

Problema de optimización

Ubicación de un concierto dado un cuadrado de $N \times N$ medidas y M ciudades

Daniel Esteban Marquez Upegui
Joan Manuel Jaramillo Avila
Facultad de Ingeniería
Universidad del Valle

Abstract—Este informe presenta la solución al problema de optimización para determinar la ubicación óptima de un concierto dado un mapa cuadrado de kilómetros enteros y un número de ciudades dentro del mapa. Utilizando un modelo que involucra la distancia Manhattan y asegurando una distribución relativamente equitativa de desplazamiento. Se desarrolló una aplicación en Python para la entrada de datos y MiniZinc para resolver el problema.

I. INTRODUCCIÓN

El cantante Benito-G realizará un concierto en el Valle del Cauca, y se requiere determinar la ubicación óptima del evento para minimizar el desplazamiento total de los asistentes y fanáticos desde diversas ciudades. Este problema se modela utilizando la distancia Manhattan considerando un mapa cuadrado y teniendo en cuenta restricciones de equidad en el desplazamiento para cada ciudad.

II. MODELO DEL PROBLEMA

A. Descripción Formal

El Valle del Cauca se representa como un cuadrado perfecto de $N \times N$ km para efectos de simplificación. Cada ciudad se encuentra en coordenadas enteras (X , Y). Así mismo, la distancia entre cada una de las ciudades y el concierto también será un entero calculado de la distancia Manhattan. De este modo, se busca un punto de concierto (x, y) que minimice la suma de distancias Manhattan desde cada ciudad y a su vez que cumpla las restricciones propuestas para conseguir una solución donde el punto (x, y) del concierto no esté en el mismo punto de una ciudad o que le beneficie más de 2km de cercanía más a una ciudad que a otra.

B. Modelo Matemático

1) Parámetros:

- N : Tamaño del cuadrado $Lado \times Lado$.
- M : Número de ciudades.
- (x_i, y_i) : Coordenadas de la ciudad i .

2) Variables de Decisión:

- x : Coordenada x del concierto.
- y : Coordenada y del concierto.

3) *Función Objetivo*: Minimizar la suma total de las distancias Manhattan:

$$\min_{x,y} \sum_{i=1}^M (|x - x_i| + |y - y_i|)$$

4) Restricciones:

- $(x, y) \neq (x_i, y_i) \quad \forall i \in [1, M]$, El concierto no puede estar en una ciudad
- $||x - x_i| + |y - y_i| - (|x - x_j| + |y - y_j|)| \leq 2 \quad \forall i, j \in [1, M]$, El concierto no puede estar más cerca de 2km de una ciudad que de otra

III. IMPLEMENTACIÓN

A. Descripción de la Implementación

La implementación se realizó en Python utilizando la biblioteca 'tkinter' para crear una interfaz gráfica de usuario (GUI). Esta GUI cuenta con dos textareas y un botón. De esta manera, en el primer textarea es posible ingresar los datos y después de oprimir el botón se muestra en el segundo textarea el código MiniZinc que permite resolver el problema.

B. Interfaz Gráfica de Usuario (GUI)

La GUI permite ingresar el tamaño del cuadrado N , el número de ciudades M , y el nombre de la ciudad junto con sus coordenadas de forma *ciudad x y*. Aunque el nombre de la ciudad no es relevante para el cálculo de MiniZinc, sirve de guía para el usuario

C. Generación del Código MiniZinc

El código MiniZinc generado define el modelo del problema con las restricciones y la función objetivo. Este código puede ser ejecutado en el IDE MiniZinc para obtener la solución óptima al problema.

El código MiniZinc generado sigue esta estructura:

- Declaración de parámetros N y M .
- Definición de la matriz de ciudades.
- Definición de las variables de decisión x y y .
- Restricción para asegurar que el concierto no se realice en una ciudad.
- Inicialización de función para calcular la distancia Manhattan.
- Restricción para asegurar equidad en la distancia del concierto. Máximo 2km de diferencia entre la ciudad más lejana al concierto y la más cercana.
- Inicialización de la función objetivo.
- Minimizar la función objetivo.

IV. DESCRIPCIÓN Y RESULTADOS DE LAS PRUEBAS

A. Descripción de las Pruebas

1) Para la primera prueba se utilizaron los valores del ejemplo suministrado por el enunciado:

- Tamaño del cuadrado ($N = 12$)
- Número de ciudades ($M = 5$)
- Coordenadas de las ciudades:
 - Palmira: (2, 3)
 - Cali: (10, 2)
 - Buga: (11, 0)
 - Tuluá: (0, 3)
 - Rio Frio: (1, 2)
- Solución: (5, 1) con distancia total 30km

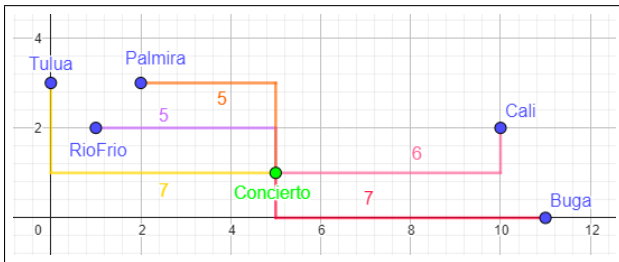


Fig. 1: Ejemplo 1. Distribución de las ciudades y ubicación óptima del concierto.

2) Para la segunda prueba se utilizaron diferentes valores:

- Tamaño del cuadrado ($N = 10$)
- Número de ciudades ($M = 4$)
- Coordenadas de las ciudades:
 - La Unión: (1, 9)
 - Cali: (3, 9)
 - Tuluá: (2, 7)
 - San Pedro: (1, 4)
- Solución: insatisfactoria

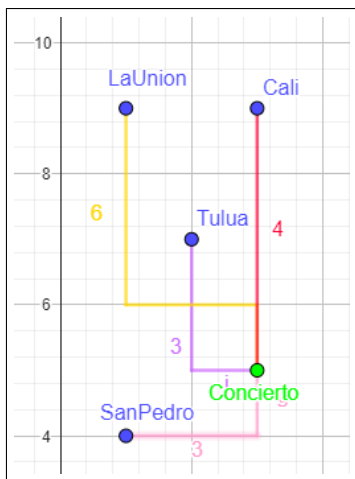


Fig. 2: Ejemplo 2. Distribución de las ciudades y ubicación óptima del concierto.

3) Para la tercera prueba se utilizaron los valores del ejemplo suministrado por el enunciado:

- Tamaño del cuadrado ($N = 10$)
- Número de ciudades ($M = 3$)
- Coordenadas de las ciudades:
 - Palmira: (10, 0)
 - Cali: (5, 5)
 - Buga: (0, 10)
- Solución: (1, 1) con distancia total 28km

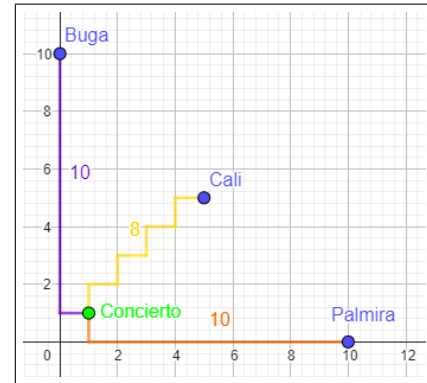


Fig. 3: Ejemplo 1. Distribución de las ciudades y ubicación óptima del concierto.

B. Análisis de las Pruebas realizadas

Se decidió que una ciudad está favorecida de su posición si la diferencia entre la distancia Manhattan de la ciudad más alejada y la distancia Manhattan de la ciudad más cercana es mayor a 2. Esto significaría que las distancias no son equitativas en nuestro sistema

- 1) Primera prueba. El resultado obtenido es (5, 1) con distancia total 30. Esto quiere decir que en la posición (5, 1) del mapa cuadrado 12×12 con 5 ciudades es posible ubicar el concierto sin que se rompa la equidad de distancias y además usando la mínima distancia posible entre el concierto y las ciudades.
- 2) Segunda prueba. El resultado obtenido es insatisfactorio. Esto se debe a que no es posible posicionar el concierto donde todas las ciudades estén a una distancia equitativa. Es decir, habrá al menos una ciudad favorecida y es por esto que se descarta la solución. Sin embargo, es posible suponer un modelo de equidad de máximo 3km en vez de 2km que es como está actualmente. En este caso, si habría solución al problema en (3, 5). Pero, aunque sea posible darle solución con un modelo de equidad de 3km, se tomó la decisión de 2km porque es un margen más aceptable y prudente a criterio de los autores
- 3) Tercera prueba. El resultado obtenido es (1, 1) con distancia total 28km. Esto significa que el concierto quedaría en una posición donde se cumple la condición de equidad dentro del mapa cuadrado 10×10 . En esta prueba se pudo determinar como otras soluciones con mismo cumplimiento de condiciones y misma distancia

total no fueron tomadas en cuenta por el programa MiniZinc. La explicación está en como el programa interpreta la curva que se forma por el área encerrada dadas las restricciones, ya que al ir encontrando soluciones desde $1..M$ ya sea para maximizar o minimizar se quedará con la primera que minimice (en este caso) totalmente el problema, porque si continúa puede seguir encontrando soluciones que serán iguales (como $(9, 9)$ con distancia total $28km$) o menores que no interesan para resolver el problema.

V. ANÁLISIS GENERAL

Las pruebas realizadas muestran que el modelo propuesto es efectivo. Fue posible encontrar ubicaciones óptimas para el concierto, cumpliendo con las restricciones propuestas sobre equidad y el concierto fuera de las ciudades. Se observó que, para distribuciones uniformes y simétricas de ciudades cerca de los extremos del mapa, el punto óptimo tiende a estar cerca del centro del cuadrado $N \times N$. Por otro lado, para distribuciones más dispersas, el punto óptimo puede variar, pero siempre cumple con las restricciones establecidas. Esto es porque el modelo es capaz de adaptarse a diferentes situaciones, encontrando soluciones óptimas incluso en casos donde la equidad de distancias es más compleja de lograr o calcular a simple vista.

VI. CONCLUSIONES

El proyecto realizado supone un reto que hay que afrontar con los conocimientos adquiridos durante la materia de Complejidad y Optimización. Una vez logrado se demuestra la capacidad para abordar problemas complejos de optimización por parte de los aprobados del curso. Problemas como el presente en este proyecto, ubicando eventos tomando en cuenta restricciones de distancia y no solamente realizando el modelo, sino utilizando herramientas matemáticas como el cálculo de la distancia Manhattan o de programación como la traducción de un textarea con los datos del problema al código de incorporación a MiniZinc, uso de arrays para representar coordenadas, entre otros para darle solución al problema con la mínima distancia total entre todas las ciudades. Así mismo, el uso de la interfaz gráfica en Python muestra un enfoque práctico y de fácil uso para resolver este desafío. Finalmente, es de destacar la capacidad del modelo para adaptarse a diferentes distribuciones de ciudades y encontrar soluciones óptimas en una variedad de escenarios, así como la efectividad del enfoque utilizado tomando en cuenta la decisión de utilizar una diferencia de máximo 2km entre la ciudad más alejada y la más cercana al concierto para establecer qué tan favorable puede quedar una ciudad del concierto y poder manejar una equidad de distancias balanceada.

REFERENCES

- [1] P. J. Stuckey, K. Marriott, and G. Tack, *MiniZinc Handbook*, Nov. 2023. [Online]. Available: https://docs.minizinc.dev/_downloads/en/2.8.0/pdf/