定义 2.1

> 如果 V 是数域 k 上的线性空间，对任意的 $x >\in V$，定义一个实值函数 $\|x\|$，它满足以下三个条件：
>
> 1. 非负性：当 $x \neq 0$ 时，$\|x\| > 0$；当 $x = 0$ 时，$\|x\| = 0$；
> 2. 齐次性：$\|x\| = |a|\ \|x\|\ (a \in K, x \in V)$
> 3. 三角不等式：$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|\ (x, y \in V)$
>
> 则称 $\|x\|$ 为 V 上向量 x 的范数，简称 **向量范数**

定理 2.1

> 设 $\|x\|_\alpha$ 和 $\|x\|_\beta$ 为有限维线性空间 V 上的任意两种向量范数（他们不限于 p - 范数），则存在两个与向量 x 无关的正常数 c_1 和 c_2，使满足
>
> $$c_1\|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq c_2\|x\|_\beta\ (\forall x \in V) \tag{2.1.9}$$

定义 2.2
满足不等式 $(2.1.9)$ 的两种范数称为是 **等价** 的，于是定理 2.1 可述为：有限维线性空间上的不同范数是等价的

定理 2.2

> C^n 中的向量序列
>
> $$x^{(k)} = (\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)})\ (k = 1, 2, 3, \ldots)$$
>
> 收敛到向量 $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ 的充要条件是对任何一种向量范数 $\|\cdot\|$，数列 $\|x^{(k)} - x\|$ 收敛于零

定义 2.3

> 设 $A \in C^{m\times n}$，定义一个实值函数 $\|A\|$，它满足以下三个条件
>
> 1. 非负性：当 $A \neq O$ 时，$\|A\| > 0$；当 $A = O$ 时，$\|A\| = 0$；
> 2. 齐次性：$\|\alpha A\| = |\alpha|\ \|A\|\ (\alpha \in C)$；
> 3. 三角不等式：$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|\ (B \in C^{m\times n})$.
>
> 则称 $\|A\|$ 为 A 的 **广义矩阵范数**. 若对 $C^{m\times n}, C^{n\times l}$ 及 $C^{m\times l}$ 上的同类广义矩阵范数 $\|\cdot\|$，还满足下面一个条件
> 4. 相容性：$\|AB\| \leq \|A\|\ \|B\|\ (B \in C^{m\times l})$
> 则称 $\|A\|$ 为 A 的 **矩阵范数**

定义 2.4

> 对于 $C^{m\times n}$ 上的矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ 和 C^m 与 C^n 上的同类向量范数 $\|\cdot\|_V$，如果
>
> $$\|Ax\|_V \leq \|A\|_M \ \|x\|_V \ (\forall A \in C^{m\times n}, \forall x \in C^n)$$
>
> 则称矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ 与向量范数 $\|\cdot\|_V$ 是相容的

定理 2.4

> 已知 C^m 和 C^n 上的同类向量范数 $\|\cdot\|$，设 $A \in C^{m\times n}$，则函数
>
> $$\|A\| = max_{\|x\|=1}\|Ax\|$$
>
> 是 $C^{m\times n}$ 上的矩阵范数，且与已知的向量范数相容

定理 2.5

> 设 $A=(a_{ij})_{m\times n} \in C^{m\times n}$，$x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)^T \in C^n$，则从属于向量 x 的三种范数 $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$ 的矩阵范数计算公式依次为
>
> 1. $\|A\|_1 = max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$；
> 2. $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$，$\lambda_1$ 为 $A^H A$ 的最大特征值；
> 3. $\|A\|_\infty = max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.
>
> 通常称 $\|A\|_1, \|A\|_2$ 及 $\|A\|_\infty$ 依次为 **列和范数、谱范数** 及 **行和范数**

例 2.1

> (1)
> 根据 $\|x\| = \sqrt{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_n|^2}$，当 $x \neq 0$ 时，显然 $\|x\| > 0$；当 $x = 0$ 时，有 $\|x\| = \sqrt{0^2+0^2+\cdots+0^2} = 0$

> (2)
> 对任意的复数 a，因为
>
> $$ax = (a\xi_1, a\xi_2, \ldots, a\xi_n)$$
>
> 所以
>
> $$\|ax\| = \sqrt{|a\xi_1|^2+|a\xi_2|^2+\cdots+|a\xi_n|^2} = \\ |a| \ \sqrt{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_n|^2} = |a| \ \|x\|$$

(3)

对于任意两个复向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n)$，有

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\dots,\xi_n+\eta_n)$$

可得

$$\|x+y\|=\sqrt{|\xi_1+\eta_1|^2+|\xi_2+\eta_2|^2+\cdots+|\xi_n+\eta_n|^2}$$
$$\|x\|=\sqrt{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_n|^2}$$
$$\|y\|=\sqrt{|\eta_1|^2+|\eta_2|^2+\cdots+|\eta_n|^2}$$

借助于 C^n 中内积式(1.3.24)及其性质，可得

$$\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+2Re(x,y)+(y,y)$$

因为

$$Re(x,y)\le|(x,y)|\le\sqrt{(x,x)(y,y)}=\|x\|\,\|y\|$$

所以

$$\|x+y\|^2\le\|x\|^2+2\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2$$

即

$$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$$

例 2.2

当 $x\neq 0$ 时，有 $\|x\|=max_i|\xi_i|>0$；当 $x=0$ 时，显然有 $\|x\|=0$. 又对任意的 $a\in C$，有

$$\|ax\|=max_i|a\xi_i|=|a|\;max_i\;|\xi_i|=|a|\;\|x\|$$

对 C^n 的任意两个向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n)$，有

$$\|x+y\|=max_i\;|\xi_i+\eta_i|\le max_i\;|\xi_i|+max_i\;|\eta_i|=\|x\|+\|y\|$$

> 因此，$\|x\| = max_i\,|\xi_i|$ 是 C^n 上的一种范数

例 2.3

> 当 $x \neq 0$ 时，显然 $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |xi_i| > 0$；当 $x = 0$ 时，由于 x 的每一分量都是零，故 $\|x\| = 0$
> 又对于任意 $a \in C$，有
>
> $$\|ax\| = \sum_{i=1}^{n} |a\xi_i| = |a| \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| = |a|\ \|x\|$$
>
> 对任意两个向量 $x, y \in C^n$，有
>
> $$\|x_y\| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|\xi_i| + |\eta_i|) = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| + \sum_{i=1}^{n} |\eta_i| = \|x\| + \|y\|$$
>
> 于是由定义 2.1 知 $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$ 是 C^n 上的一种范数

例 2.6

> 给定线性空间 V^n 的基 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，设 $x \in V^n$ 在该基下的坐标向量为 $\alpha = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T$，那么
>
> $$\|x\|_p = \|\alpha\|_p \ (1 \leq p < +\infty)$$
>
> 满足范数定义的三个条件. 因此，它是 V^n 上的范数，也称为 $\boldsymbol{x}$ 的 ***p*** ***-范数***

例 2.8

> 显然，$\|A\|_F$ 具有非负性和齐次性. 设 $B \in C^{m \times n}$，且 A 的第 j 列分别为 $a_j, b_j\ (j = 1, 2, \ldots, n)$，则有
>
> $$\|A + B\|_F^2 = \|a_1 + b_1\|_2^2 + \cdots + \|a_n + b_n\|_2^2 \leq \\ (\|a_1\|_2 + \|b_1\|_2)^2 + \cdots + (\|a_n\|_2 + \|b_n\|_2)^2 = \\ (\|a_1\|_2^2 + \cdots + \|a_n\|_2^2) + 2(\|)$$
>
> 显然，$\|A\|_F$ 具有非负性和齐次性. 设 $B \in C^{m \times n}$，且 A 的第 j 列分别为 $a_j, b_j\ (j = 1, 2, \ldots, n)$，则有

$$\|A+B\|_F^2=\|a_1+b_1\|_2^2+\cdots+\|a_n+b_n\|_2^2\leq \\ (\|a_1\|_2+\|b_1\|_2)^2+\cdots+(\|a_n\|_2+\|b_n\|_2)^2= \\ (\|a_1\|_2^2+\cdots+\|a_n\|_2^2)+2(\|)$$

显然，$\|A\|_F$ 具有非负性和齐次性. 设 $B\in C^{m\times n}$，且 A 的第 j 列分别为 a_j,b_j $(j=1,2,\ldots,n)$，则有

$$\|A+B\|_F^2=\|a_1+b_1\|_2^2+\cdots+\|a_n+b_n\|_2^2\leq \\ (\|a_1\|_2+\|b_1\|_2)^2+\cdots+(\|a_n\|_2+\|b_n\|_2)^2= \\ (\|a_1\|_2^2+\cdots+\|a_n\|_2^2)+ \\ 2(\|a_1\|_2\|b_1\|_2+\cdots+\|a_n\|_2\|b_n\|_2)+ \\ (\|b_1\|_2^2+\cdots+\|b_n\|_2^2)$$

对上式第二项应用式 (1.3.12)，可得

$$\|A+B\|_F^2\leq\|A\|_F^2+2\|A\|_F\|B\|_F+\|B\|_F^2=(\|A\|_F+\|B\|_F)^2$$

即三角不等式成立
再设 $B=(b_{ij})_{n\times l}\in C^{n\times l}$，则 $AB=(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj})_{m\times l}\in C^{m\times l}$，于是有

$$\|AB\|_F^2=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^l|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}|\leq\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^l(\sum_{k=1}^n|a_{ik}|\ |b_{kj}|)^2$$

对上式括号内的项应用式 (1.3.12)，可得

$$\|AB\|_F^2\leq\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^l[(\sum_{k=1}^n|a_{ik}|^2)(\sum_{k=1}^n|b_{kj}|^2)]=\|A\|_F^2\ \|B\|_F^2$$

即 $\|A\|_f$ 是 A 的矩阵范数
在上式中取 $B=x\in C^{n\times l}$，则有

$$\|Ax\|_2=\|AB\|_F\leq\|A\|_F\ \|B\|_F=\|A\|_F\ \|x\|_2$$

即矩阵范数 $\|\cdot\|_F$ 与向量范数 $\|\cdot\|_2$ 相容

例 2.9

> 非负性. 当 $x \neq 0$ 时，$xy^H \neq O$，从而 $\|x\|_V > 0$；当 $x = 0$ 时，$xy^H = O$，从而 $\|x\|_V = O$.
> 齐次性. 对任意 $k \in C$，有
>
> $$\|kx\|_V = \|kxy^H\|_M = |k|\ \|xy_H\|_M = |k|\ \|x\|_V$$
>
> 三角不等式. 对任意 $x_1, x_2 \in C^n$，有
>
> $$\|x_1 + x_2\|_V = \|(x_1 + x_2)y^H\|_M = \|x_1y^H + x_2y^H\|_M \leq \\ \|x_1y^H\|_M + \|x_2y^H\|_M = \|x_1\|_V + \|x_2\|_V$$
>
> 因此，$\|x\|_V$ 是 C^n 上的向量范数. 当 $A \in C^{n\times n}$，$x \in C^n$ 时，有
>
> $$\|Ax\|$$
>
> 因此，$\|x\|_V$ 是 C^n 上的向量范数. 当 $A \in C^{n\times n}$，$x \in C^n$ 时，有
>
> $$\|Ax\|_V = \|(Ax)y^H\|_V = \|A(xy^H)\|_M \leq \|A\|_M\ \|xy^H\|_M = \|A\|_M\ \|x\|_V$$
>
> 即矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ 与向量范数 $\|\cdot\|_V$ 相容

习题 2.1

1

> 对向量 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$，其 1 -范数为
>
> $$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$
>
> 2 -范数为 $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$
> ∞ -范数为 $\|x\|_\infty = max_i\ |x_i|$
> 故 $l_1 = |1| + |1| + \cdots + |1| = n$
> 　$l_2 = \sqrt{|1|^2 + |1|^2 + \cdots + |1|^2} = \sqrt{n}$
> 　$l_\infty = max\ |1| = 1$

习题 2.2

1

> $\|A\|_1 = max_i|a_i| = 2$，$\|A\|_\infty = |-1| + 2 + 1 = 4$
> 由谱范数性质，可知
>
> $$\|A\|_2 = \|A^T\|k = \sqrt{\lambda max(AA^T)} = \sqrt{6}$$
>
> $\|B\|_1 = max_i \sum_{j=1}^{2} |b_{ij}| = 4$，$\|B\|_\infty = 6$
> 则有
>
> $$B^H B = \begin{bmatrix} 2 & 2j & 4j \\ -2j & 4 & 6 \\ -4j & 6 & 10 \end{bmatrix}$$
>
> $|\lambda I - B^H B| = \lambda(\lambda - (8 + 2\sqrt{13}))(\lambda - (8 - 2\sqrt{13}))$
> 故 $\|B\|_2 = \sqrt{8 + 2\sqrt{13}}$