

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВО “Севастопольский государственный университет”

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

к выполнению лабораторного практикума по дисциплине
“Методы исследования операций”.
Часть 3: “Параметрическое программирование”,
“Квадратичное программирование”,
“Линейное целочисленное программирование”
для студентов профилей
09.03.02 – “Информационные системы и технологии” и
09.03.03 – “Прикладная информатика”
всех форм обучения



Севастополь
2018

УДК 004.1

Методическое пособие к выполнению лабораторно - вычислительного практикума по дисциплине “Методы исследования операций”. Часть 3: “Параметрическое программирование”, “Квадратичное программирование”, “Линейное целочисленное программирование” для студентов профилей 09.03.02 – “Информационные системы и технологии” и 09.03.03 – “Прикладная информатика” всех форм обучения / Разраб. Е.Н. Заикина, В.Ю. Карлусов – Севастополь: Изд-во СевГУ, 2016. – 46 с.

Цель методических указаний: обеспечить качественное усвоение теоретических положений курса для наиболее полного овладения математическим и вычислительным аппаратами, применяемыми в организационно-техническом управлении и при анализе сложных систем.

Методическое пособие рассмотрено и утверждено на заседании кафедры Информационных систем,
протокол № 10 от 18 мая 2018 г.

Методические рекомендации рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании Учёного Совета Института информационных технологий и управления в технических системах 01 июня 2018 года, протокол № 04.

Рецензент Кожаяев Е.А., кандидат техн. наук, доцент кафедры информационно-вычислительной техники.

Ответственный за выпуск:
Заведующий кафедрой Информационных систем, к.ф.-м.н.,
доцент И.П. Шумейко

Издательский номер №№ 108/18

Содержание	Стр.
Введение	4
Решения задач параметрического программирования	5
Решения задач квадратичного программирования	24
Решения задач линейного целочисленного программирования методом ветвей и границ	34
Заключение	41
Библиографический список	42
Приложение А. Решение ЗЛП прямым симплекс-методом	43
Приложение Б. Графическая интерпретация задачи параметри- ческого программирования при линейной параметрической за- висимости вектора свободных членов системы ограничений	44
Приложение В. Графическая интерпретация задачи параметри- ческого программирования при линейной параметрической за- висимости коэффициентов функции цели	45
Приложение Д. Содержательная постановка задачи	46

ВВЕДЕНИЕ

Ряд задач математического программирования имеет в составе алгоритмов решения в качестве этапов отдельные фрагменты либо цельные части симплекс-методов. При изложении указанных алгоритмов в научной и учебной литературе (например, [1, 3, 8. 15]), в части, касающиеся симплекс-методов, излагаются весьма конспективно, исходя из предположения об их полной освоенности читателем.

Практика преподавания, особенно в последние годы, показывает, что данное предположение всё в меньшей степени соответствует реальной действительности.

В этой связи возникает потребность жёсткой привязке всех компонентов расчёта, задействованных в алгоритме, к численному примеру. Это, по мнению авторов, будет всемерно способствовать осмысленному восприятию композитных алгоритмов исследования операций.

В настоящем методическом пособии излагаются приёмы решения отдельных задач исследования операций, в частности:

- задачи параметрического программирования, на каждом глобальном этапе решения которой необходимо выполнить либо несколько шагов прямого симплексного метода, либо “большую итерацию” двойственного симплекс-метода;
- задачи квадратичного программирования, которая сводится к эквивалентной задаче линейного программирования, каковая и решается;
- задачи линейного целочисленного программирования, ход решения которой основывается на свойствах псевдопланов и итерационной части двойственного симплексного метода.

Каждый из излагаемых методов предваряется необходимыми теоретическими сведениями, включая постановку задачи и обоснования метода её решения, и завершается целочисленным примером, снабжённым ссылками на пункты алгоритма.

1. Решение задач параметрического программирования

В общем случае, к задачам параметрического программирования относятся задачи математического программирования, в которых компоненты математических моделей зависят от некоего фактора (параметра).

Указанный фактор, в свою очередь, изменяется в соответствии с некоторым законом, однозначно определяемым математически. Наиболее целесообразно исследовать влияние на оптимальное решение задачи линейного программирования (ЗЛП) параметрических изменений компонентов векторов коэффициентов функции цели или свободных членов системы ограничений. Существуют задачи, в которых от параметра зависит как коэффициенты функции цели, так и свободные члены системы ограничений [2].

Элементы матрицы системы ограничений в задачах экономико-производственной направленности, по сути, являются технологическими коэффициентами (нормами выхода), поэтому в наименьшей степени зависят от параметров.

Общая стратегия при решении задач параметрического программирования такова.

1. Полагают значение параметра равным некоторому неизвестному числу t_0 , принадлежащему интервалу изменения параметра t , определяемого в виде границ $[\alpha, \beta]$, как правило, это α .
2. Выполняют решение ЗЛП в общем виде, с неизвестной, входящей в выражение для расчёта симплекс-разностей или (и) в компоненты столбца местоположения координат текущей точки решения A_0 . Находят оптимальный план X^* или устанавливают неразрешимость полученной задачи линейного программирования в заданной постановке.
3. По строке симплекс-разностей или (и) элементам вектора A_0 , соответствующим оптимальному решению, полученному в п.2 в ходе решения ЗЛП, составляют систему неравенств.
4. В результате решения системы неравенств определяют некое значение параметра t , удовлетворяющее этой системе. Это значение параметра t полагают равным верхней границей текущего интервала.
5. Если значение параметра, рассчитанное в ходе выполнения п. 4 настоящего алгоритма, превышает значение, заданное в условии, то задачу считают решённой.
6. В противном случае, необходимо определить границу очередного интервала, находящуюся правее значения параметра, определённого в п.4. Производится “дорешивание” ЗЛП с новым значением параметра t в п.2.

7. Итоговое решение представляется совокупностью интервалов, на каждом из которых представлены свои координаты оптимальных точек совокупно с выражением для расчёта функции цели на заданном интервале

1.1. Решение задачи линейного программирования при параметрических изменениях вектора ограничений

Пусть элементы вектора ограничений находятся в линейной зависимости от изменения параметра t , то есть

$$b_i^v = b_i + tp_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (1.1)$$

где b_i – значение i -го элемента вектора ограничений в отсутствии параметра; p_i – коэффициент параметрического изменения по i -му ограничению; t – параметр.

В этом случае задача линейного программирования может быть сформулирована в виде

$$\begin{aligned} \max F &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n, \\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 + tp_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 + tp_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m + tp_m, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad t \in [\alpha, \beta]. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Если зафиксировать произвольное значение параметра $t = t_0$, то задача (1.2) сведётся к обычной ЗЛП и может быть решена любым пригодным симплекс-методом. Как известно:

$$X^* = A^{-1} \times B, \quad (1.3)$$

где X^* – оптимальный план; A^{-1} – компоненты симплекс-таблицы для небазисных переменных; B – вектор свободных членов системы ограничений. Причём равенство (1.3) является справедливым и на протяжении всего решения

Выражение (1.3) с учётом (1.1) примет вид

$$X^{\nabla*} = A^{-1} \cdot B^{\nabla} = A^{-1} \cdot B + t_0 A^{-1} \cdot P,$$

где $t_0 \in [\alpha, \beta]$ – фиксированное значение параметра t , $P^T = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ – вектор коэффициентов изменения параметра. Введя обозначение

$$\tilde{B} = A^{-1} \cdot B \text{ и } \tilde{P} = A^{-1} \cdot P, \quad (1.4)$$

запишем

$$X^{\nabla*} = \tilde{B} + t_0 \cdot \tilde{P}. \quad (1.5)$$

Таким образом, при фиксированном $t = t_0$, столбец A_0 может быть представлен тремя столбцами \tilde{B} , \tilde{P} и $X^{\nabla*}(A_0^{\nabla})$, что позволит осуществить “надзор” за преобразованиями величин \tilde{b}_i и \tilde{p}_i в ходе итераций.

Компоненты вектора $X^{\nabla*}$ должны удовлетворять ограничению неотрицательности, то есть

$$\tilde{b}_i + t \cdot \tilde{p}_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (1.6)$$

Безусловно, выполнение (1.6) означало бы, что план $X^{\nabla*}$ является оптимальным решением задачи параметрического программирования вида (1.2) для любых $t \in [\alpha, \beta]$.

Однако, в реальности встаёт задача последовательного деления заданного интервала изменения параметра $t [\alpha, \beta]$ на подынтервалы $[\alpha_r, \beta_r] \subset [\alpha, \beta]$, внутри каждого из которых неукоснительно выполняется условие неотрицательности $X^{\nabla*}$.

При этом, на каждом подынтервале $[\alpha_r, \beta_r] \subset [\alpha, \beta]$ для любого $t_0 \in [\alpha_r, \beta_r]$ оптимум целевой функции будет достигаться в вершинах многогранников областей допустимых стратегий (планов) задачи, и, каждому подынтервалу изменения параметра Δt_r , будет соответствовать свой оптимальный план.

Поэтому представляет интерес определение границ изменения параметра t , для которого вектор $X^{\nabla*}$ будет являться оптимальным планом.

В оптимуме параметрической задачи обязательно должен присутствовать $\tilde{p}_i \neq 0$, иначе параметрическая задача вырождается – пропадает зависимость от параметра.

Сформулируем правила для определения границ интервала изменения параметров, которые есть следствие решения системы неравенств (1.6):

для нижней границы

$$\alpha_{or} = \begin{cases} \max_{\tilde{p}_i > 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}, & \exists i : \tilde{p}_i > 0, \\ -\infty, & \forall i : \tilde{p}_i \leq 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

для верхней границы

$$\beta_{or} = \begin{cases} \min_{\tilde{p}_i < 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}, & \exists i : \tilde{p}_i < 0, \\ \infty, & \forall i : \tilde{p}_i \geq 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Индексы or в формулах (1.6) и (1.7) обозначают: o – оптимальное значение, r – номер интервала разбиения. В пределах этих границ решение устойчиво, то есть, сохраняется неизменным состав векторов базиса.

Алгоритм решения задачи параметрического программирования при параметрическом изменении элементов вектора свободных членов

1. Зафиксировав значение параметра $t = t_0$, решить ЗЛП симплекс-методом.

Замечание. Если имеется решение непараметрической ЗЛП, то это соответствует случаю, когда $t = 0$. В этом случае, решение ЗЛП для t , отличного от нуля, можно получить, используя матричные операции (1.3) и (1.4), избежав, тем самым, утомительных вычислений. **Важно:** так как обратная матрица A^{-1} зависит от выбранных базисных векторов, а состав базиса, в свою очередь – от значения параметра t , использование такого подхода требует осмысления и вдумчивости!

Задача может быть разрешима, а может быть, и нет [2]. В последнем случае неразрешимость может иметь двоякую природу.

Во-первых, целевая функция задачи не ограничена на области допустимых стратегий. В этой ситуации задача не решается принципиально ни при каких значениях t .

Во-вторых, не обеспечивается положительность базисного решения (содержимого столбца A_0) при данном значении параметра t , что, как правило, говорит о несовместности системы ограничений. Поэтому надо найти такой диапазон изменения параметра t , в котором система ограничений совместна.

В последнем случае отметим, что нарушения условия неотрицательности и есть причина несовместности ограничений.

2. Определить, используя формулы (1.7) и (1.8), границы изменения параметра t $[\alpha_{or}, \beta_{or}]$, r – номер интервала.

3. Если верхняя граница β_{or} интервала выйдет за пределы или окажется равной β , то есть, $\beta_{or} \geq \beta$, то задача решена.

4. В противном случае, необходимо отыскать направляющую строку по правилу

$$\min_{\tilde{p}_i < 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\} \Rightarrow i^*. \quad (1.9)$$

и выполнить несколько итераций двойственного [6, 13] симплекс-метода.

5. Вернуться к п.2 настоящего алгоритма.

В результате расчётов мы будем иметь ряд интервалов $[\alpha, \beta_1]$, $[\beta_1, \beta_2]$, ..., $[\beta_{r-1}, \beta]$ на каждом из которых будем иметь свой оптимальный план решения. Поэтому целесообразно полагать в начале расчётов $t = t_0 = \alpha$.

Пример. Пусть модель параметрической ЗЛП имеет вид:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10 + 8t, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6 + 4t, \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 4 + 2t, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, t \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right]. \end{cases} \end{aligned}$$

Из условия видно, что

$$B = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = 2.$$

Пункт № 1 алгоритма.

По условиям задачи составим таблицу для значения параметра $t = -1/2$ и выполним её решение.

Таблица 1.1 – Начальное решение в канонической форме

				c_j	2	3	0	0	0
Базис	C_B	\tilde{B}	\tilde{P}	$X^{\nabla*}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$\leftarrow A_3$	0	10	8	6	2	5	1	0	0
A_4	0	6	4	4	3	2	0	1	0
A_5	0	4	2	3	1	1	0	0	1
				δ_j	0	-2	-3↑	0	0

Таблица 1.2 – После 1-й итерации

				c_j	2	3	0	0	0
Базис	C_B	\tilde{B}	\tilde{P}	$X^{\nabla*}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	3	2	8/5	6/5	2/5	1	1/5	0	0
$\leftarrow A_4$	0	2	4/5	8/5	11/5	0	-2/5	1	0
A_5	0	2	2/5	9/5	3/5	0	-1/5	0	1
				δ_j	18/5	-4/5↑	0	3/5	0

Таблица 1.3 – Оптимальное значение при $t = -1/2$

				c_j	2	3	0	0	0
Базис	C_B	\tilde{B}	\tilde{P}	$X^{\nabla*}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	3	18/11	16/11	10/11	0	1	3/11	-2/11	0
A_1	2	10/11	4/11	8/11	1	0	-2/11	5/11	0
A_5	0	16/11	2/11	15/11	0	0	-1/11	-3/11	1
				δ_j	46/11	0	5/11	4/11	0

В последней таблице представлено оптимальное решение задачи параметрического программирования $F\left(\frac{10}{11}, \frac{8}{11}\right) = \frac{46}{11}$ для $t = -1/2$.

В соответствии с замечанием к 1-му пункту алгоритма, этот же результат может быть получен по оптимальному решению задачи без параметров, что соответствует значению параметра $t = 0$ (Смотри приложение А, таблица А.3). Отметим также тождественность столбцов $A_1 - A_5$, полученных нами в ходе решения для таблиц 1.3 и А.3

На её основании построим таблицу оптимального решения для $t = -1/2$. Обратная матрица, составленная из небазисных векторов таблицы А.3 оптимального решения, есть

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/11 & -2/11 & 0 \\ -2/11 & 5/11 & 0 \\ -1/11 & -3/11 & 1 \end{bmatrix}.$$

Используя (1.4), рассчитаем составляющие выражения (1.5):

$$\tilde{P} = A^{-1} \cdot P = \begin{bmatrix} 3/11 & -2/11 & 0 \\ -2/11 & 5/11 & 0 \\ -1/11 & -3/11 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16/11 \\ 4/11 \\ 2/11 \end{bmatrix}.$$

Только ради любви к арифметическим вычислениям определим вектор

$$\tilde{B} = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 3/11 & -2/11 & 0 \\ -2/11 & 5/11 & 0 \\ -1/11 & -3/11 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/11 \\ 10/11 \\ 16/11 \end{bmatrix}.$$

Он, как и ожидалось, получился такой – же, как и столбец A_0 в таблице оптимального решения непараметрической ЗЛП, таблицы 1.3 и А.3.

Рассчитаем столбец оптимального значения ЗЛП с учётом параметра согласно (1.5):

$$X^{\nabla*} = \tilde{B} + t_0 \cdot \tilde{P} = \begin{bmatrix} 18/11 \\ 10/11 \\ 16/11 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 16/11 \\ 4/11 \\ 2/11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/11 \\ 8/11 \\ 15/11 \end{bmatrix}.$$

По этим данным сформируем таблицу для $t = -1/2$.

Таблица 1.4 – Контрольная таблица для $t = -1/2$

				c_j	2	3	0	0	0
Базис	C_B	\tilde{B}	\tilde{P}	$X^{\nabla*}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	3	18/11	16/11	10/11	0	1	3/11	-2/11	0
A_1	2	10/11	4/11	8/11	1	0	-2/11	5/11	0
A_5	0	16/11	2/11	15/11	0	0	-1/11	-3/11	1
				δ_j	46/11	0	0	5/11	4/11

Читатель может убедиться в идентичности решений, полученных путём последовательных и на основании оптимального решения при нулевом значении параметра t : таблицы 1.3 и А.3 совпали.

Пункт № 2 алгоритма.

Нижняя граница изменения параметра t , согласно (1.7), есть

$$\alpha_{o1} = \max_{\tilde{p}_i > 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\} = \left\{ \frac{16}{11}, \frac{4}{11}, \frac{2}{11} \right\} \left\{ -\frac{\frac{18}{11}}{\frac{16}{11}}, -\frac{\frac{10}{11}}{\frac{4}{11}}, -\frac{\frac{16}{11}}{\frac{2}{11}} \right\} = -\frac{9}{8} = -1,125.$$

Так как $-\frac{9}{8} < -\frac{1}{2}$, то полученная нижняя граница устойчивости решения не хуже, чем задана в условии исходной задачи.

Верхняя же граница интервала существования неизменного базиса (A_1, A_2, A_5) , определяемая (1.8), равна бесконечности, поскольку все компоненты вектора \tilde{P} положительны, это свидетельствует о том, что $\beta_{o1} \rightarrow \infty$,

Пункт алгоритма № 3.

Значение верхней границы интервала β_{o1} превышает заданную в условии задачи величину $\beta = 2$. Решение задачи параметрического программирования завершено, и нами получено окончательное решение.

Ответ представляется одним интервалами изменения параметра t .

$$x_1 = \frac{10 + 4 \cdot t}{11}, x_2 = \frac{18 + 16 \cdot t}{11}; F(x_1, x_2) = \frac{74 + 56 \cdot t}{11}, t \in \left[-\frac{9}{8}, \infty \right).$$

Замечание. Мы можем использовать значение $t = \alpha_{o1} = -9/8$, полученное нами ранее, которое меньше, нежели заданное в условии задачи $\alpha = -1/2$.

Согласно (1.5), в этом случае точка оптимального решения будет иметь координаты

$$X^{\nabla*} = \tilde{B} + t_0 \cdot \tilde{P} = \begin{bmatrix} 18/11 \\ 10/11 \\ 16/11 \end{bmatrix} - \frac{9}{8} \cdot \begin{bmatrix} 16/11 \\ 4/11 \\ 2/11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 5/4 \end{bmatrix}, \text{откуда}$$

$$X_{\text{opt}}^T = \{1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 5/4\}.$$

Функция цели для этого решения составит $F(1/2, 0) = 1$. Мы можем убедиться, что структура решения сохранена, хотя план вырожден, так как компонента нулевая. Однако значение функции цели получилось меньше,

нежели на интервале 1. Отсюда следует, что использовать значение параметра, ниже заданного в условии задачи, в нашем случае не целесообразно.

Графическая интерпретация решения задачи приведена в приложении Б, рисунок Б.1. На рисунке представлены области допустимых стратегий, соответствующих граничным значениям параметра t , заданным в условиях задачи с обозначенными точками оптимума.

Следует отметить, что продемонстрировать работу алгоритма в полном объёме на базе исходного условия не удалось.

Оценим, исходя из требований к положительной определённости вектора свободных членов, значение граничного параметра в этих условиях.

Для этого решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leq 10 + 8t, \\ 0 \leq 6 + 4t, \\ 0 \leq 4 + 2t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq -\frac{5}{4} = -1,25; \\ t \geq -\frac{3}{2} = -1,5; \\ t \geq -2. \end{cases} \Rightarrow t \geq -\frac{5}{4}.$$

Легко убедиться, что линия, соответствующая первому ограничению, при значении параметра t , равном $-1,25$, пройдёт через начало координат. Таким образом, вся область допустимых стратегий сузится до одной точки $O(0, 0)$.

Воспользуемся алгоритмом решения задачи параметрического программирования.

Пункт № 1 алгоритма.

Зафиксируем параметр $t = -1,25$ и решим ЗЛП. Соответствующий ход решения показан двумя таблицами ниже.

Таблица 1.5 – Начало перехода к новому интервалу

				c_j	2	3	0	0	0
Базис	C_B	\tilde{B}	\tilde{P}	$X^{\nabla*}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$\leftarrow A_3$	0	10	8	0	2	5	1	0	0
A_4	0	6	4	1	3	2	0	1	0
A_5	0	4	2	$3/2$	1	1	0	0	1
				δ_j	0	-2	$-3\uparrow$	0	0

Таблица 1.6 – Результат выполнения 1-й итераций

				c_j	2	3	0	0	0
Базис	C_B	\tilde{B}	\tilde{P}	$X^{\nabla*}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$\leftarrow A_2$	3	2	8/5	0	2/5	1	1/5	0	0
A_4	0	2	4/5	1	11/5	0	-2/5	1	0
A_5	0	2	2/5	3/2	3/5	0	-1/5	0	1
				δ_j	0	-4/5 ↑	0	3/5	0

Таблица 1.7 – Результат выполнения 2-й итераций

				c_j	2	3	0	0	0
Базис	C_B	\tilde{B}	\tilde{P}	$X^{\nabla*}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	2	5	4	0	1	5/2	1/2	0	0
$\leftarrow A_4$	0	-9	-8	1	0	-11/2	-3/2	1	0
A_5	0	-1	-2	3/2	0	-3/5	-1/2	0	1
				δ_j	0	0	2 ↑	3/5	0

Последняя таблица соответствует оптимальному решению для случая $t = -1,25$.

Пункт № 2 алгоритма.

Нижняя граница изменения параметра t , согласно (1.7)

$$\alpha_{o0} = \max_{\tilde{p}_i > 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\} = \max_{\{4\}} \left\{ -\frac{5}{4} \right\} = -1,25.$$

Она совпадает с заданным значением параметра t . Верхняя граница, согласно (1.8) есть

$$\beta_{o0} = \min_{\tilde{p}_i < 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\} = \min_{\{-8, -2\}} \left\{ -\frac{-9}{-8}, -\frac{-1}{-2} \right\} = -\frac{9}{8}.$$

И верхняя и нижняя границы совпадают с другими границами интервала: нижняя – с границей совместности ограничений, верхняя – с моментом появления в структуре решения двух основных переменных

Пункт № 4 алгоритма.

Направляющая строка – вторая, соответствует вектору A_4 , а направляющий столбец, определяемая по правилам двойственного симплекс-метода

$$\min \left\{ -\frac{2}{-\frac{11}{2}} = \frac{4}{11}; -\frac{1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \right\} = \frac{4}{11}$$

является вектор A_1 .

После одной итерации двойственного симплекс-метода получим.

Таблица 1.8 – Результат пересчёта на границе $t = 4/11$

				c_j	2	3	0	0	0
Базис	C_B	\tilde{B}	\tilde{P}	$X^{\nabla*}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	2	10/11	4/11	1/2	1	0	-2/11	5/11	0
A_2	3	18/11	16/11	0	0	1	3/11	-2/11	0
A_5	0	16/11	2/11	5/4	0	0	-1/11	-3/11	1
			δ_j	1	0	0	5/11	4/11	0

Обратим внимание, что содержание последней таблицы тождественно, за исключением столбца $X^{\nabla*}$, с содержимым оптимального решения, приведённым в таблице соответствующей значению параметра $t = -1/2$ (таблица 1.4). Как известно из теории матриц, перестановка строк и столбцов не оказывает влияние на свойства определителя и обратной матрицы.

Таким образом, если бы исходная постановка задачи параметрического программирования имела вид

$$F(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10 + 8t, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6 + 4t, \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 4 + 2t, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, t \in (-\infty; \infty), \end{cases}$$

то в результате вышеприведённых исследований, можно сформулировать ответ в виде набора интервалов с оптимальным решением на каждом из них.

$$x_1 = 5 + 4 \cdot t, x_2 = 0; F(x_1, x_2) = 10 + 8 \cdot t, t \in \left[-\frac{5}{4}, -\frac{9}{8} \right),$$

$$x_1 = \frac{10 + 4 \cdot t}{11}, x_2 = \frac{18 + 16 \cdot t}{11}; F(x_1, x_2) = \frac{74 + 56 \cdot t}{11}, t \in \left[-\frac{9}{8}, \infty \right).$$

1.2. Решение задачи линейного программирования при вариации коэффициентов целевой функции

Пусть коэффициенты целевой функции зависят от параметра t следующим образом

$$c_i^\nabla = c_i + tp_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (1.10)$$

В этом случае математическая модель задачи параметрического программирования представима так:

$$\begin{cases} \max F = (c_1 + tp_1)x_1 + (c_2 + tp_2)x_2 + \dots + (c_n + tp_n)x_n, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

В ходе решения ЗЛП при фиксированном значении $t = t_0 \in [\alpha, \beta]$, будет получена таблица оптимального решения, значения строки симплекс-разностей для основных переменных, композиционно может быть представлено в виде

$$\delta_j^\nabla = \tilde{\delta}_j + t_0 \cdot \tilde{p}_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.11)$$

где $\tilde{\delta}_j$ – значение j -й симплекс-разности без учёта параметра; \tilde{p}_j – параметрическая составляющая симплекс-разности.

Для того, чтобы компоненты строки симплекс-разностей (1.11) указывали на достижение оптимального решения, необходимо выполнение условия неотрицательности

$$\delta_j^\nabla = \tilde{\delta}_j + t_0 \cdot \tilde{p}_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.12)$$

Выполнение системы (1.12) находится в зависимости от знаков величин $\tilde{\delta}_j$ и \tilde{p}_j . Если имеются $\tilde{\delta}_j \geq 0$, то нижняя граница параметра

$$\alpha_{or} \geq -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \Rightarrow \alpha_{or} = \max_{\tilde{p}_j > 0} \left\{ -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \right\}, \quad (1.13)$$

$\alpha_{or} \leq \alpha$. Если отсутствуют $\tilde{p}_j > 0$, то есть все $\tilde{p}_j \leq 0$, **отсутствует и нижняя граница**: $\alpha_{or} \rightarrow -\infty$.

Когда имеются $\tilde{p}_j < 0$, то можно определить верхнюю границу подынтервала

$$\beta_{or} \leq -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \Rightarrow \beta_{or} = \min_{\tilde{p}_j < 0} \left\{ -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \right\}, \quad (1.14)$$

которая получается $\beta \leq \beta_{or}$. При отсутствии $\tilde{p}_j < 0$, то есть, когда все $\tilde{p}_j \geq 0$, **отсутствует верхняя граница интервала** $\beta_0 \rightarrow \infty$.

Алгоритм решения задачи параметрического программирования

1. Зафиксировать $t = t_0 \in [\alpha, \beta]$ и решить задачу параметрического программирования как обычную ЗЛП.

Дополнительные строки симплекс-таблицы $(m+1)$, $(m+2)$ и $(m+3)$, соответствующие $\tilde{\delta}_j$, \tilde{p}_j и δ_j^∇ , будем рассчитывать в ходе решения, согласуя с (1.11).

Пусть задача при некоем значении параметра t не разрешима, то есть, существуют признаки неограниченности линейной формы $\delta_k^\nabla < 0$, $a_{i,k} \leq 0$. Если

- $\tilde{p}_k = 0$, то задача неразрешима для любого t ;
- $\tilde{p}_k < 0$, то задача неразрешима для всех $t \leq \beta_{or}$.
- $\tilde{p}_k > 0$, то задача неразрешима для всех $t > \alpha_{or}$.

2. Исследовать полученное решение с помощью системы неравенств допустимости (1.12), в ходе которого будут определены нижняя (1.13) и верхняя (1.14) границы параметра.

3. Если окажется, что $\beta_{or} \rightarrow \infty$, то найдено оптимальное решение, и задача параметрического программирования решена.

4. В противном случае, необходимо определить направляющий столбец j^* по минимальному значению отношения

$$\min_{\tilde{p}_j < 0} \left\{ -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \right\} \Rightarrow j^*, \quad (1.15)$$

и осуществить ряд итераций прямого симплекс-метода, после чего перейти к п. 2 настоящего алгоритма.

5. Решение представляется набором интервалов $[\alpha, \beta_1], [\beta_1, \beta_2], \dots, [\beta_{r-1}, \beta]$, на каждом из которых будет свой оптимальный план и своё выражение для расчёта целевой функции.

Пример.

$$F(x_1, x_2) = (2 + 2 \cdot t)x_1 + (3 - 1 \cdot t)x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, t \in \left[-\frac{1}{2}; 2 \right]. \end{cases}$$

Пункт № 1 алгоритма.

Положим $t = -1/2$, и решим ЗЛП прямым симплекс-методом.

Таблица 1.9 – Начальная таблица для $t = -1/2$

		c_j	$2 + 2t = 1$	$3 - 1t = \frac{7}{2}$	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$\leftarrow A_3$	0	10	2	5	1	0	0
A_4	0	6	3	2	0	1	0
A_5	0	4	1	1	0	0	1
$m + 1$	$\tilde{\delta}_j$	0	-2	-3	0	0	0
$m + 2$	\tilde{p}_j	0	-2	1	0	0	0
$m + 3$	δ_j^∇	0	$-2 - 2t = -1$	$-3 + 1t = -\frac{7}{2} \uparrow$	0	0	0

Таблица 1.10 – Таблица оптимального решения для $t = -1/2$

		c_j	$2 + 2t = 1$	$3 - 1t = \frac{7}{2}$	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	$3 - 1t = \frac{7}{2}$	2	$2/5$	1	$1/5$	0	0
$\leftarrow A_4$	0	2	$11/5$	0	$-2/5$	1	0
A_5	0	2	$3/5$	0	$-1/5$	0	1
$m + 1$	$\tilde{\delta}_j$	6	$-4/5$	0	$3/5$	0	0
$m + 2$	\tilde{p}_j	1	$-12/5$	0	$-1/5$		
$m + 3$	δ_j^∇	$6 + 1 \cdot t = 7$	$-\frac{4}{5} - \frac{12}{5}t = \frac{2}{5} \uparrow$	0	$\frac{3}{5} - \frac{1}{5}t = \frac{7}{10}$	0	0

Строка $m + 3$ указывает на достижение оптимального решения, для значения $t = -1/2$ задача разрешима. Координаты оптимума суть $X^*(0, 2)$, а целевая функция имеет бесчисленное множество значений в функции от параметра:

$$F(0, 2, t) = (3 - 1 \cdot t) \times 2.$$

Пункт № 2 алгоритма.

Поскольку в $m + 2$ отсутствуют положительные числа, то это говорит о том, что отсутствует нижняя граница параметра α . Верхняя граница интервала, по условию (1.14) составит

$$\beta_{o1} = \min_{\tilde{p}_j < 0} \left\{ -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \right\} = \left\{ -\frac{12}{5}, -\frac{1}{5} \right\} \left\{ -\frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right\} = \left\{ -\frac{1}{3}, 3 \right\} = -\frac{1}{3}.$$

Пункт № 3 алгоритма.

Поскольку значение β_{o1} не превышает верхнюю границу, заданную в условии, то задача не решена, и вычисления продолжаются.

Пункт № 4 алгоритма.

Направляющий столбец, определяемый по (1.15), соответствует вектору A_1 (отмечен стрелкой в последней таблице 1.10) и верхней границе первого подынтервала β_{01} .

Поясним логику данного пункта алгоритма следующими рассуждениями. Оптимальное решение будет сохранять свою структуру в смысле набора базисных векторов, если выполняются (1.12). То есть, необходима реализация двух условий неотрицательности:

$$\begin{cases} -\frac{4}{5} - \frac{12}{5} \cdot t \geq 0, \\ \frac{3}{5} - \frac{1}{5} \cdot t \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \leq -\frac{1}{3}, \\ t \leq 3. \end{cases}$$

Если окажется, что $t > -\frac{1}{3}$, то вектор A_1 будет, согласно алгоритму симплексного метода, вводиться в базис. В результате итерации симплекс-метода получим таблицу.

Таблица 1.11 – Таблица оптимального решения для $t = -1/3$

		c_j	$2 + 2t = \frac{4}{3}$	$3 - 1t = \frac{10}{3}$	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$\leftarrow A_2$	$3 - 1t = \frac{10}{3}$	18/11	0	1	3/11	-2/11	0
A_1	$2 + 2t = \frac{4}{3}$	10/11	1	0	-2/11	5/11	0
A_5	0	16/11	0	0	-1/11	-3/11	1
$m + 1$	$\tilde{\delta}_j$	74/11	0	0	5/11	4/11	0
$m + 2$	\tilde{p}_j	2/11	0	0	-7/11	12/11	
$m + 3$	δ_j^∇	$\frac{74}{11} + \frac{2}{11}t = \frac{20}{3}$	0	0	$\frac{5}{11} - \frac{7}{11}t = \frac{2}{3} \uparrow$	$\frac{4}{11} + \frac{12}{11}t = 0$	0

Координаты точки оптимума $X^*\left(\frac{10}{11}, \frac{18}{11}\right)$, а выражение для расчёта функции цели выглядит следующим образом $F\left(\frac{10}{11}, \frac{18}{11}, t\right) = \frac{74}{11} + \frac{2}{11}t$. Для проверки правильности расчетов необходимо убедиться, что значения целевых функций для предыдущей и последующей таблиц оптимального решения в точке со значением параметра $t = -1/3$, совпадают:

$$F\left(0, 2, -\frac{1}{3}\right) = \left(3 + 1 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot 2 = \frac{20}{3},$$

$$F\left(\frac{10}{11}, \frac{18}{11}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{74 - 2 \cdot \frac{1}{3}}{11} = \frac{222 - 2}{11 \cdot 3} = \frac{20}{3}.$$

Отметим, что оптимальные значения основных переменных совпадают с теми, которые получены для случая $t = 0$, смотри приложение А, таблица А.3.

Пункт № 2 алгоритма.

Система неравенств, определяющая неизменность состава базиса, полученная по (1.12) выглядит так:

$$\begin{cases} \frac{5}{11} - \frac{7}{11} \cdot t \geq 0, \\ \frac{4}{11} + \frac{12}{11} \cdot t \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \leq \frac{5}{7}, \\ t \geq -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Эта система показывает верхнюю и нижнюю границу интервала изменения t , что полностью согласуется с условиями (1.13)

$$\alpha_{o_2} = \max_{\tilde{p}_j > 0} \left\{ -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \right\} = \left\{ \frac{12}{11} \right\} \left\{ -\frac{\frac{4}{11}}{\frac{12}{11}} \right\} = -\frac{1}{3}.$$

и (1.14)

$$\beta_{o_2} = \min_{\tilde{p}_j < 0} \left\{ -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \right\} = \left\{ -\frac{7}{11} \right\} \left\{ -\frac{\frac{5}{11}}{-\frac{7}{11}} \right\} = \frac{5}{7}.$$

Пункт № 3 алгоритма.

Поскольку значение β_{02} , не превышает верхнюю границу равную двум, заданную в условии, то задача не решена, и вычисления продолжаются.

Пункт № 4 алгоритма.

Полагаем значение $t = 5/7$, направляющий столбец A_3 , этот вектор будет в базис вводиться, а A_3 – выводиться из базиса. После расчётов получим таблицу.

Таблица 1.12 – Таблица оптимального решения для $t = 5/7$

		c_j	$2 + 2t = \frac{24}{7}$	$3 - 1t = \frac{16}{7}$	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	6	0	$11/3$	1	$-2/3$	0
A_1	$2 + 2t = \frac{24}{7}$	2	1	$2/3$	0	$1/3$	0
A_5	0	2	0	$1/3$	0	$-1/3$	1
$m + 1$	$\tilde{\delta}_j$	4	0	$-5/3$	0	$2/3$	0
$m + 2$	\tilde{p}_j	4	0	$7/3$	0	$2/3$	
$m + 3$	δ_j^∇	$4 + 4t = \frac{48}{7}$	0	$-\frac{5}{3} + \frac{7}{3}t = 0$	0	$\frac{2}{3} + \frac{2}{3}t = \frac{16}{21}$	0

Оптимум $X^*(2, 0)$, при этом функция цели рассчитывается по формуле $F(2, 0, t) = 4 + 4 \cdot t$.

Выполним проверку совпадения значений целевых функций на границе интервала $\beta_{02} = \alpha_{03} = 5/7$.

$$F\left(\frac{10}{11}, \frac{18}{11}, \frac{5}{7}\right) = \frac{74 + 2 \cdot \frac{5}{7}}{11} = \frac{518 + 10}{11 \cdot 7} = \frac{528}{11 \cdot 7} = \frac{48 \cdot 11}{11 \cdot 7} = \frac{48}{7},$$

$$F\left(2, 0, \frac{5}{7}\right) = \left(4 + 4 \cdot \frac{5}{7}\right) = \frac{48}{7}.$$

Значения функций целей одинаковы, как и ожидалось.

Пункт № 2 алгоритма.

Проанализируем границы интервалов

$$\alpha_{o_3} = \max_{\tilde{p}_j > 0} \left\{ -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \right\} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{7}{3} \right\} \left\{ -\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = -1, -\frac{\frac{5}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{5}{7} \right\} = \frac{5}{7}$$

Отмечаем совпадение границ интервалов $\beta_{o_2} = \alpha_{o_3}$. Так как в строке \tilde{p}_j отсутствуют отрицательные числа, это говорит о том, что $\beta_{o_3} \rightarrow \infty$.

Пункт № 4 алгоритма.

Поскольку значение β выходит за границу изменения параметра, заданного в условии задачи, то задачу параметрического программирования можно считать решённой.

Ответ.

В результате решения имеем несколько интервалов изменения параметра t , на каждом из которых имеются своя точка оптимума и своё выражение для вычисления функции цели:

- $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \right]; X_{opt}^* = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}; F(X_{opt}^*, t) = (3 - 1 \cdot t) \cdot 2 = 6 - 2t,$
- $\left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{7} \right]; X_{opt}^* = \begin{bmatrix} \frac{10}{11} & \frac{18}{11} \end{bmatrix}; F(X_{opt}^*, t) = (2 + 2 \cdot t) \cdot \frac{10}{11} + (3 - 1 \cdot t) \cdot \frac{18}{11} = \frac{74 + 2 \cdot t}{11}$
- $\left[\frac{5}{7}, \infty \right); X_{opt}^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}; F(X_{opt}^*, t) = (2 + 2 \cdot t) \cdot 2 = 4 + 4 \cdot t.$

В приложении В приводится графическая интерпретация условия задачи параметрического программирования. На рисунке В.1 показаны местоположения нормалей при различных значениях параметра t .

2. Решение задачи квадратичного программирования

Раздел квадратичного программирования дисциплины “Исследование операций” посвящён решению задач нелинейного программирования с вогнутой целевой функцией многих переменных второго порядка и линейной системой ограничений

Математическая модель такой задачи выглядит следующим образом [4 – 6, 9 – 14]

$$\begin{aligned} f(x) &= b^T X + \frac{1}{2} X^T C X \rightarrow \max, \\ AX &\leq A_0, X \geq 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где C — симметричная отрицательно определённая матрица размерностью $[n \times n]$, b^T — вектор-строка размерностью $[1 \times n]$, A — матрица системы ограничений размерностью $[m \times n]$, A_0 — вектор свободных членов системы ограничений размерностью $[m \times 1]$, n — число переменных, m — число ограничений.

С решением задачи квадратичного программирования связана одноимённая теорема [6], на базе которой и построен алгоритм решения. Сама теорема квадратичного программирования есть результат применения теоремы Куна – Таккера, посвящённой общему случаю задачи нелинейного программирования, к частным условиям (2.1).

Теорема. Вектор $X_0 \geq 0$ является оптимальным решением задачи квадратичного программирования тогда и только тогда, когда существуют такие m -мерные вектора $\Lambda > 0$, $W \geq 0$ и n -мерный вектор $V \geq 0$, что выполняются следующие условия

$$\begin{aligned} b + C \cdot X_0 - A^T \Lambda + V &= 0, & \text{а)} \\ A_0 - AX_0 - W &= 0, & \text{б)} \\ \left. \begin{aligned} V^T X_0 &= 0 \\ W^T \Lambda &= 0 \end{aligned} \right\} & \text{в)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Компоненты всех векторов Λ , W и V — неотрицательны, а вектора W и V могут быть нулевыми. Условия (2.2, а) и (2.2, б) образуют систему из $n + m$ уравнений для $2 \times (n + m)$ неизвестных компонентов X , Λ , V и W . Ограничения (2.2, в) есть условия дополняющей нежёсткости.

Констатирующая часть теоремы квадратичного программирования служит основанием для построения эквивалентной задачи линейного про-

граммирования, в ходе решения которой представляется возможным определить значения элементов всех неизвестных векторов X_0 , Λ , W и V и, после получения оптимальных значений ЗЛП, проверить условия дополняющей нежёсткости и неотрицательности.

Алгоритм решения задачи квадратичного программирования

1. Условия (2.2, а) и (2.2, б) необходимо представить в форме, обеспечивающей положительность элементов столбцов свободных членов

$$\begin{cases} A^T \Lambda - C \cdot X - V = b, \\ AX + W = A_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

2. Поскольку знак в ограничениях (2.3) – равенство, следует воспользоваться методом искусственного базиса. Необходимо добавить искусственные переменные $\{y_i\}$ и $\{z_i\}$, при этом система ограничений примет вид

$$\begin{cases} A^T \Lambda - C \cdot X - V + Z = b, \\ AX + W + Y = A_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

3. Конструируется псевдоцелевая функция из искусственных переменных

$$\sum_{i=1}^m \mu \cdot y_i + \sum_{j=1}^n \mu \cdot z_j \rightarrow \min. \quad (2.5)$$

4. Решается эквивалентная ЗЛП с функцией цели (2.5) при ограничениях (2.4).

Если в ходе решения ЗЛП векторы Y и Z будут выведены из базиса (достигнут оптимум), а полученные значения X , Λ , V и W не отрицательны, а так же удовлетворяют (2.2, в), то компоненты вектора X представляют собой оптимальное решение исходной задачи квадратичного программирования (2.1).

5. Рассчитывается значение целевой функции.

Пример.

Пусть компоненты условия (2.1) выглядят так

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b^T = (2 \quad 3), \quad C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Матрица C симметричная, а об отрицательной определённости можно судить по критерию Сильвестра – знаки минорных определителей должны чередоваться.

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = c_{11} = -\frac{1}{2} < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} > 0.$$

Следовательно, матрица C определена отрицательно.

Построение развёрнутой модели (2.1), соответствующей нашим условиям, даёт результат

$$f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + \frac{1}{4} \cdot x_1 \cdot x_2 - \frac{1}{4} \cdot x_1^2 - \frac{1}{4} \cdot x_2^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 10, \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 6, \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 10 - 2 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 \geq 0, \\ 6 - 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \geq 0, \\ 4 - 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Правая запись системы ограничений соответствует формальному виду, применяемому для представления ограничений в задачах вогнутого программирования.

Исследуем целевую функцию данной задачи на экстремум, найдём координаты стационарной точки.

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2 + \frac{1}{4} \cdot x_2 - \frac{1}{2} \cdot x_1 = 0, \\ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 3 + \frac{1}{4} \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \left(2 + \frac{1}{4} \cdot x_2 \right), \\ 3 + \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{4} \cdot x_2 \right) - \frac{1}{2} \cdot x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow X^* = \begin{pmatrix} \frac{28}{3} \\ \frac{32}{4} \end{pmatrix}$$

Полученная точка, в которой наблюдается безусловный глобальный максимум, лежит за пределами области ограничений, значение целевой функции в этой точке есть $f(X^*) = \frac{196}{9} \cong 21,7$.

По условиям задачи может быть составлена функция Лагранжа

$$L(X, \Lambda) = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + \frac{1}{4} \cdot x_1 \cdot x_2 - \frac{1}{4} \cdot x_1^2 - \frac{1}{4} \cdot x_2^2 + \lambda_1(10 - 2 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2) + \\ + \lambda_2(6 - 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2) + \\ + \lambda_3(4 - 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2).$$

Применение подхода, связанного с поисками безусловного экстремума функции без ограничений (функции Лагранжа) в задачах вогнутого программирования, позволяет получить систему ограничений для поиска значений X и Λ , являющихся координатами экстремальной точки.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L(X, \Lambda)}{\partial x_1} = 2 + \frac{1}{4} \cdot x_2 - \frac{1}{2} \cdot x_1 - 2 \cdot \lambda_1 - 3 \cdot \lambda_2 - 1 \cdot \lambda_3 \leq 0, \\ \frac{\partial L(X, \Lambda)}{\partial x_2} = 3 + \frac{1}{4} \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_2 - 5 \cdot \lambda_1 - 2 \cdot \lambda_2 - 1 \cdot \lambda_3 \leq 0, \\ \frac{\partial L(X, \Lambda)}{\partial \lambda_1} = 10 - 2 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 \geq 0, \\ \frac{\partial L(X, \Lambda)}{\partial \lambda_2} = 6 - 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \geq 0, \\ \frac{\partial L(X, \Lambda)}{\partial \lambda_3} = 4 - 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

Для канонизации системы ограничений добавим с соответствующими знаками компоненты векторов V и W . Получим следующую каноническую форму системы ограничений:

$$\begin{cases} 2 + \frac{1}{4} \cdot x_2 - \frac{1}{2} \cdot x_1 - 2 \cdot \lambda_1 - 3 \cdot \lambda_2 - 1 \cdot \lambda_3 + 1 \cdot v_1 = 0, \\ 3 + \frac{1}{4} \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_2 - 5 \cdot \lambda_1 - 2 \cdot \lambda_2 - 1 \cdot \lambda_3 + 1 \cdot v_2 = 0, \\ 10 - 2 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 - 1 \cdot w_1 = 0, \\ 6 - 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 - 1 \cdot w_2 = 0, \\ 4 - 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 - 1 \cdot w_3 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \Lambda > 0, V \geq 0, W \geq 0. \end{cases}$$

Сопоставив полученные выражения с выражениями (2.2, а, б) теоремы квадратичного программирования, отметим их полное соответствие.

Пункт № 1 алгоритма.

Преобразуем данную каноническую форму системы ограничений, так, чтобы в столбце свободных членов находились бы положительные элементы. Результат показан на рисунке 2.1.

Пункты № 2,3 алгоритма.

Построим эквивалентную ЗЛП, введя псевдоцелевую функцию и модифицировав систему ограничений (смотри Рисунок 2.2). Наименование “псевдоцелевая” функция получила, поскольку составляется только из искусственных переменных и оптимальное решение, в случае его существования, приведёт к обнулению этой функции.

Пункт № 4 алгоритма.

Так как в эквивалентной задаче число переменных в три раза превышает число ограничений, то сам Бог велел решать её модифицированным симплекс-методом [6, 7]. Вспомогательная таблица представлена ранее, а ход решения в виде последовательности основных таблиц показан ниже. Серым цветом выделены:

- симплекс-разности векторов, вводимых в базис вспомогательной таблицы;
- столбцы, соответствующие искусственным переменным, выведенным из базиса, там же;
- направляющие элементы в основных таблицах

Подробные численные расчёты опущены. Читатель, по желанию, может их повторить самостоятельно.

Основная таблица перед началом итераций

	C_B	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	A^*	θ
y_1	μ	2	1	0	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	—
y_2	μ	3	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	6
$\leftarrow z_1$	μ	10	0	0	1	0	0	5	2
z_2	μ	6	0	0	0	1	0	2	3
z_3	μ	4	0	0	0	0	1	1	4
	Λ	25μ	μ	μ	μ	μ	μ		

Основная таблица после 2-й итераций

	C_B	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	A^*	θ
y_1	μ	$\frac{43}{22}$	1	0	$\frac{7}{44}$	$-\frac{3}{11}$	0	2	$\frac{43}{44}$
$\leftarrow y_2$	μ	$\frac{53}{22}$	0	1	$-\frac{2}{11}$	$\frac{9}{44}$	0	5	$\frac{53}{110}$
x_2	0	$\frac{18}{11}$	0	0	$\frac{3}{11}$	$-\frac{2}{11}$	0	0	—
x_1	0	$\frac{10}{11}$	0	0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{5}{11}$	0	0	—
z_3	μ	$\frac{16}{11}$	0	0	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{3}{11}$	1	0	—
	Λ	$\frac{64}{11}\mu$	μ	μ	$-\frac{5}{44}\mu$	$-\frac{15}{44}\mu$	μ		

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot x_1 - \frac{1}{4} \cdot x_2 + 2 \cdot \lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2 + 1 \cdot \lambda_3 - 1 \cdot v_1 = 2, \\ -\frac{1}{4} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 + 5 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + 1 \cdot \lambda_3 - 1 \cdot v_2 = 3, \\ 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 1 \cdot w_1 = 10, \\ 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot w_2 = 6, \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot w_3 = 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \Lambda > 0, V \geq 0, W \geq 0. \end{cases}$$

Рисунок 2.1 – Система ограничений эквивалентной ЗЛП, соответствующая формулам (2.3)

$$\mu \cdot y_1 + \mu \cdot y_2 + \mu \cdot z_1 + \mu \cdot z_2 + \mu \cdot z_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot x_1 - \frac{1}{4} \cdot x_2 + 2 \cdot \lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2 + 1 \cdot \lambda_3 - 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 + 1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot z_1 + 0 \cdot z_2 + 0 \cdot z_3 = 2, \\ -\frac{1}{4} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 + 5 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + 1 \cdot \lambda_3 + 0 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 + 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 + 0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 0 \cdot z_1 + 0 \cdot z_2 + 0 \cdot z_3 = 3, \\ 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 1 \cdot z_1 + 0 \cdot z_2 + 0 \cdot z_3 = 10, \\ 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot z_1 + 1 \cdot z_2 + 0 \cdot z_3 = 6, \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 1 \cdot w_3 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot z_1 + 0 \cdot z_2 + 1 \cdot z_3 = 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \Lambda > 0, V \geq 0, W \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0. \end{cases}$$

Рисунок 2.2 – Вид эквивалентной ЗЛП, соответствующая формулам (2.4) и (2.5)

Таблица 2.1 – Вспомогательная таблица модифицированного симплекс метода

	C_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ	μ	μ	μ	μ
	A_0	x_1	x_2	λ_1	λ_2	λ_3	v_1	v_2	w_1	w_2	w_3	y_1	y_2	z_1	z_2	z_3
	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	2	3	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	3	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	5	2	1	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0
	10	2	5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
	6	3	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
	4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
δ^0	25μ	$\frac{25}{4}\mu$	$\frac{33}{4}\mu\uparrow$	7μ	5μ	2μ	$-\mu$	$-\mu$	μ	μ	μ	0	0	0	0	0
δ^I	$\frac{17}{2}\mu$	$\frac{59}{20}\mu\uparrow$	0	7μ	5μ	2μ	$-\mu$	$-\mu$	$-\frac{13}{20}\mu$	μ	μ	0	0	—	0	0
δ^{II}	$\frac{64}{11}\mu$	0	0	$7\mu\uparrow$	5μ	2μ	$-\mu$	$-\mu$	$-\frac{5}{44}\mu$	$-\frac{15}{44}\mu$	μ	0	0	—	—	0
δ^{III}	$\frac{269}{110}\mu$	0	0	0	$\frac{11}{5}\mu\uparrow$	$\frac{3}{5}\mu$	$-\mu$	$\frac{2}{5}\mu$	$\frac{31}{220}\mu$	$-\frac{69}{110}\mu$	μ	0	—	—	—	0
δ^{IV}	$\frac{16}{11}\mu$	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{2}{11}\mu$	$-\frac{9}{11}\mu$	$\mu\uparrow$	—	—	—	—	0
δ^V	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—	—	—

Основная таблица после 3-й итераций

	C_B	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	A^*	θ
$\leftarrow y_1$	μ	$\frac{109}{110}$	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{51}{220}$	$-\frac{39}{110}$	0	$\frac{11}{5}$	$\frac{109}{242}$
λ_1	0	$\frac{53}{110}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{55}$	$\frac{9}{220}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{53}{44}$
x_2	0	$\frac{18}{11}$	0	0	$\frac{3}{11}$	$-\frac{2}{11}$	0	0	—
x_1	0	$\frac{10}{11}$	0	0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{5}{11}$	0	0	—
z_3	μ	$\frac{16}{11}$	0	0	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{3}{11}$	1	0	—
	A	$\frac{269}{110}\mu$	μ	$-\frac{2}{5}\mu$	$\frac{31}{220}\mu$	$-\frac{69}{110}\mu$	μ		

Основная таблица после 4-й итераций

	C_B	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	A^*	θ
λ_1	0	$\frac{109}{242}$	$\frac{5}{11}$	$-\frac{22}{25}$	$\frac{5}{484}$	$-\frac{39}{242}$	0	0	—
λ_1	0	$\frac{103}{242}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{73}{242}$	$-\frac{69}{2420}$	$\frac{489}{2420}$	0	0	—
x_2	0	$\frac{18}{11}$	0	0	$\frac{3}{11}$	$-\frac{2}{11}$	0	0	—
x_1	0	$\frac{10}{11}$	0	0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{5}{11}$	0	0	—
$\leftarrow z_3$	μ	$\frac{16}{11}$	0	0	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{3}{11}$	1	1	$\frac{16}{11}$
	A	$\frac{16}{11}\mu$	0	0	$-\frac{1}{11}\mu$	$-\frac{3}{11}\mu$	μ		

Заключительная основная таблица, соответствующая оптимуму.

	C_B	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	A^*	θ
λ_1	0	$\frac{109}{242}$	$\frac{5}{11}$	$-\frac{22}{25}$	$\frac{5}{484}$	$-\frac{39}{242}$	0		
λ_1	0	$\frac{103}{242}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{73}{242}$	$-\frac{69}{2420}$	$\frac{489}{2420}$	0		
x_2	0	$\frac{18}{11}$	0	0	$\frac{3}{11}$	$-\frac{2}{11}$	0		
x_1	0	$\frac{10}{11}$	0	0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{5}{11}$	0		
w_3	0	$\frac{16}{11}$	0	0	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{3}{11}$	1		
	A	0	0	0	0	0	0		

В результате решения получим координаты оптимума:

$$x_1 = \frac{10}{11}, x_2 = \frac{18}{11}, \lambda_1 = \frac{103}{242}, \lambda_2 = \frac{109}{242}, \lambda_3 = 0, v_1 = 0, v_2 = 0, w_1 = 0, w_2 = 0, w_3 = \frac{16}{11}.$$

Элементы векторов V и W неотрицательны, среди элементов вектора A – есть положительные. Так как

$x_1 \cdot v_1 = 0$, $x_2 \cdot v_2 = 0$, $\lambda_1 \cdot w_1 = 0$, $\lambda_2 \cdot w_2 = 0$, $\lambda_3 \cdot w_3 = 0$, то условие дополняющей нежёсткости выполнено, и решение задачи квадратичного программирования находится в крайней точке множества допустимых стратегий, значение функции равно

$$f\left(\frac{10}{11}, \frac{18}{11}\right) = \frac{753}{121} \cong 6,223.$$

3. Решение задачи линейного целочисленного программирования (ЛЦП) методом ветвей и границ

Этот метод применяется для решения как полностью целочисленных, так и частично целочисленных задач дискретного программирования [7, 8].

Пусть математическая модель имеет вид

$$\begin{aligned} C^T X &\rightarrow \max, \\ AX &\leq B, \end{aligned} \quad (3.1)$$

в которой компоненты вектора X положительны и целочисленны. Пусть область ограничений замкнута, тогда каждая переменная в оптимуме ограничена диапазоном

$$L_j \leq x_j \leq U_j, \quad (3.2)$$

где L_j – нижний предел, а U_j – верхний предел (граница), определяемые границами области допустимых решений (области ограничений) задачи.

Пусть I есть целое число, такое, что $L_j \leq I \leq U_j - 1$. Тогда оптимальное **целочисленное** значение x_j , удовлетворяющее решению (3.1) и лежащее в пределах (3.2), будет находиться либо между L_j и I , либо между $I + 1$ и U_j . Это приводит к тому, что возникают дополнительные условия, по отношению к исходным условиям (3.1), не противоречащие им:

$$\left. \begin{aligned} x_j &\leq I, \\ x_j &\geq I + 1 \end{aligned} \right\}. \quad (3.3)$$

На базе ограничений (3.3) основана систематическая схема применения метода. Ограничения, приписываемые к исходной задаче, есть **дополнительные границы**, благодаря чему мы имеем, на каждом шаге решения, **пару задач**, происходящих от одной. Интерпретация хода решения в виде дерева определило второе слово в названии метода – **ветвей**. Метод ещё называют **методом обрыва ветвей** или **методом возврата**.

Алгоритм метода ветвей и границ [7, 11, 12]

Композиционно алгоритм состоит из предварительного этапа, проверки условия целочисленности текущего решения, построения задач G_{i1} и

G_{i2} , большой итерации, которая представляет собой несколько итерационных шагов двойственного симплекс-метода, и заключительной части, на которой выбирается наилучшее из всех, ранее полученных, целочисленных решений. Цифровой код i в индексации задач соответствует положению текущей “родительской” задачи на дереве решений

1. Предварительный этап. Задача (3.1) решается любым удобным методом до отыскания нецелочисленного оптимального решения, соответствующего точке X_0 .

2. Этой точке X_0 ставится в соответствие решение G_0 и его оценка – текущее значение целевой функции $\xi = C^T \times X_0$. Если X_0 – целочисленное решение для основных переменных математической модели, то задача считается решённой.

В противном случае, если X_0 – нецелочисленное решение, то, используя систему неравенств (3.3), получаем множество из двух задач G_{01} и G_{02} (ветвей). Особо подчеркнём, что пара задач **возникает для одной нецелочисленной переменной одновременно**. Каждая задача решается в отдельности, при этом находят их оценки $\xi(G_{01})$ и $\xi(G_{02})$.

3. В ходе решения на k -й итерации, в зависимости от текущих оценок $\xi(G_{i1})$ и $\xi(G_{i2})$, может произойти дальнейшее ветвление задач.

4. Вычислительный процесс осуществляется до “перерешивания” всех возникающих задач или до получения признаков их неразрешимости. Из полученных решений выбирается то, которое является наилучшим (в смысле оптимума) решением исходной задачи (3.1).

5. Для решения возникающих задач (3.3) используют двойственный симплекс-метод, который, как нам известно, допускает ввод новых ограничений в псевдоплан по ходу решения.

6. Ограничения вводятся только для одной из основных базисных нецелочисленных переменных. Правила формирования ограничений по неравенствам (3.3) суть следующие. Пусть в базисе находится вектор A_j , соответствующая переменная которого x_j – дробное число.

- Задача G_{i1} формируется по ограничению $x_j \leq I$, где I – целая часть $[x_j]$, округленная по недостатку. Первоначально формируется ограничение A_{r+t} , которое соответствует канонической форме неравенства и представляется в виде уравнения $I = x_j + x_{r+t}$. В симплекс-таблицу помещается строка, которая получается в результате операции вычитания $A_{r+t} - A_j$.
- Задача G_{i2} формируется по ограничению $-x_j \leq -(I + 1)$, которой соответствует каноническая форма $-(I + 1) = -x_j + x_{r+t}$. В симплекс-таблицу помещается строка, равная сумме $A_{r+t} + A_j$.

Каждая из исходных симплекс-таблиц задач G_{i1} и G_{i2} , дополняется строкой симплекс-разностей, взятой из таблицы, содержащей нецелочисленное решение G_i .

Выполняется одна или несколько итераций двойственного симплекс-метода до получения оптимального решения. Эта часть алгоритма называется “большой итерацией”.

Полезное замечание. Если в ходе расчётов вектор A_{r+t} , соответствующий дополнительному ограничению границы, ранее выведенной из базиса, вводится в него вновь, то строку и столбец симплекс-таблицы, связанные с этим вектором, исключают из неё.

Продemonстрируем работу алгоритма на примере.

Решить задачу линейного программирования:

$$F(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые числа.} \end{cases}$$

Ранее нами было получено оптимальное решение без учёта целочисленности основных переменных. Координаты точки оптимума $X_0^T = \left(\frac{10}{11}, \frac{18}{11}\right)$; $\xi(G_0) = \frac{74}{11}$. Данное решение нецелочисленное, поэтому последуют итерации.

		c_j	2	3	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	3	18/11	0	1	3/11	-2/11	0
A_1	2	10/11	1	0	-2/11	5/11	0
A_5	0	16/11	0	0	-1/11	-3/11	1
	δ_j	74/11	0	0	5/11	4/11	0

Сформируем пару задач G_{01} и G_{02} по первой строке симплекс-таблицы, что соответствует основной переменной x_2 .

Задача G_{01} .

$x_2 \leq 1 \Rightarrow A_6: 1 = x_2 + x_6$. Рассчитаем строку, которую нужно поместить в симплекс-таблицу перед строкой симплекс-разностей:

$$\begin{array}{rcl}
A_6 & 1 & = 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 \\
- & & \\
A_2 & \frac{18}{11} & = 0x_1 + 1x_2 + \frac{3}{11}x_3 - \frac{2}{11}x_4 + 0x_5 + 0x_6 \\
\hline
\tilde{A}_6 & -\frac{7}{11} & = 0x_1 + 0x_2 - \frac{3}{11}x_3 + \frac{2}{11}x_4 + 0x_5 + 1x_6
\end{array}$$

Таблица с новой строкой примет вид

		c_j	2	3	0	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	3	18/11	0	1	3/11	-2/11	0	0
A_1	2	10/11	1	0	-2/11	5/11	0	0
A_5	0	16/11	0	0	-1/11	-3/11	1	0
$\leftarrow A_6$	0	-7/11	0	0	-3/11	2/11	0	1
	δ_j	74/11	0	0	5/11↑	4/11	0	0

Задача G_{02} .

Данной задаче соответствует ограничение $-x_2 \leq -2$, которое в канонической форме представляется как A_6 : $-2 = -x_2 + x_6$. Расчёт строки, симплекс-таблицы.

$$\begin{array}{rcl}
A_6 & -2 & = 0x_1 + -1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 \\
+ & & \\
A_2 & \frac{18}{11} & = 0x_1 + 1x_2 + \frac{3}{11}x_3 - \frac{2}{11}x_4 + 0x_5 + 0x_6 \\
\hline
\tilde{A}_6 & -\frac{4}{11} & = 0x_1 + 0x_2 + \frac{3}{11}x_3 - \frac{2}{11}x_4 + 0x_5 + 1x_6
\end{array}$$

В результате имеем

		c_j	2	3	0	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	3	18/11	0	1	3/11	-2/11	0	0
A_1	2	10/11	1	0	-2/11	5/11	0	0
A_5	0	16/11	0	0	-1/11	-3/11	1	0
$\leftarrow A_6$	0	-4/11	0	0	3/11	-2/11	0	1
	δ_j	74/11	0	0	5/11	4/11↑	0	0

В ходе выполнения “большой итерации” для построенных задач имеем

Для задачи G_{01} .

		c_j	2	3	0	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	3	1	0	1	0	0	0	1
A_1	2	$4/3$	1	0	0	$1/3$	0	$-2/3$
A_5	0	$5/3$	0	0	0	$-1/3$	1	$5/3$
A_3	0	$7/3$	0	0	1	$-2/3$	0	$-11/3$
	δ_j	$17/3$	0	0	0	$2/3$	0	$5/3$

$X_{01}^T = \left(\frac{4}{3}, 1\right); \xi(G_{01}) = \frac{17}{3}$. Поскольку решение содержит дробные числа, то потребуется формирование дополнительных задач.

Для задачи G_{02} .

		c_j	2	3	0	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	3	2	0	1	0	0	0	-1
A_1	2	0	1	0	$-1/22$	0	0	$5/2$
A_5	0	2	0	0	$-5/11$	0	1	$1/2$
A_4	0	2	0	0	$-3/2$	1	0	$-11/2$
	δ_j	6	0	0	$-1/11$	0	0	2

$X_{02}^T = (0, 2); \xi(G_{02}) = 6$. Данное решение целочисленно, поэтому на задаче G_{02} заканчивается ветвление дерева решений.

Сформируем задачи G_{011} и G_{012} по строке, которая связана с основной переменной x_1 .

Задача G_{011} .

$x_1 \leq 1 \Rightarrow A_7: 1 = x_1 + x_7$. Рассчитаем строку, помещаемую в таблицу симплекс-разностей:

$$\begin{array}{rcl}
 A_7 & 1 & = 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 \\
 & - & \\
 A_1 & \frac{4}{3} & = 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \frac{1}{3}x_4 + 0x_5 - \frac{2}{3}x_6 + 0x_7 \\
 \hline
 \tilde{A}_7 & -\frac{1}{3} & = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - \frac{1}{3}x_4 + 0x_5 + \frac{2}{3}x_6 + 1x_7
 \end{array}$$

Начальная таблица для большой итерации задачи G_{011} выглядит так

		c_j	2	3	0	0	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_2	3	1	0	1	0	0	0	1	0
A_1	2	4/3	1	0	0	1/3	0	-2/3	0
A_5	0	5/3	0	0	0	-1/3	1	5/3	0
A_3	0	7/3	0	0	1	-2/3	0	-11/3	0
$\leftarrow A_7$	0	-1/3	0	0	0	-1/3	0	2/3	1
	δ_j	17/3	0	0	0	2/3 \uparrow	0	5/3	0

Задача G_{012} .

$-x_1 \leq -2 \Rightarrow A_7: 1 = x_1 + x_7$. Расчёт строки:

$$\begin{array}{rcl}
 A_7 & -2 & = -1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 \\
 + & & \\
 A_1 & \frac{4}{3} & = 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \frac{1}{3}x_4 + 0x_5 - \frac{2}{3}x_6 + 0x_7 \\
 \hline
 \tilde{A}_7 & -\frac{2}{3} & = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \frac{1}{3}x_4 + 0x_5 - \frac{2}{3}x_6 + 1x_7
 \end{array}$$

Таблица перед началом большой итерации для задачи G_{012} :

		c_j	2	3	0	0	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_2	3	1	0	1	0	0	0	1	0
A_1	2	4/3	1	0	0	1/3	0	-2/3	0
A_5	0	5/3	0	0	0	-1/3	1	5/3	0
A_3	0	7/3	0	0	1	-2/3	0	-11/3	0
$\leftarrow A_7$	0	-2/3	0	0	0	1/3	0	-2/3	1
	δ_j	17/3	0	0	0	2/3	0	5/3 \uparrow	0

В ходе выполнения большой итерации задачи G_{011} получим оптимальное решение

		c_j	2	3	0	0	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_2	3	1	0	1	0	0	0	1	0
A_1	2	1	1	0	0	0	0	0	0
A_5	0	2	0	0	0	0	1	1	0
A_3	0	3	0	0	1	0	0	-5	0
A_4	0	1	0	0	0	1	0	-2	1
	δ_j	5	0	0	0	0	0	3	0

Оптимальное решение: $X_{011}^T = (1, 1)$; $\xi(G_{012}) = 5$. Оно представлено целыми числами, поэтому дальнейшего ветвления в узле задачи G_{011} не будет.

При решении задачи G_{012} возникает следующая ситуация.

		c_j	2	3	0	0	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_2	3	0	0	1	0	1/2	0	0	3/2
A_1	2	2	1	0	0	0	0	0	-1/3
A_5	0	0	0	0	0	-4/3	1	0	5/2
A_3	0	-4/11	0	0	1	7/6	0	0	11/4
A_6	0	1	0	0	0	-1/2	0	1	-3/2
	δ_j	4	0	0	0	3/2	0	0	7/3

Так как вектор A_6 , входящий в текущий в базис, и связанный с дополнительным ограничением целочисленности, ранее был выведён из базиса, то строку и столбец A_6 необходимо удалить из симплекс-таблицы. Окончательно имеем:

		c_j	2	3	0	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_7
A_2	3	0	0	1	0	1/2	0	3/2
A_1	2	2	1	0	0	0	0	-1/3
A_5	0	0	0	0	0	-4/3	1	5/2
$\leftarrow A_3$	0	-4/11	0	0	1	7/6	0	11/4
	δ_j	4	0	0	0	3/2	0	7/3

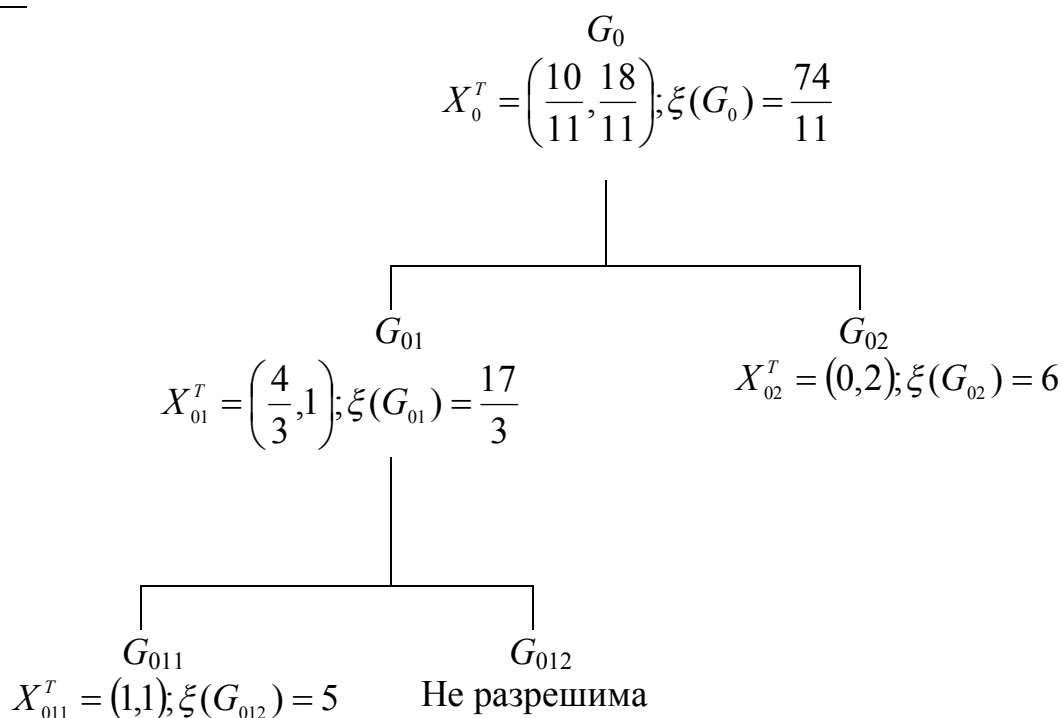


Рисунок 3.1 – Дерево решений

Для последней таблицы характерно наличие признака неразрешимости задачи линейного программирования: отсутствие в направляющей строке отрицательных элементов. Следовательно, решение задачи линейного целочисленного программирования закончено.

Из двух целочисленных решений G_{011} и G_{02} выбираем наилучшее, с позиции максимизации целевой функции, решение. Это решение соответствует оптимальному решению задачи G_{02} .

Вид дерева решения задач показан выше, на рисунке 3.1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Практически всем численным методам, применяемым в исследовании операций, присущи как алгоритмическое изящество, так и значительный объём итерационных вычислений, вкупе с обеспечением правильной методологии их применения.

Авторы надеются, что данное пособие окажет существенную помощь как в ходе выполнения соответствующих лабораторных работ, так и в решении задач организационного управления с применением методов исследования операций.

Е.Н. Заикина
В.Ю. Карлусов

Библиографический список

1. Акоф Р. Исследование операций./ Р. Акоф, П. Райветт. – М.: Мир.– 1986. – 230 с.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах./ И.Л. Акулич. – М.: Высшая школа, 1986. – 317 с.
3. Вагнер Г. Основы исследования операций. В 3-х томах./ Г. Вагнер. – М.: Мир Т.1: 1972. – 335 с. Т.2: 1973. – 488 с. Т.3: 1973. – 501 с.
4. Вентцель Е.С. Исследование операций./ Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
5. Зайченко Ю.П. Исследование операций: учебное пособие. / Ю.П. Зайченко. – Киев: Вища школа, 1979. – 392 с.
6. Зайченко Ю.П. Исследование операций: сборник задач. / Ю.П. Зайченко, С.А. Шумилова. – Киев: Вища школа, 1990. – 239 с.
7. Исследование операций в экономике [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Г.Я. Горбюцов [и др.].— Электрон. текстовые данные.— М.: Евразийский открытый институт, Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2006.— 118 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/10690>
8. Карманов В.Г. Математическое программирование [Электронный ресурс]/ Карманов В.Г.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.— 264 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/17324>
9. Короткин А. А. Модели и алгоритмы исследования операций : учеб. пособие / В. Г. Фокин, Яросл. гос. ун-т, А. А. Короткин .— Ярославль : ЯрГУ, 2006 <http://rucont.ru/efd/200087?cldren=0>
10. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций./ П.В. Конюховский. – СПб. и др.: Питер, 2001. – 192 с.
11. Кюлян В.Р. Математическое программирование./ В.Р. Кюлян, Е.А. Юнькова, А.Б. Жильцов. – К.: МАУАП, 2000. – 124 с.
12. Лунгу К.Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач [Электронный ресурс]/ Лунгу К.Н.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.— 132 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/12905>
13. Соколов А.В. Методы оптимальных решений. Общие положения. Математическое программирование. Том 1 [Электронный ресурс]/ Соколов А.В., Токарев В.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.— 562 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/12922>
14. Таха Х.А Введение в исследование операций. / Х. А. Таха. – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2001. – 912 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А (обязательное)

Решение задачи линейного программирования прямым симплекс-методом

Пусть условие задачи имеет вид

$$F(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Решение представлено ниже в виде последовательности таблиц.

Таблица А.1 – Исходная таблица

		c_j	2	3	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$\leftarrow A_3$	0	10	2	5	1	0	0
A_4	0	6	3	2	0	1	0
A_5	0	4	1	1	0	0	1
	δ_j	0	-2	$-3\uparrow$	0	0	0

Таблица А.2 – Таблица после 1-й итерации.

		c_j	2	3	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	3	2	$2/5$	1	$1/5$	0	0
$\leftarrow A_4$	0	2	$11/5$	0	$-2/5$	1	0
A_5	0	2	$3/5$	0	$-1/5$	0	1
	δ_j	6	$-4/5\uparrow$	0	$3/5$	0	0

Таблица А.3 – Таблица после 2-й итерации, соответствующая оптимуму.

		c_j	2	3	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	3	$18/11$	0	1	$3/11$	$-2/11$	0
A_1	2	$10/11$	1	0	$-2/11$	$5/11$	0
A_5	0	$16/11$	0	0	$-1/11$	$-3/11$	1
	δ_j	$74/11$	0	0	$5/11$	$4/11$	0

Оптимальное решение $F\left(\frac{10}{11}, \frac{18}{11}\right) = \frac{74}{11}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б (обязательное)

Графическая интерпретация задачи параметрического программирования при линейной параметрической зависимости вектора свободных членов системы ограничений

Условие задачи

$$F(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10 + 8t, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6 + 4t, \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 4 + 2t, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, t \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right]. \end{cases}$$

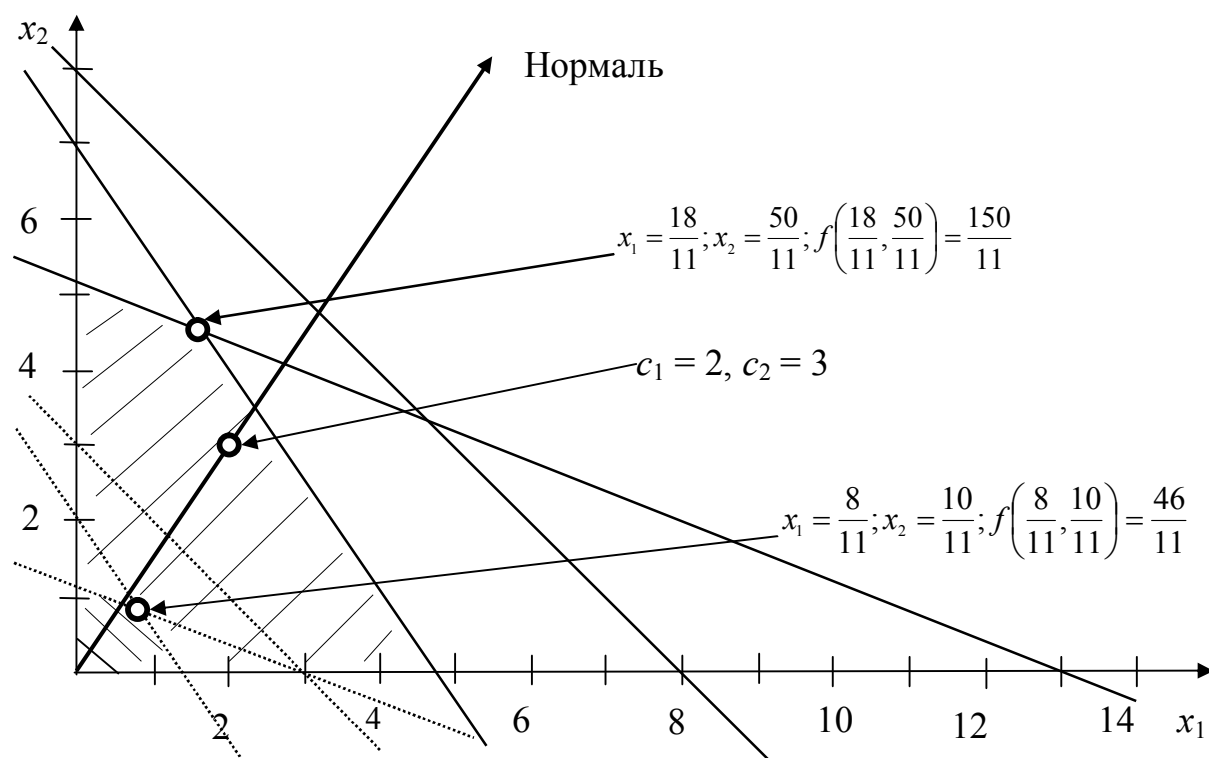


Рисунок Б.1 – Области допустимых стратегий

Следует отметить, что область допустимых стратегий будет существовать, покуда ограничения системы совместны.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

(обязательное)

Графическая интерпретация задачи параметрического программирования при линейной параметрической зависимости коэффициентов функции цели

Условие задачи

$$F(x_1, x_2) = (2 + 2 \cdot t)x_1 + (3 - 1 \cdot t)x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, t \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right]. \end{cases}$$

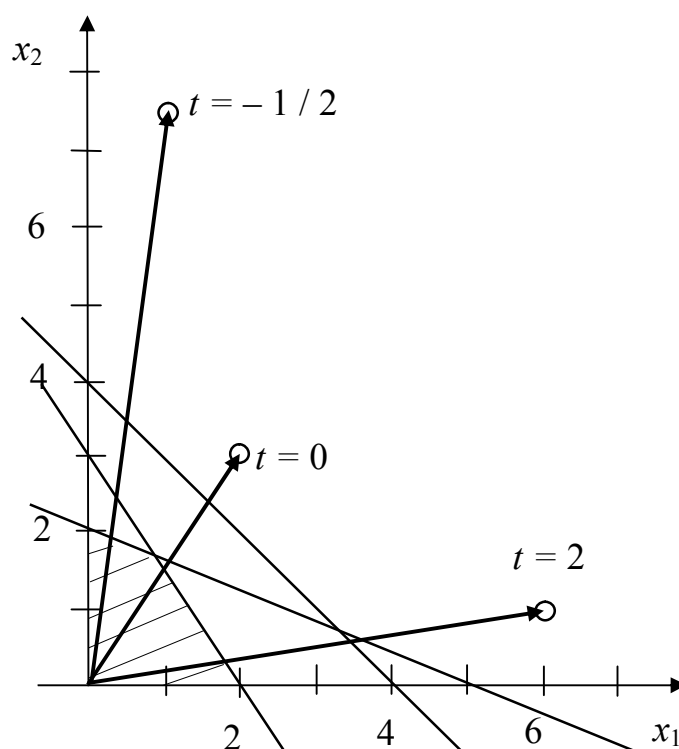


Рисунок В.1 – Различные положения нормали

$$f(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1 + \frac{7}{2} \cdot x_2, \quad t = -\frac{1}{2};$$

$$f(x_1, x_2) = 6 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2, \quad t = 2.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Д (Обязательное)

Содержательная постановка задачи

Артель “Босьяк” специализируется на производстве брутальных кремов для бритья (“Shaving cream for men”): “Compass” и “Aggression”. Продукция обоих видов поступает в бытовую продажу. Для производства кремов, помимо прочего, используются компоненты: “Stearic acid”, “Myristic acid” и “Potassium Hydroxide”.

Максимально возможные суточные запасы этих компонентов составляют 4, 6, 7 кг соответственно. Расходы этих ингредиентов на одну тонну соответствующих кремов приведены в таблице 1.

Таблица Д.1 — Параметры производства

Компоненты	Расход ингредиентов (кг / т)		Суточный запас (кг)
	Compass	Aggression	
Stearic acid	2	5	10
Myristic acid	3	2	6
Potassium Hydroxide	1	1	4

Оптовые цены одной тонны косметики составляют, соответственно, 2 и 3 тыс. экю.

В ходе выпуска и реализации продукции было замечено:
колебание цены продажи кремов по закону $(2 + 2 \cdot t)$ и $(3 - 1 \cdot t)$ и
колебание суточных запасов по закону $(10 + 8 \cdot t)$, $(6 + 4 \cdot t)$ и $(4 + 2 \cdot t)$
в диапазоне изменения $t \in [-0,5; 1]$

Какова должна быть структура производства, то есть, какое количество Shaving cream for men каждого вида должна производить артель “Босьяк” за смену, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

По данной содержательной постановке известными методами можно построить математическую модель вида

$$\begin{aligned}
 &F(x_1, x_2) = (2 + 2 \cdot t) \cdot x_1 + (3 - 1 \cdot t) x_2 \rightarrow \max \\
 &\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10 + 8t, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6 + 4t, \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 4 + 2t, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, t \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right]. \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{Д.1}$$

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Заказ №		от “		“		20		. Тираж	25	экз.
					Изд-во СевГУ					