P8

令 $x_{11}=-x_{12}-x_{21}$，则

$$X=\begin{bmatrix}-x_{12}-x_{21} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix}-y_{12}-y_{21} & y_{12}\\ y_{21} & y_{22}\end{bmatrix}$$

定义 V 的内积为 $(X,Y)=tr(XY_T)=(X_{12}+x_{21})(y_{12}+y_{21}+x_{12}y_{12}+x_{21}y_{21}+x_{22}y_{22})$
任意找一组基

$$X=\begin{bmatrix}-x_{12}-x_{21} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}=x_{12}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+x_{21}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}+x_{22}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=x_{12}X_1+x_{21}X_2+x_{22}X_3$$

$$Y_1'=X_1=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, Y_2'=X_2-\frac{(X_2,Y_1')}{Y_1',Y_1'}Y_1'=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$Y_3'=X_3-\frac{(X_3,Y_2')}{Y_2',Y_2'}Y_2'-\frac{(X_3,Y_1')}{Y_1',Y_1'}Y_1'=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\frac{0}{\frac{3}{2}}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{bmatrix}-\frac{0}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

得到 V 的一组正交基 Y_1',Y_2',Y_3'

$$Y_1'=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, Y_2'=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{bmatrix}, Y_3'=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

则有

$$e_1=\frac{1}{|Y_1'|}Y_1'=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, e_2=\frac{1}{|Y_2'|}Y_2'=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{bmatrix}, e_3=\frac{1}{|Y_3'|}Y_3'=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

得到 V 的一组标准正交基 e_1,e_2,e_3

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, e_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{bmatrix}, e_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$x=\begin{bmatrix}4 & -4\\ 0 & -3\end{bmatrix}=[e_1,e_2,e_3]\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{bmatrix}$$

其中

$$k_1=(x,e_1)=-4\sqrt{2}, k_2=(x,e_2)=0, k_3=(x,e_3)=-3$$

$$Te_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}, Te_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}, Te_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$Te_1=[e_1,e_2,e_3]\begin{bmatrix}2\\ \sqrt{3}\\ 0\end{bmatrix}, Te_2=[e_1,e_2,e_3]\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, Te_3=[e_1,e_2,e_3]\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T(e_1,\ldots,e_n)=(e_1,\ldots,e_n)\begin{bmatrix}2 & \sqrt{3} & 0\\ \sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=(e_1,\ldots,e_n)A_0$$

$$\lambda I-A_0=\begin{bmatrix}\lambda-2 & -\sqrt{3} & 0\\ -\sqrt{3} & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & \lambda-2 & 0\\ \lambda & -\sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & 0 & 0\\ \lambda & \frac{\lambda-2}{\sqrt{3}}\lambda-\sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda+1)(\lambda-3) & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\\ 0 & (\lambda+1)(\lambda-3) & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-3)\end{bmatrix}$$

不变因子：$d_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=\lambda-3,d_3(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-3)$
初等因子： $\lambda-3;\lambda+1,\lambda-3$
初等因子组：$\lambda-3,\lambda+1,\lambda-3$
$Jordan$ 块：$J_1(\lambda_1)=(3),J_2(\lambda_2)=(-1),j_3(\lambda_3)=(3)$
$Jordan$ 标准型：$J=\begin{bmatrix}3 & & \\ & -1 & \\ & & 3\end{bmatrix}$

$$P=(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1 & 0\\ 1 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

得到一组新的基 $E_1,\ldots,E_n=(e_1,\ldots,e_n)P$

$$E_1=(e_1,e_2,e_3)\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=\frac{2}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},E_2=(e_1,e_2,e_3)\begin{bmatrix}-1\\ \sqrt{3}\\ 0\end{bmatrix}=\sqrt{2}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},E_3=(e_1,e_2,e_3)\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$x=\begin{bmatrix}4 & -4\\ 0 & -3\end{bmatrix}=(e_1,e_2,e_3)\begin{bmatrix}-4\sqrt{2}\\ 0\\ -3\end{bmatrix}=(E_1,E_2,E_3)P^{-1}\begin{bmatrix}-4\sqrt{2}\\ 0\\ -3\end{bmatrix}=(E_1,E_2,E_3)\begin{bmatrix}-\sqrt{6}\\ \sqrt{2}\\ -3\end{bmatrix}$$

$$(T^3)(x)=(E_1,E_2,E_3)\begin{bmatrix}27 & & \\ & -1 & \\ & & 27\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sqrt{6} & \\ \sqrt{2} & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}108 & -52\\ -56 & -81\end{bmatrix}$$

$$(T^k)(x)=(E_1,E_2,E_3)\begin{bmatrix}3^k & & \\ & (-1)^k & \\ & & 3^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(x_1,e_1)\\ (x_2,e_2)\\ (x_3,e_3)\end{bmatrix}$$

P72 1.36

(1)
设 $X\in V$，则

$$X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

故 V 的一个标准正交基为

$$X_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},X_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},X_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

(2)

计算积象组：

$$T(X_1)=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}=1X_1+2X_2+0X_3$$

$$T(X_2)=\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix}=2X_1+1X_2+0X_3$$

$$T(X_3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0\\3&3\end{bmatrix}=0X_1+0X_2+3X_3$$

设 $T(X_1,X_2,X_3)=(X_1,X_2,X_3)A$，则

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

易见 A 时对称矩阵，由定理 1.38 知 T 是对称变换.

(3)

求正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$，即

$$\Lambda=\begin{bmatrix}3&&\\&3&\\&&-1\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\end{bmatrix}$$

根据定理 1.42 的推论 2，令 $(Y_1,Y_2,Y_3)=(X_1,X_2,X_3)Q$，求得标准正交基

$$Y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},Y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},Y_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix}$$

有 $T(Y_1,Y_2,Y_3)=(Y_1,Y_2,Y_3)\Lambda$

习题1.3 15

(1) $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

(2) T 在标准正交基 x_1,x_2 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，$\because A$ 是对称矩阵，$\therefore T$ 是对称矩阵

(3) T 在标准基下，$Y_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix},Y_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，故为 $\Lambda=diag(0,2)$