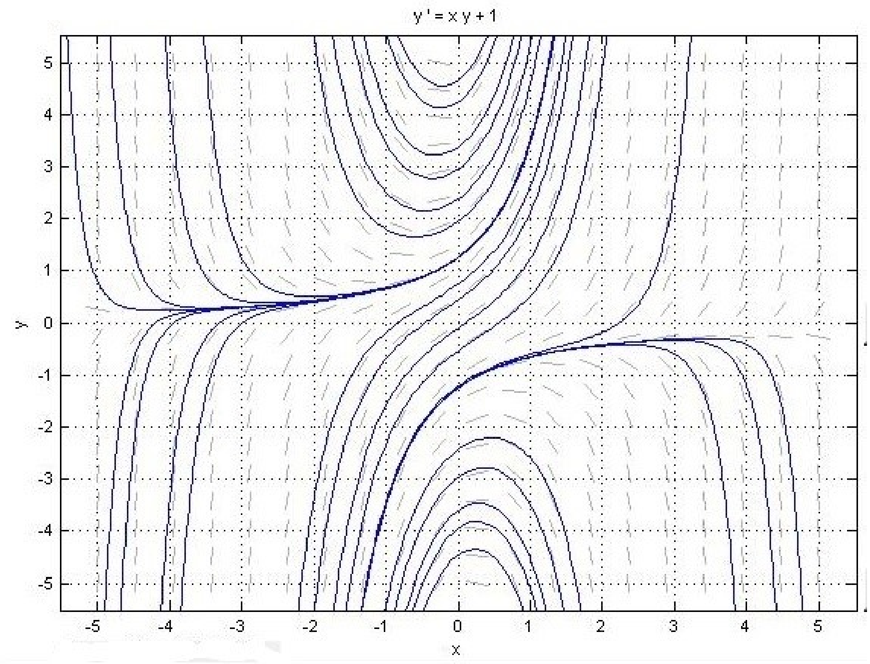
ECUACIONES DIFERENCIALES



MANUAL DE USUARIO:

Segunda parte (Unidades II y III)

Manual práctico para estudios de cuarto semestre de la carrera de Ingeniería Civil.

ECUACIONES DIFERENCIALES CON MATLAB

Autor, Docente:
Ligdamis A. Gutiérrez E. PhD.

Versión 1.0

2015-2016

A. **Generalidades de la Materia (Objetivo General, Temática y objetivo por Unidad)**

OBJETIVO GENERAL:

Generar conocimientos dirigidos a la práctica, basándose en el pensamiento crítico-positivo y de razonamiento lógico, ayudándose con el uso de un software específico para el análisis matemático como Matlab, necesarios para la comprensión del presente curso de Ecuaciones Diferenciales.

PRIMERA PARTE - Unidad I: Objetivo y Temática.

(Repaso Límites, Derivadas e Integrales, Introducción al lenguaje Matlab y su uso con Ecuaciones Diferenciales):

Analizar apropiadamente condiciones y definiciones previas para integrarlas en el uso de las ecuaciones diferenciales, conocer y manejar el programa matemático Matlab y su uso con derivadas, integrales y ecuaciones diferenciales, así como puede desarrollar programas en Matlab incluyendo gráficos 2D y 3D, que aplica en las siguientes unidades.

SEGUNDA PARTE - Unidad II: Objetivo y Temática.

(Modelos Matemáticos aplicados a Ecuaciones Diferenciales, Conceptos básicos de Ecuaciones Diferenciales, Identificación y Solución de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden):

Conocer las diferentes aplicaciones de los modelos matemáticos aplicados como ecuaciones y el uso de las ecuaciones diferenciales aplicadas a los modelos matemáticos, así como conocer y desarrollar tópicos adicionales en la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado: lineales, Exactas, Homogéneas, Separables y de Bernoulli.

SEGUNDA PARTE - Unidad III Objetivo y Temática.

(Métodos Gráficos y Numéricos de solución de Ecuaciones Diferenciales, Series de Taylor y Transformadas de Laplace y Fourier para Ecuaciones Diferenciales de orden superior):

Conocer y aplicar métodos Gráficos y Numéricos para desarrollar soluciones a ecuaciones lineales de orden superior, homogéneas con coeficientes constantes, mediante la aplicación de métodos gráficos como Isóclinas, y métodos numéricos como los de Euler y Runge-Kutta de 1er. y 4to orden, así como la aplicación a las series de Taylor y las transformadas como las de Laplace y de Fourier.

B. Tablas de Identidades Trigonométricas

En el desarrollo de los ejercicios y problemas de esta segunda parte del curso que comprende las unidades 2 y 3, se necesita realizar la conversión entre algunas identidades trigonométricas. Sin embargo, hay que tomar en cuenta el signo, para lo cual, se necesita obtener el signo correcto y esto supondrá saber los valores para los cuales la función trigonométrica en cuestión es negativa o positiva. Aquí disponemos de las siguientes tablas de ayuda.

En términos de	sen	cos	tan	cot	sec	csc
$\operatorname{sen}\theta$	$\operatorname{sen}\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\csc\theta}$
$\cos\theta$	$\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$	$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\csc^2\theta-1}}{\csc\theta}$
$\tan\theta$	$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}{\operatorname{sen}\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\csc^2\theta-1}$
$\sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\frac{\csc\theta}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\csc\theta$	$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\csc\theta$

Identidades Trigonométricas Fundamentales

1. $\csc(x)=\frac{1}{\sin(x)}$	2. $\sec(x)=\frac{1}{\cos(x)}$
3. $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	4. $\cot(x)=\frac{\cos(x)}{\tan(x)}$
5. $1+\tan^2(x)=\sec^2(x)$	6. $1+\cot^2(x)=\csc^2(x)$
7. $\sin(-x)=-\sin(x)$	8. $\cos(-x)=\cos(x)$
9. $\tan(-x)=-\tan(x)$	10. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$
11. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$	12. $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot(x)$

Fórmulas de Suma y Resta de Ángulos

1. $\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$	2. $\sin(x-y)=\sin(x)\cos(y)-\cos(x)\sin(y)$
3. $\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$	4. $\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)$
5. $\tan(x+y)=\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$	6. $\tan(x-y)=\frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$

Identidades de Productos

1. $\sin^2(x)=\frac{1}{2}(1-\cos(2x))$	2. $\cos^2(x)=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))$
3. $\sin(x)\cos(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)$	4. $\sin(x)\sin(y)=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$
5. $\sin(x)\cos(y)=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))$	6. $\cos(x)\cos(y)=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$

Fórmulas del Doble de un Ángulo

1.	$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$	2.	$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$
3.	$\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$	4.	$\tan(2x)=\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$

ÍNDICE

SEGUNDA PARTE: **UNIDAD II**

1.- ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

1.1- Ecuaciones lineales

Consideramos una ecuación diferencial de primer orden en la forma estándar: $y' = f(x,y)$, donde la derivada $\boldsymbol{y'}$, solo aparece en el lado derecho. Si *f(x,y)* se puede escribir como: $f(x,y) = -p(x)y + q(x)$, Es decir, como una función de $\boldsymbol{x}$, multiplicada por $\boldsymbol{y}$, más otra función de $\boldsymbol{x}$, la ecuación diferencial **es lineal**. En general, las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden siempre se pueden expresar como:

$$\boldsymbol{y' + p(x)y = q(x)} \qquad \textbf{(1)}$$

En la primera parte del presente manual práctico de usuario, cuando se trató la clasificación por linealidad, se vieron dos casos especiales importantes de la ecuación **general lineal**, son las **ED** lineales de primer orden (*n = 1) y de segundo orden (n = 2), respectivamente las ecuaciones (2) y (3):*

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad \textbf{(2)}$$

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad \textbf{(3)}$$

Vamos a tratar el caso de cuando n = 1, por lo tanto se dice que la ecuación (2)

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Es lineal en la variable dependiente "*y*", y es "**homogénea**", cuando g(x) = 0, en caso contrario se dice que "**no es homogénea**". Ahora, al dividir ambos lados de la anterior ecuación por el primer coeficiente $a_1(x)$, se obtiene una forma más útil de esta ecuación, que es la "***forma estándar***", de una ecuación lineal que se representa en la forma siguiente:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)} \qquad \textbf{(4)}$$

En donde se busca una solución de esta ecuación (4), en un intervalo "*I*", en el cual las dos funciones "*P*", y "*f*", sean continuas.

En este análisis vamos a presentar "**una propiedad**" y "**un procedimiento**", para finalizar en la fórmula que representa la forma de cada solución de la ecuación (4). Sin embargo, más importante que la fórmula son la propiedad y el procedimiento, debido a que ambos conceptos también se aplican a las ecuaciones lineales de orden superior.

1.1.1.- PROPIEDAD

La ecuación diferencial (4), tiene la propiedad de que su solución es la suma de las dos soluciones $y = y_c + y_p$, donde y_c es una solución de la ecuación homogénea asociada

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

y donde y_p es una **solución particular** de la ecuación no homogénea de (4). Para esto, hay que observar que:

$$\frac{dy}{dx}\left[y_c + y_p\right] + P(x)\left[y_c + y_p\right] = \underbrace{\left[\frac{dy_c}{dx} + P(x)y_c\right]}_{0} + \underbrace{\left[\frac{dy_p}{dx} + P(x)y_p\right]}_{f(x)} = f(x)$$

Ahora la ecuación (5), también se puede decir que es separable. Por lo que se puede determinar $\boldsymbol{y_c}$ al escribir dicha ecuación (5) en la siguiente forma:

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0$$

En donde integramos, y despejando "$\boldsymbol{y}$", se obtiene $y_c = ce^{-\int P(x)dx}$, En este sentido por facilidad, se sustituye el término $e^{-\int P(x)dx}$ **,** por $\boldsymbol{y_1}$ por lo que se puede escribir lo siguiente:

$$y_c = cy_1(x)$$

Seguidamente, se utiliza el hecho de que $\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1 = 0$ **,** Para determinar y_p

1.1.2.- PROCEDIMIENTO

Ahora se puede definir una solución particular de la ecuación (4), estableciendo un procedimiento denominado "**variación de parámetros**". En donde, la idea básica es determinar una función, "u", tal que:

$$y_p = u(x)y_1(x) = u(x)e^{-\int P(x)dx}$$

Sea una solución de la ecuación diferencial (4). Dicho de otro modo, la suposición para y_p es la misma que $y_c = cy_1(x)$, excepto que "$\boldsymbol{c}$" se ha sustituido por "el parámetro variable" "u". Ahora bien, sustituyendo $y_p = uy_1$ en la ecuación (4) se obtiene lo siguiente:

$$\underbrace{u\frac{dy_1}{dx}+y_1\frac{du}{dx}}_{\text{Regla del Producto}}+P(x)uy_1=f(x)\quad ,\text{ó}: u\underbrace{\left[\frac{dy_1}{dx}+P(x)y_1\right]}_{\text{cero}}+y_1\frac{du}{dx}=f(x)$$

Por tanto, $y_1\frac{du}{dx}=f(x)$, Entonces, separando las variables e integrando se obtiene lo siguiente:

$$du=\frac{f(x)}{y_1(x)}d(x),\quad y\ además\quad u=\int\frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx$$

Ya que $y_1(x)=e^{-\int P(x)dx}$, Podemos observar que: $\frac{1}{y_1(x)}=\boldsymbol{e^{\int P(x)dx}}$

Por lo tanto:

$$y_p=uy_1=\left(\int\frac{f(x)}{y_1(x)}\right)e^{-\int P(x)dx}=e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx,$$

Y además:

$$y=\underbrace{ce^{-\int P(x)dx}}_{y_c}+\underbrace{e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx}_{y_p},\qquad \textbf{(6)}$$

Por lo tanto, si la ecuación (4) tiene una solución, esta debe de ser de la forma de la ecuación anterior (6). Del mismo modo, esto es un ejercicio de derivación directa, el comprobar que la ecuación (6) es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación (4).

Aquí, no hay que memorizar la fórmula que indica la ecuación (6). Sin embargo, si hay que recordar el término especial:

$$\boldsymbol{e^{\int P(x)dx}}\qquad \textbf{(7)}$$

Debido a que se utiliza para resolver la ecuación (4) de una manera equivalente, pero mucho más fácil, de la siguiente forma: Si la ecuación (4) se multiplica por (7), tenemos:

$$e^{\int P(x)dx}y=c+\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx\qquad \textbf{(8)}$$

Ahora al derivar esta ecuación (8) tenemos:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}\ y\right] = e^{\int P(x)dx}\ f(x)dx \qquad \textbf{(9)}$$

Donde se obtiene:

$$e^{\int P(x)dx}\ \frac{dy}{dx} + P(x)e^{\int P(x)dx} y = \ e^{\int P(x)dx}\ f(x) \qquad \textbf{(10)}$$

Dividiendo esta ecuación (10) entre $e^{\int P(x)dx}$, obtenemos la ecuación (4)

1.1.3.- MÉTODO DE SOLUCIÓN

El método que se recomienda para resolver la ecuación (4) consiste en realidad en trabajar con las ecuaciones (8) a (10) en orden inverso. En otras palabras, si la ecuación (4) se multiplica por la ecuación (7), obtenemos la ecuación (10). Se reconoce que el lado izquierdo de la ecuación (10) es la derivada del producto de $e^{\int P(x)dx}$, POR "y". Esto da como resultado la ecuación (9). Entonces, integrando ambos lados de la ecuación (9) se obtiene la solución (8). Como se puede resolver la ecuación (4) por integración, después de multiplicar por $e^{\int P(x)dx}$, esta función se denomina "***factor integrante***" de la ecuación diferencial. Por facilidad, vamos a resumir estos resultados. Hay que repetir que no se debe de memorizar la fórmula (6), sino remitirse a seguir el siguiente procedimiento:

1.1.4.- SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LINEAL DE PRIMER ORDEN

1) Presentar la ecuación lineal de la forma (1), en la forma estándar (4)

2) Identificar de la identidad de la forma estándar ***P(x)*** y después determinar el factor integrante: $\boldsymbol{e^{\int P(x)dx}}$

3) Multiplicar la forma estándar de la ecuación pro el factor integrante. El lado izquierdo de la ecuación resultante es ***automáticamente la derivada del factor integrante*** "y", y resulta en lo siguiente:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}\right] y = \ e^{\int P(x)dx}\ f(x)$$

4) Integrar ambos lados de esta última ecuación

1.1.5.- EJEMPLOS: (1-5)

Ejemplo 1: **Solución de una ED lineal homogénea**

Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

Siguiendo el procedimiento anterior, vemos los pasos:

1) La ecuación ya está en la forma estándar (4)

2) Identificamos $P(x) = -3$, Por lo tanto el factor integrante es: $e^{\int(-3)dx} = \ e^{-3x}$

3) Entonces, multiplicamos la ecuación por dicho factor y tenemos:

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \quad ; \; e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3\, e^{-3x}y = 0$$

Que es lo mismo que: $\frac{d}{dx}\left[\, e^{-3x}y\right] = 0$

4) Integramos ambos lados de esta ecuación y tenemos:

$$\int \frac{d}{dx}\left[\, e^{-3x}y\right] dx = 0$$

$e^{-3x}y = c$, Ahora despejamos "y" y obtenemos la solución siguiente:

$$\boldsymbol{y = c\, e^{3x}}\ , en\ donde -\infty < x < \infty$$

Ejemplo 2: **Solución de una ED lineal NO homogénea**

Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 6$$

Siguiendo el procedimiento anterior, vemos los pasos:

1) La ecuación ya está en la forma estándar (4)

2) Identificamos $P(x) = -3$, Por lo tanto el factor integrante es: $e^{\int(-3)dx} = \; e^{-3x}$

3) Entonces, multiplicamos la ecuación por dicho factor y tenemos:

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 6 \quad ; \; e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3\, e^{-3x}y = 6\, e^{-3x}$$

Que es lo mismo que: $\frac{d}{dx}\left[\, e^{-3x}y\right] = 6\, e^{-3x}$

4) Integramos ambos lados de esta ecuación y tenemos:

$$\int \frac{d}{dx}\left[\, e^{-3x}y\right] dx = \int 6\, e^{-3x}\, dx$$

$e^{-3x}y = -2e^{-3x} + \; c$, Ahora despejamos "y" y obtenemos la solución siguiente:

$$\boldsymbol{y = -2 + \; c\; e^{3x}} \;, en\; donde -\infty < x < \infty$$

Por ahora, no hay que preocuparse de sí una ecuación lineal de primer orden es homogénea o no homogénea; cuando sigue el procedimiento de solución que se acaba de describir, la solución de una ecuación no homogénea necesariamente produce $y = y_c + y_p$. Sin embargo, la diferencia entre resolver una ED homogénea y una no homogénea será más importante cuando se resuelvan ecuaciones lineales de orden superior.

Ejemplo 3: **Solución General de una ED lineal**

Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6\, e^x$$

Siguiendo el procedimiento anterior, vemos los pasos:

1) Tenemos que dividir la ecuación entre "x", para obtener la forma estándar (4) $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$

$$\frac{x\frac{dy}{dx} - 4y}{x} = \frac{x^6\, e^x}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5\, e^x$$

2) Identificamos $P(x) = -\frac{4}{x}$, y $f(x) = x^5\, e^x$, en donde P y f son continuas en $(0, \infty)$.

   Por lo tanto, el factor integrante es: $e^{-4\int\frac{dx}{x}} = e^{-4\ln x} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}$

   Se ha utilizado la identidad básica $b^{log_b N} = N, N > 0$

3) Entonces, multiplicamos la ecuación por dicho factor: x^{-4} y tenemos:

$$x^{-4}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y\right) = x^{-4}(x^5\, e^x)\,; \qquad x^{-4}\,\frac{dy}{dx} - 4x^{-5}y = xe^x$$

Que es lo mismo que: $\frac{d}{dx}[x^{-4}y] = xe^x$

4) Integramos ambos lados de esta ecuación y tenemos:

$$\int \frac{d}{dx}[x^{-4}y]\,dx = \int xe^x\,dx$$

   $x^{-4}y = xe^x - e^x + c$, Ahora despejamos "*y*" y obtenemos la solución siguiente:

$$y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4 \text{ , } en\ el\ intervalo\ (0, \infty)$$

Ejemplo 4: **Solución General de una ED lineal**

Determine la solución general de la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$(x^2 - 9)\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

Siguiendo el procedimiento anterior, vemos los pasos:

1) Tenemos que escribir la forma estándar (4)
$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{(x^2 - 9)}y = 0$$

2) Identificamos $P(x) = \frac{x}{(x^2-9)}$, Por lo tanto, el factor integrante es: $e^{\int xdx/(x^2-9)} =$
$e^{\frac{1}{2}\int 2xdx/(x^2-9)} = e^{\frac{1}{2}ln|x^2-9|} = \sqrt{x^2-9}$

3) Entonces, multiplicamos la ecuación por dicho factor: $\sqrt{x^2-9}$ y tenemos:

$$\sqrt{x^2-9}\left[\frac{dy}{dx} + \frac{x}{(x^2-9)}y\right] = 0$$

Que es lo mismo que: $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^2-9}\,y\right] = 0$

4) Integramos ambos lados de esta ecuación y tenemos:

$$\int \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^2-9}\,y\right]dx = 0$$

$\sqrt{x^2-9}\,y = c$, Ahora despejamos "*y*" y obtenemos la solución siguiente:

$$\boldsymbol{y = \frac{c}{\sqrt{x^2-9}}} \text{ , } en\ el\ intervalo\ x > 3\ o\ x < 3$$

Ejemplo 5: **Problema con valores iniciales**

Determine la solución general de la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$\frac{dy}{dx} + y = x\,, \qquad con\ valor\ inicial\ y(0) = 4$$

Siguiendo el procedimiento anterior, vemos los pasos:

1) La ecuación ya está en su forma estándar

2) Identificamos $P(x) = 1\ y\ f(x) = x$, son continuas en (-∞ , ∞) Por lo tanto, el factor integrante es: $e^{\int dx} = e^{x}$

3) Entonces, multiplicamos la ecuación por dicho factor: e^{x} y tenemos:

$$e^{x}\frac{dy}{dx} + y = e^{x}x$$

Que es lo mismo que: $\frac{d}{dx}\,[\,e^{x}\,y] = x\,e^{x}$

4) Integramos ambos lados de esta ecuación y tenemos:

$$\int \frac{d}{dx}\,[\,e^{x}\,y]\,dx = \int x\,e^{x}\,dx$$

$e^{x}\,y = x\,e^{x} - e^{x} + c$, Ahora despejamos "***y***" y obtenemos la solución siguiente:

$$\boldsymbol{y = x - 1 + c\,e^{-x}}$$

Ahora la condición inicial nos dice que y = 4 cuando x = 0. Al sustituir estos valores en la solución general tenemos:

$$\boldsymbol{y = x - 1 + c\,e^{-x}}$$

$$\boldsymbol{4 = 0 - 1 + c\,e^{-0}\ ; 4 = -1 + C, \qquad donde\ C = 5}$$

Por lo tanto, la solución del problema es:

$$\boldsymbol{y = x - 1 + 5\,e^{-x}, \quad en\ el\ intervalo - \infty < x < \infty}$$

En algunos casos la contribución de $y_c = ce^{-x}$ a los valores de una solución es despreciable al aumentar los valores de *x*. Decimos que $y_c = ce^{-x}$ es un **término transitorio**, ya que y_c -> 0 conforme *x* -> ∞. Mientras que este comportamiento no es característico de todas las soluciones generales de las ecuaciones lineales (*véase el ejemplo 2*), el concepto de un transitorio es frecuentemente importante en problemas aplicados.

1.1.6.- PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES. **SOLUCIONES**

I) En los siguientes ejercicios. Determine la solución general de la ecuación diferencial dada. Indique el intervalo *I* más largo en el que está definida la solución general

a)

$\frac{dy}{dx} = 5y$

$Factor\ de\ Integración\ es:\ e^{-\int(5)dx} = \ e^{-5x},\ Por\ lo\ que\ \frac{d}{dx}[\,e^{-5x}\,y] = 0,$

$Entoces\ al\ Integrar:\ y = \ ce^{5x}\ ,\ \ (-\infty, < x < \infty)$

b)

$\frac{dy}{dx} + y \ = e^{3x}$

$Factor\ de\ Integración\ es:\ e^{\int(5)dx} = \ e^{x},\ Por\ lo\ que\ \frac{d}{dx}[\,e^{x}\,y] =$

$e^{4x}, Entoces\ al\ Integrar:\ y = \frac{1}{4}e^{3x} + c\ e^{-x}\ ,\ \ (-\infty, < x < \infty)$

c)

$y' + 3x^2y = \ x^2$

$Factor\ de\ Integración\ es:\ e^{\int(3\,x^2)dx} = \ e^{x^3},\ Por\ lo\ que\ \frac{d}{dx}\left[\,e^{x^3}\,y\right] =$

$x^2e^{x^3}, Entoces\ al\ Integrar:\ y = \frac{1}{3} + c\ e^{-x^3}\ ,\ \ (-\infty, < x < \infty)$

d)

$x^2y' + xy = \ 1$

$Factor\ de\ Integración\ es:\ e^{\int(1/x)dx} = \ x,\ Por\ lo\ que\ \frac{d}{dx}[x\,y] =$

$\frac{1}{x}, Entoces\ al\ Integrar:\ y = \ x^{-1}lnx + cx^{-1}\ ,\ \ (0\,,\infty)$

e)

$x\frac{dy}{dx} - y = x^2\ sen\ x$

$Factor\ de\ Integración\ es:\ e^{-\int(1/x)dx} = \frac{1}{x},\ Por\ lo\ que\ \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\ y\right] =$

$x\ sen\ x, Entoces\ al\ Integrar:\ y = \ cx - x\cos x\ ,\ \ (0\,,\infty)$

f)

$x\frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$

$Factor\ de\ Integración\ es:\ e^{-\int(4/x)dx} = \ x^4,\ Por\ lo\ que\ \frac{d}{dx}[x^4\ y] = \ x^6 -$

$x^4, Entoces\ al\ Integrar:\ y = \frac{1}{7}\,x^3 - \frac{1}{5}\,x + c\,x^{-4}\ ,\ \ (0\,,\infty)$

1.1.7.- PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON VALORES INICIALES.

SOLUCIONES

I) En los siguientes ejercicios. Resuelva el problema con valores iniciales y obtenga tanto la función general como la función explícita. Indique el intervalo *I* más largo en el que está definida la solución general.

a)

$$\boldsymbol{xy' + y = e^x \quad ; \quad y(1) = 2}$$

$Factor\ de\ Integración\ es\!:\ e^{\int(1/x)dx} = x,\ Por\ lo\ que\ \frac{d}{dx}[x\,y] = e^x, (c = 2 - e)\!: Entoces\ al\ Integrar\!:\ y = \frac{1}{x}\,e^x + \frac{2-e}{x}\,, \quad (-\infty, < x < \infty)$

b)

$$\boldsymbol{y\,\frac{dy}{dx} - x = 2y^2 \quad ; \quad y(1) = 5}$$

$Factor\ de\ Integración\ es\!:\ e^{-\int(1/y)dx} = \frac{1}{y},\ Por\ lo\ que\ \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{y}\,x\right] = 2y, \left(c = -\frac{49}{5}\right)\!: Entoces\ al\ Integrar\!:\ x = 2\,y^2 - \frac{49}{5}\,y\,, \quad (-\infty, < x < \infty)$

c)

$$\boldsymbol{y' + (\tan x)y = \cos^2 x \quad ; \quad y(0) = -1}$$

$Factor\ de\ Integración\ es\!:\ e^{\int(\tan x)dx} = e^{ln|\sec x|} = \sec x\,,\ Por\ lo\ que\ \frac{d}{dx}[\sec x\ y] = \cos x\,, (c = -1)\!: Entoces\ al\ Integrar\!:\ y = sen\,x\cos x - \cos x\,, \quad (-\pi/2\,, -\pi/2)$

d)

$$\boldsymbol{(x+1)\frac{dy}{dx} + y = \ln x \quad ; \quad y(1) = 10}$$

$Factor\ de\ Integración\ es\!:\ e^{\int(1(x-1))dx} = x + 1,\ Por\ lo\ que\ \frac{d}{dx}[(x+1)\,y] = \ln x\,, (c = 21)\!: Entoces\ al\ Integrar\!:\ y = \frac{x}{x+1} ln\,x - \frac{x}{x+1} + \frac{21}{x+1}\ , \quad (-\infty, < x < \infty)$

e)

$$\boldsymbol{sen\,x\frac{dy}{dx} + (cosx)y = 0 \quad ; \quad y\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -2}$$

$Factor\ de\ Integración\ es\!:\ e^{\int(\frac{(\cos x)}{senx})dx} = sen\,x,\ Por\ lo\ que\ \frac{d}{dx}[(senx)\,y] = 0, (c = -2sen(7\pi/6)\!: Entoces\ al\ Integrar\!:\ y = \frac{1}{sen\,x} = \csc x \quad , \quad (-\pi,\ 2\pi)$

1.1.8.- SOLUCIÓN MEDIANTE UN PROGRAMA DE MATLAB

I) Solución mediante un Script con valores iniciales

El script siguiente calcula la solución de una ecuación diferencial, además con problema de valores iniciales.

```
% Programa para calcular Ecuaciones diferenciales Lineales
% Homogéneas y No Homogéneas, con valores iniciales

% II Parcial, Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

% ECUACIONES DIFERENCIALES con MATLAB
% Ingeniería Civil - Cuarto Semestre
% Docente: Dr. Ligdamis A. Gutiérrez E.

% Limpieza de escritorio y variables
clear all;
close all;
clc;

%Introducción de la Función a calcular en su forma Normal
disp('  ');
disp('  ');
disp('       PROGRAMA PARA ALCULAR LA SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL
LINEAL');
disp('                          ECUACIONES DIFERENCIALES ');
disp('                FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL CUARTO SEMESTRE');
disp('                        Docente: Dr. Ligdamis A. Gutiérrez E.');
disp('  ');
disp('             La ED se introduce de esta forma "Dy = 5*exp(3*x)" ');
disp('  ');
A = input('Teclee la Función en su Forma Normal entre apóstrofes, colocando al
inicio Dy = : ');
disp('  ');

C = input('Teclee el valor inicial entre apóstrofes ');
disp('  ');
% Cálculo de la solución de la Ecuación Diferencial con la función "dsolve"
% Cálculo de la solución mediante la función dsolve, se coloca la variable
% independiente al final

%B = dsolve(A,'x');
B = dsolve(A,C,'x');

% Desplegar el resultado utilizando fprintf
fprintf('  La función general que es solución de la ED es: %s ', char(B));
% Se utilizar char para desplegar valores string

disp('  ');

% FIN
```

1.1.9.- SOLUCIÓN MEDIANTE UNA GUI (INTERFAZ GRÁFICA DE USUARIO).

CÓDIGO:

```
function varargout = Clinual1(varargin)  % Nombre de la función: CLINUAL1
% CLINUAL1 M-file for Clinual1.fig

% GUI para calcular Ecuaciones diferenciales Lineales
% Homogéneas y No Homogéneas, con valores iniciales

% Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

% ECUACIONES DIFERENCIALES,
% Para estudios de cuarto semestre de la Carrera de Ingeniería Civil
% Docente: Dr. Ligdamis A. Gutiérrez E.

%      CLINUAL1, by itself, creates a new CLINUAL1 or raises the existing
%      singleton*.
%
%      H = CLINUAL1 returns the handle to a new CLINUAL1 or the handle to
%      the existing singleton*.
%
%      CLINUAL1('CALLBACK',hObject,eventData,handles,...) calls the local
%      function named CALLBACK in CLINUAL1.M with the given input arguments.
%
%      CLINUAL1('Property','Value',...) creates a new CLINUAL1 or raises the
%      existing singleton*.  Starting from the left, property value pairs are
%      applied to the GUI before Clinual1_OpeningFunction gets called.  An
%      unrecognized property name or invalid value makes property application
%      stop.  All inputs are passed to Clinual1_OpeningFcn via varargin.
%
%      *See GUI Options on GUIDE's Tools menu.  Choose "GUI allows only one
%      instance to run (singleton)".
%
% See also: GUIDE, GUIDATA, GUIHANDLES

% Copyright 2002-2003 The MathWorks, Inc.

% Edit the above text to modify the response to help Clinual1

% Last Modified by GUIDE v2.5 15-Jun-2016 16:03:04

% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                   'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
                   'gui_OpeningFcn', @Clinual1_OpeningFcn, ...
                   'gui_OutputFcn',  @Clinual1_OutputFcn, ...
                   'gui_LayoutFcn',  [] , ...
                   'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT

% --- Apertura de la GUI, se colocan los valores con los que la GUI inicia
% --- Executes just before Clinual1 is made visible.
function Clinual1_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
% This function has no output args, see OutputFcn.
% hObject    handle to figure
```

```
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
% varargin   command line arguments to Clinual1 (see VARARGIN)

% Choose default command line output for Clinual1
handles.output = hObject;

% Update handles structure
guidata(hObject, handles);

% UIWAIT makes Clinual1 wait for user response (see UIRESUME)
% uiwait(handles.figure1);

% Valores Iniciales del RadioButton y la caja de edición asociada

clc;
set(handles.radiobutton1,'Value',0);

set(handles.edit3,'Visible','off');

if strcmp(get(hObject,'Visible'),'off')

    logo = 'logo_Uta_Civil';

    axes(handles.axes1);
    handles.imagen=imread('logo_Uta_Civil','jpg');
    imagesc(handles.imagen); axis off;
 end

% --- Outputs from this function are returned to the command line.
function varargout = Clinual1_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
% varargout  cell array for returning output args (see VARARGOUT);
% hObject    handle to figure
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Get default command line output from handles structure
varargout{1} = handles.output;

function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit1 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit1 as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit1 as a
double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit1 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
else
    set(hObject,'BackgroundColor',get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'));
end

% Botón de Cálculo
```

```
% --- Executes on button press in pushbutton1.
function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to pushbutton1 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Ingreso de la Ecuación Diferencial
ED = get(handles.edit1, 'String');

% Verificar el valor radio Button del valor inicial
Veri2 = get(handles.radiobutton1, 'Value');

% En caso de que el radio Button esté activado, es decir su valor a 1
if Veri2 == 1
    % Cálculo de la solución mediante la función dsolve más valor inicial
    ED2 = get(handles.edit3, 'String');  % Se introduce el valor inicial
    B = dsolve(ED,ED2,'x');  % Se calcula con el valor inicial
else
  % caso contrario solo se calcula la solución Homogénea y No Homogénea
  % Cálculo de la solución mediante la función dsolve
  B = dsolve(ED,'x');
end
% Impresión de Resultados
set(handles.text4,'string',char(B));

% Botón de Limpieza
% --- Executes on button press in pushbutton2.
function pushbutton2_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to pushbutton2 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

set(handles.edit1,'string','  ');  % Limpieza del campo de edición de la ED
set(handles.text4,'string','  ');  % Limpieza del campo de resultados
set(handles.edit3,'string','  ');  % Limpieza del campo de edición del valor
inicial
set(handles.edit3,'Visible','off');  % Ocultar el campo de edición del valor inicial
set(handles.radiobutton1,'Value',0); % Colocar el radio Button a cero, en blanco


% --- Executes on button press in radiobutton1.
function radiobutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to radiobutton1 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hint: get(hObject,'Value') returns toggle state of radiobutton1

Veri = get(handles.radiobutton1, 'Value');  % Verifica el valor del radio
Button

if Veri == 1   % En caso de que esté activado = 1
     set(handles.edit3,'Visible','on');  % Se hace visible la caja de edición
del valor inicial
     set(handles.edit3,'string','  ');    % Se limpia para evitar que haya
contenido previo de valores
else                                     % En caso Contrario de queel valor
sea a 0, sin valores iniciales
     set(handles.edit3,'Visible','off'); % Se oculta la caja de edición de la
entrada de valores iniciales
end

function edit3_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
```

```
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit3 as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit3 as a
double

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
else
    set(hObject,'BackgroundColor',get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'));
end


% FIN
```

Una vez programada la GUI (*consultar manual de usuario de Matlab para la materia*), se podrá hacer uso de ella para realizar cálculos y obtener resultados de Ecuaciones Diferenciales de una forma amigable para el usuario. De esta forma, se podrá ingresar todas las ecuaciones diferenciales iniciales (*Homogéneas y No Homogéneas, con valores iniciales*) hasta ahora vistas. El resultado es el siguiente:

Como se observa en las pantallas, la GUI debe de admitir tanto ecuaciones lineales normales y además tener la opción de ingresar valores iniciales, mediante cajas de edición y la selección a través de un radio button.

La GUI siguiente resuelve ecuaciones diferenciales de primer orden lineales, además tiene una opción a través de un objeto radio button de seleccionar valores iniciales.

a) Solución de una Ecuación Diferencial lineal sin valores iniciales

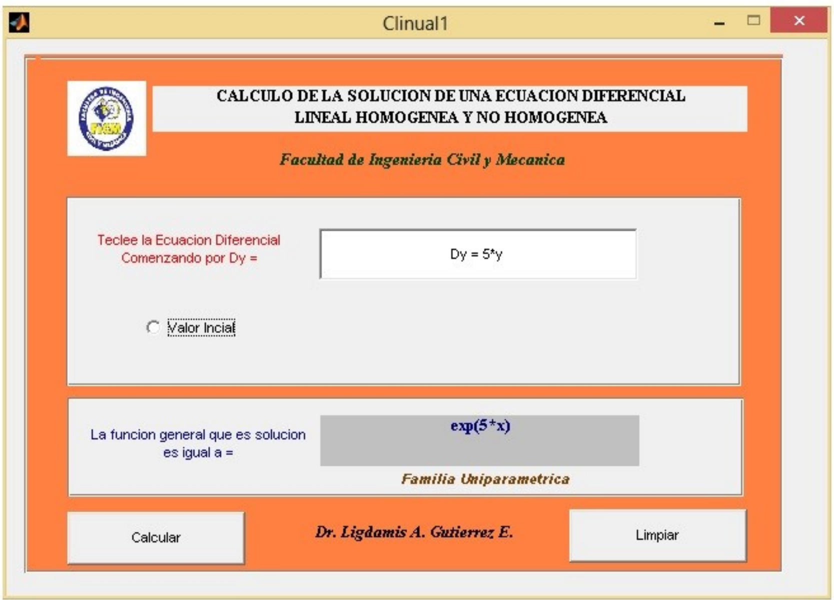


Fig.1 Interfaz Gráfica de Usuario (GUI) sin valores iniciales

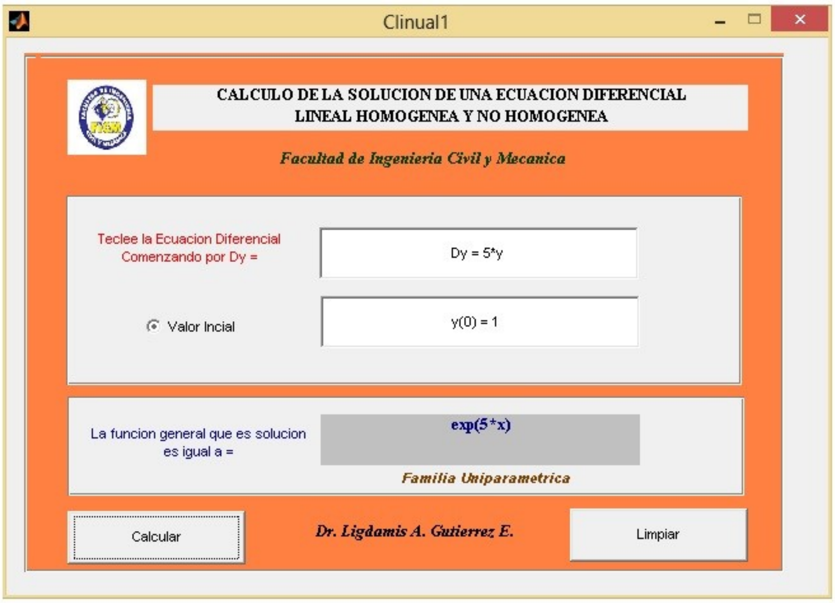


Fig.2 Interfaz Gráfica de Usuario (GUI) con valores iniciales

El radio Button que se observa selecciona dichas opciones, estando activado hace que se presente la caja de edición en donde se ingresará el valor inicial, estando desactivado, hace que dicha caja se oculte, además de limpiar los valores de dicha caja de edición.

Los resultados se expresan como se observa en una caja de texto estático.

En el botón de calcular debe de estar el código incluyendo mediante un bucle condicional "**if**", ambos casos. El botón de limpieza, hace que todas las cajas de texto y edición estén en blanco y pone el radio Button en blanco, o sea, hace retornar a los valores iniciales.

El estudiante será capaz de modificar el diseño para poder presentar los valores de entrada y salida, así como los parámetros y mensajes suministrados en la interfaz.

2.- MODELOS MATEMÁTICOS APLICADOS A ECUACIONES DIFERENCIALES

MODELOS MATEMÁTICOS

2.1.- INTRODUCCIÓN

Las matemáticas constituyen una herramienta útil para la solución de problemas, en especial cuando se conoce la variación entre las variables, es decir, cuando se tiene el cambio de una variable dependiente con respecto a una variable independiente. Las ecuaciones diferenciales son especialmente útiles en la modelación matemática de dichos problemas. Con frecuencia es deseable describir en términos matemáticos el comportamiento de algunos sistemas o fenómenos de la vida real, sean físicos, sociológicos o hasta económicos. La descripción matemática de un sistema de fenómenos se llama **modelo matemático** y se construye con ciertos objetivos. Por ejemplo, podemos desear entender los mecanismos de cierto ecosistema al estudiar el crecimiento de la población animal en ese sistema, o podemos desear datar fósiles y analizar el decaimiento de una sustancia radiactiva ya sea en el fósil o en el estrato en que éste fue descubierto.

2.2.- DEFINICIÓN MODELO MATEMÁTICO

Un modelo matemático es la descripción matemática de un sistema o fenómeno de la vida real. Los modelos matemáticos se pueden pensar como ecuaciones, así se consideran ecuaciones que modelan ciertas situaciones del mundo real.

Por ejemplo, cuando se considera un simple circuito eléctrico de corriente directa (CD), la ecuación $\boldsymbol{V = RI}$, representa el modelo de la caída de voltaje (medida en voltios) a través de una resistencia (medida en ohmios), donde I es la corriente (medida en amperios). Esta es la ecuación que se denomina la Ley de Ohm.

De esta forma, se pueden utilizar variables que son continuas y ecuaciones diferenciales en la aplicación de modelos matemáticos. Además, dichas ecuaciones diferenciales consideran variables discretas, es decir, variables que sólo pueden aceptar ciertos valores, como números enteros.

La formulación de un modelo matemático de un sistema se inicia e implica:

a) Identificación de las variables que ocasionan el cambio del sistema. Podremos elegir no incorporar todas estas variables en el modelo desde el comienzo. En este paso especificamos el **nivel de resolución del modelo**

b) Se establece un conjunto de suposiciones razonables o hipótesis, acerca del sistema que estamos tratando de describir. Esas hipótesis también incluyen todas las leyes empíricas que se pueden aplicar al sistema.

c) Planteamiento de las ecuaciones.

Para algunos objetivos quizá baste con conformarse con modelos de baja resolución. Por ejemplo, usted ya es consciente de que en los cursos básicos de física algunas veces se desprecia la fuerza retardadora de la fricción del aire al modelar el movimiento de un cuerpo que cae cerca de la superficie de la Tierra. Pero si usted es un científico cuyo trabajo es predecir con exactitud la trayectoria de vuelo de un proyectil de largo alcance, deberá considerar la resistencia del aire y otros factores, tales como la curvatura de la Tierra.

Puesto que con frecuencia las hipótesis acerca de un sistema implican una *razón de cambio* de una o más de las variables, el enunciado matemático de todas esas hipótesis puede ser una o más ecuaciones que contengan *derivadas*. En otras palabras, el modelo matemático puede ser una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales.

Una vez que se ha formulado un modelo matemático, ya sea una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, nos enfrentamos al problema no fácil de tratar de resolverlo. *Si* podemos resolverlo, entonces consideramos que el modelo es razonable si su solución es consistente con los datos experimentales o con los hechos conocidos acerca del comportamiento del sistema. Si las predicciones que se obtienen son deficientes, podemos aumentar el nivel de resolución del modelo o hacer hipótesis alternativas acerca de los mecanismos de cambio del sistema. Entonces se repiten los pasos del proceso de modelado, como se muestra en el diagrama siguiente:

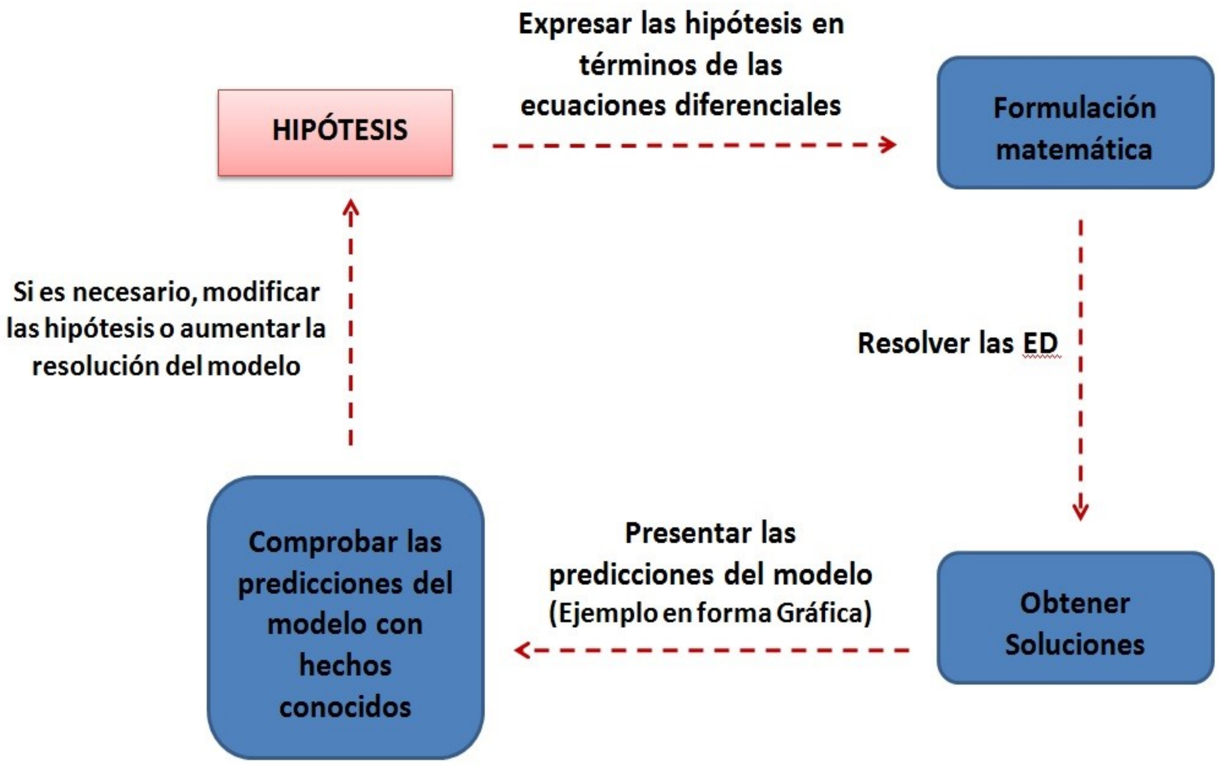


Fig. 3 Pasos en la realización del proceso de un modelo matemático

Por supuesto, al aumentar la resolución, aumentamos la complejidad del modelo matemático y la probabilidad de que no podamos obtener una solución explícita. Con frecuencia, el modelo matemático de un sistema físico inducirá la variable tiempo t. Una solución del modelo expresa el **estado del sistema;** en otras palabras, los valores de la variable dependiente (o variables) para los valores adecuados de t que describen el sistema en el pasado, presente y futuro.

2.3.-EL “CICLO DE LOS MODELOS”

Hacemos el supuesto de cierta situación en la vida real, mediante una investigación se debe ser capaz de construir un modelo para dicha situación (bajo la forma de una **ecuación diferencial**) y utilizar tecnologías, programas tales como Matlab para encontrar la solución. El ciclo de este modelo puede ilustrarse de la siguiente manera:

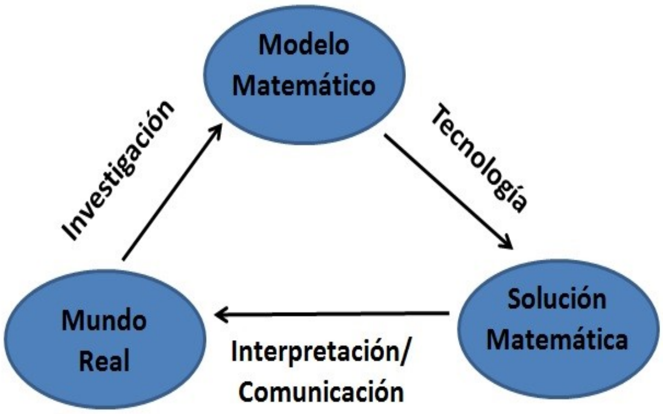


Fig. 4 Proceso del ciclo de un modelo

2.4.- MÉTODOS CUALITATIVOS

Construir un modelo puede resultar un proceso muy largo y difícil; suele llevar varios años de investigación. Una vez formulados, tal vez sea virtualmente imposible resolver los modelos de forma analítica. Por lo tanto, el investigador dispone de dos opciones:

a) **Simplificar**, o “hacer pequeños cambios al modelo para mejorarlo” y hacerlo así más manejable. Este es un enfoque válido, siempre y cuando la simplificación no comprometa excesivamente la conexión entre el “mundo real” y, por lo tanto, su utilidad.

b) **Dejar el modelo tal y como está**, y utilizar entonces otras técnicas, como los métodos gráficos o numéricos. Esto representa un enfoque cualitativo. En tanto no se tenga una solución exacta analítica, en cierta forma se obtiene algo de información que puede dar cierta luz sobre el modelo y su aplicación.

2.5.- FORMULACIÓN

Un modelo matemático se define, de manera general, como una formulación o una ecuación que expresa las características esenciales de un sistema físico o de un proceso en términos matemáticos. En general se puede expresar de la siguiente manera:

$$\text{Variable Dependiente} = f\left(\text{Variable Independiente},\ \text{Parámetros},\ \text{Funciones de fuerza}\right)$$

Donde la ***variable dependiente*** es una característica que generalmente refleja el comportamiento del modelo o estado del sistema; las ***variables independientes*** son, por lo general, dimensiones tales como tiempo y espacio, a través de las cuales se determina el comportamiento del sistema; y las ***funciones de fuerza*** son influencias externas que actúan sobre el sistema.

2.6- APLICACIONES PRÁCTICAS DE MODELOS MATEMÁTICOS

2.6.1.- DINÁMICA POBLACIONAL

Uno de los primeros intentos para modelar el **crecimiento de la población** humana por medio de las matemáticas fue realizado en 1,798 por el economista inglés Thomas Robert Malthus (1766 - 1834).

Economista británico de la escuela clásica, fue discípulo de Adam Smith. Estudió en Cambridge, donde se graduó en matemáticas; después se ordenó como pastor de la iglesia anglicana. En 1805 fue nombrado profesor de historia moderna y economía política del East India College; esto en un hecho histórico, ya que se le considera el primer profesor de economía política de la historia. El pesimismo de la escuela clásica quedó expresado con claridad por Malthus. "***La población y la riqueza pueden crecer, pero hay un límite; una vez alcanzado se llegará a un estado estacionario en el que la vida será miserable, mera supervivencia***".

El modelo de **Malthus** es la suposición de que la razón con la que la población de un país en un cierto tiempo, es proporcional a la población total del país en ese tiempo.

Dicho de otra forma, entre más personas estén presentes al tiempo ***t***, habrá más en el futuro. En términos matemáticos, si ***P***(***t***) denota la **población** al tiempo ***t***, entonces esta suposición, se puede expresar por medio de una **ecuación diferencial** como **(1)**:

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad \textbf{(1)}$$

donde k es una **constante de proporcionalidad**. Este modelo simple, falla si se consideran muchos otros factores que pueden influir en el crecimiento o decrecimiento (por ejemplo, inmigración y emigración), Sin embargo, fue bastante exacto en predecir la población de los Estados Unidos, durante 1790-1860.

2.6.2.- EJEMPLOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Ejemplo 1:

El modelo de población dado en la ecuación **(1)** falla al no considerar la tasa de mortalidad; la razón de crecimiento es igual a la tasa de natalidad. En otro modelo del cambio de población de una comunidad se supone que la razón de cambio de la población es una razón *neta,* esto es, la diferencia entre la tasa de natalidad y la de mortalidad en la comunidad. Determine un modelo para la población ***P***(***t***) si tanto la tasa de natalidad y la mortalidad son proporcionales a la población presente al tiempo ***t***.

Siendo n = nacimientos y, entonces: $n = k_1P$

m = mortalidad, $m = k_2P$

Como $\frac{dP}{dt} = n - m$, entonces, la Ecuación Diferencial es: $\frac{dP}{dt} = k_1P - k_2P$

II) Utilice el concepto de razón neta introducido en el problema anterior, para determinar un modelo para una población ***P(t)*** si la tasa de natalidad es proporcional a la población presente al tiempo ***t*,** pero la tasa de mortalidad es proporcional al cuadrado de la población presente al tiempo ***t*.**

Siendo n = nacimientos y, entonces: $n = k_1P$

m = mortalidad, $m = k_2P$

Como $\frac{dP}{dt} = n - m$, entonces, la Ecuación Diferencial es: $\frac{dP}{dt} = k_1P - k_2P^2$

Ejemplo 2:

Con base en las mismas hipótesis detrás del modelo de la ecuación (1), determine una ecuación diferencial para la población ***P(t)*** de un país cuando se les permite a las personas **inmigrar** a un país con una razón constante $r > 0$. ¿Cuál es la ecuación diferencial para la población ***P(t)*** del país cuando se les permite a las personas **emigrar** del país con una razón constante $r > 0$?

Siendo ***r*** la razón constante; entonces:

$$\frac{dP}{dt} = kP + r \quad , \qquad \frac{dP}{dt} = kP - r$$

Inmigrar Emigrar

Ejemplo 3:

Un zoológico planea llevar un león marino a otra ciudad. El animal irá cubierto durante el viaje con una manta mojada. En cualquier tiempo t, la manta perderá humedad debido a la evaporación, a una razón proporcional a la cantidad $y(t)$ de agua presente en la manta. Inicialmente, la sábana contendrá 40 litros de agua de mar. Estamos interesados en encontrar una ecuación diferencial que describa este problema.

Al ser $y(t)$ la cantidad de agua en la manta en el tiempo t, del enunciado deducimos que la razón de cambio de $y(t)$ (su derivada $y'(t)$), es proporcional a $y(t)$. Entonces $y'(t) = ky(t)$; donde la constante de proporcionalidad k es negativa, ya que la cantidad de agua disminuye con el tiempo. Por tanto, nuestro modelo será:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = k\,y(t), \quad k \le 0, \quad y(0) = 40}$$

Ejemplo 4:

La población de un pueblo crece con una razón proporcional a la población en el tiempo *t*. La población inicial de 500 aumenta 15% en 10 años. ¿Cuál será la población pasados 30 años? ¿Qué tan rápido está creciendo la población en $t = 30$?

Los pasos para solucionar esto son los siguientes:

a) Establecer la variación de las variables.

Del enunciado podemos observar que la población denominada (P), varia con respecto al tiempo (t); entonces la variable independiente es (t) y la variable dependiente en P.

b) Formular el modelo matemático.

El enunciado dice que la rapidez de crecimiento de la población, $\frac{dP}{dt}$, es proporcional a la población actual. Entonces:

$$\frac{dP}{dt} = KP \;\; ; y ; P = ce^{kt}$$

Del valor inicial $P(0) = c = 500$, tenemos ; $P = 500e^{kt}$, donde el 15% de 500 es 75, por lo tanto, el aumento del 15% a los 10 años es:

$$P(10) = 500e^{10k} = 575$$

Resolviendo para el valor de k, tenemos:

$$k = \frac{1}{10} ln \frac{575}{500} = \frac{1}{10} ln\, 1.15$$

Entonces, para encontrar cuál será la población en 30 años, cuando $t = 30$, tenemos al sustituir:

$$P(30) = 500e^{kt}$$

$$P(30) = 500e^{(1/10)(ln\, 1.15) * 30} = 500\, e^{3\, ln\, 1.15} = 760\; personas$$

Y la derivada, para encontrar que tan rápido está creciendo la población en 30 años es:

$$P'(30) = kP(30) = \frac{1}{10}\,(ln\, 1.15)760 = 10.62\; personas/año$$

Ejemplo 5: Contaminación en un lago:

Considere que el agua fluye limpia en un lago contaminado y una corriente saca agua. ¿El nivel de contaminación en el lago disminuirá (suponga que no se agregan nuevos contaminantes)? ¿Cuál es la ecuación diferencial que modela la descontaminación del lago a lo largo del tiempo?

Los pasos para solucionar esto son los siguientes:

a) Establecer la variación de las variables.

La cantidad de contaminantes en el lago disminuye a una razón proporcional a la cantidad presente. Sea C la cantidad de contaminante que está presente en el lago en un tiempo "t".

b) Formular el modelo matemático.

La razón de cambio de "C" es proporcional a "C", por lo que $\frac{dC}{dt}$, es proporcional a "C", por lo tanto, la ecuación diferencial es:

$$\frac{dC}{dt} = -KC$$

Puesto que no se arrojan más contaminantes al lago, la cantidad de "C" disminuye a lo largo del tiempo, de ahí que $\frac{dC}{dt}$ sea negativa

Ejemplo 6: Cantidad de medicamento:

A un paciente que se encuentra internado, se le suministra un medicamento por vía intravenosa a una razón de 85 mg, con una constante de proporcionalidad de 0.1. Si el tiempo se mide en horas, ¿cuál es la ecuación diferencial que modela la cantidad de medicamento a lo largo del tiempo?

Los pasos para solucionar esto son los siguientes:

a) Establecer la variación de las variables.

La cantidad de medicamento, "M", aumenta a una razón constante de 85 mg/hora y disminuye a una razón de 0.1 por "M".

b) Formular el modelo matemático.

La administración de 85 mg/hora contribuye de manera positiva a la razón de cambio $\frac{dM}{dt}$. La excreción a una razón de 0.1M contribuye de manera negativa $\frac{dM}{dt}$. Al unir ambas razones se tiene que:

Razón de cambio de una cantidad = Razón de entrada - Razón de salida.

Por lo tanto, la ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{dM}{dt} = 85 - 0.1M$$

2.6.3.- DECAIMIENTO RADIACTIVO

El núcleo de un átomo está formado por combinaciones de protones y neutrones. Muchas de esas combinaciones son inestables, esto es, los átomos se desintegran o se convierten en átomos de otras sustancias. Se dice que estos núcleos son radiactivos.

Por ejemplo, con el tiempo, el radio Ra 226, intensamente radiactivo, se transforma en el radiactivo gas radón, Rn-222. Para modelar el fenómeno del **decaimiento radiactivo**, se supone que la razón ***da/dt,*** con la que los núcleos de una sustancia se desintegran es proporcional a la cantidad (más precisamente, el número de núcleos), ***A(t)*** de la sustancia que queda al tiempo ***t***: Lo que se expresa con la **ED (2)**.

$$\frac{dA}{dt} = kA \qquad \textbf{(2)}$$

donde ***k*** es una **constante de proporcionalidad**. Si observamos, las ecuaciones (1) y (2), son iguales, la diferencia está en la interpretación de los símbolos y las constantes de proporcionalidad.

En el caso del crecimiento de **(1), k > 0**, para la desintegración **(2), k< 0**,

Además, el modelo de crecimiento de la ecuación **(1)**, se utiliza en economía, para indicar el crecimiento del capital ***S*** cuando está a una tasa anual de interés ***r*** compuesto continuamente, con la siguiente ecuación diferencial **(3)**.

$$\frac{dS}{dt} = rS \qquad \textbf{(3)}$$

Por otra parte, el modelo de desintegración **(2)**, también se aplica a sistemas biológicos, tales como la determinación de la "vida media" de un medicamento, es decir, el tiempo que le toma a **50%** del medicamento ser eliminado del cuerpo por excreción o metabolización. En química, el modelo del decaimiento, ecuación **(2)**, se presenta en la descripción matemática de una reacción química de primer orden.

Con todo esto, llegamos a una importante conclusión:

Una sola Ecuación Diferencial, puede servir como modelo matemático de muchos fenómenos distintos.

Ejemplo 7:

El isótopo radiactivo del plomo Pb-209, decae con una razón proporcional a la cantidad presente al tiempo *t* y tiene un vida media de 3.3 horas. Si al principio había 1 gramo de plomo, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que decaiga 90%?

Los pasos para solucionar esto son los siguientes:

a) Establecer la variación de las variables.

Del enunciado podemos observar que cantidad del isótopo (A), varia con respecto al tiempo (t); entonces la variable independiente es (t) y la variable dependiente es A.

b) Formular el modelo matemático.

El enunciado dice que la cantidad del isótopo decae (decrece) , $\frac{dA}{dt}$, con una razón proporcional al tiempo (*t*). Entonces:

$$\frac{dA}{dt} = KA \;\; ; y \, ; A(0) = 1$$

Entonces, tenemos que: $A = ce^{kt}$, como el enunciado dice que la vida media es de 3.3 horas, entonces

$$A(3.3) = \frac{1}{2}, por\ lo\ que\ encontramos : k = \frac{1}{3.3}\ ln(\frac{1}{2})$$

El enunciado nos dice que cuando decae un 90% de 1 gramo inicial entonces tenemos 0.1 gramos a encontrar en un tiempo (t), entonces tenemos que:

Por lo que de acuerdo con lo que se ha obtenido anteriormente tenemos:

$$A = ce^{kt}$$

$$A(t) = 0.1, entonces\ tenemos: e^{t(1/3.3)(ln\ 1/2)} = 0.1$$

Por lo tanto para encontrar el tiempo (t), despejamos:

$$e^{t(1/3.3)(ln\ 1/2)} = 0.1$$

$$\frac{t}{3.3} ln \frac{1}{2} = ln\ 0.1$$

$$t = \frac{3.3\ ln\ 0.1}{ln\ (\frac{1}{2})} = 10.96\ horas$$

Con frecuencia, los modelos matemáticos se acompañan de condiciones que los definen. Por ejemplo, en las ecuaciones **(1)** y **(2)** esperaríamos conocer una población inicial P_0 y por otra parte, también la cantidad inicial de sustancia radioactiva A_0. Si el tiempo inicial se toma en $t = 0$, sabemos que $P(0) = P_0$ y que $A(0) = A_0$.

En otras palabras, el modelo matemático puede consistir en un **problema con valores iniciales** o en un **problema con valores en la frontera.**

Ejemplo 8.

Suponga que ***dA/dt = 0.0004332 A(t)*** ,representa un modelo matemático para el decaimiento radiactivo del radio-226, donde ***A(t)*** es la cantidad de radio (medida en gramos) que queda al tiempo ***t*** *(medido en años).* ¿Cuánto de la muestra de radio queda al tiempo *t* cuando la muestra está decayendo con una razón de 0.002 gramos por año?

Tenemos del enunciado que la derivada, para encontrar que tan rápido está decayendo la muestra es:

$$\boldsymbol{A'(t) = -0.002}$$

Por lo tanto, resolviendo para el modelo matemático anterior, tenemos:

$$\boldsymbol{A'(t) = -0.0004332\, A(t), \qquad para\ A(t)\ queda:}$$

$$\boldsymbol{A(t) = \frac{A'(t)}{-0.0004332} = \frac{-0.002}{-0.0004332} = {\color{red} 4.6\ gramos}}$$

2.6.4.- LEY DE ENFRIAMIENTO/CALENTAMIENTO DE NEWTON

De acuerdo con la ley empírica de Newton de **enfriamiento/calentamiento**, la rapidez con la que cambia la temperatura de un cuerpo, es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea, que se llama **temperatura ambiente**.

Si $\boldsymbol{T(t)}$ representa la temperatura del cuerpo al tiempo ***t***, y $\boldsymbol{T_m}$ es la temperatura del medio que lo rodea y ***dT/dt*** es la rapidez con que cambia la temperatura del cuerpo. Entonces la ecuación diferencial **(4)** sería.

$$\boldsymbol{\frac{dT}{dt} = k\,(T - T_m)} \qquad \textbf{(4)}$$

Donde, ***k*** es una constante de proporcionalidad. En ambos casos, enfriamiento o calentamiento, si $\boldsymbol{T_m}$ es una constante, se establece que $\boldsymbol{k < 0}$.

Ejemplo 9:

La temperatura de una sustancia que se encuentra en una habitación que está a 30°C, baja de 100°C a 80°C en 15 minutos. Determine la temperatura de la sustancia al cabo de 20 minutos.

Los pasos para solucionar esto son los siguientes:

a) Establecer la variación de las variables.

Del enunciado se puede observar que la temperatura varía con respecto al tiempo, entonces la variable independiente es "t" y la variable dependiente es "T". Por lo tanto, las variables a tomar en cuenta son:

$T_0 = T(0)$ = temperatura, al tiempo t = 0

$T_0 = 100°C$

T_m = temperatura del medio ambiente = 30°C

T(t) = temperatura del cuerpo a cualquier tiempo.

b) Formular el modelo matemático.

El enunciado dice que la velocidad de enfriamiento, $\frac{dT}{dt}$ es proporcional a la diferencia de las temperaturas del cuerpo y del medio ambiente. Por lo tanto:

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$$

En donde, tenemos las condiciones iniciales siguientes:

Al tiempo t = 0, la temperatura es $T_0 = T(0) = 100°C$

Al tiempo t = 15 minutos, la temperatura es $T(15\ minutos) = 80°C$

¿Cuál es la temperatura de la sustancia en un tiempo de 20 minutos?

Al calcular la solución de la Ecuación Diferencial anterior obtenemos que:

$$T(t) = T_m + Ce^{At}$$

Por lo tanto, al sustituir T_m tenemos:

$$T(t) = 30°C + Ce^{At}$$

Ahora, sustituimos las condiciones iniciales:

$$T(0) = 30°C + Ce^{0} = 100°C$$

$$Donde: 30°C + C = 100°C$$

Por lo tanto:

$$C = 70°C$$

Para T(15) tenemos:

$$T(15) = 30°C + Ce^{15A} = 80°C$$

$$Donde: 30°C + 70°C e^{15A} = 100°C$$

Por lo tanto:

$$e^{15A} = \frac{50°C}{70°C}, Donde\ A = \frac{1}{15} ln\left(\frac{5}{7}\right) = -0.0224$$

Al sustituir los valores de las constantes encontradas en la solución de la ecuación diferencial tenemos:

$$T(t) = T_m + Ce^{At}$$

$$T(t) = 30°C + 70°Ce^{-0.0224At}$$

Ahora, se evalúa esta función en t = 20 minutos y se obtiene:

$$T(t) = 30°C + 70°Ce^{-0.0224(20)} = 74.69°C$$

Ejemplo 10:

Una taza de café se enfría de acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, ecuación (4). Utilice los datos de la gráfica de la temperatura *T*(*t*) en la figura abajo mostrada para estimar las constantes $T_m, T_0\ y\ k$ en el modelo de la forma de un problema con valores iniciales.

$$\frac{dT}{dt} = k\,(T - T_m)\,,\ T(0) = T_0$$

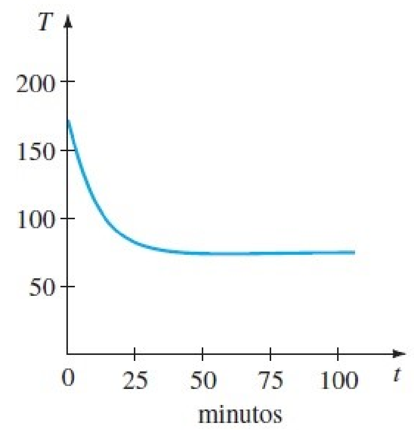


Fig. 5 Gráfica de temperatura de enfriamiento en función del tiempo

Del texto en el gráfico podemos estimar que: $T_0 = 180°\,,\ y\ T_m = 75°$

En donde, cuando T = 85, entonces: $\frac{dT}{dt} = -1$, por lo tanto, de la ecuación diferencial, podemos simplificar y obtener k, de la siguiente forma:

$$\frac{dT}{dt} = k\,(T - T_m)$$

$$k = \frac{dT/dt}{T - T_m} = \frac{-1}{85 - 75} = \mathbf{-0.1}$$

Ejemplo 11:

La temperatura ambiente *Tm* en la ecuación (4) podría ser una función del tiempo *t*. Suponga que, en un medio ambiente controlado, *Tm*(*t*) es periódica con un periodo de 24 horas, como se muestra en la figura abajo presentada. Diseñe un modelo matemático para la temperatura *T*(*t*) de un cuerpo dentro de este medio ambiente. Recuerde tomar en cuenta la función trigonométrica.

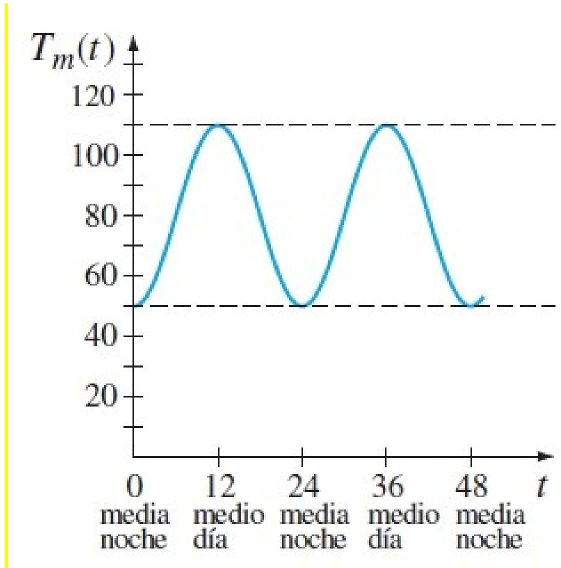


Fig. 6 Gráfica de la temperatura ambiente en función del tiempo

Analizando el gráfico, tomamos T_m $para\ hacer, T_m(t) = 80 - 30\cos \pi t/12$

Por lo tanto, la temperatura en el cuerpo en un tiempo "t", está determinada por la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{\frac{dT}{dt} = k\left[T - \left(80 - 30\cos\frac{\pi}{12}\,t\right)\right]}\ ,\ \ t > 0$$

2.6.5.- CIRCUITOS EN SERIE

Consideremos un circuito en serie simple que tiene un **inductor**, un **resistor** y un **capacitor**

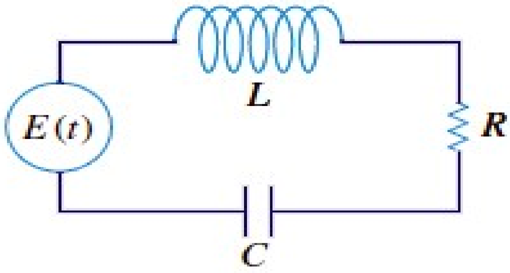
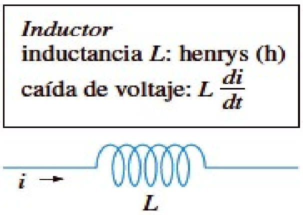


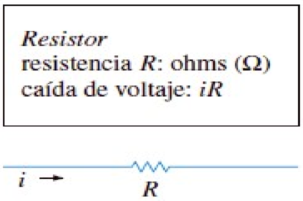
Fig. 7 Gráfica de un circuito en serie simple

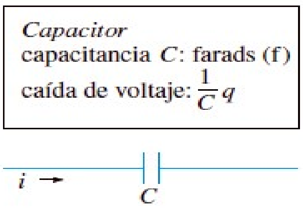
En un circuito con el interruptor cerrado, la corriente se denota por ***i*(*t*)** y la carga en el capacitor al tiempo ***t*** se denota por ***q(t)***. Las letras ***L*, *R*** y ***C*** son conocidas como **inductancia**, **resistencia** y **capacitancia**, respectivamente y en general **son constantes**.

Ahora de acuerdo con la **segunda ley de Kirchhoff**, **(*)** el voltaje aplicado ***E*(*t*)** a un circuito cerrado, debe ser igual a la suma de las caídas de voltaje en el circuito.

(*) Ley del voltaje de Kirchhoff: ***La suma algebraica de los cambios instantáneos del potencial (caídas de voltaje) en torno de cualquier lazo cerrado debe anularse.***







Aquí se observan, los símbolos y fórmulas de las caídas respectivas de voltaje a través de un **inductor**, un **capacitor** y un **resistor**.

Como la corriente ***i*(*t*)** está relacionada con la carga ***q(t)*** en el capacitor mediante ***i* = *dq/dt*,** se suman los tres voltajes

Inductor	**Resistor**	**Capacitor**
$L\,\frac{di}{dt} = L\,\frac{d^2q}{dt^2}$,	$iR\; = R\,\frac{dq}{dt}$,	$\frac{1}{C}q$

Así, igualando la suma de estos voltajes, con el voltaje aplicado ***E*(*t*),** se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden:

$$L\,\frac{d^2q}{dt^2} + R\,\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \qquad \textbf{(5)}$$

2.6.6.- CUERPOS EN CAÍDA

Para establecer un modelo matemático del movimiento de un cuerpo que se mueve en un campo de fuerzas, con frecuencia se comienza con la segunda ley de Newton. Recordemos de la física elemental, la **Primera ley del movimiento** de **Newton** establece que un cuerpo permanecerá en reposo o continuará moviéndose con una velocidad constante, a menos que sea sometido a una fuerza externa. En los dos casos, esto equivale a decir que cuando la suma de las fuerzas.

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F_k}$$

Esto significa que la fuerza neta o fuerza resultante, que actúa sobre el cuerpo es ***cero,*** y la aceleración ***a*** del cuerpo es **cero**.

Asimismo, La **Segunda ley del movimiento** de **Newton,** indica que cuando la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo no es cero, entonces la fuerza neta es proporcional a su aceleración *a o,* más exactamente, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{ma}$, donde ***m*** es la masa del cuerpo.

Supongamos ahora que se arroja una piedra hacia arriba desde el techo de un edificio como se muestra en la figura.

¿Cuál es la posición ***s(t)*** de la piedra respecto al suelo al tiempo ***t****?* La aceleración de la piedra es la segunda derivada d^2s/dt^2.

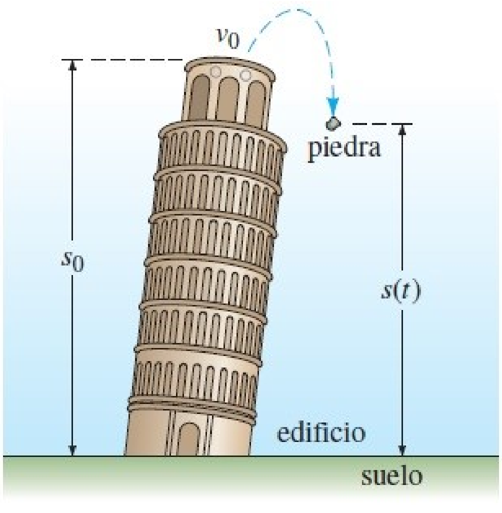


Fig. 8 Figura del proceso de caída de un piedra desde una altura

Si suponemos que la dirección hacia arriba es positiva y que no hay otra fuerza, además de la fuerza de la gravedad, que actúe sobre la piedra, entonces utilizando la segunda ley de Newton se tiene que la ecuación diferencial asociada a esto es:

$$\boldsymbol{m\,\frac{d^2s}{dt^2} = -mg,\;\; Simplificando}:$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2s}{dt^2} = -g}$$

En otras palabras, la fuerza neta es simplemente el peso $\boldsymbol{F = F_1 = W}$, de la piedra cerca de la superficie de la Tierra. Recordemos que la magnitud del peso es $\boldsymbol{W = mg}$, *donde* ***m*** *es la* masa del cuerpo y ***g*** es la aceleración debida a la gravedad. El signo menos en la ecuación anterior se usa porque el peso de la piedra es una fuerza dirigida hacia abajo, que es opuesta a la dirección positiva.

Si la altura del edificio es s_0 y la velocidad inicial de la roca es v_0, entonces, el valor de s se determina a partir del problema de la ecuación diferencial con valores iniciales de segundo orden siguiente:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g, \;\; s(0) = s_0, \; s'(0) = v_0 \qquad (6)$$

La solución de esta ecuación se da al integrando dos veces respecto a t *la constante –g. Donde, l*as condiciones iniciales determinan las dos constantes de integración.

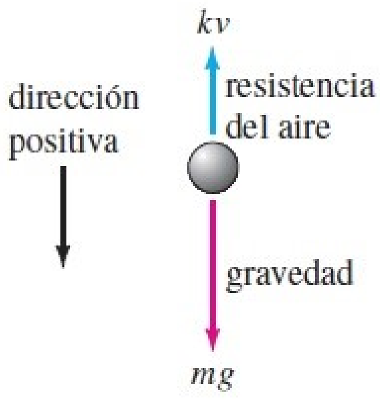
De la física elemental podría reconocer la solución de la ecuación anterior como la fórmula siguiente:

$$S(t) = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_0 t + s_0$$

2.6.7.- CUERPOS EN CAÍDA Y RESISTENCIA DEL AIRE

Antes del famoso experimento de la torre inclinada de Pisa de Galileo generalmente se creía que los objetos más pesados en caída libre, como una bala de cañón, caían con una aceleración mayor que los objetos ligeros como una pluma. Obviamente, una bala de cañón y una pluma cuando se dejan caer simultáneamente desde la misma altura realmente *caen en tiempos diferentes,* pero esto no es porque una bala de cañón sea más pesada.

La diferencia en los tiempos es debida a la resistencia del aire. En el modelo que se presentó en la ecuación (6) se despreció la fuerza de la resistencia del aire. Bajo ciertas circunstancias, un cuerpo que cae de masa *m,* tal como una pluma con densidad pequeña y forma irregular, encuentra una resistencia del aire que es proporcional a su velocidad instantánea v. Si en este caso, tomamos la dirección positiva dirigida hacia abajo, entonces la fuerza neta que está actuando sobre la masa está dada por $F = F_1 + F_2 = mg - kv$, donde el peso $F_1 = mg$ del cuerpo es una fuerza que actúa en la dirección positiva y la resistencia del aire $F_2 = -kv$ es una fuerza, que se llama de ***amortiguamiento viscoso****, que* actúa en la dirección contraria o hacia arriba. Véase la figura siguiente. Ahora puesto que v está relacionada con la aceleración *a* mediante $a = dv/dt$, la segunda ley de Newton será $F = ma = m\, dv/dt$. Al igualar la fuerza neta con esta forma de la segunda ley, obtenemos una ecuación diferencial para la velocidad $v(t)$ del cuerpo al tiempo *t* siguiente:



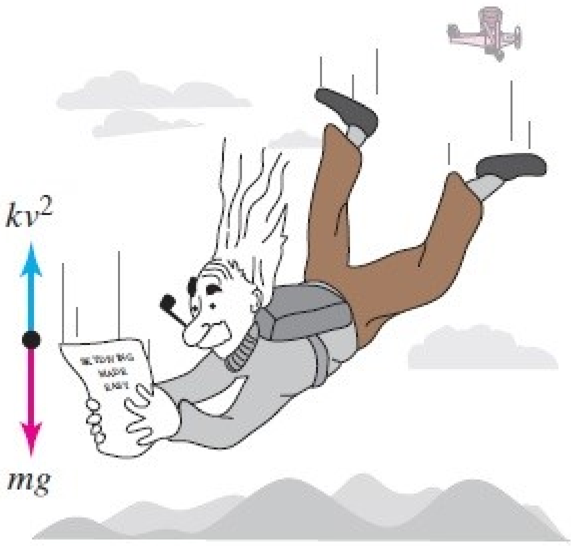
$$M\,\frac{dv}{dt} = mg - kv \qquad \textbf{(7)}$$

Aquí k es una constante positiva de proporcionalidad. Si $s(t)$ es la distancia que el cuerpo ha caído al tiempo t desde su punto inicial o de liberación, entonces $v = ds/dt$ y $a = dv/dt = d^2s/dt^2$. En términos de s, la ecuación (7) es una ecuación diferencial de segundo orden siguiente:

$$m\,\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\frac{ds}{dt} \quad , \ \text{ó} \ , \quad m\,\frac{d^2s}{dt^2} + k\frac{ds}{dt} = mg \qquad \textbf{(8)}$$

Ejemplo 12:

Para movimientos de gran rapidez en el aire, como el del paracaidista que se muestra en la figura abajo mostrada, que está cayendo antes de que se abra el paracaídas la resistencia del aire es cercana a una potencia de la velocidad instantánea $v(t)$. Determine una ecuación diferencial para la velocidad $v(t)$ de un cuerpo de masa m que cae, si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea.

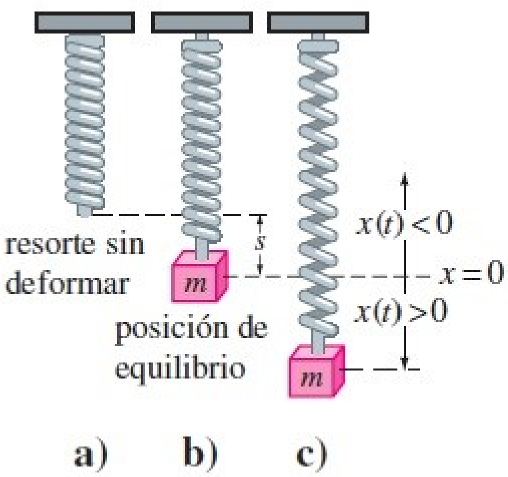


De la segunda ley de Newton, obtenemos lo siguiente:

$$m\,\frac{dv}{dt} = -k\,v^2 + mg$$

Ejemplo 13: Segunda ley de Newton y ley de Hooke

Después de que se fija una masa m a un resorte, éste se estira s unidades y cuelga en reposo en la posición de equilibrio como se muestra en la figura abajo presentada, parte b. Después el sistema resorte/masa se pone en movimiento, sea que $x(t)$ denote la distancia dirigida del punto de equilibrio a la masa. Como se indica en la figura parte c, suponga que la dirección hacia abajo es positiva y que el movimiento se efectúa en una recta vertical que pasa por el centro de gravedad de la masa y que las únicas fuerzas que actúan sobre el sistema son el peso de la masa y la fuerza de restauración del resorte estirado. Utilice la **ley de Hooke**: <u>*la fuerza de restauración de un resorte es proporcional a su elongación total*</u>. Determine una ecuación diferencial del desplazamiento $x(t)$ al tiempo t.



La fuerza total que actúa sobre la masa es:

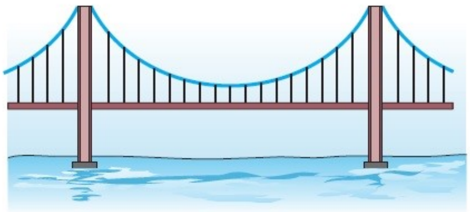
$$F = ma = m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,(s + x) + mg = -kx + ms - ks$$

En donde, la condición de equilibrio es: ***mg = ks***, por lo que la ecuación diferencial es:

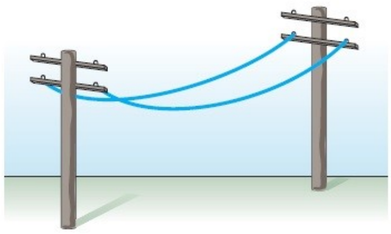
$$\boldsymbol{m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -kx}$$

2.6.8.- CABLES SUSPENDIDOS

Vamos a suponer un cable flexible, alambre o cuerda pesada que está suspendida entre dos soportes verticales. Como ejemplos físicos de esto podemos tener uno de los dos cables que soportan el firme de un puente de suspensión como el de la figura (a), o un cable telefónico largo entre dos postes como el de la figura (b). Debemos de construir un modelo matemático que describa la forma que tiene el cable.

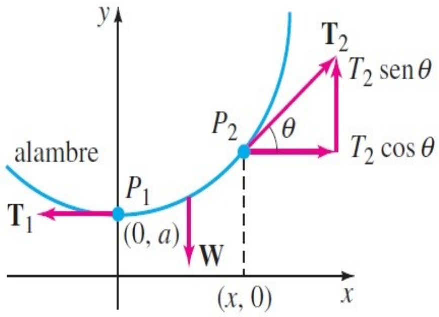


a) cable de suspensión de un puente



b) alambres de teléfonos

Comenzaremos por acordar en examinar sólo una parte o elemento del cable entre su punto más bajo P_1 y cualquier punto arbitrario P_2. Señalado en color azul en la figura (c), este elemento de cable es la curva en un sistema de coordenada rectangular eligiendo al eje y para que pase a través del punto más bajo P_1 de la curva y eligiendo al eje x para que pase a ***a*** unidades debajo de P_1.



c) elementos del cable

Sobre el cable actúan tres fuerzas: las tensiones **T**1 y **T**2 en el cable que son tangentes al cable en *P*1 y *P*2, respectivamente, y la parte **W** de la carga total vertical entre los puntos *P*1 y *P*2. Sea que *T*1 = |**T**1|, *T*2 =|**T**2|, y *W* =|**W|** denoten las magnitudes de estos vectores. Ahora la tensión $\mathbf{T}_2$ se descompone en sus componentes horizontal y vertical (cantidades escalares) *T*2cosϴ y *T*2senϴ. Debido al equilibrio estático podemos escribir:

$$T_1 = T_2 \cos\theta \quad y \quad W = T_2 \operatorname{sen}\theta$$

Al dividir la última ecuación entre la primera, eliminamos T_2 y obtenemos tan

ϴ= W/T_1. Pero puesto que dy/dx = tan ϴ, llegamos a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{T_1}$$

Esta sencilla ecuación diferencial de primer orden sirve como modelo tanto para modelar la forma de un alambre flexible como el cable telefónico colgado bajo su propio peso, como para modelar la forma de los cables que soportan el firme de un puente suspendido.

3.- PRIMITIVAS: Una relación entre las variables que contenga ***n*** constantes arbitrarias, como por ejemplo en la ecuación $y = x^4 + C\,x$, ó $y = A\,x^2 + Bx$, se llama una primitiva.

Las ***n*** constantes, que siempre se van a representar con mayúsculas, se llaman esenciales si no se pueden sustituir por un número menor de constantes.

En general, de una primitiva que contenga n constantes arbitrarias esenciales se puede deducir una ecuación diferencial, de orden ***n***, libre de esas constantes arbitrarias. Esta ecuación se obtiene eliminando las ***n*** constantes entre las ***(n +1)*** ecuaciones siguientes: la primitiva y las ***n*** ecuaciones obtenidas, derivando la primitiva ***n*** veces con respecto a la variable independiente.

Ejemplos:

a) Obtener la ecuación diferencial asociada con la primitiva: $y = Ax^2 + Bx + C$

Tenemos aquí tres constantes arbitrarias, entonces consideremos derivar tres veces y tener las cuatro siguientes ecuaciones.

a) La primitiva: $y = Ax^2 + Bx + C$

b) Primera derivada: $\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$

c) Segunda derivada: $\frac{d^2y}{dx^2} = 2A$

d) Tercera derivada: $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$

De este modo, la última ecuación, $\boldsymbol{\frac{d^3y}{dx^3} = 0}$, está libre de constantes arbitrarias y es de un orden adecuado, así que ésta es la ecuación solicitada.

b) Obtener la Ecuación diferencial asociada a la primitiva: $y = Ae^{2x} + Be^{x} + C$

Aquí tenemos tres constantes, por lo tanto, necesitamos derivar tres veces y obtener con la primitiva cuatro ecuaciones a considerar:

a) La primitiva: $y = Ae^{2x} + Be^{x} + C$

b) Primera derivada: $\frac{dy}{dx} = 2Ae^{2x} + Be^{x}$

c) Segunda derivada: $\frac{d^2y}{dx^2} = 4Ae^{2x} + Be^{x}$

d) Tercera derivada: $\frac{d^3y}{dx^3} = 8Ae^{2x} + Be^{x}$

Directamente de las derivadas como en el ejemplo anterior, no podemos sacar la solución solicitada, ya que aún tenemos dos constantes arbitrarias, pues solo se eliminó C. Por lo tanto para eliminar A y B, debemos de resolver los sistemas de la tercera menos la segunda, y la segunda menos la primera, ya que debemos de partir de la tercera derivada para obtener la solución. Así tenemos:

i) $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2}$

ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}$

de i) tenemos: $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2}$

$$8Ae^{2x} + Be^{x} - (4Ae^{2x} + Be^{x})$$

$$8Ae^{2x} + Be^{x} - 4Ae^{2x} - Be^{x}$$

Por tanto:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} = 4Ae^{2x}$$

En cuanto a ii), Tenemos: $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}$

$$4Ae^{2x} + Be^{x} - (2Ae^{2x} + Be^{x})$$

$$4Ae^{2x} + Be^{x} - 2Ae^{2x} - Be^{x})$$

Por tanto:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2Ae^{2x}$$

Ahora, para construir la solución tenemos ya la parte de la tercera derivada, en donde solo nos resta sustituir el valor de Ae^{2x}, que es donde se encuentra la constante arbitraria, y este valor lo obtenemos del segundo resultado. Así tenemos:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} = 4Ae^{2x}$$

Donde, del segundo resultado se despeja el valor de : Ae^{2x}

$$\frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\right)}{2} = Ae^{2x}$$

Sustituyendo esto en la ecuación anterior:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} = 4\frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\right)}{2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} = 2\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\boldsymbol{\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0}$$

Que **es la ecuación diferencial asociada solicitada**.

4.- ECUACIONES DE BERNOULLI

Una ecuación diferencial de Bernoulli es una ecuación de la forma siguiente:

$$\boldsymbol{y' + p(x)y = q(x)y^n}$$

Donde "***n***" denota un número real. Cuando $n = 1$, ó, $n = 0$, una ecuación de Bernoulli se reduce a una ecuación lineal. En cambio, para Cuando $n \neq 1$, ó, $n \neq 0$, con la sustitución de $u = y^{1-n}$, reduce cualquier ecuación de la forma anterior a una ecuación lineal.

Ejemplos:

Determinar si las ecuaciones diferenciales son de Bernoulli:

a) $x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}$

Debemos de saber si la ecuación la podemos dejar de la forma:

$$\boldsymbol{y' + p(x)y = q(x)y^n}$$

Por lo tanto: Ambos lados de la ecuación (a), se pueden dividir entre $\boldsymbol{x}$, y tenemos lo siguiente:

$$x\,\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{x}{x}\,\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x\,y^2}$$

Lo que nos da lo siguiente:

$$\boldsymbol{y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}y^{-2}}$$

Donde: $\boldsymbol{p(x) = \frac{1}{x}}$ **y** $\boldsymbol{q(x) = \frac{1}{x}}$**, y n = -2**

Por lo que la ecuación **es una ecuación de Bernoulli**.

b) $\frac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$

Debemos de saber si la ecuación la podemos dejar de la forma:

$$\boldsymbol{y' + p(x)y = q(x)y^n}$$

Por lo tanto: Hacemos la multiplicación de y, en el lado derecho y tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = y(xy^3) - y(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = xy^4 - y$$

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^4$$

$$\boldsymbol{y' + y = xy^4}$$

Donde: $\boldsymbol{p(x) = 1}$ y $\boldsymbol{q(x) = x}$ **, y n = 4**

Por lo que la ecuación **es una ecuación de Bernoulli**.

5.- ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Una ecuación diferencial en su forma estándar, es homogénea si:

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

Para cualquier número real "***t***". Es decir, que al multiplicar la función por cualquier número real, el resultado debe de ser igual al lado derecho de la ecuación o ***F(x,y)***. Es decir, que el lado derecho de la ecuación se pueda expresar como una función que sólo dependa del cociente y/x

Ejemplos:

a) determine si la siguiente ecuación diferencial es homogénea:

$$y' = \frac{y + x}{x}$$

Multiplicamos el lado derecho por el número real "t" y tenemos:

$$f(tx, ty) = \frac{ty + tx}{tx}$$

$$f(tx, ty) = \frac{t(y + x)}{tx}$$

$$f(tx, ty) = \frac{y + x}{x}$$

Qué es igual al lado derecho o sea, a ***f(x,y)***, Por lo tanto, la ecuación **es Homogénea**.

b) determine si la siguiente ecuación diferencial es homogénea:

$$y' = \frac{y^2}{x}$$

Multiplicamos el lado derecho por el número real "t" y tenemos:

$$f(tx, ty) = \frac{(ty)^2}{tx}$$

$$f(tx,ty) = \frac{t^2y^2}{tx}$$

$$f(tx,ty) = t\frac{y^2}{x} \neq f(x,y)$$

Qué no es igual al lado derecho o sea, a ***f(x,y),*** Por lo tanto, la ecuación **No es Homogénea**.

6.- ECUACIONES SEPARABLES

Vamos a considerar la forma diferencial de una ED, que recordemos es de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Entonces, si $M(x,y) = A(x)$, que es una función sólo de $\boldsymbol{x}$, y $N(x,y) = B(y)$, que es una función sólo de $\boldsymbol{y}$, entonces, la ecuación diferencial, es separable, o presenta sus variables separadas producto de una factorización. Con lo que la ecuación anterior de acuerdo con los términos $A(x)$ y $B(y)$, quedará igualmente estructurada de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)\,B(y)$$

Ejemplos: Determinar si la ecuación diferencial es separable.

a) $sen\,x\,dx + y^2\,dy = 0$

Al identificar los dos términos de la ecuación tenemos que:

$M(x,y) = A(x) = sen\,x$ Que es en función de solo de x

$N(x,y) = B(y) = y^2$, Que es en función solo de y

Por lo que la función **es separable**

b) $xy^2\,dx - x^2y^2\,dy = 0$

Al identificar los dos términos de la ecuación tenemos que:

$M(x,y) = A(x) = xy^2$ Que no es en función de solo de $\boldsymbol{x}$, pues posee "$\boldsymbol{y}$"

$N(x,y) = B(y) = x^2y^2$, Que no es en función de solo de $\boldsymbol{y}$

Pero si se dividen ambos lados de la ecuación original por x^2y^2, se obtiene la ecuación:

$$\frac{1}{x}\,dx + (-1)dy = 0$$

Donde:

$$M(x,y) = A(x) = \frac{1}{x}$$

$$N(x,y) = B(y) = -1$$

Que es una función **separable.**

c) $(1 + xy)dx + y\,dy = 0$

Al identificar los dos términos de la ecuación tenemos que:

$M(x,y) = A(x) = 1 + xy$ Que no es en función de solo de $\boldsymbol{x}$, pues posee "$\boldsymbol{y}$"

$N(x,y) = B(y) = y$, Que es en función de solo de $\boldsymbol{y}$

No se puede hacer nada con el primer término, por lo que la función, **no es separable**.

d) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 x\, e^{3x+4y}$

En la ecuación, se puede observar que podemos factorizar $f(x,y)$, en términos de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$, de la siguiente forma:

$$f(x,y) = y^2 x\, e^{3x+4y} = (xe^{3x})(y^2 e^{4y})$$

Donde: $A(x) = (xe^{3x})$ y $B(y) = (y^2 e^{4y})$

Por lo tanto: La ecuación **es Separable**

e) $\frac{dy}{dx} = y + sen\, x$

En esta ecuación no existe forma de poder expresar el lado derecho $y + sen\, x$, como un producto de una función de $\boldsymbol{x}$ por una función de $\boldsymbol{y}$. Por lo tanto, la ecuación **No es separable**.

7.- ECUACIONES EXACTAS

Una ecuación en su forma diferencial: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, es exacta si:

$$\frac{\vartheta M(x,y)}{\vartheta y} = \frac{\vartheta N(x,y)}{\vartheta x}$$

La exactitud solo se define para ecuaciones en la forma diferencial, no para la forma estándar. Así que cuando se presente una ecuación en la forma estándar, el primer paso es convertirla a su forma diferencial.

Ejemplos: Determinar si la ecuación diferencial es exacta.

a) $3x^2y\,dx + (y + x^3)dy = 0$

Al identificar los dos términos de la ecuación tenemos que:

$$M(x, y) = 3x^2y$$

$$N(x, y) = y + x^3$$

Donde:

$$\frac{\vartheta M}{\vartheta y} = 3x^2$$

$$\frac{\vartheta N}{\vartheta x} = 3x^2$$

De este modo:

$$\frac{\vartheta M}{\vartheta y} = \frac{\vartheta N}{\vartheta x}$$

Por lo tanto, la ecuación **es exacta**

b) $xy\,dx + y^2\,dy = 0$

Al identificar los dos términos de la ecuación tenemos que:

$$M(x, y) = xy$$

$$N(x, y) = y^2$$

Donde:

$$\frac{\vartheta M}{\vartheta y} = x$$

$$\frac{\vartheta N}{\vartheta x} = 0$$

De este modo:

$$\frac{\vartheta M}{\vartheta y} \neq \frac{\vartheta N}{\vartheta x}$$

Por lo tanto, la ecuación **No es exacta**

8.- Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden. SOLUCIONES

I) En los siguientes ejercicios. Determine si la ecuación diferencial es Homogénea

$$a)\ y' = \frac{2xye^{x/y}}{x^2 + y^2\ sen\ \frac{x}{y}}$$

Multiplicamos el lado derecho por el número real "t" y tenemos:

$$f(tx, ty) = \frac{2(tx)(ty)e^{tx/ty}}{(tx)^2 + \ (ty)^2\ sen\ \frac{tx}{ty}}$$

$$f(tx, ty) = \frac{t^2 2xye^{x/y}}{t^2x^2 + \ t^2y^2\ sen\ \frac{x}{y}}$$

$$f(tx, ty) = \frac{t^2 2xye^{x/y}}{t^2(x^2 + \ y^2)\ sen\ \frac{x}{y}}$$

$$f(tx, ty) = \frac{2xye^{\frac{x}{y}}}{(x^2 + \ y^2)\ sen\ \frac{x}{y}} = f(x, y)$$

Qué es igual al lado derecho o sea, a *f(x,y)*, Por lo tanto, la ecuación **es Homogénea**.

$$\text{b)}\ y' = \frac{x^2 + y}{x^3}$$

Multiplicamos el lado derecho por el número real "t" y tenemos:

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 + \ ty}{(tx)^3}$$

$$f(tx,ty) = \frac{t^2x^2 + ty}{t^3x^3}$$

$$f(tx,ty) = \frac{t(tx^2 + y)}{t^3x^3}$$

$$f(tx,ty) = \frac{tx^2 + y}{t^2x^3} \neq f(x,y)$$

Qué No es igual al lado derecho o sea, a *f(x,y),* Por lo tanto, la ecuación **No es Homogénea**.

c) $y' = xy + 1$

Multiplicamos el lado derecho por el número real "t" y tenemos:

$$f(tx,ty) = txty + 1$$

$$f(tx,ty) = t^2xy + 1 \neq f(x,y)$$

Qué No es igual al lado derecho o sea, a *f(x,y),* Por lo tanto, la ecuación **No es Homogénea**.

d) $y' = \frac{x^2}{y^2}$

Multiplicamos el lado derecho por el número real "t" y tenemos:

$$f(tx,ty) = \frac{tx^2}{ty^2} = f(x,y)$$

Qué es igual al lado derecho o sea, a *f(x,y),* Por lo tanto, la ecuación **es Homogénea**.

II) Determine si las ecuaciones diferenciales siguientes son exactas

a) $(4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0$

$$\frac{\vartheta M}{\vartheta y} = (4x^3y^3 - 2xy)$$

$$\frac{\vartheta M}{\vartheta y} = 12\,x^3y^2 - 2x$$

$$\frac{\vartheta N}{\vartheta x} = (3x^4y^2 - x^2)$$

$$\frac{\vartheta N}{\vartheta x} = 12\,x^3y^2 - 2x$$

Por lo tanto se observa que: $\frac{\vartheta N}{\vartheta x} = \frac{\vartheta N}{\vartheta x}$, por lo que la ecuación **es Exacta**

b) $(\cos y + y\cos x)\,dx + (sen\,x - x\,sen\,y)dy = 0$

$$\frac{\vartheta M}{\vartheta y} = (\cos y + y\cos x)$$

$$\frac{\vartheta M}{\vartheta y} = -seny + \cos x$$

$$\frac{\vartheta N}{\vartheta x} = (senx - xsen\,y)$$

$$\frac{\vartheta N}{\vartheta x} = -seny + \cos x$$

Por lo tanto se observa que: $\boldsymbol{\frac{\vartheta N}{\vartheta x} = \frac{\vartheta N}{\vartheta x}}$, por lo que la ecuación **es Exacta**

c) $(2\,x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0$

$$\frac{\vartheta M}{\vartheta y} = \left(2\,x^3 + \,3y\right)$$

$$\frac{\vartheta M}{\vartheta y} = \,3$$

$$\frac{\vartheta N}{\vartheta x} = \,(3x + y - 1)$$

$$\frac{\vartheta N}{\vartheta x} = \,3$$

Por lo tanto se observa que: $\frac{\vartheta N}{\vartheta x} = \frac{\vartheta N}{\vartheta x}$, por lo que la ecuación **es Exacta**

d) $(6\,x^5y^3 + \,4x^3y^5)dx + \,(3\,x^6y^2 + \,5x^4y^4)dy = 0$

$$\frac{\vartheta M}{\vartheta y} = \,(6\,x^5y^3 + \,4x^3y^5)$$

$$\frac{\vartheta M}{\vartheta y} = \,18\,x^5y^2 + \,20x^3y^4$$

$$\frac{\vartheta N}{\vartheta x} = \,(3\,x^6y^2 + \,5x^4y^4)$$

$$\frac{\vartheta N}{\vartheta x} = \,18\,x^5y^2 + \,20x^3y^4$$

Por lo tanto se observa que: $\frac{\vartheta N}{\vartheta x} = \frac{\vartheta N}{\vartheta x}$, por lo que la ecuación **es Exacta**

III) Determine si las ecuaciones diferenciales siguientes son separables, ya sea en su forma original o por sustitución, ¿Por qué?

a) $sen\,x\,dx + \,y^2\,dy = 0$

Identificamos los dos términos de la ecuación, entonces tenemos que:

$M(x, y) = A(x) = senx$ Que es en función de solo de x

$N(x, y) = B(y) = \,y^2$, Que es en función solo de y

Por lo que la función **es separable**

b) $xy^2dx - \,x^2y^2dy = 0$

Al identificar los dos términos de la ecuación tenemos que:

$M(x, y) = A(x) = xy^2$ Que no es en función de solo de $\boldsymbol{x}$, pues posee "$\boldsymbol{y}$"

$N(x,y) = B(y) = x^2y^2$, Que no es en función de solo de $\boldsymbol{y}$

Pero si se dividen ambos lados de la ecuación original por x^2y^2 , se obtiene la ecuación:

$$\frac{1}{x}dx + (-1)dy = 0$$

Donde:

$$M(x,y) = A(x) = \frac{1}{x}$$

$$N(x,y) = B(y) = -1$$

Que es una función **separable.**

c) $(1+x)\,dx + ydy = 0$

$M(x,y) = A(x) = 1 + x$ Que es en función de solo de $\boldsymbol{x}$

$N(x,y) = B(y) = y$, Que es en función de solo de $\boldsymbol{y}$

Por lo que la función, **es separable**.

IV) Obtener la ecuación diferencial asociada con la primitiva indicada.

a) $y = C\,x^2 + C^2$

Tenemos aquí una constante arbitraria de segundo grado, entonces la ecuación diferencial resultante debe de ser de grado dos.

Para sustituir C, tenemos que encontrar $\frac{dy}{dx}$, de esta forma

$$\frac{dy}{dx} = C\,x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2C\,x$$

Por lo que:

$$C = \frac{1}{2x}\frac{dy}{dx}$$

Como: $y = C\,x^2 + C^2$, tenemos que:

$$y = \frac{1}{2x}\frac{dy}{dx}x^2 + \left(\frac{1}{2x}\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$y = \frac{1}{2x}\frac{dy}{dx}x^2 + \frac{1}{4x^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Por lo que al simplificar y dejar la ecuación en su forma diferenciada, tenemos que:

$$4x^2 y = \frac{1}{2x}\frac{dy}{dx}x^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x^3\frac{dy}{dx} - 4x^2 y = 0$$

Que es la ecuación diferencial solicitada.

b) $y = A\,x + B$

Tenemos dos constantes arbitrarias, por lo que hay que derivar dos veces:

a) La primitiva: $y = A\,x + B$

b) La primera derivada: $\frac{dy}{dx} = A$

c) Segunda derivada: $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

De este modo, la última ecuación, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, ó $\boldsymbol{y'' = 0}$, está libre de constantes arbitrarias y es de un orden adecuado, así que ésta es la ecuación solicitada.

c) $y = Ax$

Tenemos una constante arbitraria, por lo que hay que derivar una vez:

a) La primitiva: $y = Ax$

b) La primera derivada: $\frac{dy}{dx} = A$

Sustituyendo este valor en la ecuación primitiva tenemos que:

$$y = Ax$$

$$y = \frac{dy}{dx}x$$

$0 = \frac{dy}{dx}x - y$, despejando nos queda: $\boldsymbol{y' = \frac{y}{x}}$

Que es la ecuación solicitada

V) Clasifique cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales como: Separable, exacta, homogénea o de Bernoulli (indique los valor de ***p(x)*** , ***q(x)*** y ***n***). Algunas pueden ser de más de una clase.

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x}$, ó $y' = \frac{x-y}{x}$,

Tenemos una forma estándar, y la forma diferencial de ella sería:

$$(x - y)dx + x\, dy = 0$$

Multiplicamos el lado derecho por el número real "t" y tenemos:

$$f(tx, ty) = \frac{tx - ty}{tx}$$

$$f(tx, ty) = \frac{t(x - y)}{tx}$$

$$f(tx, ty) = \frac{x - y}{x}$$

Qué es igual al lado derecho o sea, a ***f(x,y)***, Por lo tanto, la ecuación **es Homogénea**.

Al identificar los dos términos de la ecuación tenemos que:

$$M(x, y) = x - y$$

$$N(x, y) = -x$$

Donde:

$$\frac{\vartheta M}{\vartheta y} = -1$$

$$\frac{\vartheta N}{\vartheta x} = -1$$

De este modo:

$$\frac{\vartheta M}{\vartheta y} = \frac{\vartheta N}{\vartheta x}$$

Por lo tanto, la ecuación **es exacta**

b) $(x+1)\frac{dy}{dx} = -y + 10$

Primero obtenemos la forma estándar o normal, para ello, despejamos $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y+10}{(x+1)}$$

Al factorizar tenemos que:

$$dy = \frac{dx(-y+10)}{(x+1)}$$

$$\frac{1}{-y+10}dy = \frac{1}{(x+1)}dx$$

$$0 = \frac{1}{(x+1)}dx - \frac{1}{-y+10}dy$$

Identificando los términos tenemos que:

$$M(x,y) = A(x) = \frac{1}{(x+1)}$$

Que es en función solo de x

$$N(x,y) = B(y) = -\frac{1}{-y+10}$$

Que es en función solo de y

Por lo tanto, la ecuación sería en este caso **Separable**

Otra forma de ver la solución sería que, este tipo de ecuación como ya se vio en la teoría, tiene infinitas posibilidades de soluciones, la más común es la relacionada a la forma general de la forma diferencial, en donde *M(x,y) dx* y *N(x,y)dy*, están asociados de acuerdo a la distribución:

De acuerdo a la forma diferencial *M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0*, en donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{-N(x,y)}$$

En cuyo caso, *M(x,y)* estaría asociada a $-y + 10$, y *N(x,y)* a$(x + 1)$,

Sin embargo, entre las infinitas posibilidades, está la de escribir el numerador como denominador y viceversa, por lo que la forma diferencial quedaría de la siguiente forma:

$$(x + 1)dx + (y - 10)dy = 0$$

Identificando los términos tenemos que:

$$M(x,y) = A(x) = \ x + 1$$

Que es en función solo de x

$$N(x,y) = B(y) = \ y - 10$$

Que es en función solo de y

Por lo tanto, la ecuación **es Separable**

De la misma forma, una vez identificados los términos de la ecuación diferencial, Donde las derivadas:

$$\frac{\vartheta M}{\vartheta y} = \ 1$$

$$\frac{\vartheta N}{\vartheta x} = \ 1$$

De este modo:

$$\frac{\vartheta M}{\vartheta y} = \frac{\vartheta N}{\vartheta x}$$

Por lo tanto, la ecuación **es exacta**

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+y}{x^2+x}$

Al factorizar tenemos que:

$$dy = \frac{dx(y^2 + y)}{x^2 + x}$$

$$\frac{1}{y^2 + y}dy = \frac{1}{x^2 + x}dx$$

$$0 = \frac{1}{x^2 + x}dx - \frac{1}{y^2 + y}dy$$

Identificando los términos tenemos que:

$$M(x,y) = A(x) = \frac{1}{x^2 + x}$$

Que es en función solo de x

$$N(x,y) = B(y) = -\frac{1}{y^2 + y}$$

Que es en función solo de y

Por lo tanto, la ecuación sería en este caso **Separable**

Otra forma de ver la solución sería que, este tipo de ecuación como ya se vio en la teoría, tiene infinitas posibilidades de soluciones, la más común es la relacionada a la forma general de la forma diferencial, en donde *M(x,y) dx* y *N(x,y)dy*, están asociados de acuerdo a la distribución:

De acuerdo a la forma diferencial *M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0*, en donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{-N(x,y)}$$

En cuyo caso, *M(x,y)* estaría asociada a $y^2 + y$, y *N(x,y)* a $x^2 + x$,

Sin embargo, entre las infinitas posibilidades, está la de escribir el numerador como denominador y viceversa, por lo que la forma diferencial quedaría de la siguiente forma:

$$(x^2 + x)\,dx + (y^2 + y)\,dy = 0$$

Identificando los términos tenemos que:

$$M(x, y) = A(x) = x^2 + x$$

Que es en función solo de x

$$N(x, y) = B(y) = y^2 + y$$

Que es en función solo de y

Por lo tanto, la ecuación sería en este caso **Separable**

d) $xyy' + y^2 = 2x$

Dividimos ambos lados de la ecuación entre xy, y tenemos:

$$\frac{xyy'}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{2x}{xy}$$

$$y' + \frac{y}{x} = 2y^{-1}$$

Donde: $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 2$,n = -1

Por lo que la ecuación es una ecuación de **Bernoulli**

e) $x\frac{dy}{dx} = ye^{x/y} - x$

Dividimos la ecuación en ambos términos por x, y tenemos:

$$\frac{x}{x}\frac{dy}{dx} = \frac{ye^{x/y}}{x} - \frac{x}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ye^{x/y}}{x} - 1$$

$$y' = \frac{ye^{x/y}}{x} - 1$$

$$y' = \frac{ye^{x/y} - \ x}{x}$$

Multiplicamos el lado derecho por el número real "t", tenemos:

$$f(tx, ty) = \frac{t\left(ye^{x/y} - \ x\right)}{tx}$$

$$f(tx, ty) = \frac{ye^{x/y} - \ x}{x}$$

Que es igual al lado derecho *f(x,y)*. Por lo tanto, la ecuación **es Homogénea**

f) $\frac{dy}{dx} = 5y + \ y^2$

Escribiendo la ecuación anterior en su forma diferencial, tenemos:

$$(5y + \ y^2)dy + dx = 0$$

Identificando los dos términos de la ecuación, tenemos:

Identificando los términos tenemos que:

$$M(x, y) = A(x) = \ 1$$

Que es en función solo de x

$$N(x, y) = B(y) = 5y + \ y^2$$

Que es en función solo de y

Por lo tanto, la ecuación **es Separable**

De la ecuación original: $\frac{dy}{dx} = 5y + \ y^2$ ordenando los términos tenemos:

$$\frac{dy}{dx} - 5y = y^2$$

Donde: $p(x) = -5,\ q(x) = 1$, n = 2

Por lo que la ecuación es una ecuación de **Bernoulli**

g) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1$

Al factorizar el lado derecho, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2 + yx}{yx}$$

Multiplicamos el lado derecho por el número real "t" y tenemos:

$$f(tx, ty) = \frac{t(x^2 + y^2 + yx)}{t(yx)}$$

$$f(tx, ty) = \frac{t^2 x^2 + t^2 y^2 + ty\,tx)}{ty\,tx}$$

$$f(tx, ty) = \frac{t^2(x^2 + y^2 + yx)}{t^2(yx)}$$

$$f(tx, ty) = \frac{x^2 + y^2 + yx}{yx}$$

Qué es igual al lado derecho o sea, a ***f(x,y)***, Por lo tanto, la ecuación **es Homogénea**.

8.1.- Ejercicios de Repaso de ecuaciones diferenciales de primer orden. **SOLUCIONES**

I) En los siguientes ejercicios. DETERMINE Y COMPRUEBE, que tipo de ecuación es: Exacta, homogénea, separable, Bernoulli, o ninguna de las anteriores.

a) $2xy\,dx + (1 + x^2)dy = 0$

Primero debemos de determinar si es exacta, en cuyo caso debe de existir una función que representa a la familia de soluciones de dicha ecuación.

Así que identificamos los términos de la ecuación diferencial en su forma diferenciada y tenemos que:

$$M(x,y) = 2xy$$

$$N(x,y) = (1 + x^2)$$

Entonces, al calcular las derivadas:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2xy = 2x$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = (1 + x^2) = 2x$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lo que demuestra que la ecuación **es exacta**.

No es Homogénea

No es separable

No es Bernoulli

b) $ydx - xdy = 0$

Primero debemos reescribir la ecuación en su forma estándar de la siguiente forma.

$$ydx = xdy$$

$$\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$$

$$y' = \frac{y}{x}$$

Ahora, una ecuación diferencial en su forma estándar, es homogénea si:

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

Para cualquier número real "***t***". Es decir, que al multiplicar la función por cualquier número real, el resultado debe de ser igual al lado derecho de la ecuación o ***F(x,y)***. Es decir, que el lado derecho de la ecuación se pueda expresar como una función que sólo dependa del cociente y/x, lo que nos da la ecuación anterior:

Multiplicamos el lado derecho por el número real "t" y tenemos:

$$f(tx, ty) = \frac{ty}{tx}$$

$$f(tx, ty) = \frac{y}{x}$$

Qué es igual al lado derecho o sea, a ***f(x,y)***, Por lo tanto, la ecuación **es Homogénea**.

No es Exacta

No es separable

No es Bernoulli

c) $(x + sen\ y)dx + (x\ cosy - 2y)dy = 0$

Primero debemos de determinar si es exacta, en cuyo caso debe de existir una función que representa a la familia de soluciones de dicha ecuación.

Así que identificamos los términos de la ecuación diferencial en su forma diferenciada y tenemos que:

$$M(x,y) = (x + sen\ y)$$

$$N(x,y) = (x\ cosy - 2y)$$

Entonces, al calcular las derivadas:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = (x + sen\ y) = cosy$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = (x\ cosy - 2y) = cosy$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lo que demuestra que la ecuación **es exacta**.

No es Homogénea

No es separable

No es Bernoulli

d) $(xy+1)dx + (xy-1)dy = 0$

Primero debemos reescribir la ecuación en su forma estándar de la siguiente forma.

$$(xy-1)dy = -(xy+1)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(xy+1)}{(xy-1)}$$

$$y' = \frac{-(xy+1)}{(xy-1)}$$

Ahora, una ecuación diferencial en su forma estándar, es homogénea si:

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

Para cualquier número real "***t***". Es decir, que al multiplicar la función por cualquier número real, el resultado debe de ser igual al lado derecho de la ecuación o ***F(x,y)***. Es decir, que el lado derecho de la ecuación se pueda expresar como una función que sólo dependa del cociente y/x, lo que nos da la ecuación anterior:

Multiplicamos el lado derecho por el número real "t" y tenemos:

$$f(tx, ty) = \frac{t(-xy-1)}{t(xy-1)}$$

$$f(tx, ty) = \frac{-(xy+1)}{(xy-1)}$$

Qué es igual al lado derecho o sea, a ***f(x,y)***, Por lo tanto, la ecuación **es Homogénea**.

No es Exacta

No es separable

No es Bernoulli

e) $3x^2y^2\ dx + (2x^3y + 4\ y^3)dy = 0$

Primero debemos de determinar si es exacta, en cuyo caso debe de existir una función que representa a la familia de soluciones de dicha ecuación.

Así que identificamos los términos de la ecuación diferencial en su forma diferenciada y tenemos que:

$$M(x, y) = 3x^2y^2$$

$$N(x, y) = \left(2x^3y + 4\ y^3\right)$$

Entonces, al calcular las derivadas:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 3x^2y^2 = 6x^2y$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \left(2x^3y + 4\ y^3\right) = 6x^2y$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lo que demuestra que la ecuación **es exacta**.

No es Homogénea

No es separable

No es Bernoulli

f) $(x-y)dx+(x+y)dy=0$

Primero debemos reescribir la ecuación en su forma estándar de la siguiente forma.

$$(x+y)dy=-(x-y)dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(x-y)}{(x+y)}$$

$$y'=\frac{(y-x)}{(x+y)}$$

Ahora, una ecuación diferencial en su forma estándar, es homogénea si:

$$f(tx,ty)=f(x,y)$$

Para cualquier número real "***t***". Es decir, que al multiplicar la función por cualquier número real, el resultado debe de ser igual al lado derecho de la ecuación o ***F(x,y)***. Es decir, que el lado derecho de la ecuación se pueda expresar como una función que sólo dependa del cociente y/x, lo que nos da la ecuación anterior:

Multiplicamos el lado derecho por el número real "t" y tenemos:

$$f(tx,ty)=\frac{t(y-x)}{t(x+y)}$$

$$f(tx,ty)=\frac{(y-x)}{(x+y)}$$

Qué es igual al lado derecho o sea, a ***f(x,y)***, Por lo tanto, la ecuación **es Homogénea**.

No es Exacta

No es separable

No es Bernoulli

9.- SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN EXACTAS

9.1- DEFINICIÓN

Vamos a recordar que analizamos la ecuación diferencial de primer orden en su forma diferencial siguiente:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

La cual se considera exacta, si existe una función $G(x,y)$, de tal modo que:

$$G(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \qquad (2)$$

Ahora, si $M(x,y)$, y $N(x,y)$, son funciones continuas y poseen primeras derivadas parciales continuas sobre algún rectángulo del plano xy , entonces la ecuación (1), es exacta, si y solo si:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad (3)$$

9.2.- MÉTODO DE SOLUCIÓN

Para poder resolver la ecuación (1), que por (3) se demuestra que es exacta, entonces, existe el potencial $G(x,y)$, tal que:

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad (4)$$

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \qquad (5)$$

Para $G(x,y)$, entonces la solución general para (1), está dada implícitamente por:

$$G(x,y) = C \qquad (6)$$

En donde C, representa una constante arbitraria.

Para obtener "G", se procede como sigue:

Se integra $G(x,y)$, respecto a una sola de sus variables, en este caso x, de la siguiente forma:

$$G(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \qquad (7)$$

Donde $g(y)$, es una constante de integración que depende de la variable "y", y que ha permanecido constante durante la integración. Hay que notar que para determinar a $G(x,y)$, solo resta encontrar a $g(y)$.

Ahora, si derivamos con respecto a "y", tenemos que:

$$N(x,y) = \frac{\partial(\int M(x,y)dx\,)}{\partial\, y} + \; g'(y) \qquad (8)$$

Entonces, al simplificar (8), tenemos que:

$$g'(y) = \; N(x,y) - \; \frac{\partial(\int M(x,y)dx\,)}{\partial\, y} \qquad (9)$$

Ahora, integrando respecto a "y", y sustituyendo el resultado en (7), obtenemos de la expresión anterior $g(y)$. En donde la solución general es la solución implícita presentada en (6), que es:

$$G(x,y) = C\;,\;\; C \in \;\mathbb{R} \qquad (10)$$

Que representa la familia de soluciones de la ED

9.3- EJEMPLOS

Ejemplo (1)

Determinar si la ecuación diferencial

$$2xydx + (1 + \; x^2)dy = 0$$

Es exacta y en caso de que lo sea, resolverla. Primero debemos de determinar si es exacta, en cuyo caso debe de existir una función que representa a la familia de soluciones de dicha ecuación.

Así que identificamos los términos de la ecuación diferencial en su forma diferenciada y tenemos que:

$$M(x,y) = 2xy$$

$$N(x,y) = \; 1 + \; x^2$$

Entonces, al calcular las derivadas:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2\;xy = 2x$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 1 + \; x^2 \; = 2x$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lo que demuestra que la ecuación **es exacta**.

Ahora vamos a determinar una función $G(x, y)$, que satisfaga las ecuaciones (4) y (5). De acuerdo a la teoría vista, vamos a integrar $G(x, y)$, respecto a la variable x, así que sustituimos el valor de $M(x, y) = 2xy$, en (4), con lo que tenemos:

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2xy$$

Ahora, al integrar ambos lados por la ecuación (7), tenemos que:

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\, dx = \int M(x, y) dx$$

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\, dx = \int (2xy) dx$$

Lo que resulta:

$$G(x, y) = x^2 y + g(y)$$

Ahora, hay que determinar $g(y)$, para ello, derivamos la ecuación anterior, con respecto a "y" y tenemos:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = x^2 + g'(y)$$

El siguiente paso es sustituir esta ecuación con $N(x, y) = 1 + x^2$, en la ecuación (5) y tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = N(x, y)$$

$$x^2 + g'(y) = 1 + x^2$$

Donde al simplificar $g'(y)$, tenemos que:

$$g'(y) = 1 + x^2 - x^2$$

$$g'(y) = 1$$

Al integrar esta última ecuación respecto a "y", tenemos que:

$$g(y) = y + C_1$$

En donde, C_1 , es una constante.

Sustituyendo esto en

$$G(x,y) = x^2y + g(y)$$

Tenemos que:

$$G(x,y) = x^2y + y + C_1$$

Ahora, recordemos que la solución general de la ED, está dada implícitamente en (6) por la ecuación:

$$G(x,y) = C$$

Entonces, sustituimos este valor en la última ecuación y tenemos:

$$G(x,y) = x^2y + y + C_1$$

$$C = x^2y + y + C_1$$

Donde:

$$x^2y + y = C - C_1$$

Hacemos: $C_2 = C - C_1$, y tenemos que:

$$x^2y + y = C_2$$

Al simplificar, tenemos:

$$\boldsymbol{y(x^2 + 1) = C_2}$$

Que es **la familia de soluciones de la ED** buscada.

También, podemos resolver explícitamente esta ecuación para "y", Por lo que:

$$\boldsymbol{y = \frac{C_2}{x^2 + 1}}$$

Que es la familia de soluciones de la ED buscada.

Ejemplo (2)

Determinar si la ecuación diferencial

$$(x + sen\ y)dx + (x \cos y - 2y)dy = 0$$

Es exacta y en caso de que lo sea, resolverla. Primero debemos de determinar si es exacta, en cuyo caso debe de existir una función que representa a la familia de soluciones de dicha ecuación.

Así que identificamos los términos de la ecuación diferencial en su forma diferenciada y tenemos que:

$$M(x, y) = x + sen\ y$$

$$N(x, y) = x \cos y - 2y$$

Entonces, al calcular las derivadas:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = x + sen\ y = \cos y$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = x \cos y - 2y = \cos y$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lo que demuestra que la ecuación **es exacta**.

Ahora vamos a determinar una función $G(x, y)$, que satisfaga las ecuaciones (4) y (5). De acuerdo a la teoría vista, vamos a integrar $G(x, y)$, respecto a la variable x, así que sustituimos el valor de $M(x, y) = x + sen\ y$, en (4), con lo que tenemos:

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = x + sen\ y$$

Ahora, al integrar ambos lados por la ecuación (7), tenemos que:

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\, dx = \int M(x, y) dx$$

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\, dx = \int (x + sen\ y) dx$$

Lo que resulta:

$$G(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x\,sen\,y + g(y)$$

Ahora, hay que determinar $g(y)$, para ello, derivamos la ecuación anterior, con respecto a "y" y tenemos:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \partial(\frac{1}{2}x^2 + x\,sen\,y + g(y))$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = x\cos y + g'(y)$$

El siguiente paso es sustituir esta ecuación con $N(x,y) = x\cos y - 2y$, en la ecuación (5) y tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = N(x,y)$$

$$x\cos y + g'(y) = x\cos y - 2y$$

Donde al simplificar $g'(y)$, tenemos que:

$$g'(y) = x\cos y - 2\,y - x\cos y$$

$$g'(y) = -2\,y$$

Al integrar esta última ecuación respecto a "y", tenemos que:

$$g(y) = -y^2 + C_1$$

En donde, C_1 , es una constante.

Sustituyendo esto en

$$G(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x\,sen\,y + g(y)$$

Tenemos que:

$$G(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x\,sen\,y - y^2 + C_1$$

Ahora, recordemos que la solución general de la ED, está dada implícitamente en (6) por la ecuación:

$$G(x,y) = C$$

Entonces, sustituimos este valor en la última ecuación y tenemos:

$$G(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x \, sen \, y - y^2 + C_1$$

$$C = \frac{1}{2}x^2 + x \, sen \, y - y^2 + C_1$$

Donde:

$$\frac{1}{2}x^2 + x \, sen \, y - y^2 = C - C_1$$

Hacemos: $C_2 = C - C_1$, y tenemos que:

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}x^2 + x \, sen \, y - y^2 = C_2}$$

Que **es la familia de soluciones de la ED** buscada.

Ejemplo (3)

Determinar si la ecuación diferencial

$$y' = \frac{2 + y\, e^{x\,y}}{2y - x\, e^{x\,y}}$$

Es exacta y en caso de que lo sea, resolverla.

La ecuación anterior está expresada en la forma normal, por lo que se debe de transformar a la forma diferencial, entonces tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 + y\, e^{x\,y}}{2y - x\, e^{x\,y}}$$

Donde, la forma diferencial queda de la siguiente manera:

$$(2 + y\, e^{x\,y})dx + (x\, e^{x\,y} - 2y\,)dy = 0$$

Ahora debemos de determinar si es exacta, en cuyo caso debe de existir una función que representa a la familia de soluciones de dicha ecuación.

Así que identificamos los términos de la ED en su forma diferenciada y tenemos que:

$$M(x,y) = 2 + y\, e^{x\,y}$$

$$N(x,y) = x\,e^{x\,y} - 2y$$

Entonces, al calcular las derivadas:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2 + y\,e^{x\,y} = e^{x\,y} + x\,ye^{x\,y}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = x\,e^{x\,y} - 2y = e^{x\,y} + x\,ye^{x\,y}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lo que demuestra que la ecuación **es exacta**.

Ahora vamos a determinar una función $G(x,y)$, que satisfaga las ecuaciones (4) y (5). De acuerdo a la teoría vista, vamos a integrar $G(x,y)$, respecto a la variable x, así que sustituimos el valor de $M(x,y) = 2 + y\,e^{x\,y}$, en (4), con lo que tenemos:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2 + y\,e^{x\,y}$$

Ahora, al integrar ambos lados por la ecuación (7), tenemos que:

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\,dx = \int M(x,y)dx$$

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\,dx = \int (2 + y\,e^{x\,y})dx$$

Lo que resulta:

$$G(x,y) = 2x + e^{x\,y} + g(y)$$

Ahora, hay que determinar $g(y)$, para ello, derivamos la ecuación anterior, con respecto a "y" y tenemos:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \partial(2x + e^{x\,y} + g(y))$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = xe^{x\,y} + g'(y)$$

El siguiente paso es sustituir este resultado junto con $N(x,y) = x\,e^{x\,y} - 2y$, en la ecuación (5) y tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = N(x,y)$$

$$xe^{x\,y} + g'(y) = x\,e^{x\,y} - 2y$$

Donde al simplificar $g'(y)$, tenemos que:

$$g'(y) = x\,e^{x\,y} - 2y - x\,e^{x\,y}$$

$$g'(y) = -2\,y$$

Al integrar esta última ecuación respecto a "y", tenemos que:

$$g(y) = -y^2 + C_1$$

En donde, C_1 , es una constante.

Sustituyendo esto en

$$G(x,y) = 2x + e^{x\,y} + g(y)$$

Tenemos que:

$$G(x,y) = 2x + e^{x\,y} - y^2 + C_1$$

Ahora, recordemos que la solución general de la ED, está dada implícitamente en (6) por la ecuación:

$$G(x,y) = C$$

Entonces, sustituimos este valor en la última ecuación y tenemos:

$$G(x,y) = 2x + e^{x\,y} - y^2 + C_1$$

$$C = 2x + e^{x\,y} - y^2 + C_1$$

Donde:

$$2x + e^{x\,y} - y^2 = C - C_1$$

Hacemos: $C_2 = C - C_1$, y tenemos que:

$$\boldsymbol{2x + e^{x\,y} - y^2 = C_2}$$

Que **es la familia de soluciones de la ED** buscada.

9.4.- Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden Exactas. SOLUCIONES

I) En los siguientes ejercicios. Determine si la ecuación diferencial es Exacta y resuelva aquellas que lo sean.

a) $(y + 2xy^3)dx + (1 + 3\,x^2y^2 + \,x)dy = 0$

Primero debemos de determinar si es exacta, en cuyo caso debe de existir una función que representa a la familia de soluciones de dicha ecuación.

Así que identificamos los términos de la ecuación diferencial en su forma diferenciada y tenemos que:

$$M(x,y) = y + 2xy^3$$

$$N(x,y) = \;1 + 3\,x^2y^2 + \,x$$

Entonces, al calcular las derivadas:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = y + 2xy^3 = 1 + 6xy^2$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 1 + 3\,x^2y^2 + \,x = 6xy^2 + \,1$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lo que demuestra que la ecuación **es exacta**.

Ahora vamos a determinar una función $G(x,y)$, que satisfaga las ecuaciones (4) y (5). De acuerdo a la teoría vista, vamos a integrar $G(x,y)$, respecto a la variable x, así que sustituimos el valor de $M(x,y) = y + 2xy^3$, en (4), con lo que tenemos:

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = y + 2xy^3$$

Ahora, al integrar ambos lados por la ecuación (7), tenemos que:

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\, dx = \int M(x,y)dx$$

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\, dx = \int (y + 2xy^3)dx$$

Lo que resulta:

$$G(x,y) = yx + x^2y^3 + g(y)$$

Ahora, hay que determinar $g(y)$, para ello, derivamos la ecuación anterior, con respecto a "y" y tenemos:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \partial(yx + x^2y^3 + g(y))$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = x + 3x^2y^2 + g'(y)$$

El siguiente paso es sustituir esta ecuación con $N(x,y) = 1 + 3\,x^2y^2 + x$, en la ecuación (5) y tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = N(x,y)$$

$$x + 3x^2y^2 + g'(y) = 1 + 3\,x^2y^2 + x$$

Donde al simplificar $g'(y)$, tenemos que:

$$g'(y) = 1 + 3\,x^2y^2 + \ x \ - \ x - 3x^2y^2$$

$$g'(y) = 1$$

Al integrar esta última ecuación respecto a "y", tenemos que:

$$g(y) = y + \ C_1$$

En donde, C_1 , es una constante.

Sustituyendo esto en

$$G(x,y) = \ yx + x^2y^3 \ + g(y)$$

Tenemos que:

$$G(x,y) = \ yx + x^2y^3 \ + y + \ C_1$$

Ahora, recordemos que la solución general de la ED, está dada implícitamente en (6) por la ecuación:

$$G(x,y) = C$$

Entonces, sustituimos este valor en la última ecuación y tenemos:

$$G(x,y) = yx + x^2y^3 \ + y + \ C_1$$

$$C = \ yx + x^2y^3 \ + y + \ C_1$$

Donde:

$$yx + x^2y^3 \ + y = C - \ C_1$$

Hacemos: $C_2 = C - \ C_1$, y tenemos que:

$$\boldsymbol{yx + x^2y^3 \ + y = C_2}$$

Que **es la familia de soluciones de la ED** buscada.

b) $(y\ sen\ x + xy \cos x)\ dx + (x\ sen\ x + 1)dy = 0$

Primero debemos de determinar si es exacta, en cuyo caso debe de existir una función que representa a la familia de soluciones de dicha ecuación.

Así que identificamos los términos de la ecuación diferencial en su forma diferenciada y tenemos que:

$$M(x, y) = y\ sen\ x + xy \cos x$$

$$N(x, y) = x\ sen\ x + 1$$

Entonces, al calcular las derivadas:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = y\ sen\ x + xy \cos x = sen\ x + x \cos x$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = x\ sen\ x + 1 = sen\ x + x \cos x$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lo que demuestra que la ecuación **es exacta**.

Ahora vamos a determinar una función $G(x, y)$, que satisfaga las ecuaciones (4) y (5). De acuerdo a la teoría vista, vamos a integrar $G(x, y)$, respecto a la variable x, así que sustituimos el valor de $M(x, y) = y\ sen\ x + xy \cos x$, en (4), con lo que tenemos:

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = y\ sen\ x + xy \cos x$$

Ahora, al integrar ambos lados por la ecuación (7), tenemos que:

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\ dx = \int M(x, y) dx$$

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\ dx = \int (y\ sen\ x + xy \cos x) dx$$

Lo que resulta:

$$G(x, y) = -y \cos x + y\ (\cos x + x\ sen\ x)\ + g(y)$$

Ahora, hay que determinar $g(y)$, para ello, derivamos la ecuación anterior, con respecto a "y" y tenemos:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \partial(-y\cos x + y\,(\cos x + x\,sen\,x)\ + g(y))$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = x\ sen\ x + \ g'(y)$$

El siguiente paso es sustituir esta ecuación con $N(x, y) = \ x\ sen\ x + 1$, en la ecuación (5) y tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = N(x, y)$$

$$x\ sen\ x + \ g'(y)\ = x\ sen\ x + 1$$

Donde al simplificar $g'(y)$, tenemos que:

$$g'(y) = x\ sen\ x + 1 - \ x\ sen\ x$$

$$g'(y) = 1$$

Al integrar esta última ecuación respecto a "y", tenemos que:

$$g(y) = y + \ C_1$$

En donde, C_1 , es una constante.

Sustituyendo esto en

$$G(x, y) = \ -y\cos x + y\,(\cos x + x\,sen\,x)\ + g(y)$$

Tenemos que:

$$G(x, y) = \ -y\cos x + y\,(\cos x + x\,sen\,x)\ + y + \ C_1$$

Ahora, recordemos que la solución general de la ED, está dada implícitamente en (6) por la ecuación:

$$G(x, y) = C$$

Entonces, sustituimos este valor en la última ecuación y tenemos:

$$G(x, y) = \ -y\cos x + y\,(\cos x + x\,sen\,x)\ + y + \ C_1$$

$$C = \ \ -y\cos x + y\ \cos x + xy\,sen\,x\ + y + \ C_1$$

Donde:

$$xy\,sen\,x\ + y = C - \ C_1$$

Hacemos: $C_2 = C - \ C_1$, y tenemos que:

$$\boldsymbol{xy\ sen\ x\ + y = C_2}$$

Que **es la familia de soluciones de la ED** buscada.

c) $(xy + 1)dx + (xy - 1)dy = 0$

Primero debemos de determinar si es exacta, en cuyo caso debe de existir una función que representa a la familia de soluciones de dicha ecuación.

Así que identificamos los términos de la ecuación diferencial en su forma diferenciada y tenemos que:

$$M(x,y) = xy + 1$$

$$N(x,y) = xy - 1$$

Entonces, al calcular las derivadas:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = xy + 1 = x$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = xy - 1 = y$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lo que demuestra que la ecuación **NO es exacta**.

d) $3\,x^2\,y^2 dx + (2x^3 y + 4y^3\,)dy = 0$

Primero debemos de determinar si es exacta, en cuyo caso debe de existir una función que representa a la familia de soluciones de dicha ecuación.

Así que identificamos los términos de la ecuación diferencial en su forma diferenciada y tenemos que:

$$M(x,y) = 3\,x^2\,y^2$$

$$N(x,y) = 2x^3 y + 4y^3$$

Entonces, al calcular las derivadas:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3\,x^2\,y^2 = 6\,x^2 y$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x^3 y + 4y^3\; = 6\,x^2 y$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lo que demuestra que la ecuación **es exacta**.

Ahora vamos a determinar una función $G(x, y)$, que satisfaga las ecuaciones (4) y (5). De acuerdo a la teoría vista, vamos a integrar $G(x, y)$, respecto a la variable x, así que sustituimos el valor de $M(x, y) = 3\ x^2\ y^2$, en (4), con lo que tenemos:

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 3\ x^2\ y^2$$

Ahora, al integrar ambos lados por la ecuación (7), tenemos que:

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\ dx = \int M(x, y) dx$$

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\ dx = \int (3\ x^2\ y^2) dx$$

Lo que resulta:

$$G(x, y) = x^3\ y^2\ + g(y)$$

Ahora, hay que determinar $g(y)$, para ello, derivamos la ecuación anterior, con respecto a "y" y tenemos:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \partial(x^3\ y^2\ + g(y))$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 2x^3\ y + \ g'(y)$$

El siguiente paso es sustituir esta ecuación con $N(x, y) = \ 2x^3 y + 4y^3$, en la ecuación (5) y tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = N(x, y)$$

$$2x^3\, y + g'(y) = 2x^3 y + 4y^3$$

Donde al simplificar $g'(y)$, tenemos que:

$$g'(y) = 2x^3 y + 4y^3 - 2x^3\, y$$

$$g'(y) = 4y^3$$

Al integrar esta última ecuación respecto a "y", tenemos que:

$$g(y) = y^4 + C_1$$

En donde, C_1 , es una constante.

Sustituyendo esto en

$$G(x, y) = x^3\, y^2 + g(y)$$

Tenemos que:

$$G(x, y) = x^3\, y^2 + y^4 + C_1$$

Ahora, recordemos que la solución general de la ED, está dada implícitamente en (6) por la ecuación:

$$G(x, y) = C$$

Entonces, sustituimos este valor en la última ecuación y tenemos:

$$G(x, y) = x^3\, y^2 + y^4 + C_1$$

$$C = x^3\, y^2 + y^4 + C_1$$

Donde:

$$x^3\, y^2 + y^4 = C - C_1$$

Hacemos: $C_2 = C - C_1$, y tenemos que:

$$\boldsymbol{x^3\, y^2 + y^4 = C_2}$$

Que **es la familia de soluciones de la ED** buscada.

e) $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$

Primero debemos de determinar si es exacta, en cuyo caso debe de existir una función que representa a la familia de soluciones de dicha ecuación.

Así que identificamos los términos de la ecuación diferencial en su forma diferenciada y tenemos que:

$$M(x, y) = x - y$$

$$N(x, y) = x + y$$

Entonces, al calcular las derivadas:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = x - y = -1$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = x + y = 1$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lo que demuestra que la ecuación **NO es exacta**.

9.5.- PROGRAMA MATLAB PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

El programa es general, sirve para introducir cualquier tipo de ecuación y comprobar primero si es exacta, es caso de que no lo sea, despliega un mensaje y termina, en caso de que sea exacta, continúa con la rutina y resuelve la ecuación diferencial de forma implícita. Pueden también introducirse los términos, mediante la instrucción "***input***".

```
% Ecuaciones Diferenciales - con Matlab
% Estudios de Cuarto Semestre
% Ingeniería Civil
% Abril - Septiembre 2016
% Docente: Dr. Ligdamis A. Gutiérrez E.

% Solución de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden, Exactas

% Limpieza de escritorio y variables
clear all;
close all;
clc;

% Ejemplo 1 -

% Determinar si la ecuación diferencial
% es exacta, y en caso de que lo sea, resolverla

% Primer paso: Declaración de términos de la ED de la forma
diferenciada

syms x y;           % Declaración de variables simbólicas

%  Prueba de que no es exacta, quitar comentarios y colocarlos en las
%  siguientes dos instrucciones M y N, y comentariar los input

% M = x*y+1;
% N = x*y-1;

% Introducción de los términos mediante Input
M = input('Introduzca el termino M(x,y): ','s');
N = input('Introduzca el termino N(x,y): ','s');

% Comprobar si es exacta, se utilizan las variables M y N introducidas
exacta = diff(M,'y') - diff(N,'x');

% se utiliza disp, para desplegar un mensaje
disp('El resultado es = ');
disp (exacta);

% Validación del caso de que sea exacta o no, se utiliza if - else

if exacta ~= 0  % En caso de que no sea exacta, despliega mensaje y
finaliza

    disp('Al ser el resultado no igual a 0, entonces la Ecuación
Diferencial, NO es Exacta ');

else   % Caso contrario, es exacta, se siguen las siguientes
instrucciones
```

```
disp('Al ser el resultado = 0, entonces la Ecuación Diferencial es
Exacta ');
fprintf('\n');   % Para un salto de línea

% Segundo paso, una vez que se ha comprobado que es exacta, buscar una
función G(8x,y)
% que satisfaga tanto ?G/?x = M(x,y), cómo ?G/?y = N(x,y)
% Para ello, Integrar G(x,y) respecto a x

Gx = int(M, 'x');         % De la Ec (1) en la teoría
disp ('La integración es igual a:');
disp(Gx);     % Respuesta de la Integración

% Tercero, el siguiente paso, es determinar g(y), para ello, derivamos
% el resultado anterior, respecto a "y" y sustituimos con N(x,y),
% simplificando

 Der = N - diff(Gx, 'y');
 disp ('La derivación es igual a:');
 disp (Der);  % Respuesta de la operación

 % Siguiente paso, integramos esta última ecuación respecto a "y"
 Inte = int(Der,y);          % De la Ec (2) en la teoría
 disp ('La integración respecto a y, de la derivada es igual a:');
 disp (Inte);   % Respuesta de la integración

 % Por último, la solución, es la familia de ecuaciones al
 % sustituir o en este caso, sumar las respuestas de las ecuaciones 1
y 2
 % Hay que agregar a la respuesta la constante C2

 disp ('La solución implícita es la familia de ecuaciones = C2: ');
 Sol = Gx + Inte;
 disp (Sol);

end    % FIN DEL PROGRAMA y de la instrucción if - else
```

Al ejecutar el anterior Script, con los valores ejemplos de M y de N, se obtiene el siguiente resultado:

```
El resultado es =
x - y

Al ser el resultado no igual a 0, entonces la Ecuación Diferencial, NO es
Exacta
```

9.6.- Ejercicios de Repaso de ecuaciones diferenciales de primer orden Exactas con Matlab SOLUCIONES

I) En los siguientes ejercicios. DETERMINE si la ecuación diferencial es exacta, en caso de que lo sea, resuélvala y construya un programa en Matlab que muestre la familia que corresponde a la solución implícita. (Para la solución con Matlab, aplicar el programa propuesto en la página 60).

a)

$$(2x-1)dx+(3y+7)dy = 0$$

Lo primero es que identificamos los términos de la ecuación diferencial, en su forma diferenciada y tenemos que:

$$M(x,y) = 2x-1$$

$$N(x,y) = 3y+7$$

Entonces, al calcular las derivadas:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x-1 = 0$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3y+7 = 0$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lo que demuestra que la ecuación **es exacta**.

Ahora vamos a determinar una función $G(x,y)$, que satisfaga las ecuaciones (4) y (5). De acuerdo a la teoría vista, vamos a integrar $G(x,y)$, respecto a la variable x, así que sustituimos el valor de $M(x,y) = 2x-1$, en (4), con lo que tenemos:

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2x - 1$$

Ahora, al integrar ambos lados por la ecuación (7), tenemos que:

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\, dx = \int M(x,y)dx$$

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\, dx = \int (2x-1)dx$$

Lo que resulta:

$$G(x,y) = x^2 - x + g(y)$$

Ahora, hay que determinar $g(y)$, para ello, derivamos la ecuación anterior, con respecto a "y" y tenemos:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \partial(x^2 - x + g(y))$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = g'(y)$$

El siguiente paso es sustituir esta ecuación con $N(x,y) = 3y + 7$, en la ecuación (5) y tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = N(x, y)$$

$$g'(y) = 3y + 7$$

Donde al simplificar $g'(y)$, tenemos que:

$$g'(y) = 3y + 7$$

Al integrar esta última ecuación respecto a "y", tenemos que:

$$g(y) = \frac{3}{2}y^2 + 7y + C_1$$

En donde, C_1 , es una constante.

Sustituyendo esto en

$$G(x, y) = x^2 - x + g(y)$$

Tenemos que:

$$G(x, y) = x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y + C_1$$

Ahora, recordemos que la solución general de la ED, está dada implícitamente en (6) por la ecuación:

$$G(x, y) = C$$

Entonces, sustituimos este valor en la última ecuación y tenemos:

$$G(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x\,sen\,y - y^2 + C_1$$

$$C = x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y + C_1$$

Donde:

$$x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y = C - C_1$$

Hacemos: $C_2 = C - C_1$, y tenemos que:

$$\boldsymbol{x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y = C_2}$$

Que **es la familia de soluciones de la ED** buscada.

b) $(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0$

Lo primero es que identificamos los términos de la ecuación diferencial, en su forma diferenciada y tenemos que:

$$M(x, y) = 5x + 4y$$

$$N(x, y) = 4x - 8y^3$$

Entonces, al calcular las derivadas:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 5x + 4y = 4$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 4x - 8y^3 = 4$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lo que demuestra que la ecuación **es exacta**.

Ahora vamos a determinar una función $G(x, y)$, que satisfaga las ecuaciones (4) y (5). De acuerdo a la teoría vista, vamos a integrar $G(x, y)$, respecto a la variable x, así que sustituimos el valor de $M(x, y) = 5x + 4y$, en (4), con lo que tenemos:

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 5x + 4y$$

Ahora, al integrar ambos lados por la ecuación (7), tenemos que:

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\,dx = \int M(x,y)dx$$

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\,dx = \int (5x+4y)dx$$

Lo que resulta:

$$G(x,y) = \frac{5}{2}x^2 + 4xy + g(y)$$

Ahora, hay que determinar $g(y)$, para ello, derivamos la ecuación anterior, con respecto a "y" y tenemos:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \partial(\frac{5}{2}x^2 + 4xy + g(y))$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 4x + g'(y)$$

El siguiente paso es sustituir esta ecuación con $N(x,y) = 4x - 8y^3$, en la ecuación (5) y tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = N(x,y)$$

$$4x + g'(y) = 4x - 8y^3$$

Donde al simplificar $g'(y)$, tenemos que:

$$g'(y) = -8y^3$$

Al integrar esta última ecuación respecto a "y", tenemos que:

$$g(y) = -2y^4 + C_1$$

En donde, C_1 , es una constante.

Sustituyendo esto en

$$G(x, y) = \frac{5}{2}x^2 + 4xy + g(y)$$

Tenemos que:

$$G(x, y) = \frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 + C_1$$

Ahora, recordemos que la solución general de la ED, está dada implícitamente en (6) por la ecuación:

$$G(x, y) = C$$

Entonces, sustituimos este valor en la última ecuación y tenemos:

$$G(x, y) = \frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 + C_1$$

$$C = \frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 + C_1$$

Donde:

$$\frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 = C - C_1$$

Hacemos: $C_2 = C - C_1$, y tenemos que:

$$\boldsymbol{\frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 = C_2}$$

Que **es la familia de soluciones de la ED** buscada.

c) $(sen\ y - y\ sen\ x)dx + (\cos x + x\cos y - y)dy = 0$

Lo primero es que identificamos los términos de la ecuación diferencial, en su forma diferenciada y tenemos que:

$$M(x,y) = sen\ y - y\ sen\ x$$

$$N(x,y) = \cos x + x\cos y - y$$

Entonces, al calcular las derivadas:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = sen\ y - y\ sen\ x = cosy - sen\ x$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos x + x\cos y - y = -senx + cosy$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lo que demuestra que la ecuación **es exacta**.

Ahora vamos a determinar una función $G(x,y)$, que satisfaga las ecuaciones (4) y (5). De acuerdo a la teoría vista, vamos a integrar $G(x,y)$, respecto a la variable x, así que sustituimos el valor de $M(x,y) = sen\ y - y\ sen\ x$, en (4), con lo que tenemos:

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = sen\, y - y\, sen\, x$$

Ahora, al integrar ambos lados por la ecuación (7), tenemos que:

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\, dx = \int M(x,y)dx$$

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\, dx = \int (sen\, y - y\, sen\, x)dx$$

Lo que resulta:

$$G(x,y) = \ x\, seny + y\cos x\ + g(y)$$

Ahora, hay que determinar $g(y)$, para ello, derivamos la ecuación anterior, con respecto a "y" y tenemos:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \partial(x\, seny + y\cos x\ + g(y))$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = x\, cosy + \cos x + \ g'(y)$$

El siguiente paso es sustituir esta ecuación con $N(x,y) = \cos x + x\cos y - y$, en la ecuación (5) y tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = N(x,y)$$

$$x\, cosy + \cos x + \ g'(y) = \cos x + x\cos y - y$$

Donde al simplificar $g'(y)$, tenemos que:

$$g'(y) = -y$$

Al integrar esta última ecuación respecto a "y", tenemos que:

$$g(y) = -\frac{y^2}{2} + \ C_1$$

En donde, C_1 , es una constante.

Sustituyendo esto en

$$G(x,y) = \ x\, seny + y\cos x \ + g(y)$$

Tenemos que:

$$G(x,y) = \ x\, seny + y\cos x \ - \frac{y^2}{2} + \ C_1$$

Ahora, recordemos que la solución general de la ED, está dada implícitamente en (6) por la ecuación:

$$G(x,y) = C$$

Entonces, sustituimos este valor en la última ecuación y tenemos:

$$G(x, y) = x\,seny + y\cos x - \frac{y^2}{2} + C_1$$

$$C = x\,seny + y\cos x - \frac{y^2}{2} + C_1$$

Donde:

$$x\,seny + y\cos x - \frac{y^2}{2} = C - C_1$$

Hacemos: $C_2 = C - C_1$, y tenemos que:

$$\boldsymbol{x\,seny + y\cos x - \frac{y^2}{2} = C_2}$$

Que **es la familia de soluciones de la ED** buscada.

d) $(2x\,y^2 - 3)dx + (2\,x^2\,y + 4)dy = 0$

Lo primero es que identificamos los términos de la ecuación diferencial, en su forma diferenciada y tenemos que:

$$M(x,y) = 2x\,y^2 - 3$$

$$N(x,y) = 2\,x^2\,y + 4$$

Entonces, al calcular las derivadas:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x\,y^2 - 3 = 4xy$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2\,x^2\,y + 4 = 4xy$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lo que demuestra que la ecuación **es exacta**.

Ahora vamos a determinar una función $G(x,y)$, que satisfaga las ecuaciones (4) y (5). De acuerdo a la teoría vista, vamos a integrar $G(x,y)$, respecto a la variable x, así que sustituimos el valor de $M(x,y) = 2x\,y^2 - 3$, en (4), con lo que tenemos:

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2x\,y^2 - 3$$

Ahora, al integrar ambos lados por la ecuación (7), tenemos que:

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\,dx = \int M(x,y)dx$$

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}\,dx = \int (2x\,y^2 - 3)dx$$

Lo que resulta:

$$G(x,y) = x^2y^2 - 3x + g(y)$$

Ahora, hay que determinar $g(y)$, para ello, derivamos la ecuación anterior, con respecto a "y" y tenemos:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \partial(x^2y^2 - 3x + g(y))$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 2x^2y + g'(y)$$

El siguiente paso es sustituir esta ecuación con $N(x,y) = 2\,x^2\,y + 4$, en la ecuación (5) y tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = N(x, y)$$

$$2x^2y \ + \ g'(y) = 2\,x^2\,y + 4$$

Donde al simplificar $g'(y)$, tenemos que:

$$g'(y) = 4$$

Al integrar esta última ecuación respecto a "y", tenemos que:

$$g(y) = 4y + \ C_1$$

En donde, C_1 , es una constante.

Sustituyendo esto en

$$G(x, y) = \ x^2y^2 - 3x \ + g(y)$$

Tenemos que:

$$G(x, y) = \ x^2y^2 - 3x \ + 4y + \ C_1$$

Ahora, recordemos que la solución general de la ED, está dada implícitamente en (6) por la ecuación:

$$G(x,y) = C$$

Entonces, sustituimos este valor en la última ecuación y tenemos:

$$G(x,y) = x^2y^2 - 3x + 4y + C_1$$

$$C = x^2y^2 - 3x + 4y + C_1$$

Donde:

$$x^2y^2 - 3x + 4y = C - C_1$$

Hacemos: $C_2 = C - C_1$, y tenemos que:

$$\mathbf{x^2y^2 - 3x + 4y = C_2}$$

Que **es la familia de soluciones de la ED** buscada.

e) $(x^2 - \ y^2)\ dx + (x^2 - \ 2xy)dy = 0$

Así que identificamos los términos de la ecuación diferencial en su forma diferenciada y tenemos que:

$$M(x,y) = x^2 - \ y^2$$

$$N(x,y) = \ x^2 - \ 2xy$$

Entonces, al calcular las derivadas:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x^2 - \ y^2 = -2y$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = x^2 - \ 2xy = 2x - \ 2y$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lo que demuestra que la ecuación **NO es exacta**.

f) $(x - y^3 + \ y^2 \ sen \ x)dx + (3 \ x \ y^2 + \ 2 \ y \cos x)dy = 0$

Así que identificamos los términos de la ecuación diferencial en su forma diferenciada y tenemos que:

$$M(x,y) = x - y^3 + \ y^2 \ sen \ x$$

$$N(x,y) = \ 3 \ x \ y^2 + \ 2 \ y \cos x$$

Entonces, al calcular las derivadas:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x - y^3 + \ y^2 \ sen \ x = \ -3y^2 + 2y \ senx$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3 \ x \ y^2 + \ 2 \ y \cos x = 3y^2 - \ 2y \ sen \ x$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

Lo que demuestra que la ecuación **NO es exacta**.

10.- SOLUCIÓN ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN SEPARABLES

10.1.- DEFINICIÓN

Vamos a recordar que analizamos la ecuación diferencial de primer orden en su forma diferencial siguiente:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

Entonces, si $M(x,y) = A(x)$, que es una función sólo de $\boldsymbol{x}$, y $N(x,y) = B(y)$, que es una función sólo de $\boldsymbol{y}$, entonces, la ecuación diferencial, es separable, o presenta sus variables separadas producto de una factorización. Con lo que la ecuación anterior de acuerdo con los términos $A(x)$ y $B(y)$, quedará igualmente estructurada de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)\,B(y) \qquad (2)$$

Lo que al presentarla en su forma diferencial quedaría de la siguiente manera:

$$A(x)dx + B(y)dy = 0 \qquad (3)$$

10.2.- SOLUCIÓN GENERAL

La solución para la ecuación separable de primer orden sería:

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = C \qquad (4)$$

Donde "C" representa una constante arbitraria:

Sin embargo, las integrales de la ecuación (4), podrían ser, para todos los propósitos prácticos, imposibles de calcular. En tales casos, se utilizan técnicas numéricas para poder obtener una solución aproximada. La solución quedará así en todo caso, en la forma implícita.

10.3.- EJEMPLOS

Ejemplo (1)

Determinar si la ecuación diferencial

$$xdx - y^2dy = 0$$

Es separable y en caso de que lo sea, resolverla.

Primero debemos de determinar si es separable, en cuyo caso debe de existir una función que representa a la familia de soluciones de dicha ecuación.

Así que identificamos los términos de la ecuación diferencial en su forma diferenciada y tenemos que:

$M(x,y) = A(x) = x$, que es una función solo de "x"

$N(x,y) = B(y) = -y^2$, que es una función solo de "y"

Lo que demuestra que la ecuación **es separable**.

Ahora vamos a sustituir dichos valores en (4), con lo que tenemos:

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = C$$

$$\int x\,dx + \int (-y^2)dy = C$$

Ahora, al integrar ambos lados, tenemos que:

$$\frac{1}{2}x^2 + -\frac{1}{3}y^3 = C$$

Que es la forma implícita: Ahora resolviendo explícitamente para "y", tenemos

$$\frac{1}{2}x^2 + -\frac{1}{3}y^3 = C$$

$$\frac{1}{2}x^2 = C + \frac{1}{3}y^3$$

$$\frac{1}{2}x^2 - C = \frac{1}{3}y^3$$

$$3\left(\frac{1}{2}x^2 - C\right) = y^3$$

$$\frac{3}{2}x^2 - 3\,C = y^3$$

$$\left(\frac{3}{2}x^2 - 3\,C\right)^{1/3} = y$$

Hacemos ***k = -3C*** y tenemos:

$$\boldsymbol{y = \left(\frac{3}{2}x^2 + k\right)^{1/3}}$$

Ejemplo (2)

Determinar si la ecuación diferencial

$$y' = y^2x^3$$

Es separable y en caso de que lo sea, resolverla.

Primero debemos de determinar si es separable, pero para ello, hay que escribir la ecuación que está en la forma estándar o normal, a la forma diferencial, lo que resulta.

$$x^3dx - \left(\frac{1}{y^2}\right)dy = 0$$

Así que identificamos los términos de la ecuación diferencial en su forma diferenciada y tenemos que:

$$M(x,y) = A(x) = x^3 \text{ , que es una función solo de "}x\text{"}$$

$$N(x,y) = B(y) = -\left(\frac{1}{y^2}\right) \text{ , que es una función solo de "}y\text{"}$$

Lo que demuestra que la ecuación **es separable**.

Ahora vamos a sustituir dichos valores en (4), con lo que tenemos:

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = C$$

$$\int x^3\,dx + \int -\left(\frac{1}{y^2}\right)dy = C$$

Ahora, al integrar ambos lados, tenemos que:

$$\frac{1}{4}x^4 + -\frac{1}{y} = C$$

Que es la forma implícita: Ahora resolviendo explícitamente para "y", tenemos

$$\frac{1}{4}x^4 + -\frac{1}{y} = C$$

$$y = \frac{-4}{x^4 - 4C}$$

Hacemos ***k = -4C*** y tenemos:

$$\boldsymbol{y = \frac{-4}{x^4 + k}}$$

Ejemplo (3)

Determinar si la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2}{y}$$

Es separable y en caso de que lo sea, resolverla.

Primero debemos de determinar si es separable, pero para ello, hay que escribir la ecuación que está en la forma estándar o normal, a la forma diferencial, lo que resulta.

$$(x^2 + 2)dx - y\,dy = 0$$

Así que identificamos los términos de la ecuación diferencial en su forma diferenciada y tenemos que:

$M(x, y) = A(x) = x^2 + 2$, que es una función solo de "x"

$N(x, y) = B(y) = -y$, que es una función solo de "y"

Lo que demuestra que la ecuación **es separable**.

Ahora vamos a sustituir dichos valores en (4), con lo que tenemos:

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = C$$

$$\int (x^2 + 2)\,dx + \int -y\,dy = C$$

Ahora, al integrar ambos lados, tenemos que:

$$\frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{2}y^2 = C$$

Que es la forma implícita: Ahora resolviendo explícitamente para "y", tenemos

$$y^2 = \frac{2}{3}x^3 + 4x - 2C$$

Hacemos ***k = -2C*** y tenemos:

$$y^2 = \frac{2}{3}x^3 + 4x + k$$

Donde obtenemos las dos soluciones:

$$\boldsymbol{y = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 4x + k} \;\; ; \;\; y = -\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 4x + k}}$$

10.4.- Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden, SEPARABLES

SOLUCIONES

I) En los siguientes ejercicios. Determine si la ecuación diferencial es **separable** y resuelva aquellas que lo sean.

a) $\boldsymbol{xdx + ydy = 0}$

$$M(x,y) = A(x) = xdx, solo\ de\ x$$

$$N(x,y) = B(y) = ydy, solo\ de\ y$$

Por lo tanto, es separable:

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = C$$

$$\int xdx + \int ydy = C$$

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$; $\frac{y^2}{2} = C - \frac{x^2}{2}$

$y^2 = 2C - 2\frac{x^2}{2}$; $y^2 = 2C - x^2$; $\boldsymbol{y = \pm\sqrt{k - x^2}}$; $\boldsymbol{k = 2C}$

b) $\boldsymbol{\frac{1}{x}\, dx - \frac{1}{y}\, dy = 0}$

$$M(x,y) = A(x) = \frac{1}{x}dx, solo\ de\ x$$

$$N(x,y) = B(y) = -\frac{1}{y}dy, solo\ de\ y$$

Por lo tanto, es separable:

$$\int A(x)dx + \int -B(y)dy = C$$

$$\int \frac{1}{x}dx + \int -\frac{1}{y}dy = C$$

$$\log x - \log y = C$$

$$\log\frac{x}{y} = C\ ; \quad \frac{x}{y} = e^C$$

$$x = ye^C\ ;\ xe^{-C} = y$$

$$\boldsymbol{y = k\,x;\quad k = \pm e^{-C}}$$

c) $\boldsymbol{y' = \frac{xe^x}{2y}}$

Ecuación en forma normal o estándar, al pasarla a la forma diferencial queda:

$$xe^x dx - 2y = 0$$

Dónde:

$$M(x,y) = A(x) = xe^x dx, solo\ de\ x$$

$$N(x,y) = B(y) = -2ydy, solo\ de\ y$$

Por lo tanto, es separable:

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = C$$

$$\int xe^x\,dx + \int -2y\,dy = C$$

$$e^x\,(x-1) - \ y^2 \ = C$$

$$xe^x - e^x - \ y^2 \ = C$$

$$xe^x - e^x - C \ = y^2$$

$$\boldsymbol{y \ = \pm\sqrt{xe^x - e^x - C}}$$

d) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y}}$

Ecuación en forma normal o estándar, al pasarla a la forma diferencial queda:

$$x + 1dx - y = 0$$

Dónde:

$$M(x,y) = A(x) = (x+1)dx, solo\ de\ x$$

$$N(x,y) = B(y) = -ydy, solo\ de\ y$$

Por lo tanto, es separable:

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = C$$

$$\int (x+1)\, dx + \int -y\, dy = C$$

$$x\,(x+2)\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2} = C$$

$$\frac{x^2+2x}{2} - \frac{y^2}{2} = C$$

$$\frac{x^2+2x-y^2}{2} = C$$

$$x^2+2x-y^2 = 2C$$

$$x^2+2x-2C = y^2$$

$$\boldsymbol{y = \pm\sqrt{x^2+2x+k}\;\;; K = -2C}$$

e) $\boldsymbol{sen\, x\, dx + y\, dy = 0}$

$$M(x,y) = A(x) = sen\, x\, dx, solo\ de\ x$$

$$N(x,y) = B(y) = y\, dy, solo\ de\ y$$

Por lo tanto, es separable:

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = C$$

$$\int sen\, x\, dx + \int y\, dy = C$$

$$-\cos(x) + \frac{y^2}{2} = C$$

$$\frac{y^2}{2} = C + \cos(x)$$

$$y^2 = 2C + 2\cos(x)$$

$$y = \pm\sqrt{2C + 2\cos(x)}$$

$$\boldsymbol{y = \pm\sqrt{2\cos(x) + k}\ ; K = 2C}$$

f) $\boldsymbol{(t+1)\,dt - \frac{1}{y^2}\,dy = 0}$

$$M(x,y) = A(t) = (t+1)dt, solo\ de\ t$$

$$N(x,y) = B(y) = -\frac{1}{y^2}dy, solo\ de\ y$$

Por lo tanto, es separable:

$$\int A(t)dt + \int B(y)dy = C$$

$$\int (t+1)\,dt + \int -\frac{1}{y^2}\,dy = C$$

$$t\,(t+2)\frac{1}{2} + \frac{1}{y} = C$$

$$t\,(t+2)\frac{1}{2} + \frac{1}{y} = C$$

$$\frac{t^2+2t}{2}+\frac{1}{y}=C$$

$$\frac{1}{y}=-\frac{t^2}{2}-t+C$$

$$\boldsymbol{y=-\left(\frac{t^2}{2}+t-C\right)^{-1}}$$

g) $\boldsymbol{\frac{4}{t}\,dt-\frac{y-3}{y}\,dy=0}$

$$M(x,y)=A(t)=\frac{4}{t}dt, solo\ de\ t$$

$$N(x,y)=B(y)=-\frac{y-3}{y}dy, solo\ de\ y$$

Por lo tanto, es separable:

$$\int A(t)dt+\int B(y)dy=C$$

$$\int\frac{4}{t}\,dt+\int-\frac{y-3}{y}\,dy=C$$

$$4\log(t)+3\log(y)-y=C$$

$$\log(t^4)+\log(y^3)-y=C$$

$$\log(t^4y^3)=C+y$$

$$t^4y^3=e^c\,e^y$$

$$\boldsymbol{t^4y^3=k\,e^y\,;\ \ k=\pm e^c}$$

h) $\boldsymbol{xdx - y^3dy = 0}$

$$M(x,y) = A(x) = xdx, solo\ de\ x$$

$$N(x,y) = B(y) = -y^3dy, solo\ de\ y$$

Por lo tanto, es separable:

$$\int A(x)dx + \int\ B(y)dy = C$$

$$\int x\ dx + \int -y^3\ dy = C$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^4}{4} = C$$

$$\frac{2x^2 - y^4}{4} = C$$

$$2x^2 - y^4 = 4C$$

$$2x^2 - 4C = y^4$$

$$y = \pm(2x^2 - 4C)^{1/4}$$

$$\boldsymbol{y = \pm(2x^2 + k)^{1/4}\ ; K = -4C}$$

11.- Programa (script) elaborado por alumnos para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden Exactas y Separables.

Comprueba si las ecuaciones primeramente son exactas o separables y en caso de que lo sean, las resuelve y muestra el resultado.

```
% ECUACIONES DIFERENCIALES
% INGENIERÍA CIVIL
% CUARTO SEMESTRE
% 2016
%
% PROGRAMA DE IDENTIFICACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS Y
% SEPARABLES CON SU SOLUCIÓN RESPECTIVA.

% Borrar datos almacenados en Matlab
clear all; close all; clc

% Declaración de Variables
syms x y;

% Ingreso de la ecuación diferencial
fprintf('\n');
disp('                           ECUACIONES DIFERENCIALES CON MATLAB       ');
disp('                            INGENIERÍA CIVIL - CUARTO SEMESTRE');
disp('                         IDENTIFICACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ');
disp('                         EXACTAS Y SEPARABLES CON SOLUCIONES - 2016');
fprintf('\n');
fprintf('\n');
disp('¿Qué programa de los siguientes desea utilizar?');
fprintf('\n');
disp('I) Programa de Identificación de Ecuaciones Diferenciales Exactas y su
solución: ');
disp('II) Programa de Identificación de Ecuaciones Diferenciales Separables y
su solución: ');
fprintf('\n');
sel= input('--> Digite 1 o 2 de acuerdo al programa que desea usar y presione
Enter para empezar      ');
switch sel
    case 1
        clc
        fprintf('\n');
disp('                                ECUACIONES DIFERENCIALES CON MATLAB  ');
disp('                            INGENIERÍA CIVIL - CUARTO SEMESTRE');
disp('                          IDENTIFICACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ');
disp('                          EXACTAS Y SEPARABLES CON SOLUCIONES - 2016');
fprintf('\n');
fprintf('\n');
disp('I) Programa de Identificación de Ecuaciones Diferenciales Exactas y su
solución ');
fprintf('\n');
fprintf('\n');
disp('Una ED en su forma diferencial se expresa de este modo: M(x,y)dx +
N(x,y)dy = 0');
fprintf('\n');
g=input('Ingrese el valor de M(x,y)= '); % Ingreso de valores
h=input('Ingrese el valor de N(x,y)= ');
dM=diff(g,y); % Derivación respecto a y
dN=diff(h,x); % Derivación respecto a x
fprintf('\n');
fprintf('\n');
if dM==dN;

     fprintf('Si es una ecuación diferencial Exacta ');
     fprintf('\n');
     IM=int(g,x); % Integrando M(x,y) respecto a x
```

```
      in = char(IM);
      fprintf('\n');
      fprintf('La integral respecto a x:');
      fprintf('\n');
      fprintf('\n');
      fprintf('                                G(x,y)= %s',in);
      fprintf('\n');

      dyIM=diff(IM,y); % Derivando la integral de M(x,y), respecto a y
      so=char(dyIM);
      fprintf('\n');
      fprintf('Derivada respecto a y: ');
      fprintf('\n');
      fprintf('\n');
      fprintf('                                 dG/dy = %s',so);
      fprintf('\n');

      gy=h-dyIM; % Calculando la derivada de g(y)
      der=char(gy);
      fprintf('\n');
      fprintf('La derivada de g(y):');
      fprintf('\n');
      fprintf('\n');
      fprintf('                                       %s',der);
      fprintf('\n');

      g2y=int(gy,y); % Integrando la derivada de g(y) respecto a y
      it=char(g2y);
      fprintf('\n');
      fprintf('Integral de la derivada respecto a y:');
      fprintf('\n');
      fprintf('\n');
      fprintf('                                       %s',it);
      fprintf('\n');

      c2=IM+g2y; % Solución de la ecuación diferencial
      sol=char(c2);
      fprintf('\n');
      fprintf('La solución implícita de la ecuación diferencial es:');
      fprintf('\n');
      fprintf('\n');
      fprintf('                                   C2 = %s',sol);
      fprintf('\n');
else
      fprintf('No es una ecuación diferencial Exacta');
      fprintf('\n');
end


% Ciclo para seguir calculando.
fprintf('\n');
p=input('Desea comprobar si otra ecuación diferencial es exacta: (1) si, (0)
no       ');
fprintf('\n');
while p==1
    clc
         fprintf('\n');
disp('                                ECUACIONES DIFERENCIALES CON MATLAB  ');
disp('                            INGENIERÍA CIVIL - CUARTO SEMESTRE');
disp('                          IDENTIFICACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ');
disp('                          EXACTAS Y SEPARABLES CON SOLUCIONES - 2016');
fprintf('\n');
fprintf('\n');
disp('I) Programa de Identificación de Ecuaciones Diferenciales Exactas y su
solución  ');
fprintf('\n');
fprintf('\n');
```

```
disp('Una ED en su forma diferencial se expresa de este modo: M(x,y)dx +
N(x,y)dy = 0');
fprintf('\n');
g=input('Ingrese el valor de M(x,y)= '); % Ingreso de valores
h=input('Ingrese el valor de N(x,y)= ');
dM=diff(g,y);       % Derivación respecto a y
dN=diff(h,x);       % Derivación respecto a x
fprintf('\n');
fprintf('\n');
if dM==dN;

     fprintf('Si es una ecuación diferencial Exacta ');
     fprintf('\n');
     IM=int(g,x);     % Integrando M(x,y) respecto a x
     in = char(IM);
     fprintf('\n');
     fprintf('La integral respecto a x:');
     fprintf('\n');
     fprintf('\n');
     fprintf('                                G(x,y)= %s',in);
     fprintf('\n');

     dyIM=diff(IM,y); % Derivando la integral de M(x,y), respecto a y
     so=char(dyIM);
     fprintf('\n');
     fprintf('Derivada respecto a y: ');
     fprintf('\n');
     fprintf('\n');
     fprintf('                                 dG/dy = %s',so);
     fprintf('\n');

     gy=h-dyIM;    % Calculando la derivada de g(y)
     der=char(gy);
     fprintf('\n');
     fprintf('La derivada de g(y):');
     fprintf('\n');
     fprintf('\n');
     fprintf('                                       %s',der);
     fprintf('\n');

     g2y=int(gy,y); % Integrando la derivada de g(y) respecto a y
     it=char(g2y);
     fprintf('\n');
     fprintf('Integral de la derivada respecto a y:');
     fprintf('\n');
     fprintf('\n');
     fprintf('                                       %s',it);
     fprintf('\n');

     c2=IM+g2y; % Solución de la ecuación diferencial
     sol=char(c2);
     fprintf('\n');
     fprintf('La solución implícita de la ecuación diferencial es:');
     fprintf('\n');
     fprintf('\n');
     fprintf('                                   C2 = %s',sol);
     fprintf('\n');

else
     fprintf('No es una ecuación diferencial exacta');
     fprintf('\n');
end
fprintf('\n');
p=input('Desea comprobar si otra ecuación diferencial es exacta: (1) si, (0)
no      ');
fprintf('\n');
end
```

```
fprintf('\n');
disp('Digite "ecu" (sin comillas) para volver al menú inicial y empezar el
programa que desees       ')

    case 2
        clc
        fprintf('\n');
disp('                                ECUACIONES DIFERENCIALES CON MATLAB  ');
disp('                            INGENIERÍA CIVIL - CUARTO SEMESTRE');
disp('                          IDENTIFICACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ');
disp('                          EXACTAS Y SEPARABLES CON SOLUCIONES - 2016');
fprintf('\n');
fprintf('\n');
disp('II) Programa de Identificación de Ecuaciones Diferenciales Separables y
su solución');
fprintf('\n');
fprintf('\n');
disp('Una ED en su forma diferencial se expresa de este modo: M(x,y)dx +
N(x,y)dy = 0');
fprintf('\n');
g=input('Ingrese el valor de M(x,y)= ');  % Ingreso de valores
h=input('Ingrese el valor de N(x,y)= ');
dM=diff(g,y);    % Derivación respecto a y
dN=diff(h,x);    % Derivación respecto a x
ap=(g/h);        % Cálculo adicional
[num, den]=numden(ap);  % Extracción numerador y denominador
c1=diff(den,y);  % Cálculo adicional
c2=diff(num,x);  % Cálculo adicional
fprintf('\n');

if dM==0 || dN==0 || c1==0 || c2==0
    fprintf('La ecuación diferencial es Separable');
    fprintf('\n');

    p=int(g,x);  % Integral de A(x)
    q=int(h,y);  % Integral de B(y)
    e=char(p);   % Impresión de integrales
    d=char(q);
     fprintf('\n');
     fprintf('Integral de A(x) respecto a x:');
     fprintf('\n');
     fprintf('\n');
     fprintf('                                    A(x) =  %s',e);
     fprintf('\n');
     fprintf('\n');
     fprintf('Integral de B(y) respecto a y:');
     fprintf('\n');
     fprintf('\n');
     fprintf('                                    B(y)= %s',d);
     fprintf('\n');

     c=p+q;     % Suma de integrales de A(x)+B(y)
     r=char(c);
     fprintf('\n');
     fprintf('Suma de las integrales de A(x) y B(y)= C:');
     fprintf('\n');
     fprintf('\n');
     fprintf('                                    C =  %s',r);
     fprintf('\n');

    syms x y C;        % Declaración de variable simbólica
    t=solve(p+q-C,y);  % Despeje de Y

     fprintf('\n');
     fprintf('La solución implícita de la ecuación diferencial es:');
     fprintf('\n');
     fprintf('\n');
```

```
     fprintf('Y=');
     fprintf('\n');
     disp(t);
     fprintf('\n');

else
    fprintf('La ecuación diferencial no es Separable');
end

%Ciclo para seguir calculando
fprintf('\n');
fprintf('\n');
p=input('Desea comprobar si otra ecuación diferencial es separable: (1) si,
(0)  no      ');
fprintf('\n');
while p==1
    clc
        fprintf('\n');
disp('                                ECUACIONES DIFERENCIALES CON MATLAB  ');
disp('                            INGENIERÍA CIVIL - CUARTO SEMESTRE');
disp('                          IDENTIFICACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ');
disp('                          EXACTAS Y SEPARABLES CON SOLUCIONES - 2016');
fprintf('\n');
fprintf('\n');
disp('II) Programa de Identificación de Ecuaciones Diferenciales Separables y
su solución');
fprintf('\n');
fprintf('\n');
disp('Una ED en su forma diferencial se expresa de este modo: M(x,y)dx +
N(x,y)dy = 0');
fprintf('\n');
g=input('Ingrese el valor de M(x,y)= '); %Ingreso de valores
h=input('Ingrese el valor de N(x,y)= ');
dM=diff(g,y);      % Derivación respecto a y
dN=diff(h,x);      % Derivación respecto a x
ap=(g/h);          % Cálculo adicional
[num, den]=numden(ap); % Extracción numerador y denominador
c1=diff(den,y);    % Cálculo adicional
c2=diff(num,x);    % Cálculo adicional
fprintf('\n');

if dM==0 || dN==0 || c1==0 || c2==0
    fprintf('La ecuación diferencial es Separable');
    fprintf('\n');

    p=int(g,x);      % Integral de A(x)
    q=int(h,y);      % Integral de B(y)
    e=char(p);       % Impresión de integrales
    d=char(q);
     fprintf('\n');
     fprintf('Integral de A(x) respecto a x:');
     fprintf('\n');
     fprintf('\n');
     fprintf('                                    A(x) =  %s',e);
     fprintf('\n');
     fprintf('\n');
     fprintf('Integral de B(y) respecto a y:');
     fprintf('\n');
     fprintf('\n');
     fprintf('                                    B(y)= %s',d);
     fprintf('\n');
```

```
     c=p+q;       % Suma de integrales de A(x)+B(y)
     r=char(c);
     fprintf('\n');
     fprintf('Suma de las integrales de A(x) y B(y)= C:');
     fprintf('\n');
     fprintf('\n');
     fprintf('                                    C =  %s',r);
     fprintf('\n');

    syms x y C;    % Declaración de variable simbólica
    t=solve(p+q-C,y); % Despeje de Y

     fprintf('\n');
     fprintf('La solución implícita de la ecuación diferencial es:');
     fprintf('\n');
     fprintf('\n');
     fprintf('Y=');
     fprintf('\n');
     disp(t);
     fprintf('\n');


else
    fprintf('La ecuación diferencial no es Separable');
    fprintf('\n');
end

fprintf('\n');
p=input('Desea comprobar si otra ecuación diferencial es separable: (1) si,
(0)  no      ');
fprintf('\n');
disp('Digite "ecu" (sin comillas) para volver al menú inicial y empezar el
programa que desees       ')
end
end
```

La comprobación de los resultados queda sujeta al usuario, utilizando todas las opciones disponibles en el script anterior.

SEGUNDA PARTE: UNIDAD III

12.- MÉTODOS GRÁFICOS Y NUMÉRICOS PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES

12.1.- MÉTODOS GRÁFICOS (CAMPOS DIRECCIONALES E ISOCLINAS)

a) INTRODUCCIÓN

Hasta ahora hemos tratado algunos analíticos para encontrar la solución a las ecuaciones diferenciales (ED) de primer orden, es decir, se desarrollaron algunos procedimientos para obtener soluciones explícitas e implícitas. Sin embargo, una ED puede tener una solución aun y cuando no se obtenga analíticamente, o cuando las soluciones analíticas son difíciles o virtualmente imposibles de obtener, en estos casos, se realiza el enfoque de los métodos cualitativos para tratar de resolver las ecuaciones diferenciales, a través de métodos **gráficos** y **numéricos**.

b) CAMPOS DIRECCIONALES

Como hemos visto, uno de los métodos cualitativos para resolver ED de primer orden, es utilizar métodos gráficos que producen diagramas de soluciones para las ecuaciones diferenciales de primer orden, que si recordamos tienen la forma normal o estándar siguiente:

$$y' = f(x,y) \qquad (1)$$

En donde la derivada , y' sólo aparece en el lado izquierdo de la ecuación. Dicha ecuación se conoce como hemos mencionado como la forma estándar o normal.

c) UTILIZANDO LA RECTA TANGENTE

En este caso, suponemos que el problema de valores iniciales

$$y' = f(x,y), \;\; y(x_0) = y_0 \qquad (2)$$

Tiene una solución, y una manera de aproximar esta solución es utilizar rectas tangentes. Así, la ecuación (1), define la pendiente de la curva de la solución $y(x)$, en cualquier punto (x,y) del plano. Así un elemento de la línea es un segmento corto de línea que comienza en el punto (x,y) , y tiene una pendiente especificada por la ecuación (1), y que representa una solución a la curva solución a través de ese punto. de esta forma, una colección de elementos de línea se conoce como "**campo direccional**". Las gráficas de las soluciones para la ecuación (1) se generan a partir de los campos direccionales trazando curvas que pasen a través de los puntos en los que se dibujan los elementos de línea y que también son tangentes a esos elementos de línea.

Si el lado izquierdo de la ecuación (1) se establece igual a una constante, la gráfica de la ecuación resultante se llama "**isoclina**". Constantes diferentes definen isoclinas diferentes, y cada isoclina tiene la propiedad de que todos los elementos de línea que provienen de puntos sobre esa isoclina tienen la misma pendiente, una pendiente que es igual a la constante que generó la isoclina. Cuando ellas son simples de trazar, las isoclinas producen muchos elementos de línea de una vez, los que son útiles para construir los campos direccionales.

12.1.2.- Script Matlab para campos direccionales y solución particular

Construir un campo de direcciones para la Ecuación Diferencial $y' = x$, y además representar **la solución particular** que cumple con **la condición inicial** y(0) = 0 Para construir el programa en Matlab se utilizan los siguientes comandos

a) inline b) meshgrid c) quiver d) dsolve

```
% Programa para calcular el campo de direcciones de una Ecuación
% Diferencial
% Universidad Técnica de Ambato
% Ecuaciones Diferenciales
% Dr. Ligdamis A. Gutiérrez E.


% Limpieza de Escritorio
clear all; close all; clc;


f = inline('x','x','y');   % Constructor de objetos de funciones en línea
(Aquí va la ED), con los parámetros de las variables

%  R=dsolve('Dy=x','y(0) = 0','x')  % Dy= para derivada (y') , y= para funcion
(y)

% para un domino de t desde t0 hasta t1 con un espaciamiento de dt y y

% desde y0 hasta y1 con un espaciamiento de dy, se utilizan las siguientes

% instrucciones

paso= 0.5;   % Determina el tamaño de la constante h, llamada tamaño de paso
entre menor sea, mejor (0.4, 0.5, etc.)

iz = -3;     % límite inferior de los ejes en la grafica
der = 3;    % límite superior de los ejes en la grafica


[x,y]=meshgrid(iz:paso:der,iz:paso:der); % generar la matriz de x y y, para
dibujos 3d

[n,m]=size(x);        % tamaño de x

dx=ones(n,m);         % crea la matriz unitaria en n x m

z=f(x,y);             % se define la variable z en la función

dy=z;              % se asigna la variable dy a  z, para utilizarse con quiver

quiver(x,y,dx,dy)   % con el comando quiver,  se despliega los vectores en
forma de flecha de la matriz, se usa hold on, para graficar cada recta
tangente

hold on;    % Espera y permite sobreponer los gráficos



% La solución particular se obtiene manualmente como y = y^2/2 mediante
separación de variables, o bien con desolve

% Aquí van las etiquetas y títulos de la gráfica
```

```
R = dsolve('Dy=x','y(0) = 0','x');

ezplot('1/2*x^2', [-2.5,2.5]);

plot(0,0,'*r');

xlabel('Eje x'); ylabel('Eje y');title({'Ecuación Diferencial = '; char(R)});

% FIN
```

El Gráfico Resultante es el siguiente:

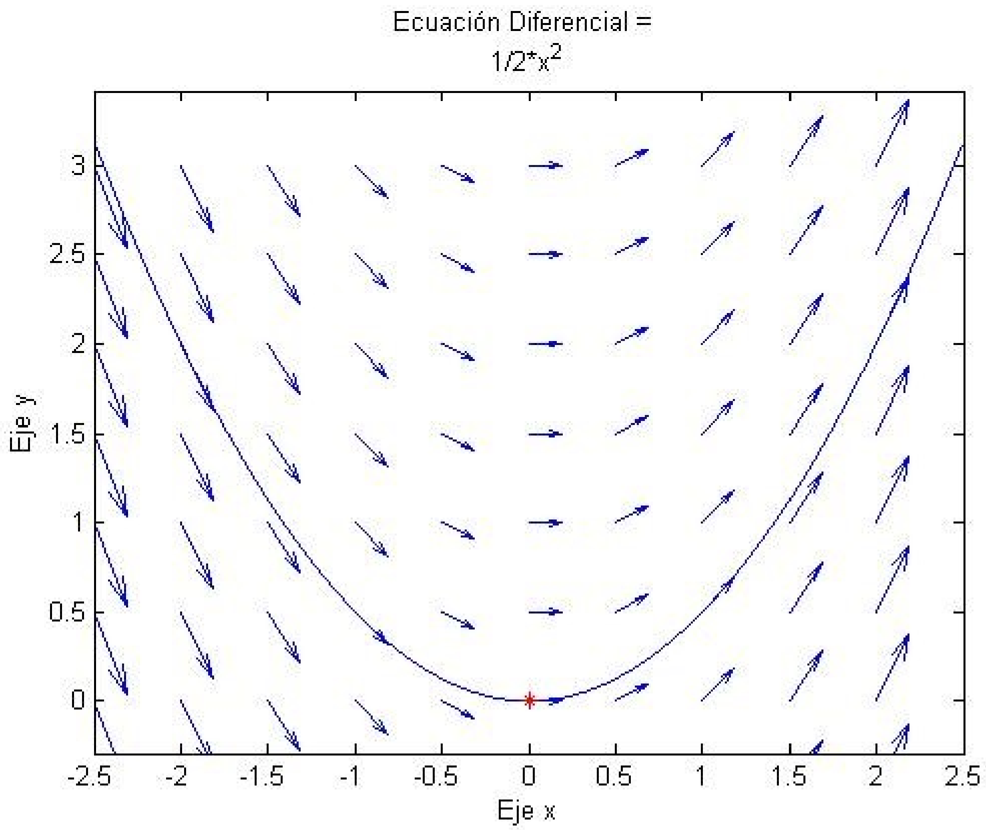


Fig. Gráfica del campo de direcciones de una determinada Ecuación Diferencial

Ejemplo 2:

Buscar la solución de la ecuación diferencial con valor inicial siguiente y realizar la solución mediante un método cuantitativo a través de graficar su campo de direcciones en Matlab.

$$x\sqrt{1-\ y^2}\,dx\ =\ dy\,,\qquad y(1)=0$$

Re escribimos la ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx}=\ x\sqrt{1-\ y^2}$$

Donde identificamos los términos:

$$M(x,y)=A(x)=\ \ x\,dx\ \text{, que es solo de x}$$

$$N(x,y)=B(y)=\ \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\ \text{, que es solo de y}$$

Por lo que la ecuación es separable, y puede resolverse por separación de variables. La solución es:

$$\int x\,dx=\ \int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\frac{x^2}{2}=arc\ sen\ y+c$$

$$\boldsymbol{y=sen\ \left(\frac{x^2}{2}+\ C\right)},\ \text{Que es la solución general o implícita}$$

Para encontrar el valor de la constante C, reemplazamos la condición inicial de la Ecuación.

$$y = sen\left(\frac{x^2}{2} + C\right), \quad y = 0; \; x = 1$$

$$0 = sen\left(\frac{1^2}{2} + C\right)$$

$$0 = sen\,\frac{1}{2} + C$$

$$0 = 0.4794 + C$$

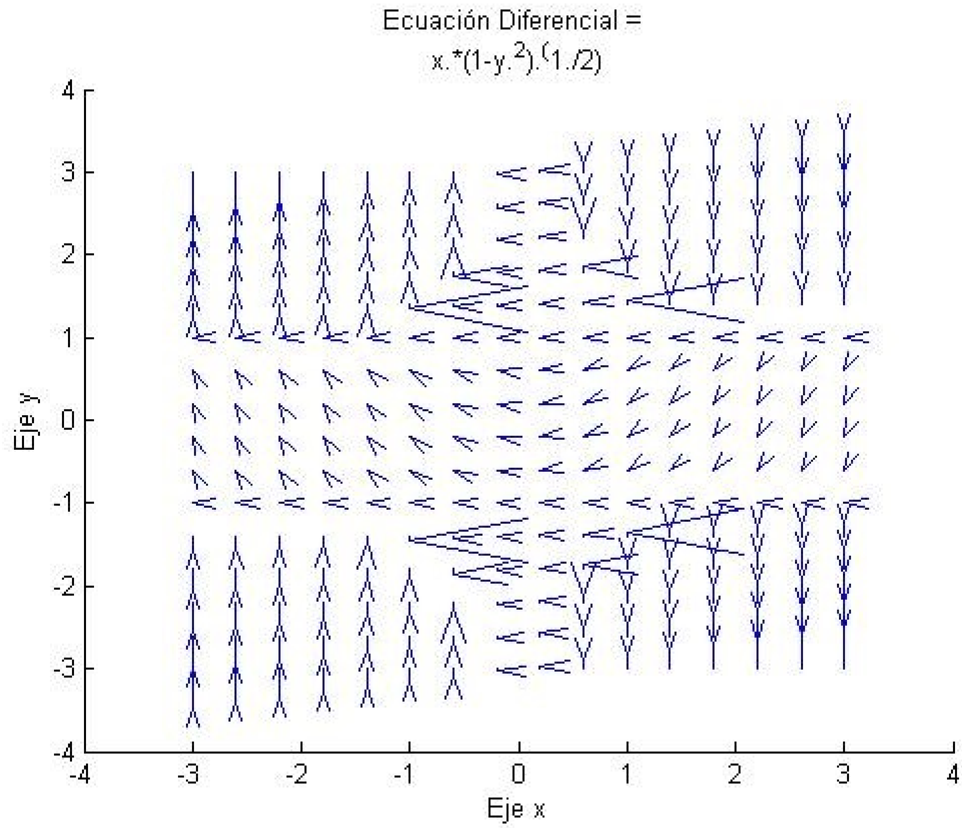
$$C = -0.4794$$

Reemplazando este valor en la solución general, obtenemos la solución particular en "y"

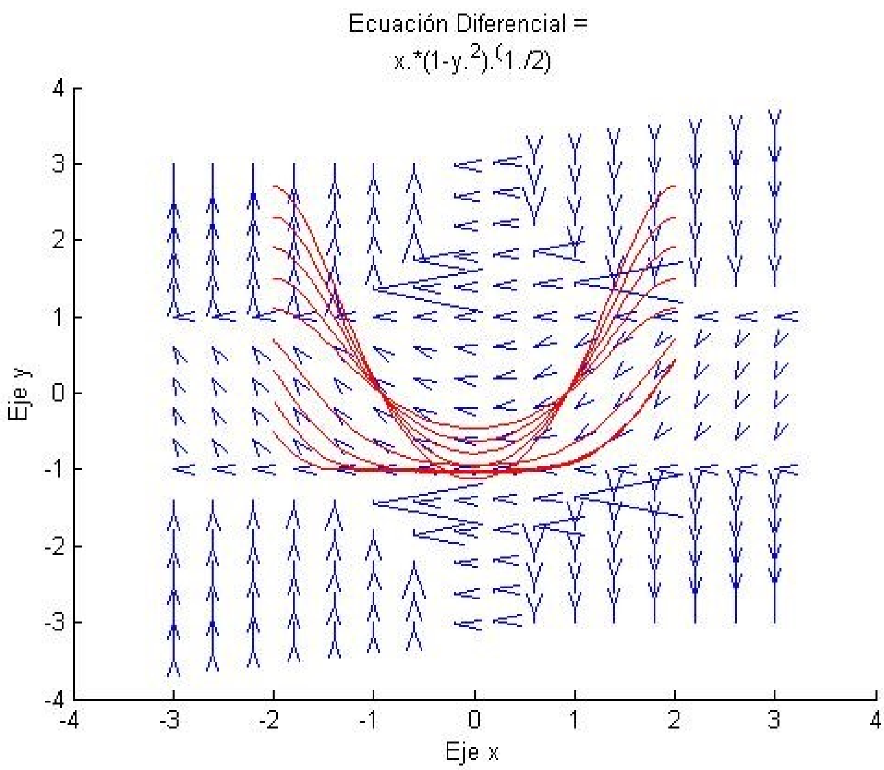
$$y = sen\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

$\boldsymbol{y = sen\left(\frac{x^2}{2} - 0.4794\right)}$, Que es la **solución particular** en y

La solución Gráfica de la Ecuación Diferencial, utilizando el método de las Isoclinas es la siguiente:



La gráfica que muestra las curvas solución en las Isoclinas es la siguiente:



12.1.3.- Script Matlab para campos direccionales y familia de solución

Para construir el programa en Matlab se utilizan los siguientes comandos

a) inline b) meshgrid c) quiver d) ode45

Los aspectos importantes del programa que genera el método de las isoclinas en Matlab, son los siguientes:

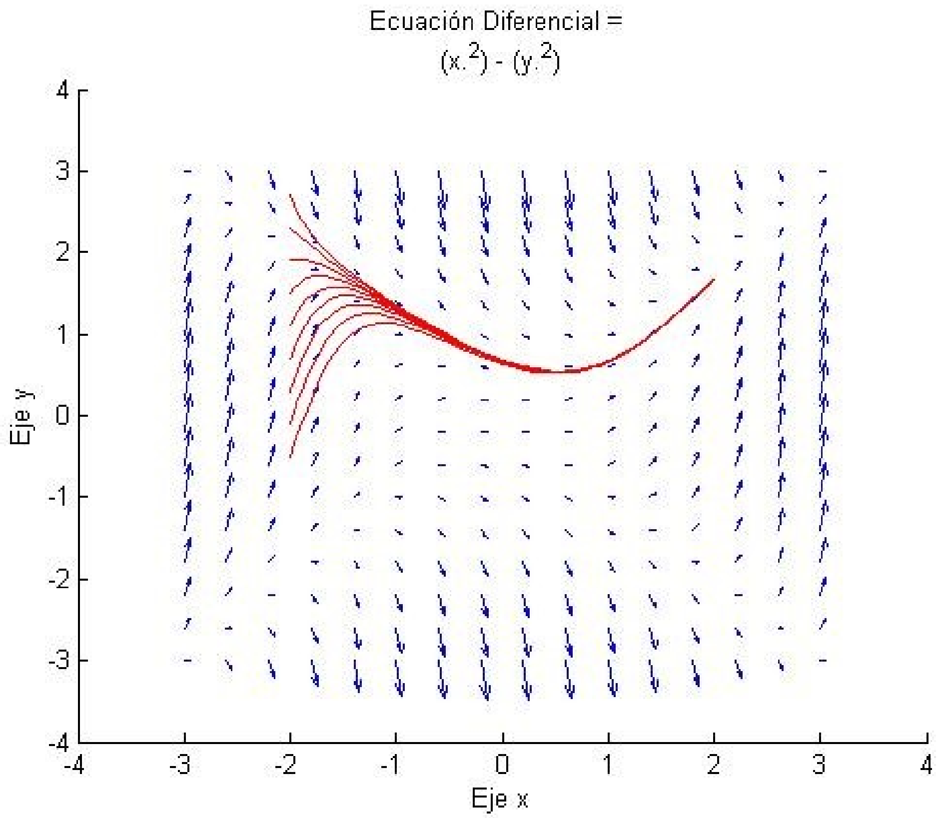
```
% Limpieza de Escritorio
clear all; close all; clc;

f = inline('2*y-x','x','y');    % Constructor de objetos de funciones en línea
(Aquí va la ED), con los parámetros de las variables

R1=dsolve('Dy=2*y-x','x');  % Dy= para derivada (y') , y= para función (y)
% para un domino de t desde t0 hasta t1 con un espaciamiento de dt y y
% desde y0 hasta y1 con un espaciamiento de dy, se utilizan las siguientes
% instrucciones

paso= 0.4;    % Determina el tamaño de la constante h, llamada tamaño de paso
entre menor sea, mejor (0.4, 0.5, etc.)

iz = -3;      % límite inferior de los ejes en la grafica
der = 3;      % límite superior de los ejes en la grafica

[x,y]=meshgrid(iz:paso:der,iz:paso:der); % generar la matriz de x y y, para
dibujos 3d

[n,m]=size(x);          % tamaño de x

dx=ones(n,m);           % crea la matriz unitaria en n x m

z=f(x,y);               % se define la variable z en la función

dy=z;                % se asigna la variable dy a  z, para utilizarse con quiver

hold on; quiver(x,y,dx,dy)   % con el comando quiver,  se despliega los vectores
en forma de flecha de la matriz, se usa hold on, para graficar cada recta
tangente
% Aquí van las etiquetas y títulos de la gráfica

xlabel('Eje x'); ylabel('Eje y');title({'Ecuación Diferencial = '; char(R1)});
% Graficar las curvas soluciones en las isoclinas
% se utiliza la función ode45, para calcular la solución de la ED
% También se podría utilizar la función dsolve, pero es más directo
% utilizar ode45, determinando el intervalo de  -2 a 2, utilizando varios
% valores iniciales determinados en y0, en un bucle for

for y0=-0.5:0.4:3                  % se define valores iniciales e incremento
         [xs,ys]=ode45(f,[-2,2],y0);    % f es la función que guarda la ED, en
el intervalo (-2,2), con los valores iniciales designados
         plot(xs,ys,'-r')
% Gráfica de las curvas solución de acuerdo a las condiciones calculadas, y en
color rojo
     end
     hold off

% FIN
```

Ejemplo 3

Buscar la solución de la ecuación diferencial siguiente, realizando la solución mediante un método cuantitativo, a través de graficar su campo de direcciones en Matlab.

$$y' = x^2 - y^2$$

Utilizando el programa anterior, nos da la respuesta siguiente:



Realizar como ejercicio, los cambios al programa anterior, para presentar la gráfica solución

12.1.4.- Ejercicios con Matlab para campos direccionales y familia de solución

SOLUCIONES

I) Buscar la solución de las ecuaciones diferenciales siguientes, desarrollando la solución mediante un método cuantitativo en Matlab, a través de graficar su campo de direcciones por el método de las isoclinas, y dibujar las curvas solución en las isoclinas.

a) $y' = x^2 + 1$ — **y = 1/3*x^3+x+C1**

b) $y' = xy + 1$ — **y = (1/2*pi^(1/2)*2^(1/2)*erf(1/2*2^(1/2)*x)+C1)*exp(1/2*x^2)**

c) $y' = \frac{xe^x}{2y}$ — **y = C1*exp(1/2*exp(x)*(x-1))**

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y}$ — y = (x^2+2*x+C1)^(1/2)
-(x^2+2*x+C1)^(1/2)

e) $y' = \frac{x^2}{y^2}$ — **y = (x^3+C1)^(1/3)**
-1/2*(x^3+C1)^(1/3)+1/2*i*3^(1/2)*(x^3+C1)^(1/3)
-1/2*(x^3+C1)^(1/3)-1/2*i*3^(1/2)*(x^3+C1)^(1/3)

f) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x}$ — **y = 1/2*x+1/x*C1**

g) $y' = 2x$ — **y = x^2+C1**

h) $y' = y - x^2$ — **y = x^2+2*x+2+exp(x)*C1**

i) $y' = sen\, x - y$ — **y = -1/2*cos(x)+1/2*sin(x)+exp(-x)*C1**

j) $y' = sen\,(x - y)$ — **y = x-2*atan((-x+2+C1)/(-x+C1))**

NOTA: La función "erf", es una función da un error en Matlab,

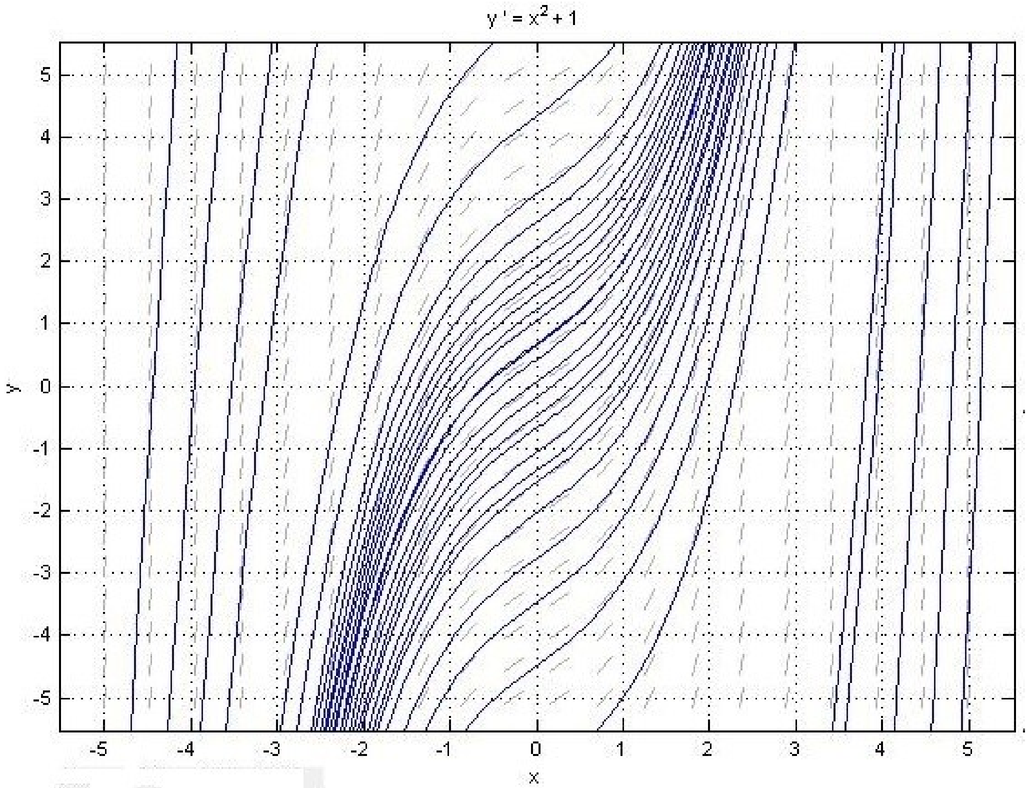
En matemáticas, la **función error** (también conocida como **función error de Gauss**) es una función especial (no elemental) que se utiliza en el campo de la probabilidad, la estadística y las ecuaciones diferenciales parciales. La función queda definida por la expresión:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

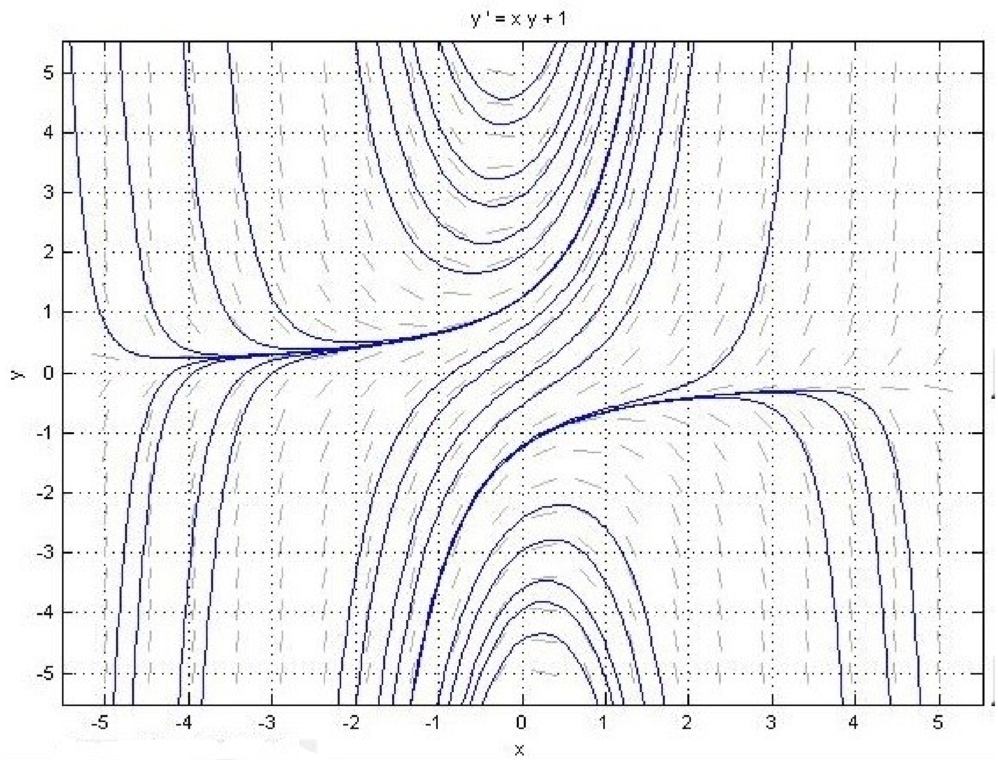
Si X es un vector de una matriz, entonces erf(x) calcularía la función de error de cada elemento de X

LAS GRÁFICAS RESULTANTES SON LAS SIGUIENTES:

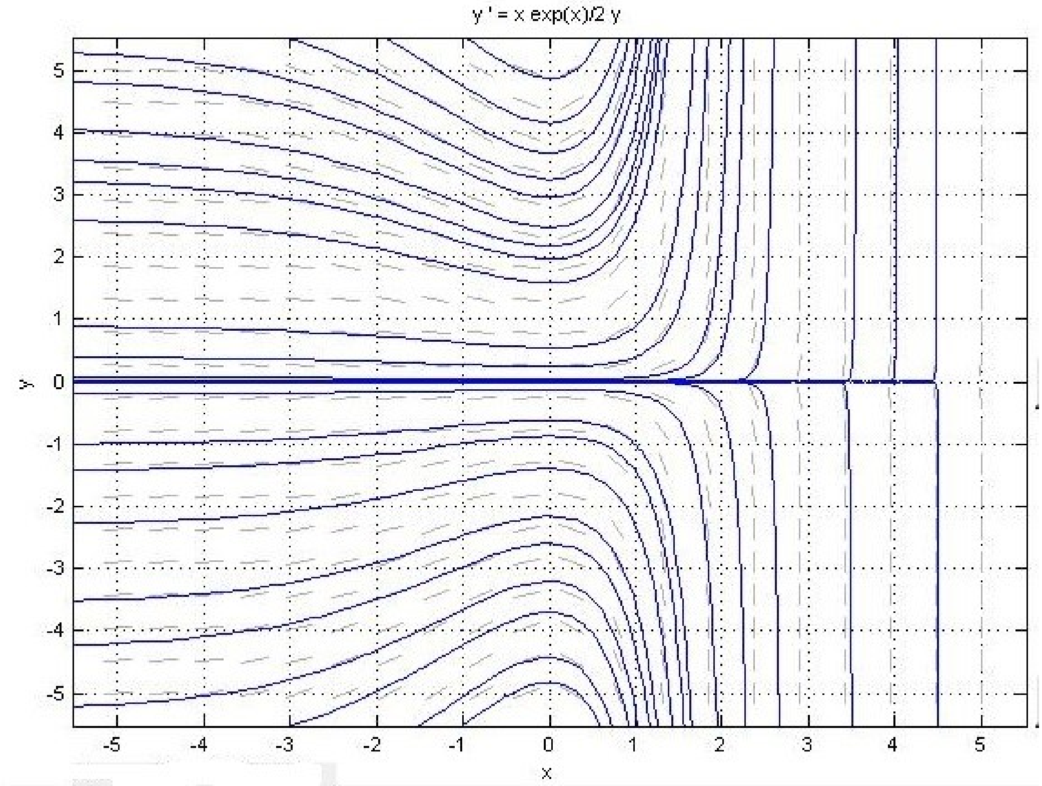
a) $y' = x^2 + 1$



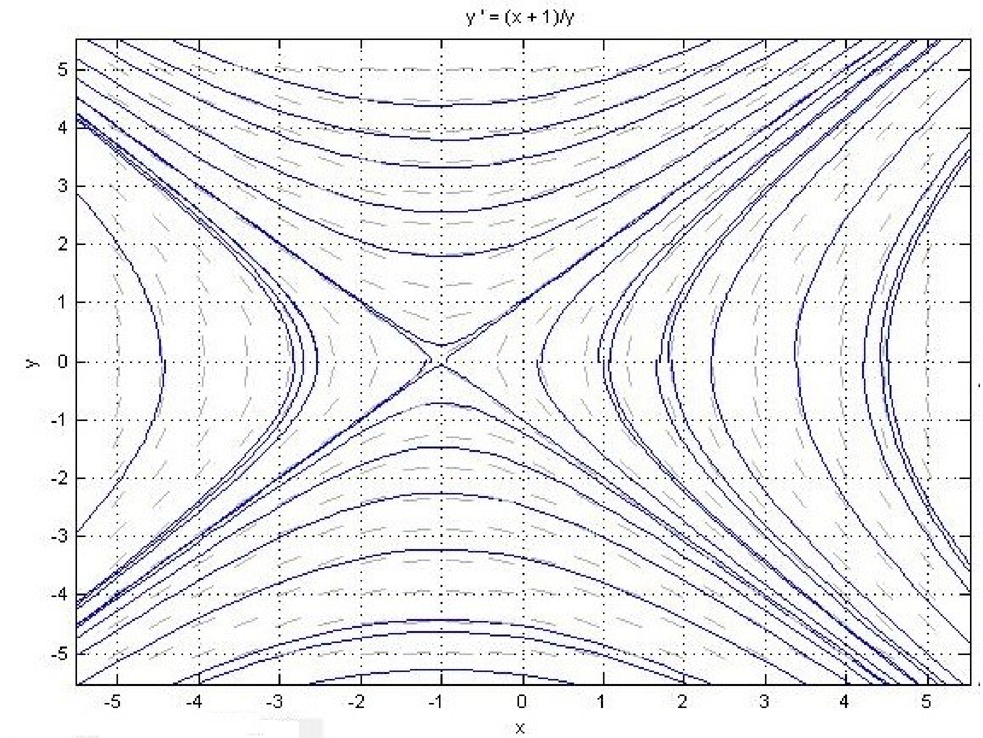
b) $y' = xy + 1$



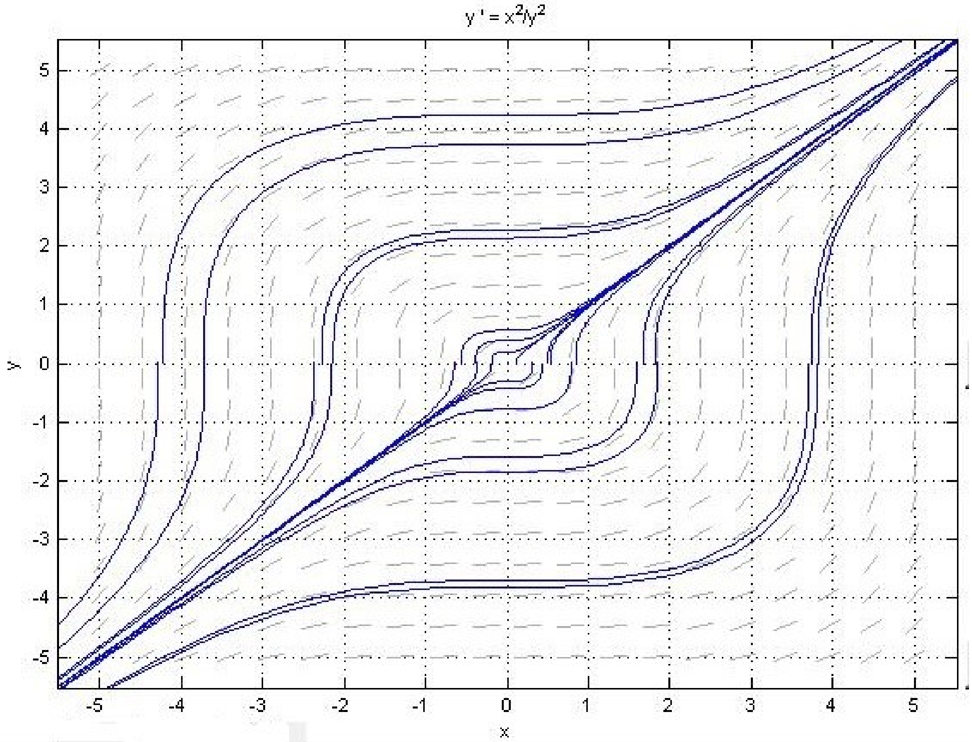
c) $y' = \frac{xe^x}{2y}$



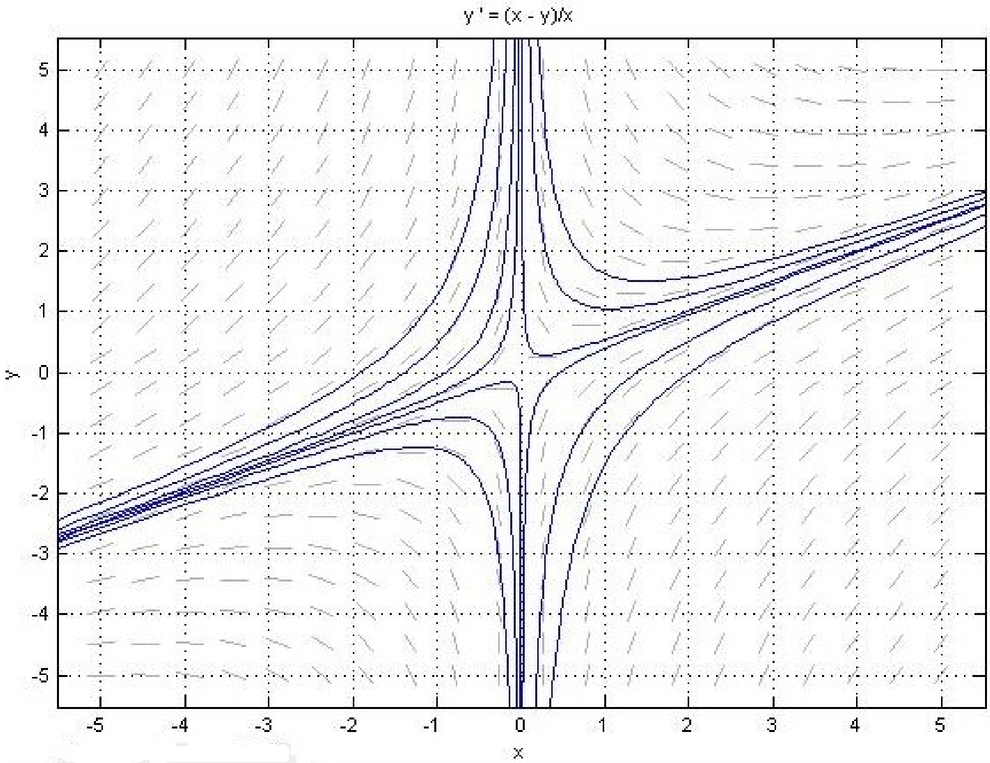
d) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y}$



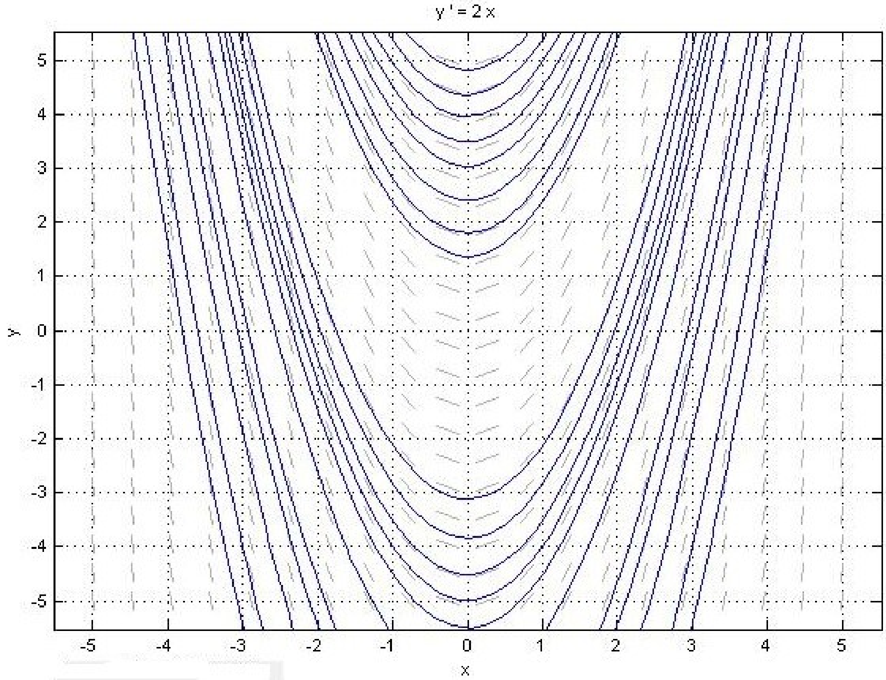
e) $y' = \frac{x^2}{y^2}$



f) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x}$

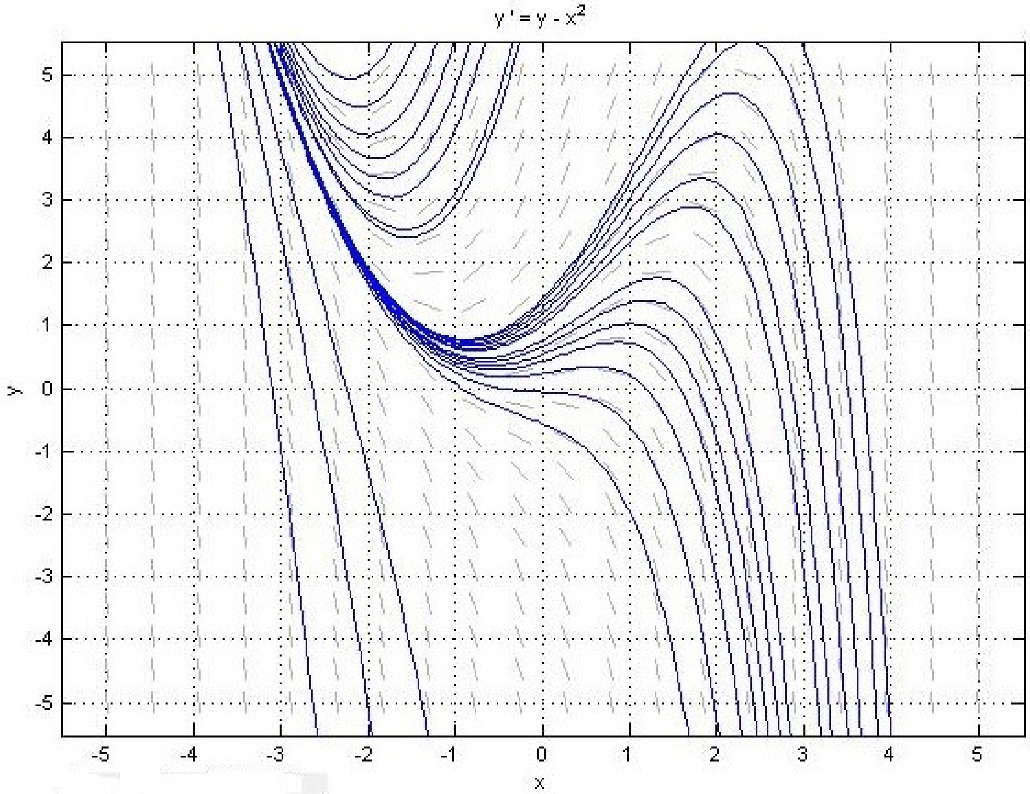


g) $y' = 2x$



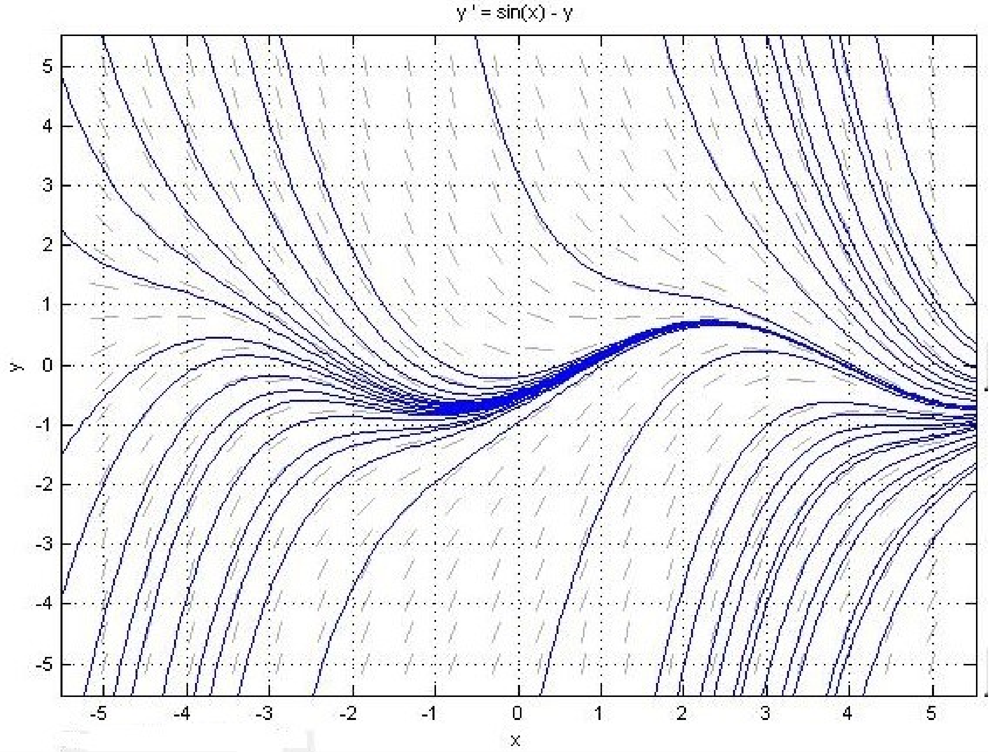
y ' = 2 x
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
y
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
x

h) $y' = y - x^2$

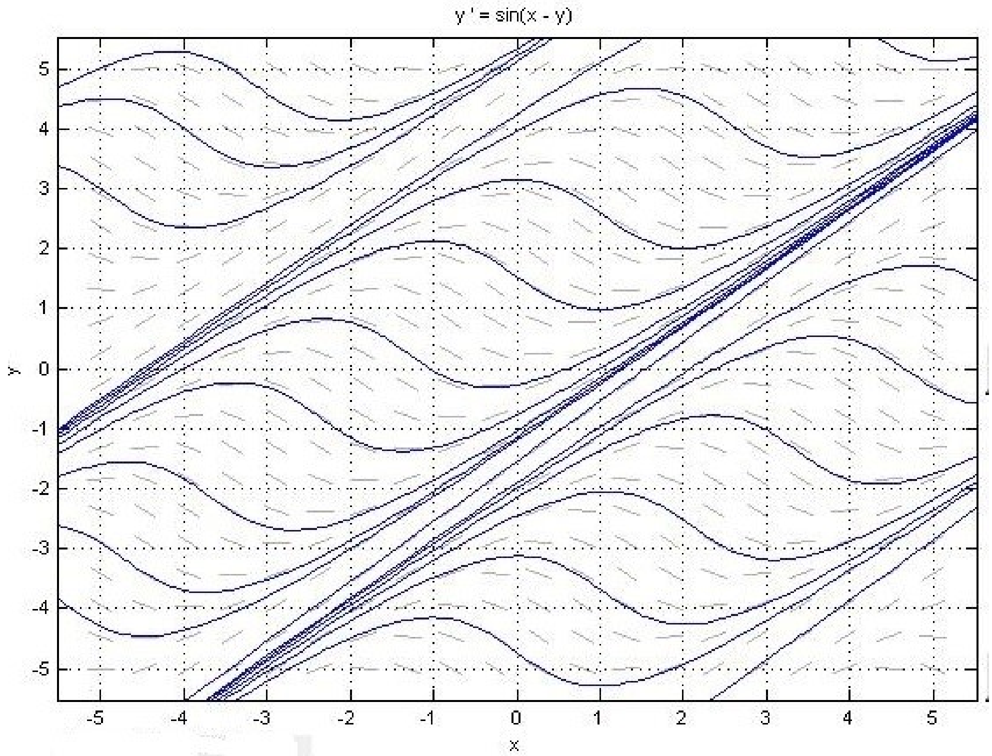


y ' = y - x²
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
y
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
x

i) $y' = sen\ x - y$



j) $y' = sen\ (x - y)$



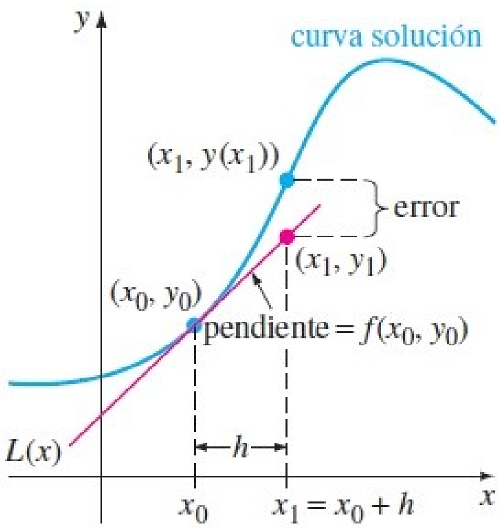
12.2.- MÉTODOS NUMÉRICOS, MÉTODO DE EULER

Al especificar una condición inicial dada en la ecuación (2), entonces la curva de la solución de la ecuación (1), es la que pasa a través del punto inicial $(x_0 \ , y_0)$, con el fin de obtener una aproximación gráfica de las ecuaciones (1) y (2), se comienza a construir un elemento de línea (o elemento lineal) en el punto inicial $(x_0 \ , y_0)$, y luego se prolonga una corta distancia. Se indica el punto terminal de este elemento de línea como $(x_1 \ , y_1)$,luego se construye un segundo elemento de línea en $(x_1 \ , y_1)$, y se prolonga una corta distancia. Se denota el punto terminal de este segundo elemento de línea como $(x_2 \ , y_2)$, así el proceso se efectúa reiterativamente (para así estimar los valores dentro de una vecindad), y se concluye cuando se han trazado suficientes curvas de la solución para satisfacer las necesidades relacionadas con el problema.

Para generalizar todo este proceso, se utiliza lo que se conoce como "***linealización***", de una solución incógnita y(x) de la ecuación (2) en $x = \ x_0$, de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$L(x) = \ y_0 + f(x_0 \ , y_0)\ (x - \ x_0) \qquad (3)$$

La gráfica de esta linealización **es una recta tangente** a la gráfica de $y = \ y(x)$, en el punto $(x_0 \ , y_0)$, Ahora hacemos que "***h***" sea un incremento positivo en el eje "***x***", como se muestra en la figura siguiente:



Entonces, sustituyendo $x \ por \ x_1 = \ x_0 + \ h$, en la ecuación (3) obtenemos lo siguiente:

$$L(x_1) = \ y_0 + f(x_0 \ , y_0)\ (x_0 + \ h - \ x_0) \qquad (4)$$

$$\text{ó}, \ \ y_1 = \ y_0 + hf(x_1 \ , y_1) \qquad (5)$$

donde $y_1 = L(x_1)$, el punto $(x_1 \ , y_1)$, en la recta tangente es una aproximación del punto $(x_1 \ , y(x_1)$, sobre la curva solución. Hay que notar que la precisión de la aproximación $L(x_1) \approx y(x_1)$, ó $y_1 \approx y(x_1)$, depende fuertemente del tamaño del incremento de "***h***", que es una constante de valor arbitrario, denominada "***tamaño de paso***". En general, cuanto menor sea el tamaño de paso, tanto más aproximada se convierte la solución, al precio de obtener más trabajo para obtenerla. Así la elección final de "***h***", puede ser un compromiso entre obtener exactitud y esfuerzo por conseguirla. Así que debemos de elegir un "tamaño de paso" que sea "razonablemente pequeño". Si "***h***", se elige demasiado grande, entonces la solución aproximada puede que no se parezca en absoluto a la solución real, esta es una condición conocidas como "inestabilidad numérica". Para evitarla se repite el ***método de Euler***, cada vez con un tamaño de paso que sea la mitad del valor anterior, hasta que dos aproximaciones sucesivas sean lo suficientemente cercanas para satisfacer las necesidades de la solución.

Ahora se repite el proceso usando una segunda "recta tangente" en $(x_1 \ , y_1)$, identificando el nuevo punto inicial como: $(x_1 \ , y_1)$, en lugar de $(x_0 \ , y_0)$, del análisis anterior, obteniendo así una aproximación $y_2 \approx y(x_2)$, correspondiendo esto a dos pasos de longitud "h", a partir de x_0 , es decir: $x_2 = x_1 + h = x_0 + h$, y además:

$$y(x_2) = y(x_0 + 2h) = y(x_1 + h) \approx y_2 = y_1 + hf(x_1 \ , y_1)$$

Continuando de esta forma, podemos observar que: $y_1, y_2, y_3 , \dots$, se pueden definir recursivamente mediante la siguiente fórmula general:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n \ , y_n) \qquad (5)$$

En donde, $x_n = x_0 + nh$, $n = 0, 1 , 2, \dots.$

y "***f***" es la función obtenida de la ecuación diferencial: $y' = f(x \, , y)$

Este procedimiento de uso sucesivo de las "rectas tangentes" obtenido en la ecuación (5), es lo que se conoce como "**Método de Euler**". Por lo tanto, este método llamado así en honor a *Leonhard Euler*, es un procedimiento de integración numérica, que sirve para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de un valor inicial dado, a través del uso sucesivo de rectas tangentes.

Para n = 1,2,3,.... Está ecuación (5), a menudo se escribe como:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n \qquad (6)$$

Donde al despejar la derivada "y'", queda de la siguiente forma:

$$y'_n = f(x_n \, , y_n \,) \qquad (7)$$

Tal y como lo requiere la ecuación (1).

12.2.1.- EJEMPLOS

Ejemplo 1

Encuentre $y(1)$, para la Ecuación Diferencial $y' = y - x$, con $y(0) = 2$, utilizando el **Método de Euler**, con $h = \frac{1}{4}$.

Determinando los valores de este problema, tenemos que:

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 2$$

$$f(x, y) = y - x$$

Por lo tanto: la ecuación (7) se nos convierte en:

$$y'_n = f(x_n, y_n)$$

$$y'_n = (y_n - x_n)$$

Ahora, con $h = \frac{1}{4}$, tenemos:

$$x_1 = x_0 + h = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = x_1 + h = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = x_2 + h = \frac{3}{4}$$

$$x_4 = x_3 + h = 1$$

Utilizando la ecuación (6), con n = 0, 1, 2, 3 sucesivamente, vamos a calcular los valores de "y", tenemos:

Con n = 0

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_1 = y_0 + hy'_0$$

Como $y'_0 = f(x_0, y_0) = y_0 - x_0 = 2 - 0 = 2$

Entonces, sustituyendo: $y_1 = y_0 + hy'_0 = 2 + \frac{1}{4}(2) = \frac{5}{2}$

Con n = 1

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_2 = y_1 + hy'_1$$

Como $y'_1 = f(x_1, y_1) = y_1 - x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

Entonces, sustituyendo: $y_2 = y_1 + hy'_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{49}{16}$

Con n = 2

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_3 = y_2 + hy'_2$$

Como $y'_3 = f(x_2, y_2) = y_2 - x_2 = \frac{49}{16} - \frac{1}{2} = \frac{41}{16}$

Entonces, sustituyendo: $y_3 = y_2 + hy'_2 = \frac{49}{16} + \frac{1}{4}\left(\frac{41}{16}\right) = \frac{237}{64}$

Con n = 3

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_4 = y_3 + hy'_3$$

Como $y'_4 = f(x_3, y_3) = y_3 - x_3 = \frac{237}{64} - \frac{3}{4} = \frac{189}{64}$

Entonces, sustituyendo: $y_4 = y_3 + hy'_3 = \frac{237}{64} + \frac{1}{4}\left(\frac{189}{64}\right) = \frac{1137}{256}$

De este modo, la solución pedida resulta en:

$$y(1) = y_4 = \frac{1137}{256} = 4.441$$

Lo que representa **el valor aproximado**, la solución verdadera estaría en calcular la ecuación diferencial mediante Matlab, "**Sol = dsolve ('Dy=y-x','x')**", lo que nos daría el siguiente resultado: $Y(x) = x + 1 + exp(x) * C1$, De tal forma, que con: ***y(1) = 4.718***

12.2.2.- Ejercicios de Métodos Cualitativos, Soluciones Gráficas y Numéricas de Ecuaciones Diferenciales

MÉTODO NUMÉRICO DE EULER **SOLUCIONES**

I)Encuentre *y(1)* para la Ecuación diferencial, $y' = y - x$; $y(0) = 2$ .utilizando el **método de Euler** con h = 0.1. Note que en este caso tendremos n = 0, 1, 2,....,9

Determinando los valores de este problema, tenemos que:

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 2$$

$$f(x\,,y) = y - x$$

Por lo tanto: la ecuación (7) se nos convierte en:

$$y'_n = f(x_n\,,y_n)$$

$$y'_n = (y_n - x_n)$$

Ahora, con $h = 0.1$, tenemos:

$$x_1 = x_0 + h = 0.1$$

$$x_2 = x_1 + h = 0.2$$

$$x_3 = x_2 + h = 0.3$$

$$x_4 = x_3 + h = 0.4$$

$$x_5 = x_4 + h = 0.5$$

$$x_6 = x_5 + h = 0.6$$

$$x_7 = x_6 + h = 0.7$$

$$x_8 = x_7 + h = 0.8$$

$$x_9 = x_8 + h = 0.9$$

$$x_{10} = x_9 + h = 1$$

Utilizando la ecuación (6), con n = 0, 1, 2, 3sucesivamente, vamos a calcular los valores de "y", tenemos:

Con n = 0

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_1 = y_0 + hy'_0$$

Como $y'_0 = f(x_0, y_0) = y_0 - x_0 = 2 - 0 = 2$

Entonces, sustituyendo: $y_1 = y_0 + hy'_0 = 2 + 0.1(2) = 2.2$

Con n = 1

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_2 = y_1 + hy'_1$$

Como $y'_1 = f(x_1, y_1) = y_1 - x_1 = 2.2 - 0.1 = 2.1$

Entonces, sustituyendo: $y_2 = y_1 + hy'_1 = 2.2 + 0.1(2.1) = 2.41$

Con n = 2

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_3 = y_2 + hy'_2$$

Como $y'_2 = f(x_2, y_2) = y_2 - x_2 = 2.41 - 0.2 = 2.21$

Entonces, sustituyendo: $y_3 = y_2 + hy'_2 = 2.41 + 0.1\ (2.21) = 2.631$

Con n = 3

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_4 = y_3 + hy'_3$$

Como $y'_3 = f(x_3, y_3) = y_3 - x_3 = 2.631 - 0.3 = 2.331$

Entonces, sustituyendo: $y_4 = y_3 + hy'_3 = 2.631 + 0.1\ (2.331) = 2.864$

Con n = 4

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_5 = y_4 + hy'_4$$

Como $y'_4 = f(x_4, y_4) = y_4 - x_4 = 2.864 - 0.4 = 2.464$

Entonces, sustituyendo: $y_5 = y_4 + hy'_4 = 2.864 + 0.1\ (2.464) = 3.110$

Con n = 5

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_6 = y_5 + hy'_5$$

Como $y'_5 = f(x_5 , y_5) = y_5 - x_5 = 3.110 - 0.5 = 2.610$

Entonces, sustituyendo: $y_6 = y_5 + hy'_5 = 3.110 + 0.1\ (2.610) = 3.371$

Con n = 6

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_7 = y_6 + hy'_6$$

Como $y'_6 = f(x_6 , y_6) = y_6 - x_6 = 3.371 - 0.6 = 2.771$

Entonces, sustituyendo: $y_7 = y_6 + hy'_6 = 3.371 + 0.1\ (2.771) = 3.648$

Con n = 7

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_8 = y_7 + hy'_7$$

Como $y'_7 = f(x_7 , y_7) = y_7 - x_7 = 3.648 - 0.7 = 2.948$

Entonces, sustituyendo: $y_8 = y_7 + hy'_7 = 3.648 + 0.1\ (2.948) = 3.943$

Con n = 8

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_9 = y_8 + hy'_8$$

Como $y'_8 = f(x_8 , y_8) = y_8 - x_8 = 3.943 - 0.8 = 3.143$

Entonces, sustituyendo: $y_9 = y_8 + hy'_8 = 3.943 + 0.1\ (3.143) = 4.257$

Con n = 9

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_{10} = y_9 + hy'_9$$

Como $y'_9 = f(x_9, y_9) = y_9 - x_9 = 4.257 - 0.9 = 3.357$

Entonces, sustituyendo: $y_{10} = y_9 + hy'_9 = 4.257 + 0.1\,(3.357) = 4.593$

Por lo tanto, el valor de *Y(1)* buscado es = 4.593

Los resultados se observan en la siguiente tabla:

Método de Euler		
Problema: $y' = y - x$: y(0) = 2		
$\mathbf{x_n}$	***h = 0.1***	Solución verdadera
	$\mathbf{y_n}$	g1=dsolve('Dy=y-x','x') **Y(x) = e^x + x + 1**
0.0	2.0000	2.0000
0.1	2.2000	2.2052
0.2	2.4100	2.4214
0.3	2.6310	2.6499
0.4	2.8641	2.8918
0.5	3.1105	3.1487
0.6	3.3716	3.4221
0.7	3.6487	3.7138
0.8	3.9436	4.0255
0.9	4.2579	4.3596
1.0	4.5937	4.7183

II) Encuentre y(1) para la Ecuación diferencial, $y' = y^2 + 1; \ y(0) = 0$.utilizando el **método de Euler** con h = 0.1. Note que en este caso tendremos n = 0, 1, 2,....,9

Determinando los valores de este problema, tenemos que:

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$f(x, y) = y^2 + 1$$

Por lo tanto: la ecuación (7) se nos convierte en:

$$y'_n = f(x_n, y_n)$$

$$y'_n = (y_n)^2 + 1$$

Ahora, con $h = 0.1$, tenemos: $y(1) = y_{10}$

Con n = 0

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_1 = y_0 + hy'_0$$

Como $y'_0 = f(x_0, y_0) = (y_0)^2 + 1 = (0)^2 + 1 = 1$

Entonces, sustituyendo: $y_1 = y_0 + hy'_0 = 0 + 0.1\,(1) = 0.100$

Con n = 1

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_2 = y_1 + hy'_1$$

Como $y'_1 = f(x_1, y_1) = (y_1)^2 + 1 = (0.1)^2 + 1 = 1.01$

Entonces, sustituyendo: $y_2 = y_1 + hy'_1 = 0.1 + 0.1\,(1.01) = 0.201$

Con n = 2

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_3 = y_2 + hy'_2$$

Como $y'_2 = f(x_2, y_2) = (y_2)^2 + 1 = (0.201)^2 + 1 = 1.040$

Entonces, sustituyendo: $y_3 = y_2 + hy'_2 = 0.201 + 0.1\,(1.040) = 0.3050$

Con n = 3

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_4 = y_3 + hy'_3$$

Como $y'_3 = f(x_3 \, , y_3\,) = (y_3)^2 + 1 = (0.305)^2 + 1 = 1.093$

Entonces, sustituyendo: $y_4 = y_3 + hy'_3 = 0.305 + 0.1\,(1.093) = 0.4143$

Con n = 4

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_5 = y_4 + hy'_4$$

Como $y'_4 = f(x_4 \, , y_4\,) = (y_4)^2 + 1 = (0.4143)^2 + 1 = 1.716$

Entonces, sustituyendo: $y_5 = y_4 + hy'_4 = 0.4143 + 0.1\,(1.716) = 0.5315$

Con n = 5

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_6 = y_5 + hy'_5$$

Como $y'_5 = f(x_5 \, , y_5) = (y_5)^2 + 1 = (0.5315)^2 + 1 = 1.2825$

Entonces, sustituyendo: $y_6 = y_5 + hy'_5 = 0.5315 + 0.1\,(1.2825) = 0.6598$

Continuando con los cálculos, se construye la siguiente tabla:

Método de Euler		
Problema: $y' = y^2 + 1$: $y(0) = 0$		
x_n	$h = 0.1$ y_n	Solución verdadera g1=dsolve('Dy=(y^2)+1','x') **Y(x) = tan x**
0.0	0.0000	0.0000
0.1	0.1000	0.1003
0.2	0.2010	0.2027
0.3	0.3050	0.3093
0.4	0.4143	0.4228
0.5	0.5315	0.5463
0.6	0.6598	0.6841
0.7	0.8033	0.8423
0.8	0.9678	1.0296
0.9	1.1615	1.2602
1.0	1.3964	1.5574

Por lo tanto, el valor de *Y(1)* buscado es = 1.3964

III) Resuelva en problema del inciso II, utilizando h = 0.05

Con n = 0

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_1 = y_0 + hy'_0$$

$$\text{Como } y'_0 = f(x_0, y_0) = (y_0)^2 + 1 = (0)^2 + 1 = 1$$

Entonces, sustituyendo: $y_1 = y_0 + hy'_0 = 0 + 0.05\,(1) = 0.05$

Con n = 1

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_2 = y_1 + hy'_1$$

$$\text{Como } y'_1 = f(x_1, y_1) = (y_1)^2 + 1 = (0.05)^2 + 1 = 1.0025$$

Entonces, sustituyendo: $y_2 = y_1 + hy'_1 = 0.05 + 0.05(1.0025) = 0.1001$

Con n = 2

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_3 = y_2 + hy'_2$$

Como $y'_2 = f(x_2 , y_2) = (y_2)^2 + 1 = (0.1001)^2 + 1 = 1.0100$

Entonces, sustituyendo: $y_3 = y_2 + hy'_2 = 0.1001 + 0.05(1.0100) = 0.1506$

Con n = 3

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_4 = y_3 + hy'_3$$

Como $y'_3 = f(x_3 , y_3) = (y_3)^2 + 1 = (0.1506)^2 + 1 = 1.023$

Entonces, sustituyendo: $y_4 = y_3 + hy'_3 = 0.1506 + 0.05(1.023) = 0.2017$

Con n = 4

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_5 = y_4 + hy'_4$$

Como $y'_4 = f(x_4 , y_4) = (y_4)^2 + 1 = (0.2017)^2 + 1 = 1.041$

Entonces, sustituyendo: $y_5 = y_4 + hy'_4 = 0.2017 + 0.05(1.041) = 0.2537$

Con n = 5

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_6 = y_5 + hy'_5$$

Como $y'_5 = f(x_5 , y_5) = (y_5)^2 + 1 = (0.2537)^2 + 1 = 1.0644$

Entonces, sustituyendo: $y_6 = y_5 + hy'_5 = 0.2537 + 0.05(1.0644) = 0.3069$

Con n = 6

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_7 = y_6 + hy'_6$$

Como $y'_6 = f(x_6 , y_6) = (y_6)^2 + 1 = (0.3069)^2 + 1 = 1.0942$

Entonces, sustituyendo: $y_7 = y_6 + hy'_6 = 0.3069 + 0.05(1.0942) = 0.3616$

Con n = 7

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_8 = y_7 + hy'_7$$

Como $y'_7 = f(x_7, y_7) = (y_7)^2 + 1 = (0.3616)^2 + 1 = 1.1308$

Entonces, sustituyendo: $y_8 = y_7 + hy'_7 = 0.3616 + 0.05(1.1308) = 0.4181$

Con n = 8

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_9 = y_8 + hy'_8$$

Como $y'_8 = f(x_8, y_8) = (y_8)^2 + 1 = (0.4181)^2 + 1 = 1.1748$

Entonces, sustituyendo: $y_9 = y_8 + hy'_8 = 0.4181 + 0.05(1.1748) = 0.4768$

Con n = 9

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_{10} = y_9 + hy'_9$$

Como $y'_9 = f(x_9, y_9) = (y_9)^2 + 1 = (0.4768)^2 + 1 = 1.2273$

Entonces, sustituyendo: $y_{10} = y_9 + hy'_9 = 0.4768 + 0.05(1.2273) = 0.5382$

Entonces, se construye la siguiente tabla:

Método de Euler		
Problema: $y' = y^2 + 1$: $y(0) = 0$		
$\mathbf{x_n}$	***h* = *0.05***	Solución verdadera
	$\mathbf{y_n}$	g1=dsolve('Dy=(y^2)+1','x') **Y(x) = tan x**
0.0	0.0000	0.0000
0.1	0.0500	0.1003
0.2	0.1001	0.2027
0.3	0.1506	0.3093
0.4	0.2017	0.4228
0.5	0.2537	0.5463
0.6	0.3069	0.6841
0.7	0.3616	0.8423
0.8	0.4181	1.0296
0.9	0.4768	1.2602
1.0	0.5382	1.5574

Por lo tanto, el valor de *Y(1)* buscado es = 0. 5382

IV) Resuelva el problema del inciso II, utilizando h = 0.01

Con n = 0

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_1 = y_0 + hy'_0$$

$$\text{Como } y'_0 = f(x_0, y_0) = (y_0)^2 + 1 = (0)^2 + 1 = 1$$

Entonces, sustituyendo: $y_1 = y_0 + hy'_0 = 0 + 0.01\,(1) = 0.01$

Con n = 1

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_2 = y_1 + hy'_1$$

$$\text{Como } y'_1 = f(x_1, y_1) = (y_1)^2 + 1 = (0.01)^2 + 1 = 1.0001$$

Entonces, sustituyendo: $y_2 = y_1 + hy'_1 = 0.01 + 0.01(1.0001) = 0.020001$

Con n = 2

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_3 = y_2 + hy'_2$$

Como $y'_2 = f(x_2, y_2) = (y_2)^2 + 1 = (0.020001)^2 + 1 = 1.0004$

Entonces, sustituyendo: $y_3 = y_2 + hy'_2 = 0.020001 + 0.01(1.0004) = 0.030005$

Con n = 3

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_4 = y_3 + hy'_3$$

Como $y'_3 = f(x_3, y_3) = (y_3)^2 + 1 = (0.030005)^2 + 1 = 1.0009$

Entonces, sustituyendo: $y_4 = y_3 + hy'_3 = 0.030005 + 0.01(1.0009) = 0.040014$

Con n = 4

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_5 = y_4 + hy'_4$$

Como $y'_4 = f(x_4, y_4) = (y_4)^2 + 1 = (0.040014)^2 + 1 = 1.0016$

Entonces, sustituyendo: $y_5 = y_4 + hy'_4 = 0.040014 + 0.01(1.0016) = 0.05003$

Con n = 5

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_6 = y_5 + hy'_5$$

Como $y'_5 = f(x_5, y_5) = (y_5)^2 + 1 = (0.05003)^2 + 1 = 1.0025$

Entonces, sustituyendo: $y_6 = y_5 + hy'_5 = 0.05003 + 0.01(1.0025) = 0.06006$

Con n = 6

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_7 = y_6 + hy'_6$$

Como $y'_6 = f(x_6, y_6) = (y_6)^2 + 1 = (0.06006)^2 + 1 = 1.00361$

Entonces, sustituyendo: $y_7 = y_6 + hy'_6 = 0.06006 + 0.01(1.00361) = 0.07009$

Con n = 7

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_8 = y_7 + hy'_7$$

Como $y'_7 = f(x_7, y_7) = (y_7)^2 + 1 = (0.07009)^2 + 1 = 1.00491$

Entonces, sustituyendo: $y_8 = y_7 + hy'_7 = 0.07009 + 0.01(1.00491) = 0.08014$

Con n = 8

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_9 = y_8 + hy'_8$$

Como $y'_8 = f(x_8, y_8) = (y_8)^2 + 1 = (0.08014)^2 + 1 = 1.00642$

Entonces, sustituyendo: $y_9 = y_8 + hy'_8 = 0.08014 + 0.01(1.00642) = 0.09020$

Con n = 9

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_{10} = y_9 + hy'_9$$

Como $y'_9 = f(x_9, y_9) = (y_9)^2 + 1 = (0.09020)^2 + 1 = 1.00813$

Entonces, sustituyendo: $y_{10} = y_9 + hy'_9 = 0.09020 + 0.01(1.00813) = 0.10028$

Entonces, se construye la siguiente tabla:

Método de Euler		
Problema: $y' = y^2 + 1$: y(0) = 0		
$\mathbf{x_n}$	$\boldsymbol{h = 0.05}$	Solución verdadera
	$\mathbf{y_n}$	g1=dsolve('Dy=(y^2)+1','x') **Y(x) = tan x**
0.0	0.0000	0.0000
0.1	0.010000	0.1003
0.2	0.020001	0.2027
0.3	0.030005	0.3093
0.4	0.040014	0.4228
0.5	0.05003	0.5463
0.6	0.06006	0.6841
0.7	0.07009	0.8423
0.8	0.08014	1.0296
0.9	0.09020	1.2602
1.0	0.10028	1.5574

Por lo tanto, el valor de *Y(1)* buscado es = 0. 10028

12.3.- MÉTODOS DE - RUNGE KUTTA

INTRODUCCIÓN

Probablemente uno de los procedimientos numéricos más populares, así como más precisos, utilizados para obtener aproximaciones para un problema con valores iniciales *$y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$*, es el denominado "**método de Runge-Kutta de primer, segundo y cuarto orden**" Como el nombre lo indica, existen además varios métodos de Runge-Kutta de diferentes órdenes.

MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

En esencia, todos los métodos de Runge-Kutta son *generalizaciones de la ecuación del método de Euler* (5) visto anteriormente, que aquí nombramos como (1)

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n\ ,y_n) \qquad (1)$$

En donde ***f*** es la función pendiente, obtenida de la ecuación diferencial *$y' = f(x,y)$*. y que aquí se reemplaza por un promedio ponderado de pendientes en el intervalo $x_n \leq x \leq x_{n+1}$, es decir:

PROMEDIO PONDERADO

$$y_{n+1} = y_n + \underline{h(w_1\, k_1 + w_2\, k_2 + \ldots + w_m\, k_m)} \qquad (2)$$

Aquí los pesos w_i, $i = 1, 2, 3, , , m$, son constantes que generalmente satisfacen $w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_m = 1$, y cada k_i, $i = 1, 2, 3, , , m$, es la función ***f***, evaluada en un punto seleccionado *(x,y)* para el que $x_n \leq x \leq x_{n+1}$, Podemos ver que las k_i, se definen recursivamente. El número ***m***, se llama el "**orden del método**". Podemos observar que al tomar $m = 1, w_1 = 1\ y\ k_1 = f(x_n\ ,y_n)$, se obtiene la conocida fórmula de **Euler** $y_{n+1} = y_n + hf(x_n\ ,y_n)$ (1). Por esta razón, se dice que el método de **Euler** es un ***método de Runge-Kutta de primer orden***.

12.3.1.- MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN

En esencia, este consiste en encontrar constantes o parámetros $w_1, w_2, \alpha\ y\ \beta$, tal que la fórmula:

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1\, k_1 + w_2\, k_2), \qquad (3)$$

Donde:

$$k_1 = f(x_n\ ,y_n),$$
$$k_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h\, k_1)$$

Lo que concuerda con un polinomio de Taylor de grado dos. Así, para nuestros objetivos es suficiente decir que esto se puede hacer siempre que las constantes satisfagan lo siguiente:

$$w_1 + w_2 = 1, \quad w_2\, \alpha = \frac{1}{2}, \quad y \quad w_2\, \beta = \frac{1}{2} \qquad (4)$$

Este es un sistema algebraico de tres ecuaciones con cuatro incógnitas y tiene un número infinito de soluciones.

$$w_1 = 1 - w_2\,, \qquad \alpha = \frac{1}{2w_2}\,, \quad y \quad \beta = \frac{1}{2w_2} \qquad (5)$$

donde $w_2 \neq 0$.

Por ejemplo, la elección de $w_2 = \frac{1}{2}$, produce $w_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$ y $\beta = 1$, y por lo tanto, la ecuación (3) se convierte en:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

donde:

$$\boldsymbol{k_1 = hf(x_n\,, y_n)\,, \quad k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right),}$$

$$\boldsymbol{k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)\,, \quad k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)}$$

En donde, el resultado es:

$$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}$$

Puesto que $x_n + h = x_{n+1} y y_n + h\,k_1 = y_n + hf(x_n\,, y_n)$, se reconoce al resultado anterior como **el método mejorado** de **Euler**. En vista que $w_2 \neq 0$, se puede elegir de modo arbitrario en (5), lo que produce muchos posibles resultados de **método de Runge-Kutta de segundo orden**.

Vamos a omitir el de tercer orden, para centrarnos en el de cuarto, que es el más utilizado.

12.3.2. MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN

El procedimiento de Runge-Kutta de cuarto orden, consiste en determinar parámetros de modo que la ecuación:

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4) \qquad (6)$$

Donde:

$$k_1 = f(x_n\,, y_n)\,,$$
$$k_2 = f(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 h\,k_1)$$
$$k_3 = f(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 h\,k_1 + \beta_3 h\,k_2)$$
$$k_4 = f(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 h\,k_1 + \beta_5 h\,k_2 + \beta_6 h\,k_3)$$

Lo que concuerda con un **polinomio de Taylor de grado cuatro**. Esto da como resultado un sistema de 11 ecuaciones con 13 incógnitas. El conjunto de valores utilizado con más frecuencia para los parámetros produce el siguiente resultado:

$$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)} \qquad (7)$$

Donde:

$$\boldsymbol{k_1 = f(x_n\,, y_n)\,,}$$
$$\boldsymbol{k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h\,k_1\right)}$$
$$\boldsymbol{k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h\,k_2\right)}$$
$$\boldsymbol{k_4 = f(x_n + h, y_n + h\,k_3)}$$

Mientras que las otras fórmulas de cuarto orden se deducen con facilidad, el algoritmo resumido en la ecuación (7) que es muy utilizado como una invaluable herramienta de cálculo. Se le denomina el **método de Runge-Kutta de cuarto orden**, o **método clásico de Runge-Kutta**.

12.3.3. Ejemplo Método de Runge-Kutta de Segundo Orden

Utilice el método de Runge-Kutta de segundo orden para resolver la ecuación diferencial: $y' = y; y(0) = 1$, en el intervalo ***[0, 1]***, con ***h = 0.1***

Aquí ***f(x,y) = y***; Utilizando la ecuación (7), con n = 0,1,2,.....9, calculamos lo siguiente:
Donde: $x_0 = 0,\ x_1 = 0.1,\ \ x_2 = 0.2, \ldots.\ x_{10} = 1$

Con n = 0

$$x_0 = 0,\ \ y_0 = 1$$
$$k_1 = hf(x_0\ , y_0) = hf(0\ , 1) = (0.1)(1) = 0.1$$
$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right) = hf\left(0 + \frac{1}{2}(0.1), 1 + \frac{1}{2}(0.1)\right) = hf(0.05, 1.05) = (0.1)(1.05) = 0.105$$
$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right) = hf\left(0 + \frac{1}{2}(0.1), 1 + \frac{1}{2}(0.105)\right) = hf(0.05, 1.053) = (0.1)(1.053) = 0.105$$
$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = hf(0 + (0.1), 1 + (0.105)) = hf(0.1, 1.05) = (0.1)(1.105) = 0.111$$

Por lo tanto sustituyendo en (7) tenemos:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(0.1 + 2(0.105) + 2(0.105) + 0.111) = \mathbf{1.105}$$

Con n = 1

$$x_1 = 0.1,\ \ y_1 = 1.105$$

$$k_1 = hf(x_1\ , y_1) = hf(0.1\ , 1.105) = (0.1)(1.105) = 0.111$$
$$k_2 = hf\left(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_1\right) = hf\left(0.1 + \frac{1}{2}(0.1), 1.105 + \frac{1}{2}(0.111)\right) = hf(0.15, 1.161)(0.1)(1.161)$$
$$= 0.116$$
$$k_3 = hf\left(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_2\right) = hf\left(0.1 + \frac{1}{2}(0.1), 1.105 + \frac{1}{2}(0.116)\right) = hf(0.15, 1.163)(0.1)(1.163)$$
$$= 0.116$$
$$k_4 = hf(x_1 + h, y_1 + k_3) = hf(0.1 + (0.1), 1.105 + (0.116)) = hf(0.2, 1.221)(0.1)(1.221) = 0.122$$

Por lo tanto sustituyendo en (7) tenemos:

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$y_2 = 1.105 + \frac{1}{6}(0.111 + 2(0.116) + 2(0.116) + 0.122) = \mathbf{1.221}$$

Con n = 2

$$x_2 = 0.2,\ \ y_2 = 1.221$$

$$k_1 = hf(x_2\ , y_2) = hf(0.2\ , 1.221) = (0.1)(1.221) = 0.1221$$
$$k_2 = hf\left(x_2 + \frac{1}{2}h, y_2 + \frac{1}{2}k_1\right) = hf\left(0.2 + \frac{1}{2}(0.1), 1.221 + \frac{1}{2}(1.221)\right) = hf(0.25, 1.282)(0.1)(1.282)$$
$$= 0.128$$
$$k_3 = hf\left(x_2 + \frac{1}{2}h, y_2 + \frac{1}{2}k_2\right) = hf\left(0.2 + \frac{1}{2}(0.1), 1.221 + \frac{1}{2}(0.128)\right) = hf(0.25, 1.285)(0.1)(1.285)$$
$$= 0.129$$
$$k_4 = hf(x_2 + h, y_2 + k_3) = hf(0.2 + (0.1), 1.221 + (0.129)) = hf(0.3, 1.350)(0.1)(1.350) = 0.135$$

Por lo tanto sustituyendo en (7) tenemos:

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4)$$

$$y_3 = 1.221 + \frac{1}{6}(0.122 + 2(0.128) + 2(0.129) + 0.135) = \mathbf{1.350}$$

Continuando con los cálculos, para ***n= 2,3,4,...9***, construimos la siguiente tabla:

Método de Runge-Kutta 4to. Orden		
Problema: y' = y: y(0) = 1		
x_n	*h = 0.1* y_n	Solución verdadera **Y(x) = e^x**
0.0	1.0000000	1.0000000
0.1	1.1051708	1.1051709
0.2	1.2214026	1.2214028
0.3	1.3498585	1.3498588
0.4	1.4918242	1.4918247
0.5	1.6487206	1.6487213
0.6	1.8221180	1.8221188
0.7	2.0137516	2.0137527
0.8	2.2255396	2.2255409
0.9	2.456014	2.4596031
1.0	2.7182797	2.7182818

En donde, el área sombreada de la tabla, representa los cálculos que acabamos de realizar, el valor real se puede obtener de acuerdo a la fórmula expresada en la tabla. Si se observa el valor calculado con el método y el valor real calculado con "Dsolve", la aproximación es bastante clara, mucho mejor que con el método de Euler, por eso se llama método de Euler mejorado.

12.4.- Programa (Script) en Matlab para resolver una Ecuación Diferencial mediante el Método de Euler:

```
function y = euler(n,a,b,h)

% Programa para calcular por el método de Euler
% el valor aproximado de la solución de las
% Ecuaciones Diferenciales

% PARA ESTUDIOS DE INGENIERÍA CIVIL
% CUARTO SEMESTRE

% DOCENTE: Dr. Ligdamis A. Gutiérrez E.

close all; clc;

% Para el cálculo se utilizan dos funciones
% La primera tiene el método de Euler
% y la segunda llama a la función f(x,y) a
% calcular.

% Donde valores iniciales a y b
% y(x0) = y0 son los valores iniciales
% En donde a = x0 y b = y0
% y tamaño de paso h, con n de pasos
% Para n = 0, ..., n-1, hacer:  Xn+1 = Xn + h;  Yn+1 = Yn + hf(Xn, Yn)

disp('           INGENIERÍA CIVIL - CUARTO SEMESTRE  ');
disp(' ');
disp('     PROGRAMA PARA CALCULO DEL MÉTODO DE EULER');
disp('  ');
disp('         ECUACIONES DIFERENCIALES - CON MATLAB  ');
disp(' ');
disp(' Introduzca las entradas: n= numero pasos, a= Xo, b = Yo, h = Tamaño
paso ')
disp('  ');
disp('                   euler(n,a,b,h)  ');
disp('  ');

n = input('Deme el valor del número de pasos n:      ');
disp('  ');
a= input('Deme el valor inicial de Xo :              ');
disp('  ');
b = input('Deme el valor inicial de Yo:              ');
disp('  ');
h = input('Deme el valor del tamaño de paso h:       ');
disp(' ');
disp(' El Cálculo de los valores de y, con el Método de Euler es: ');
disp(' ');

format short;     % formato corto de números, para cuatro decimales
x = a:h:n*h;
y = zeros(n,1);

y(1) = b;

for k=1:n   % Con el ciclo for, se dan cada valor de y
    f = fe(x(k), y(k));
    y(k+1) = y(k)+h*f;
end


% En la función fe se define la función y' = f(x,y)
```

```
function f = fe(x,y)
% Aquí coloca el valor derecho de la Ecuación Diferencial
% En su forma Normal, f(x,y)
f = y^2+1;  % Es la función a trabajar

% FIN
```

La Ejecución del programa da como resultado la siguiente salida:

INGENIERÍA CIVIL – CUARTO SEMESTRE

PROGRAMA PARA CÁLCULO DEL MÉTODO DE EULER

ECUACIONES DIFERENCIALES – CON MATLAB

Introduzca las entradas: n= numero pasos, a= Xo, b = Yo, h = Tamaño paso
euler(n,a,b,h)

Deme el valor del número de pasos: 10
Deme el valor inicial de Xo : 0
Deme el valor inicial de Yo: 0
Deme el valor del tamaño de paso h: 0.1

El Cálculo de los valores de y, con el Método de Euler es:

```
         0
    0.1000
    0.2010
    0.3050
    0.4143
    0.5315
    0.6598
    0.8033
    0.9678
    1.1615
    1.3964
```

12.5.- EJEMPLOS DE MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 4TO ORDEN

I) Utilice el método de Runge-Kutta de cuarto orden, para resolver la ecuación diferencial con aproximación a ***y(1.5):***

$y' = 2\,xy;\ \ y(1) = 1$, con ***h = 0.1***

Aquí ***f(x,y) = 2xy***; Utilizando la ecuación (7), como *y(1) = 1*, entonces: ***x = 1***, así entonces con n = 0, 1, 2,...6, Se encuentran los valores de x, que son: $x_0 = 1.00,\ x_1 = 1.10,\ \ x_2 = 1.20$, ... $x_6 = 1.50$, hasta llegar al valor aproximado pedido. Lo mismo para todos los incisos.

Con n = 0

$$x_0 = 0,\ \ y_0 = 1$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4) \qquad (7)$$

Donde:

$$k_1 = f(x_0\ , y_0) = 2x_0\,y_0\ = 2\ ,$$

$$k_2 = 2\left(\left(x_0\ + \frac{1}{2}(0.1)\right), \left(y_0 + \frac{1}{2}(0.1)\ (2)\right)\right) = 2.31$$

$$k_3 = f\left(\left(x_0\ + \frac{1}{2}(0.1)\right), \left(y_0 + \frac{1}{2}(0.1)\ (2.31)\right)\right) = 2.34255$$

$$k_4 = f\left(\left(x_0\ + (0.1)\right), \left(y_0\ + (0.1)\ (2.34255\ )\right)\right) = 2.715361$$

Por tanto:

$$y_1 = y_0 + \frac{0.1}{6}(\,2 + 2\,(2.31\,) + 2\,(2.34255\,) + 2.715361) = \mathbf{1.23367435}$$

El resto de cálculos se presentan en la siguiente tabla:

Método de Runge-Kutta 4to. orden RK4		
Problema: $y' = 2xy$: y(1) = 1		
x_n	*h = 0.1* y_n	Solución verdadera g1=dsolve('Dy=2*x*y','x') **Y(x) = C1*exp(x^2)**
1.00	1.0000	1.0000
1.10	1.2337	1.2337
1.20	1.5527	1.5527
1.30	1.9937	1.9937
1.40	2.616	2.6117
1.50	3.4902	3.4904

II) En los siguiente incisos, utilizar el método de Runge-Kutta de cuarto orden, con *h= 0.1* para obtener una aproximación de cuatro decimales del valor aproximado indicado

a) $y' = 2x - 3y + 1,\ \ y(1) = 5;$ con aproximación a $\ \ y(1.5)$

Los cálculos se presentan en la siguiente tabla:

Método de Runge-Kutta 4to. orden RK4	
Problema: $y' = 2x\text{-}3y\text{+}1$: y(1) = 5	
$\mathbf{x_n}$	***h = 0.1***
	$\mathbf{y_n}$
1.00	5.0000
1.10	3.9724
1.20	3.2284
1.30	2.6945
1.40	2.3163
1.50	2.0533

b) $y' = 1 + \ y^2\ ,\ y(0) = 0;$ con aproximación a $\ \ y(0.5)$

Los cálculos se presentan en la siguiente tabla:

Método de Runge-Kutta 4to. orden RK4	
Problema: $y' = 1 + y^2$: y(0) = 0	
$\mathbf{x_n}$	***h = 0.1***
	$\mathbf{y_n}$
0.00	0.0000
0.10	0.1003
0.20	0.2027
0.30	0.3093
0.40	0.4228
0.50	0.5463

c) $y' = 4x - 2y,\ y(0) = 2;$ con aproximación a $\ \ y(0.5)$

Los cálculos se presentan en la siguiente tabla:

Método de Runge-Kutta 4to. orden RK4	
Problema: $y' = 4x$ - $2y$: y(0) = 2	
$\mathbf{x_n}$	***h = 0.1***
	$\mathbf{y_n}$
0.00	2.0000
0.10	1.6562
0.20	1.4110
0.30	1.2465
0.40	1.1480
0.50	1.1037

a) Como ejercicio queda el realizar los cálculos para comprobar los valores de las tablas.
b) Realizar una tabla comprando los resultados de y' = y2 + 1 , con los tres métodos y el valor real.

13.- TRANSFORMADAS Y SERIES CON ECUACIONES DIFERENCIALES

13.1.- TRANSFORMADA DE LAPLACE

13.1.1.- INTRODUCCIÓN

En cálculo se descubre que tanto la derivación como la integración son "***transformadas***"; esto significa, a grandes rasgos, que estas operaciones transforman una función en otra. Por ejemplo, la función $\boldsymbol{f(x) = x^2}$, se transforma, a su vez en una función lineal y en una familia de funciones polinomiales cúbicas mediante las operaciones de derivación e integración de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx}\, x^2 = 2x \ ; \quad y \quad \int x^2\, dx = \frac{1}{3}\, x^3 + C$$

Además, estas dos transformadas tienen la propiedad de linealidad, de tal forma que la transformada de una combinación lineal de las transformadas. Para α y β constantes de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx}\,[\propto f(x) + \beta\, g(x)] = \propto f'(x) + \beta'\, g(x)$$

y además:

$$\int [\propto f(x) + \beta\, g(x)] = \propto \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

Esto siempre que cada derivada e integral existan. Ahora vamos a examinar un tipo especial de transformada integral llamada "**Transformada de Laplace**". Además de tener la propiedad de linealidad, la transformada de Laplace tiene varias propiedades que la hacen muy útil para resolver problemas lineales con valores iniciales.

13.1.2.- TRANSFORMADA INTEGRAL

Si $\boldsymbol{f(x,y)}$ es una función de dos variables, entonces una integral definida de $\boldsymbol{f}$, respecto a una de las variables conduce a una función de la otra variable. Por ejemplo, si se conserva a la variable "y" como constante, se ve que: $\int_1^2 2xy^2\, dx = 3y^2$. De igual manera, una integral definida como $\int_a^b K(s,t)f(t)dt$, transforma una función de $\boldsymbol{f}$ de la variable "***t***", en una función F de la variable "***s***". Aquí hay un particular interés en una transformada integral, en donde el intervalo de integración es el intervalo no acotado [0 , ∞]. Si $\boldsymbol{f(t)}$ se define para t ≥ 0, entonces la integral impropia $\int_0^\infty K(s,t)f(t)dt$, se define como un límite de la manera siguiente:

$$\int_0^\infty K(s,t)f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b K(s,t)f(t)dt \qquad (1)$$

Si existe el límite en (1), entonces se dice que la integral existe o es **convergente**; si no existe el límite, la integral no existe y es **divergente**. En general, el límite en (1) existirá solo para ciertos valores de la variable "***s***".

13.1.3.- DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La función ***k(s,t)*** en (1) se denomina "**kernel**" o "**núcleo**" de la transformada. La elección de $k(s,t) = e^{-st}$, como el núcleo nos proporciona una transformada integral importante que se define como sigue:

Sea f una función definida para t ≥ 0. Entonces se dice que la integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \qquad (2)$$

Que es la **Transformada de Laplace** de ***f***, siempre que la integral converja. Cuando la integral de la ecuación (2) converge, el resultado es una función de "***s***". Se denota bien por $\mathcal{L}\{f(t)\}$, o por $F(s)$, y la convergencia ocurre cuando el límite:

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}f(t)dt$$

En el análisis general de la sintaxis, se utiliza una letra **minúscula** para denotar que la función que se transforma y la letra **mayúscula** corresponde para denotar su transformada de Laplace, por ejemplo:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \qquad \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s), \quad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

13.1.4.- EJEMPLOS

Ejemplo1

Determine si la integral impropia siguiente converge.

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$$

Dado que:

$$\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)_2^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la integral impropia converge al valor de $\frac{1}{2}$

Ejemplo 2

Determine si la integral impropia siguiente converge.

$$\int_{9}^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

Dado que:

$$\lim_{b\to\infty} \int_{9}^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} ln \left|\frac{1}{x}\right|_{9}^{b} = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 9) = \infty$$

Por lo tanto, la integral impropia **es divergente**.

En los ejercicios, se adoptará la notación $[\quad]_{\mathbf{0}}^{\infty}$, *como abreviatura para escribir* $\lim_{b\to\infty} |\quad|_{0}^{b}$

Ejemplo 3

Encuentre la Transformada de Laplace de: ***f(x) = 1***.

$$F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \int_{0}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} e^{-sx}(1) dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sx}\right]_{x=0}^{x=b} = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-1}{s} e^{-sb} + \frac{1}{s}\right] = \lim_{b\to\infty} \frac{-e^{-sb} + 1}{s} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s}} \quad (para\ s > 0)$$

Aquí, el exponente ***-sb*** es negativo y $e^{-sb} \to 0$, conforme $b \to 0$, Así, la integral diverge para ***s < 0***

Ejemplo 4

Encuentre la Transformada de Laplace de: $\boldsymbol{\mathcal{L}\{e^{-3x}\}}$.

Utilizando la ecuación (2) tenemos:

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{-3x}\} = \int_{0}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_{0}^{b} e^{-sx}(e^{-3x}) dx$$

$$= \left[-\frac{-e^{-(s+3)x}}{s+3}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s+3}}, (para\ s > -3)$$

El resultado se deduce del hecho que el $\lim_{x\to\infty} e^{-(s+3)x} = 0$, para s > -3

Ejemplo 5

Encuentre la Transformada de Laplace de: $\mathcal{L}\{\boldsymbol{sen\ ax}\}$.

$$F(s) = \mathcal{L}\{sen\ ax\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = \int_0^b e^{-sx}(sen\ ax)dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-se^{-sx}\ sen\ ax}{s^2+a^2} - \frac{ae^{-sx}\ cos\ ax}{s^2+a^2}\right]_{x=0}^{x=b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-se^{-sb}\ sen\ ab}{s^2+a^2} - \frac{ae^{-sb}\ cos\ ab}{s^2+a^2} + \frac{a}{s^2+a^2}\right]$$

$$= \boldsymbol{\frac{a}{s^2+a^2}} \quad (para\ s > 0)$$

En estos momentos se establece la generalización de algunos de los ejemplos anteriores mediante el siguiente teorema. A partir de este momento se deja de expresar cualquier restricción sobre "$\boldsymbol{s}$"; y se sobreentiende que "$\boldsymbol{s}$" está lo suficientemente restringida para garantizar la convergencia de la adecuada transformada de Laplace.

13.1.5.- TEOREMAS DE TRANSFORMADAS DE ALGUNAS FUNCIONES BÁSICAS

a) $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$

i) $\mathcal{L}\{\sqrt{x}\} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\ s^{-3/2}$

b) $\mathcal{L}\{x\} = \dfrac{1}{s^2}$

j) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right\} = \sqrt{\pi}\ s^{-1/2}$

c) $\mathcal{L}\{x^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $donde\ n = 1,2,3, \ldots$

d) $\mathcal{L}\{e^{ax}\} = \dfrac{1}{s-a}$

k) $\mathcal{L}\{xsen\ kx\} = \dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$

e) $\mathcal{L}\{sen\ kx\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$

l) $\mathcal{L}\{xcos\ kx\} = \dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$

f) $\mathcal{L}\{cos\ kx\} = \dfrac{s}{s^2+k^2}$

g) $\mathcal{L}\{senh\ kx\} = \dfrac{k}{s^2-k^2}$

h) $\mathcal{L}\{cosh\ kx\} = \dfrac{s}{s^2-k^2}$

13.1.6.- EJEMPLOS DE TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE:

I) Encuentre la transformada inversa: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$.

Por el teorema de las funciones básicas de las Transformadas de Laplace, tenemos que:

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

Por lo tanto: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \mathbf{1}$

II) Encuentre la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6}\right\}$

Por el teorema de las funciones básicas de las Transformadas de Laplace,

con $k = \sqrt{6}$ tenemos que: $\mathcal{L}\,\{\cos kx\} = \frac{s}{s^2+k^2}$ *, por lo que*

$$\mathcal{L}\{\cos\sqrt{6}\,x\} = \frac{s}{s^2+\left(\sqrt{6}\right)^2} = \frac{s}{s^2+\sqrt{6}}$$

Por lo tanto: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6}\right\} = \boldsymbol{\cos\sqrt{6}\,x}$

13.2.- MÉTODO DE LA SERIE DE TAYLOR

13.2.1.- INTRODUCCIÓN

Cuando nos encontramos con series debemos de buscar la mejor alternativa para poder encontrar una solución de una ecuación diferencial determinada. Para simplificar las cosas, vamos a limitarnos a ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden de la forma siguiente

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \qquad (1)$$

Donde p(x), g(x), y r(x) son polinomios.

Un método alternativo para encontrar soluciones con series de potencias de la ecuación diferencial (1) alrededor de un punto ordinario x = 0, está disponible y se conoce como el "método de Taylor". Este método usa los valores de las derivadas evaluadas en el punto ordinario, los cuales se obtienen de la ecuación diferencial por diferenciación sucesiva. Cuando se encuentran las derivadas, se utiliza luego la expansión en serie de Taylor siguiente:

$$p_n(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + \frac{y''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{y'''(a)(x-a)^3}{3!} + \dots + \frac{y^n(a)(x-a)^n}{n!} (2)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{y^j(a)}{j!}(x-a)^j$$

Los valores de este polinomio y de sus derivadas en "a", concuerdan con los de f y sus derivadas.

$$p_n(x) = y(a),$$
$$p'_n(x) = y'(a),$$
$$p''_n(x) = y''^{(a)}, \dots.$$
$$p_n^{(n)}(x) = y^{(n)}(a)$$

13.2.2.- EJEMPLOS

Ejemplo 1: Determinar los primeros cuatro polinomios de Taylor para e^x,
en torno de $x_0 = 0$:

$$p_0(x) = 1,$$

$$p_1(x) = 1 + x,$$

$$p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

Ejemplo 2: Determinar los polinomios de Taylor de cuarto orden correspondientes a las funciones: e^x,cosx, y senx en $x_0 = 2$:

a) Para $f(x) = e^x$, tenemos que $y^j(2) = e^2$, para cada j = 0,1,2,3…, de modo que la ecuación (2) del método de Taylor implica que:

$$e^x \approx e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x-2)^3 + \frac{e^2}{4!}(x-2)^4$$

b) Para $f(x) = cos\ x$, tenemos que

$$f'(x) = -senx, f''(x) = -cosx, \quad f'''(x) = senx, \qquad f^{(4)}(x) = \cos x$$

De tal modo que la ecuación (2), queda:

$$\cos x \approx \cos 2 - (sen2)(x-2) - \frac{cos2}{2!}(x-2)^2 + \frac{sen2}{3!}(x-2)^3 + \frac{cos2}{4!}(x-2)^4$$

c) Para $f(x) = sen\ x$, tenemos que

$$\operatorname{sen} x \approx \operatorname{sen} 2 + (cos2)(x-2) - \frac{sen2}{2!}(x-2)^2 - \frac{cos2}{3!}(x-2)^3 + \frac{sen2}{4!}(x-2)^4$$

Para poder observar el tema de la solución de ecuaciones diferenciales, consideremos una ecuación diferencial no como una "condición por satisfacer", sino como una receta para construir polinomios de Taylor de sus soluciones. Además de proporcionar un método muy general para calcular soluciones aproximadas y precisas de la ecuación cerca de cualquier punto "de partida" particular, esta interpretación da una mejor idea de las condiciones iniciales. Esto lo podemos ver en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3: Determinar los primeros polinomios de Taylor que aproximan la solución de la ecuación diferencial, en torno de $x_0 = 0$: del problema con valores iniciales.

$$y'' = 3y' + x^{7/3}y\,, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = 5$$

Para construir el polinomio de la ecuación (2)

$$p_n(x) = y(0) + y'(0)(x-0) + \frac{y''(0)(x-0)^2}{2!} + \frac{y'''(0)(x-0)^3}{3!} + \ldots + \frac{y^n(0)(x-0)^n}{n!}$$

Necesitamos los valores de: $y(0), y'(0), y''(0), y'''(0)$, etc. Los dos primeros vienen dados por las condiciones iniciales. El valor de $y''(0)$, se puede deducir de la propia ecuación diferencial y los valores de las derivadas de orden menor:

$$y''(0) = 3y'(0) + 0^{\frac{7}{3}}y(0) = 3(5) + 0(10) = 15$$

Como $y'' = 3y' + x^{\frac{7}{3}}y$, se cumple en cierto intervalo en torno de $x_0 = 0$, podemos derivar ambos lados para deducir.

$$y''' = 3y'' + \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}y + x^{\frac{7}{3}}y'$$

$$y^{(4)} = 3y''' + \frac{28}{9}x^{1/3}y + \frac{14}{3}x^{4/3}y' + x^{7/3}y''$$

$$y^{(5)} = 3y^{(4)} + \frac{28}{27}x^{-2/3}y + \cdots$$

Así, al sustituir x = 0, se deduce que:

$$y'''(0) = 3(15) + \frac{7}{3}0^{\frac{4}{3}}(10) + 0^{\frac{7}{3}}(5) = 45$$

$$y^{(4)}(0) = 3(45) + \frac{28}{9}0^{\frac{1}{3}}(10) + \frac{14}{3}0^{\frac{4}{3}}(5) + x0^{\frac{7}{3}}(15) = 135$$

$y^{(5)}(0) = 3(135) + \frac{28}{27}0^{-\frac{2}{3}}(10) + \cdots$, **NO EXISTE**

Por lo tanto, sólo se puede construir los polinomios de Taylor de grado 0 a 4 para la solución, así que $p_4(x)$, está dado por:

$$p_4(x) = 10 + 5x + \frac{15}{2}x^2 + \frac{45}{6}x^3 + \frac{135}{24}x^4$$

Simplificando queda:

$$p_4(x) = 10 + 5x + \frac{15}{2}x^2 + \frac{15}{2}x^3 + \frac{45}{8}x^4$$

13.2.3.- Script de Matlab para calcular la Serie de Taylor de una función

```
% INGENIERÍA CIVIL
% ECUACIONES DIFERENCIALES. CUARTO SEMESTRE 2016
% Programa para calcular la serie de Taylor de una función

% DOCENTE: DR. LIGDAMIS A. GUTIÉRREZ E.

clear all; close all; clc;

syms x;

% Describir la función a utilizar
f = sin(x)/x;

% Orden de la serie de Taylor
% Para ello utilizamos la función de Matlab, Taylor
t6 = taylor(f, x, 'Order', 6);
t8 = taylor(f, x, 'Order', 8);
t10 = taylor(f, x, 'Order', 10);

% Gráficas de las soluciones
% Se utiliza la función ezplot, para graficar una función establecida
por un string, entre los límites prefijados entre corchetes.

a = ezplot(t6, [-10 10]);
set(a ,'Color','b');        % Establecer el color de la gráfica
hold on
b= ezplot(t8, [-10 10]);  % Establecer el color de la gráfica
set(b ,'Color','r')
c = ezplot(t10, [-10 10]);
set(c ,'Color','g')         % Establecer el color de la gráfica
d = ezplot(f, [-10 10]);
set(d ,'Color','m')         % Establecer el color de la gráfica

legend('Aproximación de sin(x)/x hacia O(x^6)',...
'Aproximación de sin(x)/x hacia O(x^8)',...
'Aproximación de sin(x)/x hacia O(x^{10})',...
'sin(x)/x',...
'Location', 'South');  % Localización de la leyenda

title('Expansión de Series de Taylor');
hold off;

% FIN
```

La gráfica Resultante es la siguiente:

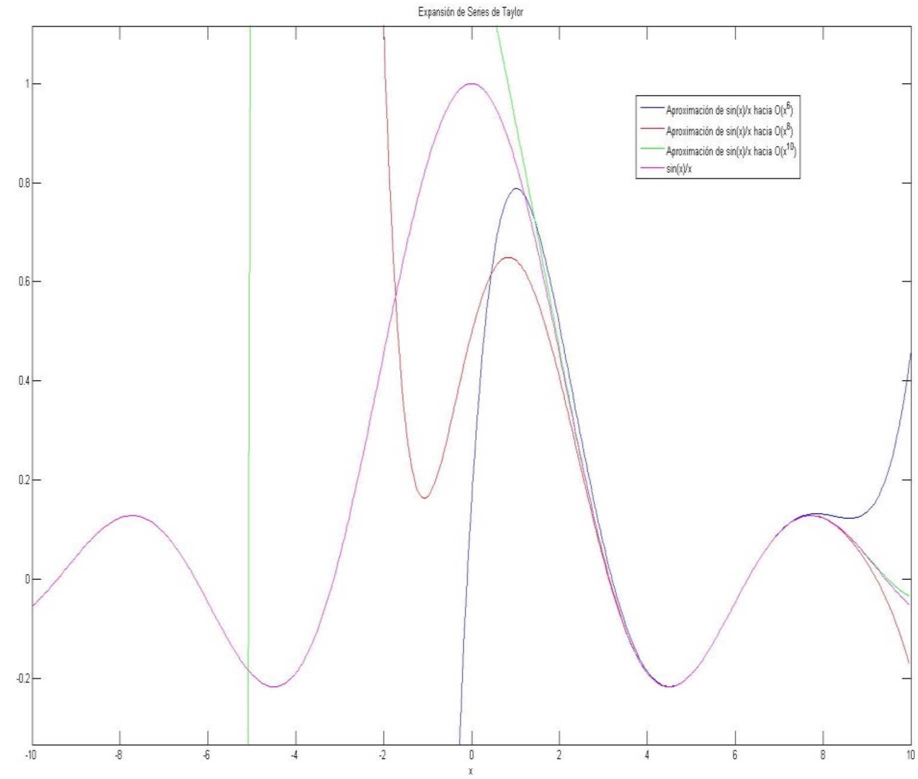


Fig. Gráfica de la serie de Taylor de las funciones de orden: 6,8 y 10

13.3.- MÉTODO DE LA SERIE DE FOURIER

13.3.1.- INTRODUCCIÓN

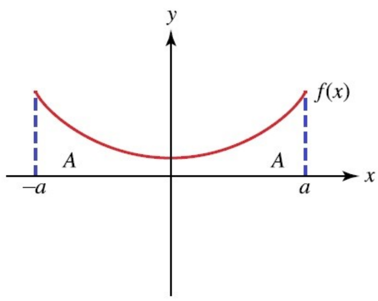
Si leemos en Wikipedia encontramos que: "***Jean-Baptiste Joseph Fourier*** *(Auxerre, Francia, 21 de marzo de 1768-París, 16 de mayo de 1830) fue un matemático y físico francés conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas Series de Fourier, método con el cual consiguió resolver la ecuación del calor. La transformada de Fourier recibe su nombre en su honor. Fue el primero en dar una explicación científica al efecto invernadero en un tratado".*

Fourier desarrolló este tipo de series para resolver problemas de flujo de calor. Lagrange expresó sus dudas acerca de la validez de la representación, pero Dirichlet diseñó condiciones que garantizan su convergencia. Cuando se analiza por ejemplo flujos de calor (temperatura en una placa o estructuras), o cuerdas vibrantes, que se aplican a las vibraciones de una viga en ingeniería civil por ejemplo, se encuentra un problema que es el expresar una función en una serie trigonométrica. Para ello precisamente se encuentran las llamadas series de Fourier para poder trabajar con desarrollos en series trigonométricas. Antes de entrar en materia hay que ver algunos aspectos importantes para este estudio, como son: la *continuidad por partes*, la *periodicidad* y la *simetría par e impar*.

Primero, se define una función continua por partes en [a, b] como una función "***f***" que es continua en cada punto en [a, b], excepto posiblemente para un número finito de puntos donde "***f***" tienen discontinuidad de salto. Tales funciones son integrables en cualquier intervalo finito donde sean continuas por partes.

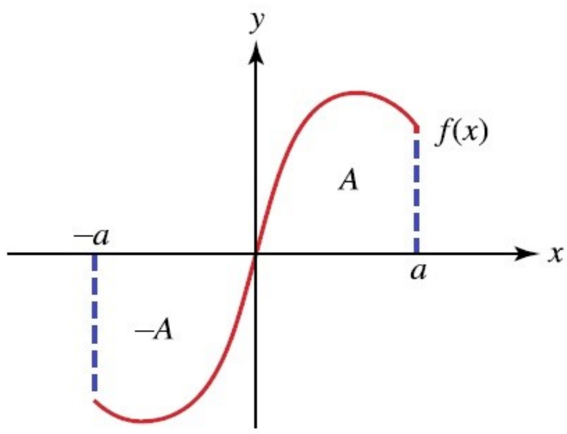
Por otra parte, una función es **periódica con período T** si ***f(x + T) = f(x)*** para toda "***x***" en el dominio de "***f***" El menor valor positivo de T se denomina "período fundamental". Las funciones trigonométricas ***sen x*** y ***cos x,*** son ejemplos de funciones periódicas, con un período fundamental de 2π, y la función ***tan x*** es periódica con un período fundamental de π. Una función constante, es una función periódica con un período arbitrario T.

Ahora bien, hay dos propiedades de simetría de funciones que son muy útiles en el estudios de las series de Fourier. Una función "***f***" que satisface ***f(-x) = f(x)*** para toda "***x***" en el dominio de "***f***" tiene una gráfica que es simétrica con respecto del eje ***y***. Entonces se dice que tal función es "***par***". Lo vemos en la siguiente figura.



Donde la función está determinada por la ecuación: $\int_{-a}^{1} f = A + A = 2\int_{0}^{a} f$

En cambio, una función f que satisface ***f(-x) = -f(x)*** para toda "***x***" en el dominio de "***f***" tienen una gráfica que es simétrica respecto al origen. Entonces se dice que tal función es "***impar***". Lo observamos en la siguiente figura.



Donde la función está determinada por la ecuación: $\int_{-a}^{1} f = A - A = 0$

Así, las funciones: $1, x^2, x^4, \ldots$, son ejemplos de funciones pares, mientras que las funciones $x, x^3, x^5, \ldots$, son ejemplos de funciones impares. Las funciones trigonométricas ***sen x*** y ***tan x,*** son funciones impares y ***cos x*** es una función par.

El producto de una función par por una función impar es una función impar. El producto de dos funciones impares es una función par.

13.2.2.- EJEMPLOS

Ejemplo1: Determinar si las siguientes funciones son pares, impares, o ninguna de las dos.

a) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

$Como\ f(-x) = \sqrt{1 + (-x)^2} = \sqrt{1 + x^2} = f(x)$, entonces ***f(x)*** es una función **par**

b) $g(x) = x^{1/3} - senx$

$Como\ g(-x) = (-x)^{1/3} - sen(-x) = -x^{1/3} + senx = -\left(x^{\frac{1}{3}} - sen\ x\right) = -g(x)$
Entonces tenemos que ***g(x)*** es una función **impar**.

c) $h(x) = e^x$

$Como\ h(-x) = e^{-x} y\ Como\ e^{-x} = e^x, solo\ cuando\ x = 0\ y\ e^{-x}\ nunca\ es\ igual\ a\ -e^x$

Entonces, ***h(x)*** no es una función par ni impar.

Podemos establecer de acuerdo al siguiente teorema, dos propiedades de las funciones simétricas.

Si "***f***" es una función par continua por partes en [-a, a], entonces:

1)

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Si "***f***" es una función impar continua por partes en [-a, a], entonces:

2)

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

a) SERIE DE FOURIER

Sea una función "***f***" continua por partes en el intervalo [-T, T]. La serie de Fourier de "***f***", es la serie trigonométrica siguiente:

3)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T} \right\}$$

En donde, a_n y b_n , están dadas por las ecuaciones siguientes:

4)

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

5)

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{T}dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Las ecuaciones (4) y (5), se llaman "**fórmulas de Euler**". Aquí se utiliza el símbolo "**~**", en la ecuación (3) para recordar que esta serie está asociada con f(x) pero no podría converger a tal f(x).

Ejemplo2: Calcular la serie de Fourier de:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Aquí podemos observar que $T = \pi$, también observamos que f es una función impar. Tenemos que el producto de una función impar y una función par es impar. Entonces, ***f(x) cos nx***, también es una función impar. De esta forma:

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} f(x)\cos nx\,dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Además, ***f(x) sen nx*** es el producto de dos funciones impar y por lo tanto es una función par, entonces:

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{T}\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} sen\ nx\ dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-cs\ nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n}\right], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

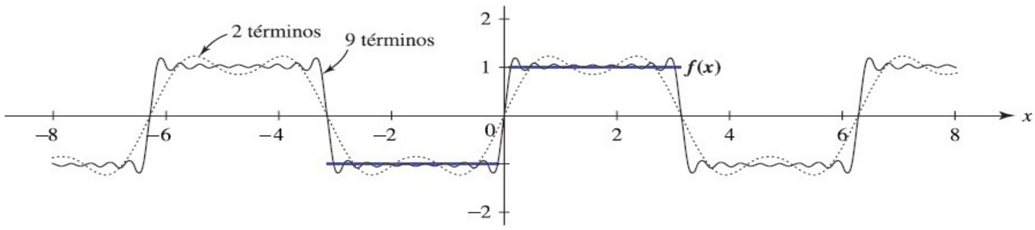
$$= \begin{cases} 0, & n\ par \\ \dfrac{4}{\pi n}, & n\ impar \end{cases}$$

De esta forma, la serie de Fourier queda así:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\frac{n\pi x}{T} + b_n\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{T}\right\}$$

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right] sen\ nx = \frac{4}{\pi}\left[sen\ x + \frac{1}{3}\ sen\ 3x + \frac{1}{5}\ sen\ 5x + \ \dots\ \right]$$

La siguiente figura muestra alguna de las sumas parciales de la serie solución.



En este ejemplo, la función impar "***f***", tiene una serie de Fourier que sólo consta de funciones seno. Así que es fácil observar que, en general, si "***f***" es cualquier función impar, entonces su serie de Fourier va a constar únicamente de términos seno.

13.2.3.- TRANSFORMADA DE FOURIER

"Toda señal periódica, sin importar cual complicada parezca, puede ser reconstruida a partir de sinusoides cuyas frecuencias son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental, eligiendo las amplitudes y fases adecuadas", (Fourier). Posee diversas aplicaciones, en áreas de la ciencia e ingeniería como por ejemplo: la física, la teoría de los números, la combinatoria, el procesamiento de señales (electrónica), la teoría de la probabilidad, la estadística, la óptica, la propagación de ondas y otras diversas áreas. En procesamiento de señales la transformada de Fourier suele considerarse como la descomposición de una señal en componentes de frecuencias diversos.

Sea ***f(x)*** definida en R y absolutamente integrable

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} |f| < \infty\right]$$

Se define a la Transformada de Fourier de "***f***", como la función:

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}\,dx$$

Lo que en términos generales para la función ***X(f)*** se expresa como:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

Y que se conoce como la ecuación de la Transformada de Fourier

Donde: t = tiempo, f = frecuencia en Hz, x(t) es la señal de prueba, $e^{-j2\pi ft}$ = Factor de sondeo (Función Kernel), X(f) Espectro de la función de la frecuencia f. A partir de la transformada, podemos recuperar la señal original, tomando la Transformada Inversa de Fourier.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\,df$$

13.2.4.- Script de Matlab para calcular la Transformada Rápida de Fourier (fft)

Matlab dispone de varias funciones para calcular las transformadas de Fourier, una de las más empleadas es la transformada discreta de Fourier (fft), cuya sintaxis es Y = fft(X,n).

```
% INGENIERÍA CIVIL
% ECUACIONES DIFERENCIALES. CUARTO SEMESTRE 2016
% Programa para calcular la Trasformada de Fourier de una señal

% DOCENTE: DR. LIGDAMIS A. GUTIÉRREZ E.

clear all; close all; clc;

t = 0:0.001:0.6;     % vector de tiempo
% Función que indica el Tipo de la señal senoidal
y = sin(2*pi*50*t) + sin(2*pi*120*t);

% Calcula de la Transformada rápida de Fourier, con 512 puntos
Y = fft(y,512);

% Poder espectral de la señal
Pyy = Y.* conj(Y) / 512;

% Se grafican los primeros 257 puntos, los restantes 255 de los 512
% son redundantes

f = 1000*(0:256)/512;
plot(f,Pyy(1:257), 'r');
title('Contenido en Frecuencia de y');
xlabel('Frecuencia (Hz)');

% FIN
```

Al ejecutar el programa. La gráfica Resultante es la siguiente:

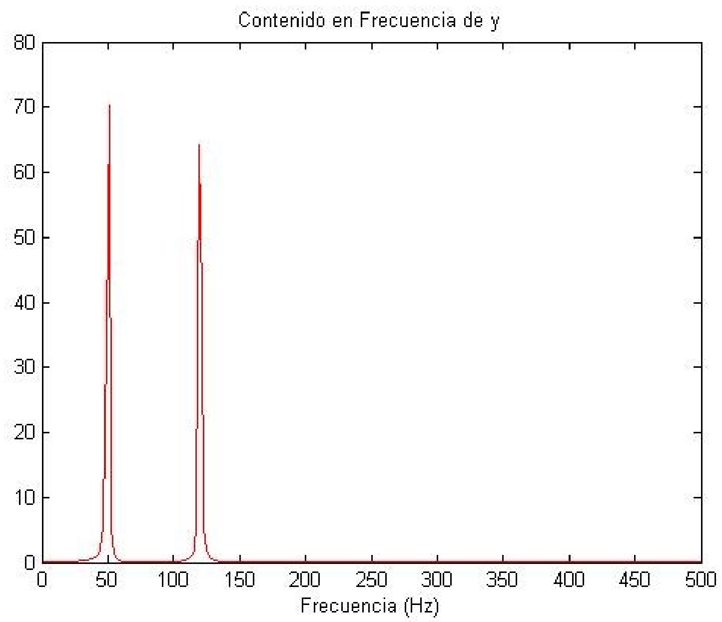


Fig. Gráfica de la Transformada rápida de Fourier de una señal senoidal

• Bibliografía

Bibliografía Básica:

Desde han sido tomados la mayoría de los ejemplos y conceptos contenidos en este manual.

- Nagle, R. kent y otros, Ecuaciones diferenciales con valores en la Frontera, Cuarta Edición 2005, PEARSON, México. (3473)
- Bronson, Richard, Ecuaciones Diferenciales (Shaum), Tercera Edición, 2008, McGraw Hill, México. (4456)
- Zill, Denis G., Ecuaciones Diferenciales, Primera Edición, 2007 Thomson, México. (3879)

Bibliografía Complementaria:

- Ayres, Frank, Ecuaciones diferenciales, Primera Edición 2007, McGraw Hill, México. (4217).

NOTA IMPORTANTE: Los códigos de los scripts en MATLAB, utilizados y que se presentan en este manual, han sido generados mediante: MATLAB 7a, versión para Estudiantes. Consultar el manual de usuario para Manual creado por el autor para esta materia. Los ejemplos y ejercicios, así como algunas de las figuras presentadas en este manual, han sido tomados y modificados por el autor, de la documentación y bibliografía anteriormente descrita.

- **AGRADECIMIENTOS:**

Agradecemos la gestión de la Dirección de la Facultad de Ingeniería Civil y Mecánica de la Universidad Técnica de Ambato (UTA) – Ambato, Ecuador, por permitir la realización de este documento creado por el autor, como parte integral de la materia de Ecuaciones Diferenciales dentro del plan analítico de la Carrera de Ingeniería Civil, para alumnos de cuarto semestre, durante los ciclos lectivos de 2015 y 2016.
El Autor, Docente: Ligdamis A. Gutiérrez E. PhD.

¡Eso es Todo
Amigos!

"Recordar: Estudiar y ser Constantes, producirán siempre el éxito esperado".