定义

3.1

> 设有矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$，其中 $A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})_{m\times n}$，当 $a_{ij}^{(k)}\to a_{ij}(k\to\infty)$ 时，称 $\{A^{(k)}\}$ 收敛，或称矩阵 $A=(a_{ij}^{(k)})_{m\times n}$ 为 $\{A^{(k)}\}$ 的极限，或称 $\{A^{(k)}\}$ 收敛于 A，记为
>
> $$\lim_{k\to\infty}A^{(k)}=A\text{或}A^{(k)}\to A$$
>
> 不收敛的矩阵序列称为发散
> 矩阵序列收敛的性质
>
> 1. 设 $A^{(k)}\to A_{m\times n}$，$B^{(k)}\to B_{m\times n}$，则
> $$\lim_{k\to\infty}(\alpha A^{(k)}+\beta B^{(k)})=\alpha A+\beta B\ \ (\forall\alpha,\ \beta\in C)\tag{3.1.1}$$
> 2. 设 $A^{(k)}\to A_{m\times n}$，$B^{(k)}\to B_{n\times l}$，则
> $$\lim_{k\to\infty}A^{(k)}B^{(B)}=AB\tag{3.1.2}$$
> 3. 设 $A^{(k)}$ 与 A 都是可逆矩阵，且 $A^{(k)}\to A$，则
> $$(A^{(k)})^{-1}\to A^{-1}\tag{3.1.3}$$

3.2

> 矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 称为 **有界** 的，如果存在常数 $M>0$，使得对一切 k 都有
>
> $$|a_{ij}^{(k)}|<M\ \ (i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n)$$

3.3

> 设 A 为方阵，且 $A^k\to O\ (k\to\infty)$，则称 A 为收敛矩阵

3.4

> 把定义 3.1 中的矩阵序列所形成的无穷和 $A^{(0)}+A^{(1)}+A^{(2)}+\dots+A^{(k)}+\dots$ 称为 **矩阵级数**，记为 $\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$，则有
>
> $$\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}=A^{(0)}+A^{(1)}+A^{(2)}+\dots+A^{(k)}+\dots\tag{3.2.1}$$

3.5

> 记 $S^{(N)}=\sum_{k=0}^{N}A^{(k)}$，称其为矩阵级数式 (3.2.1) 的 **部分和**. 如果矩阵序列 $\{S^{(N)}\}$ 收敛，且有极限 S，则有
>
> $$\lim_{N\to\infty}S^{(N)}=S$$
>
> 那么就称矩阵级数式 (3.2.1) 收敛，而且有和 S，记为
>
> $$S=\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$$
>
> 不收敛的矩阵级数称为是 **发散** 的
> 若用 s_{ij} 表示 S 的第 i 行第 j 列的元素，那么，和 $\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}=S$ 的意义指的是
>
> $$\sum_{k=0}^{\infty}a_{ij}^{(k)}=s_{ij}\ \ (i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n) \tag{3.2.4}$$

3.6

> 如果式 (3.2.4) 中左端 mn 个数项级数都是绝对收敛的，则称矩阵级数式 (3.2.1) 是 **绝对收敛** 的

定理

3.1

> 设 $A^{(k)}\in C^{m\times n}$，则
>
> 1. $A^{(k)}\to O$ 的充要条件是 $\|A^{(k)}\|\to 0$;
> 2. $A^{(k)}\to A$ 的充要条件是 $\|A^{(k)}-A\|\to 0$
>
> 这里，$\|\cdot\|$ 是 $C^{m\times n}$ 上的任何一种矩阵范数

3.2

> A 为收敛矩阵的充要条件是 $\rho(A)<1$

3.3

> A 为收敛矩阵的充分条件是只要有一种矩阵范数 $\|\cdot\|$，使得 $\|A\|<1$

3.5

> 设方阵 A 对某一矩阵范数 $\|\cdot\|$ 有 $\|A\| < 1$，则对任何非负整数 N，以 $(I-A)^{-1}$ 为部分和 $I + A + A^2 + \cdots + A^N$ 的近似矩阵时，其误差为
>
> $$\|(I-A)^{-1} - (I + A + A^2 + \cdots + A^N)\| \le \frac{\|A\|^{N+1}}{1-\|A\|}$$

3.6

> 设幂级数
>
> $$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{3.2.10}$$
>
> 的收敛半径为 r，如果方阵 A 满足 $\rho(A) < r$，则矩阵幂级数
>
> $$\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k \tag{3.2.11}$$
>
> 时绝对收敛的；如果 $\rho(A) > r$，则矩阵幂级数式 (3.2.11) 是发散的

例题

3.1

> $$\because \|A\|_1 = max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = 0.9 < 1$$
>
> $$\therefore \text{由定理3.1，} A \text{ 是收敛矩阵}$$

3.2

> $$\because S^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} A^{(k)} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} & \sum_{k=1}^{N} \frac{\pi}{3\times 4^k} \\ 0 & \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-(\frac{1}{2})^N & \frac{\pi}{9}[1-(\frac{1}{4})^N] \\ 0 & \frac{N}{N+1} \end{bmatrix}$$
>
> $$\therefore S = \lim_{N\to\infty} S^{(N)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\pi}{9} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

习题

3.1.2

> $$\because det(\lambda I - A) = (a-2c)(a+c)^2$$
>
> $$\therefore \rho(A) = 2|c|$$
>
> 由定理 3.2，当且仅当
>
> $$\rho(A) < 1, \quad 2|c| < 1, \quad |c| < \frac{1}{2}$$
>
> 有 A 是收敛矩阵

3.2.1

> $$\because \rho(A) = 1$$
>
> $$\therefore \text{由定理3.2} \quad \text{矩阵级数} \sum_{l=0}^{\infty} A^{(k)} \text{发散}$$

3.2.3

> (1)
>
> 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$，易知其特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$，故 $\rho(A) = 2$
>
> 又，幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} x^k$ 的收敛半径为
>
> $$r = \lim_{k \to \infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}| = 1$$
>
> 有 $\rho(A) = 2 > r$，由定理 3.6 该矩阵幂级数发散

> (2)
>
> 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$，易知其特征值为 $\lambda_1 = -3$，$\lambda_2 = 5$，故 $\rho(A) = 5$
>
> 又，幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{6^k} x^k$ 的收敛半径为
>
> $$r = \lim_{k \to \infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}| = 6$$

> 有 $\rho(A) = 2 < r$，由定理 3.6 该矩阵幂级数绝对收敛

3.2.4

> $$\because S^{(N)} = \sum_{k=0}^{N} A^{(k)}\text{，矩阵级数}\sum_{k=0}^{N} A^{(k)}\text{收敛}$$
>
> $$\therefore \lim_{N\to\infty} S^{(N)} = C$$
>
> $$\therefore \lim_{N\to\infty} A^{(N)} = \lim_{N\to\infty} (S^{(N)} - S^{(N-1)}) = S - S = O$$
>
> $$\therefore \lim_{k\to\infty} A^{(k)} = O$$