作业三.

$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$

10.9日作业:

习题一:

17. (1). $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

∴满秩分解为 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

∴分解为 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

习题二.

14. (1). 设f满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 则对 $\forall a \in \mathbb{Q}$ 有 $f(a)=af(1)$.

对 $\forall b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 则存在有理数的无穷数列 $a_1 \cdots a_i$ 使得 $i \to \infty$ 时 $a_i \to b$.

由于f是连续的, 所以 $f(b)=\lim_{i \to \infty} f(a_i) = \lim_{i \to \infty} [a_i f(1)] = f(1) \cdot \lim_{i \to \infty} a_i = bf(1)$

∴f是齐次的, 从而f是线性变换

(2) f是实线性空间 $V \to \mathbb{R}$ 上的加性函数, 若f是连续的, 则它是齐次的, 从而是线性变换

15, 不一定. 当σ是零函数 则可能有 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性无关但 $\sigma(\alpha_1) \cdots \sigma(\alpha_n)$ 线性相关

16, (1). (a). 显然 σ单射时 $Ker(\sigma)=0$.

下证 (⇐).: 若 $Ker(\sigma)=0$, 设有 $\alpha, \beta \in U$ 且 $\sigma(\alpha)=\sigma(\beta)$ 则 $\sigma(\alpha-\beta)=0 \Rightarrow \alpha-\beta=0$

∴ $\alpha=\beta$, 因此是单射.

(b) 是显然的.

(1). 同构映射必然是可逆的，可逆映射必是又单又满 ⇒ 是同构映射.

(2) 对于 $\sigma\in Hom(U,V)$. 则对 $\forall\beta\in V$, 由于 σ 是同构, 故 $\exists 1.\ \alpha\in U$, 使得 $\sigma(\alpha)=\beta$.

故有唯一的逆 τ. 且 $\tau\sigma(\alpha)=\alpha$. 以及 $\sigma\tau(\beta)=\beta$. ∴对于 $\tau=\sigma^{-1}$. 有 $\sigma=\tau^{-1}$.

19. (⇒). 显然.

(⇐), 令 $\alpha_1\cdots\alpha_n\in U$, $\alpha_1'\cdots\alpha_n'\in V$ 是两者的基.

令 $\sigma(\alpha_1)=\alpha_1'$, $\sigma(\alpha_2)=\alpha_2'\cdots$

则 对 $\forall\alpha\in U$. 且 $\alpha=[\alpha_1\cdots\alpha_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$. 有 $\sigma(\alpha)=\sigma[\alpha_1\cdots\alpha_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$

$=[\alpha_1'\cdots\alpha_n']\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\alpha'\in V$.

因此是单射且满射, ∴是同构的.

20. 对于习题22. 有线性空间是2维的.

令基为 $(1,i)$. 对应到 R^2 上. 有 R^2 上的基 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

令 $\sigma(1)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $\sigma(i)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 则 σ 是一个同构变换.

对于习题23. 其线性空间是一维的.

有基为 $1+i$. 对应到 R 上. 令 $\sigma\in Hom(U,V)$. 其中 $U=(C_{倍},C+\cdot)$
$V=(R,R+\cdot)$.

有 $\sigma(1+i)=1$.

则 σ 是一个同构变换.

10.11 日作业

17, (1) 对 1° $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \ker\varphi$, $\varphi(\alpha_1+\alpha_2) = 0'$ ∵ 又 $\varphi(\alpha_1)=0'$ $\varphi(\alpha_2)=0'$ ∴ $\varphi(\alpha_1+\alpha_2)=\varphi(\alpha_1)+\varphi(\alpha_2) \in \ker(\varphi)$

$\varphi(k\alpha)$: 由于线性空间 $k\alpha \in \ker\varphi$, ∴ $\varphi(\alpha)=0=k\varphi(\alpha)=0 \in \ker(\varphi)$

综上 $(\ker\varphi\ F + \cdot) \subseteq (V\ F + \cdot)$

2° $\forall \beta_1 \beta_2 \in I_m\varphi$.

$\beta_1+\beta_2 \in I_m\varphi$ ∵ $\exists \alpha_1 \in V$, $\alpha_2 \in V$. s.t. $\beta_1=\varphi(\alpha_1)$, $\beta_2=\varphi(\alpha_2)$ $\Rightarrow \beta_1+\beta_2=\varphi(\alpha_1)+\varphi(\alpha_2)=\varphi(\alpha_1+\alpha_2) \in I_m(\varphi)$.

$k\beta \in I_m\varphi$ ∵ $\beta \in I_m\varphi \Rightarrow \exists \alpha \in V$. s.t. $\beta=\varphi(\alpha)$. $\Rightarrow k\beta = k\varphi(\alpha)=\varphi(k\alpha) \in I_m(\varphi)$.

综上. $(I_m\varphi\ F + \cdot) \subseteq (V\ F + \cdot)$

18, $\sigma \in \mathrm{End}\,V$. 令基为 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$.

即 $\sigma[\alpha_1 \cdots \alpha_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\alpha_1' \cdots \alpha_n'] A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

显然若 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 时. 不存在别的线性变换,

若 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 1 \end{bmatrix}$ 时, τ 在基 $[\alpha_2\ \alpha_1 \cdots \alpha_n]$ 下的矩阵

显然与 σ 在 $[\alpha_1 \cdots \alpha_n]$ 下矩阵相等但 $\tau \neq \sigma$.

21, 因为 $\sigma \in \mathrm{Hom}(U.V)$ 有 σ 对应矩阵为 $A_{\dim U \times \dim V}$.

$\dim(\mathrm{Hom}(U.V)) = \dim A_{\dim U \times \dim V} = (\dim U) \times (\dim V)$

22, (1), 有 $\sigma\alpha = \alpha A(\sigma)$. $\tau\alpha = \alpha A(\tau)$

则 $(\sigma+\tau)\alpha = \alpha A(\sigma) + \alpha A(\tau) = \alpha A(\sigma+\tau)$

∴ $A(\sigma+\tau) = A(\sigma) + A(\tau)$

(2). $k\sigma\alpha = \alpha A(k\sigma)$ 又 $\sigma\alpha = \alpha A(\sigma)$ $k\sigma\alpha = \alpha k A(\sigma)$

∴ $A(k\sigma) = kA(\sigma)$

(3) $\sigma\alpha = \alpha A(\sigma) \quad \tau\alpha = \alpha A(\tau) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)\left[A_1^{(\tau)}, A_2^{(\tau)} \cdots A_n^{(\tau)}\right]$

$\sigma\tau\alpha_1 = \sigma(\alpha A_1^{(\tau)}) = \sigma\left(A_{11}^{(\tau)}\alpha_1 + A_{21}^{(\tau)}\alpha_2 \cdots A_{n1}\alpha_n\right)$

$= A_{11}^{(\tau)}\sigma\alpha_1 + A_{21}^{(\tau)}\sigma\alpha_2 \cdots A_{n1}^{(\tau)}\alpha_n$

$= A_{11}^{(\tau)}\left(A_{11}^{(\sigma)}\alpha_1 + \cdots A_{n1}^{(\sigma)}\alpha_n\right) + A_{21}^{(\tau)}(\cdots) \cdots$

$= (\alpha_1 \cdots \alpha_n)\begin{bmatrix} A(\sigma) A_{11}^{(\tau)} \\ A(\sigma) A_{21}^{(\tau)} \\ \vdots \end{bmatrix}$

同理对 α_2 一样.

最后 $\sigma\tau\alpha = \alpha A(\sigma)A(\tau) \quad \therefore A(\sigma\tau) = A(\sigma)A(\tau)$.

(4) σ 可逆

$\Leftrightarrow \exists \tau: V \to V$ s.t. $\sigma\tau = 1$

$\Leftrightarrow A(\tau\sigma) = A(\sigma\tau) = I$

$\Leftrightarrow \tau\sigma = \sigma\tau = Id$

$\Leftrightarrow A$ 可逆 且 $A^{-1} = B$.

(5) $Id(\alpha_1) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix} \quad Id(\alpha_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$

$Id(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix} = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) I \quad \therefore A(I) = I$

$O(\alpha_1) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix} \cdots O(\alpha_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$

$\therefore O\alpha_1 = \alpha\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} = \alpha O$.

$\therefore A(O) = O$

25、 有 $\alpha_0=(1,x,x^2,\dots,x^{n-1})$，$\alpha_1=(1,(x-a),(x-a)^2,\dots,(x-a)^{n-1})$

$\sigma\alpha_0=(0,1,2x,3x^2,\dots,(n-1)x^{n-2})$

易发现，$(1,x,\dots,x^{n-1})\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&\\0&0&2&\cdots&\\0&0&0&3&\cdots\\ \cdots&&&&n-1\\&&&&0\end{bmatrix}=(0,1,2x,\dots,(n-1)x^{n-2})$

同理易发现 $(1,(x-a),(x-a)^2,\dots,(x-a)^{n-1})\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&\\0&0&2&\cdots&\\ \vdots&&&&n-1\\&&&&0\end{bmatrix}=(0,1,2(x-a),\dots,(n-1)(x-a)^{n-2})$

∴矩阵均为 $\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&\\0&0&2&\cdots&\\ \cdots&&&&n-1\\&&&&0\end{bmatrix}$

显然，行列式必为 0。

26、 若 σ 为将严格下三角变为零，同时上三角部分不变，则是线性变换。

$\ker\sigma$ 是全体严格下三角矩阵，$\mathrm{Im}\,\sigma$ 是全体上三角矩阵。

σ 在基 $\{E_{ij}, 1\le i,j\le n\}$ 下矩阵为 $\begin{bmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&\ddots&&&\\&&&1&&\\&&&&0&\\&&&&&\ddots\end{bmatrix}$ 第 $\frac{n(n+1)}{2}$

（其中 ij 的[illegible]

28、 σ 是线性空间，题给指 对 $X\in V$，$\sigma(X)=AX$。

则 $\ker\sigma=\{X\mid AX=0\}$，$\mathrm{Im}\,\sigma=\{Y\mid AX=Y, X\in V\}$

τ 是线性空间，题指 $\tau(X)=P^{-1}XP$，由于 P 可逆，

因此，$\ker\tau=0$，$\mathrm{Im}\,\tau=V$。

29、 $\sigma(x,y,z)=(x\ y\ z)\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&1\\-1&1&-2\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&1\\-1&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&1\\1&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\0&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&-3\end{bmatrix}$

求 $\ker\varphi$ 即求 $\sigma(x,y,z)=0$ 的基。 $y+z=0$，$x-3z=0$； $y=-z$，$x=3z$。

∴基为 $\begin{bmatrix}3z\\-z\\z\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}$，维数为 1。

$\mathrm{Im}\,\varphi$ 的基、即求 $\varphi(x,y,z)$ 投影到全体 V 中，由最后矩阵，只需前两行，

即基为 $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$ 维数为 2.

(2). 行列式显然为零. $tr(M(\varphi)) = 1+1-2 = 0$.