定义

4.11

设 $A \in C_r^{m\times n}(r>0)$，$A^HA$ 的特征值为

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \ > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$$

则称 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}(i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ 为 A 的 奇异值. 当 A 为零矩阵时，它的奇异值都是 0.

定理

4.15

设 $A \in R^{n\times n}$ 可逆，则存在正交矩阵 P 和 Q，使得

$$P^TAQ = diag(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \dots,\ \sigma_n)$$

其中 $\sigma_i > 0\ (i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$

4.16

设 $A \in C_r^{m\times n}\ (r>0)$，则存在 m 阶酉矩阵 U 和 n 阶酉矩阵 V，使得

$$U^HAV = \begin{bmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

其中 $\Sigma = diag(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \dots,\ \sigma_r)$，而 $\sigma_i(i=1,\ 2,\ \dots,\ r)$ 为矩阵 A 的全部非零奇异值.

例题

4.14

计算

$$B = A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

求得 B 的特征值为 $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0$，对应的特征向量依次为

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

于是可得

$$rankA = 2, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

且使得定理4.16 中式成立的正交矩阵为

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

计算

$$U_1 = AV_1\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

构造

$$U_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_1 | U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则 A 的奇异值分解为

$$A = U \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V^T$$

4.15

根据定理 4.16 中式可以求得

$$AA^H = U \begin{bmatrix} \Sigma^2 & O \\ O & O \end{bmatrix} U^H$$

即

$$(AA^H)U = U \cdot diag(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_r,\ ,\ 0,\ \ldots,\ 0)$$

记 $U = (u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m)$，则上式可写为

$$(AA^H)u_i = \lambda_i u_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

这表明 u_i 是 AA^H 的属于特征值 λ_i 的特征向量(当 $i > r$ 时，$\lambda_i = 0$). 同理可证另一结论.

习题

4.4.2

设 $A \in R_r^{m\times n}$ 的奇异值分解为

$$A = UDV^T, \quad D = \begin{bmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

其中，U 是 m 阶正交矩阵，V 是 n 阶正交矩阵，$\Sigma = diag(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_r)$. 于是 $Ax = 0$ 可写为 $UDV^Tx = 0$，即 $DV^Tx = 0$，令 $V^Tx = y$，则有 $Dy = 0$，故通解为

$$y = k_1 e_{r+1} + \cdots + k_{n-r} e_n \quad (k_1,\ \ldots,\ k_{n-r} \in R)$$

设 V 的第 j 个列向量为 $v_j(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$，则

$$x = Vy = k_1 v_{r+1} + \cdots + k_{n-r} v_n \quad (k_1,\ \ldots,\ k_{n-r} \in R)$$

4.4.4

$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的特征值是 $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1$，对应的特征向量依次为

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

于是可得

$$rankA = 2, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

此时 $V_1 = V$，计算

$$U_1 = AV_1\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}$$

构造

$$U_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_1 | U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

则 A 的奇异值分解为

$$A = U \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T$$