第一次作业

1.

表达式：$P(y_5 \mid x_4) = \frac{P(x_4 y_5)}{P_x(x_4)} = \frac{20/200}{70/200} = \frac{2}{7}$

意义：表示了学习时长大于60min的学生中取得很好的成绩的概率更高.

差异：条件概率是已知学习很长情况下得好成绩概率，联合概率是整体下取好成绩且学习久的概率

表达式：$P(y_1 \mid x_4) = \frac{P(x_4 y_1)}{P_x(x_4)} = \frac{8/200}{70/200} = \frac{4}{35}$

意义：表示了学习时长大于60min的学生中取得很坏的成绩的概率更低.

差异：条件概率是已知学习很长情况下得坏成绩概率，联合概率是整体下取坏成绩且学习久的概率

表达式：$P(y_5 \mid x_1) = \frac{P(x_1 y_5)}{P_x(x_1)} = \frac{0}{14/200} = 0$

意义：表示了学习时长0-20min的学生中取得很好的成绩的概率为零.

差异：条件概率是已知学习很短情况下得好成绩概率，联合概率是整体下取好成绩且学习短的概率

2. 由于 x_1, x_2 符合正态分布，则分布函数定义为

由题知 $f_{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{x_1}^2}} e^{-\frac{(x-\mu_{x_1})^2}{2\sigma_{x_1}^2}}$ $\quad f_{x_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{x_2}^2}} e^{-\frac{(x-\mu_{x_2})^2}{2\sigma_{x_2}^2}}$

则联合概率分布为 $f = \frac{1}{2\pi\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} e^{-\left(\frac{(x_1-\mu_{x_1})^2}{2\sigma_{x_1}^2} + \frac{(x_2-\mu_{x_2})^2}{2\sigma_{x_2}^2}\right)}$ ①

以ab连线平面切片，即要求 $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1$ ②

在ab连线上做新坐标 t，从 a 到 b 增大

$\delta t = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} x_1$ $\qquad b - \frac{b}{a} x_1$

则 $t = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} x_1 + \sqrt{a^2+b^2}$ ③ $\qquad b - \frac{b}{a}\left(a - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} t\right)$

联立①②③ 留下 t 得表达式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} \exp\left[-\left(\frac{\left(a - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} t - \mu_{x_1}\right)^2}{2\sigma_{x_1}^2} + \frac{\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} t - \mu_{x_2}\right)^2}{2\sigma_{x_2}^2}\right)\right]$$

$Cov(X, a)=0$ ：表示X的变化趋势与常数的变化趋势总是无关的，也可以说变量与常数之间总体误差为零。

$Cov(X, X)=Var(X)$ 表示，X与X自身的总体误差也就是X自身的误差。

$cov(X, Y)=cov(Y, X)$ 表示，X与Y间的变化趋势和Y与X间变化趋势的改变对总体误差没有影响。

$cov(aX, bY)=ab\,cov(X, Y)$ 表示，X与Y间总体误差值与X和Y有线性关系。

$cov(X+a, Y+b)=cov(X, Y)$ 表示X与Y间总体误差不随X或Y的总体偏移而改变。

4，首先，构造函数 $g(t)=t^2E(X^2)+2tE(XY)+E(Y^2)$

$$=E(t^2X^2+2tXY+Y^2)$$
$$=E(tX+Y)^2\geq 0$$

$g(t)$ 与 t 轴最多有一条交点，因此 $\Delta\leq 0$，

$\therefore (2E(XY))^2-4E(X^2)E(Y^2)\leq 0$

$\therefore \quad E(X^2)E(Y^2)\geq E^2(XY)$

5，(1) 因为四个图都有垂直于X轴或Y轴的对称轴，因此计算 $E(XY)$ 时总可以以那个对称轴为基准，将两侧的数据点投影到对称轴上，再对轴上的点，求平均，这个操作就等价于求 $E(X)E(Y)$，因此 $cov(X, Y)$ 总为零。

(2) 由于 $Y=X^2$ 在 $X\in[-1, 1]$ 上是关于 $X=0$ 的轴对称函数，因此 $cov(X, Y)=0$