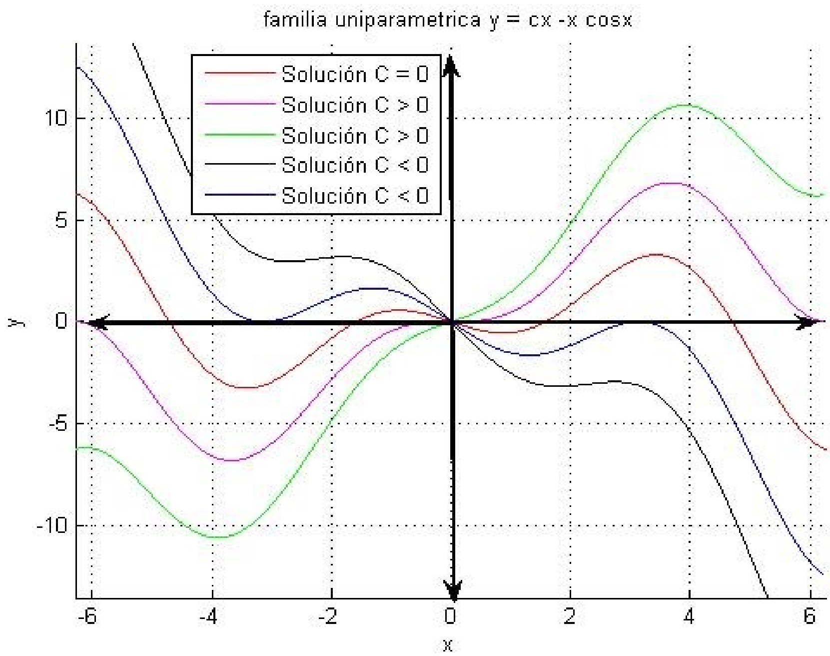
ECUACIONES DIFERENCIALES



MANUAL DE USUARIO:

Primera parte (Unidad I)

Manual práctico para estudios de cuarto semestre de la carrera de Ingeniería Civil.

ECUACIONES DIFERENCIALES CON MATLAB

Autor, Docente:
Ligdamis A. Gutiérrez E. PhD.

Versión 1.0

2015- 2016

A. Generalidades de la Materia (Objetivo General, Temática y objetivo por Unidad)

OBJETIVO GENERAL:

Generar conocimientos dirigidos a la práctica, basándose en el pensamiento crítico-positivo y de razonamiento lógico, ayudándose con el uso de un software específico para el análisis matemático como Matlab, necesarios para la comprensión del presente curso de Ecuaciones Diferenciales.

PRIMERA PARTE - Unidad I: Objetivo y Temática.

(Repaso Límites, Derivadas e Integrales, Introducción al lenguaje Matlab y su uso con Ecuaciones Diferenciales):

Analizar apropiadamente condiciones y definiciones previas para integrarlas en el uso de las ecuaciones diferenciales, conocer y manejar el programa matemático Matlab y su uso con derivadas, integrales y ecuaciones diferenciales, así como puede desarrollar programas en Matlab incluyendo gráficos 2D y 3D, que aplica en las siguientes unidades.

SEGUNDA PARTE - Unidad II: Objetivo y Temática.

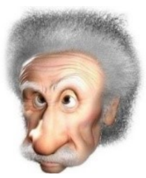
(Modelos Matemáticos aplicados a Ecuaciones Diferenciales, Conceptos básicos de Ecuaciones Diferenciales, Identificación y Solución de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden):

Conocer las diferentes aplicaciones de los modelos matemáticos aplicados como ecuaciones y el uso de las ecuaciones diferenciales aplicadas a los modelos matemáticos, así como conocer y desarrollar tópicos adicionales en la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado: lineales, Exactas, Homogéneas, Separables y de Bernoulli.

SEGUNDA PARTE - Unidad III Objetivo y Temática.

(Métodos Gráficos y Numéricos de solución de Ecuaciones Diferenciales, Series de Taylor y Transformadas de Laplace y Fourier para Ecuaciones Diferenciales de orden superior):

Conocer y aplicar métodos Gráficos y Numéricos para desarrollar soluciones a ecuaciones lineales de orden superior, homogéneas con coeficientes constantes, mediante la aplicación de métodos gráficos como Isóclinas, y métodos numéricos como los de Euler y Runge-Kutta de 1er. y 4to orden, así como la aplicación a las series de Taylor y las transformadas como las de Laplace y de Fourier.



Índice

PRIMERA PARTE: UNIDAD I

1.- Repaso Derivadas

El curso se inicia con un repaso de lo visto en la materia de cálculo integral. Esta parte inicial es importante, ya que representa repasar y reforzar los conceptos, definiciones y aplicación básica de los conocimientos aprendidos, tanto de derivadas como de integrales. Su aplicación en las ecuaciones diferenciales es sumamente trascendental.

Había un Problema desde los matemáticos griegos (300 – 200 A.C), y era poder trazar una recta tangente a una curva dada en un punto específico a ella, estos problemas se hallaron solución hasta el siglo XVII, con las obras de Newton[1] y Leibniz[2].

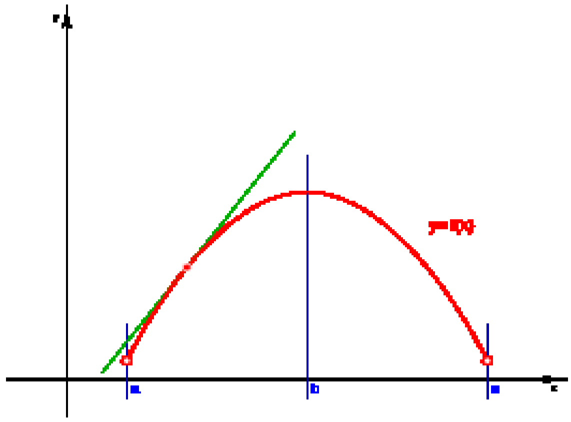


Fig. 1 Derivada de una función

1.1- Definición: En la imagen anterior, la ***derivada*** de la función en el punto marcado por la flecha, es equivalente a la pendiente de la recta tangente.

(*En la gráfica anterior, la función está dibujada en rojo; la tangente a la curva está dibujada en verde*).

1.2- Notación: La derivada de una función **y = f(x)** puede escribirse:

$$\lim_{h \to 0} \frac{y_2 - y_1}{h} = f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$$

1.3- Derivación de Funciones:

1) Si y = f(x) = c siendo c una constante, Entonces

Si y = c ; y' = 0 La derivada de una constante es igual a cero

[1] Weisstein, E. W. (2004). Newton-cotes formulas. https://mathworld. wolfram. com/.
[2] LEIBNIZ, A. M. D. N. E., & DO, P. A. C. CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

Ejemplo: La derivada de y = 4, es y' = 0

2) Si y = f(x) = x

Si y = c ; y' = 1

Ejemplo: La derivada de y = 5x, es y' = 5

La derivada de la variable independiente o con respecto a ella misma, es igual a la unidad

3) Sea la función y = cx, y' = c

Ejemplo: Si y = 5x; y' = 5

La derivada del producto de una constante por la variable independiente es igual a la constante

4) Si y = u + v + w, en donde
y = f(x), V = f(x), w = f(x)
Entonces y' = u' + v' + w'
Siempre que u,v y w sean diferenciables
Ejemplo:
Si $y = (3x^2 + 5x)$
$y' = y'(3x^2) + y'(5x) = 6x + 5$

La derivada de la suma algebraica de un número finito de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones.

5) (uv)' = u v' + u' v

La derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera.

6) $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2}$ La derivada del cociente de dos funciones es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador todo dividido entre el cuadrado del denominador.

Como resumen y ayuda, se puede resumir algunas de las reglas básicas y generales de la derivación en las siguientes dos tablas:

1.4.- Reglas de Derivación:

Nombre	Enunciado (La regla de derivación expresada en palabras)	Función (Es una generalización)	Función derivada	Ejemplo		
				Función	Derivada	Planificación y argumentación
Derivada de una constante	La derivada de una constante es cero.	$y = k$	$y' = 0$	$y=\ln(2)$	$y' = 0$	Analizo la función, observo que es un número real, no depende de ninguna variable, por lo tanto su derivada es cero.
Derivada de una potencia (exponente un número real)	La derivada de una potencia es igual a la multiplicación de la variable "X" por el exponente al cual se encuentra elevada. Y a su vez, elevada a ese exponente menos 1.	$y = x^n$	$y' = n\,x^{n-1}$	$y = x^5$	$y' = 5x^{5-1}$ $y' = 5x^4$	Observo que la función esta elevada a un número real, esto me indica que debo aplicar esta regla.
Derivada de una constante por una función	La derivada de una constante por una función es la misma constante por la derivada de la función.	$y=k\,f(x)$	$K.\ y'f(x)$	$y = (3x^2)$	$3.\ y'(x^2)$	Estudio las características de la función, si es el producto de una constante por una función, derivo la función y la multiplico por la misma constante.

Tabla 1. Reglas de derivación (parte I)

Reglas de derivación

Suma $y=u+v$	$y'=u'+v'$	**Producto** $y=uv$	$y'=u'v+v'u$
Resta $y=u-v$	$y'=u'-v'$	**Cociente** $y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$
$y=k$	$y'=0$		
$y=x$	$y'=1$	$y=u$	$y'=u'$
$y=kx$	$y'=k$	$y=ku$	$y'=ku'$
$y=\frac{1}{x}$	$y'=\frac{-1}{x^2}$	$y=\frac{1}{u}$	$y'=\frac{-u'}{u^2}$
$y=x^2$	$y'=2x$	$y=u^2$	$y'=2uu'$
$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$	$y=u^n$	$y'=nu^{n-1}u'$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=e^u$	$y'=u'e^u$
$y=a^x$	$y'=a^x\ln a$	$y=a^u$	$y'=u'a^u\ln a$
$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$	$y=\ln u$	$y'=\frac{u'}{u}$
$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x\ln a}$	$y=\log_a u$	$y'=\frac{u'}{u\ln a}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y=\operatorname{sen} x$	$y'=\cos x$	$y=\operatorname{sen} u$	$y'=u'\cos u$
$y=\cos x$	$y'=-\operatorname{sen} x$	$y=\cos u$	$y'=-u'\operatorname{sen} u$
$y=\tan x$	$\begin{cases} y'=1+\tan^2 x \\ =\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x \end{cases}$	$y=\tan u$	$\begin{cases} y'=(1+\tan^2 u)u' \\ =\frac{u'}{\cos^2 u}=u'\sec^2 u \end{cases}$
$y=\operatorname{cotan} x$	$y'=\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}=-\operatorname{cosec}^2 x$	$y=\operatorname{cotan} u$	$y'=\frac{-u'}{\operatorname{sen}^2 u}=-u'\operatorname{cosec}^2 u$
$y=\operatorname{arcsen} x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\operatorname{arcsen} u$	$y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y=\arccos x$	$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\arccos u$	$y'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y=\arctan x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$	$y=\arctan u$	$y'=\frac{u'}{1+u^2}$
Derivación logarítmica	1) $y=u^v$ 4) $\frac{y'}{y}=v'\ln u+v\frac{u'}{u}$	2) $\ln y=\ln(u^v)$ 5) $y'=y\left(v'\ln u+v\frac{u'}{u}\right)$	3) $\ln y=v\ln u$ 6) $y'=u^v\left(v'\ln u+v\frac{u'}{u}\right)$

Siendo: y, u, v funciones de x; a, k, n constantes.

Tabla 2. Reglas de derivación (parte II)

2.- Repaso Integrales

2.1.- Definición: De acuerdo al diccionario, integrar es unir las partes en un todo. Matemáticamente la integral definida está representada por la siguiente ecuación:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Que representa la integral de la función *f(x)*, con respecto a la variable independiente x, evaluada entre los límites x = a hasta x= b. Gráficamente esto se representa con el siguiente símbolo:

El símbolo $\int$ ***es la inicial de la palabra "suma"***

Corresponde al área bajo la curva de *f(x)*, entre x = a y x = b (parte sombreada)

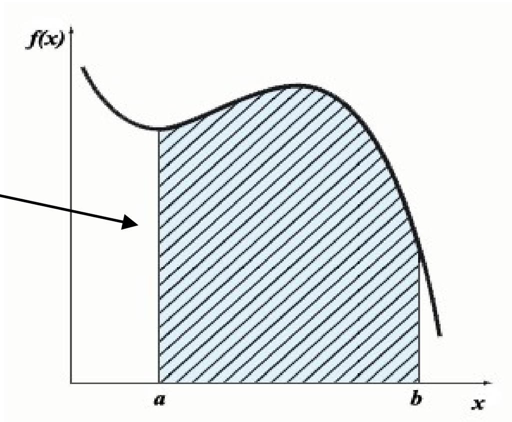


Fig. 2 Área bajo la curva, que corresponde a la integral

2.2.- Ejemplos de cómo la Integración es utilizada para evaluar áreas en Ingeniería y aplicaciones científicas:

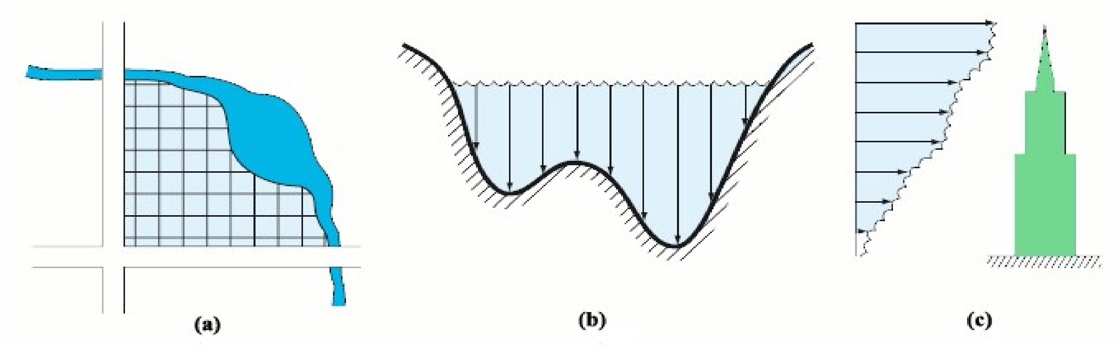
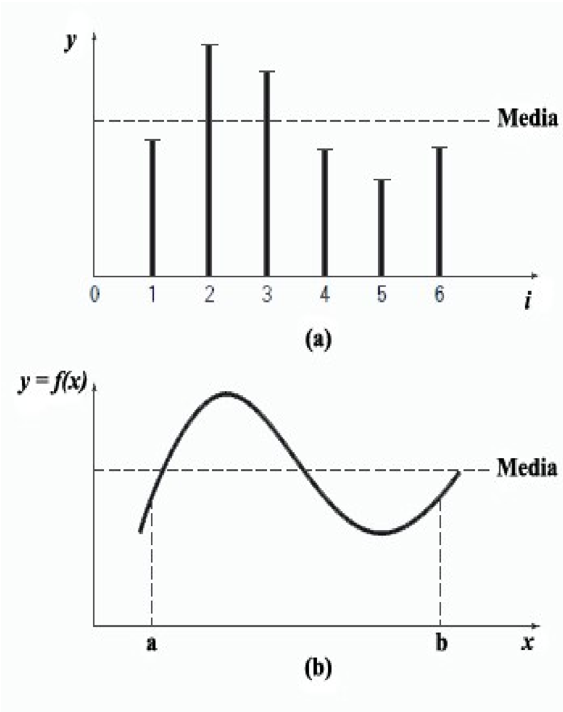


Fig. 3.

a) Un **topógrafo** puede ser que necesite saber el área de un campo delimitado por un río y dos carreteras.
b) Un **hidrólogo** necesita conocer la zona de la sección transversal de un río.
c) Un **ingeniero estructural** tiene que determinar la fuerza neta debido a un viento no uniforme que sopla contra el lado de un rascacielos.

2.3.- Otras aplicaciones se relacionan con la analogía entre la integración y la sumatoria



La media de una serie de n puntos discretos se puede calcular mediante la sumatoria siguiente:

$$Media = \frac{\sum_{i=1}^{n} yi}{n}$$

Dónde: y_i, son las medidas individuales. En cambio supongamos que y es una función continua $y = f(x)$, con una variable independiente x. En este caso hay un infinito número de valores entre a y b. Para ello se calcula mediante la fórmula de Integración siguiente:

$$Media = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Fig. 4 a) Datos discretos, b) Datos continuos

Esta fórmula tiene cientos de aplicaciones en el campo científico y en la ingeniería. Por ejemplo, se utiliza para calcular el centro de gravedad de objetos irregulares en ingeniería civil y mecánica, también para determinar la corriente de la raíz cuadrada media en ingeniería eléctrica.

Las Integrales también son empleadas por los ingenieros y científicos para evaluar la cantidad total o la cantidad de una variable física determinada. La integral se puede evaluar sobre una línea, un área o un volumen

2.4.- Ejemplo de una aplicación de la integración.

La presa Hoover en E. U. tiene uno de los diques de arco de concreto más altos del mundo. Este diseño de arco presenta una curva hacia el agua que contiene y casi siempre se construye en cañones angostos.

Para determinar el área y el volumen de concreto para la construcción de la obra se requiere de conocimientos matemáticos, como los de integración.

Fig. 5. Presa Hoover en E. U. (*Fuente: Wikipedia*)

2.5.- Fórmulas y reglas básicas de Integración

TABLA DE DERIVADAS E INTEGRALES.

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)dx$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\text{si } \alpha \neq -1)$
e^x	e^x	$\int e^x\,dx = e^x + C$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$
$a^x \quad (\text{si } a > 0)$	$a^x \ln a$	$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	
$\operatorname{arc\,sen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	

REGLAS BÁSICAS DE DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN

Derivada del producto: $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Regla de la cadena: $[f(g(x))]' = f'(g(x))\,g'(x)$

Integración por partes: $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$

Cambio de variables "$x = g(t)$": $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\,g'(t)\,dt$

2.6- Ejemplos de integración.

1) $\int 3x^2\,dx = x^3 + C$ 2) $\int 5\,dx = 5x + C$

3) $\int -3\,dx = -3x + C$ 4) $\int (4x^3 + 5)dx = x^4 + 5x + C$

5) $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$ 6) $\int e^x\,dx = e^x + C$

7) $\int 8\sec^2 dx = 8\tan x + C$

8) $\int (2x^2 + 3)(3x - 2)dx = \int (6x^3 - 4x^2 + 9x - 6)dx =$

$$6\int x^3\,dx - 4\int x^2\,dx + 9\int x\,dx - 6\int dx = \frac{6x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} - 6x + C$$

¿Qué Puede salir Mal?, Aquí el Resultado de hacer un mal cálculo, no se tomó en cuenta el efecto de resonancia debido al fuerte viento en la zona al construir el puente de Tacoma.

De ahí lo importante de poder realizar bien los cálculos en las construcciones para no tener estos resultados.

Fig. 6. Puente colgante Tacoma Narrows en E. U *(Figuras tomadas de Internet, Wikipedia y otros)*.

3.- Ejercicios de derivadas (Parte I), SOLUCIONES

Instrucción: Encuentre las derivadas de las siguientes funciones. Consulte las tablas de las reglas de derivadas entregadas.

a) $f(x) = x^3 - 4x$ **Solución**: $y' = 3x^2 - 4$

b) $y = X^4 + 3X^2 - 6$ **Solución**: $y' = 4x^3 + 6x$

c) $y = 6x^3 - x^2$ **Solución**: $y' = 18x^2 - 2x$

d) $y = \frac{x^5}{a+b} - \frac{x^2}{a-b}$ **Solución**: $y' = \frac{5x^4}{a+b} - \frac{2x}{a-b}$

e) $y = \frac{x^3 - x^2 + 1}{5}$ **Solución**: $y' = \frac{3x^2 - 2x}{5}$

f) $y = 2ax^3 - \frac{x^2}{b} + c$ **Solución**: $y' = 6ax^2 - \frac{2x}{b}$

g) $y = x(2x-1)(3x+2)$ **Solución**: $y' = 2(9x^2 + x - 1)$

h) $y = (1 + 4\,x^3)(1 + 2x^2)$ **Solución**: $y' = 4x(1 + 3x + 10x^3)$

ó $y' = 4x + 12x^2 + 40x^4$

i) $y = (2x-1)(x^2 - 6x + 3)$ **Solución**: $y' = 6x^2 - 26x + 12$

j) $y = 3x^2 + 5x - 4$ **Solución**: $y' = 6x + 5$

4.- Ejercicios de derivadas (Parte II). **SOLUCIONES**

Instrucción: Encuentre las derivadas de las siguientes funciones. Consulte las tablas de las reglas de derivadas entregadas.

k) $y = \sqrt{x^2 + a^2}$ **Solución**: $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

l) $y = 2\sin x + \cos 3x$ **Solución**: $y' = 2\cos x - 3\ sen\ 3x$

m) $y = x(2x-2)(5x+3)$ **Solución**: $y' = 30x^2 - 8x - 6$

n) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ **Solución**: $y' = 3\ ax^2 + 2\ bx + c$

o) $y = (3x^2 + 5x)$ **Solución**: $y' = 6\ x + 5$

p) $y = (5x^2 - 3x)\ (2x^3 + 8x + 7)$

Solución: $y' = 50x^4 - 24x^3 + 120x^2 + 22x - 21$

q) $y = \left(2\sqrt{t} + 1\right)(t^2 + 3)$ **Solución**: $y' = 5\ t^{3/2} + 2\ t + \frac{3}{t^{1/2}}$

r) $y = \frac{x+1}{x+3}$ **Solución**: $y' = \frac{1}{(x+3)} - \frac{(x+1)}{(x+3)^2}$

ó $y' = \frac{2}{(x+3)^2}$

ó $y' = \frac{2}{x^2+6x+9}$

5.- Ejercicios de integrales. **SOLUCIONES**

Instrucción: Encuentre las integrales indefinidas siguientes. Consulte las tablas de las reglas de integrales entregadas.

1) $\int x^5 dx$ **Solución:** $\frac{x^6}{6} + C$

2) $\int \left(x + \sqrt{x}\right) dx$ **Solución:** $\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{2x^{3/2}}{3} + C$$

3) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\right) dx$ **Solución:** $6\sqrt{x} - \frac{1}{10}x^2\sqrt{x} + C$

$$6\sqrt{x} - \frac{1}{10}x^{5/2} + C$$

4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\, dx$ **Solución:** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$

$$\frac{2}{5}x^{5/2} + C$$

5) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\, dx$ **Solución:** $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$

$$\frac{4}{3}x^{3/4} + C$$

6) $\int e^{5x}\,dx$ **Solución**: $\frac{1}{5}e^{5x} + C$

7) $\int \cos 5x\,dx$ **Solución**: $\frac{\sin 5x}{5} + C$

8) $\int \sin ax\,dx$ **Solución**: $-\frac{\cos ax}{a} + C$

9) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ **Solución**: $\frac{1}{2} ln^2 x + C$

10) $\int \frac{1}{sin^2 3x}\,dx$ **Solución**: $-\frac{\cot 3x}{3} + C$

11) $\int \frac{1}{cos^2\,7x}\,dx$ **Solución**: $\frac{\tan 7x}{7} + C$

6.- EJERCICIOS DE DERIVADAS E INTEGRALES CON MATLAB. SOLUCIONES

Instrucción: Construya un programa (script .m), en Matlab, con cada una de las siguientes funciones, calcule las derivadas o las integrales de acuerdo al caso, construya las gráficas de las funciones, sus derivadas e integrales de acuerdo al inciso, utilizando subplot (maneje además las opciones: title, legend, xlabel, ylabel, asígneles color y realce las líneas con puntos, +,*, círculos o lo que desee). Deben de ser 7 programas en total. En cada uno, identifique su número de grupo y los integrantes. Haga un copy/paste a una hoja de Word y envíelo por correo. Esta hoja debe de ser entregada con los comandos el siguiente día de clase. Recordar al inicio colocar los comandos de limpieza (clear all; close all; clc;), y comentar todo el programa.

a) De acuerdo al polinomio siguiente, calcular su derivada y evaluar dicha derivada en

$\pi/2$

$$f(g) = sen\ x\ cos^2(x) + 2x$$

% Código de Matlab

```
% Declaración variables simbólicas

syms x;

% Declaración de la Función

y = sin(x)*cos(x).^2 + 2*x

% Cálculo de la Derivada

y1 = diff(y,x)

y2 = subs(y1,x,pi/2)

% Construcción de Gráficas

subplot (2,1,1); a = ezplot(y); title('Calculo Derivada inciso a, Funcion');...

    set(a,'Color', 'r', 'LineStyle', '--', 'Marker', '*');...

    xlabel('Valor de la Variable x'); ylabel('Valor de la f(y)'); legend('Funcion');


subplot (2,1,2);

b = ezplot(y1); hold on; c = plot(pi/2,y2,'r *'); text(pi/2,y2,' Punto (pi/2,2)');...

    title('Calculo Derivada inciso a, Derivada');...
```

```
    set(b,'Color', 'g', 'LineStyle', '-', 'Marker', 'o');...

    xlabel('Valor de la Variable x'); ylabel('Valor de la
f(y)');legend('Derivada en Punto f(x) = pi/2');
```

Las gráficas resultantes del proceso de cálculo de la derivada son las siguientes:

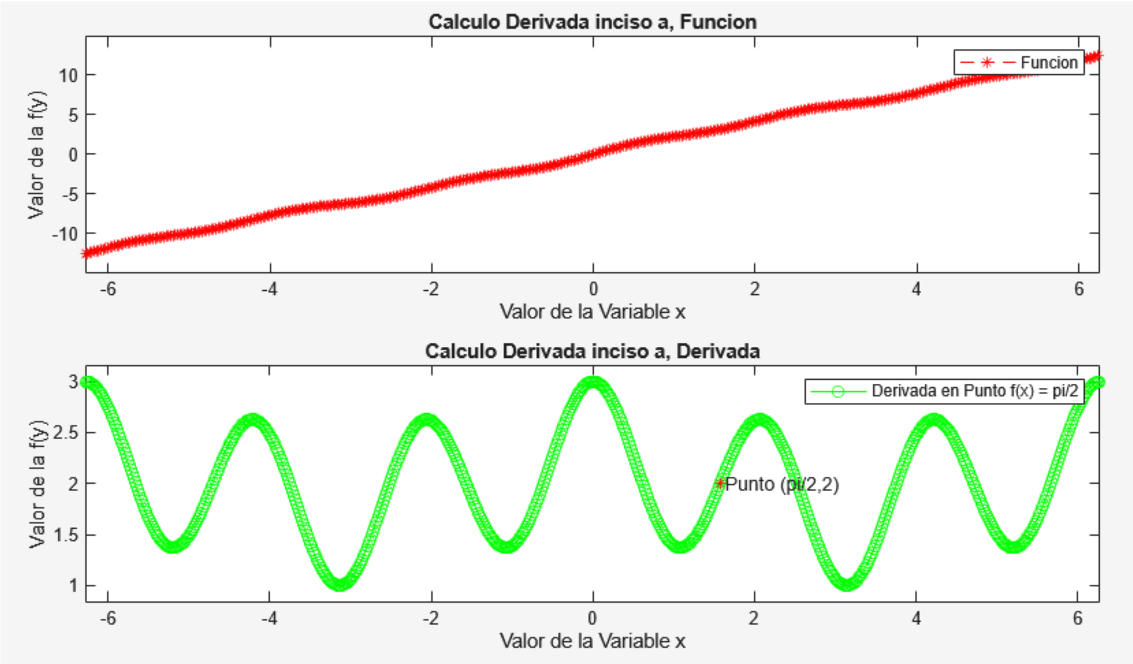


Fig. 1. Gráfica de la función (parte superior) y gráfica de la derivada en el punto f(x) = pi/2

b) Encontrar las derivadas no nulas de la siguiente función

$$f(x) = \mathrm{x}(2 + 3\mathrm{x}^3)(1 + 4\mathrm{x}^2)$$

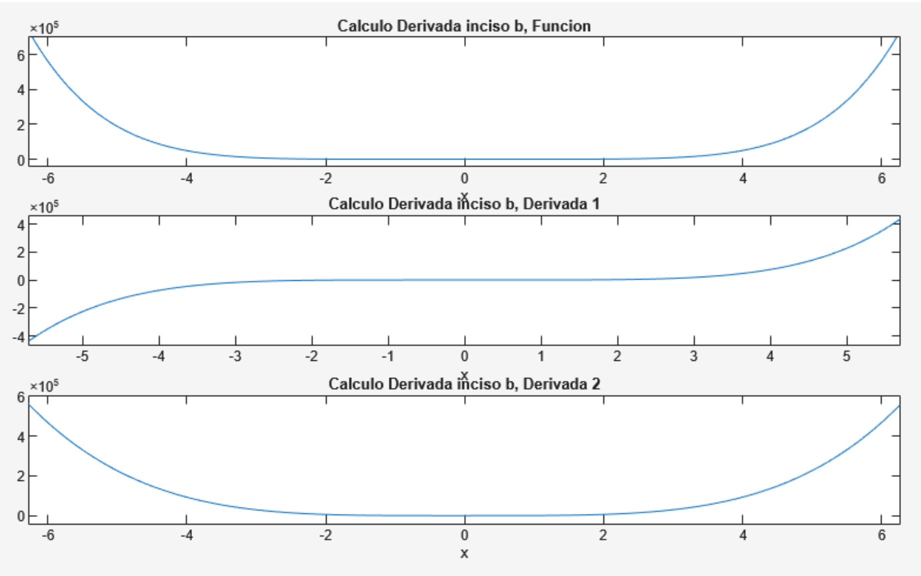
```
% Declaración variables simbólicas

syms x;

% Declaración de la Función

y = ((x*( 2 + 3*x.^3)).*(1 + 4*x.^2));

% Cálculo de las Derivadas

y1 = diff(y,x)
y2 = diff(y,x,2)
y3 = diff(y,x,3)
y4 = diff(y,x,4)
y5 = diff(y,x,5)
y6 = diff(y,x,6)
y7 = diff(y,x,7)


% Construcción de Gráficas
```

```
figure(1);

subplot (3,1,1); a = ezplot(y); title('Calculo Derivada inciso b, Funcion');
subplot (3,1,2); a = ezplot(y1); title('Calculo Derivada inciso b, Derivada 1');
subplot (3,1,3); a = ezplot(y2); title('Calculo Derivada inciso b, Derivada 2');
figure(2);
subplot (2,1,1); a = ezplot(y3); title('Calculo Derivada inciso b, Derivada 3');
subplot (2,1,2); a = ezplot(y4); title('Calculo Derivada inciso b, Derivada 4');
figure(3);
subplot (2,1,1); a = ezplot(y5); title('Calculo Derivada inciso b, Derivada 5');
subplot (2,1,2); a = ezplot(y6); title('Calculo Derivada inciso b, Derivada 6');
```

Los valores de cálculo son:

```
y1 =
(4*x^2 + 1)*(3*x^3 + 2) + 8*x^2*(3*x^3 + 2) + 9*x^3*(4*x^2 + 1)

y2 =
24*x*(3*x^3 + 2) + 36*x^2*(4*x^2 + 1) + 144*x^4

y3 =
72*x*(4*x^2 + 1) + 1152*x^3 + 48

y4 =
4320*x^2 + 72

y5 =
8640*x

y6 =
8640

y7 =
0
```

Las gráficas resultantes son las siguientes:



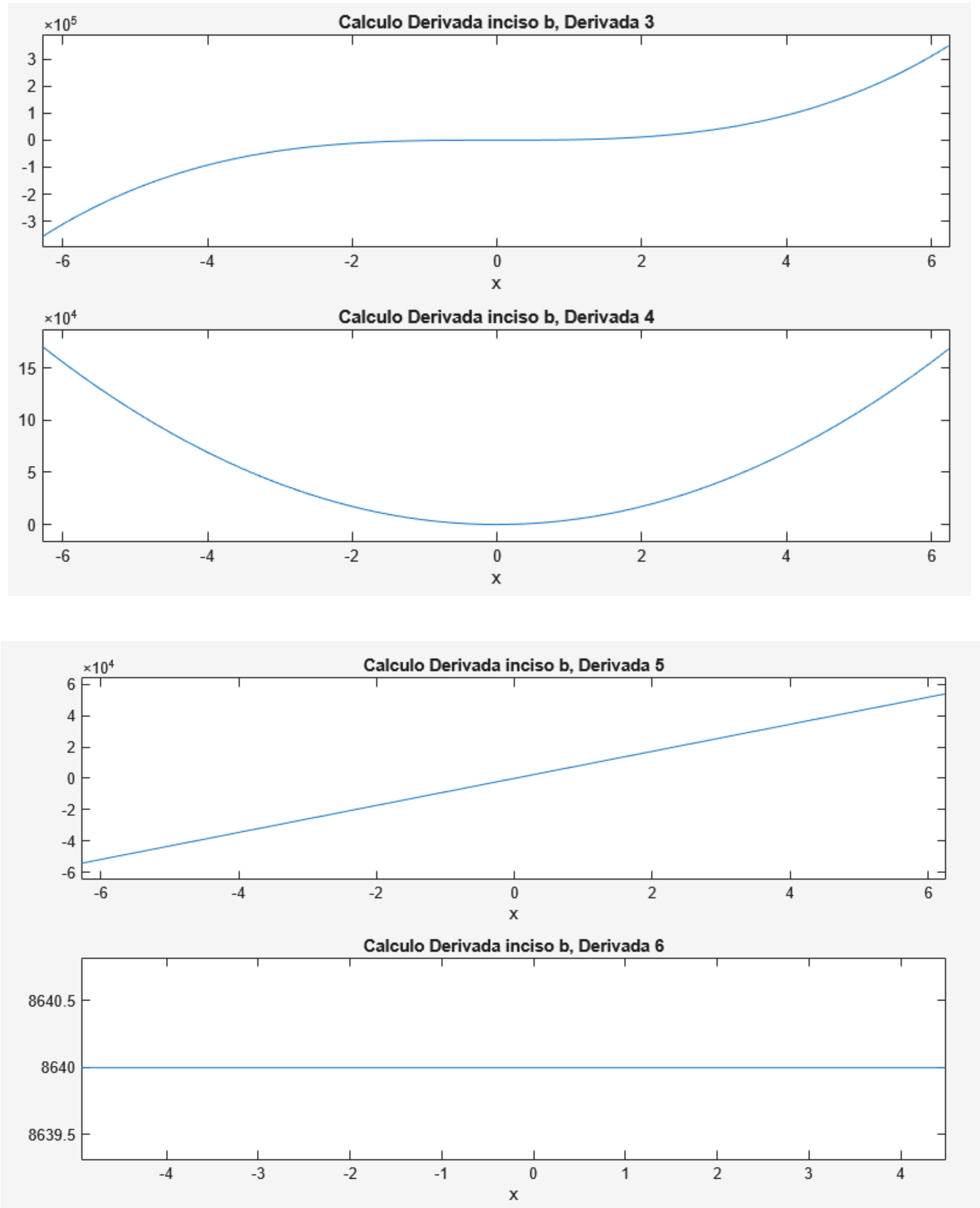


Fig. 2. Gráficas del proceso de cálculo de la función (y), con las derivadas (y1 a y6)

El resultado de la derivada 7 es cero, lo que indicaría una línea continua a valor cero.

c) Encuentre la segunda derivada de la función, y evaluar la derivada en

f(y) = 3 y *f(y)* = 1

$$f(y) = \left(4 + \sqrt[3]{x}\right)^4$$

```
% Declaración variables simbólicas
syms x;

% Declaración de la Función
y = (4 + x.^(1/3)).^4

% Cálculo de la Derivada
y1 = diff(y,x,2)  % Segunda Derivada
y2 = subs(y1,x,3)  % Sustitución punto x = 3
y3 = subs(y1,x,1)  % Sustitución punto x = 1

% Construcción de Gráficas
subplot (2,1,1); a = ezplot(y); title('Calculo Derivada inciso c, Funcion');...
    set(a,'Color', 'b', 'LineStyle', '--', 'Marker', '*');...
    xlabel('Valor de la Variable x'); ylabel('Valor de la f(y)'); legend('Funcion');
subplot (2,1,2);
b = ezplot(y1); hold on; c = plot(3,y2,'r *'); text(3,y2,' Punto (3,-13.8333)');...
    d = plot(1,y3,'r *'); text(1,y3,' Punto (1,-77.7778)');...
    title('Calculo Derivada inciso c, 2da. Derivada');...
    set(b,'Color', 'g', 'LineStyle', '-', 'Marker', 'o');...
    xlabel('Valor de la Variable x'); ylabel('Valor de la f(y)');legend('2 da. Derivada en Punto f(x) = 3 y f(x) = 1');
```

Los valores de cálculo son:

```
y =

(x^(1/3) + 4)^4

y1 =

(4*(x^(1/3) + 4)^2)/(3*x^(4/3)) - (8*(x^(1/3) + 4)^3)/(9*x^(5/3))


y2 =
```

```
(4*3^(2/3)*(3^(1/3) + 4)^2)/27 - (8*3^(1/3)*(3^(1/3) + 4)^3)/81

y3 =

-700/9
```

Las gráficas resultantes son las siguientes:

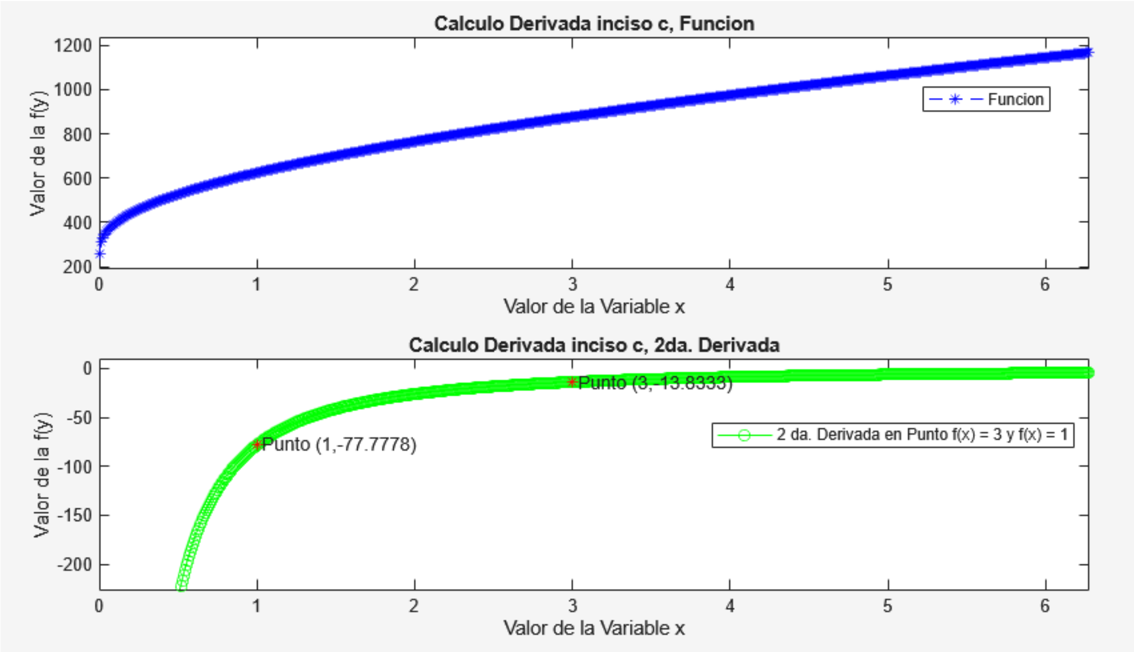


Fig. 3. Gráficas del proceso de cálculo de la función f (y), con el cálculo de la 2da. Derivada en los puntos (x= 1 y x= 3)

d) Calcule el área bajo la curva siguiente, en el intervalo [0, 1]

$$f(w) = 5\,x^2 - 2x + 1$$

```
% Declaración variables simbólicas
syms x;
% Declaración de la Función
y = 5*x.^2 - 2*x + 1;
% Cálculo de la Integral Definida
y1 = int(y,x,0,1)
% Construcción de Gráficas
hold on;
a = ezplot(y); title('Calculo Integral Definida inciso d,
Funcion');...
    set(a,'Color', 'r', 'LineStyle', '--');

b = ezplot(y1); title('Calculo Integral Definida inciso d,
Integral');...
    title('Calculo Integral inciso d, Integral Definida');...
    xlabel('Valor de la Variable x'); ylabel('Valor de la
f(y)');legend('Funcion', 'Integral');
```

El valor del cálculo del área bajo la curva es:

```
y1 =

5/3
La gráfica resultante es la siguiente:
```

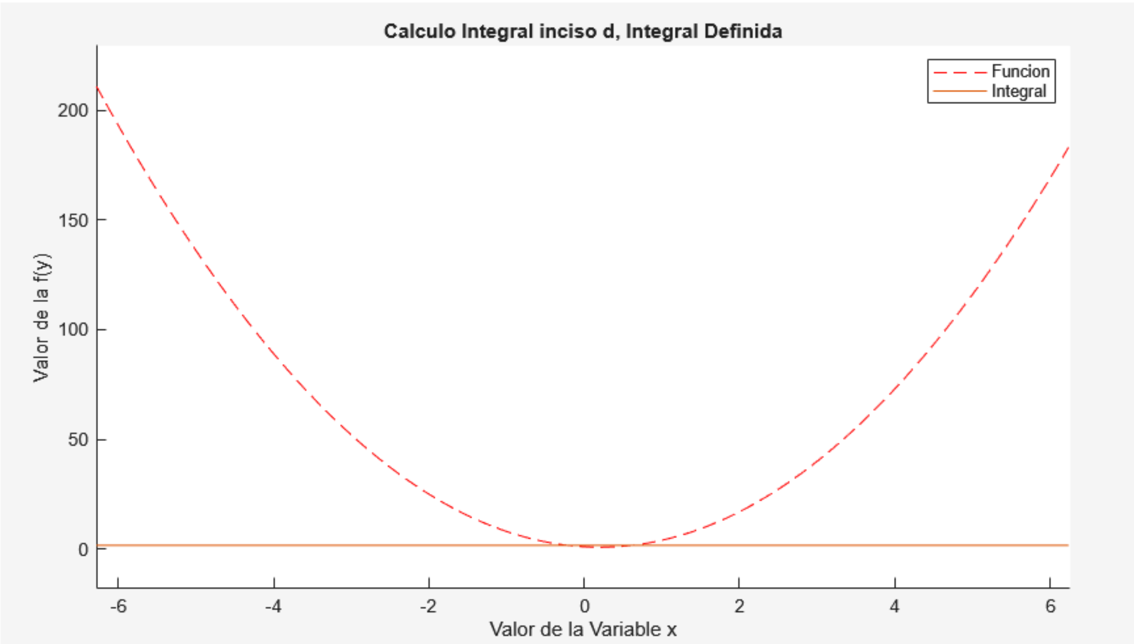


Fig. 4. Gráficas del proceso de cálculo de la integral definida de la función f(y) área bajo la curva

e) Calcule la siguiente integral con *f(x)* = sen(x), y K = 5

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} k\ f(x)dx$$

```
% Declaración variables simbólicas
syms x;
% Declaración de la Función
 y = 5*sin(x);      % K = 5;
% Cálculo de la Integral Definida
y1 = int(y,x,-pi/2,pi)
% Construcción de Gráficas
hold on;
a = ezplot(y); title('Calculo Integral Definida inciso e,
Funcion');...
    set(a,'Color', 'r', 'LineStyle', '--');

b = ezplot(y1); title('Calculo Integral Definida inciso e,
Integral');...
    title('Calculo Integral inciso e, Integral Definida');...
    xlabel('Valor de la Variable x'); ylabel('Valor de la
f(y)');legend('Funcion', 'Integral');
```

Los valores de cálculo son

```
y1 =

5
```

La gráfica resultante es la siguiente:

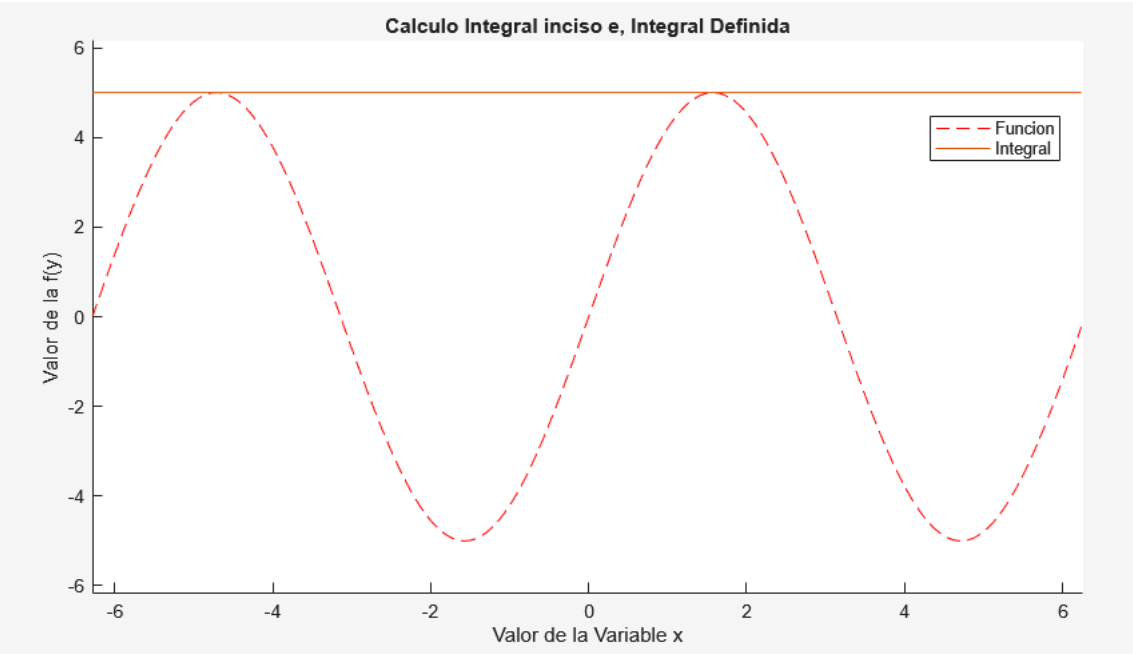


Fig. 5. Gráficas del proceso de cálculo de la integral definida de la función *f(x)* = sen(x), y K = 5

f) Calcule la siguiente integral indefinida

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\right) dx$$

```
% Declaración variables simbólicas
syms x;
% Declaración de la Función. (Recordar poner punto, al dividir y en la potencia)
 y = (3./sqrt(x))-((x*sqrt(x))./4);
% Cálculo de la Integral Definida
y1 = int(y,x)
% Construcción de Gráficas
hold on;
a = ezplot(y); title('Calculo Integral Indefinida inciso f,
Funcion');...
    set(a,'Color', 'r', 'LineStyle', '--');
b = ezplot(y1); title('Calculo Integral Indefinida inciso e,
Integral');...
    title('Calculo Integral inciso f, Integral Indefinida');...
    xlabel('Valor de la Variable x'); ylabel('Valor de la
f(y)');legend('Funcion', 'Integral');
```

Los valores de cálculo son

```
y1 =

-(x^(1/2)*(x^2 - 60))/10
```

La gráfica resultante es la siguiente:

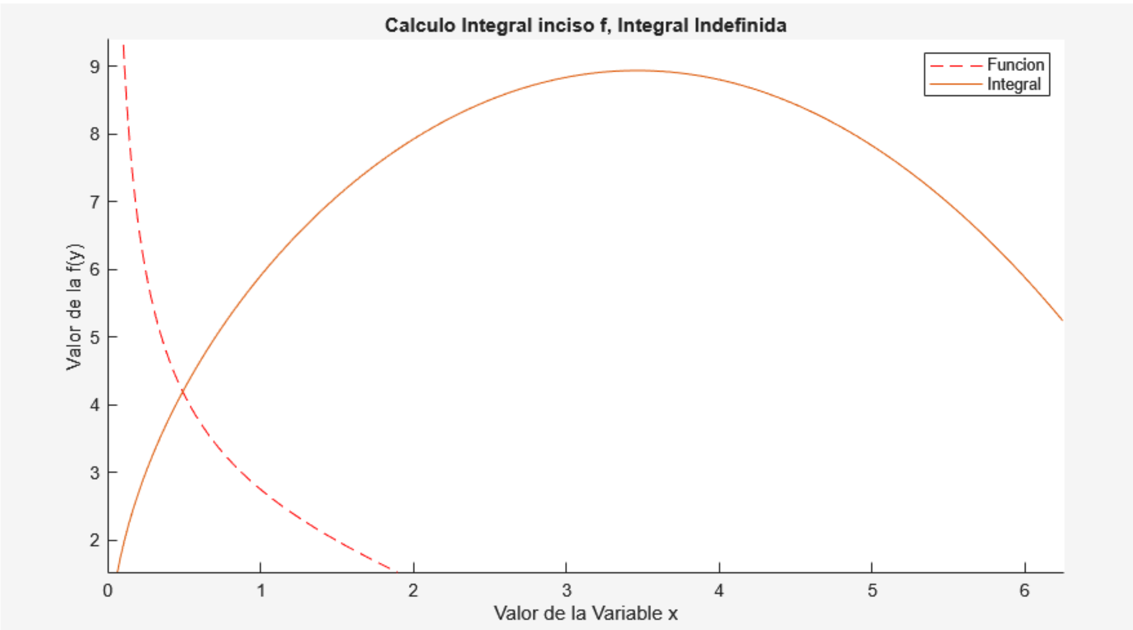


Fig. 6. Gráficas del proceso de cálculo de la integral definida de la función *f(x)* = `(3./sqrt(x))-((x*sqrt(x))./4)`

g) Calcule la siguiente integral definida

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

```
% Declaración variables simbólicas
syms x;
% Declaración de la Función. (Recordar poner punto, al dividir y en la potencia)
 y = 1./(1 + x.^2);
% Cálculo de la Integral Definida, entre los límites 0 y 1
y1 = int(y,x,0,1)
% Construcción de Gráficas
hold on;
a = ezplot(y); title('Calculo Integral Indefinida inciso f,
Funcion');...
    set(a,'Color', 'r', 'LineStyle', '--');

b = ezplot(y1); title('Calculo Integral Indefinida inciso e,
Integral');...
    title('Calculo Integral inciso g, Integral Indefinida');...
    xlabel('Valor de la Variable x'); ylabel('Valor de la
f(y)');legend('Funcion', 'Integral');
```

Los valores de cálculo entre los límites (0 y 1) son

```
y1 =

pi/4
```

La gráfica resultante es la siguiente:

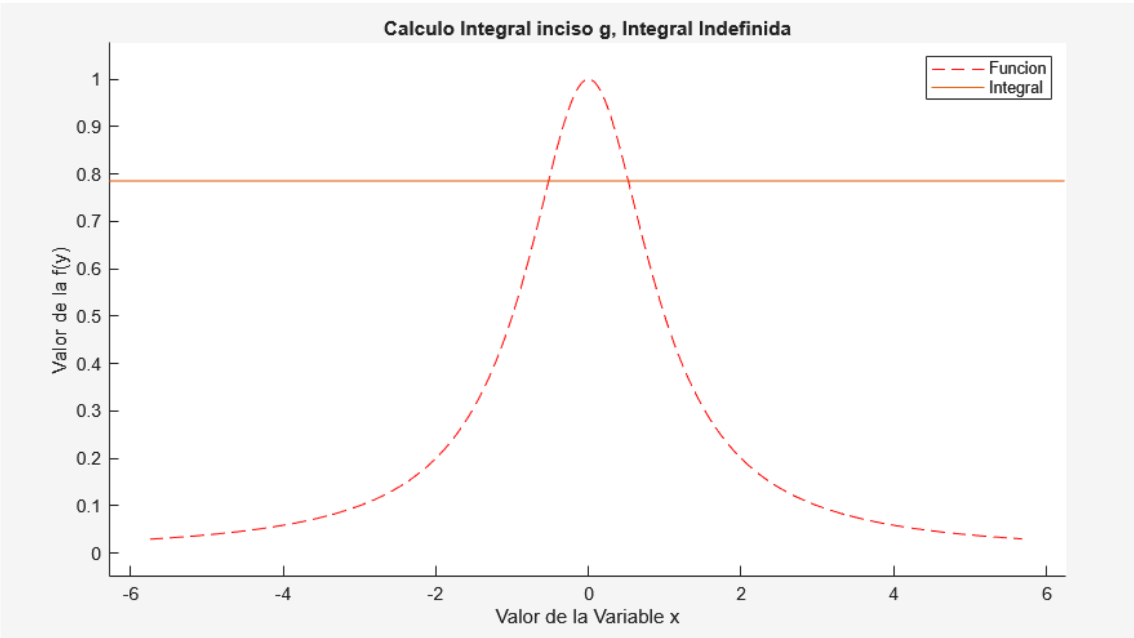


Fig. 7. Gráficas del proceso de cálculo de la integral definida de la función f(x) entre los límites (0 y 1)

7.- ECUACIONES DIFERENCIALES

7.1.- Conceptos Básicos y Clasificación de Ecuaciones Diferenciales

7.1.1.- Definición

Una **ecuación** que contiene **derivadas** de una o más variables respecto a una o más **variables independientes**, se dice que es una ***Ecuación Diferencial (ED).***

Ejemplo:

$$(1-x)y'' - 4xy' + 5y = cosx$$

7.1.2.- Notaciones de ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales se pueden escribir de diversa manera, dependiendo del autor y del libro en que se estudien. Existen varios tipos de notaciones (*Leibniz, Prima, Punto y Potencia*), como los siguientes Ejemplos:

a) Notación de Leibniz

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

b) Notación Prima

$$y' + 5y = e^x \quad ; \quad y'' + y' + 6y = 0$$

c) Notación Punto

$$\dot{y} + 5y = e^x \quad ; \quad \ddot{y} + \dot{y} + 6y = 0$$

d) Notación Potencia (*Debe de ir entre paréntesis, en otro caso, se considera solo una potencia*)

$$y^{(1)} + 5y = e^x \quad ; \quad y^{(2)} + y^{(1)} + 6y = 0$$

7.1.3.- Clasificación

Podemos clasificar a las ecuaciones diferenciales por **tipo**, **orden** y **linealidad**

1) Clasificación por Tipo

a) **EDO**: Si una ecuación contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)**

Mas de una variable dependiente (***x, y***)

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

Una sola variable Independiente (***t***)

b) **EDP**: Una ecuación que involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama **ecuación diferencial parcial (EDP)**

Ejemplos: son ecuaciones diferenciales parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$$

(2 variables Independientes x, y) *(2 variables Independientes x, t)*

Función Incógnita o Variable Dependiente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$$

Variable Independiente

En general, la *n-ésima derivada de* ***y*** *se escribe como* $\frac{d^n y}{d\,x^n}$ o y^n

2) Clasificación por Orden

El **orden de una ecuación diferencial (ya sea EDO** o **EDP**) es el orden de la mayor derivada en la ecuación.

Ejemplos:

Segundo Orden   Primer Orden

El 3, Solo indica la Potencia

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

La anterior es una ecuación diferencial ordinaria EDO, de segundo orden

Simbólicamente se puede expresar una ecuación diferencial ordinaria de *n-ésimo* orden con una variable dependiente por la forma general

$$F\ (x, y, y', \dots\dots, y^n) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Donde *F es una función con valores reales de n + 2 variables: x, y, y,' …, $y^{(n)}$.*

3) Clasificación por Linealidad

Una ecuación diferencial **(1)** , de *n-ésimo orden* ***F(x, y, y', …$y^{(n)}$) = 0,*** se dice que **es lineal** si ***F*** es lineal en ***y, y', …$y^{(n)}$.*** Esto significa que una **EDO** de n-ésimo orden es lineal cuando la ecuación anterior es*:*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

O dicho de otra forma en notación de Leibniz:

$$a_n(x)\frac{dy}{dx} + a_{n-1}(x)\frac{d^{(n-1)}y}{d\,x^{(n-1)}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad \textbf{(3)}$$

Dos casos especiales importantes de la ecuación **(3)**, son las **ED** lineales de primer orden (*n 1) y de segundo orden (n 2), respectivamente las ecuaciones (4) y (5):*

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad \textbf{(4)}$$

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad \textbf{(5)}$$

En la combinación de la suma del lado izquierdo de la ecuación **(3)**, se puede observar que las dos propiedades características de una **EDO** son las siguientes:

I) La variable dependiente "y" y todas sus derivadas: $\boldsymbol{y, y', \ldots y^{(n)}}$, son de primer grado, es decir, la potencia de cada término que contiene "**y**" es igual a **1**.

II) Los coeficientes de $\boldsymbol{a_0, a_1, \ldots, a_n}$ de $\boldsymbol{y, y', \ldots, y^{(n)}}$ dependen a lo más de la variable independiente $\boldsymbol{x}$

Ejemplo: Las siguientes ecuaciones:

$$(y-x)dx + 4xdy = 0$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$$

Son, respectivamente, ecuaciones diferenciales lineales de primer, segundo y tercer orden.

Una ecuación diferencial ordinaria **no lineal,** es simplemente no lineal. Porque poseen funciones no lineales de la **variable dependiente** o de sus derivadas, tales como:

$$sen\ y$$

$$e^{y'}$$

Estas no se pueden presentar en una ecuación lineal.

Ejemplos: Las siguientes ecuaciones diferenciales, son ***NO LINEALES***

a) $(\mathbf{1}-\boldsymbol{y})y' + 2y = e^x$ Término No Lineal, El coeficiente depende de y

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \boldsymbol{sen\ y} = 0$ Término No Lineal, Función ***sen*** no lineal de y

c) $\dfrac{d^4y}{dx^4} + \boldsymbol{y^2} = 0$ Término No Lineal, Exponente (Potencia) $\neq 1$

Por lo tanto, son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) **no lineales** de primer, segundo y cuarto orden respectivamente.

7.1.4.- Solución de Una Ecuación Diferencial EDO

Una solución de una ecuación diferencial en **la función** "*y*" desconocida y la variable independiente *x* en el intervalo δ, es una función " *y(x)* ", que satisface la ecuación diferencial de manera idéntica para toda "*x*" en δ.

En otras palabras, **cualquier función** " *F(x)* “, definida en un intervalo δ, y que tiene al menos *n* derivadas continuas en δ, las cuales cuando se sustituyen en una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden, reducen la ecuación a una identidad, se dice que **es una solución** de la ecuación en el intervalo.

$F(x, y(x), y'(x), \ldots y^{(n)}(x)) = 0$ Para toda **x** en δ

Ejemplo:

¿Es la función y(x) siguiente?:

$$y(x) = c_1 sen2x + c_2 cos2x$$

Una solución de la ecuación diferencial

$$y'' + 4y = 0$$

En donde: c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Para comprobarlo, tenemos que calcular la segunda derivada de la función, para luego sustituirla en la ecuación diferencial, junto con la función y, si el resultado es una identidad, entonces, la función satisface para todos los valores de x, en el intervalo (-∞, ∞).

1) Se calcula la segunda derivada (En Matlab: ***g = diff (y, x,2);***)

$$y'' = -4c_1 sen(2x) - 4c_2 cos(2x)$$

2) Ahora se sustituye este valor junto con el de la función en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y'' + 4y = 0 \quad &\equiv \quad -4c_1 sen(2x) - 4c_2 cos(2x) + 4(c_1 sen2x + c_2 cos2x) \\ &\equiv \quad (-4c_1 + -4c_1) sen2x + (-4c_2 + -4c_2) cos2x) \\ &\equiv \quad 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función y(x), satisface la ecuación diferencial, para todos los valores de x, y es una solución en el intervalo (-∞, ∞).

7.2.- EJERCICIOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1) CLASIFICACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES (I). SOLUCIONES

I) En los siguientes ejercicios. Determine el orden de la ecuación diferencial dada.

a)

$$(1 - x)\, y'' - 4\, xy' + 5y = cos\, x$$

Segundo orden

b)

$$x\, \frac{d^3y}{d\, x^3} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$$

Tercer orden

c)

$$t^5y^{(4)} - t^3y'' + 6y = 0$$

Cuarto orden

d)

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} + u = cos(r + u)$$

Segundo orden

e)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Segundo orden

f)

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{k}{R^2}$$

Segundo orden

g)

$$(sen\, \theta)\, y''' - (cos\, \theta)\, y' = 2$$

Tercer orden

II) En los siguientes ejercicios, determine el orden, la función desconocida (variable dependiente), y la variable independiente de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales

a)

$$y''' - 5\,xy' = e^{x} + 1$$

3er. orden, func. desc, y; vari ind. x

b)

$$ty'' + t^2y - (sent)\sqrt{y} = t^2 - t + 1$$

2do orden; func. desc. y, var ind. t

c)

$$s^2\,\frac{d^2t}{ds^2} + st\,\frac{dt}{ds} = s$$

2do. orden, func. desc, t; vari ind. s

d)

$$5\left[\frac{d^4\,b}{d\,p^4}\right]^5 + 7\left[\frac{db}{dp}\right]^{10} + b^7 - b^5 = p$$

4to. orden; func. desc. b, var ind. p

e)

$$y\,\frac{d^2\,x}{d\,y^2} = y^2 + 1$$

2do. orden, func. desc, x; vari ind. y

f)

$$y\left[\frac{dx}{dy}\right]^2 = x^2 + 1$$

1er. orden; func. desc. x, var ind. y

g)

$$2x'' + 3x' - 5x = 0$$

2do. orden, func. desc, x; vari ind. *t*

h)

$$17\,y^{(4)} - t^6\,y^{(2)} - 4.2\,y^5 = 3\cos t$$

4to. orden; func. desc. y, var ind. *t*

La variable *"t"* es por defecto la variable independiente

III) De acuerdo a ya estudiado, Completar la siguiente tabla **SOLUCIONES**

	Ecuación Diferencial	Ordinaria (EDO) o Parcial (EDP)	Orden	Variable Independiente	Variable Dependiente
A	$y' = x^2 + 5y$	EDO	1	x	Y
B	$y'' - 4y' - 5y = e^{3x}$	EDO	2	x	Y
C	$\left(\frac{d^3 s}{dt^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2 s}{d\, t^2}\right)^2 = s - 3\, t$	EDO	3	t	s
D	$\frac{dr}{d\emptyset} = \sqrt{r\, \emptyset}$	EDO	1	∅	R
E	$\frac{\partial^2 V}{\partial\, x^2} = \sqrt[3]{\frac{\partial V}{\partial y}}$	EDP	2	x,y	V
F	$(2x + y)dx + (x - 3y)dy = 0$	EDO	1	x o y	y o x
G	$y'' + xy = sen\, y''$	EDO	2	x	y
H	$3\, \frac{d^2\, x}{d\, t^2} + 4\, \frac{d\, x}{d\, t} + 9x = 2\cos 3\, t$	EDO	2	t	x
I	$\frac{d^2\, y}{d\, x^2} - 2x\, \frac{dy}{d\, x} + 2y = 0$	EDO	2	x	y
J	$\frac{dy}{dx} = \frac{y(2 - 3x)}{x(1 - 3y)}$	EDO	1	x	y
K	$\frac{\partial^2 u}{\partial\, x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\, y^2} = 0$	EDP	2	x,y	u
L	$8\, \frac{d^2 y}{d\, x^2} = x(\, 1 - x)$	EDO	2	x	y
M	$\frac{\partial\, N}{\partial\, t} = \frac{\partial^2\, N}{\partial\, r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\, N}{\partial\, r} + kN$ *Donde k es una constante*	EDP	2	t,r	N

NOTA: De la tabla anterior, ejemplos de donde se utiliza una determinada ecuación diferencial:

H = Ecuación de vibraciones mecánicas, circuitos eléctricos, sismología.
I = Ecuación de Hermite, mecánica cuántica, oscilador armónico
J = Ecuación de competencia entre dos especies, ecología
K = Ecuación de Laplace, teoría de potencial, electricidad, calor, aerodinámica.
L = Ecuación de deflexión de vigas.
M = Ecuación de fisión nuclear.

2) CLASIFICACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES (II). SOLUCIONES

I) En los siguientes ejercicios. Determine si la ecuación diferencial es lineal o no lineal.

a)

$$(1 - x)\, y'' - 4\, xy' + 5y = cos\, x$$

Si es lineal

b)

$$x \frac{d^3y}{d\, x^3} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$$

no es lineal por $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4$

c)

$$t^5 y^{(4)} - t^3 y'' + 6y = 0$$

Si es lineal

d)

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} + u = cos(r + u)$$

no es lineal por $(r + u)$

e)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

No es lineal por los dos términos, **raíz** y $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

f)

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{k}{R^2}$$

no es lineal por R^2

g)

$$(sen\, \theta)\, y''' - (cos\, \theta)\, y' = 2$$

Si es lineal

h)

$$y' = y^2 + x$$

no es lineal debido al término $\mathbf{y^2}$

i)

$$x\, y' + y = \sqrt{y}$$

No lineal debido al término $\mathbf{y^{1/2}}$

j)

$$y' = x\, sen\, y + e^x$$

no lineal debido al término $sen\, y$

II) En los siguientes ejercicios. Determine si la función dada es una solución de la ecuación diferencial.

a) **Si es una solución**

$$y(x) = 2\,e^{-x} + \,x\,e^{-x} \quad ; \quad y'' + \,2y' + \,y = 0$$

b) **No Es una solución**

$$y(x) = 1 \quad ; \quad y'' + \,2y' + \,y = x$$

$$0 + \,0 + \,1 \neq x$$

c) ¿Cuál de las siguientes funciones, son soluciones de la ecuación diferencial**: y' - 5y = 0**?

4 y **5**

1) $y = 5$ 2) $y = 5x$ 3) $y = \,x^5$ 4) $y = e^{5x}$ 5) $y = 2e^{5x}$ 6) $y = 5e^{2x}$

d) ¿Cuál de las siguientes funciones, son soluciones de la ecuación diferencial**: y' - 3y = 6**

1, **3** y **5**

1) $y = -2$ 2) $y = 0$ 3) $y = \,e^{3x} - \,2$ 4) $y = e^{2x} - 3$ 5) $y = 4e^{3x} - \,2$

e) ¿Es la función $f(x) = x^2 + x^{-1}$, una solución de la ecuación diferencial lineal**:**

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} - \frac{2}{x^2}\,y = \,0 \qquad y'' = \frac{2}{x^3} + 2$$

$$\frac{2}{x^3} + 2 - \frac{2}{x^2}(x^2 + \,x^{-1}) = 0 \qquad \frac{2}{x^3} + 2 - \frac{2x^2}{x^2} - \frac{2\,x^{-1}}{x^2} = 0 \qquad 0 = 0$$

Es una solución

7.3.- PROBLEMAS DE VALOR LINEAL Y VALOR DE FRONTERA

1) Definición:

Una **ecuación Diferencial** acompañada de condiciones subsidiarias sobre la función desconocida (**variable dependiente**) y sus derivadas, todas dadas **al mismo valor** de la variable independiente, constituyen ***"Un problema de valor inicial"***.

Si las condiciones subsidiarias se dan ***a más de un valor*** de la variable independiente, entonces el problema se dice, ***"Es un problema de valores en la frontera"*** y las condiciones son las condiciones en la frontera.

Ejemplo (1):

La Ecuación Diferencial siguiente:

$y'' + 2y' = e^x$; Que posee las condiciones subsidiarias: $y(\pi) = 1\,,\; y'(\pi) = 2$

Es un problema de valor inicial, porque las dos condiciones subsidiarias están ambas dadas en x = π

Ejemplo (2):

La Ecuación Diferencial siguiente:

$y'' + 2y' = e^x$; Que posee las condiciones subsidiarias: $y(0) = 1\,,\; y'(1) = 2$

Es un problema de valores en la frontera, porque las dos condiciones subsidiarias están dadas para los diferentes valores en $x = \boldsymbol{0}$, y $x = \boldsymbol{1}$

7.4.- SOLUCIÓN PARA LOS PROBLEMAS DE VALOR LINEAL Y VALOR DE FRONTERA

Una solución para un problema de valor inicial o de valores en la frontera, es una **función y(x)**, que resuelve a la ecuación diferencial y además **satisface a todas las condiciones subsidiarias**.

Ejemplo (3)

Encuentre el valor de C_1 y C_2, de tal modo que la ecuación

$y(x) = c_1 senx + c_2 cosx$; $y(0) = 1\,,\; y'(0) = 2$

Satisfaga las condiciones dadas, indique si son condiciones iníciales o de frontera

R: **El problema es de condiciones iníciales, ya que las condiciones subsidiarias están dadas a un mismo valor en x = 0**

Ahora, para: $y(0) = 1$, Sustituimos el valor de x, en la ecuación

$Y(0) = c_1 \operatorname{sen}(0) + c_2 \cos(0)$
$Y(0) = 0 + c_2\, 1 = c_2$, Por tanto:

$$\mathbf{c_2 = 1}$$

Ahora para: $y'(0) = 2$, Calculamos la primera derivada de la función y Sustituimos en la ecuación.

$y'(0) = c_1 \cos(0) - c_2 \operatorname{sen}(0)$
$y'(0) = c_1\, 1 + 0 = c_1$, Por tanto:

$$\mathbf{c_1 = 2}$$

Ejemplo (4)

Encuentre el valor de C_1 y C_2, de tal modo que la ecuación

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + 2senx \quad ; \quad y(0) = 0 \,,\; y'(0) = 1$$

Satisfaga las condiciones dadas, indique si son condiciones iníciales o de frontera

El problema es de condiciones iníciales, ya que las condiciones subsidiarias están dadas a un mismo valor en x = 0

Ahora, para: $y(0) = 0$, Sustituimos el valor de x, en la ecuación

$Y(0) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + 2 \operatorname{sen} x$
$Y(0) = c_1 e^{0} + c_2 e^{0} + 2 \operatorname{sen} 0 = c_1 + c_2$, Por tanto:

$$\mathbf{c_1 + c_2 = 0}$$

Ahora para: $y'(0) = 1$, Calculamos la primera derivada de la función y Sustituimos en la ecuación.

$y'(0) = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + 2 \cos x$
$y'(0) = 2c_1 e^{0} + c_2 e^{0} + 2 \cos 0 = 2 c_1 + c_2 + 2$, Por tanto:
$2 c_1 + c_2 + 2 = 1$, Entonces $\mathbf{2 c_1 + c_2 = -1}$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones que hay que resolver

$$\mathbf{c_1 + c_2 = 0}$$
$$\mathbf{2 c_1 + c_2 = -1}$$

Resolviendo simultáneamente las dos respuestas anteriores tenemos que:

$$\mathbf{c_1 = -1} \quad \text{y} \quad \mathbf{c_2 = 1}$$

7.5.- FORMA ESTÁNDAR Y FORMA DIFERENCIAL

A) FORMA ESTÁNDAR

La **forma estándar** o **normal** para una ecuación diferencial de primer orden en la función desconocida ***y(x)*** es:

$$y' = f(x, y) \qquad \textbf{(6)}$$

En donde la derivada $\boldsymbol{y'}$ solo aparece en el lado izquierdo de la anterior fórmula. Sin embargo, no todas, pero si muchas de las ecuaciones diferenciales de primer orden pueden escribirse en la forma estándar por medio de la resolución algebraica de $\boldsymbol{y'}$, haciendo que ***f(x,y)*** ,sea igual a la parte derecha de la ecuación resultante.

B) FORMA DIFERENCIAL

El lado derecho de la ecuación **(6)**, siempre se puede escribir como el cociente de otras dos funciones***, M (x,y)*** y ***–N(x,y).*** En este caso la ecuación (6) se convierte en:

$\frac{\boldsymbol{Dy}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\boldsymbol{M(x,y)}}{\boldsymbol{-N(x,y}}$, la cual es equivalente a la ecuación en la forma diferencial:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

Ejemplo 1.

Escriba en su forma estándar la ecuación diferencial:

$xy' - y^2 = 0$

Despejando y' , se obtiene:

$y' = \frac{y^2}{x}$

La cual, tiene la forma de la ecuación (6), en donde la derivada y', queda sola en el lado izquierdo y en el lado derecho:

$f(x, y) = \frac{y^2}{x}$

Ejemplo 2.

Escriba en su forma estándar la ecuación diferencial:

$$e^x y' + e^{2x} y = senx$$

Al despejar y' , se obtiene:

$$e^x y' = -e^{2x} y + senx$$

$$y' = \frac{-e^{2x}y + senx}{e^x} \qquad y' = -e^x y + e^{-x} senx$$

La cual, tiene la forma de la ecuación **(6),** en donde:

$f(x, y) = -e^x y + e^{-x} senx$

Ejemplo 3.

Escriba la ecuación diferencial dada en su forma diferencial:

$y(yy' - 1) = x$

Una forma más simple de trabajar la forma diferencial, es pasar primero la ecuación a su forma normal o estándar. Para ello despejamos la derivada y' , y se obtiene:

$y^2 y' - y = x$; $\qquad y^2 y' = x + y$

$$y' = \frac{x + y}{y^2}$$

La cual es la forma estándar **(6),** de la ecuación diferencial y que tiene un número infinito de formas diferenciales diferentes asociadas. La más simple es:

Tomando: M (x, y) = x + y
N (x, y) = -y^2

De esta forma:

$$\frac{M(x.y)}{-N(x,y)} = \frac{x+y}{-(-y^2)} \quad ; \quad \frac{M(x.y)}{-N(x,y)} = \frac{x+y}{-(-y^2)}$$

Por lo que se puede escribir en el formato **(7),** de **forma diferencial**

$$(x + y)dx + (-y^2)dy = 0$$

7.5.1.-EJERCICIOS:

I) PROBLEMAS DE VALOR INICIAL Y DE FRONTERA, **SOLUCIONES**

1) En los siguientes ejercicios. Encuentre el valor de c_1 y c_2, de tal modo que:

$y(x) = c_1 sen\ x + c_2 cos\ x$, satisfaga las condiciones dadas, indique si son condiciones iníciales o de frontera.

a) Iniciales

$y(0) = 2, \ y'(0) = 1$

$c_1 = 1$ $c_2, = 2$

b) Iniciales

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

$c_1 = 1$ $c_2, = -2$

c) Frontera

$y'(0) = 1, \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$c_1 = 1$ $c_2, = -1$

d) Frontera

$y(0) = 1, \ y\ (\pi) = 2$

Ningún valor

e) Frontera

$y\ \left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \ y\ \left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$

$c_1 = \frac{-2}{\sqrt{3}-1}$ $c_2, = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$

f) Frontera

$y(0) = 0, \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Ningún valor

g) Frontera

$y(0) = 1, \ y'(\pi) = 1$

$c_1 = -1$ $c_2, = 1$

h) Iniciales

$y(0) = 0, \ y'(0) = 0$

$c_1 = 0, \ c_2, = 0$

i) Frontera

$y(0) = 1, \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$c_1 = 1, \ c_2, = 1$

2) En los siguientes ejercicios. Escriba las ecuaciones diferenciales dadas en la **forma estándar**. (SOLUCIONES)

a)

$xy' + y^2 = 0$

y' = $-y^2/x$

b)

$(y')^3 + y^2 + y = sen\ x$

y' = (sen x $-y^2$ - y) $^{1/3}$

c)

$e^{(y'+y)} = x$

y' = -y + ln x

d)

$(x-y)dx + y^2 dy = 0$

y' = (y-x)/y^2

e)

$dx + \frac{x+y}{x-y}\, dy = 0$

y' = (y-x)/(x+y)

f)

$dy + dx = 0$

y' = -1

g)

$e^x y' - x = y'$

y' = x/(e^x - 1)

h)

$xy' + \cos(y' + y) = 1$

No se puede reducir a la forma estándar

i)

$(y')^2 - 5y' + 6 = (x+y)(y'-2)$

y' = 2, y además; y' = x + y + 3

j)

$\frac{x+y}{x-y}\, dx - dy = 0$

y' = (x + y) / (x - y)

3) En los siguientes ejercicios. Encuentre los valores de c_1 y c_2, de modo que las funciones dadas satisfagan las condiciones iniciales prescritas.

a)

$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + 4\,sen\,x \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

Al realizar la derivada tenemos:

$$y'(x) = c_1e^x - c_2e^{-x} + 4\cos x$$

i) con $y(0) = 1$

$$y(0) = c_1e^0 + c_2e^{-0} + 4\,sen\,0$$

$$y(0) = c_1e^0 + c_2e^{-0}$$

$$y(0) = c_1 + c_2$$

$$1 = c_1 + c_2$$

ii) con $y'(0) = -1$

$$y'(0) = c_1e^0 - c_2e^{-0} + 4\cos 0$$

$$y'^{(0)} = c_1 - c_2 + 4$$

$$-1 = c_1 - c_2 + 4$$

$$-5 = c_1 - c_2$$

Resolviendo el sistema, tenemos que:

$$1 = c_1 + c_2$$

$$-5 = c_1 - c_2$$

$$-4 = 2c_1$$

Por lo que:

$$-2 = c_1$$

Al sustituir este valor en la primera ecuación, tenemos que:

$$1 = c_1 + c_2$$

$$1 = -2 + c_2$$

Con lo que resulta el valor de:

$$3 = c_2$$

Para verificar estos valores los sustituimos en las ecuaciones y comprobamos que cumplen con las condiciones iniciales

b)

$y(x) = c_1 x + c_2 + x^2 - 1$ $\quad$ $y(1) = 1, \quad y'(1) = 2$

Al realizar la derivada tenemos:

$$y'(x) = c_1 + 2x$$

i) con $y(1) = 1$

$$y(1) = c_1 1 + c_2 + 1^2 - 1$$

$$y(1) = c_1 + c_2$$

$$1 = c_1 + c_2$$

i) con $y'(1) = 2$

$$y'(1) = c_1 + 2(1)$$

$$y'(1) = c_1 + 2$$

$$2 = c_1 + 2$$

$$0 = c_1$$

Al sustituir este valor en la primera ecuación tenemos:

$$1 = c_1 + c_2$$

$$1 = 0 + c_2$$

$$1 = c_2$$

Para verificar estos valores los sustituimos en las ecuaciones y comprobamos que cumplen con las condiciones iniciales

c)

$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 3e^{3x}$ $\quad$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

Al realizar la derivada tenemos:

$$y'(x) = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} + 9e^{3x}$$

i) con $y(0) = 0$

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^{2(0)} + 3e^{3(0)}$$

$$y(0) = c_1 + c_2 + 3$$

$$0 = c_1 + c_2 + 3$$

$$-3 = c_1 + c_2$$

ii) con $y'(0) = 0$

$$y'(0) = c_1 e^0 + 2c_2 e^{2(0)} + 9e^{3(0)}$$

$$y'(0) = c_1 + 2c_2 + 9$$

$$0 = c_1 + 2c_2 + 9$$

$$-9 = c_1 + 2c_2$$

Resolviendo el sistema, tenemos que:

$$-3 = c_1 + c_2$$

$$9 = -c_1 - 2c_2$$

$$6 = -c_2$$

Por lo que:

$$-6 = c_2$$

Al sustituir este valor en la primera ecuación tenemos:

$$-3 = c_1 - 6$$

$$3 = c_1$$

Para verificar estos valores los sustituimos en las ecuaciones y comprobamos que cumplen con las condiciones iniciales

d)

$y(x) = c_1 sen\, x + c_2 cos\, x + 1$ $\qquad$ $y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 0$

Al realizar la derivada tenemos:

$$y'(x) = c_1 cos\, x - c_2 sen\, x$$

i) con $y(\pi) = 0$

$$y(\pi) = c_1 sen\, \pi + c_2 cos\, \pi + 1$$

$$y(\pi) = c_1 + 1$$

$$0 = c_1 + 1$$

$$-1 = c_1$$

ii) con $y'(\pi) = 0$

$$y'(\pi) = c_1 cos\, \pi - c_2 sen\, \pi$$

$$y'(\pi) = -c_2$$

$$0 = -c_2$$

$$0 = \ c_2$$

Para verificar estos valores los sustituimos en las ecuaciones y comprobamos que cumplen con las condiciones iniciales

e)

$y(x) = \ c_1 e^x + \ c_2 x \ e^x + x^2 e^x \qquad\qquad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1$

Al realizar la derivada tenemos:

$$y'(1) = \ c_1 e^x + \ c_2 x \ e^x + c_2 \ e^x + x^2 e^x + \ 2x \ e^x$$

i) con $y(1) = 1$

$$y(1) = \ c_1 e^1 + \ c_2 1 \ e^1 + 1^2 e^1$$

$$y(1) = \ c_1 e^1 + \ c_2 1 \ e^1 + 1^2 e^1$$

$$y(1) = \ c_1(2.7183) + \ c_2(2.7183) + 2.7183$$

$$1 = \ c_1(2.7183) + \ c_2(2.7183) + 2.7183$$

$$1 = \ (2.7183)(c_1 + \ c_2 + 1)$$

$$0.3679 = \ c_1 + \ c_2 + 1$$

$$0.3679 - 1 = \ c_1 + \ c_2$$

$$-0.6321 = \ c_1 + \ c_2$$

ii) con $y'(1) = -1$

$$y'(1) = \ c_1 e^1 + \ c_2(1) \ e^1 + c_2 \ e^1 + (1)^2 e^1 + \ 2(1) \ e^1$$

$$y'(1) = \ c_1(2.7183) + \ c_2(2.7183) + c_2(2.7183) + (2.7183) + \ 2(2.7183)$$

$$y'(1) = \ c_1(2.7183) + \ c_2(2.7183) + c_2(2.7183) + (2.7183) + \ 5.4366$$

$$y'(1) = \ c_1(2.7183) + \ c_2(2.7183) + c_2(2.7183) + \ 2(2.7183)$$

$$y'(1) = \ (2.7183)(c_1 + 2c_2 + \ 2)$$

$$1 = \ (2.7183)(c_1 + 2c_2 + \ 2)$$

$$1 = \ (2.7183)(c_1 + 2c_2 + \ 2)$$

$$0.3679 = \ (c_1 + 2c_2 + \ 2)$$

$$0.3679 - 2 = \ c_1 + 2c_2$$

$$-1.6321 = \ c_1 + 2c_2$$

Resolviendo el sistema, tenemos que:

$$-0.6321 = \ c_1 + \ c_2$$

$$1.6321 = \ -c_1 - 2c_2$$

$$1 = -c_2$$

Por lo que:

$$-1 = c_2$$

Al sustituir este valor en la primera ecuación tenemos:

$$-0.6321 = c_1 + -1$$

$$-0.6321 + 1 = c_1$$

$$-0.6321 + 1 = c_1$$

$$0.3679 = c_1$$

Para verificar estos valores los sustituimos en las ecuaciones y comprobamos que cumplen con las condiciones iniciales

7.6.- EJERCICIOS DE REPASO, SOLUCIONES ECUACIONES. (SOLUCIONES)

I) En los siguientes ejercicios. Relacione cada una de las ecuaciones diferenciales con una o más de las soluciones propuestas

a) y = 0, b) y = 2, c) y = 2x, d) $y = 2x^2$

a) a y d

$$xy' = 2y$$

b) c

$$y' = 2$$

c) b

$$y' = 2y - 4$$

d) a y c

$$xy' = y$$

e) b

$$y'' + 9y = 18$$

f) a, b y d

$$xy'' - y' = 0$$

II) ¿Cuáles de las funciones son soluciones de la ecuación diferencial dada?

$$y'' - xy' + y = 0$$

a) $y = x^2$, b) y = x, c) $y = 1 - x^2$, d) $y = 2x^2 - 2$ e) y = 0

Solución: **b** y **e**

III) En los siguientes ejercicios. Demostrar que cada una de las expresiones o ecuaciones es una solución de la correspondiente ecuación diferencial.

a)

$y = 2\,x^2 \qquad\qquad xy' = 2y$

Al derivar, obtenemos:

$y' = 4x$ Al sustituir en la Ecuación Diferencial:

$xy' = 2y \quad = \quad x(4x) = 2(2x^2) \quad = \quad 4x^2 = 4x^2$

Igualdad, por LQQD (*Lo Que Queríamos Demostrar*)

b)

$(1-x)y^2 = x^3 \qquad\qquad 2x^3y' = y(y^2 + 3\,x^2)$

Simplificamos en la función la variable dependiente (y)

$y^2 = \frac{x^3}{(1-x)}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{(1-x)}}\,,\ \text{ó}\ y = \left(\frac{x^3}{(1-x)}\right)^{1/2}$ Al derivar, obtenemos:

1/2/(x^3/(1-x))^(1/2)*(3*x^2/(1-x)+x^3/(1-x)^2)

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{(1-x)}{x^3}\right)^{1/2}\left(\frac{3x^2}{(1-x)} + \frac{x^3}{(1-x)^2}\right)$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{(1-x)}{x^3}\right)^{1/2}\left(\frac{3x^2(1-x) + x^3}{(1-x)^2}\right)$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{(1-x)}{x^3}\right)^{1/2}\left(\frac{3x^2 - 3x^3 + x^3}{(1-x)^2}\right)$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{(1-x)}{x^3}\right)^{1/2}\left(\frac{-2x^3 + 3x^2}{(1-x)^2}\right)$$

Al sustituir en la Ecuación diferencial, tenemos:

$$2x^3y' = y(y^2 + 3\,x^2)$$

$$2x^3\left(\frac{1}{2}\left(\frac{(1-x)}{x^3}\right)^{1/2}\left(\frac{-2x^3 + 3x^2}{(1-x)^2}\right)\right) = \left(\frac{x^3}{(1-x)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^3}{(1-x)} + 3\,x^2\right)$$

$$x^3\left(\left(\frac{(1-x)}{x^3}\right)^{1/2}\left(\frac{-2x^3\ +\ 3x^2}{(1-x)^2}\right)\right)=\left(\frac{x^3}{(1-x)}\right)^{1/2}\left(\frac{x^3}{(1-x)}+\ 3\,x^2\right)$$

$$x^3\left(\left(\frac{(1-x)}{x^3}\right)^{1/2}\left(\frac{-2x^3\ +\ 3x^2}{(1-x)^2}\right)\right)=\left(\frac{x^3}{(1-x)}\right)^{1/2}\left(\frac{x^3+\ 3\,x^2-\ 3\,x^3}{(1-x)}\right)$$

$$x^3\left(\left(\frac{(1-x)}{x^3}\right)^{1/2}\left(\frac{-2x^3\ +\ 3x^2}{(1-x)^2}\right)\right)=\left(\frac{x^3}{(1-x)}\right)^{1/2}\left(\frac{3\,x^2-\ 2\,x^3}{(1-x)}\right)$$

$$\sqrt{\left(\frac{x}{(1-x)}\right)^3}\ (-2x^3\ +\ 3x^2)=\sqrt{\left(\frac{x}{(1-x)}\right)^3}\ (-2x^3\ +\ 3x^2)$$

Igualdad, por LQQD (*Lo Que Queríamos Demostrar*)

c)

$y=\ e^x\,(1+x)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $y''+\ 2y'+\ y=0$

Al obtener la primera y segunda derivada de la función tenemos:

$$y'=\ e^x\ +e^x(x+1)$$

$$y''=\ 2e^x\ +e^x(x+1)$$

Al sustituir en la Ecuación diferencial, tenemos:

$$y''+\ 2y'+\ y=0$$

$$2e^x\ +e^x(x+1)+\ 2(e^x\ +e^x(x+1)\,)+\ e^x(x+1)=0$$

$$2e^x\ +xe^x+e^x+\ 2(e^x\ +xe^x+e^x\,)+\ xe^x+e^x=0$$

$$2e^x\ +xe^x+e^x+\ 2e^x\ +2xe^x+2e^x\ +\ xe^x+e^x=0$$

Lo que se puede ver que **NO DA UNA IGUALDAD**, por lo que la función, **NO ES UNA SOLUCIÓN** de la Ecuación Diferencial.

7.7.- CURVA SOLUCIÓN

La gráfica de una solución φ, de una **EDO** se llama ***curva solución***. Puesto que φ es una función derivable, es continua en su intervalo de definición I. Es decir, el dominio de la función φ no necesita ser igual al intervalo de definición I (o dominio) de la solución φ.

Ejemplo:

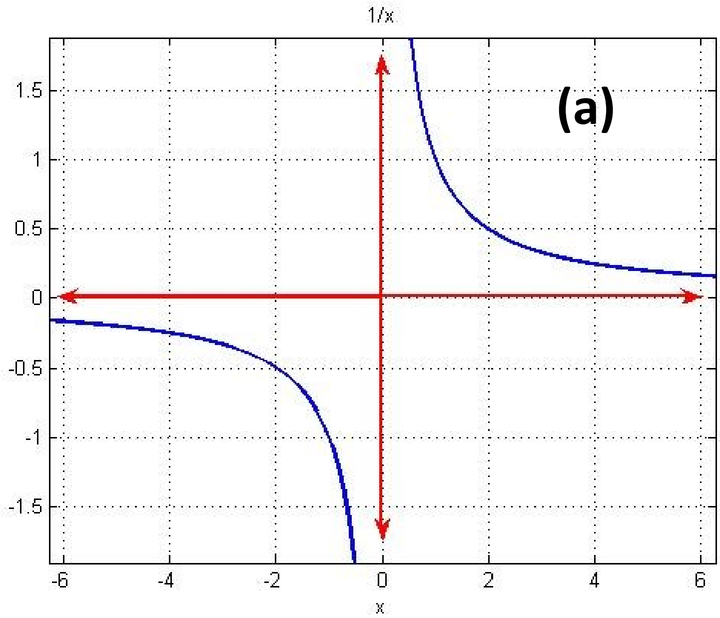
El dominio de $\boldsymbol{y = 1/x}$, considerado simplemente como una función, es el conjunto de todos los números reales x, exceptuando el 0. Cuando se construye la gráfica de $\boldsymbol{y = 1/x}$, se trazan todos los puntos en el plano ***xy*** correspondientes a un muestreo de números tomados del dominio. Así la función $\boldsymbol{y = 1/x}$ es discontinua en $\boldsymbol{x = 0}$. Además la función y = 1/x no es derivable en $\boldsymbol{x = 0}$, ya que el eje y (cuya ecuación en x = 0), es una asíntota vertical de la gráfica.

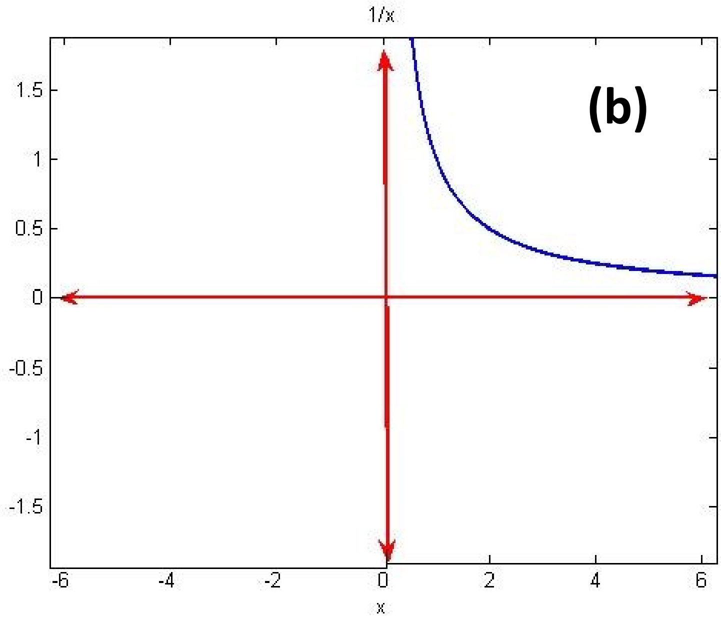
También, $\boldsymbol{y = 1/x}$ es una solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden $\boldsymbol{xy' + y = 0}$, y esto significa que es una solución en el intervalo I, en el que es derivable y satisface a dicha ecuación. O sea, que es una solución de la ED en cualquier intervalo que no contenga a **0**, tal como **(-3, -1), (1/2, 10), (-∞, 0) o (0, ∞)**.

Debido a que las curvas solución definidas por y = 1/x, para **-3 < x < -1 y ½ < x < 10**, son tramos o partes, de las curvas solución de y = 1/x, para **- ∞ < x < 0 y 0 < x < ∞**

Respectivamente, lo que hace que hay que tomar el intervalo I, tan grande como sea posible. Así se toma ***I,*** ya sea como **(- ∞ , 0) ó (0, ∞)**. Entonces tenemos las curva solución para todo ***I***, en la parte (a) de la figura, y para la solución en el intervalo ***I* (0, ∞)** , en la parte (b) que se muestra en la figura dela página siguiente.

Y = 1/x, donde x ≠ 0





7.8.- SOLUCIÓN EXPLÍCITA E IMPLÍCITA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

A) SOLUCIÓN EXPLÍCITA

Es una solución en la cual la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente y de las constantes. Considerando una solución explícita como una fórmula explícita y = φ(x), que se pueda manejar, evaluar y derivar.

Ejemplo:

Las siguientes funciones:

$$y = \frac{1}{16}x^4 \quad , \quad y = xe^x, \quad y = \frac{1}{x}$$

Son soluciones explícitas de las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dy}{dx} = x\,y^{1/2}, \qquad y'' - 2y' + y = 0 \quad , \quad xy' + y = 0$$

Además de la solución trivial, y = 0, que es solución de cada una de las tres.

Sin embargo, los métodos de solución, no siempre conducen a una solución explícita y = φ(x), con frecuencia se obtiene una relación o expresión G (x,y) = 0, que define una solución φ.

B) SOLUCIÓN IMPLÍCITA

Se dice que una relación ***G (x,y) = 0***, es una solución implícita de una ecuación diferencial ordinaria:

$$f\left(X, Y, Y', \ldots, Y^{(n)}\right) = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

En un intervalo ***I***, suponiendo que ***existe al menos una función*** ***φ***, *que satisface la relación* ***G (x, φ (x)) = 0*** *, así como la ecuación diferencial en* ***I***

Ejemplo:

La función $x^2 + y^2 = 25$ (a) Es una solución implícita de la ED siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{(b)}$$

En el intervalo abierto (- 5, 5), al derivar implícitamente ***φ***, resulta:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{(c)}$$

Resolviendo esta ecuación (c), para ***dy/dx***, se obtiene (b)

Además, resolviendo la ecuación (a), para ***y*** en términos de ***x***, se obtiene

$$x^2 + y^2 = 25 \quad (a) \qquad y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

Que resulta en dos funciones:

$$y = \varphi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

$$y = \varphi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$$

Que satisfacen la relación determinada por: $\mathbf{x^2 + \varphi_1^2 = 25}$, y $\mathbf{x^2 + \varphi_2^2 = 25}$

Y que además, son soluciones explícitas definidas en el intervalo ***I*** (-5, 5)

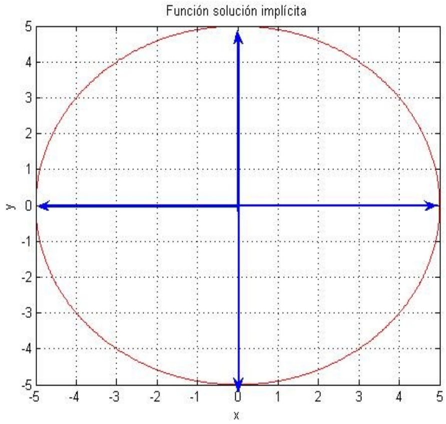
7.8.1.- SOLUCIÓN MEDIANTE UN PROGRAMA (Script) DE MATLAB

La representación gráfica de esto se puede obtener con un script de MATLAB y es la siguiente:

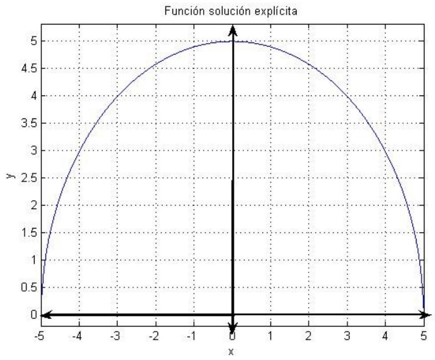
```
% Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales
% Ecuaciones Diferenciales – Ingeniería Civil – Cuarto Semestre – 2016
% Soluciones Implícitas y Explícitas de Ecuaciones Diferenciales
% Docente: Dr. Ligdamis A. Gutiérrez E.

% Limpieza de variables y escritorio
  clear all:
  close all;
  clc;

% declaracion de variables
   syms x y;

% Construcción de la función general implícita
  y1 = x^2 + y^2 - 25

% Funciones alternas, soluciones explícitas
  y2 = sqrt(25-x^2);
  y3 = -sqrt(25-x^2);

% Creación de las Graficas
  figure(1);   % Función General, Implícita
  g = ezplot(y1, [-5,5]); set(g,'Color','r');...
  title('Función solución implícita');...
  ylabel('y');grid on;

  figure(2);   % Función 1, Explicita
  g1 = ezplot(y2, [-5,5]); set(g1,'Color','b');...
  title('Función solución explícita');...
  ylabel('y');grid on;

  figure(3);   % Función 2, Explicita
  g2 = ezplot(y3, [-5,5]); set(g2,'Color','b');...
  title('Función solución explícita');...
  ylabel('y');grid on;
```

Las gráficas generadas por el programa anterior son las siguientes:

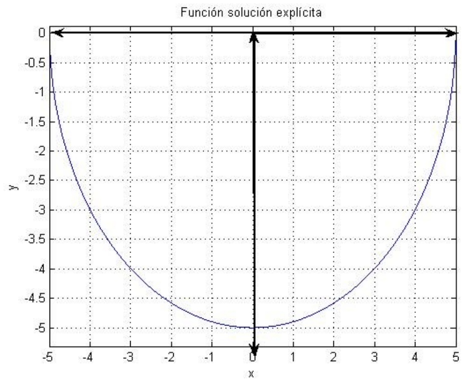
a) $x^2 + y^2 = 25$ **I = (-5 , 5)**



b) $y = \varphi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$



c) $y = \varphi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$



7.9.- FAMILIAS DE SOLUCIONES

El estudio de las ecuaciones diferenciales, es bastante similar al del cálculo integral. Algunos libros o ediciones, mencionan una solución φ, como una integral de la ecuación y su gráfica se denomina "**curva integral**". Cuando se obtiene una anti-derivada o una integral definida en cálculo, se utiliza una sola constante "*c*", de integración. Del mismo modo, cuando se resuelve una ecuación diferencial de primer orden $F(x,y,y') = 0$, normalmente se obtiene una solución que contiene una sola constante arbitraria o parámetro "*c*".

7.9.1.- FAMILIA DE SOLUCIONES UNIPARAMÉTRICAS

Es una solución que contiene una constante arbitraria, y que representa un conjunto $G(x,y,c) = 0$, de soluciones.

Cuando se resuelve una ecuación diferencial de orden **n**, $F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0$, se está buscando una familia de soluciones n-paramétricas $G(x,y,c_1,c_2,\ldots,c_n) = 0$, de soluciones.

Lo que significa, que una sola ecuación diferencial, puede tener un número infinito de soluciones correspondiendo a un número ilimitado de elecciones de los parámetros.

Así, una solución de una ecuación diferencial, que está libre de la elección de parámetros se llama "**Solución Particular**".

Ejemplo 1: La familia uniparamétrica $y = c\,x - x\cos x$, es una solución explícita de la ecuación lineal de primer orden $xy' - y = x^2 \operatorname{sen} x$, en el intervalo $(-\infty, \infty)$

Algunas veces una ecuación diferencial tiene una solución que no es miembro de una familia de soluciones de la ecuación, esto es, una solución que no se puede obtener usando un parámetro específico de la familia de soluciones. Esa solución extra se llama **solución singular.**

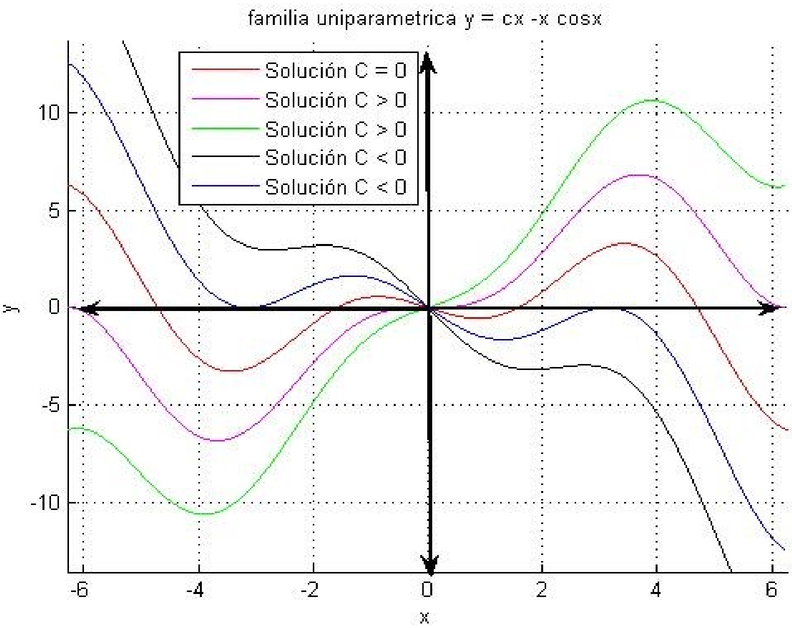
En todos los ejemplos vistos, hemos usado ***x*** *y* ***y*** *para denotar las variables* independiente y dependiente, respectivamente. Pero hay que acostumbrarse a ver y trabajar con otros símbolos que denotan estas variables. Por ejemplo, podríamos denotar la variable independiente por ***t*** *y la variable dependiente por* ***x****:*

7.9.2.- SOLUCIÓN MEDIANTE UN PROGRAMA DE MATLAB

Ahora veamos la representación gráfica del ejemplo 1, con un programa de MATLAB

```
% Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales
% Ecuaciones Diferenciales - 2016
% Uso de Familias en Ecuaciones diferenciales
% Dr. Ligdamis A. Gutiérrez E.

% Limpieza de variables y escritorio
clear all:
close all;
clc;

% declaracion de variables
syms x;

% Construcción de las funciones
y = -x*cos(x);
y1 = x-x*cos(x);
y1a =2*x-x*cos(x);
y2 = -x-x*cos(x);
y2a = -2*x-x*cos(x);

% Graficas de las soluciones particulares de la familia

 hold on;g = ezplot(y);set(g,'Color','r');...
     g2=ezplot(y1);set(g2,'Color','m');...
     g2b=ezplot(y1a);set(g2b,'Color','g');...
     g2c=ezplot(y2a);set(g2c,'Color','k'); g3=ezplot(y2);...
     title('familia uniparametrica y = cx -x cosx');...
     legend('Solución C = 0','Solución C > 0','Solución C > 0','Solución C < 0','Solución C < 0');...
     ylabel('y');grid on;
```

La gráfica resultante es la siguiente:



La solución *y = - x cos x, la* *curva roja* *en la figura, es una* solución particular correspondiente a *c = 0*.

7.9.3.- EJERCICIOS DE FAMILIAS EN ECUACIONES DIFERENCIALES (Determinar las soluciones).

I) En los siguientes ejercicios. Compruebe que la solución indicada $y = \varphi(x)$, es una solución explícita de la ecuación diferencial de primer orden dada. Considere a φ, simplemente como una función, dando su dominio, o al menos un intervalo I de definición. Realice un script en Matlab y trace la gráfica.

a)

$(y-x)y' = y - x + 8 \qquad\qquad y = x + 4\sqrt{x+2}$

b)

$y' = 25 + y^2 \qquad\qquad y = 5\tan 5x$

c)

$y' = 2\,x\,y^2 \qquad\qquad y = \frac{1}{(4-x^2)}$

d)

$2y' = y^3 \cos x \qquad\qquad y = (1 - sen\ x)^{-1/2}$

e)

$2y' + y = 0 \qquad\qquad y = e^{-x/2}$

II) En los siguientes ejercicios. Compruebe que la expresión indicada es una solución implícita de la ecuación diferencial dada. Encuentre al menos una solución explícita:

$y = \varphi(x)$, en cada caso. Trace la gráfica de dicha solución explícita en Matlab, y de un intervalo I de definición de cada solución φ.

a)

$\frac{dX}{dt} = (x-1)(1-2X) \qquad\qquad ln\left(\frac{2X-1}{X-1}\right) = t$

b)

$$2\,x\,y\,dx + (x^2 - \ y)\,dy = 0 \qquad\qquad -2\,x^2y + \ y^2 = 1$$

III) En los siguientes ejercicios, compruebe que la familia de soluciones indicada, es una solución de la ecuación diferencial dada. Suponga un intervalo *I* de definición adecuada para cada solución. Trace la gráfica en Matlab

c)

$$\frac{dP}{dt} = \ P(1 - P) \qquad\qquad P = \ \frac{c_1 e^t}{1 + \ c_1 e^t}$$

d)

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \ 4\,\frac{dy}{dx} + \ 4y = 0 \qquad\qquad y = \ c_1 e^{2x} + \ c_2 x e^{2x}$$

7.10.- EJERCICIOS DE REPASO (Generales)

I) En los siguientes ejercicios. Compruebe que cada una de las funciones dadas $y = \varphi(x)$, representa o no, una solución para la ecuación diferencial con problema de valor inicial $y\,(0) = 0,\ y'(0) = 1$: Recuerde debe satisfacer la ecuación diferencial y ambas condiciones iniciales para que sea solución.

a) $y_1 = sen\ 2x$

b) $y_2(x) = x$

c) $y_3(x) = \frac{1}{2} sen\ 2x$

d) $y'' + 4y = 0$

II) Escriba la ecuación diferencial en su forma estándar

a) $(xy + 3)dx + (2x - y^2 + 1)dy = 0$

b) $(3x^2 + 4)dx + (x - 5)dy = senx$

c) $5y' = 6x - 4y$

d) $7y = 4y' - 6x^2 + 10$

III) Escriba la ecuación diferencial en su forma diferenciada.

a) $\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 y$

b) $y' = \frac{dy}{dx}$

c) $(6x^2 + 3)y' + 15y = 22$

IV) En los siguientes ejercicios (a-e). Determine si la ecuación es una EDO, EDP, el orden, función desconocida y variable independiente de cada una de las Ecuaciones diferenciales

a) $5\left[\frac{d^4b}{dp^4}\right]^5 + 7\left[\frac{db}{dp}\right]^{10} + b^7 - b^5 = p$

b) $t\ddot{y} + t^2\acute{y} - (sen\,t)\sqrt{y} = t^2 - t + 1$

c) $v + M\,\frac{dv}{dM} = v^2$

d) $\frac{d^2I}{dt^2} + 4\,\frac{dI}{dt} + 5I = 100\,sen\,20t$

e) $\frac{\vartheta^2 V}{\vartheta\,x^2} + \frac{\vartheta^2 V}{\vartheta\,y^2} + \frac{\vartheta^2 V}{\vartheta\,z^2} = 0$

V) Determine si las ecuaciones diferenciales siguientes (a –d) son lineales o no lineales y en este caso, cuál es el término no lineal

a) $y' + x\,y^5 = 0$

b) $y' = (sen\,x\,)y + e^x$

c) $y' + \frac{x}{y} = 0$

d) $y' = x\,sen\,y + e^x$

• Bibliografía

Bibliografía Básica:

Desde han sido tomados la mayoría de los ejemplos y conceptos contenidos en este manual.

- Nagle, R. kent y otros, Ecuaciones diferenciales con valores en la Frontera, Cuarta Edición 2005, PEARSON, México. (3473)
- Bronson, Richard, Ecuaciones Diferenciales (Shaum), Tercera Edición, 2008, McGraw Hill, México. (4456)
- Zill, Denis G., Ecuaciones Diferenciales, Primera Edición, 2007 Thomson, México. (3879)

Bibliografía Complementaria:

- Ayres, Frank, Ecuaciones diferenciales, Primera Edición 2007, McGraw Hill, México. (4217).

NOTA IMPORTANTE: Los códigos de los scripts en MATLAB, utilizados y que se presentan en este manual, han sido generados mediante: MATLAB 7a, versión para Estudiantes. Consultar el manual de usuario para Manual creado por el autor para esta materia. Los ejemplos y ejercicios, así como algunas de las figuras presentadas en este manual, han sido tomados y modificados por el autor, de la documentación y bibliografía anteriormente descrita.

- **AGRADECIMIENTOS:**

Agradecemos la gestión de la Dirección de la Facultad de Ingeniería Civil y Mecánica de la Universidad Técnica de Ambato (UTA) – Ambato, Ecuador, por permitir la realización de este documento creado por el autor, como parte integral de la materia de Ecuaciones Diferenciales dentro del plan analítico de la Carrera de Ingeniería Civil, para alumnos de cuarto semestre, durante los ciclos lectivos de 2015 y 2016.
El Autor, Docente: Ligdamis A. Gutiérrez E. PhD.