定义 1.22
设 V 是实数域 R 上的线性空间，对于 V 中任意两个向量 x 与 y，按照某种规则定义一个实数，用 (x,y) 来表示，且它满足下述 4 个条件：

1. 交换律：$(x,y)=(y,x)$;
2. 分配律：$(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$;
3. 齐次性：$(kx,y)=k(x,y)$;
4. 非负性：$(x,x)\geq 0$，当且仅当 $x=0$ 时，$(x,x)=0$。

则称实数 (x,y) 为向量 x 与 y 的内积，而称 V 为 $Euclid$ 空间，简称 欧氏空间 或 实内积空间

定义 1.28
设 V 为欧氏空间，T 时 V 的一个线性变换，如果 T 保持 V 中任意向量 x 的长度不变，则有

$$(Tx,Tx)=(x,x)$$

那么称 T 是 V 的一个正交变换。

定义 1.29
如果实方阵 Q 满足 $Q^TQ=I$，则称 Q 为 正交矩阵

定义 1.30
设 T 是欧氏空间 V 的一个线性变换，且对 V 中任意两个向量 x,y，都有

$$(Tx,y)=(x,Ty)$$

则称 T 为 V 中的一个 对称变换。

定理 1.33
对于欧氏空间 V^n 的任一基 x_1，$x_2,...,x_n$，都可找到一个标准正交基 $y_1,y_2,...,y_n$。换言之，任一非零欧氏空间都有正交基和标准正交基。

定理 1.36
线性变换 T 为正交变换的充要条件是，对于欧氏空间 V 中任意向量 x,y，都有$(Tx,\ Ty)=(x,\ y)$。

定理 1.38
欧氏空间的线性变换是实对称变换的充要条件是，它对于标准正交基的矩阵是实对称矩阵。

例题 1.33

> $y_1' = x_1 = (1,1,0,0)$
> $y_2' = x_2 - \frac{(x_2,y_1')}{(y_1',y_1')}y_1' = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0)$
> $y_3' = x_3 - \frac{(x_3,y_2')}{y_2',y_2'}y_2' - \frac{(x_3,y_1')}{y_1',y_1'}y_1' = (-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1)$
> $y_4' = x_4 - \frac{(x_4,y_3')}{(y_3',y_3')}y_3' - \frac{(x_4,y_32)}{(y_2',y_2')}y_2' - \frac{(x_4,y_1')}{(y_1',y_1')}y_1' = (1,-1,-1,1)$
> $\therefore y_1 = \frac{1}{|y_1'|}y_1' = (\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)$
> $\quad y_2 = \frac{1}{|y_2'|}y_2' = (\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0)$
> $\quad y_3 = \frac{1}{|y_3'|}y_3' = (-\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{3}{\sqrt{12}})$
> $\quad y_4 = \frac{1}{|y_4'|}y_4' = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

习题 1.3
2

> 设 $\gamma \in V$，且 $y = z_1x_1 + z_2x_2 + \cdots + z_nx_n$，则有
> $(x,y) = \sum_{i=1}^n i\xi_i\eta_i = \sum_{i=1}^n i\eta_i\xi_i = (y,x)$
> $(kx,y) = \sum_{i=1}^n i(k\xi_i)\eta_i = k\sum_{i=1}^n i\xi_i\eta_i = k(x,y)$
> $(x+y,\gamma) = \sum_{i=1}^n i(\xi_i+\eta_i)z_i = (x,y)+(y,\gamma)$
> 当 $x=0$ 时，$\xi_1 = xi_2 = \cdots = \xi_n = 0$，$(x,x)=0$
> 当 $x \neq 0$ 时，$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ 不全为 0，$(x,x)>0$
> 因此，(x,y) 时 V 中的内积，且在该内积下 V 构成欧氏空间。

5

> 显然，y_1,y_2,y_3 线性无关，因此它是 V_1 的一组基，由施密特正交化方法：
> $z_1 = x_1 + x_2$
> $z_2 = \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_4 - \frac{1}{2}x_5$
> $z_3 = x_1 + x_2 + x_3 - x_5$
> 单位化，有：
> $\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2$
> $\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(x_1 - 2x_2 + 2x_4 - x_5)$
> $\eta_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 - x_5)$
> 即 η_1,η_2,η_3 为 V_1 的一组标准正交基。