩阵 U 的乘积，则称 A 可作三角分解或 $LU(LR)$分解. 如果方阵 A 可分解成 $A = LDU$ ，其中 L 是单位下三角矩阵，D 是对角矩阵，U 是单位上三角矩阵，则称 A 可作 LDU分解.

4.2

设矩阵 A 有唯一的 LDU 分解.若把 $A = LDU$ 中的 D 与 U 结合起来，并且用 $\hat{U}$ 来表示，就得到唯一的分解为

$$A = L(DU) = L\hat{U}$$

称为 A 的 $Doolittle$分解; 若把 $A = LDU$ 中的 L 与 D 结合起来，并且用 $\hat{L}$ 来表示，就得到唯一的分解为

$$A = (LD)U = \hat{L}U$$

称为 A 的 $Crout$分解.

4.3

称 $A = L\widetilde{D}^2L^T = (L\widetilde{D})(L\widetilde{D})^T = GG^T$ 为实对称正定矩阵的 $Cholesky$分解(平方根分解、对称三角分解).

例题

4.1

因为 $\Delta_1 = 2,\ \Delta_2 = 5$，所以 A 有唯一的 LDU 分解. 构造矩阵

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

计算，得

$$L_1^{-1}A^{(0)}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 5 & -1\end{bmatrix}=A^{(1)}$$

对 $A^{(1)}$ 构造矩阵，有

$$L_2=\begin{bmatrix}1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad L_2^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

计算，得

$$L_2^{-1}A^{(1)}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{5}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=A^{(2)}$$

$$L=L_1L_2=\begin{bmatrix}1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

于是得 $A^{(0)}=A$ 的 LDU 分解为

$$A=L_1L_2A^{(2)}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{5}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

4.2

容易验证 A 是对称正定矩阵. 由

$$g_{ij}=\begin{cases}(a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}g_{ik}^2)^{1/2} & (i=j)\\ \frac{1}{g_{jj}}(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}h_{ik}g_{jk}) & (i>j)\\ 0 & (i<j)\end{cases}$$

有

$$
\begin{aligned}
&g_{11}=\sqrt{a_{11}}=\sqrt{5}\\
&g_{21}=\frac{a_{21}}{g_{11}}=-\frac{2}{\sqrt{5}},\quad g_{22}=(a_{22}-g_{21}^2)^{1/2}=\frac{11}{5}\\
&g_{31}=\frac{a_{31}}{g_{11}}=0,\quad g_{32}=\frac{a_{32}-g_{31}g_{21}}{g_{22}}=-\sqrt{\frac{5}{11}}\\
&g_{33}=(a_{33}-g_{31}^2-g_{32}^2)^{1/2}=(1-\frac{5}{11})^{1/2}=\sqrt{\frac{6}{11}}
\end{aligned}
$$

从而

$$
A=\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \sqrt{\frac{11}{5}} & 0\\ 0 & -\sqrt{\frac{5}{11}} & \sqrt{\frac{6}{11}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{11}{5}} & -\sqrt{\frac{5}{11}}\\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{6}{11}}\end{bmatrix}
$$

习题

4.1.1

对 A 构造矩阵

$$
L_1=\begin{bmatrix}1 & & & \\ frac25 & 1 & & \\ -frac45 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad L_1^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ -\frac{3}{5} & 1 & & \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

计算，得

$$
L_1^{-1}A=\begin{bmatrix}5 & 2 & -4 & 0\\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 1\\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}=A^{(1)}
$$

对 $A^{(1)}$ 构造矩阵

$$
L_2=\begin{bmatrix}1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & -2 & 1 & \\ 0 & 5 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad L_2^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 2 & 1 & \\ 0 & -5 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

计算，得

$$L_2^{-1}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} = A^{(2)}$$

对 $A^{(2)}$ 构造矩阵

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

计算，得

$$L_3^{-1}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 & 0 \\ & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \\ & & 1 & 2 \\ & & & -7 \end{bmatrix} = A^{(3)}$$

令 $L = L_1L_2L_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{2}{5} & 1 & & \\ -\frac{4}{5} & -2 & 1 & \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，可得 A 的 $Doolittle$ 分解为 $A = LA^{(3)}$，LDU 分解为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ & 1 & -2 & 5 \\ & & 1 & -2 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

4.1.4

可求得 A 的 $Crout$ 分解为

$$A = \begin{bmatrix} 5 & & \\ 2 & \frac{1}{5} & \\ -4 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ & 1 & -2 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

A 的 $cholesky$ 分解为

$$A=\begin{bmatrix}1&&\\ \frac{2}{5}&1&\\ -\frac{4}{5}&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&&\\ &\frac{1}{5}&\\ &&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{2}{5}&-\frac{4}{5}\\ &1&-2\\ &&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{5}&&\\ \frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&\\ -\frac{4}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}&1\end{bmatrix}$$