作业二.

1, 证明 (⇒) 由于 U 是 V 的子空间, 所以 U 也要满足 V 上的关于加法封闭关于数乘封闭的要求, 即证.

(⇐). check $\alpha+\beta=\beta+\alpha$. 由于 $\alpha+\beta\in U$, 则 $\alpha+\beta$ 也属于 V, 同时 $\beta+\alpha$ 也属于 V.
由于 V 的性质, 所以 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

check $(\alpha+\beta)+\gamma=\gamma+(\beta+\gamma)$ 由于在 V 中结合律是对的, 且 $\alpha+\beta+\gamma$ 也在 V 中,
所以结合律也对.

check. $k=0$, $0\alpha=0\in U \Rightarrow \forall\alpha\in U$ 有 $\alpha+0=\alpha$. 同 V 中, 即证.

check. $-1\cdot\alpha=-\alpha$ $\because \alpha+(-\alpha)=0$.

check $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$ 同理由于 $U\subset V$. 所以成立.

check. $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$ 同上, 也符合 V 中, 有封闭性, 也成立.

check. $(kl)\alpha=k(l\alpha)$ 同理.

check. $1\alpha=\alpha$. 显然成立. 综上, 可证.

2, (1). 因为 $W\subseteq U$. 所以 $\forall\alpha,\beta\in W$, 有 $\alpha+\beta\in W$, $\lambda\alpha\in W$.
显然有 $\alpha+\beta\in U$, $\lambda\alpha\in U$.
又 $U\subseteq V$. 所以显然也有 $\alpha+\beta\in V$, $\lambda\alpha\in V$.
所以 W 也是 V 的子空间.

(2). 在两个子空间的交集一定是两个子空间的子空间, 因此是 V 的子空间,
并且由于交集的性质, 若某子空间含于所有子空间, 且必含于这些子空间
的交. 所以是最大的.

3, (1), proof. $\dim(U\cap W)=m$. $\dim U=n_1$ $\dim W=n_2$

∵ 假定 $U\cap W$ 有基 $\alpha_1\cdots\alpha_m$. 将它扩充为 U 和 W 的基.

U 基：$\alpha_1,\cdots\alpha_m,\beta_1\cdots\beta_{n_1-m}$.

W 基：$\alpha_1\cdots\alpha_m,\gamma_1\cdots\gamma_{n_2-m}$.

check. $\alpha_1\cdots\alpha_m,\beta_1\cdots\beta_{n_1-m},\gamma_1,\cdots,\gamma_{n_2-m}$ 为 $U+W$ 的基.

首先 check 以上这一组是 l.i.

设 $k_1\alpha_1+\cdots k_m\alpha_m+l_1\beta_1+\cdots l_{n_1-m}\beta_{n_1-m}+t_1\gamma_1+\cdots t_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}=0$

$\Rightarrow k_1\alpha_1+\cdots k_m\alpha_m+l\beta\cdots l\beta=-(t\gamma\cdots t\gamma)\in U$

又它还属于 V_2 所以 右边属于 $U\cap W$.

从而一定有 $k_1\cdots k_m$ 使 $\underbrace{k_1\alpha_1+\cdots k_m\alpha_m-t_1\gamma_1-\cdots t_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}=0}_{\text{又是 W 的一组基}}$

所以 $k_1\cdots k_m,t_1\cdots t_{n_2-m}=0$ 同理 由于 V 的基 $l_1\cdots l_{n_1-m}=0$

且 $\alpha_1\cdots\alpha_m=0$ 所以 $\alpha_i\ \beta_i\cdots\gamma_1\cdots\gamma_{n_2-m}$ 是线性无关的.

又设 $\alpha\in U+W$, 则存在 $\beta\in U$, $\gamma\in W$, 使得 $\alpha=\beta+\gamma$.

所以 α 是 $\alpha_i\ \beta_1\cdots\gamma_1\cdots\gamma_{n_2-m}$ 的线性组合. ∴ 是一组基.

∴ 题中式子成立.

(2). 设 $\dim V=n$, 显然, $m\le n$.

又设 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 是 V 的基.

则 $0=V_0\subset\alpha_1$ 的线性空间 $\subset\alpha_1$ 和 α_2 的线性空间 $\subset\cdots\subset\alpha_1\cdots\alpha_n$ 的线性空间 $=V$.

因此 $m=n$.

4, Proof. (1)⇒(2) 将 $\sum_{k\neq j} W_k$ 看成一个子空间,

∴ $W_j + \sum_{k\neq j} W_k = \dim W_j + \dim(\sum W_k) + \dim(W_j \cap \sum W_k)$

$= \dim W_j + \dim(\sum W_k)$

∴ $W_j \cap \sum_{k\neq j} W_k = 0$

(2)⇒(3) 设 $\alpha \in W_1+\cdots W_s$ 可分解为 $\alpha=\alpha_1+\cdots\alpha_s$ 与 $\alpha=\beta_1+\cdots\beta_s$

其中 $\alpha_i,\beta_i\in W_i$. 则 $\alpha_i-\beta_i=\sum_{j\neq i}(\beta_j-\alpha_j) \in \sum_{j\neq i} W_j$

但由于 $\alpha_i-\beta_i \in W_i$. 因 $W_i\cap\sum_{j\neq i}W_j=0$ ∴ $\alpha_i-\beta_i=0$

∴分解式唯一.

(3)⇒(4). 同理, 显然.

(4)⇒(1). 由(4)可以 $(W_1+\cdots W_{s-1})+W_s$ 是直和.

$\dim(W_1+\cdots W_s) = \dim W_s + \dim(W_1+\cdots W_{s-1}) = \dim W_s+\dim W_{s-1}+\dim(W_1+\cdots W_{s-2})$

$\cdots = \dim W_1+\dim W_2+\cdots\dim W_s$.

6, Pf: 显然 $W_1\neq V$.

对于 $W_1\cup W_2$. 不妨设 存在 $\alpha_1\in W_1$ 且 $\alpha_1\notin W_2$. 和 $\alpha_2\in W_2$ 且 $\alpha_2\notin W_1$.

则一定有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\notin W_1\cup W_2$ ①

否则, 存在 W_i (i=1或2), 存在 $\beta_1,\beta_2\in W_i$ 且. $\beta_1=k_{11}\alpha_1+k_{12}\alpha_2$ $\beta_2=k_{21}\alpha_1+k_{22}\alpha_2$.

由于 $\begin{vmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{21}&k_{22}\end{vmatrix}$ 是可逆的 所以 α_1,α_2 可由 $\beta_1\beta_2$ 线性表示. 所以 α_1,α_2 在 W_i 上.

与假设不符. 所以反证 结论①成立.

同理 对于 $W_1\cup W_2\cup W_3\cdots\cup W_s$. 也可证明. 存 $\sum k_i\alpha_i \notin \bigcup_{j=1}^s W_j$.

∴ $W_1\cup W_2\cup W_3\cdots W_s\neq V$

7 8 9 10 12.

7，显然．设 $A, B \in U$，$tr(A)=tr(B)=0$

显然 $tr(A+B)=0$．$\therefore A+B \in U$

$tr(kA)=k\,tr(A)=0$　$\therefore kA \in U$　$\therefore U$是V的子空间，

下求维数：显然，对于除去对角线后的每一个元素都要有一维，即 n^2-n 维．

对于对角线上元素，前 $n-1$ 个确定后，最后一个也确定为负的前 $n-1$ 项和，

因此为 $n-1$ 维，$\therefore$ 共有 n^2-1 维．

则它的补空间为全体纯量矩阵构成的子空间．

8，设 $\alpha = k_{n-1}x^{n-1}+\cdots+k_1 x-\sum_{i=1}^{n-1}k_i$　$\beta = l_{n-1}x^{n-1}+\cdots+l_1 x-\sum_{i=1}^{n-1}l_i$

$\alpha+\beta=(k_{n-1}+l_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(k_1+l_1)x-\left(\sum_{i=1}^{n-1}k_i+\sum_{i=1}^{n-1}l_i\right) \in U$

且 $\forall \alpha(1)=0 \in U$ 所以 $U \subseteq V$．

显然维数是 $n-1$．由于是常数项被限制，所以补空间为全体常数多项式的子空间

9，
$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&4&5&1&2\\2&-1&1&-1&-1\\3&3&6&1&4\\6&6&12&1&5\end{bmatrix}\\ \alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \beta_1\ \ \beta_2\end{array}$$
作初等行变换得
$$\begin{array}{ccccc}a&b&c&&\\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix}1&4&5&0&-1\\0&-9&-9&0&4\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$
$c-b=!$

$a+4b+5c=-1$

$-9b-9c=4$

$\therefore U+W$ 的基为 $[\alpha_1, \alpha_2, \beta_1]$

注意到 $\begin{bmatrix}2\\-1\\4\\5\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\2\end{bmatrix}=-\frac{4}{9}\begin{bmatrix}4\\-1\\3\\6\end{bmatrix}+\frac{7}{9}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\6\end{bmatrix}$

$\frac{16}{9}-9$

(1) $\therefore U\cap W$ 的基为 $\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\2\end{bmatrix}$

(2)，扩充后为 $\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\6\end{bmatrix}$

(3)，扩充后为 $\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$

(4)．$U+W$ 基为 $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\6\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}4\\-1\\3\\6\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$

10, $U\cap W$ 相互子. 联立 $\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x-y+z-w=0 \end{cases}$ 可得 z, w 可用 x, y 表示,

所以 $W\cap U$ 的维数为 2.

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U\cap W) = 3+3-2=4.$$

有 $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ $W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

联立 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

注意 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ 可由 U 中元素表示.

$\therefore$ $U\cap W$ 基为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

显然 $U+W$ 基为标准基.

12, (1). 显然 $A=\frac{1}{2}\left[(A+A^T)+(A-A^T)\right]$ 其中 $\frac{A+A^T}{2}$ 是对称矩阵, $\frac{A-A^T}{2}$ 是反对称矩阵.

且由于两者为互补的子空间, 所以分解唯一.

(2). $A=\frac{1}{2}\left[(A+\bar{A}^T)+(A-\bar{A}^T)\right]$ 其中 $\frac{A+\bar{A}^T}{2}$ 是 Hermite 矩阵. $\frac{A-\bar{A}^T}{2}$ 是反 Hermite 矩阵.

同理 分解唯一.

(3) $f(x)=\frac{1}{2}\left[(f(x)+f(-x))+(f(x)-f(-x))\right]$ 其中 $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 是偶函数 $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 是奇函数.

同理 分解唯一.

(4). 任意复数可唯一地表示成两共轭复数的和,

设复数 $C = \frac{C+\bar{C}}{2} + \frac{C-\bar{C}}{2}$.