定义

定理 2.8

设 $A \in C^{n\times n}$ 可逆，$B \in C^{n\times n}$，且对 $C^{n\times n}$ 上的某种矩阵范数 $\|\cdot\|$，有 $\|A^{-1}B\| < 1$，有以下结论：

1. $A+B$ 可逆；
2. 记 $F = I-(I+A^{-1}B)^{-1}$，则 $\|F\| \le \frac{\|A^{-1}B\|}{1-\|A^{-1}B\|}$；
3. $\frac{\|A^{-1}-(A+B)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \le \frac{\|A^{-1}B\|}{1-\|A^{-1}B\|}$

条件数

在定理 2.8 中，若令 $cond(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$，$d_A = \|\delta A\|\,\|A\|^{-1}$，则当 $\|A^{-1}\|\,\|\delta A\| < 1$ 时，由结论 (2) 和 (3) 可得

$$\|I-(I+A^{-1}\delta A)^{-1}\| \le \frac{d_A cond(A)}{1-d_A cond(A)}$$

$$\frac{\|A^{-1}-(A+\delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \le \frac{d_A cond(A)}{1-d_A cond(A)}$$

称 $cond(A)$ 为矩阵 A 的 条件数，它是求矩阵逆的摄动的一个重要量。一般来说，条件数越大，$(A+\delta A)^{-1}$ 与 A^{-1} 的相对误差就愈大

2.5

设 $A \in C^{n\times n}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，称

$$\rho(A) = max_i|\lambda_i|$$

为 A 的 谱半径

定理

2.9

设 $A \in C^{n\times n}$，则对 $C^{n\times n}$ 上任何一种矩阵范数 $\|\cdot\|$，都有

$$\rho(A) \le \|A\|$$

2.10

设 $A \in C^{n\times n}$，对任意的正数 ε，存在某种矩阵范数 $\|\cdot\|_M$，使得

$$\|A\|_M \le \rho(A) + \varepsilon$$

例题

2.10

$$\because det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2 - 5$$

$$\therefore \lambda_1(A) = 1 + \sqrt{5},\ \ \lambda_2(A) = 1 - \sqrt{5}$$

从而

$$\rho(A) = 1 + \sqrt{5}$$

又

$$\|A\|_1 = \|A\|_\infty = 3 + \sqrt{2}$$

而

$$A^H A = \begin{bmatrix} 6 & 5+5j \\ 5-5j & 11 \end{bmatrix},\ \ det(\lambda I - A^H A) = \lambda^2 - 17\lambda + 16$$

由此得 $\lambda_1(A^H A) = 16$，$\lambda_2(A^H A) = 1$，则有

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1(A^H A)} = 4$$

易见

$$\rho(A) < \|A\|_1,\ \ \rho(A) < \|A\|_2,\ \ \rho(A) < \|A\|_\infty$$