作业七.

习题一.

3, $A^* = \begin{bmatrix} -16 & 15 & 5 \\ 8 & -12 & -4 \\ 8 & -18 & 2 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$ 则 $A^{-1}B = -\dfrac{1}{24}\begin{bmatrix} -16 & 15 & 5 \\ 8 & -12 & -4 \\ 8 & -18 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 9 & -3 \end{bmatrix}$

$= -\dfrac{1}{24}\begin{bmatrix} -24 & 0 & 60 & -175 \\ 0 & -24 & -48 & 104 \\ 0 & 0 & 0 & 92 \end{bmatrix}$

$CA^{-1} = \dfrac{-1}{24}\begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -16 & 15 & 5 \\ 8 & -12 & -4 \\ 8 & -18 & 2 \end{bmatrix} = -\dfrac{1}{24}\begin{bmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 \\ 96 & -216 & -18 \\ -112 & -192 & -22 \end{bmatrix}$

5, $\because AA^* = A^{-1}|A| = A^*A$.所以第一个等号显然

对第二个等号. 设方程 $xAA^*=0$. 有解 $\alpha AA^*=0$. 则 $\alpha AA^*\alpha^*=0$

则 $(\alpha A)\cdot(\alpha A)^*=0$. 即 $\|\alpha A\|^2=0$. $\therefore \alpha A=0$. $\therefore xAA^*=0$ 与 $xA=0$ 同解.

则 AA^* 与 A 等秩。

6, 设对方程 $Ax=0$ 有解α. 则显然. α 也是 $A^2x=0$ 的解.

因此. $r(A^{i+1}) \geq r(A^i)$ 但又显然. $r(A^2) < r(A)$.

$\therefore r(A^2) = r(A)$ 因此 $r(A^{n+1}) = r(A^n)$

19. $A^2-A+2I=0 \Longrightarrow \left(A-\frac{1}{2}I+\frac{\sqrt{7}}{2}iI\right)\left(A-\frac{I}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}iI\right)=0$

$\therefore$ 可对角化.

一般地, 若 $(A-xI)(A-yI)=0$ 则 A可对角化.

20, (1) 对 $\bar{A}^T=A$. 有特征值 a ,特征向量α. 则 $A\alpha=a\alpha$.

$\alpha^TA^T = a\alpha^T$ $\alpha^*A^*=\bar{a}\alpha^*$

$\alpha^*A^*\alpha = \bar{a}\alpha^*\alpha$. 由于 $\alpha^*\alpha\neq 0$.

$a\alpha^*\alpha = \bar{a}\alpha^*\alpha$. $\therefore a=\bar{a}$ $\therefore$ 是实数 .

接(1). 设另一特征值 b. 有 $A\beta=b\beta$, $a\alpha^*\beta=(A\alpha)^*\beta=\alpha^*A\beta=b\alpha^*\beta$, 由于 $a\neq b$, 则 $\alpha^*\beta=0$. 即垂直.

(2). A 是正定矩阵. 则所有特征值均为正. 且一定为对称矩阵.

则 $A=\hat{L}U$. 其中 $\hat{L}$ 为单位下三角阵.

设 $U=D\hat{U}$. 其中 D 为对角阵, $\hat{U}$ 为单位上三角阵.

则 $\hat{U}^TD\hat{L}^T=A^T=A=\hat{L}D\hat{U}$

$\therefore \hat{L}^T\hat{U}^{-1}=D^{-1}\hat{U}^{-T}\hat{L}D$

显然, 左边为单位上三角 右边为下三角.

则 $\hat{U}=\hat{L}^T$. 则 $A=\hat{L}D\hat{L}^T$

又 D 可分解为 $\hat{D}\hat{D}^T$,

$\therefore A=LL^T$

习题三.

5, (1) 对于 $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$. 有 $\lambda^2+1=0$. 则无实特征值.

(2). 对于 A 中的实特征值 λ, 有相应实特征向量.

则有正交矩阵 Q 有 $Q^TAQ=\begin{bmatrix}\lambda&*\\0&A_1\end{bmatrix}$ 归纳得.

$$Q^TAQ=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&*\\&\ddots&&\\&&\lambda_s&\\0&&&A_1\end{bmatrix}$$ 则只需对 A_1 进行讨论.

设 $\lambda=a+ib$ 是一个非实特征值, 有特征向量 $x=\alpha+i\beta$.

则 $Ax=\lambda x$ $A\bar{x}=\bar{\lambda}\bar{x}$ 对 α,β 标准正交化得 η,γ.

有 $(\gamma,\eta)=(u,v)R$. 其中 R 为上三角矩阵. 则 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}B&*\\0&A^{-1}\end{pmatrix}$. 其中 B 为 2 阶实矩阵.

两者结合, 得 A 可分解为 $Q^TAQ=\begin{bmatrix}A_1&&*\\&\ddots&\\0&&A_n\end{bmatrix}$

$$\begin{matrix} 0 & i & 0 \\ -i & 1 & -i \\ 0 & i & 0 \end{matrix}$$

习题四,

1, (1) $A^* = \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix} = A$ ∴能酉对角化,

特征值 $(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-1)=0$ 有 $-1, -2, 1$.

求出对应特征向量，归一化，最后得酉阵，$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{2}{\sqrt6} & 0 & -\frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3} \end{bmatrix}$ $U^*AU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

(2). $A^* = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$ ∴能酉对角化.

特征值 $\lambda^3-2\lambda$ 有 $0, \sqrt2, -\sqrt2$. 求出特征向量，归一化 最后得酉阵.

$U = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac12 & -\frac12 \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac12 & \frac12 \end{bmatrix}$ $U^*AU = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & -\sqrt2 & \\ & & \sqrt2 \end{bmatrix}$.

(3) $A^*A \neq AA^*$ ∴不能酉对角化

3, 显然相似矩阵特征多项式相同.

设两正规矩阵 A, B 他们特征多项式相同，则有相同特征值，则 AB 均酉相似于共同对角矩阵.

则 A 与 B 相似

4, "⇒" 设正规矩阵 A，则有酉阵 $U^*AU = [\diagdown]$ ∴ $AU = [\diagdown]U$ ∴ U 的列是 A 的特征向量.

这些列是两两正交单位向量.

"⇐" 有 n 个两两正交特征向量，设对应特征值 λ 有 $A\alpha = \lambda\alpha$ 合并得 $AU = [\diagdown]U$.

∴ $U^*AU = [\diagdown]$ ∴ A 是正规阵

5, (1) 有 $U^*AU = D$. 则 $U^*(A-xI)U = U^*AU - U^*UxI = D - xI$ 也是对角阵，是正规阵.

(2) $(Ax)^*Ax = x^*A^*Ax = x^*AA^*x = (A^*x)^*Ax$ ∴长度相同

(3) $U^*AU = D$ 是对角阵，则 $U^*A^*D = D^*$ 也是对角阵，因此也是 A^* 的特征向量

(4) 由于 $AU = [\lambda]U$ 有 $UU^* = I$，因此不同特征向量正交.

6. (1) 对 $\bar{A}^T=A$，有特征值 a，特征向量 α，则 $A\alpha=a\alpha$.

$$\alpha^T A^T = a\alpha^T \qquad \alpha^* A^* = \bar{a}\alpha^*$$

$$\alpha^* A^* \alpha = \bar{a}\alpha^*\alpha \qquad \text{由于 } \alpha^*\alpha \neq 0.$$

$$a\alpha^*\alpha = \bar{a}\alpha^*\alpha \qquad \therefore a=\bar{a} \quad \therefore \text{是实数}$$

(2) 由于 $U^*AU=D$ 由于酉阵相乘也是酉阵，因此 D 也是酉阵，因此 D 的每个元素模为1.

因此 A 特征值模均为1.

(3) 由于幂等矩阵特征值只能是0与1，因此对于 $U^*AU=D$，D 只能是0或1，所以 A 特征值为0,1

(4) $U^*AA^*U = U^*AUU^*A^*U = DD^* = \begin{bmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{bmatrix}$

显然对非正规阵不成立.

7. (1) 由于 A 幂等阵，A 的特征值全为 0,1，所以全为实数，所以 A 是 Hermite 阵.

(2) $A^3=A^2$. 有 $D^3=D^2$. $(D-I)D^2=0$. 所以 $D=I$ 或 $D=0$. 所以 A 幂等阵. 所以 $A^2=A$.

(3) A 特征值只能实数且只能是 ±1. 因此 $D^2=I$，有 $A^2=I$.

9. (1) $A\in M_{n\times n}(C)$. $\Rightarrow \exists$ 酉阵 U s.t. $U^*AU=R=\begin{bmatrix} & * \\ 0 & \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow A=URU^* \Rightarrow A^*=UR^*U^*$

$\Rightarrow AA^* = URU^*UR^*U^* = URR^*U^*$

$tr(AA^*) = tr(RR^*) \qquad tr(AA^*) = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$

$tr(RR^*) = \sum_{i,j=1}^{n} |r_{ij}|^2 = tr(AA^*) = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |r_{ii}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} |r_{ij}|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$

(2) 等号成立 $\Leftrightarrow \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} |r_{ij}|^2 = 0 \Leftrightarrow r_{ij}=0\ (i\neq j) \Leftrightarrow$ 是对角阵.

$\Leftrightarrow$ A 酉相似于 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow A$ 正规阵.

10, 置想、实对称矩阵所有特征值均大于零，因此存在 $U^*AU=D$ ∴ A是正规阵.

正交矩阵存在 $U^*AU=T$. 也是酉矩阵，同时又是上三角阵，所以只能是对角阵，所以 A是正规阵.

11, 由三章习题5，存在正交阵 Q 使得 $Q^TAQ=\begin{bmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{bmatrix}=B$. 其中 $1\le i\le s$ 是特征值 $s<i\le k$ 是 Schur 型.

设A的特征值 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$. 则 $tr(BB^T)=tr(AA^T)=\sum_{i=1}^{s}|A_i|^2+\sum_{i=s+1}^{k}|A_i|=\sum_{1}^{k}tr(A_iA_i^T)$

$\therefore B=\begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{bmatrix}$

12, 设 A 的 K 个大于零特征值为 $\lambda_1 \cdots \lambda_k$，对应特征向量为 $\alpha_1 \cdots \alpha_k$.

则 $\alpha_i^* A\alpha_i=\alpha_i^*\lambda_i\alpha_i \ge 0$. 即在这 K 个向量组成子空间中其是正定的.

18, (1) $U=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{2}{\sqrt6} & 0 & -\frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3} \end{bmatrix}$ $\quad U^*AU=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$A=1\times\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}+(-1)\times\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}+(-2)\times\frac{1}{3}\times\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) $U=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\quad U^*AU=\begin{bmatrix} 0 & & \\ & -\sqrt2 & \\ & & \sqrt2 \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{matrix} 2 \\ \sqrt2 \\ \sqrt2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 \\ -\sqrt2 \\ \sqrt2 \end{matrix}$

$$A=-\sqrt2\times\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & 2\sqrt2 & 2\sqrt2 \\ 2\sqrt2 & 2 & 2 \\ 2\sqrt2 & 2 & 2 \end{bmatrix}+\sqrt2\times\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & -2\sqrt2 & 2\sqrt2 \\ -2\sqrt2 & 2 & -2 \\ 2\sqrt2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

20, 由于 λ_i 是 A 特征向量 α_i 的特征值

即 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$. 则 $\alpha_i^{-1}A^{-1}=\frac{1}{\lambda_i}\alpha_i^{-1}$ 同乘 $\alpha_i\alpha_i$.

则 $A^{-1}\alpha_i=\frac{1}{\lambda_i}\alpha_i$. $\therefore A^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}\alpha_i\alpha_i^*$ 是 A^{-1} 的谱分解.