作业九、 21. 22. 23. 24. 25. 29. 30. 31. 32. 33. 41. 42.

21. $A=LU$. 则 $A=L'\Lambda U$. 其中 $L=L'\Lambda$. Λ为L中对角线元素.

则 $A=L'U'$. 其中$U'=\Lambda U$.

22. 设$A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\l&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1&U_2\\0&U_3\end{bmatrix}$

得 $\begin{cases}U_1=0 & U_2=1\\ lU_1=1. & lU_2+U_3=0\end{cases}$ 解不出. ∴没有三角分解.

23. 设 $A=GG^T=HH^T$. 其中 G, H为对角元素均为正的下三角矩阵.

则. $H^{-1}G=H^TG^{-T}$. 左端为下三角, 右端为上三角. 则两端均为对角.

且对角元素. $h_{ii}^{-1}g_{ii}=h_{ii}g_{ii}^{-1}$ ∴$h_{ii}=g_{ii}$. 即 $G=H$. 因此具有唯一性.

24. $A=GG^*$. 其中 G是对角元素均为正的下三角矩阵.

25. 设 $A=LU$. 则. A的顺序主子式 A_i 恰好等于. L_iU_i.

∴$|A_i|\neq 0$.

反之若所有 A_i 都为0. 则可写成单位下三角阵与上三角阵的乘积.

29. 由奇异值分解. $A=U_1D_1V_1^*$. $A^*=V_1D_1^*U_1^*$; $B=U_2D_2V_2^*$ $B^*=V_2D_2^*U_2^*$.

则 $A^*A=V_1D_1^*D_1V_1^*$. $B^*B=V_2D_2^*D_2V_2^*$

$A^*A=B^*B$. 故 $D_1=D_2$.

又 ∃ 酉阵 V_3. 使得 $V_2=V_3V_1$

则. 有. $B^*B=V_3V_1D_1^*D_1V_1^*V_3^*=(U_3A)^*U_3A$.

∴ $B=UA$..

30, (1). $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ 是实对称阵. 则奇异值分解为对角化即可.

$\lambda^3-\lambda^2-2\lambda+1=0$

解得特征值为三个无理数. $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

则 $A=\begin{bmatrix}1&1&\vdots\\ \lambda_1^2-2&\lambda_2^2-2&\vdots\\ -\lambda_1^2+\lambda_1+2&\cdots&\cdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\lambda_1^2-2&-\lambda_1^2+\lambda+2\\1&\lambda_2^2-2&\vdots\\1&\cdots&\vdots\end{bmatrix}$.

(2). $A=\begin{bmatrix}2&2&1\\0&2&2\\2&1&2\end{bmatrix}$ 有特征值 1, $\frac{25\pm3\sqrt{41}}{2}$.

(3). $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{2}{\sqrt6}&0&-\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt3&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$.

31. $(A^*A)^*=A^*A \Rightarrow A^*A$ 为 Hermite.

$x^*(A^*A)x=(Ax)^*Ax\geq0, \Rightarrow A^*A$ 为 Hermite 半正定阵.

又 A^*A 为正规阵. $\Rightarrow$ ∃ 酉阵. s.t. $U^*A^*AU=\mathrm{diag}(\lambda_1\cdots\lambda_n)$.

其中, $0\leq\lambda_1\leq\lambda_2\cdots\leq\lambda_n$.

记 $U^*x=y$.

$\Rightarrow A^*A=U\Lambda U^*$. $x^*A^*Ax=x^*U\Lambda U^*x=y^*\Lambda y=\lambda_1y_1^2+\cdots\lambda_ny_n^2\leq\lambda_n(y_1^2+\cdots y_n^2)$

$=\lambda_n y^*y$.

$\Rightarrow \|U^*x\|=\|x\|$. $\forall x$ with $x^*x=1. \Rightarrow y^*y=1$.

$\Rightarrow \forall x\in C^n$, $x^*x=1$, 有 $(x^*A^*Ax)^{\frac12}\leq(\lambda_n)^{\frac12}=\sigma_{max}$.

$\Rightarrow$. $\max\{(x^*A^*Ax)^{\frac12}, x^*x\}\leq\sigma_{max}$. x 取 λ_n 对应特征向量时等号成立.

$A^*Ay=\lambda_ny$. $y^*y=1$.

$(y^*A^*Ay)^{\frac12}=(y^*\lambda_ny)^{\frac12}=\lambda_n^{\frac12}\cdot1=\lambda_n^{\frac12}=\sigma_{max}$.

32， $x^T G^T G x = (x - a(x,w)w)^T (x - a(x,w)w)$

$= (x^T - a(x,w)w^T)(x - a(x,w)w)$

$= (x,x) - a(x,w)^2 - a(x,w)^2 + a^2 (x,w)(w,w) = (x,x)$

$\therefore \alpha = 0$ 或 2.

当 $w=0$ 时，α 任意，当 $w \neq 0$ 时，$\alpha = \frac{2}{w^2}$.

33， 有 $B^*B = 2A^*A$ $\therefore V_B = \sqrt{2} D V$

$BB^* = \begin{bmatrix} AA^* & AA^* \\ AA^* & AA^* \end{bmatrix}$ $\therefore U_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} U^* & -U^* \\ U^* & U^* \end{bmatrix}$

$\therefore B = \begin{bmatrix} \frac{U^*}{\sqrt{2}} & -\frac{U^*}{\sqrt{2}} \\ \frac{U^*}{\sqrt{2}} & \frac{U^*}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V$.

41. 由奇异值分解的特性.

$AV = UD$ 其中 V 是 A^*A 的特征值的特征向量与 0 特征值的特征向量组成的.

U 是 AA^* 的特征值的特征向量与 0 特征值的特征向量组成的.

而两者特征值相同，则有 V 前 r 列和 U 前 r 列都是一组标准正交基，而

V 后 $n-r$ 列和 U 后 $m-r$ 列分别是 A 和 A^* 的零空间的标准正交基.

A 的四个子空间.

$R(A)$ = A 任两列的空间. $N(A)$ $(1,0,1)^T$.

$R(A^T)$ = A 任两行的空间 $N(A^*)$ $(1,1,-1)^T$.

42, $\lambda \in \mathbb{C}$ 满足 $Ax = \lambda x$. $x \neq 0$. $\Rightarrow$ $x^* A^* = \bar{\lambda} x^*$.

$\Rightarrow$ $x^* A^* A x = \lambda \bar{\lambda} x^* x = \lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2$.

$\Rightarrow$ $(x^* A^* A x)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|$. $\Rightarrow$ $|\lambda| \leq \max\{(x^* A^* A x)^{\frac{1}{2}} \cdot x^* x = 1\} = \sigma_{max}$.