作业八.

习题一: 43, 设有可逆矩阵 A. 则 A^TA 是正定的, 则有 U 是正交阵使得 $U^TA^TAU=D$.

其中 D 对角元素都为正。则有 Q 正定对角阵. 使得, $Q^TU^TA^TAUQ=E$.

则 AUQ 是正交的, 使其为 R.

则. $A = RQU^T = \underbrace{RQR^T}_{\text{正定}}\underbrace{R^TU^T}_{\text{正交}}$. 则任一阵可化为正交和正定阵乘积.

设 V 标准正交基. $\gamma_1\cdots\gamma_n$. 有.

$(\gamma_1\cdots\gamma_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A = (\alpha_1\cdots\alpha_n)BC$. 其中 B 是正定 C 正交,

$\therefore$ 有. $(\gamma_1\cdots\gamma_n)C^T=(\alpha_1\cdots\alpha_n)B$.

又 $(\gamma_1\cdots\gamma_n)C^T$ 显然也是标准正交基, 因此得证.

44, (1) 设 A 特征值为 $\lambda\neq 0$, 特征向量 α. 则 $A\alpha=\lambda\alpha$.

$\alpha^TA^T=\lambda\alpha^T$. $\quad -\alpha^TA=\lambda\alpha^T$.

$-\alpha^TA\alpha=\lambda\alpha^T\alpha$. $\quad \therefore -\lambda=\lambda$ $\lambda=0$ 或纯虚数

$-\lambda\alpha^T\alpha=\lambda\alpha^T\alpha$.

(2) 设此非零特征值为 a. 则 $A(\alpha+\beta i)=a(\alpha+\beta i)$

$A\alpha=a\alpha \quad A\beta=a\beta$. $\quad \alpha^TA^T=a\alpha^T=-\alpha^TA$

$-\alpha^TA\beta=-\alpha^Ta\beta=-a\alpha^T\beta$ 又有 $-\alpha^TA\beta=a\alpha^T\beta$,

$\therefore -a\alpha^T\beta=a\alpha^T\beta$ 由于 $a\neq 0$ 所以 $\alpha^T\beta=0$

习题二. 若 A 是正交阵,

40, 则 $A^TA=I \Rightarrow A^TA=AA^T=I \Rightarrow A$ 实正规阵.

正交阵 P. $P^TAP=\mathrm{diag}\{\}$, 为正交阵 $\Rightarrow \mathrm{diag}\{\}$ 每一个子块为正交阵 $\Rightarrow \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{bmatrix}$ 为正交阵

$a_i^2+b_i^2=1 \Rightarrow \begin{cases} a_i=\cos\theta_i \\ b_i=\sin\theta_i \end{cases}$, $\Rightarrow \mathrm{diag}\{\}=\mathrm{diag}\left\{\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, [\quad]\cdots 1\cdots 1, -1\cdots -1\right\}$

所以 $\exists P$ 正交阵，使得 $P^TAP = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, 1, \dots, -1, \dots \right\}$.

对于 A 是3×3阵时，若有 $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，则另一个只能是实数即1或-1.

若无 $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 则是跟题 -1 出现的个数 共有四种，综合上面的两种

共有题中所给的六种.

习题四. 14，由于A是酉阵，则A中每列均为单位向量，则P中每列都互相垂直且长度为1.

因此P是酉阵，同理由于 A^T 也是酉阵，而 $A^T = \begin{bmatrix} P^T & 0 \\ B^T & Q^T \end{bmatrix}$ 中 Q^T 每列均为单位向量，因此 Q^T 是酉阵，所以 Q 也是酉阵，而两酉阵在对角，则B为零矩阵.

15，由合同的性质，"$\Rightarrow$"显然

check "$\Leftarrow$"，由于两 Hermite 阵有相同正负零特征值，则均合同于对角阵 $\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \, 0 \end{bmatrix}$，

由合同传递性，两阵也是合同的。

16，求A特征值，$(\lambda E - A) = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{1+\sqrt{3}i}{2})(\lambda - \frac{1-\sqrt{3}i}{2})$.

则有 $U^TAU = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$. $\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\theta = \frac{\pi}{3}$，所以旋转角为 $\frac{\pi}{3}$

17. 由于 S 是对称阵，因此是正规阵，则有 $C^TSC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$.

当 $\lambda = -1$ 时，$(\lambda E - S)\alpha = 0$. 乘9有 $\begin{bmatrix} -16 & -4 & 4 \\ -4 & -10 & -8 \\ 4 & -8 & -10 \end{bmatrix}$ 得向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

当 $\lambda = 1$ 时，$(\lambda E - S)\alpha = 0$ 乘9有 $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -4 & 8 & -8 \\ 4 & -8 & 8 \end{bmatrix}$ $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$. $\begin{bmatrix} 2x_2 - 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

正交归一化后得 $C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$，有 $C^TSC = diag(1, 1, -1)$.