PROPIEDADES DE LA UNIÓN e INTERSECCIÓN DE SUCESOS:

- **Conmutativas** $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$

- **Asociativas** $\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$

- **Distributivas** $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$

- **Elemento neutro** $\begin{cases} \phi \text{ para la unión}: A \cup \phi = A \\ \Omega \text{ para la intersección}: A \cup \Omega = A \end{cases}$

SUCESOS.- Un suceso asociado a un experimento aleatorio corresponde a la cuestión de que tenga o no tenga respuesta después de realizado el experimento.

En el lanzamiento de dos monedas, el espacio muestral asociado, siendo $C = \text{cara}$ y $X = \text{cruz}$: $\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$

¿Es el número de caras menor o igual que uno?. La pregunta tiene respuesta y es, por tanto, un ***suceso***. El subconjunto de Ω que responde afirmativamente a la pregunta es $A = \{CX, XC, XX\}$

Pudiendo definir un suceso de un experimento aleatorio como un subconjunto del espacio muestral, $A \subset \Omega$, es decir, una colección de puntos del espacio muestral.

OPERACIONES CON SUCESOS.- Para definir 'algo' que mida la aleatoriedad que dentro de sí llevan los sucesos de un experimento aleatorio es necesario construir una estructura matemática. Para ello se definen ciertas operaciones con los sucesos.

- **Unión de sucesos:** Dados dos sucesos A y B, de cierto experimento aleatorio, se define la unión de A y B, que se representa por $A \cup B$, a otro suceso que se denota por C, que ocurre siempre que ocurra A o siempre que ocurra B: $A \cup B = C$
- **Intersección de sucesos:** Dados dos sucesos A y B, de cierto experimento aleatorio, se define la intersección de A y B, que se representa por $A \cap B$, a otro suceso que se denota por D, que ocurre siempre que ocurran A y B simultáneamente: $A \cap B = D$
- **Suceso complementario:** Dado un suceso A, de cierto experimento aleatorio, se define el complementario de A, que se representa por $\overline{A}$ ó A^C, a otro suceso que ocurre siempre que no ocurre A.
- **Suceso imposible:** Dado el suceso A y su complementario $\overline{A}$, junto con la operación de intersección, se define un suceso que no ocurre nunca, se le conoce como suceso imposible y se denota por ϕ: $A \cap \overline{A} = \phi$
  El suceso complementario del suceso imposible es el suceso seguro, que es precisamente el espacio muestral: $\overline{\phi} = \Omega$
- **Sucesos incompatibles:** Dados dos sucesos A y B, de cierto experimento aleatorio, se dice que estos sucesos son incompatibles si su intersección es el suceso imposible.
  $A \cap B = \phi \quad \mapsto \quad A$ y B *incompatibles*
- **Sucesos contenido en otro:** Dados dos sucesos A y B, de cierto experimento aleatorio, se dice que A está contenido en B si siempre que ocurre A ocurre B, se denota por $A \subset B$.
  Se observa que dado cualquier suceso A, siempre ocurre $\phi \subset A \subset \Omega$
- **Diferencia de sucesos:** Dados dos sucesos A y B, de cierto experimento aleatorio, se define la diferencia de los sucesos A y B, y se denota por $A - B$, el suceso C, que ocurra A y no ocurra B: $C = A - B$. Se observa que $C = A - B = A \cap \overline{B}$
- **Sucesos elementales:** Dado un suceso puede ocurrir que éste pueda ser descompuesto en sucesos más simples, de forma que la unión de éstos sea precisamente el suceso considerado. A estos sucesos se les llama sucesos compuestos.
  Por otra parte, existen otros sucesos que no pueden ser descompuestos en sucesos más simples, estos sucesos reciben el nombre de sucesos elementales.

LA PROBABILIDAD

Es simplemente qué tan posible es que ocurra un evento determinado.

Cuando no estamos seguros del resultado de un evento, podemos hablar de la probabilidad de ciertos resultados: qué tan común es que ocurran. Al análisis de los eventos gobernados por la probabilidad se le llama estadística.

El mejor ejemplo para entender la probabilidad es echar una moneda:

Hay dos posibles resultados: cara o sello.

¿Cuál es la probabilidad de que caiga cara? La podemos encontrar al usar la ecuación , y tal vez, intuitivamente, sepas que la probabilidad es mitad y mitad, o sea 50%. ¿Pero cómo podemos resolver eso? Probabilidad =

$$\frac{\text{\# de posibilidades que cumplen la condición}}{\text{\# de posibilidades igualmente probables}}$$

En este caso: $P(A) = \frac{1}{2} = 50\%$

La probabilidad de echar una cara y que caiga sello

Probabilidad de un evento = (# de maneras en las que puede suceder) / (número total de resultados)

P(A) = (# de maneras en las que A puede suceder) / (número total de resultados)

La probabilidad de un evento solo puede ser un número entre 0 y 1 y también puede escribirse como un porcentaje.

La probabilidad del evento A suele escribirse como P(A).
Si P(A)>P(B), el evento A tiene una mayor probabilidad de ocurrir que el evento B.
Si P(A)=P(B), los eventos A y B tienen la misma probabilidad de ocurrir.

- **Frecuencial.** Aquella que determina la cantidad de veces que un fenómeno puede ocurrir, considerando un número determinado de oportunidades, a través de la experimentación.
- **Matemática.** Pertenece al ámbito de la aritmética, y aspira al cálculo en cifras de la probabilidad de que determinados eventos aleatorios tengan lugar, a partir de la lógica formal y no de su experimentación.
- **Binomial.** Aquella en la que se estudia el éxito o fracaso de un evento, o cualquier otro tipo de escenario probable que tenga dos posibles resultados únicamente.
- **Objetiva.** Se denomina así a toda probabilidad en la que conocemos de antemano la frecuencia de un evento, y simplemente se dan a conocer los casos probables de que ocurra dicho evento.
- **Subjetiva.** Contrapuesta a la matemática, se sustenta en ciertas eventualidades que permiten inferir la probabilidad de un evento, aunque alejada de una probabilidad certera o calculable. De allí su subjetividad.
- **Hipergeométrica.** Aquella que se obtiene gracias a técnicas de muestreo, creando grupos de eventos según su aparición.
- **Lógica.** La que posee como rasgo característico que establece la posibilidad de ocurrencia de un hecho a partir de las leyes de la lógica inductiva.
- **Condicionada.** Aquella que se emplea para comprender la causalidad entre dos hechos distintos, cuando puede determinarse la ocurrencia de uno tras la ocurrencia del otro.

Fuente: https://concepto.de/probabilidad/#ixzz8Sn3td66e

Aplicaciones de la probabilidad

- **El análisis de riesgo empresarial.** Según el cual se estiman las posibilidades de caída de precio de las acciones bursátiles, y se intenta predecir la conveniencia o no de la inversión en una u otra empresa.
-
- **El análisis estadístico de la conducta.** De importancia para la sociología, emplea la probabilidad para evaluar la posible conducta de la población, y así predecir tendencias de pensamiento o de opinión. Es común verlo en las campañas electorales.
-
- **La determinación de garantías y seguros.** Procesos en los que se evalúa la probabilidad de avería de los productos o la fiabilidad de un servicio (o de un asegurado, por ejemplo), para así saber cuánto tiempo de garantía conviene ofrecer, o a quiénes conviene asegurar y por cuánto.
-
- **En la ubicación de partículas subatómicas.** Según el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, el cual establece que no podemos saber dónde está una partícula subatómica en un momento determinado y al mismo tiempo a qué velocidad se mueve, de modo que los cálculos en la materia se realizan normalmente en términos probabilísticos: existe X por ciento de probabilidades de que la partícula esté allí.
-
- **En la investigación biomédica.** Se calculan porcentajes de éxito y de fracaso de las drogas médicas o de las vacunas, para así saber si son fiables o no, y si conviene o no producirlas en masa, o a qué porcentaje de la población podrán causarle determinados efectos secundarios.
-

Fuente: https://concepto.de/probabilidad/#ixzz8Sn4Cf8Eo

Ley de Laplace

Esta ley establece la probabilidad de que suceda un suceso o que ganes en un juego de azar.

Si lanzamos un dado, debe considerarse que hay igual posibilidad que salga cualquiera de las caras numeradas del 1 al 6, entonces la probabilidad de que salga cualquier número será 1/6.

Si ahora queremos saber cuál es la probabilidad de que salga un número par el resultado seria , $\boxed{3/6 = 1/2}$ debido a que $\{2, 4, 6\}$ son los resultados pares.

En general la probabilidad de que un suceso es la razón entre el número de casos favorables y el número total de casos posibles y esa es la ley de Laplace.

$$\mathrm{P}(x) = \frac{\textbf{Número de casos favorables a A}}{\textbf{Número de casos posibles}}$$

Sucesos incompatibles

Son dos sucesos que no pueden presentarse al mismo tiempo.

Ejemplo:

Se realiza una encuesta a alumnos universitarios para ver cuántos fuman y no fuman, entonces A es el conjunto de los fumadores y B de los no fumadores por lo tanto:

$\mathrm{A} \cap B = \varnothing$ Porque una persona puede ser fumador y no fumador a la vez.

Entonces si escojo un alumno al azar quiero saber cuál es la probabilidad de que fume o no fume y uso la fórmula:

$$\mathrm{p}(\mathrm{A} \cup B) = p(A) + p(B)$$

Sucesos compatibles

Son dos sucesos que pueden presentarse al mismo tiempo.

Ejemplo:

En una universidad hay alumnos que estudian inglés, francés o los dos idiomas. Si A son los que estudian inglés y B los que estudian francés, entonces $\mathrm{A} \cap B$ son los que estudian inglés y francés y por lo tanto:

$$\mathrm{A} \cap B \neq \varnothing$$

Ahora si escojo un alumno al azar y quiero saber la probabilidad de que estudie inglés o francés uso la fórmula:

$$\mathrm{p}(\mathrm{A} \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Probabilidad condicionada

Es cuando la probabilidad un suceso B se puede ver afectado por otro suceso A.

Ejemplo:

Imagina que juegas con otra persona a lanzar una moneda tres veces, tu ganas si cae cara y pierdes si cae lo contrario. Para triunfar debes ganar al menos dos de tres volados.

Si represento con G un volado ganado y con P uno perdido, entonces los resultados serían $\{GGG, GGP, GPG, GPP, PGG, PGP, PPG, PPP\}$.

Para ganar el juego, debe ocurrir $\{GGG, GGP, GPG, PGG\}$, por lo tanto la probabilidad de ganar es 4/8 = 1/2.

Supongamos que se pierde el primer volado, de manera que que quedan dos por jugar. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

Usaremos la fórmula: P(B/A) = P(A∩B) / P(A)

Llamemos B al suceso de ganar y A al suceso de perder el primer volado cuyos resultados serían $\{PGG, PGP, PPG, PPP\}$, entonces $\mathrm{A}\cap B$ sería el suceso de ganar y perder el primer volado cuyo resultado sería $\{PGG\}$, A/B es el suceso de ganar si ya perdiste el primer volado.

Con base en los resultados encontrados anteriormente $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap B) = \frac{1}{8}$, P(A) = 4 / 8 entonces: P(B/A) = 1/8 / 4/8 = ¼ por que P(A∩B) / P(A)

Por lo tanto, la probabilidad de ganar es 1/4.

Sucesos independientes

Son aquellos donde no se afectan uno con el otro.

Ejemplo:

Dos personas van a lanzar un objeto al mismo blanco, pero la primera persona que llamaremos A tiene una probabilidad de1/4 de dar en el blanco y la segunda persona que llamaremos B tiene una probabilidad de 3/5 de dar en el blanco ¿Cuál es la probabilidad de que las dos personas den en el blanco?

Entonces tenemos P(A) = 1/4 ,P(B) = 3/5 y hay que calcular $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap B)$ usando la siguiente fórmula:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

El resultado sería $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap B) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{20}$

Sucesos dependientes

Son aquellos donde se afectan uno con el otro.

Ejemplo:

En una población el 10% de las personas sufren una enfermedad. Se dispone de un procedimiento para diagnosticarla, pero no es completamente confiable, ya que da positivo en 95% de los casos que las personas que la padecen. ¿Cuál es la probabilidad de que padezca la enfermedad y dé positivo?

Llamemos B al suceso que da positivo la enfermedad y A al suceso de padecer la enfermedad, entonces(A) = 10 /100 = 1/10 , P(B/A) = 95/100 = 19/20, y hay que calcular $\mathrm{P}(A \cap B)$ usamos la fórmula:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{19}{20}\right) = \frac{19}{200} = 0.095$$

El resultado es 9.5% de probabilidad.

Diferencia de sucesos

Son aquellos que pueden estar o no estar relacionados y queremos la probabilidad de uno sin tener nada que ver con el otro.

Ejemplo:

Se lanza un dado y queremos calcular la probabilidad de que salga un número par, pero que no sea múltiplo de 3, entonces llamamos A al suceso de que sea un número par, B al suceso de que sea múltiplo de 3 y tendríamos P(A) = 3/6 = ½ , $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap B) = \frac{1}{6}$ ya que $\mathrm{A}=\{2,4,6\}$, $\mathrm{B}=\{3,6\}$, $\mathrm{A} \cap B = \{6\}$ usamos la fórmula:

$$\mathrm{P}(A - B) = P\left(A \cap B^c\right) = P\left(A\right) - P\left(A \cap B\right)$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{P}(A - B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Teorema de la probabilidad total

Este se aplica cuando tienes varios sucesos independientes o que no tienen nada que ver entre ellos, pero todos se relacionan con otro suceso del cual quieres saber su probabilidad.

Si tenemos un suceso B y sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos mutuamente excluyentes. Entonces se aplica la fórmula:

$$P(B)=P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

Ejemplo:

Una fábrica utiliza tres máquinas A_1, A_2, A_3 para producir ciertos artículos. Supongamos que:

La máquina A_1 produce el 55% de todos los artículos, de los cuales el 2% son defectuosos.

La máquina A_{12} produce el 25% de todos los artículos, de los cuales el 4% son defectuosos.

La máquina A_3 produce el 20% de todos los artículos, de los cuales el 5% son defectuosos.

¿Cuál es la probabilidad de que si se escoge un artículo este sea defectuoso?

Tenemos que B es el suceso de que el artículo sea defectuoso, entonces:

$P(A_1) = 0.55$, $P(A_2) = 0.25$, $P(A_3) = 0.2$, $P(B/A_1) = 0.02$, $P(B/A_2) = 0.04$ y $P(B/A_3) = 0.05$

Aplicamos la fórmula:

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+P(A_3)\cdot P(B/A_3) = (0.55)(0.02)$$
$$(0.25)(0.04) + (0.2)(0.05) = 0.031$$

Entonces la probabilidad es de 3.1%.

Teorema de Bayes

Este teorema nos facilita ejercicios de probabilidad condicional con varios sucesos.

Si tenemos un suceso B y sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos mutuamente excluyentes se cumple la formula:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B/A_n)}$$

En una fábrica trabajan tres empleados Andrés, Beto y Carlos. Andrés realiza el 50% de la producción, Beto el 30% y Carlos el 20%. Andrés tiene 1% de probabilidad de que lo haga mal; cuando lo hace Beto, hay 2% de que lo haga mal y en el caso de Carlos hay 3% de probabilidad que lo haga mal. Se analizó uno de los productos y estaba mal. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido Andrés quien lo ha hecho?

Consideremos lo siguiente:

$M=${Se hizo mal trabajo}, $A=${El trabajo lo hizo Andrés}, $B=${El trabajo lo hizo Beto} y $C=${El trabajo lo hizo Carlos}.

De estos sucesos se obtienen las probabilidades:

$P(A)=0.5$, $P(B)=0.3$, $P(C)=0.2$, $P(M/A)=0.01$, $P(M/B)=0.02$ y $P(M/C)=0.03$.

Usamos el teorema de Bayes para encontrar la probabilidad de que Andrés lo haya hecho mal

$$P(A/M)=\frac{P(A)\cdot P(M/A)}{P(A)\cdot P(M/A)+P(B)\cdot P(M/B)+P(C)\cdot P(M/C)}$$

Sustituimos los valores y queda

$$P(A/M)=\frac{(0.5)(0.01)}{(0.5)(0.01)+(0.3)(0.02)+(0.2)(0.03)}=0.2941$$