Chapitre 3

Composition de mouvements

Sommaire

Il est nécessaire de choisir un référentiel pour définir à chaque instant la position, la vitesse et l'accélération d'un point matériel. Le référentiel choisit est en général celui dans lequel le physicien observe le mouvement. Ce référentiel est dit *absolu*. Mais parfois la cinématique dans ce référentiel est complexe. On utilise alors un autre référentiel permettant une description simple de la cinématique. Ce référentiel est dit *relatif*.

Connaissant les quantités telles que vitesse et accélération par rapport au référentiel relatif, il faut savoir déduire les expressions de ces quantités dans le référentiel absolu.

Le but de ce chapitre est d'apprendre à "transférer" vitesse et accélération d'un référentiel vers un autre.

Le chapitre est composé comme suit : au paragraphe 3.1 nous fixons les notations et donnons quelques définitions. Les paragraphes 3.2 et 3.3 sont consacrés aux théorèmes de composition des vitesses et accélérations, respectivement. Enfin nous étudierons des cas particuliers au paragraphe 3.4

3.1 Quelques définitions

Soit un référentiel $\mathcal{R}$ muni d'un repère d'espace $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ orthonormé direct. Ce référentiel sera considéré comme fixe. On dit que c'est un **référentiel absolu**.
Soit un référentiel $\mathcal{R}'$ muni d'un repère d'espace $\mathcal{R}'(O', \vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$ orthonormé direct, animé d'un mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}$. Ce référentiel sera dit $rfrentiel\ relatif$.

Soit un point M mobile par rapport à $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}$.

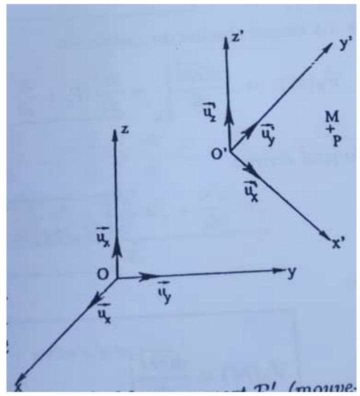

FIGURE 3.1 – Repère d'étude

Définition 3.1.1 : *Le mouvement, la trajectoire, les vecteurs vitesse et accélération de M par rapport à $\mathcal{R}$ (mouvement vu par l'observateur confondu avec l'origine O) sont qualifiés d'*__absolus__.
Le mouvement, la trajectoire, les vecteurs vitesse et accélération de M par rapport à $\mathcal{R}'$ (mouvement vu par l'observateur confondu avec l'origine O') sont qualifiés de **relatifs**.
*Le mouvement du référentiel relatif $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel absolu $\mathcal{R}$ est appelé mouvement d'*__entraînement__.

Nous noterons :
- (x, y, z) et (x', y', z') les coordonnées du mobile M dans les repères absolu $\mathcal{R}$ et relatif $\mathcal{R}'$, respectivement;
- $\vec{v}_a$ et $\vec{a}_a$ les vecteurs vitesse et accélération absolues du mouvement de M ;
- $\vec{v}_r$ et $\vec{a}_r$ les vecteurs vitesse et accélération relatives du mouvement de M ;
- $\vec{v}_e$ et $\vec{a}_e$ les vecteurs vitesse et accélération d'entraînement, c'est-à-dire la vitesse et l'accélération d'un point M_C fixe dans $\mathcal{R}'$ et qui coïncide à l'instant t avec M. Ce point M_C est appelé le point coïncidant.

3.2 Vecteur vitesse

En utilisant les notations du paragraphe précédent, nous avons :

Position du mobile par rapport à $\mathcal{R}'$: $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{u}'_x + y'\vec{u}'_y + z'\vec{u}'_z$

Position du mobile par rapport à $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

En utilisant la décomposition du mouvement de M dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

$= \overrightarrow{OO'} + x'\vec{u}'_x + y'\vec{u}'_y + z'\vec{u}'_z$ position du mobile par rapport à $\mathcal{R}$ et exprimé dans $\mathcal{R}'$

- La vitesse relative du mobile est :

$$\boxed{\vec{v}_r(M) = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}|_{\mathcal{R}'} = \frac{dx'}{dt}\vec{u}'_x + \frac{dy'}{dt}\vec{u}'_y + \frac{dz'}{dt}\vec{u}'_z} \tag{3.1}$$

- La vitesse absolue du mobile est :

$$\vec{v}_a(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}|_{\mathcal{R}} = \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{u}'_x + \frac{dy'}{dt}\vec{u}'_y + \frac{dz'}{dt}\vec{u}'_z} + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{u}'_x}{dt} + y'\frac{d\vec{u}'_y}{dt} + z'\frac{d\vec{u}'_z}{dt}$$

On peut écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{v}_a(M) = \overrightarrow{v}_r(M) + \overrightarrow{v}_e(M)} \tag{3.2}$$

avec

$$\boxed{\overrightarrow{v}_e(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}|_{\mathcal{R}}^{x',y',z'=Cstes} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\overrightarrow{u}'_x}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{u}'_y}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{u}'_z}{dt}} \tag{3.3}$$

La vitesse d'entraînement $\overrightarrow{v}_e$, est la vitesse du point coïncidant M_C fixe dans $\mathcal{R}'$, c'est-à-dire un pont dont les coordonnées x', y' et z' sont des constantes dans $\mathcal{R}'$.
Nous pouvons encore noter le résultat (2) sous la forme plus expressive

$$\overrightarrow{V(M)}/\mathcal{R} = \overrightarrow{V(M)}/\mathcal{R}' + \overrightarrow{V(M_C)}/\mathcal{R} = \overrightarrow{V(M)}/\mathcal{R}' + \overrightarrow{V(\mathcal{R}')}/\mathcal{R}$$

d'où le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 (Théorème de composition des vitesses)
La vitesse absolue d'un point matériel par rapport à un référentiel absolu $(\mathcal{R})$ est égale à la somme de la vitesse relative de ce point par rapport à un référentiel $(\mathcal{R}')$ mobile par rapport à $(\mathcal{R})$ et de la vitesse d'entraînement de $(\mathcal{R}')$ par rapport à $(\mathcal{R})$.

3.3 Vecteur accélération

L'accélération relative du mobile est donnée par

$$\boxed{\overrightarrow{a}_r(M) = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}|_{\mathcal{R}'} = \frac{d^2x'}{dt^2}\overrightarrow{u}'_x + \frac{d^2y'}{dt^2}\overrightarrow{u}'_y + \frac{d^2z'}{dt^2}\overrightarrow{u}'_z} \tag{3.4}$$

L'accélération d'entraînement est l'accélération du point coïncidant M_C :

$$\overrightarrow{a}_e(M) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}|_{\mathcal{R}}^{x',y',z'=Cstes} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\overrightarrow{u}'_x}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{u}'_y}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{u}'_z}{dt}\right), x', y', z' \text{ tant constants}$$

soit

$$\boxed{\overrightarrow{a}_e(M) = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\overrightarrow{u}'_x}{dt^2} + y'\frac{d^2\overrightarrow{u}'_y}{dt^2} + z'\frac{d^2\overrightarrow{u}'_z}{dt^2}} \tag{3.5}$$

L'accélération absolue est donnée par :

$$\overrightarrow{a}_a(M) = \frac{d\overrightarrow{v}_a}{dt} \text{ avec } \overrightarrow{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\overrightarrow{u}'_x}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{u}'_y}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{u}'_z}{dt} + \frac{dx'}{dt}\overrightarrow{u}'_x + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{u}'_y + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{u}'_z$$

$$= \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\overrightarrow{u}'_x}{dt^2} + y'\frac{d^2\overrightarrow{u}'_y}{dt^2} + z'\frac{d^2\overrightarrow{u}'_z}{dt^2}} + \underbrace{\frac{d^2x'}{dt^2}\overrightarrow{u}'_x + \frac{d^2y'}{dt^2}\overrightarrow{u}'_y + \frac{d^2z'}{dt^2}\overrightarrow{u}'_z}$$

$$+2\frac{dx'}{dt}\frac{d\overrightarrow{u}'_x}{dt} + 2\frac{dy'}{dt}\frac{d\overrightarrow{u}'_y}{dt} + 2\frac{dz'}{dt}\frac{d\overrightarrow{u}'_z}{dt}$$

La quantité

$$2\left[\frac{dx'}{dt}\frac{d\overrightarrow{u}'_x}{dt}+\frac{dy'}{dt}\frac{d\overrightarrow{u}'_y}{dt}+\frac{dz'}{dt}\frac{d\overrightarrow{u}'_z}{dt}\right]$$

est désignée sous le terme de l'**accélération complémentaire** ou **accélération de Coriolis** et est notée $\overrightarrow{a}_c(M)$. On en déduit que

$$\boxed{\overrightarrow{a}_a(M)=\overrightarrow{a}_r(M)+\overrightarrow{a}_e(M)+\overrightarrow{a}_c(M)} \tag{3.6}$$

ce que nous traduisons par le théorème suivant :

Théorème 3.3.1 (Théorème de composition des accélérations)
L'accélération absolue d'un point matériel par rapport à un référentiel absolu $(\mathcal{R})$ est égale à la somme de L'accélération relative du mouvement de ce point par rapport à un référentiel $(\mathcal{R}')$ mobile par rapport à $(\mathcal{R})$, de l'accélération d'entraînement du mouvement de $(\mathcal{R}')$ par rapport à $(\mathcal{R})$ et de L'accélération de Coriolis.

3.3.1 Expression simple de l'accélération de Coriolis

Afin de simplifier l'expression de l'accélération de Coriolis, nous allons énoncer quelques résultats de la cinématique des solides qui seront démontrés dans le cours de la mécanique de solide (Phy 206).
On montre que le mouvement le plus général d'un solide est la composée d'une rotation instantanée autour d'un axe qu'on appelle **axe instantané de rotation** et d'une translation instantanée parallèlement à cet axe.
Soit $\overrightarrow{w}_e$ le vecteur de rotation instantanée autour de l'axe de rotation instantanée du référentiel mobile $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel absolu $\mathcal{R}$. On montre que :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{u}'_x}{dt}=\overrightarrow{w}_e\wedge\overrightarrow{u}'_x;\quad \frac{d\overrightarrow{u}'_y}{dt}=\overrightarrow{w}_e\wedge\overrightarrow{u}'_y;\quad \frac{d\overrightarrow{u}'_z}{dt}=\overrightarrow{w}_e\wedge\overrightarrow{u}'_z} \tag{3.7}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}_c(M)&=2\left[\frac{dx'}{dt}\overrightarrow{w}_e\wedge\overrightarrow{u}'_x+\frac{dy'}{dt}\overrightarrow{w}_e\wedge\overrightarrow{u}'_y+\frac{dz'}{dt}\overrightarrow{w}_e\wedge\overrightarrow{u}'_z\right]\\ &=2\left[\overrightarrow{w}_e\wedge\underbrace{\left(\frac{dx'}{dt}\overrightarrow{u}'_x+\frac{dy'}{dt}\overrightarrow{u}'_y+\frac{dz'}{dt}\overrightarrow{u}'_z\right)}\right]\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\overrightarrow{a}_c(M)=2\overrightarrow{w}_e\wedge\overrightarrow{v}_r(M)} \tag{3.8}$$

L'accélération absolue peut donc s'écrire sous la forme

$$\boxed{\overrightarrow{a}_a(M)=\overrightarrow{a}_r(M)+\overrightarrow{a}_e(M)+2\overrightarrow{w}_e\wedge\overrightarrow{v}_r(M)} \tag{3.9}$$

3.3.2 Cas particulier où l'accélération de Coriolis est nulle

Il vient de (8) $\overrightarrow{a}_c=2\overrightarrow{w}_e\wedge\overrightarrow{v}_r$ que $\overrightarrow{a}_c=\overrightarrow{0}$ si $\overrightarrow{w}_e=\overrightarrow{0}$, ou si $\overrightarrow{v}_r=\overrightarrow{0}$, ou si $\overrightarrow{w}_e$ et $\overrightarrow{v}_r$ sont colinéaires.

• 1^{er} cas : $\overrightarrow{w}_e = \overrightarrow{0}$. Cela signifie qu'à tout instant le mouvement d'entraînement n'a aucune composante de rotation instantanée. Le mouvement d'entraînement du référentiel $(\mathcal{R}^{'})$ par rapport au référentiel $(\mathcal{R})$ est donc à tout instant un mouvement de translation.

• 2^{me} cas : $\overrightarrow{v}_r = \overrightarrow{0}$. Cela suppose que le mobile est fixe dans $(\mathcal{R}^{'})$.

• 3^{me} cas : $\overrightarrow{w}_e$ et $\overrightarrow{v}_r$ sont colinéaires.

• Si de plus de $\overrightarrow{w}_e = \overrightarrow{0}$ $(\overrightarrow{a}_c = \overrightarrow{0})$, on a $\overrightarrow{v}_e = \overrightarrow{C}$ (Le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation uniforme), alors $\overrightarrow{a}_e = \overrightarrow{0}$ d'où $\overrightarrow{a}_a = \overrightarrow{a}_r$

3.4 Cas particuliers des mouvements de translation et de rotation

3.4.1 Mouvement de translation

Supposons que le référentiel $(\mathcal{R}^{'})$ est en mouvement de translation par rapport au référentiel absolu $(\mathcal{R})$. Ce mouvement de translation n'est pas forcément uniforme. Cela signifie que $\overrightarrow{w}_e = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{a}_c(M) = \overrightarrow{0}$. On a :

$$\boxed{\overrightarrow{v}_a(M) = \overrightarrow{v}_r(M) + \overrightarrow{v}_e(M) \;\; et \;\; \overrightarrow{a}_a(M) = \overrightarrow{a}_r(M) + \overrightarrow{a}_e(M)}$$

Comme $(\mathcal{R}^{'})$ est animé d'un mouvement de translation, tous les points de $(\mathcal{R}^{'})$ ont même vitesse $\overrightarrow{v}_{(\mathcal{R})}(O^{'})$, avec $\overrightarrow{v}_{(\mathcal{R})}(O^{'})$ la vitesse de l'origine $O^{'}$ du repère $\mathcal{R}^{'}$ dans $\mathcal{R}$. Il en est de même pour l'accélération d'entraînement. Donc

$$\boxed{\overrightarrow{v}_a(M) = \overrightarrow{v}_r(M) + \overrightarrow{v}_{(\mathcal{R})}(O^{'}) \;\; et \;\; \overrightarrow{a}_a(M) = \overrightarrow{a}_r(M) + \overrightarrow{a}_{(\mathcal{R})}(O^{'})}$$

3.4.2 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Nous supposons maintenant que le référentiel $(\mathcal{R}^{'})$ est en mouvement de rotation par rapport au référentiel absolu $(\mathcal{R})$. Nous supposons en outre que les axes Oz et $O^{'}z^{'}$ sont confondus, le repère $\mathcal{R}^{'}$ tournant autour de $\mathcal{R}$ avec la vitesse angulaire w. Le vecteur rotation instantanée de $\mathcal{R}^{'}$ par rapport à $\mathcal{R}$ est donc $\overrightarrow{w} = w\overrightarrow{u}_z$. On a : $\overrightarrow{w}_e = \overrightarrow{w} = w\overrightarrow{u}_z$

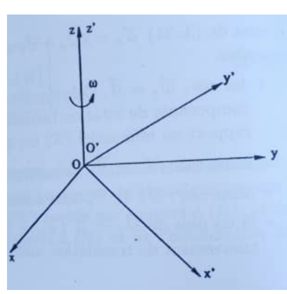

FIGURE 3.2 – Repère d'étude

Composition des vitesses

Le mouvement d'entraînement de $(\mathcal{R}^{'})$ dans $(\mathcal{R})$ est un mouvement circulaire de vitesse donnée par

(3) :

$$\begin{aligned}
\vec{v}_e &= x'\frac{d\vec{u}'_x}{dt} + y'\frac{d\vec{u}'_y}{dt} + z'\frac{d\vec{u}'_z}{dt} \quad \text{puisque} \quad \overrightarrow{OO'} = \vec{0} \\
&= x'\vec{w}_e \wedge \vec{u}'_x + y'\vec{w}_e \wedge \vec{u}'_y + z'\vec{w}_e \wedge \vec{u}'_z \\
&= \vec{w}_e \wedge \underbrace{\left(x'\vec{u}'_x + y'\vec{u}'_y + z'\vec{u}'_z\right)}_{} \quad \text{car} \quad \frac{d\vec{u}'_z}{dt} = \vec{w}_e \wedge \vec{u}'_z = \vec{0}
\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\vec{v}_e = \vec{w}_e \wedge \overrightarrow{O'M}} \tag{3.10}$$

Par suite

$$\boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{w}_e \wedge \overrightarrow{O'M}} \tag{3.11}$$

Composition des accélérations

FIGURE 3.3 – Repère d'étude

De (5), on déduit que

$$\vec{a}_e = x'\frac{d^2\vec{u}'_x}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{u}'_y}{dt^2}$$

Or $\displaystyle \frac{d^2\vec{u}'_x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\vec{w}_e \wedge \vec{u}'_x\right] = \vec{w}_e \wedge \frac{d\vec{u}'_x}{dt} + \frac{d\vec{w}_e}{dt} \wedge \vec{u}'_x$

et $\displaystyle \vec{w}_e \wedge \frac{d\vec{u}'_x}{dt} = \vec{w}_e \wedge \left(\vec{w}_e \wedge \vec{u}'_x\right) = \underbrace{\left(\vec{w}_e . \vec{u}'_x\right)}_{}\vec{w}_e - w_e^2\vec{u}'_x = -w^2\vec{u}'_x$

Soit

$$\frac{d^2\vec{u}'_x}{dt^2} = -w_e^2\vec{u}'_x + \frac{d\vec{w}_e}{dt} \wedge \vec{u}'_x \quad ; \quad \frac{d^2\vec{u}'_y}{dt^2} = -w_e^2\vec{u}'_y + \frac{d\vec{w}_e}{dt} \wedge \vec{u}'_y$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\vec{a}_e &= -x'w_e^2\vec{u}'_x + x'\frac{d\vec{w}_e}{dt} \wedge \vec{u}'_x - y'w_e^2\vec{u}'_y + y'\frac{d\vec{w}_e}{dt} \wedge \vec{u}'_y \\
&= -w_e^2\left[x'\vec{u}'_x + y'\vec{u}'_y\right] + \frac{d\vec{w}_e}{dt} \wedge \left[x'\vec{u}'_x + y'\vec{u}'_y\right] \\
&= -w_e^2\left[x'\vec{u}'_x + y'\vec{u}'_y\right] + \frac{d\vec{w}_e}{dt} \wedge \left[x'\vec{u}'_x + y'\vec{u}'_y + z'\vec{u}'_z\right]
\end{aligned}$$

d'où

$$\vec{a}_e = -w_e^2\left[x'\vec{u}'_x + y'\vec{u}'_y\right] + \frac{d\vec{w}_e}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

Soit H le projeté orthogonal de M' sur l'axe $(O'z')$. Alors $\overrightarrow{HM} = x'\overrightarrow{u}'_x + y'\overrightarrow{u}'_y$. D'où

$$\overrightarrow{a}_e = -w_e^2\overrightarrow{HM} + \frac{d\overrightarrow{w}_e}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} \tag{3.12}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\overrightarrow{a}_a = \overrightarrow{a}_r - w_e^2\overrightarrow{HM} + \frac{d\overrightarrow{w}_e}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + 2\overrightarrow{w}_e \wedge \overrightarrow{v}_r} \tag{3.13}$$

Si de plus, la rotation de $(\mathcal{R}')$ autour de Oz est uniforme, $\frac{d\overrightarrow{w}_e}{dt} = \overrightarrow{0}$ et l'expression (13) devient

$$\boxed{\overrightarrow{a}_a = \overrightarrow{a}_r - w_e^2\overrightarrow{HM} + 2\overrightarrow{w}_e \wedge \overrightarrow{v}_r} \tag{3.14}$$