上 海 交 通 大 学

（2022 至 2023 学年 第 1 学期 期末笔试 +作业）

课程名称 CS7323 从数据学习因果结构

考试时间: ________ 小时 ________ 分钟

班级号 ________ 学号 ________

姓名 ________ 成绩 ________

1. 回答下面的问题：

(1) 对于给定样本集$\{X_i, Z_i\}$， 根据什么理由认为有概率 $P(X_i, Z_i)$=1.

(2) 解释为什么有 $E[Y(1)-Y(0)] = \int E[Y(1)-Y(0)|Z]P(Z)dZ$.

(3) 由上小题以及$Y_i = X_i Y_i(1) + (1- X_i) Y_i(0)$，如何得到

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i w_i - \frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^{n}(1- x_i) Y_i w_i$$

其中 w_i 的含义是什么？

（4）说明 w_i 的一个估计，可以是$w_i = 1/e(Z_i)$，$e(Z_i)=p(X_i=1|Z_i)$，并基于给定样本集

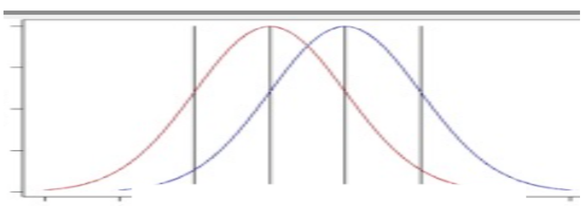
$\{X_i, Z_i\}$，解释其含义。

（5）讨论$e(Z_i)=p(X_i=1|Z_i)$与$e(Z)=p(X=1|Z)$的异同点，并说明基于给定样本集$\{X_i, Z_i\}$，如何估计$e(Z)$。

（6） 说明为什么有 $Z \perp X|e(Z)$成立的理由。

（7） 因而，等价地有 $E[Y(1)-Y(0)]=E[E(Y_1-Y_0|e(Z))]$，并说明其与题 1.(1)的异同。

（8） 借助下图说明如何将上述 $E[Y(1)-Y(0)]$用分组求和方式估计。



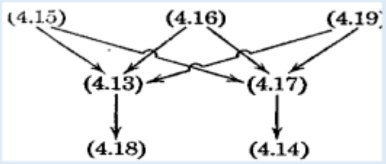
e(Z)=P(X=1|Z)

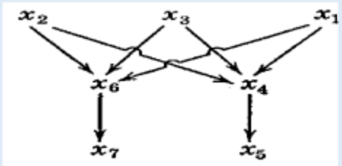
2. 联立方程组

（1） 解释什么是西蒙因果序？

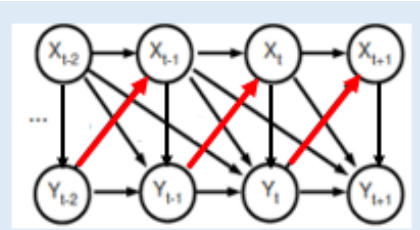
（2） 简短描述如何由下面的线性方程组，获得其下方的两个向无环图:

$$
\begin{array}{lllllll}
(4.13) & \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 & & & + \alpha_{16}x_6 & & = \alpha_{10} \\
(4.14) & & & \alpha_{24}x_4 + \alpha_{25}x_5 & & & = \alpha_{20} \\
(4.15) & \alpha_{32}x_2 & & & & & = \alpha_{30} \\
(4.16) & \alpha_{43}x_3 & & & & & = \alpha_{40} \\
(4.17) & \alpha_{61}x_1 + \alpha_{62}x_2 + \alpha_{53}x_3 + \alpha_{54}x_4 & & & & & = \alpha_{50} \\
(4.18) & & & & & \alpha_{66}x_6 + \alpha_{67}x_7 & = \alpha_{60} \\
(4.19) & \alpha_{71}x_1 & & & & & = \alpha_{70}
\end{array}
$$





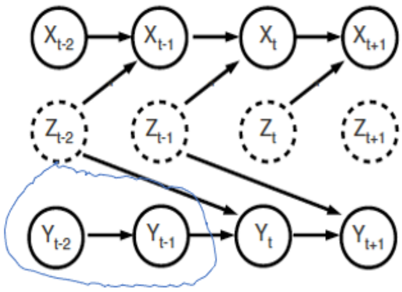
（3） 借助下图和公式，说明 Granger因果概念和相关分析之要点。

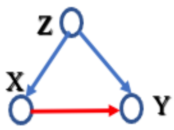


$$X_1(t) = \sum_{j=1}^{p} A_{11,j} X_1(t-j) + \sum_{j=1}^{p} A_{12,j} X_2(t-j) + E_1(t)$$

$$X_2(t) = \sum_{j=1}^{p} A_{21,j} X_1(t-j) + \sum_{j=1}^{p} A_{22,j} X_2(t-j) + E_2(t)$$

（4） 借助下图说明关于Granger因果的争议





（5）讨论下面三式的异同点

$$\sigma^2(y_{t+1}|Y_{-\infty}^{t}, X_{-\infty}^{t}, Z_{-\infty}^{t}) = \sigma^2(y_{t+1}|Y_{-\infty}^{t}, Z_{-\infty}^{t})$$

$$P(y_{t+1} \in A|Y_{-\infty}^{t}, X_{-\infty}^{t}, Z_{-\infty}^{t}) = P(y_{t+1} \in A|Y_{-\infty}^{t}, Z_{-\infty}^{t})$$

$$P(x_t \in A|Y_{-\infty}^{\infty}, X_{-\infty}^{t-1}, Z_{-\infty}^{t}) = P(x_t \in A|Y_{-\infty}^{t}, X_{-\infty}^{t-1}, Z_{-\infty}^{t})$$

（6）讨论线性状态空间模型 $\frac{dZ_t}{dt}$ = AZ_t+$B\varepsilon_t$， Y_t = CZ_t+ e_t、线性结构方程矩阵模型

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta} \qquad \mathbf{x} = \boldsymbol{\Lambda}_x\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta} \qquad \mathbf{y} = \boldsymbol{\Lambda}_y\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

与下面的 Dynamic causal modelling 的异同点。

$$\dot{x} = f(x, u, \theta) = Ax + \sum_{j=1}^{m} u_j B^{(j)} x + Cu$$

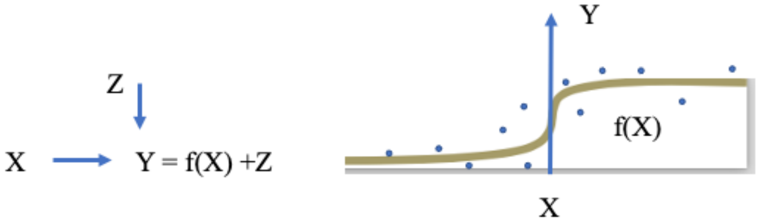
$$y = h(x, u, \theta) + \ z\beta + \epsilon$$

3. 关于叉式 fork 因果结构 X→Y← Z

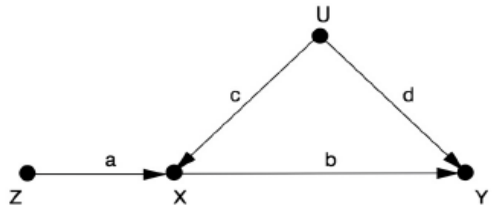
（1） 从概率分布独立角度，说明该叉式结构的基本性质。

（2） 说明辨识Y = f(X,Z)所表示 X至Y因果方向，等同辨识叉式结构 X→Y← Z的关系。

（2） 说明辨识下图中 X至Y因果方向的三个要点，

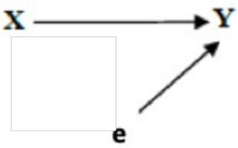


（3）指出下图中所有的叉式节点，并根据（1）指出 causal effect r_{ZY} 是 Z → X 的 causal effect r_{ZX} 和 X → Y 的 causal effect Z → X 的直接乘积，因而有 b = r_{ZY}/r_{ZX}。



（4）推导求解下面线性回归的最小平方 OLS 方法，

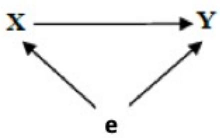
$y_i = X_i\beta + e_i$



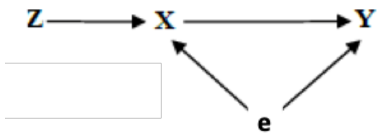
得到

$$\widehat{\beta}_{\mathrm{OLS}} = (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}y = (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}(X\beta + e) = \beta + (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}e$$

（5） 说明如果 X 与 e 无关，则$X^Te = 0$，解中的第二项偏差消失，但对于下面结构则不能消失。



（6） 加上工具变量 Z 如下，让 X 几乎复制 Z 的值但 Z 不受 e 影响而 X 只受 e 影响，



用 Z 取代（4）中解的 X，则有

$$\widehat{\beta}_{\mathrm{IV}} = (Z^{\mathrm{T}}Z)^{-1}Z^{\mathrm{T}}y$$

再用$X\beta + e$替代 y，并考虑$Z^Te = 0$和 Z≈X，仍然得到

$$\widehat{\beta}_{\mathrm{IV}} \approx \beta$$