Yaogan MENSAH

Bases Mathématiques (MTH 100)

Document de base
Version 2.0 (2019)

Table des matières

Chapitre 1

Logique et Raisonnement

1.1 Assertion et prédicat

Définition 1.1 *Une assertion (ou proposition) est un énoncé auquel on peut attribuer la valeur de vérité vrai (V) ou faux (F), mais jamais les deux à la fois.*

Exemples 1.2

1. L'énoncé "Lomé est la capitale du Togo" est vrai (V).
2. L'énoncé "2,5 est un entier naturel" est faux (F).
3. L'énoncé "Koffi est mortel" est vrai (V).
4. L'énoncé " 19 est un multiple de 2" est faux (F).

Définition 1.3 *Un prédicat est un énoncé contenant des lettres appelées variables et qui est tel que quand on remplace ces variables par des éléments donnés on obtient une assertion.*

Exemples 1.4

1. L'énoncé $P(n)$: "n est un multiple de 2" est un prédicat car il devient une assertion quand on donne une valeur à n.
   $P(10)$ est une assertion vraie mais $P(11)$ est une assertion fausse.
2. L'énoncé suivant $P(x, A)$: " $x \in A$" est un prédicat à deux variables.
   $P(1, \mathbb{N})$ est une assertion vraie par contre $P(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$ est une assertion fausse.

1.2 Les connecteurs logiques

A partir d'assertions existantes il est possible de construire de nouvelles assertions appelées *assertions composées*. Ceci se fait via les connecteurs logiques.

1.2.1 La négation

Définition 1.5 *La négation d'une assertion P est l'assertion notée $\neg P$ ou $\neg P$ qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie*

On résume ceci dans le tableau suivant appelé *table de vérité* :

P	¬P
V	F
F	V

Exemples 1.6
1. *L'assertion P : " 24 est un multiple de 2 " a pour négation l'assertion $\neg P$: "24 n'est pas un multiple de 2".*
2. *Le prédicat "$x \in A$" a pour négation le prédicat "$x \notin A$.".*

1.2.2 La conjonction

Définition 1.7 *La conjonction des assertions P et Q notée $P \wedge Q$ est l'assertion qui est vraie lorsque P et Q sont simultanément vraies et fausse dans tous les autres cas.*

P	Q	P∧ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemples 1.8 *Considérons les deux propositions P et Q suivantes :*
P :"10 est divisible par 2" et Q :"10 est divisible par 3". La proposition $P \wedge Q$ est fausse.

1.2.3 La disjonction

Définition 1.9 *La disjonction des assertions P et Q notée $P \vee Q$) est l'assertion qui est vraie lorsque l'une au moins des deux assertions P et Q est vraie et fausse lorsque les deux sont fausses.*

P	Q	P∨ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemples 1.10 Considérons les deux assertions P et Q suivantes :
P : "10 est divisible par 2" et Q : "10 est divisible par 3". L'assertion $P \vee Q$ est vraie.

1.2.4 L'implication

Définition 1.11 *Soient P et Q des assertions. L'assertion "$P \Rightarrow Q$", appelée implication de P vers Q, est une assertion qui est fausse lorsque P est vraie et Q fausse et est vraie dans tous les autres cas.*

P	Q	P⇒ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarques 1.12
1. Dans $P \Rightarrow Q$, P est une condition suffisante pour Q et Q est une condition nécessaire pour P.
2. $Q \Rightarrow P$ s'appelle l'implication réciproque de $P \Rightarrow Q$.
3. $\neg Q \Rightarrow \neg P$ s'appelle la contraposée de $P \Rightarrow Q$.

Exemples 1.13 Soient les propositions : P :"il pleut." et Q : "Je me mets à l'abri." On a
$P \Rightarrow Q$: "S'il pleut alors je me mets à l'abri.".
$Q \Rightarrow P$:"Si je me mets à l'abri alors il pleut."
$\neg Q \Rightarrow \neg P$: "Si je ne me mets pas à l'abri alors il ne pleut pas."

1.2.5 L'équivalence

Définition 1.14 *Soient P et Q deux assertions. L'assertion "$P \Leftrightarrow Q$", appelée équivalence de P et de Q, est une assertion qui*
- *est vraie lorsque P et Q sont simultanément vraies ou fausses,*
- *est fausse dans tous les autres cas.*

P	Q	P $\Leftrightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.3 Tautologie et incompatibilité

Définition 1.15 *Une assertion composée qui est vraie quelles que soient les valeurs de vérité des assertions qui la composent est appelée une* tautologie.

Exemples 1.16 1. $(P \vee \neg P)$
2. $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$

Définition 1.17 *On dit que deux assertions sont* incompatibles *si leur conjonction est fausse.*

Exemples 1.18 1. Les prédicats P et $\neg P$ sont incompatibles.
2. Les prédicats "$x \leq 1$" et "$x \geq 2$" sont incompatibles.

1.4 Equivalence logique

Définition 1.19 *Soient R_1 et R_2 des prédicats composés. On dit que R_1 et R_2 sont* logiquement équivalents *si R_1 est vrai lorsque R_2 est vrai et R_1 est faux lorsque R_2 est faux. Cela revient au même de dire que R_1 et R_2 ont la même table de vérité et on note $R_1 \equiv R_2$. Dans le cas contraire on note $R_1 \not\equiv R_2$.*

Exemples 1.20

1. $\neg(\neg P) \equiv P$
2. $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
3. $P \vee Q \equiv Q \vee P$
4. $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
5. $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$
6. $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$
7. $P \Leftrightarrow Q \equiv Q \Leftrightarrow P$
8. $(\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q) \equiv P$
   Cette équivalence est à la base du raisonnement par l'absurde.
9. $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
10. $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
    (9. et 10. sont les *lois de Morgan* pour les prédicats)
11. $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
12. $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
13. $P \Rightarrow Q \equiv (\neg P \vee Q)$
14. $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv (P \wedge \neg Q)$
15. $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$
16. $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

1.5 Les quantificateurs mathématiques

À partir d'un prédicat $P(x)$ défini sur un ensemble E, on construit de nouvelles assertions dites assertions quantifiées en utilisant les quantificateurs " quel que soit" et "il existe".

Définition 1.21 *Le quantificateur "quel que soit", noté $\forall$, permet de définir l'assertion quantifiée " $\forall x \in E, P(x)$ " qui est vraie si pour tous les éléments x de E, l'assertion $P(x)$ est vraie.*

Exemples 1.22
1. "$\forall x \in [-3,1], x^2+2x-3 \leq 0$" est vraie.
2. "$\forall n \in \mathbb{N}, n(n-3) > 0$" est fausse.

Définition 1.23 *Le quantificateur "il existe", noté $\exists$, permet de définir l'assertion quantifiée " $\exists\, x \in E, P(x)$ " qui est vraie si on peut trouver (au moins) un élément x de E pour lequel l'assertion $P(x)$ est vraie.*

Remarques 1.24
1. S'il en existe un et un seul, on pourra écrire
$$\exists\,!x \in E, P(x).$$
2. Si "$\forall x \in E, P(x)$" est vraie alors "$\exists\, x \in E, P(x)$" est vraie.

Exemples 1.25
1. "$\exists\, x \in \mathbb{R}, x^2 = 4$" est vraie.
2. "$\exists\,!x \in \mathbb{R}, \ln(x^2) = 1$" est fausse.

Proposition 1.26 *Soit $P(x)$ un prédicat. On a :*
1. $\neg(\forall x \in E, P(x)) \equiv \exists\, x \in E, \neg(P(x))$.
2. $\neg(\exists x \in E, P(x)) \equiv \forall\, x \in E, \neg(P(x))$.

Exemples 1.27 $\neg(\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)) \equiv \exists\, x \in E, P(x) \wedge \neg(Q(x))$.

Définition 1.28 *Soit $P(x,y)$ un prédicat à deux variables avec $x \in E$ et $y \in F$.*

1. *L'assertion quantifiée*

$$\forall x \in E, \forall y \in F, P(x,y)$$

est vraie lorsque pour chaque élément x de E et chaque élément y de F, $P(x,y)$ est vraie.

2. *L'assertion quantifiée*

$$\exists x \in E, \exists y \in F, P(x,y)$$

est vraie lorsqu'il existe un élément x de E et un élément y de F tels que $P(x,y)$ est vraie.

Exemples 1.29 1. L'assertion "$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,+\infty[, 1+nx \leq (1+x)^n$" est vraie.

2. L'assertion "$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y=5$" est vraie.

Remarques 1.30 On peut combiner des quantificateurs de natures différentes. Par exemple, l'énoncé " tout nombre complexe possède une racine carrée" s'écrit sous la forme :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists u \in \mathbb{C}, u^2 = z.$$

Mais on prendra soin de respecter les règles suivantes :

1. On peut permuter deux quantificateurs identiques.

$$(\forall x \in E, \forall y \in F, P(x,y)) \equiv (\forall y \in F, \forall x \in E, P(x,y)).$$

$$(\exists x \in E, \exists y \in F, P(x,y)) \equiv (\exists y \in F, \exists x \in E, P(x,y)).$$

2. Ne jamais permuter deux quantificateurs différents.

$$(\exists x \in E, \forall y \in F, P(x,y)) \not\equiv (\forall y \in F, \exists x \in E, P(x,y)).$$

Exemples 1.31 L'assertion quantifiée " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y=0$" est vraie. Par contre, l'assertion " $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x+y=0$" est fausse.

1.6 Différents modes de démonstration

1.6.1 Raisonnement par hypothèse auxiliaire

1. But : montrer qu'un énoncé Q est vrai.
2. Principe : il s'appuie sur la tautologie :

$$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q.$$

   Ainsi si P est vrai et si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie alors Q est vrai.
3. Méthodologie : On montre que l'énoncé P est vrai et on en déduit que Q est vrai.

1.6.2 Raisonnement par l'absurde

1. But : montrer qu'un énoncé P est vrai.
2. Principe : il s'appuie sur la tautologie :

$$(\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q) \equiv P.$$

   Un raisonnement par l'absurde consiste à montrer que $\neg P$ entraîne un énoncé Q et sa négation $\neg Q$.
3. Méthodologie : On suppose que l'énoncé $\neg P$ est vrai et on recherche une contradiction.

Exercice. Soit $a, b \geq 0$. Montrer que si $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

1.6.3 Raisonnement par contraposition

1. But : montrer l'implication $P \Rightarrow Q$.
2. Principe : il s'appuie sur l'équivalence logique :

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P.$$

   Ainsi, au lieu de montrer $P \Rightarrow Q$, on montre sa contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

3. Méthodologie : On fait l'hypothèse que $\neg Q$ est vrai et on montre que cela entraîne $\neg P$.

Exercice. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

1.6.4 Raisonnement par contre-exemple

1. But : il sert à montrer qu'un énoncé de la forme
$$\forall x \in E, P(x)$$
est faux.
2. Principe : il s'appuie sur l'équivalence logique :
$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \equiv \exists x \in E, \neg(P(x)).$$
3. Méthodologie : On cherche à exhiber un élément x de E qui ne vérifie pas $P(x)$.

Exercice. Est-ce que tout entier positif est la somme de trois carrés ?

1.6.5 Raisonnement par récurrence

1. But : montrer qu'un énoncé de la forme
$$\text{pour tout entier naturel } n \geq n_0, P(n).$$
2. Principe : Si $P(n_0) \wedge (P(n) \Rightarrow P(n+1))$ alors $\forall n \geq n_0, P(n)$.
3. Méthodologie : On vérifie que $P(n_0)$ est vrai, on suppose ensuite $P(n)$ et on montre que cela entraîne $P(n+1)$. Et enfin on conclut $\forall n \geq n_0, P(n)$.

Exercice. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

Chapitre 2

Ensembles, Applications et Relations

2.1 Ensembles

Intuitivement, un ensemble est une collection d'objets appelés *éléments* de l'ensemble. Nous admettons qu'il existe un ensemble noté $\emptyset$, appelé *ensemble vide* , qui ne contient aucun élément. Si E est un ensemble et $P(x)$ une propriété vérifiée par certains éléments x de E, l'ensemble de ces éléments est noté $\{x \in E \, : \, P(x)\}$.

Définition 2.1 *On dit que l'ensemble E est* inclus *ou est* contenu *dans l'ensemble F si tout élément de E est élément de F. On dit aussi que E est une partie ou un sous-ensemble de F. On écrit $E \subset F$ ou $F \supset E$.*

$$(E \subset F) \Leftrightarrow (\forall x, x \in E \Rightarrow x \in F).$$

On vérifie que quel que soit l'ensemble E, on a $E \subset E$. Si ($E \subset F$ et $F \subset G$) alors $E \subset G$.

Définition 2.2 *On dit que l'ensemble E est égal à l'ensemble F, et on écrit $E = F$, si $E \subset F$ et $F \subset E$.*

Etant donné un ensemble E, on désigne par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, y compris l'ensemble vide et l'ensemble E lui-même.

$$A \in \mathscr{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E.$$

Définition 2.3 *Soient A et B des ensembles. L'ensemble $\{x : x \in A$ et $x \notin B\}$ s'appelle* différence *de A et B et se note $A \setminus B$.*

Définition 2.4 *Soient E un ensemble et A une partie de E. On appelle* complémentaire *de A dans E, et on note $E \setminus A$ ou $\mathscr{C}_E^A$, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.*

$$\mathscr{C}_E^A = \{x \in E : x \notin A\}.$$

Proposition 2.5 *1. $\mathscr{C}_E^{(\mathscr{C}_E^A)} = A$; $\mathscr{C}_E^E = \emptyset$; $\mathscr{C}_E^{\emptyset} = E$.*

2. Soit $A, B \in \mathscr{P}(E)$

$$A \subset B \Rightarrow \mathscr{C}_E^B \subset \mathscr{C}_E^A.$$

Définition 2.6 *On appelle* intersection *de deux ensembles E et F, et on note $E \cap F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à E et à F.*

$$E \cap F = \{x : x \in E \text{ et } x \in F\}.$$

Si $E \cap F = \emptyset$, on dit que E et F sont disjoints.

Définition 2.7 *On appelle* réunion *de deux ensembles E et F, et on note $E \cup F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ou à F.*

$$E \cup F = \{x : x \in E \text{ ou } x \in F\}.$$

Proposition 2.8 *1. $E \cap \emptyset = \emptyset$, $E \cup \emptyset = E$.*

2. $E \cup F = \emptyset \Rightarrow E = \emptyset$ *et* $F = \emptyset$.
3. *associativité*
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$
4. *commutativité*
$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A.$$
5. *distributivité*
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$
6. *idempotence*
$$A \cup A = A,\ A \cap A = A.$$

Théorème 2.9 *(Lois de de Morgan)*

$$\mathscr{C}_E^{(A\cap B)} = \mathscr{C}_E^A \cup \mathscr{C}_E^B,\ \mathscr{C}_E^{(A\cup B)} = \mathscr{C}_E^A \cap \mathscr{C}_E^B.$$

Définition 2.10 *Soient E et F deux ensembles. On appelle* produit cartésien *de E et F, et on note $E \times F$, l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$.*

$$E \times F = \{(x, y) : x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Proposition 2.11 *Soient A,B,C,D des ensembles.*

1. $$A \subset C \text{ et } B \subset D \Rightarrow A \times B \subset C \times D.$$
2. $$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

3.

$$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \ ou \ B = \emptyset.$$

Le produit cartésien $E \times E$ se note E^2. On appelle *diagonale* de E^2 l'ensemble

$$\Delta = \{(x, x) : x \in E\}.$$

Plus généralement, le produit cartésien de n ensembles $E_1, \ldots, E_n$, noté

$$E_1 \times \cdots \times E_n \text{ ou } \prod_{i=1}^{n} E_i,$$

est l'ensemble des n-uples $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $x_i \in E_i, \ i = 1, \ldots, n.$
Si $E_i = E \ \forall i$, on note E^n au lieu de $E \times \cdots \times E$. Par exemple $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se note $\mathbb{R}^3$.

Définition 2.12 *On appelle* partition *d'un ensemble non vide E une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E (indexée par I) telles que*

1. $\forall i \in I, \ A_i \neq \emptyset$,
2. $\forall i, j \in I, \ (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$,
3. $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

Exemples 2.13 Soit A une partie propre non vide de E. Alors A et C_E^A forment une partition de E.

2.2 Applications

2.2.1 Définitions et exemples

Définition 2.14 *Soient E et F deux ensembles. On appelle* fonction f *de E vers F toute relation qui associe à chaque élément de E au plus un élément de F.*

On note $f : E \to F$ ou $E \xrightarrow{f} F$. Si l'élément x de E est associé à l'élément y de F, on dit que x est un *antécédent* de y et y est *l'image* de x. On écrit $y = f(x)$. L'ensemble des éléments de E ayant une image par f est appelé *ensemble de définition* de f et noté D_f.

$$D_f = \{x \in E : \exists y \in F, y = f(x)\}.$$

L'ensemble $\Gamma = \{(x, f(x)) \in E \times F : x \in D_f\}$ est appelé le *graphe* de f.

Définition 2.15 *Une fonction $f : E \to F$ est appelée* application *si son ensemble de définition est E.*

L'ensemble des applications de E vers F est souvent noté F^E.

Exemples 2.16

1. La fonction
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x-2} \end{array}$$
n'est pas une application car $D_f \neq \mathbb{R}$.
2. La fonction
$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$
est une application car $D_g = \mathbb{R}$.
3. L'application
$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$
est appelée *application identique* ou *identité* de E. Elle est souvent notée Id_E ou 1_E.
4. Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle *fonction caractéristique* de A l'application χ_A définie de E vers $\{0, 1\}$ par
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$
5. Les applications
$$\begin{array}{rcl} pr_1 : E \times F & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}$$
et
$$\begin{array}{rcl} pr_2 : E \times F & \longrightarrow & F \\ (x, y) & \longmapsto & y \end{array}$$
sont respectivement appelées *première projection* et *deuxième projection.*

Définition 2.17 *Soient $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ deux applications. On dit que f égale g et on note $f = g$ si*

$$E = E',\ F = F' \text{ et } \forall x \in E,\ f(x) = g(x).$$

2.2.2 Composition des applications

Soient E, F et G des ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications. L'application

$$\begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

s'appelle l'application composée de f par g et se note $g \circ f$.

En général on a $g \circ f \neq f \circ g$. Cependant :

Proposition 2.18 *Soient les applications $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$. On a*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

On dit que la loi $\circ$ est *associative*. L'application $h \circ (g \circ f)$ est simplement notée $h \circ g \circ f$.

2.2.3 Applications particulières

Définition 2.19 *Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.*

1. *On dit que f est* injective *(ou est une injection) si pour tous $x, y \in E$,*

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

2. *On dit que f est* surjective *(ou est une surjection) si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.*
3. *On dit que f est* bijective *(ou est une bijection) si elle est à la fois injective et surjective i.e pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$.*

Soit $f : E \to F$ une bijection. L'application $f^{-1} : F \to E$ qui à chaque élément y de F associe l'unique élément x de E tel que $y = f(x)$ est une bijection. Elle est appelée *application réciproque* de f. On a

$$(f^{-1})^{-1} = f,\ f^{-1} \circ f = Id_E,\ f \circ f^{-1} = Id_F.$$

Proposition 2.20 *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont injectives (resp. surjectives, resp. bijectives) alors il en est de même de $g \circ f$. De plus dans le dernier cas, on a*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

2.2.4 Images directes, images réciproques

Définition 2.21 *Soit $f : E \to F$ une application, A une partie de E et B une partie de F.*

1. *L'* image directe *ou simplement l'*image *de A par f, notée $f(A)$ est l'ensemble des images des éléments de A par f.*

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

2. *L'* image réciproque *de B par f, notée $f^{-1}(B)$, est l'ensemble des éléments de E qui ont leurs images dans B.*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

Proposition 2.22 *Soit $f : E \to F$ une application, A, A' deux parties de E, B, B' deux parties de F.*

1. *Si $A \subset A'$ alors $f(A) \subset f(A')$.*
2. $$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A').$$
$$f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A').$$
3. *Si $B \subset B'$ alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.*

4.

$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B').$$

$$f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B').$$

$$f^{-1}(\mathscr{C}_F^B) = \mathscr{C}_E^{f^{-1}(B)}.$$

2.3 Relations binaires dans un ensemble

2.3.1 Définitions et Exemples

Définition 2.23 *Soit E un ensemble. On appelle* relation binaire *sur E tout couple $\mathcal{R} = (E, \Gamma)$ où Γ est une partie de $E \times E$ appelée* graphe *de $\mathcal{R}$.*

Si $(x, y) \in \Gamma$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$.

Exemples 2.24 Dans $\mathscr{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ définie par $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$ est une relation binaire.

Définition 2.25 *Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est :*

– réflexive *si*

$$\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x.$$

– symétrique *si*

$$\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x.$$

– antisymétrique *si*

$$\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y.$$

– transitive *si*

$$\forall x, y, z \in E,\ x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z.$$

Exemples 2.26
1. La relation d'égalité est une relation réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.
2. Dans $\mathscr{P}(E)$, la relation d'inclusion est réflexive, antisymétrique et transitive.

3. Dans $\mathbb{Z}^*$, la relation de divisibilité définie par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \text{ divise } y$$

est réflexive et transitive. Elle n'est ni symétrique ni antisymétrique.

2.3.2 Relations d'équivalence

Définition 2.27 *On appelle* relation d'équivalence *sur E toute relation binaire sur E qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive.*

Une telle relation $\mathcal{R}$ peut se noter $x\mathcal{R}y$ ou $x \equiv y\,(mod\,\mathcal{R})$ et on lit "x est équivalent à y modulo $\mathcal{R}$".
La classe d'équivalence d'un élément x de E constituée des éléments y de E qui sont équivalents à x est notée $cl(x)$ ou $\overline{x}$ ou $\dot{x}$. L'ensemble de toutes les classes d'équivalence s'appelle *l'ensemble quotient* de E par $\mathcal{R}$ et se note $E/\mathcal{R}$. Tout élément d'une classe d'équivalence est appelé *représentant* de cette classe.
L'application

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E/\mathcal{R} \\ x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$$

est surjective ; elle est appelée *surjection canonique.*

Exemples 2.28 Soit p un entier ≥ 1. Dans $\mathbb{Z}$ la relation

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow p \text{ divise } x - y$$

est une relation d'équivalence. La classe de l'entier n est l'ensemble

$$\{\ldots, n-2p, n-p, n, n+p, n+2p, \ldots\}.$$

On l'appelle *classe de congruence de n modulo p*. L'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ se note ici $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Proposition 2.29 *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. L'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ forme une partition de E. Réciproquement, toute partition de E définit une relation d'équivalence dont les classes sont les éléments de la partition donnée.*

Proposition 2.30 *(Décomposition canonique) Soit $f : E \to F$ une application.*

1. *La relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur E par*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

est une relation d'équivalence dans E dite associée à f.

2. *Il existe une application bijective unique $\overline{f} : E/\mathcal{R} \to f(E)$ telle que*

$$f = i \circ \overline{f} \circ s$$

où s est la surjection canonique et i l'injection canonique. Cela revient à dire que le diagramme suivant est commutatif.

La bijection $\overline{f}$ est appelée l'*application déduite de f par passage au quotient.*

2.3.3 Relations d'ordre

Définition 2.31 *On appelle* relation d'ordre *sur E toute relation binaire sur E qui est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Une relation d'ordre est souvent notée $\leq$ et le couple $(E, \leq)$ est appelé *ensemble ordonné*. Dans un ensemble ordonné, deux éléments x et y sont dits *comparables* si $x \leq y$ ou $y \leq x$. Si deux éléments quelconques de E sont comparables, on dit que *l'ordre est total* ou que le couple $(E, \leq)$ est totalement ordonné. Dans le cas contraire on dit que *l'ordre est partiel* ou que le couple $(E, \leq)$ est partiellement ordonné.

Exemples 2.32

1. Dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, l'ordre usuel est un ordre total.
2. Soit E un ensemble. La relation d'inclusion est une relation d'ordre partiel sur $\mathscr{P}(E)$.
3. Dans $\mathbb{N}$, la relation de divisibilité est une relation d'ordre partiel.

Définition 2.33 *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. S'il existe $a \in E$ tel que*

$$\forall x \in E, a \leq x \Rightarrow x = a (resp. \forall x \in E, x \leq a \Rightarrow x = a)$$

*on dit que a est un élément maximal (*resp. *minimal) de E.*

Exemples 2.34
1. Dans $(\mathbb{N}\backslash\{1\}, |)$, les éléments minimaux sont les nombres premiers. Dans $(\mathbb{N}, |)$, 0 est le seul élément maximal.
2. Dans $(\mathscr{P}(E)\setminus\{\emptyset\}, \subset)$, les éléments minimaux sont les parties réduites à un élément.
3. Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, il n'y a ni élément maximal ni élément minimal.

Définition 2.35 *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. S'il existe un élément $a \in E$ tel que $\forall x \in E, x \leq a$ (resp. $a \leq x$) cet élément est unique ; on l'appelle le plus grand (resp. le plus petit) élément de E, on le note max(E) (resp. min(E)).*

Remarques 2.36 Si $(E, \leq)$ admet un plus grand élément a alors a est l'unique élément maximal de $(E, \leq)$.

Exemples 2.37
1. Dans $(\mathscr{P}(E), \subset)$, $\emptyset$ est le plus petit élément, E est le plus grand élément.
2. $(\mathbb{N}, |)$, 0 est le plus grand élément ; 1 est le plus petit élément. Par contre dans $(\mathbb{N}, \leq)$, 0 est le plus petit élément, il n'y a pas de plus grand élément.

Définition 2.38 *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E. S'il existe un élément $m \in E$ tel que*

$$\forall x \in A, x \leq m \text{ (resp. } m \leq x)$$

on dit que A est majoré (resp. minoré) et que m est un majorant (resp. minorant) de A dans E.
Une partie bornée est une partie à la fois majorée et minorée.

Définition 2.39 *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E. Si l'ensemble des majorants (resp. minorants) de A admet un plus petit (resp. plus grand) élément, cet élément est appelé borne supérieure (resp. borne inférieure) de A et se note* $\sup(A)$ *(resp.* $\inf(A)$*).*

Exemples 2.40 Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, la partie $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ admet 0 pour borne inférieure et 1 pour borne supérieure.

2.4 Analyse combinatoire

2.4.1 Ensembles finis, cardinaux

Définition 2.41 *Deux ensembles sont dits* **équipotents** *s'il existe une bijection de l'un sur l'autre.*

On vérifie, grâce aux propriétés des bijections que l' équipotence est une relation réflexive, symétrique et transitive entre ensembles. Cependant ce n'est pas une relation binaire sur un ensemble ; on ne parlera donc pas de relation d'équivalence.

Définition 2.42 *Un ensemble E est dit* **fini** *s'il est vide ou s'il est équipotent à $\mathbb{N}_n := \{1, ..., n\}$ pour un certain entier $n \geq 1$ donné.*

L'entier n est appelé **cardinal** de E et on note $Card(E) = n$. On pose par définition $Card(\emptyset) = 0$.

Définition 2.43 *Un ensemble est dit* **infini** *s'il n'est pas fini.*

Proposition 2.44

1. *Toute partie F d'un ensemble fini E est fini et $Card(F) \leq Card(E)$.*
2. *l'intersection d'une famille (finie ou infinie) d'ensembles finis est finie.*
3. *Soient E un ensemble fini et $f : E \to F$ une application. Alors $f(E)$ est un ensemble fini et $Card(f(E)) \leq Card(E)$, avec égalité ssi f est une injection.*
4. *Soient un ensemble fini et $f : E \to F$ une surjection. Alors F est fini et $Card(F) \leq Card(E)$, avec égalité ssi f est une bijection.*
5. *Soit $f : E \to F$ une injection. Si $f(E)$ est fini alors E est fini et $Card(E) = Card(f(E))$.*

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 2.45 *Soient E et F deux ensembles finis, de même cardinal, et $f : E \to F$ une application. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *f est injective*
2. *f est surjective*
3. *f est bijective.*

2.4.2 Ensembles dénombrables

Définition 2.46 *Un ensemble E est dit dénombrable s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.*

On montre que les ensembles suivants sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Par contre $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Proposition 2.47 *Toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable. (On dit qu'elle est au plus dénombrable.)*

2.4.3 Analyse combinatoire

Principe de l'addition : Si les ensembles $(A_i)_{i\in I}$, I fini, sont deux à deux disjoints alors

$$Card(\underset{i\in I}{\cup} A_i) = \sum_{i\in I} Card(A_i).$$

Proposition 2.48 *Soient A, B deux parties d'un ensemble fini E. Alors*

1. *$Card(A \setminus B) = Card(A) - Card(A \cap B)$.*
2. *$Card(C_E^A) = Card(E) - Card(A)$.*
3. *$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.*

Principe de la multiplication : Si une situation comporte p étapes avec respectivement $n_1, \ldots, n_p$ possibilités alors le nombre total d'issues est $\prod\limits_{i=1}^{p} n_i$.

Proposition 2.49 *(Produit cartésien)*
Soient E et F deux ensembles finis.

1. *$Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$.*
2. *$Card(E^k) = (Card(E))^k, \ k \in \mathbb{N}^*$.*

Proposition 2.50 *(Nombres d'applications)*
Soient E et F des ensembles finis.

$$Card(F^E) = Card(F)^{Card(E)}.$$

Le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments est n^p.

Proposition 2.51 *(Nombres d'injections)*
Soient E un ensemble à p éléments et F un ensemble à n éléments. Le nombre d'injections de E vers F est

$$A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

C'est aussi le nombre de p-arrangements d'un ensemble à n éléments.

Proposition 2.52 *(Nombres de parties de cardinal donné)*
Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de parties de E à p éléments i.e le nombre de p-combinaisons $(0 \leq p \leq n)$ est

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Propriétés des C_n^p, Formule du binôme , Triangle de Pascal

Convention : On pose $C_n^p = 0$ si $p > n$.

Proposition 2.53 $C_n^0 = 1,\ C_n^1 = n,\ C_n^n = 1,\ C_n^p = C_n^{n-p},\ C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}.$

Proposition 2.54 *(Formule du binôme)*
$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}.$

Proposition 2.55 *(Ensembles des parties)*
Soit E un ensemble fini.

$$Card(\mathscr{P}(E)) = 2^{Card(E)}.$$

Chapitre 3

Les nombres réels

Les ensembles suivants sont supposés connus.

1. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
2. L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2-1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
3. L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\right\}$.

3.1 Insuffisance de $\mathbb{Q}$

Il a été nécessaire [1] de se demander s'il est existe un rationnel positif p tel que $p^2 = 2$. La réponse est négative. En effet on suppose qu'il existe une fraction irréductible $\frac{a}{b}$, a, b entiers naturels, tels que $\frac{a^2}{b^2} = 2$ on aboutit à une contradiction [2]

1. L'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont de longueur 1.
2. En fait il est possible de montrer que pour un entier naturel n donné, si $\sqrt{n}$ n'est pas un entier naturel alors il n'est pas rationnel.

3.2 $\mathbb{R}$ et ses propriétés

3.2.1 Corps commutatif totalement ordonné

Définition 3.1 *Un corps commutatif est un ensemble E muni d'une addition et d'une multiplication vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Pour tous $x, y \in E, x + y \in E$.*
2. *Pour tous $x, y \in E, x + y = y + x$ (commutativité).*
3. *Pour tous $x, y, z \in E, (x + y) + z = x + (y + z)$ (associativité).*
4. *Il existe un élément de E noté 0 tel que pour tout $0 + x = x$.*
5. *A tout x élément de E correspond un élément $-x$ de E tel que $x + (-x) = 0$.*
6. *Pour tous $x, y \in E, xy \in E$.*
7. *Pour tous $x, y \in E, xy = yx$ (commutativité).*
8. *Pour tous $x, y, z \in E, (xy)z = x(yz)$ (associativité).*
9. *Il existe un élément de E noté 1 différent de 0 tel que pour tout $1x = x$.*
10. *A tout $x \neq 0$ élément de E correspond un élément $\frac{1}{x}$ de E tel que $x\frac{1}{x} = 1$.*
11. *Pour tous $x, y, z \in E, x(y + z) = xy + xz$.*

Définition 3.2 *Un corps commutatif totalement ordonné est un quadruplet $(E, +, ., \leq)$ où $(E, +, .)$ est un corps et $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné avec les conditions :*

1. *$y \leq z \Rightarrow x + y \leq x + z$ pour tout $x \in E$.*
2. *Pour tous $x, y \in E, (0 \leq x$ et $0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq xy$.*

On énonce l'axiome suivant qui fonde l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Axiome $A_{\mathbb{R}}$: Il existe un unique corps commutatif totalement ordonné noté $\mathbb{R}$ dans lequel toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure.

3.2.2 Caractérisation des bornes supérieure et inférieure

Proposition 3.3 *Le réel β est égale à $\sup A$ si et seulement si*

1. $x \leq \beta$, $\forall x \in A$.
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in A$ tel que $x_0 > \beta - \varepsilon$.*

Proposition 3.4 *Le réel α est égale à $\inf A$ si et seulement si*

1. $x \geq \alpha$, $\forall x \in A$.
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in A$ tel que $x_0 < \alpha + \varepsilon$.*

3.2.3 Valeur absolue

La valeur absolue de a, notée $|a|$, est a si $a \geq 0$ ou $-a$ si $a \leq 0$.

Proposition 3.5 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. On a*

1. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
2. $|ab| = |a||b|$.
3. $|a| < r \Leftrightarrow -r < a < r$.

Proposition 3.6 *(Inégalité triangulaire) Pour tous réels a et b, on a*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Preuve. $(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 = a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - b^2 - 2ab = 2(|ab| - ab) \geq 0.$ □

Corollaire 3.7 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a*

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Preuve.

3.2.4 $\mathbb{R}$ est archimédien

Théorème 3.8 *$\forall \rho, \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n\varepsilon > \rho$.*

(On exprime cette propriété en disant que $\mathbb{R}$ est *archimédien.*)

Preuve. On procède à une démonstration par l'absurde. Si l'assertion est fausse, ρ est un majorant de l'ensemble non vide

$$S = \{n\varepsilon : n \in \mathbb{N}\}.$$

Alors S admet une borne sup β. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, n\varepsilon \leq \beta. \tag{3.1}$$

Puisque $n+1 \in \mathbb{N}$, (3.1) implique $(n+1)\varepsilon \leq \beta$. D'où l'on tire $n\varepsilon \leq \beta - \varepsilon$. Ainsi $\beta - \varepsilon$ est un majorant de S. Il y a contradiction puisque $\beta - \varepsilon < \beta$.□

3.2.5 Densité

Définition 3.9 *Une partie D de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert $]a, b[$ contient un élément de D.*

Théorème 3.10 *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Preuve. Du Théorème 3.8 avec $\rho = 1$ et $\varepsilon = b - a$, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $q(b-a) > 1$. Il existe aussi un entier j tel que $j > qa$. (évident si $a \leq 0$, et si $a > 0$, cela provient du Théorème 3.8 avec $\varepsilon = 1$ et $\rho = qa$). Soit p le plus petit entier tel que $p > qa$. Alors $p - 1 \leq qa$, d'où

$$qa < p \leq qa + 1.$$

Puisque $1 < q(b-a)$, alors

$$qa < p < qa + q(b-a) = qb.$$

D'où $a < \dfrac{p}{q} < b$. □

Théorème 3.11 *$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Preuve. Soient a, b des réels tels que $a < b$. Il existe deux rationnels r_1 et r_2 tels que $a < r_1 < r_2 < b$. Considérer $t = r_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(r_2 - r_1)$. Alors t est irrationnel et $a < r_1 < t < r_2 < b$.

□

Chapitre 4

Suites numériques

Une suite de nombres réels est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$. Toutes les suites considérées ici sont de ce type.

4.1 Limite d'une suite

Définition 4.1 *On dit qu'une suite (u_n) converge vers un réel l si*
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon). \tag{4.1}$$

On dit alors que (u_n) est convergente et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ ou $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = l$ ou $\lim\limits_{n} u_n = l$.

Une suite qui ne converge pas est dite *divergente*.

Remarque 4.2 *La Définition 4.1 ne change pas si on remplace (4.1) par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < K\varepsilon)$$

où $K \in]0, +\infty[$.

Exemple : Soit $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$. Alors $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 2$.

Théorème 4.3 *La limite d'une suite convergente est unique.*

Preuve.

4.2 Suites bornées

Définition 4.4 *Une suite (u_n) est dite*

- *minorée s'il existe un réel a tel que $u_n \geq a$ pour tout n,*
- *majorée s'il existe un réel b tel que $u_n \leq b$ pour tout n,*
- *bornée si elle est minorée et majorée. Cela revient au même de dire qu'il existe un réel r tel que $|u_n| \leq r$ pour tout n.*

Question : Dans chacun des cas suivants la suite (u_n) est-elle minorée ? majorée ? bornée ? $u_n = [1 + (-1)^n]n$; $u_n = (-1)^n$; $u_n = (-1)^n n$.

Théorème 4.5 *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve.

4.3 Suites monotones

Définition 4.6 *Une suite (u_n) est dite*

- *croissante si $u_n \leq u_{n+1}$,*
- *décroissante si $u_n \geq u_{n+1}$.*

Théorème 4.7

1. *Toute suite (u_n) croissante majorée converge vers $\sup_n \{u_n\}$.*
2. *Toute suite (u_n) décroissante minorée converge vers $\inf_n \{u_n\}$.*

Preuve. Soit (u_n) une suite croissante et majorée. Alors l'ensemble $A = \{u_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Alors elle admet une borne supérieure. Notons $l = \sup A$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $l - \varepsilon < u_N$. Comme la suite (u_n) est croissante, $\forall n > N, u_N \leq u_n$. Il vient alors

$$\forall n > N,\, l - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq l < l + \varepsilon.$$

D'où, $\forall n > N$, $|u_n - l| < \varepsilon$. On a donc montré que (u_n) converge vers l.

La seconde affirmation de traite de façon similaire. □

4.4 Suites extraites

Définition 4.8 *On appelle* **suite extraite** *(ou sous-suite) de (u_n) toute suite de la forme $(u_{\sigma(n)})$ où σ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*
Une sous-suite est également notée $(u_{n_k})_k$.

Proposition 4.9 *Une suite (u_n) converge vers l ssi toute suite extraite de (u_n) converge vers l.*

Pour démontrer cette proposition, on a besoin du résultat intermédiaire suivant.

Lemme 4.10 *Si σ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma(n) \geq n$.*

Preuve.

Preuve de la Proposition 4.9.

Proposition 4.11 *Une suite (u_n) converge vers l ssi toutes ses sous-suites convergent vers l.*

Proposition 4.12 *Une suite (u_n) converge vers l ssi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l.*

Exemples. Étudions la convergence des suites définies par $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Théorème 4.13 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.*

4.5 Suites classiques

Suites arithmétiques

Une suite arithmétique (u_n) est définie par la donnée d'un premier u_0 et d'une formule de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$ où r est un nombre indépendant de n. Le nombre r est appelé la *raison* de la suite (u_n). Le terme générale de la suite est

$$u_n = u_0 + nr.$$

Plus généralement on a la relation

$$u_n = u_p + (n-p)r, \ \forall n, p \in \mathbb{N}.$$

La somme $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ est égale à

$$s_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}.$$

Exemple. Calculer la somme $S = 1 + 3 + 5 + \cdots + 99$.

Suites géométriques

Une suite géométrique (u_n) est définie par la donnée d'un premier u_0 et d'une formule de récurrence $u_{n+1} = qu_n$ où q est un nombre indépendant de n. Le nombre q est appelé la *raison* de la suite (u_n). Le terme générale de la suite est

$$u_n = u_0 q^n.$$

Plus généralement on a la relation

$$u_n = u_p q^{(n-p)}, \ \forall n, p \in \mathbb{N}.$$

La somme $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ est égale à

$$s_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Exemple. Calculer la somme $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{33554432}$.

Suites récurrentes du premier ordre

Une suite récurrente du premier ordre est définie par la donnée de son premier terme u_0 et d'une formule de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction réelle d'une variable réelle.

Proposition 4.14 *Soit la suite (u_n) définie par la donnée de u_0 et la formule de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) est convergente et si f est continue alors la limite l de (u_n) vérifie la relation $f(l) = l$.*

Exemple. Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

Suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est définie par la donnée de u_0 et de u_1 et par une formule de récurrence de la forme

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

avec a, b, des constantes réelles. A cette suite est associée l'équation caractéristique

$$(Ec) : r \in \mathbb{C},\ r^2 - ar - b = 0.$$

Soit Δ le discriminant de (Ec).

1. Si $\Delta > 0$ alors (Ec) a deux solutions réelles r_1 et r_2. Il vient

$$u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. Si $\Delta = 0$ alors (Ec) a une seule solution réelle r_0. Il vient

$$u_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

3. Si $\Delta < 0$ alors (Ec) a deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$. Il vient

$$u_n = \rho^n(\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Dans chacun des cas, α et β sont déterminées par la connaissance de u_0 et u_1.

Exemple. On considère la suite (f_n), appelée *suite de Fibonacci*, définie par $f_0 = f_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Déterminer le terme général f_n en fonction de n.

Suites adjacentes

Définition 4.15 *Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si*
$\forall n,\ u_n \leq v_n$, *(u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et* $\lim_n (v_n - u_n) = 0$.

Proposition 4.16 *Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.*

Preuve.

Exemple. Soit les suites de termes généraux $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Leur limite commune est le nombre e.

4.6 Suites de Cauchy

Définition 4.17 *Une suite (u_n) est dite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, (q > p > N \Rightarrow |u_q - u_p| < \varepsilon).$$

Théorème 4.18 *Une suite réelle (u_n) est convergente ssi elle est de Cauchy.*

Exemple. Soit $a \in]-1, 1[$. Montrons que la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} a^k \sin k$ est convergente.

Chapitre 5

Séries numériques

5.1 Généralités

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On pose $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Définition 5.1 *On appelle série de terme général* u_n *le couple* $((u_n), (s_n))$. *Elle est notée* $\sum u_n$. *La suite* (s_n) *est appelée* **suite des sommes partielles** *de la série* $\sum u_n$.

Définition 5.2 *La série* $\sum u_n$ *est dite convergente si la suite* (s_n) *est convergente. Si* (s_n) *n'est pas convergente, on dit que la série* $\sum u_n$ *est divergente.*
Si $\sum u_n$ *est convergente alors la limite* s *de la suite* (s_n) *est appelée somme de la série* $\sum u_n$ *et on écrit* $s = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Le nombre $r_n = s - s_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} u_p$ *est appelé* **reste** *d'ordre* n *de la série* $\sum u_n$.

Remarque. Si (u_n) n'est définie qu'à partir de n_0, alors $s_n = u_{n_0} + u_1 + \cdots + u_n$. Si (s_n) converge alors la somme de la série $\sum u_n$ est notée $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Questions.

1. Montrer que la série géométrique $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ est convergente et déterminer sa somme.
2. La série $1 + 3 + 5 + \ldots$ est-elle convergente ?
   Même question pour la série $\frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \ldots$ et la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

Proposition 5.3 *Si la série* $\sum u_n$ *converge alors la suite* (u_n) *converge vers* 0.

Preuve. $u_n = s_n - s_{n-1}$.

Question. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^2+4}$ est-elle convergente ?

5.2 Séries à termes positifs

Remarque . Dans beaucoup de problèmes, le calcul de s_n peut être très difficile voire impossible. Dans de tels cas, on utilise quelques tests pour savoir si la série donnée est convergente ou non. **Les critères de convergence qui suivent concernent les séries à termes positifs.**

Proposition 5.4 (Comparaison à une intégrale généralisée) *Soit* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction positive décroissante. Alors*

$$\int_b^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge ssi } \sum_{n=b}^{+\infty} u_n \text{ converge où } u_n = f(n).$$

Corollaire 5.5 (Application aux séries de Riemann) *La série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$, *converge si et seulement si* $p > 1$.

Preuve. Prendre $f(t) = \frac{1}{t^p}$, $t \geq 1$ dans la proposition(5.4).□

Remarques .

1. La série divergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est appelée **série harmonique.**
2. On montre que $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n)$ existe et se situe entre 0 et 1. On la note γ et on l'appelle **constante d'Euler**. $\gamma \approx 0.57721...$

Corollaire 5.6 (Application aux séries de Bertrand) *Soit la série* $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Si $\alpha < 1$ *alors elle diverge pour tout* β.

Si $\alpha > 1$ *alors elle converge pour tout* β.

Si $\alpha = 1$ *alors elle converge ssi* $\beta > 1$.

Preuve. Prendre $f(t) = \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$, $t \geq 2$ dans la proposition(5.4).□

Proposition 5.7 (Le test de comparaison)

1. *Si* $0 \leq u_n \leq kv_n$, $k > 0$ *alors*
   $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow \sum u_n$ *converge* ,
   $\sum u_n$ *diverge* $\Rightarrow \sum v_n$ *diverge* .
2. *Soit* $l = \lim \frac{u_n}{v_n}$.
   Si $l = 0$ *alors* $\sum v_n$ *converge implique* $\sum u_n$ *converge.*
   Si $l > 0$ *alors* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*
   Si $l = +\infty$ *alors* $\sum v_n$ *diverge implique* $\sum u_n$ *diverge.*

Proposition 5.8 (Critère de d'Alembert) *Soit* $l = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$. *On a :*

Si $l < 1$ *alors la série* $\sum u_n$ *converge.*

Si $l > 1$ *alors la série* $\sum u_n$ *diverge.*

Si $l = 1$ *alors on ne peut rien dire. On dit que l'on est dans le cas douteux du critère de d'Alembert.*

Proposition 5.9 (Critère de Cauchy) *Soit* $l = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n}$. *On a :*

Si $l < 1$ *alors la série* $\sum u_n$ *converge.*

Si $l > 1$ *alors la série* $\sum u_n$ *diverge.*

Si $l = 1$ *alors on ne peut rien dire. On dit que l'on est dans le cas douteux du critère de Cauchy.*

Exemples. Etudier la convergence des séries suivantes : $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2+1}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{2n^2+1}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{3^n n}$, $\sum_{n \geq 1} n^2 e^{an}$ $(a \in \mathbb{R})$, $\sum_{n \geq 1} \frac{10^n}{n}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{n^2}$ $(a > 0)$.

5.3 Séries alternées

Définition 5.10 *Une série est dite alternée si son terme général* u_n *est de la forme* $u_n = (-1)^n v_n$ *où* v_n *est de signe constant.*

Proposition 5.11 *Une série alternée* $\sum u_n$ *converge ssi la suite* $|u_n|$ *converge vers* 0 *en décroissant.*

5.4 Convergence absolue, Semi-convergence

Définition 5.12 *Une série* $\sum u_n$ *est dite* **absolument convergente** *si la série* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

Exemples $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}, \sum \dfrac{\cos n}{n\sqrt{n}}$.

Proposition 5.13 *Toute série absoluement convergente est convergente.*

Définition 5.14 *Une série est dite* **semi-convergente** *si elle est convergente mais pas absolument convergente.*

Exemple : $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Bibliographie

[1] A. Boussari, *Cours de MTH 104*, (Communication personnelle), (2009).

[2] E. Lehman, *Mathématiques pour l'étudiant de première année*, Belin, (1984)

[3] J.-M. Monier, *Analyse 1*, Série "J'intègre", 3e édition, Dunod, (1999).

[4] X. Oudot, *Analyse première année*, Belin, (1998)

[5] S. Touré, *Algèbre* , Universités francophones, Edicef, (1991)

[6] W. F. Trench, *Introduction to real analysis*, Open Textbook Initiative, (2013)