作业一.

Ex 1. 解: R^+ 是 R 上的线性空间, 即有 $(R^+ R + \cdot)$

证明: 设 $\alpha, \beta, \gamma \in R^+$, $k, l \in R$

有 1° $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta$　　$\beta \oplus \alpha = \beta\alpha = \alpha\beta = \alpha \oplus \beta$ 满足条件 1°

2° $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \alpha\beta \oplus \gamma = \alpha\beta\gamma$

$\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = \alpha \oplus \beta\gamma = \alpha\beta\gamma = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$　满足条件 2°

3° $\exists\, 1 \in R^+$ 有 $1 \oplus \alpha = 1\alpha = \alpha$　　满足条件 3°

4° $\forall \alpha \in R^+$ 有 $\frac{1}{\alpha} \in R^+$ s.t. $\alpha \oplus \frac{1}{\alpha} = \alpha\frac{1}{\alpha} = 1$　满足条件 4°

5° $1 \odot \alpha = \alpha^1 = \alpha$.　满足条件 5°

6° $(kl) \odot \alpha = \alpha^{kl}$　　$k \odot (l \odot \alpha) = k \odot (\alpha^l) = (\alpha^l)^k = \alpha^{kl}$

满足条件 6°　　$= (kl) \odot \alpha$

7° $k \odot (\alpha \oplus \beta) = k \odot \alpha\beta = (\alpha\beta)^k$

$k \odot \alpha \oplus k \odot \beta = \alpha^k \oplus \beta^k = (\alpha\beta)^k = k \odot (\alpha \oplus \beta)$ 满足

8° $(k+l) \odot \alpha = \alpha^{k+l}$

$(k \odot \alpha) \oplus (l \odot \alpha) = \alpha^k \oplus \alpha^l = \alpha^{k+l} = (k+l) \odot \alpha$ 满足

综上, R^+ 是 R 上的线性空间.

Ex 2. 解.

1°. 证: 设 $A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2+ix_3 \\ x_2-ix_3 & -x_1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} y_1 & y_2+iy_3 \\ y_2-iy_3 & y_1 \end{bmatrix}$.

$C = \begin{bmatrix} z_1 & z_2+iz_3 \\ z_2-iz_3 & -z_1 \end{bmatrix}$ $l, k, x_i, y_i, z_i \in R$.
$i=1,2,3.$

有: ① $A+B = \begin{bmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2+i(x_3+y_3) \\ x_2+y_2-i(x_2+y_3) & -(x_1+y_1) \end{bmatrix} = B+A$. 成立.

② $(A+B)+C = \begin{bmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2+i(x_3+y_3) \\ x_2+y_2-i(x_2+y_3) & -(x_1+y_1) \end{bmatrix} + C$

$= \begin{bmatrix} x_1+y_1+z_1 & x_2+y_2+z_2+i(x_3+y_3+z_3) \\ x_2+y_2+z_2-i(x_2+y_3+z_3) & -(x_1+y_1+z_1) \end{bmatrix}$

$= A+(B+C)$. 成立.

③ 存在 $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有 $A+O = \begin{bmatrix} x_1+0 & x_2+ix_3+0 \\ x_2-ix_3+0 & -x_1 \end{bmatrix} = O$

④ 对于 A, 有 $B = \begin{bmatrix} -x_1 & -x_2-ix_3 \\ -x_2+ix_3 & x_1 \end{bmatrix}$ 满足 $A+B = O$

⑤ $1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1\cdot x_1 & 1\cdot(x_2+ix_3) \\ 1\cdot(x_2-ix_3) & 1\cdot(x_1) \end{bmatrix} = A$.

⑥ $(kl)\cdot A = \begin{bmatrix} klx_1 & kl(x_2+ix_3) \\ kl(x_2-ix_3) & kl(-x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} klx_1 & klx_2+iklx_3 \\ klx_2-iklx_3 & -klx_1 \end{bmatrix}$

$k\cdot(lA) = k\begin{bmatrix} lx_1 & lx_2+ilx_3 \\ lx_2-ilx_3 & -lx_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} klx_1 & klx_2+iklx_3 \\ klx_2-iklx_3 & -klx_1 \end{bmatrix} = (kl)\cdot A$.

⑦ $k(A+B) = k\begin{bmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2+i(x_3+y_3) \\ x_2+y_2-i(x_3+y_3) & -(x_1+y_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1+ky_1 & k(x_2+y_2)+i(kx_3+ky_3) \\ k(y_2+x_2)-i(kx_3+ky_3) & -kx_1-ky_1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} kx_1 & kx_2+ikx_3 \\ kx_2-ikx_3 & -kx_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ky_1 & ky_2+iky_3 \\ ky_2-iky_3 & -ky_1 \end{bmatrix} = kA+kB$

④. $(k+l)A=\begin{bmatrix}(k+l)x_1 & (k+l)(x_2+ix_3)\\ (k+l)(x_2-ix_3) & -(k+l)x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kx_1+lx_1 & k(x_2+ix_3)+l(x_2+ix_3)\\ k(x_2-ix_3)+l(x_2-ix_3) & -kx_1-lx_1\end{bmatrix}$

又 $kA+lA=\begin{bmatrix}kx_1 & k(x_2+ix_3)\\ k(x_2-ix_3) & -kx_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}lx_1 & l(x_2+ix_3)\\ l(x_2-ix_3) & -lx_1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}kx_1+lx_1 & k(x_2+ix_3)+l(x_2+ix_3)\\ k(x_2-ix_3)+l(x_2-ix_3) & -kx_1-lx_1\end{bmatrix}=(k+l)A$

综上 $(V\ R+\cdot)$ 是线性空间、

2°. 显然有: $e_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ $e_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$e_3=\begin{bmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{bmatrix}$

有 $\forall A\in V$, $\exists x_1,x_2,x_3\in R$ s.t. $A=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$.

且有 e_1,e_2,e_3 是线性无关组.

则 V的一个基为 (e_1,e_2,e_3), 维数为 3.

3°. $\begin{bmatrix}x_1 & x_2+ix_3\\ x_2-ix_3 & -x_1\end{bmatrix}=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$, 则坐标为 (x_1,x_2,x_3)

Ex 3.

$k.l \in \mathbb{Q}$ $\quad$ $C=\{c_1+c_2\sqrt{2} \mid c_1.c_2 \in \mathbb{Q}\}$

1°. 证明 令 $A.B.C \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. 其中 $A=\{a_1+a_2\sqrt{2} \mid a_1.a_2 \in \mathbb{Q}\}$. $B=\{b_1+b_2\sqrt{2} \mid b_1.b_2 \in \mathbb{Q}\}$

① $A+B = a_1+a_2\sqrt{2}+b_1+b_2\sqrt{2} = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)\sqrt{2} = B+A$.

② $(A+B)+C = a_1+a_2\sqrt{2}+b_1+b_2\sqrt{2}+c_1+c_2\sqrt{2} = (a_1+b_1+c_1)+(a_2+b_2+c_2)\sqrt{2} = A+B+C$.

③ $\exists\ 0 = 0+0\cdot\sqrt{2} = 0$. $\quad A+0 = a_1+a_2\sqrt{2}+0 = a_1+a_2\sqrt{2} = A$.

④ 对 $A=a_1+a_2\sqrt{2}$. 有 $B=-a_1+(-a_2\sqrt{2})$ 满足 $A+B=(a_1-a_1)+(a_2\sqrt{2}-a_2\sqrt{2})=0$
$=0$

⑤ $1\cdot A = 1\cdot(a_1+a_2\sqrt{2}) = a_1+a_2\sqrt{2} = A$.

⑥ $(k\cdot l)A = kla_1+kla_2\sqrt{2}$ $\quad k\cdot(lA) = k(la_1+la_2\sqrt{2}) = kla_1+kla_2\sqrt{2} = (kl)A$.

⑦ $k(A+B) = k(a_1+b_1+a_2\sqrt{2}+b_2\sqrt{2}) = ka_1+ka_2\sqrt{2}+kb_1+kb_2\sqrt{2} = kA+kB$.

⑧ $(k+l)A = (k+l)a_1+(k+l)a_2\sqrt{2} = ka_1+ka_2\sqrt{2}+la_1+la_2\sqrt{2} = kA+lA$.

2°. 令 $e_1=1$, $e_2=\sqrt{2}$, 有 $\forall A=a_1+a_2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ $\quad a_1.a_2 \in \mathbb{Q}$

满足 $A=a_1e_1+a_2e_2$.

且 $(e_1.e_2)$ 是线性无关组,

则 基是 $(1,\sqrt{2})$, 维数为 2.

Ex 4. 有 $e_1 = 1+i$.

对于 $\forall\, \alpha = a_1 + a_2 i \in C$. 其中 $\frac{(a_1+a_2+(a_2-a_1)i)}{2} \in C$.

有. $\alpha = \frac{(a_1+a_2+(a_2-a_1)i)}{2} \cdot e_1 = a_1+a_2+(a_2-a_1)i+(a_1+a_2)i-a_2+a_1$

$= a_1 + a_2 i$.

∴ 厚线性空间基为 $1+i$, 维数为 1.

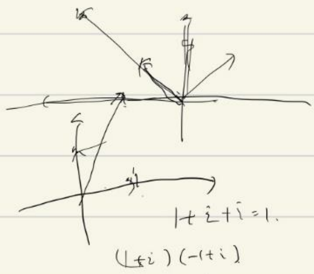
Ex 5. 令 $e_1 = 1$, $e_2 = i$.

对 $\forall\, \alpha = a_1 + i a_2 \in C$ 显然有.

$\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2$. 其中 $a_1, a_2 \in R$.

因此, 且 (e_1, e_2) 是线性无关的.

∴ 厚线性空间基为 $(1, i)$. 维数为 2.



习题一.

22. 证明 加法条件满足: 令 $a, b, c \in V$. $k, l \in R$.

① $a \diamond b = a+b+ab = b \diamond a$.

② $(a \diamond b) \diamond c = (a+b+ab)c = a+b+ab+c+(a+b+ab)c = a+b+c+ab+ac+bc+abc$

$= a \diamond (b \diamond c)$

③ $\exists\, 0$ s.t. $0 \diamond a = 0 + a + 0 \cdot a = a$.

④ $\exists\, b = \frac{-a}{1+a}$ s.t. $a \diamond b = a + \frac{-a}{1+a} + a \cdot \frac{-a}{1+a} = \frac{a+a^2-a-a^2}{1+a} = 0$.

即加法条件满足

接下构建数乘

$a \diamond a = a^2 + 2a$. $(a \diamond a) \diamond a = 3a + 3a^2 + a^3$. . . . .

合理假设 $k \heartsuit a = (a+1)^k - 1$.

验证 ① $1 \heartsuit a = (a+1)^1 - 1 = a$

② $(k+l) \heartsuit a = (a+1)^{k+l} - 1$

$k \heartsuit a \diamond l \heartsuit a = ((a+1)^k - 1)((a+1)^l - 1) + (a+1)^k - 1 + (a+1)^l - 1$

$= (a+1)^k \cdot (a+1)^l - 1 = (a+1)^{k+l} - 1$.

③. $k\heartsuit(a\diamond b) = k\heartsuit(a+b+ab) = (a+b+ab+1)^k - 1$.

$k\heartsuit a \diamond k\heartsuit b = ((a+1)^k-1)((b+1)^k-1) + (a+1)^k - 1 + (b+1)^k - 1$

$= ((a+1)(b+1))^k - 1$

$= (a+b+ab+1)^k - 1$.

④. $(k\cdot l)\heartsuit a = (a+1)^{kl} - 1$.

$k\heartsuit(l\heartsuit a) = k\heartsuit((a+1)^l - 1)$

$= (a+1)^{lk} - 1$

综上，$k\heartsuit a$ 可定义成 $(a+1)^k-1$. 满足数乘的条件.

设基为 $(1, i)$，对任意数 $a \in C/\{-1\}$. $a = m+in$. $m, n \in R$.

有 $a = k\heartsuit 1 \diamond l\heartsuit i$.

$= 2^k - 1 + (1+i)^l - 1 + (2^k-1)((1+i)^l-1)$

$= 2^k (1+i)^l - 1$.

一定存在对应的 $k, l \in R$. 使得 $2^k(1+i)^l - 1 = m+in$.

因此 $\forall a \in V$ 都可由 $(1, i)$ 线性表示. 又 1 不可由 i 线性表示.

即 $(i+1)^k - 1 \neq 1$. ($k \in R$). 所以 $(1, i)$ 是 V 的一组基.

23, 对定义的加法. 先找负向量. 设为 b

有 $a \oplus b = 0 = a + b + xab$.

$-a = b(xa+1)$. $b = \frac{-a}{xa+1}$.

则 $a \neq \frac{-1}{x}$.

$\therefore V = C/\{\frac{-1}{x}\}$ 此时满足加法群.

下面构造数乘有,

$2a = a+a = a+a+xa^2 = 2a+xa^2 = \frac{1}{x}(xa+1)^2 - \frac{1}{x}$

$3a = a+a+a = a + 2a+xa^2 + xa(2a+xa^2)$

$= x^2a^3 + 3xa^2 + 3a$

$= \frac{1}{x}(x^3a^3 + 3x^2a^2 + 3ax + 1) - \frac{1}{x}$

$= \frac{1}{x}(xa+1)^3 - \frac{1}{x}$

∴数乘为 $k \circ a = \frac{1}{x}(xa+1)^k - \frac{1}{x}$.

又设基为 $(1+i)$

显然为 $\forall a \in C/\{-\frac{1}{x}\}$,

存在 $k \in C$

$\frac{1}{x}(x+1+ix)^k - \frac{1}{x} = a$.

则有基为 $1+i$. ∴维数为 1

若将 C 换成 R, 则基相应换成 $(1, i)$.

24. 定义函数 $f_i(\alpha_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ $f_i(\alpha_j)\in F$.

则显然，$\forall f_i\in F^A$ f_i 不可由 F^A 中除 f_i 外其他任意元素线性表出.

因为 $f_i(\alpha_i)=1$. $\sum\limits_{\substack{l\neq i\\ k\in F}} k f_l(\alpha_i)=0$. 所以无法线性表出.

因此，$(f_1\cdots f_n)$ 是 F^A 的一组基.

(1). 由上，$\dim_F F^A=n$.

(2) 由上，基为 $f_1,\cdots f_n$.

(3). 由上可知，有 F^A 是 F^n 到 F 的一个全体映射.

推广到 $n\to\infty$. 则 F^A 是 $F^{|A|}$ 到 F 的全体映射，

其中 $F^{|A|}$ 是以 A 的元素为基的线性空间.

25. 由于 $\alpha_j\in J$ 可由 K 线性表示.

可设 $\alpha_j=a_{1j}\beta_1+\cdots+a_{tj}\beta_t$.

则 $(\alpha_1,\cdots\alpha_s)=(\beta_1,\cdots,\beta_t)A$，其中 $A=(a_{ij})_{t\times s}\in F^{t\times s}$.

又 J 线性无关，则 $Jx=0$ 只有零解.

$\therefore$ $KAx=0 \Rightarrow Ax=0$ 只有零解.

$\therefore$ $t\geq s$.

因此只要替换掉 K 中前 s 个与 $(\alpha_1\cdots\alpha_s)$ 线性相关的 β_i

可得新向量组与之前可生成相同子空间.

26. 假设有两个基所含向量不同，设分别为 $J=\{\alpha_1,\cdots\alpha_s\}$. $K=\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}$

由上题可知，因为 J 中每向量可由 K 线性表示，所以 $t\geq s$

又 K 中每向量可由 J 线性表示，所以 $t\leq s$.

$\therefore$ $t=s$. 即证.