OUTILS MATHÉMATIQUES

Séance 1 en Présentiel – PHY104 : Electrostatique et Electrocinétique
Ing. Agbassou Guenoukpati, Département du Génie Electrique, ENSI, Université de Lome, Togo

Objectif du cours
Au cours de cette presentation, vous apprendrez ce qui suit :

- le concept de champ
- le calcul vectoriel ;
- les systèmes de coordonnées ;
- les éléments de ligne, de surface et de volume ;
- l'utilisation de l'opérateur Nabla

1. Introduction

Ce cours d'introduction permet de revoir des notions déjà abordées en mécanique comme les **systèmes de coordonnées cartésienne, cylindrique ou sphérique**. Dans chacun de ces systèmes, on définit un déplacement élémentaire, de surface et de volume ; on établit également les relations entre les différents systèmes de coordonnées. Ensuite, nous abordons l'opérateur nabla qui, selon son utilisation, donne naissance au gradient, à la divergence ou au rotationnel. Le gradient est exprimé en coordonnées cartésiennes et nous montrons comment obtenir son expression en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques. Mais bien avant, abordons le concept de champ

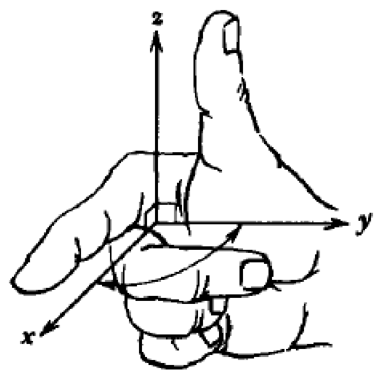
2. Les systèmes de coordonnées

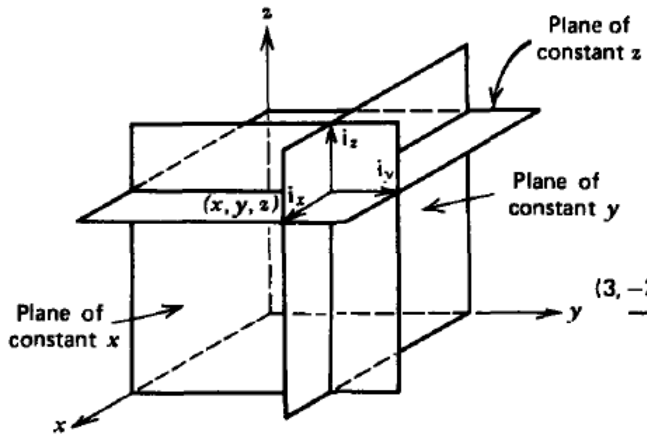
Les coordonnées sont des nombres servant à déterminer la position d'un point dans l'espace par rapport à un système de référence. En physique, selon la physionomie du problème étudié, on choisit entre trois systèmes de coordonnées :

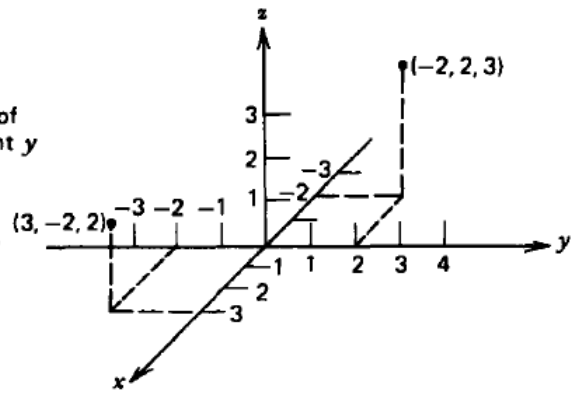
- système de coordonnées cartésiennes (**système adapté aux objets de forme cubique**) ;
- système de coordonnées cylindriques (**système adapté aux objets de forme cylindrique**) ;
- système de coordonnées sphériques (**système adapté aux objets de forme sphérique**).

2.1. Les coordonnées cartésiennes

Les coordonnées cartésiennes sont les coordonnées les plus faciles à manipuler. Un point quelconque de l'espace est repéré par trois coordonnées x, y et z.







Par convention, on utilise la règle de la main droite de sorte que l'index indique la direction x, le majeur pour y et le pouce pour z. Cette convention est nécessaire pour lever les ambiguïtés directionnelles.

Les directions des coordonnées sont représentées par les vecteurs unitaires i_x, i_y, et i_z. Les coordonnées cartésiennes sont faciles à manipuler car les vecteurs unitaires pointent toujours la même direction et ne changent pas de direction d'un point à l'autre

Dans ce système de coordonnées, un déplacement élémentaire est noté :

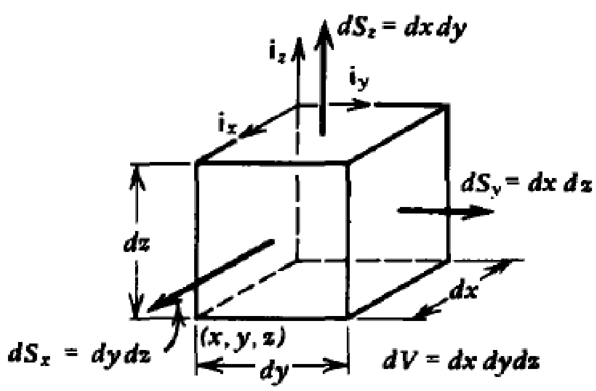
$$\overrightarrow{dl} = dx\,\overrightarrow{i_x} + dy\,\overrightarrow{i_y} + dz\,\overrightarrow{i_z}$$

On peut aussi définir une surface élémentaire (dans le plan xOy par exemple) :

$$dS_x = dx \cdot dy$$

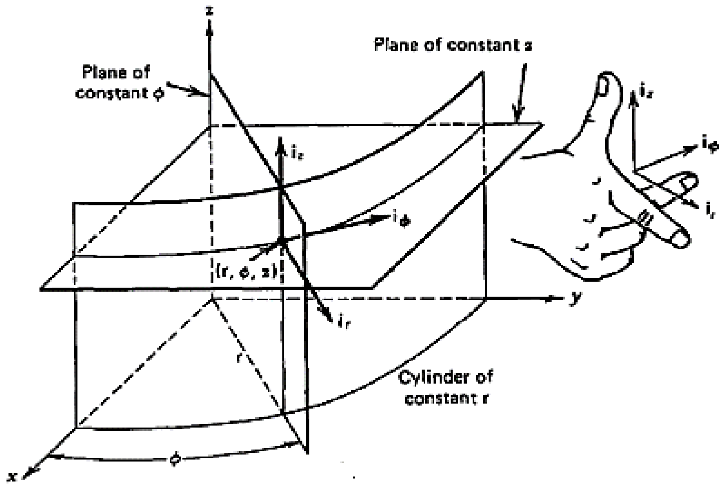
Enfin, on peut définir un volume élémentaire :

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$



2.2. Les coordonnées cylindriques

Dans ce système de coordonnées, un point de l’espace est repéré par un rayon r, un angle ϕ (angle entre l’axe Ox et la projection du rayon sur le plan xOy), et une hauteur z (par rapport au plan xOy). On définit aussi trois vecteurs unitaires (i_r, i_ϕ, et i_z) que l'on place généralement au niveau du point ou de son projeté sur la plan xOy.



Dans ce système de coordonnées, un déplacement élémentaire s'écrit :

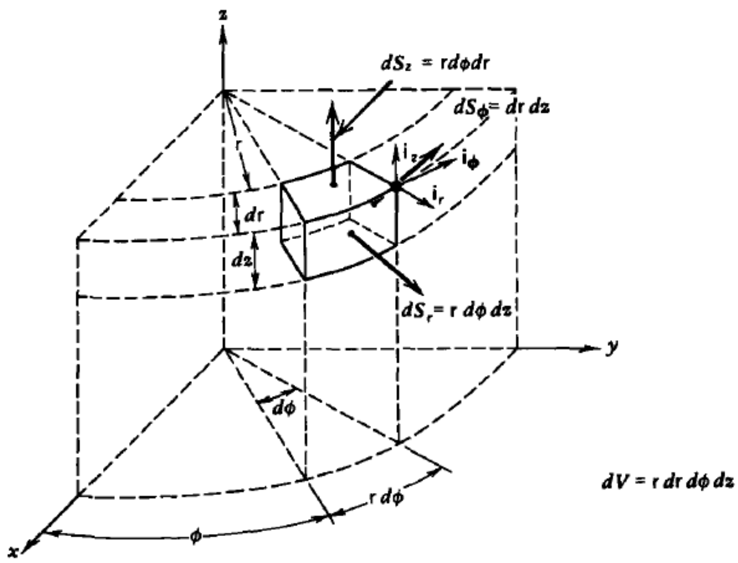
$$\overrightarrow{dl} = dr\,\overrightarrow{i_r} + rd\phi\,\overrightarrow{i_\phi} + dz\,\overrightarrow{i_Z}$$

Ainsi une surface élémentaire s'écrit :

$$dS_r = rd\phi \cdot dz$$

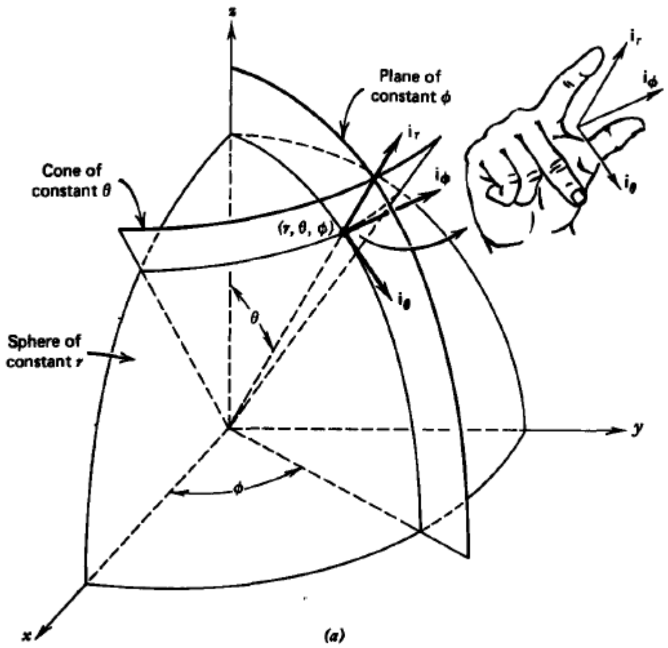
Et un volume élémentaire est défini par :

$$dV = dr \cdot rd\phi \cdot dz$$



2.3. Les coordonnées sphériques

Dans ce système de coordonnées, un point de l'espace est repéré par un rayon r, et deux angles : un angle θ (angle entre l'axe Oz et le rayon r) et un angle ϕ (angle entre l'axe Ox et la projection du rayon sur le plan xOy). Trois vecteurs unitaires (i_r, i_θ, et i_ϕ) donnent l'orientation du repère.



Dans ce système de coordonnées, un déplacement élémentaire s'écrit :

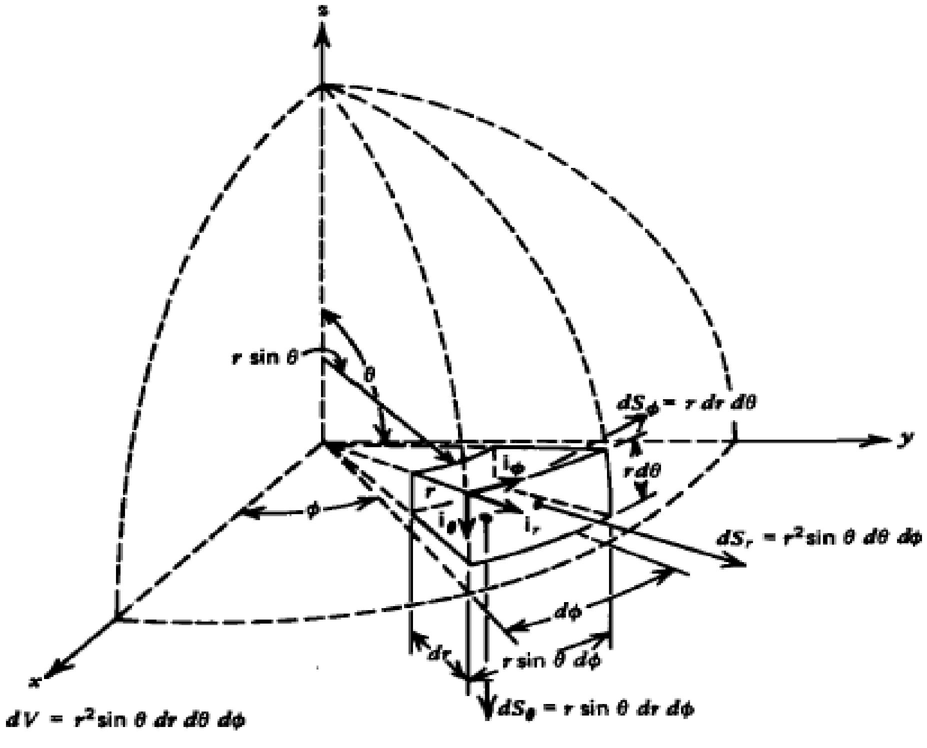
$$\overrightarrow{dl} = dr\,\overrightarrow{i_r} + rd\theta\,\overrightarrow{i_\theta} + r\sin\theta d\phi\,\overrightarrow{i_\phi}$$

Une surface élémentaire s'écrit :

$$dS_r = rd\theta \cdot r\sin\theta d\phi$$

Et un volume élémentaire est défini par :

$$dV = dr \cdot rd\theta \cdot r\sin\theta d\phi$$



4. Relation entre les différents systèmes de coordonnées

Il peut être intéressant de connaître les relations entre les différents systèmes de coordonnées : par exemple entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques, que vaut r en fonction de x et y ? Que vaut θ ou ϕ ? Quelles relations y a t il entre les vecteurs unitaires de la base cartésienne, et ceux de la base cylindrique ? Le tableau ci-dessus présente les relations à connaître et à savoir retrouver.

Tableau 1 : Relation entre les differents systèmes de coordonnées

CARTESIAN		**CYLINDRICAL**		**SPHERICAL**
x	=	$r\cos\phi$	=	$r\sin\theta\cos\phi$
y	=	$r\sin\phi$	=	$r\sin\theta\sin\phi$
z	=	z	=	$r\cos\theta$
$\mathbf{i}_x$	=	$\cos\phi\,\mathbf{i}_r-\sin\phi\,\mathbf{i}_\phi$	=	$\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{i}_r+\cos\theta\cos\phi\,\mathbf{i}_\theta-\sin\phi\,\mathbf{i}_\phi$
$\mathbf{i}_y$	=	$\sin\phi\,\mathbf{i}_r+\cos\phi\,\mathbf{i}_\phi$	=	$\sin\theta\sin\phi\,\mathbf{i}_r+\cos\theta\sin\phi\,\mathbf{i}_\theta+\cos\phi\,\mathbf{i}_\phi$
$\mathbf{i}_z$	=	$\mathbf{i}_z$	=	$\cos\theta\,\mathbf{i}_r-\sin\theta\,\mathbf{i}_\theta$
CYLINDRICAL		**CARTESIAN**		**SPHERICAL**
r	=	$\sqrt{x^2+y^2}$	=	$r\sin\theta$
ϕ	=	$\tan^{-1}\frac{y}{x}$	=	ϕ
z	=	z	=	$r\cos\theta$
$\mathbf{i}_r$	=	$\cos\phi\,\mathbf{i}_x+\sin\phi\,\mathbf{i}_y$	=	$\sin\theta\,\mathbf{i}_r+\cos\theta\,\mathbf{i}_\theta$
$\mathbf{i}_\phi$	=	$-\sin\phi\,\mathbf{i}_x+\cos\phi\,\mathbf{i}_y$	=	$\mathbf{i}_\phi$
$\mathbf{i}_z$	=	$\mathbf{i}_z$	=	$\cos\theta\,\mathbf{i}_r-\sin\theta\,\mathbf{i}_\theta$
SPHERICAL		**CARTESIAN**		**CYLINDRICAL**
r	=	$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	=	$\sqrt{r^2+z^2}$
θ	=	$\cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	=	$\cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$
ϕ	=	$\cot^{-1}\frac{x}{y}$	=	ϕ
$\mathbf{i}_r$	=	$\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{i}_x+\sin\theta\sin\phi\,\mathbf{i}_y+\cos\theta\,\mathbf{i}_z$	=	$\sin\theta\,\mathbf{i}_r+\cos\theta\,\mathbf{i}_z$
$\mathbf{i}_\theta$	=	$\cos\theta\cos\phi\,\mathbf{i}_x+\cos\theta\sin\phi\,\mathbf{i}_y-\sin\theta\,\mathbf{i}_z$	=	$\cos\theta\,\mathbf{i}_r-\sin\theta\,\mathbf{i}_z$
$\mathbf{i}_\phi$	=	$-\sin\phi\,\mathbf{i}_x+\cos\phi\,\mathbf{i}_y$	=	$\mathbf{i}_\phi$

5. Opérateur nabla : gradient, divergence ou rotationnel

L'opérateur nabla noté $\vec{\nabla}$ peut agir sur un champ scalaire (comme le potentiel électrostatique) ou sur un champ de vecteurs (comme le champ électrostatique).
Dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, celui-ci s'écrit :

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i_x}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{i_y}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{i_z}$$

Selon comment il est appliqué au champ (scalaire ou vectoriel) en question, l'opérateur nabla prend d'autres noms.

5.1. Gradient d'un champ scalaire

5.1.1. Gradient en coordonnées cartésiennes

On peut appliquer l'opérateur nabla directement sur un champ de scalaire, on a alors en coordonnées cartésiennes.

$$\vec{\nabla}\,V=\overrightarrow{\text{grad}}\,V=\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i_x}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{i_y}+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{i_z}$$

Lien entre gradient et différentielle totale d'une fonction

En mathématique, si une fonction f dépend de trois variables (x, y et z), sa différentielle totale s'écrit

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

On peut écrire cette différentielle comme étant le produit scalaire entre le gradient de f et le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$:

$$df = \overrightarrow{grad}\, f \bullet \overrightarrow{dl} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{i_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{i_z}\right) \bullet \left(dx\,\overrightarrow{i_x} + dy\,\overrightarrow{i_y} + dz\,\overrightarrow{i_z}\right) = \left|\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array}\right. \bullet \left|\begin{array}{c} dx \\ dy \\ dz \end{array}\right.$$

5.1.2. Gradient en coordonnées cylindriques

Grâce à la formule ci-dessus, on peut exprimer le gradient dans d'autres systèmes de coordonnées. On exprime la différentielle totale de f dans le système de coordonnées :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

On identifie celle-ci avec la différentielle donnée par le produit scalaire calculé dans l'équation

$$df = \overrightarrow{grad}\, f \cdot \overrightarrow{dl} = \left|\begin{array}{c} \left(\overrightarrow{grad}\, f\right)_r \\ \left(\overrightarrow{grad}\, f\right)_\phi \\ \left(\overrightarrow{grad}\, f\right)_z \end{array}\right. \cdot \left|\begin{array}{c} dr \\ rd\phi \\ dz \end{array}\right.$$

$$df = \left(\left(\overrightarrow{grad}\, f\right)_r \overrightarrow{i_r} + \left(\overrightarrow{grad}\, f\right)_\phi \overrightarrow{i_\phi} + \left(\overrightarrow{grad}\, f\right)_z \overrightarrow{i_z}\right) \cdot \left(dr\,\overrightarrow{i_r} + rd\phi\,\overrightarrow{i_\phi} + dz\,\overrightarrow{i_z}\right)$$

On a donc l'expression ci-dessous pour le gradient de f en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} f = \overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{i_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\overrightarrow{i_\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{i_z}$$

Ce travail nous permet d'écrire l'expression de l'opérateur nabla en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{i_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\overrightarrow{i_\phi} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{i_z}$$

5.1.3. Gradient en coordonnées sphériques

Grâce à la formule ci-dessus, on peut exprimer le gradient dans d'autres systèmes de coordonnées. On exprime la différentielle totale de f dans le système de coordonnées :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \phi}$$

On identifie celle-ci avec la différentielle donnée par le produit scalaire calculé dans l'équation :

$$df = \overrightarrow{grad}\, f \cdot \overrightarrow{dl} = \begin{vmatrix} \left(\overrightarrow{grad}\, f\right)_r \\ \left(\overrightarrow{grad}\, f\right)_\theta \\ \left(\overrightarrow{grad}\, f\right)_\phi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dr \\ rd\phi \\ dz \end{vmatrix}$$

$$df = \left(\left(\overrightarrow{grad}\, f\right)_r \overrightarrow{i_r} + \left(\overrightarrow{grad}\, f\right)_\theta \overrightarrow{i_\theta} + \left(\overrightarrow{grad}\, f\right)_\phi \overrightarrow{i_\phi}\right) \cdot \left(dr\, \overrightarrow{i_r} + rd\theta\, \overrightarrow{i_\theta} + r\sin\theta d\phi\, \overrightarrow{i_\phi}\right)$$

On a donc l'expression ci-dessous pour le gradient de f en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} f = \overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{i_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{i_\theta} + \frac{\partial f}{r\sin\theta \partial\phi}\overrightarrow{i_\phi}$$

Ce travail nous permet d'écrire l'expression de l'opérateur nabla en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{i_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{i_\theta} + \frac{\partial}{r\sin\theta \partial\phi}\overrightarrow{i_\phi}$$

- l'amplitude du gradient en un point est la valeur maximale possible de la dérivé à ce moment ;
- la direction du gradient est la direction dans laquelle la dérivée directionnelle prend son maximum valeur.

Qu'est-ce que cela signifie physiquement ? Supposons que vous soyez sur une colline, pas tout à fait au sommet. Si vous voulez venir jusqu'à la base, il y a de nombreuses directions que vous pouvez prendre. Parmi toutes ces directions possibles, le plus rapide sera celui qui est le plus raide, c'est-à-dire avec une pente maximale

Figure 1 : Représentation de la direction de la pente sur une colline

5.1. Divergence d'un champ vectoriel

Si on effectue le produit scalaire entre l'opérateur nabla et un champ de vecteurs, on calcule la divergence de ce champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes.

$$\mathrm{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Notons que la divergence est un opérateur qui prend un champ vectoriel en entrée et qui renvoie un scalaire.

Remarques

En coordonnées cylindriques par exemple, les vecteurs unitaires de la base peuvent dépendre des coordonnées. On ne peut donc pas forcément les sortir des dérivations, les simplifications sont moindres et l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques est plus compliquée.

5.3. Rotationnel d'un champ vectoriel

Enfin, si on effectue un produit vectoriel entre l'opérateur nabla et un champ de vecteurs, on calcule le rotationnel de ce champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \overrightarrow{i_x} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \overrightarrow{i_y} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \overrightarrow{i_z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i_x} & \overrightarrow{i_y} & \overrightarrow{i_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Notons que le rotationnel est un opérateur qui prend un champ vectoriel en entrée et qui renvoie un vecteur.

Remarque

Au vu de cette expression, déjà compliquée, on imagine la complexité de l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques ou sphériques

Références

[1] Electromagnétisme PCSIP. Krempf - Editions Bréal 2003
[2] Physique Cours compagnon PCSI T. Cousin / H.Perodeau - Editions Dunod 2009
[3] Electromagnétisme 1ère année MPSI-PCSI-PTSI - JM.Brébec - Editions Hachette
[4] Cours de physique, électromagnétisme, 1.Electrostatique et magnétostatique - D.Cordier – Editions Dunod
[5] La physique en fac cours et exercices corrigés - Emile Amzallag - Joseph Cipriani - Jocelyne Ben Aïm - Norbert Piccioli
[6] http://wiki.sillages.info/index.php/Coordonnées_polaires_et_cylindriques
[7] http://epiphys.emn.fr
[8] http://turrier.fr/maths-physique/coordonees/systemes-de-coordonnees.html
[9] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/

Charges et interactions électrostatiques

Séance 2 en distanciel – PHY104 : Electrostatique et Electrocinétique
Ing. Agbassou Guenoukpati, Département du Génie Electrique, ENSI, Université de Lome, Togo

2.1. Objectif du cours

Dans ce cours, vous apprendrez :

- à connaitre l'origine des phénomènes électrostatiques ;
- à comprendre les structures de la matière ;
- à avoir r les notions de base matériaux isolants et conducteurs

2.2. Phénomènes électrostatiques : notion de charge électrique

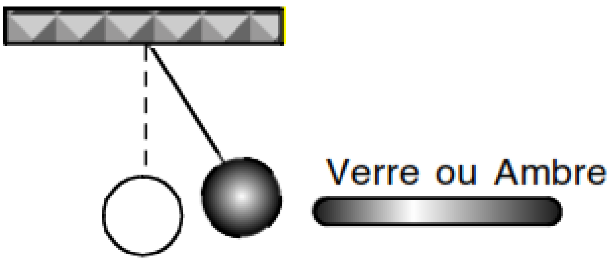
Les phénomènes d'électrisation de la matière se manifestent dans diverses situations de la vie quotidienne. Quiconque a déjà vécu l'expérience désagréable d'une « décharge électrique » lors d'un contact avec un corps étranger connaît (le toucher de la caracasse métallique d'une voiture ayant roulé par temps chaud, contact d'une armoire métallique placée dans une pièce sèche, et sec un effet électrostatique. Une autre manifestation de l'électricité statique consiste en l'attraction de petits corps légers (bouts de papier par ex.) avec des corps frottés (règles, pour continuer sur le même ex.).

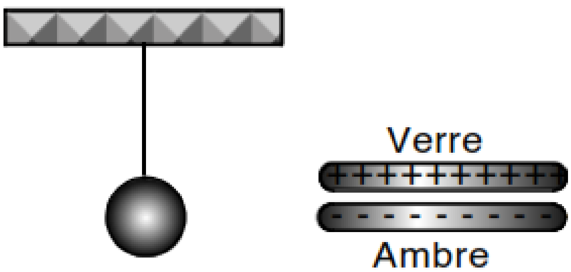
Ce type de phénomène est même rapporté dans l'antiquité par Thalès de Milet, aux alentours de 600 av. J.-C. Il avait observé l'attraction de brindilles de paille par de l'ambre jaune frotté. Le mot électricité, qui désigne l'ensemble de ces manifestations, provient de « elektron », qui signifie ambre en grec. L'étude des phénomènes électriques s'est continuée jusqu'au XIXème siècle, où s'est élaborée la théorie unifiée des phénomènes électriques et magnétiques, appelée électromagnétisme. C'est à cette époque que le mot « statique » est apparu pour désigner les phénomènes faisant l'objet de ce cours.

Pour les mettre en évidence et pour apporter une interprétation cohérente, regardons deux expériences simples

Expérience 1

Prenons une boule (faite de sureau ou de polystyrène, par ex.) et suspendons-la par un fil. Ensuite on approche une tige, de verre ou d'ambre, après l'avoir frottée préalablement : les deux tiges attirent la boule. Par contre, si l'on approche simultanément les deux tiges côte à côte, rien ne se passe.



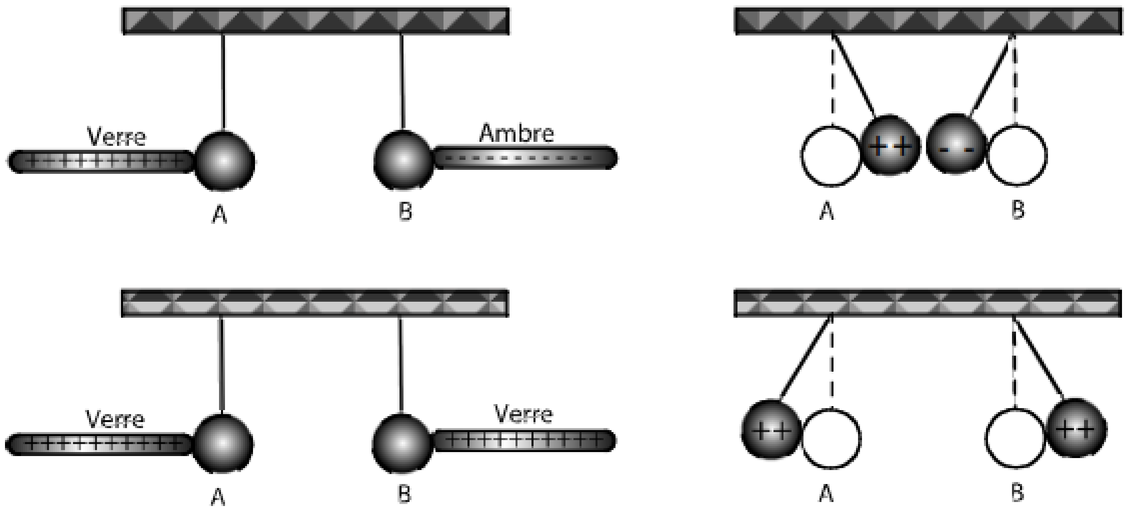


Tout se passe donc comme si chacune des tiges était, depuis son frottement, porteuse d'électricité, mais que celle-ci pouvait se manifester en deux états contraires (car capables d'annuler les effets de l'autre). On a ainsi qualifié arbitrairement de positive l'électricité contenue dans le verre (frotté avec de la soie), et de négative celle portée par l'ambre (idem, ou encore du plastique frotté avec de la fourrure).

Expérience 2

Prenons maintenant deux boules A et B, préalablement mises en contact avec une tige frottée (elles sont « électrisées »), et suspendons-les côte à côte. Si elles ont été mises en contact avec des tiges de matériau différent (ex. A avec du verre frotté et B avec de l'ambre frotté), alors elles s'attirent.

Si, du fait de leur attraction, elles viennent à se toucher, on observe qu'elles perdent alors toute électrisation : elles prennent une position d'équilibre vis-à-vis du leur poids



Par contre, si elles ont été mises en contact toutes deux avec une tige de même matériau, elles se repoussent.

Cette expérience est assez riche. On peut tout d'abord en conclure que deux corps portant une électricité de même nature (soit positive, soit négative) se repoussent, tandis qu'ils s'attirent s'ils portent des électricités contraires. Mais cette expérience nous montre également que cette électricité est capable, non seulement d'agir à distance (répulsion ou attraction), mais également de se déplacer d'un corps à un autre. Mais alors qu'est-ce qui se déplace ? Si l'on suspend les boules à une balance, même très précise, nous sommes incapables de détecter la moindre variation de poids entre le début de l'expérience et le moment où elles sont électrisées. Pourtant, le fait qu'il soit nécessaire qu'il y ait un contact entre deux matériaux pour que l'électricité puisse passer de l'un à l'autre, semble indiquer que cette électricité est portée par de la matière

On explique l'ensemble des effets d'électricité statique par l'existence, au sein de la matière, de particules portant une charge electrique q, positive ou négative, et libres de se déplacer.

Expérience de la goutte d'huile de Millikan (à lire)

C'est Robert A. Millikan qui a vérifié pour la première fois en 1909, grâce à une expérience mettant en jeu des gouttes d'huile, le fait que toute charge électrique Q est quantifiée, c'est à dire qu'elle existe seulement sous forme de multiples d'une charge élémentaire e, indivisible ($Q=Ne$). La particule portant cette charge élémentaire est appelée l'electron.

Dans le système d'unités international, l'unité de la charge électrique est le Coulomb (symbole C). Des phénomènes d'électricité statique mettent en jeu des nanocoulombs (nC) voire des microcoulombs (μC), tandis que l'on peut rencontrer des charges de l'ordre du Coulomb en électrocinétique

L'ensemble des expériences de la physique (et en particulier celles décrites plus haut) ne peuvent s'expliquer que si la charge électrique élémentaire est un invariant : on ne peut ni la détruire ni l'engendrer, et ceci est valable quel que soit le référentiel. C'est ce que l'on décrit par la notion d'invariance relativiste de la charge électrique.

2.3. Structure de la matière

La vision moderne de la matière décrit celle-ci comme étant constituée d'atomes. Ceux-ci sont eux-mêmes constitués d'un noyau (découvert en 1911 par Rutherford) autour duquel « gravite » une sorte de nuage composé d'électrons et portant l'essentiel de la masse. Ces électrons se repoussent les uns les autres mais restent confinés autour du noyau car celui-ci possède une charge électrique positive qui les attire. On attribue cette charge positive à des particules appelées protons Cependant, le noyau atomique ne pourrait rester stable s'il n'était composé que de protons : ceux-ci ont en effet tendance à se repousser mutuellement. Il existe donc une autre sorte de particules, les neutrons découverts en 1932 par Chadwick) portant une charge électrique nulle. Les particules constituant le noyau atomique sont appelées les nucléons

Dans le tableau de Mendeleïev tout élément chimique ${}_{z}^{A}X$ est représenté par la notation nombre A est appelé le nombre de masse : c'est le nombre total de nucléons (protons et neutrons). Le nombre Z est appelé le nombre atomique et est le nombre total de protons constituant le noyau. La charge électrique nucléaire totale est donc $Q = +Z \bullet e$, le cortège électronique possédant alors une charge totale $Q = -Z \bullet e$, assurant ainsi la neutralité électrique d'un atome. Le tableau 1 presente les valeurs des charges électriques et des masses des constituants atomiques dans le Système International.

Tableau1 : Caractéristiques des particules élémentaires

Particules	***Symbole***	***Masse (kg)***	***Charge électrique (C)***
Électron	e^-	$9{,}1.10^{-31}$	$-1{,}6.10^{-19}$
Proton	p	$1{,}672.10^{-27}$	$1{,}6.10^{-19}$
Neutron	n	$1{,}674.10^{-27}$	0

Comme on peut le remarquer, même une charge de l'ordre du Coulomb (ce qui est énorme), correspondant à environ 10^{18} électrons, ne produit qu'un accroissement de poids de l'ordre de 10^{-12} kg c'est effectivement imperceptible.

Si les électrons sont bien des particules quasi-ponctuelles, les neutrons et les protons en revanche ont une taille non nulle (inférieure à 10^{-15} m). Il s'avère qu'ils sont eux-mêmes constitués de quarks, qui sont aujourd'hui, avec les électrons, les vraies briques élémentaires de la matière. Les protons ainsi que les neutrons forment ainsi une classe de particules appelée les baryons

- la force nucléaire faible, responsable de la cohésion des baryons (quarks-quarks) ;
- la force nucléaire forte, responsable de la cohésion du noyau (protons-neutrons) ;
- la force électromagnétique, responsable de la cohésion de l'atome (électrons-nucléons) ;
- la force gravitationnelle, responsable de la structure à grande échelle de l'univers (cohésion des corps astrophysiques, cohésion des systèmes planétaires, des galaxies, des amas galactiques, moteur de la cosmologie).

2.3.1. Les divers états de la matière

La cohésion de la matière est due à l'interaction entre ses constituants, interaction mettant en jeu une énergie de liaison. Or, chaque constituant (atome ou molécule) possède lui-même de l'énergie cinétique liée à sa température (énergie d'agitation thermique). La rigidité d'un état particulier de la matière dépend donc de l'importance relative de ces deux énergies (cinétique et liaison)

Si l'on prend un gaz constitué d'atomes (ou de molécules) neutres, alors l'interaction entre deux constituants est assez faible : elle ne se produit que lorsqu'ils sont assez proches pour qu'il y ait répulsion entre les électrons périphériques. Ainsi, chaque atome est relativement libre de se déplacer dans l'espace, au gré des « collisions » avec d'autres atomes.

Si l'on refroidit ce gaz, certaines liaisons électrostatiques qui étaient négligeables auparavant peuvent devenir opérantes et l'on obtient alors un liquide. Si l'on chauffe ce gaz, de l'énergie est fournie à ses constituants, les molécules se brisent et, si l'on continue à chauffer, on peut même libérer un ou plusieurs électrons périphériques des atomes, produisant ainsi un gaz d'ions ou plasma.

Dans un solide au contraire, les liaisons entre chaque atome sont beaucoup plus fortes et les atomes ne bougent quasiment pas, formant un cristal. La force de cette cohésion dépend beaucoup d'un solide à l'autre. Ainsi, elle est très puissante si les atomes mettent en commun leur cortège électronique (liaison covalente comme pour le diamant et liaison métallique, comme pour le Cuivre) et beaucoup plus faible si les cortèges électroniques de chaque atome restent intouchés (liaison ionique, comme pour le sel)

Enfin, la matière molle (caoutchouc, plastiques, textiles, mousses) possède une hiérarchie du point de vue de sa cohésion : elle est constituée d'éléments « solides » (macromolécules liées par des liaisons covalentes) interagissant entre eux par des liaisons ioniques (électrostatiques).

2.3.2. Matériaux isolants et matériaux conducteurs

Un matériau est ainsi constitué d'un grand nombre de charges électriques, mais celles-ci sont toutes compensées (même nombre d'électrons et de protons). Aux températures usuelles, la matière est électriquement neutre. En conséquence, lorsque des effets d'électricité statique se produisent, cela signifie qu'il y a eu un déplacement de charges, d'un matériau vers un autre : c'est ce que l'on appelle l'électrisation d'un corps. Ce sont ces charges, en excès ou en manque, en tout cas non compensées, qui sont responsables des effets électriques sur ce corps (ex : baguette frottée).

Un matériau est dit conducteur parfait si, lorsqu'il devient électrisé, les porteurs de charge non compensés peuvent se déplacer librement dans tout le volume occupé par le matériau

Ce sera un isolant (ou diélectrique) parfait si les porteurs de charge non compensés ne peuvent se déplacer librement et restent localisés à l'endroit où ils ont été déposés

Un matériau quelconque se situe évidemment quelque part entre ces deux états extrêmes. Cette propriété de conduction de l'électricité sera abordée plus loin, dans le Chapitre sur l'électrocinétique

Refaisons une expérience d'électricité statique : prenons une baguette métallique par la main et frottons-la avec un chiffon. Cela ne marchera pas, la baguette ne sera pas électrisée. Pourquoi ? Etant nous-mêmes d'assez bons conducteurs, les charges électriques arrachées au chiffon et transférées à la baguette sont ensuite transférées sur nous et l'on ne verra plus d'effet électrique particulier au niveau de la baguette.
Pour que cette expérience marche, il est nécessaire d'isoler électriquement la baguette (en la tenant avec un matériau diélectrique).

<u>Références</u>

[1] Electromagnétisme PCSIP. Krempf - Editions Bréal 2003
[2] Physique Cours compagnon PCSI T. Cousin / H.Perodeau - Editions Dunod 2009
[3] Electromagnétisme 1ère année MPSI-PCSI-PTSI - JM.Brébec - Editions Hachette
[4] Cours de physique, électromagnétisme, 1.Electrostatique et magnétostatique - D.Cordier – Editions Dunod
[5] La physique en fac cours et exercices corrigés - Emile Amzallag - Joseph Cipriani - Jocelyne Ben Aïm - Norbert Piccioli
[6] http://wiki.sillages.info/index.php/Coordonnées_polaires_et_cylindriques
[7] http://epiphys.emn.fr
[8] http://turrier.fr/maths-physique/coordonees/systemes-de-coordonnees.html
[9] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/
[10] https://www.youtube.com/watch?v=xwDXOw8BEtI
[11] https://www.youtube.com/watch?v=KDwc0Q5beAU

FORCE ET CHAMP ELECTROSTATIQUE

Séance 3 en Distanciel – PHY104 : Electrostatique et Electrocinétique
Ing. Agbassou Guenoukpati, Département du Génie Electrique, ENSI, Université de Lome, Togo

3.1.Objectif du cours

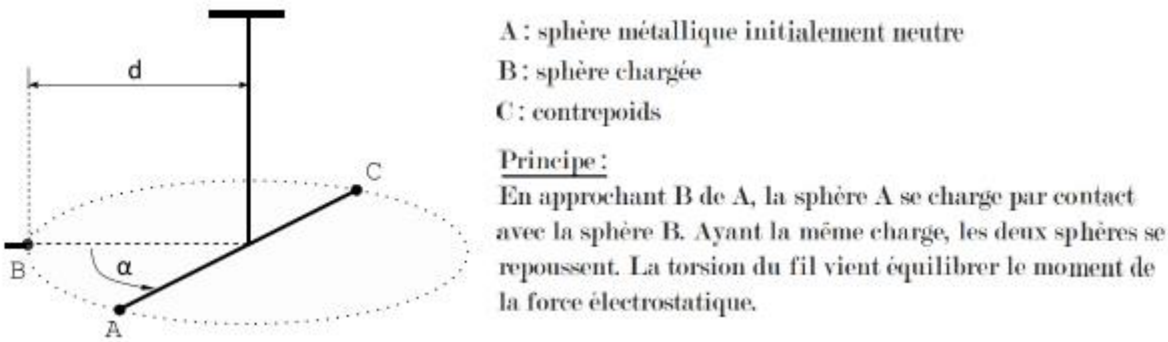
Au cours de cette presentation, vous apprendrez ce qui suit :

- Appliquer le théorème de Coulomb ;
- Calculer le champ électrostatique pour des distributions de charges discrète et continues ;
- Appliquer le principe de superposition

3.2.Force et champ électrostatiques

3.2.1. La force de Coulomb

Charles Auguste de Coulomb (1736-1806) a effectué une série de mesures (à l'aide d'une balance de torsion) qui lui ont permis de déterminer avec un certain degré de précision les propriétés de la force électrostatique exercée par une charge ponctuelle q_1 sur une autre charge ponctuelle q_2



1. La force est radiale, c'est à dire dirigée selon la droite qui joint les deux charges ;
2. Elle est proportionnelle au produit des charges : attractive si elles sont de signe opposé, répulsive sinon ;
3. Enfin, elle varie comme l'inverse du carré de la distance entre les deux charges.

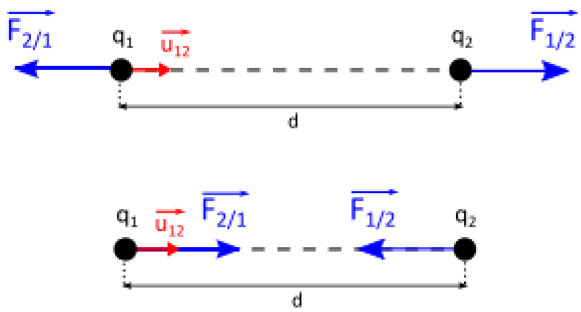


Figure 1

L'expression mathématique moderne de la force de Coulomb et traduisant les propriétés ci-dessus est la suivante

$$F_{1/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}\vec{u}$$

où la constante multiplicative vaut $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ SI (N m^2C^{-2}). La constante ε_0 rôle particulier et est appelée la permittivité électrique du vide (unités : Farad/m).

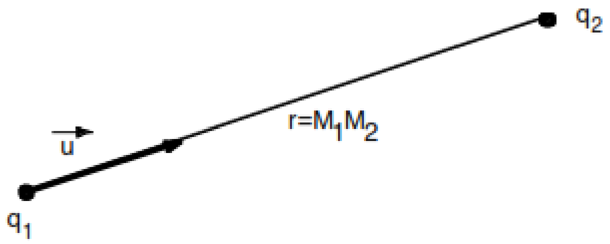


Figure 2

Remarques

1. Cette expression n'est valable que pour des charges immobiles (approximation de l'électrostatique) et dans le vide. Cette loi est la base même de toute l'électrostatique.
2. Cette force obéit au principe d'Action et de Réaction de la mécanique classique.
3. A part la valeur numérique de la constante K, cette loi a exactement les mêmes propriétés vectorielles que la force de la gravitation (loi de Newton). Il ne sera donc pas étonnant de trouver des similitudes entre ces deux lois.

Ordres de grandeur

- Quel est le rapport entre la force d'attraction gravitationnelle et la répulsion coulombienne entre deux électrons ?

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{Gm_e^2} \approx 4 \cdot 10^{42}$$

- Quelle est la force de répulsion coulombienne entre deux charges de 1 C situées à 1 km ?

$$\frac{F_e}{g} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(10^3\right)^2}\frac{1}{10} \approx 10^3 kg$$

C'est une force équivalente au poids exercé par une tonne !

3.2.2. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

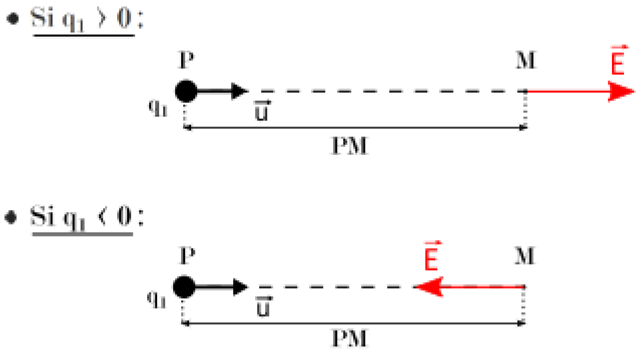
Soit une charge q_1 située en un point O de l'espace, exerçant une force électrostatique sur une autre charge q_2 située en un point M. L'expression de cette force est donnée par la loi de Coulomb ci-dessus. Mais comme pour l'attraction gravitationnelle, on peut la mettre sous une forme plus intéressante,

$$F_{1/2} = q_2 \overrightarrow{E_1}(M)$$

avec

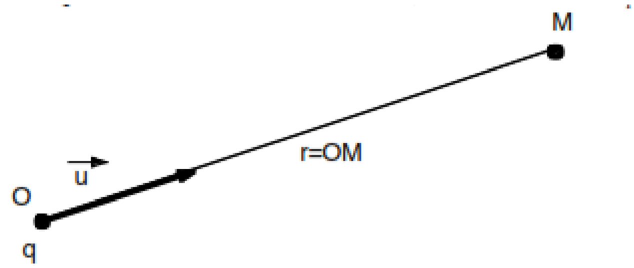
$$\overrightarrow{E_1}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}$$

L'intérêt de cette séparation vient du fait que l'on distingue clairement ce qui dépend uniquement de la particule qui subit la force (ici, c'est sa charge q_2, pour la gravité c'est sa masse), de ce qui ne dépend que d'une source extérieure, ici le vecteur $\overrightarrow{E_1}(M)$.



Définition : *Une particule de charge q située en O crée en tout point M de l'espace distinct de O un champ vectoriel appelé champ électrostatique. L'unité est le Volt/mètre (symbole V/m).*

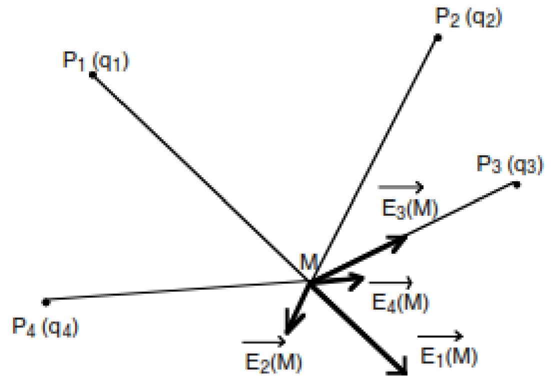
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$$



Cette façon de procéder découle de (ou implique) une nouvelle vision de l'espace : les particules chargées se déplacent maintenant dans un espace où existe (se trouve défini) un champ vectoriel. Elles subissent alors une force en fonction de la valeur du champ au lieu où elle se trouve.

3.3.Champ créé par un ensemble de charges

On considère maintenant n particules de charges électriques q_i situées en des points P_i : quel est le champ électrostatique créé par cet ensemble de charges en un point M ?



La réponse n'est absolument pas évidente car l'on pourrait penser que la présence du champ créé par des particules voisines modifie celui créé par une particule. En fait, il n'en est rien et l'expérience montre que la force totale subie par une charge q située en M est simplement la superposition des forces élémentaires

$$\vec{F}(M) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u_i} = q \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u_i} = q\vec{E}(M)$$

Où $r_i = P_iM$, $\overrightarrow{P_iM} = P_iM\vec{u_i}$. Il en résulte donc

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u_i}$$

est donc le champ électrostatique créé par un ensemble discret de charges.

Cette propriété de superposition des effets électrostatiques est un fait d'expérience et énoncé comme le **principe de superposition** (comme tout principe, il n'est pas démontré).

En pratique, cette expression est rarement utilisable puisque nous sommes la plupart du temps amenés à considérer des matériaux comportant un nombre gigantesque de particules. C'est simplement dû au fait que l'on ne considère que des échelles spatiales très grandes devant les distances inter-particulaires, perdant ainsi toute possibilité de distinguer une particule de l'autre. Il est dans ce cas plus habile d'utiliser des distributions continues de charges.

Références

[1] Electromagnétisme PCSIP. Krempf - Editions Bréal 2003
[2] Physique Cours compagnon PCSI T. Cousin / H.Perodeau - Editions Dunod 2009
[3] Electromagnétisme 1ère année MPSI-PCSI-PTSI - JM.Brébec - Editions Hachette
[4] Cours de physique, électromagnétisme, 1.Electrostatique et magnétostatique - D.Cordier – Editions Dunod
[5] La physique en fac cours et exercices corrigés - Emile Amzallag - Joseph Cipriani - Jocelyne Ben Aïm - Norbert Piccioli
[6] http://wiki.sillages.info/index.php/Coordonnées_polaires_et_cylindriques
[7] http://epiphys.emn.fr
[8] http://turrier.fr/maths-physique/coordonees/systemes-de-coordonnees.html
[9] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/

Symétries et invariances

Séance 4 en Distanciel – PHY104 : Electrostatique et Electrocinétique
Ing. Agbassou Guenoukpati, Département du Génie Electrique, ENSI, Université de Lome, Togo

Objectif du cours

Au cours de cette presentation, vous apprendrez ce qui suit :

- Definir les distributions de charges (linéique, surfacique et volumique)
- Enoncer et appliquer le principe de Curie ;
- Utiliser les propriétés de symétrie et invariance du champ électrostatique.

4.1. Expression générale d'un champ électrostatique

Comme nous avons pu le voir plus haut, il ne semble pas évident de calculer des champs électriques. En effet, selon la distribution continue de charges qui est à la source du champ, apparaît dans le calcul du champ électrique des intégrales doubles ou triples. De plus le champ électrique en un point de l'espace possède plusieurs composantes et dépend de plusieurs paramètres :

Système de coordonnées	Expression du champ electrique
cartésiennes :	$\vec{E}(M) = E_x(x,y,z)\overrightarrow{e_x} + E_y(x,y,z)\overrightarrow{e_y} + E_z(x,y,z)\overrightarrow{e_z}$
cylindriques :	$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\overrightarrow{e_r} + E_\theta(r,\theta,z)\overrightarrow{e_\theta} + E_z(r,\theta,z)\overrightarrow{e_z}$
sphériques :	$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,\phi)\overrightarrow{e_r} + E_\theta(r,\theta,\phi)\overrightarrow{e_\theta} + E_\phi(r,\theta,\phi)\overrightarrow{e_\phi}$

La considération des symétries et invariances d'une distribution va permettre de simplifier cette expression de $\vec{E}(M)$ et donc de simplifier le calcul d'intégrales

4.2. Invariances

Les invariances vont nous permettre **d'éliminer des coordonnées dont dépend le champ électrique** en un point M. Il y a invariance lorsque la vue de la distribution est identique en un point M et un point M' (M' obtenu par translation ou rotation depuis M), ou bien si le champ électrique calculé en M et en M' est identique.

4.2.1. Invariance par translation selon un axe

Si une distribution admet un axe suivant lequel une translation ne change rien physiquement à celle-ci (on voit depuis un point M et depuis un point M', image par translation de M, la même distribution) alors le champ électrique ne doit pas non plus subir de changement. Si cet axe est Oz (systèmes de coordonnées cartésiennes ou polaires), alors les composantes du champ électrique ne dépendront pas de la coordonnée z :

$$\vec{E}(M) = E_x(x,y)\overrightarrow{e_x} + E_y(x,y)\overrightarrow{e_y} + E_z(x,y)\overrightarrow{e_z}$$

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta)\overrightarrow{e_r} + E_\theta(r,\theta)\overrightarrow{e_\theta} + E_z(r,\theta)\overrightarrow{e_z}$$

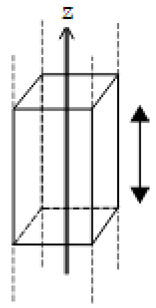


Figure 1 : Invariance par translation

4.2.2. Invariance par rotation autour d'un axe

Si la distribution admet un axe suivant lequel une rotation ne change rien physiquement à celle-ci, alors le champ électrique ne doit pas non plus subir de changement. Il ne dépendra pas de l'angle de rotation autour de cet axe, les composantes du champ électrique ne dépendront pas de la coordonnée θ (systèmes de coordonnées cylindriques ou sphériques)

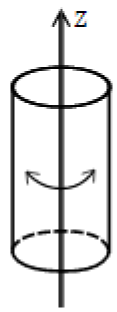


Figure 2 : Invariance par rotation

$$\vec{E}(M) = E_r(r,z)\vec{e_r} + E_\theta(r,z)\vec{e_\theta} + E_z(r,z)\vec{e_z}$$

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\phi)\vec{e_r} + E_\theta(r,\phi)\vec{e_\theta} + E_\phi(r,\phi)\vec{e_\phi}$$

4.2.3. Cas de la sphère

Dans une distribution sphérique, il y a invariance par rotations autour du point O, centre de la sphère, on s'affranchit des coordonnées θ et ϕ. Mais cette distribution n'est pas invariante par translation suivant r, car on ne voit pas la même distribution en se déplaçant suivant un rayon : si on prend un point M à l'intérieur de la sphère, il est entouré de charges alors qu'un point M' situé sur le même rayon mais en périphérie de la sphère ne voit que des charges en dessous de lui. En dehors de la sphère, le champ électrique dépendant de la distance aux charges, celui-ci ne serait pas le même à proximité de la sphère et très loin d'elle.

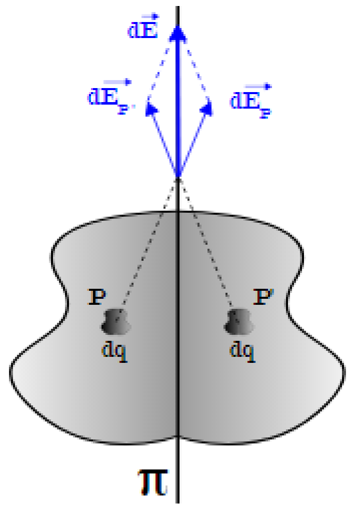
4.3. Symétries et antisymétries

Les symétries et antisymétries vont nous permettre d'éliminer des composantes du champ électrique. En effet, un principe appelé principe de Curie dit que les symétries des causes doivent se retrouver dans les effets : la symétrie de la distribution de charge se retrouvera dans l'expression du champ électrique.

4.3.1. Plan de symétrie

Cas général

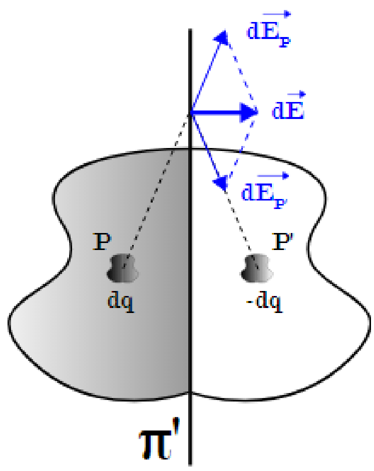
Si la distribution admet un plan de symétrie Π alors le champ appartient nécessairement à ce plan. En effet, l'élément infinitésimal de la distribution situé en P qui porte la charge dq créé en M le champ $d\vec{E_p}$ et son symétrique par rapport à Π, situé en P' qui porte aussi la charge dq créé en M le champ $d\vec{E_{p'}}$. La somme de $d\vec{E_p}$ et de $d\vec{E_{p'}}$ donne un vecteur $d\vec{E}$ contenu dans Π.



4.3.2. Plan d'antisymétrie

Cas général

Si la distribution admet un plan de d'antisymétrie Π' alors le champ est nécessairement orthogonal à ce plan. En effet, l'élément infinitésimal de la distribution situé en P qui porte la charge dq créé en M le champ $d\vec{E_p}$ et son symétrique par rapport à Π', situé en P' qui porte aussi la charge $-dq$ créé en M le champ $d\vec{E_{p'}}$. La somme de $d\vec{E_p}$ et de $d\vec{E_{p'}}$ donne un vecteur $d\vec{E}$ orthogonal dans Π'.



4.4. Propriétés de symétrie du champ électrostatique

Principe de Curie : lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

Du fait que le champ soit un effet créé par une distribution de charges, il contient des informations sur les causes qui lui ont donné origine. Ainsi, si l'on connaît les propriétés de symétrie d'une distribution de charges, on pourra connaître celles du champ électrostatique associé. Ces propriétés sont fondamentales car elles permettent de simplifier considérablement le calcul du champ électrostatique. Dans une espace homogène et isotrope, si l'on fait subir une transformation géométrique à un système physique (ex : ensemble de particules, distribution de charges) susceptible de créer certains effets (forces, champs), alors ces effets subissent les mêmes transformations. Si un système physique S possède un certain degré de symétrie, on pourra alors déduire les effets créés par ce système en un point à partir des effets en un autre point.

<u>Références</u>

[1] Electromagnétisme PCSIP. Krempf - Editions Bréal 2003
[2] Physique Cours compagnon PCSI T. Cousin / H.Perodeau - Editions Dunod 2009
[3] Electromagnétisme 1ère année MPSI-PCSI-PTSI - JM.Brébec - Editions Hachette
[4] Cours de physique, électromagnétisme, 1.Electrostatique et magnétostatique - D.Cordier – Editions Dunod
[5] La physique en fac cours et exercices corrigés - Emile Amzallag - Joseph Cipriani - Jocelyne Ben Aïm - Norbert Piccioli
[6] http://wiki.sillages.info/index.php/Coordonnées_polaires_et_cylindriques
[7] http://epiphys.emn.fr
[8] http://turrier.fr/maths-physique/coordonees/systemes-de-coordonnees.html
[9] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/
[10] https://www.youtube.com/watch?v=FC0roB0OvtE

Circulation du champ électrostatique

Séance 6 en Distanciel – PHY104 : Electrostatique et Electrocinétique

Ing. Agbassou Guenoukpati, Département du Génie Electrique, ENSI, Université de Lome, Togo

6.1. Objectif du cours

- Au cours de cette présentation, vous apprendrez ce qui suit :
- Notion d'invariances par translation et rotation ;
- Invariances sur la distribution fil infini chargé ;
- Symétrie et conséquences

6.2. Notion de potentiel électrostatique

On va démontrer ci-dessous qu'il existe un scalaire V , appelé potentiel électrostatique, définit dans tout l'espace et qui permet de reconstruire le champ électrostatique $\vec{E}$. Outre une commodité de calcul (il est plus facile d'additionner deux scalaires que deux vecteurs), l'existence d'un tel scalaire traduit des propriétés importantes du champ électrostatique. Mais tout d'abord, est-il possible d'obtenir un champ de vecteurs à partir d'un champ scalaire.

Prenons un scalaire $V(M)$ défini en tout point M de l'espace (on dit un champ scalaire). Une variation dV de ce champ lorsqu'on passe d'un point M à un point M' infiniment proche est alors fourni par la différentielle totale

$$dV(M) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i = \overrightarrow{grad}V \cdot \overrightarrow{dOM}$$

où le vecteur $\overrightarrow{gradV}$ est le gradient du champ scalaire V et constitue un champ de vecteurs défini partout. Ses composantes dans un système de coordonnées donné sont obtenues très simplement. Par exemple, en coordonnées cartésiennes, on a $\overrightarrow{dOM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$$dV(M) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

d'où l'expression suivante pour le gradient en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

	cartésiennes	cylindriques	sphériques
	$\overrightarrow{grad}V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{grad}V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{grad}V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$

Un déplacement $dOM = MM'$ le long d'une courbe (ou surface) définie par $V = cte$ correspond à $dV = 0$, ce qui signifie que $\overrightarrow{grad}V$ est un vecteur qui est perpendiculaire en tout point à cette courbe (ou surface).

Par ailleurs, plus les composantes du gradient sont élevées et plus il y a une variation rapide de V. Or, c'est bien ce qui semble se produire, par exemple, au voisinage d'une charge électrique q : les lignes de champ électrostatique sont des droites qui convergent $(q \prec 0)$ ou divergent $(q \succ 0)$ toutes vers la charge. Il est donc tentant d'associer le champ E (vecteur) au gradient d'une fonction scalaire V.

En fait, depuis Newton (1687) et sa loi de gravitation universelle, de nombreux physiciens et mathématiciens s'étaient penché sur les propriétés de cette force radiale en $1/r^2$. En particulier Lagrange avait ainsi introduit en 1777 une fonction scalaire appelée potentiel, plus « fondamentale » puisque la force en dérive. C'est Poisson qui a introduit le potentiel électrostatique en 1813, par analogie avec la loi de Newton.

Définition : le potentiel électrostatique V est relié au champ électrostatique $\vec{E}$ par

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

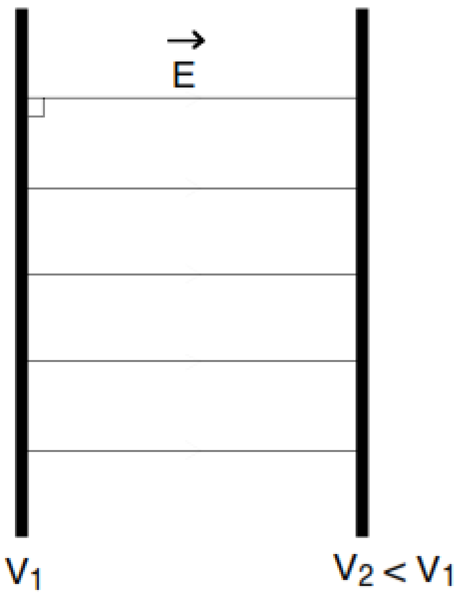
Remarques

Le signe moins est une convention liée à celle adoptée pour l'énergie électrostatique.

La conséquence de cette définition du potentiel est $dV(M) = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dOM}$ pour un déplacement infinitésimal quelconque

Définition : la circulation du champ électrostatique le long d'une courbe allant de A vers B est

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int dV = V(A) - V(B)$$



Remarques :

- Cette circulation est conservative : elle ne dépend pas du chemin suivi
- La circulation du champ électrostatique sur une courbe fermée (on retourne en A) est nulle. On verra plus loin que ceci est d'une grande importance en électrocinétique
- D'après la relation ci-dessus, le long d'une ligne de champ, c'est à dire pour $\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} \succ 0$ on $V(A) \succ V(B)$
- Les lignes de champ électrostatiques vont dans le sens des potentiels décroissants.

6.3. Potentiel créé par une charge ponctuelle

Nous venons de voir l'interprétation géométrique du gradient d'une fonction scalaire et le lien avec la notion de circulation. Mais nous n'avons pas encore prouvé que le champ électrostatique pouvait effectivement se déduire d'un potentiel V. Considérons donc une charge ponctuelle q située en un point O. En un point M de l'espace, cette charge crée un champ électrostatique $\vec{E}$. Le potentiel électrostatique est alors donné par :

$$dV(M) = -\vec{E}\cdot d\overrightarrow{OM} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{dr}}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

c'est à dire, après intégration suivant r,

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + V_0$$

La constante d'intégration est en général choisie nulle (le potentiel s'annule à l'infini). L'unité du potentiel est le Volt. En unités du système international (SI) le Volt vaut

$$[V] = [EL] = ML^2T^{-3}I^{-1}$$

Si l'on veut se former une représentation du potentiel, on peut remarquer qu'il mesure le degré d'électrification d'un conducteur. Il y a en fait une analogie formelle entre d'un côté, potentiel V et température T d'un corps, et de l'autre, entre charge Q et chaleur déposée dans ce corps

6.4. Potentiel créé par un ensemble de charges

Considérons maintenant un ensemble de n charges ponctuelles q_i l'espace. En vertu du principe de superposition, le champ électrostatique total $\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{E_i}$ est somme vectorielle des champs $\overrightarrow{E_i}$ réés par chaque charge q_i On peut donc définir un potentiel électrostatique total $V(M) = \sum_{i=1}^{n} V_i(M)$ tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ soit encore vérifié. En utilisant l'expression du potentiel créé par une charge unique, on obtient

$$V(M)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}+V_0$$

où r_i est la distance entre la charge q_i et le point M. Lorsqu'on s'intéresse à des échelles spatiales qui sont très grandes par rapport aux distances entre les charges q_i, on peut faire un passage à la limite continue et remplacer la somme discrète par une intégral $\sum_i q_i(P_i)\to\int dq(P)$ ou P est un point courant autour duquel se trouve une charge « élémentaire » dq. Le potentiel électrostatique créé par une distribution de charges continue est alors

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}+V_0$$

où $r = PM$ est la distance entre le point M et un point P quelconque de la distribution de charges

Remarques :

Pour des distributions de charges linéique λ, surfacique s et volumique ϱ, on obtient Respectivement

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\lambda dl}{r}+V_0$$

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\frac{\sigma dS}{r}+V_0$$

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho dS}{r}+V_0$$

Noter que l'on ne peut pas évaluer le potentiel (ni le champ d'ailleurs) sur une particule en utilisant l'expression discrète (c'est à dire pour $r_i = 0$). Par contre, on peut le faire avec une distribution continue : c'est dû au fait que $\frac{dq}{r}$ converge lorsque $r_i \to 0$

Références

[1] Electromagnétisme PCSIP. Krempf - Editions Bréal 2003
[2] Physique Cours compagnon PCSI T. Cousin / H.Perodeau - Editions Dunod 2009
[3] Electromagnétisme 1ère année MPSI-PCSI-PTSI - JM.Brébec - Editions Hachette
[4] Cours de physique, électromagnétisme, 1.Electrostatique et magnétostatique - D.Cordier – Editions Dunod
[5] La physique en fac cours et exercices corrigés - Emile Amzallag - Joseph Cipriani - Jocelyne Ben Aïm - Norbert Piccioli
[6] http://wiki.sillages.info/index.php/Coordonnées_polaires_et_cylindriques
[7] http://epiphys.emn.fr
[8] http://turrier.fr/maths-physique/coordonees/systemes-de-coordonnees.html
[9] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/
[10] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/
[11] https://www.physagreg.fr/electromagnetisme-11-champ-electrostatique.php
[12] https://youtu.be/zitm54XT6i0

Application de la loi de Gauss

Séance 5 en Distanciel – PHY104 : Electrostatique et Electrocinétique

Ing. Agbassou Guenoukpati, Département du Génie Electrique, ENSI, Université de Lomé, Togo

5.1.Objectif du cours

- Au cours de cette présentation, vous apprendrez ce qui suit :
- Notion d'invariances par translation et rotation ;
- Invariances sur la distribution fil infini chargé ;
- Symétrie et conséquences

5.2.Flux du Champ électrostatique

Dans cette conférence, nous présentons la "loi de Gauss" qui se trouve être équivalente à la loi de Coulomb. Cependant, Dans certaines circonstances, elle s'avère beaucoup plus facile à traiter que la loi de Coulomb. Avant En vertu de la loi, nous allons introduire le concept de "flux" d'un champ électrique. Comme cela a été mentionné au cours de notre discussion sur le calcul vectoriel, le concept de flux découle de la dynamique des fluides. Si nous avons un s'écoulant sur une surface, le flux de fluide à travers la surface ne dépend pas seulement de la vitesse du fluide, elle dépend également de l'ampleur de la zone et de l'orientation de la zone par rapport à la direction de la vitesse Nous avions vu précédemment qu'une surface infinitésimale peut être considérée comme un vecteur dont la grandeur est égale à l'aire et à la direction de la normale à la surface vers l'extérieur.

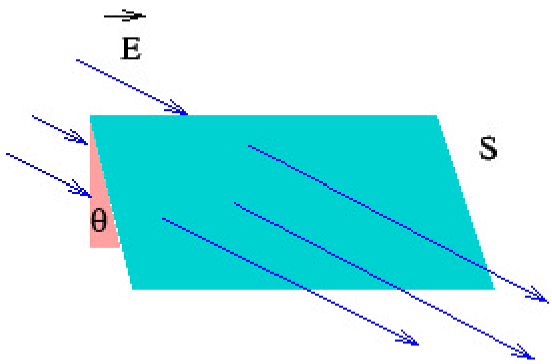


Figure 1

Dans la figure ci-dessus, nous voyons des lignes de champ électrique traversant une surface S, la direction du champ électrique faisant un angle θ avec la normale à la surface. Le flux du champ électrique est défini comme suit.

$$\phi_S = \int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Pour effectuer la somme, il faut connaître le champ électrique en chaque point de la surface et l'angle que fait le champ avec la normale extérieure à ce point. Si le champ électrique est constant, le flux devient

$$\phi_S = \int_S E \cdot \cos(\theta) \cdot dS$$

5.3. Notion d'angle solide

Nous connaissons le concept d'angle en deux dimensions. En gros, un angle est une mesure de la divergence ou de l'écart entre deux lignes droites. Supposons que les lignes se rencontrent au point O. Avec O comme centre, si nous traçons un arc de cercle de rayon R, les deux lignes droites contiendront un arc de cercle la mesure de l'angle (en mesure radian) est alors le rapport de la longueur L de l'arc sur le rayon du cercle

$$\theta = \frac{L}{R}$$

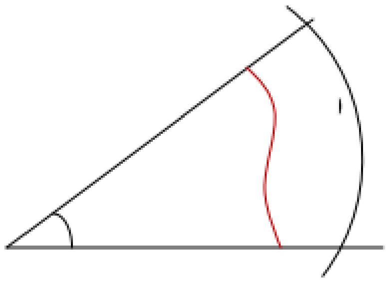


Figure 2

Notez que l'arc de cercle se trouve dans la direction transversale des deux lignes. Supposons, à la place, que nous tracions une courbe arbitraire (indiquée en rouge) qui coupe les deux lignes, la longueur L devant être prise le long de la projection transversale de cette courbe. Notez que, étant le rapport de deux longueurs, un angle est sans dimension. Cependant, nous le mesurons conventionnellement en termes d'unité qui peut être un degré, un radian ou un grade.

Le concept d'angle solide est une simple extension de ce concept en trois dimensions. L'angle solide est l'angle qu'une zone arbitraire forme en un point. Il s'agit de décrire un cône circulaire droit de longueur R autour du point P. Le rapport entre la surface transversale interceptée par le cône et le carré de la distance à partir du point P est une mesure de l'angle solide. Comme dans le cas d'un angle en deux dimensions, nous devons prendre une zone transversale. Comme l'angle ordinaire, l'angle solide est sans dimension, mais il est mesuré dans une unité appelée "stéradian

Définition : l'angle solide élémentaire dΩ, délimité par un cône coupant un élément de surface élémentaire dS située à une distance r de son sommet O vaut

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$

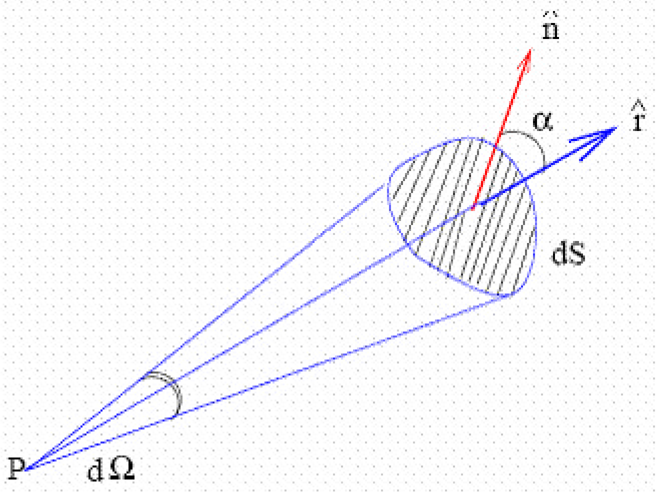


Figure 3

En coordonnées sphériques, la surface élémentaire à r constant vaut

$$dS = r^2 \sin(\theta) d\theta \cdot d\varphi$$

L'angle solide élémentaire s'écrit alors

$$d\Omega = \sin(\theta) d\theta \cdot d\varphi$$

Ainsi, l'angle solide délimité par un cône de révolution, d'angle α au sommet

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin(\theta) d\theta$$

Le demi-espace, engendré avec $\alpha = \pi/2$ radians correspond donc à un angle solide de 2π stéradians, tandis que l'espace entier correspond à un angle solide de 4π pour $\alpha = \pi$

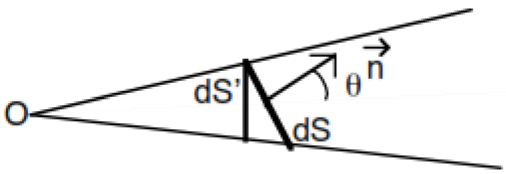


Figure 4

D'une façon générale, le cône (ou le faisceau lumineux de l'exemple ci-dessus) peut intercepter une surface quelconque, dont la normale $\vec{n}$ fait un angle θ□ avec la génératrice de vecteur directeur $\vec{u}$ L'angle solide élémentaire est alors défini par

$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{dS} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS\vec{n} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS \cdot \cos(\theta)}{r^2} = \frac{dS'}{r^2}$$

où dS' est la surface effective (qui, par exemple, serait « vue » par un observateur situé en O).

5.4. Théorème de Gauss

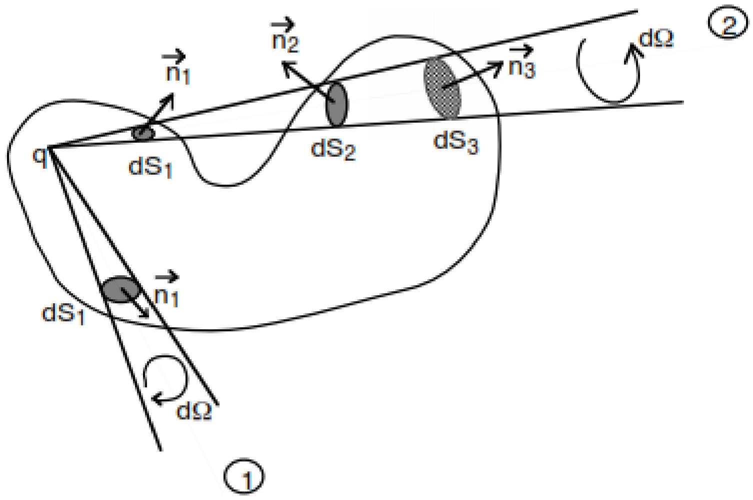
On considère maintenant une charge ponctuelle q située en un point O de l'espace. Le flux du champ électrostatique $\vec{E}$, créé par cette charge, à travers une surface élémentaire quelconque orientée est par définition

$$d\phi = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = E\vec{n} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Par convention, on oriente le vecteur unitaire □ , normal à la surface dS, vers l'extérieur, c'est à dire dans la direction qui s'éloigne de la charge q. Ainsi, pour q>0, le champ □ est dirigé dans le même sens que □ et l'on obtient un flux positif. A partir de l'expression du champ créé par une charge ponctuelle, on obtient alors

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{r^2} dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

c'est à dire un flux dépendant directement de l'angle solide sous lequel est vue la surface et non de sa distance r (notez bien que dΩ>0, q pouvant être positif ou négatif). Ce résultat est une simple conséquence de la décroissance du champ électrostatique en 1/ □ : on aurait le même genre de résultat avec le champ gravitationnel.



Que se passe-t-il lorsqu'on s'intéresse au flux total à travers une surface (quelconque) fermée ? Prenons le cas illustré dans la figure ci-dessous. On a une charge q située à l'intérieur de la surface S (enfermant ainsi un volume V), surface orientée (en chaque point de S, le vecteur est dirigé vers l'extérieur). Pour le rayon 1, on a simplement

$$d\phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

mais le rayon 2 traverse plusieurs fois la surface, avec des directions différentes. On aura alors une contribution au flux

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{n_1}}{r_1^2}dS_1 + \frac{\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{n_2}}{r_2^2}dS_2 + \frac{\overrightarrow{u_3}\cdot\overrightarrow{n_3}}{r_3^2}dS_3\right)$$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(d\Omega - d\Omega + d\Omega\right)$$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

Ce résultat est général puisque, la charge se trouvant à l'intérieur de S, un rayon dans une direction donnée va toujours traverser S un nombre impair de fois. En intégrant alors sur toutes les directions (c'est à dire sur les 4π stéradians), on obtient un flux total. En vertu du principe de superposition, ce résultat se généralise aisément à un ensemble quelconque de charges.

$$\oiint \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Théorème de Gauss :

le flux du champ électrique à travers une surface fermée orientée quelconque est égal, dans le vide, à $1/\varepsilon_0$ fois la charge électrique contenue à l'intérieur de cette surface

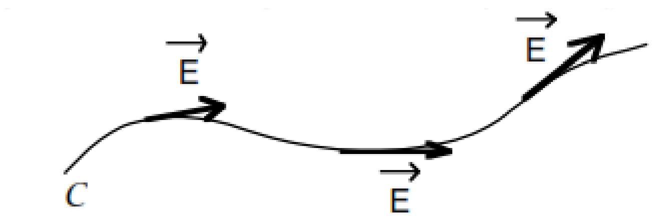
$$\oiint \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Remarques

1. Du point de vue physique, le théorème de Gauss fournit le lien entre le flux du champ électrostatique et les sources du champ, à savoir les charges électriques.
2. La démonstration précédente utilise la loi de Coulomb qui, elle, est un fait expérimental et n'est pas démontrée. Inversement, on peut retrouver la loi de Coulomb à partir du théorème de Gauss : c'est ce qui est fait dans l'électromagnétisme, dans lequel le théorème de Gauss constitue en fait une loi fondamentale, non démontrable (l'une des quatre équations de Maxwell)

Le concept de *lignes de champ* (également appelées lignes de force) est très utile pour se faire une représentation spatiale d'un champ de vecteurs.

Définition : Une ligne de champ d'un champ de vecteur quelconque est une courbe C définie dans l'espace telle qu'en chacun de ses points le vecteur y soit tangent



Considérons un déplacement élémentaire dl le long d'une ligne de champ électrostatique C. Le fait que le champ E soit en tout point de C parallèle à dl s'écrit

$$\vec{E} \wedge \vec{dl} = 0$$

En coordonnées cartésiennes $\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ et les lignes de champ sont calculée en résolvant

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées cylindriques $\vec{dl} = dr\vec{u_r} + rd_\theta\vec{u_\theta} + dz\vec{u_z}$ et l'équation des lignes de champ devient

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées sphériques, $\vec{dl} = dr\vec{u_r} + rd_\theta\vec{u_\theta} + r\sin(\theta)d\varphi\vec{u_\varphi}$ et l'équation des lignes de champ devient

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin(\theta)d\varphi}{E_\varphi}$$

Soit un contour fermé C tel que le champ électrostatique y soit tangent, c'est à dire tel que $\vec{E} \perp \vec{dl}$ où $\vec{dl}$ est un vecteur élémentaire de C. En chaque point de C passe donc une ligne de champ particulière. L'ensemble de toutes les lignes de champ dessine alors une surface dans l'espace, une sorte de tube. Par construction, le flux du champ électrostatique est nul à travers la surface latérale du tube, de telle sorte que le flux est conservé : ce qui rentre à la base du tube ressort de l'autre côté. On appelle un tel « rassemblement » de lignes de champ un tube de flux.

Références

[1] Electromagnétisme PCSIP. Krempf - Editions Bréal 2003
[2] Physique Cours compagnon PCSI T. Cousin / H.Perodeau - Editions Dunod 2009
[3] Electromagnétisme 1ère année MPSI-PCSI-PTSI - JM.Brébec - Editions Hachette
[4] Cours de physique, électromagnétisme, 1.Electrostatique et magnétostatique - D.Cordier – Editions Dunod
[5] La physique en fac cours et exercices corrigés - Emile Amzallag - Joseph Cipriani - Jocelyne Ben Aïm - Norbert Piccioli
[6] http://wiki.sillages.info/index.php/Coordonnées_polaires_et_cylindriques
[7] http://epiphys.emn.fr
[8] http://turrier.fr/maths-physique/coordonees/systemes-de-coordonnees.html
[9] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/
[10] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/

Pour le Calcul de champ par méthode intégrale : exemple du fil infini suivez

Lien web https://www.physagreg.fr/electromagnetisme-11-champ-electrostatique.php

lien vidéo : https://youtu.be/zitm54XT6i0

Le dipôle électrostatique

Séance 7 en Distanciel – PHY104 : Electrostatique et Electrocinétique

Ing. Agbassou Guenoukpati, Département du Génie Electrique, ENSI, Université de Lome, Togo

Objectif du cours

- Importance des dipôles électrostatiques
- Définir les dipôles électrostatiques actifs ou passifs
- Déterminer le champ et le potentiel créés par les dipôles électrostatiques
- Représenter les lignes de champ et surfaces équipotentielles

Importance des dipôles électrostatiques

Ils existent dans la nature deux sortes de molécules couramment rencontrées : les molécules polaires et les molécules apolaires.

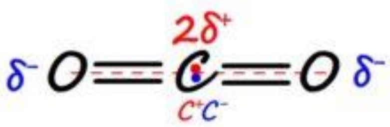
Exemples des molécules polaires :

H_2O, HCl, NH_3

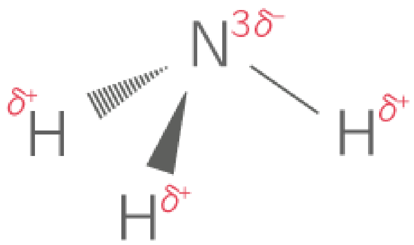
Exemples des molécules apolaires :

O_2, N_2, Cl_2

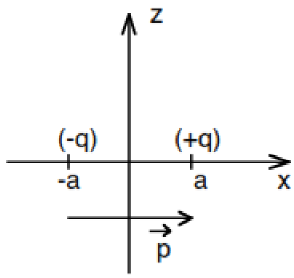
Les molécules polaires sont électriquement neutres (autant de charges positives que de charges que de charges négatives). De plus ces atomes possèdent un degré d'électronégativité forte (la faite d'attirer les atomes d'une liaison covalente). D'après le tableau de Mendeleïev, cette liaison se produit de gauche vers la droite. Par conséquent, une charge partielle δ est donc définie. Elle peut être positive ou négative.



Le centre des charges positives C+ et le centre des charges négatives C- se superposent au niveau de l'atome de carbone



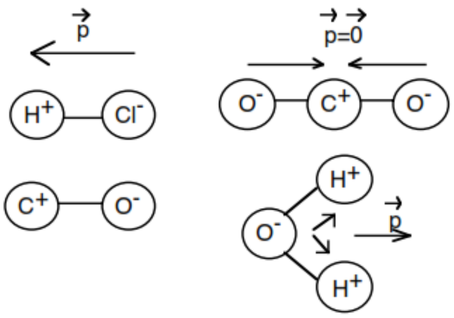
Si le barycentre ou le centre de gravité des charges négatives n'est pas confondu avec celui des charges positives pour une répartition des charges électriques de somme nulle, on définit donc un dipôle électrostatique. Un tel système peut souvent être décrit (on dit modélisé) en première approximation par deux charges électriques ponctuelles, +q et –q situées à une distance d=2a l'une de l'autre.



Les molécules telles que H_2O, HCl, NH_3, CO, CO_2, constituent des exemples de dipôles électrostatiques

Moment dipolaire électrique

Le moment dipolaire est toujours orienté vers les charges positives selon les figures ci-dessous.



Sa grandeur pour un ensemble de charges électrique est donnée par la relation ci-dessous.

$$\vec{p} = q \cdot d\,\vec{i} = 2 \cdot a \cdot q\,\vec{i}$$

L'unité du moment dipolaire est le Debye $\frac{1}{3} \cdot 10^{-29}\,\mathrm{C.m}$, la charge $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ et

$\mathrm{d} \simeq 10^{-10}\,\mathring{\mathrm{A}} \simeq 0{,}1\ \mathrm{nm}$, $E_p \simeq \dfrac{cste}{r^6}$, $F \simeq \dfrac{cste}{r^7}$

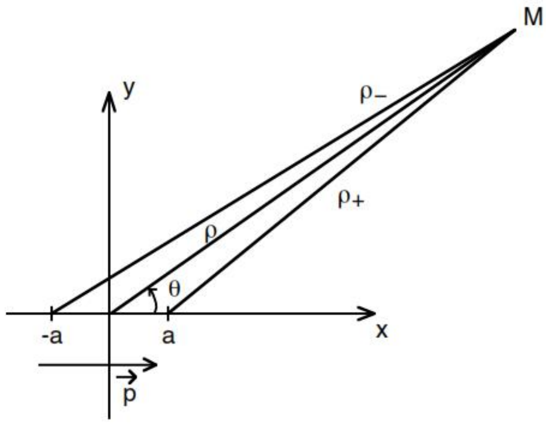
Application des dipôles électrostatiques

- En physico-chimie pour modéliser les liaisons entre les molécules ;
- Analogie en magnétostatique pour l'étude des dipôles magnétique ;
- Important pour l'étude des solvants polaires.

Sous l'influence d'un champ électrostatique la structure d'une mo molécules peut changer et elle peut devenir une molécule polaire ou apolaire.

Potentiel électrostatique créé par deux charges électriques

Connaître l'effet (la force) électrostatique que ces deux charges créent autour d'elles nécessite de calculer le champ électrostatique. Habituellement, nous aurions appliqué le principe de superposition et calculé ainsi la somme vectorielle des deux champs.



D'après la section précédente, le potentiel créé en un point M repéré par ses coordonnées polaires (ρ,θ) est simplement

$$V(M)=V_{+q}(M)+V_{-q}(M)$$

$$V(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\rho_+}-\frac{1}{\rho_-}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho_- - \rho_+}{\rho_+\cdot\rho_-}$$

Ou l'on a choisi arbitrairement $V=0$ à l'infini. Or $\overrightarrow{\rho_\pm}=\rho\pm a\cdot\vec{i}$. Lorsqu'on ne s'intéresse qu'à l'action électrostatique à grande distance, c'est-à-dire à des distances $\rho\gg a$ (approximation dipolaire), on peut faire un développement limité de V. Au premier ordre en a/ρ , on obtient :

$$\rho\pm=\left(\overrightarrow{\rho\pm}\cdot\overrightarrow{\rho\pm}\right)^{\frac{1}{2}}\approx\rho\left(1\pm2\frac{a}{\rho^2}\vec{\rho}\cdot\vec{i}\right)\approx\rho\pm a\cdot\cos(\theta)$$

Le potentiel créé à grande distance par un dipôle électrostatique vaut donc

$$V(M)=\frac{2aq\cdot\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0\rho^2}=\frac{\vec{p}\cdot\overrightarrow{u_\rho}}{4\pi\varepsilon_0\rho^2}$$

Champ créé à grande distance

Pour calculer le champ électrostatique, il nous suffit maintenant d'utiliser $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$. En coordonnées cylindriques. On obtient ainsi

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_\rho = -\dfrac{\partial V}{\partial \rho} = \dfrac{2p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0\rho^3} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{p\sin(\theta)}{4\pi\varepsilon_0\rho^3} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{pmatrix}$$

Par construction, le dipôle possède une symétrie de révolution autour de l'axe qui le porte (ici l'axe Ox) : le potentiel ainsi que les champs électrostatiques possèdent donc également cette symétrie. Cela va nous aider à visualiser les lignes de champ ainsi que les équipotentielles. Par exemple, le plan médiateur défini par $\theta = \frac{\pi}{2}$ ($x = 0$) est une surface équipotentielle $V = 0$. Les équipotentielles sont des surfaces (dans l'espace ; dans le plan ce sont des courbes) définies par $V = cste = V_0$:

$$\rho = \sqrt{\frac{p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 V_0}}$$

Représentation des surfaces équipotentielles

L'équation des lignes de champ est obtenue en résolvant

$$\frac{\partial \rho}{E_\rho} = \frac{\rho\partial\theta}{E_\theta} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\rho} = \frac{2\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$\rho = K\sin^2(\theta)$$

K est une constante d'intégration dont la valeur (arbitraire) définie la ligne de champ.

Représentation des lignes de champ

Références

[1] Electromagnétisme PCSIP. Krempf - Editions Bréal 2003
[2] Physique Cours compagnon PCSI T. Cousin / H.Perodeau - Editions Dunod 2009
[3] Electromagnétisme 1ère année MPSI-PCSI-PTSI - JM.Brébec - Editions Hachette
[4] Cours de physique, électromagnétisme, 1.Electrostatique et magnétostatique - D.Cordier – Editions Dunod
[5] La physique en fac cours et exercices corrigés - Emile Amzallag - Joseph Cipriani - Jocelyne Ben Aïm - Norbert Piccioli
[6] http://wiki.sillages.info/index.php/Coordonnées_polaires_et_cylindriques
[7] http://epiphys.emn.fr
[8] http://turrier.fr/maths-physique/coordonees/systemes-de-coordonnees.html
[9] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/
[10] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/

Pour le Calcul de champ par méthode intégrale : exemple du fil infini suivez

Lien web https://www.physagreg.fr/electromagnetisme-11-champ-electrostatique.php

lien vidéo : https://youtu.be/zitm54XT6i0

Conducteurs en équilibre

Séance 7 en Distanciel – PHY104 : Electrostatique et Electrocinétique
Ing. Agbassou Guenoukpati, Département du Génie Electrique, ENSI, Université de Lome, Togo

III.1- Conducteurs isolés

III.1.1- Notion d'équilibre électrostatique

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés uniquement aux charges électriques et à leurs effets. Que se passe-t-il pour un corps conducteur dans lequel les charges sont libres de se déplacer ?

Prenons une baguette en plastique et frottons-la. On sait qu'elle devient électrisée parce qu'elle devient alors capable d'attirer de petits bouts de papier. Si on la met en contact avec une autre baguette, alors cette deuxième devient également électrisée, c'est à dire atteint un certain degré d'électrisation. Au moment du contact des deux baguettes, des charges électriques passent de l'une à l'autre, modifiant ainsi le nombre de charges contenues dans chacune des baguettes, jusqu'à ce qu'un équilibre soit atteint. Comment définir un tel équilibre ?

Définition : l'équilibre électrostatique d'un conducteur est atteint lorsque aucune charge électrique ne se déplace plus à l'intérieur du conducteur.

Du point de vue de chaque charge élémentaire, cela signifie que le champ électrostatique total auquel elle est soumise est nul. Comme le champ dérive d'un potentiel, cela implique qu'un conducteur à l'équilibre électrostatique est équipotentiel.

Remarques

1. Si le conducteur est chargé, le champ électrostatique total est (principe de superposition) la somme du champ extérieur et du champ créé par la distribution de charges contenues dans le conducteur. Cela signifie que les charges s'arrangent (se déplacent) de telle sorte que le champ qu'elles créent compense exactement, en tout point du conducteur, le champ extérieur.
2. Nous voyons apparaître ici une analogie possible avec la thermodynamique :

Equilibre électrostatique $\Leftrightarrow$ Equilibre thermodynamique

Potentiel électrostatique $\Leftrightarrow$ Température

Charges électriques $\Leftrightarrow$ Chaleur

En effet, à l'équilibre thermodynamique, deux corps de températures initialement différentes mis en contact, acquièrent la même température finale en échangeant de la chaleur (du plus chaud vers le plus froid). Dans ce cours, tous les conducteurs seront considérés à l'équilibre électrostatique.

III.1.2- Quelques propriétés des conducteurs en équilibre

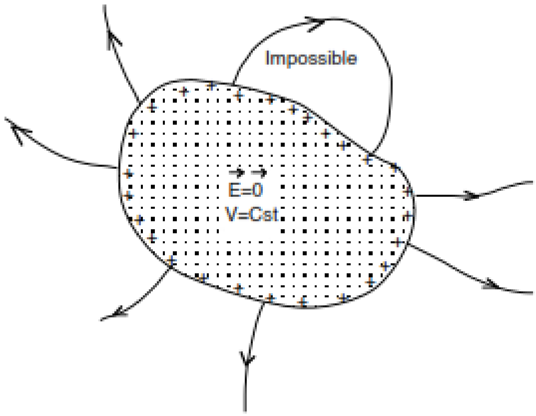
Lignes de champ

Nous avons vu que, à l'intérieur d'un conducteur (chargé ou non) le champ électrostatique total est nul. Mais ce n'est pas forcément le cas à l'extérieur, en particulier si le conducteur est chargé.

Puisqu'un conducteur à l'équilibre est équipotentiel, cela entraîne alors que, sa surface étant au même potentiel, le champ électrostatique est normal à la surface d'un conducteur. Par ailleurs, aucune ligne de champ ne peut « revenir » vers le conducteur. En effet, la circulation du champ le long de cette ligne impose.

$$V(A)-V(B)=\int_A^B \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}$$

Si les points A et B appartiennent au même conducteur, alors la circulation doit être nulle, ce qui est impossible le long d'une ligne de champ (où, par définition $\vec{E}$ est parallèle à $\overrightarrow{dl}$).



(b) Distribution des charges

Si un conducteur est chargé, où se trouvent les charges non compensées ? Supposons qu'elles soient distribuées avec une distribution volumique ρ . Prenons un volume quelconque V situé à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre électrostatique. En vertu du théorème de Gauss, on a puisque le champ $\vec{E}$ est nul partout. Cela signifie que $\rho = 0$ (autant de charges + que de charges -) et donc, qu'à l'équilibre, aucune charge non compensée ne peut se trouver dans le volume occupé par le conducteur. Toutes les charges non compensées se trouvent donc nnécessairement localisées à la surface du conducteur.

$$\oiint \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}=\iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}dV=0$$

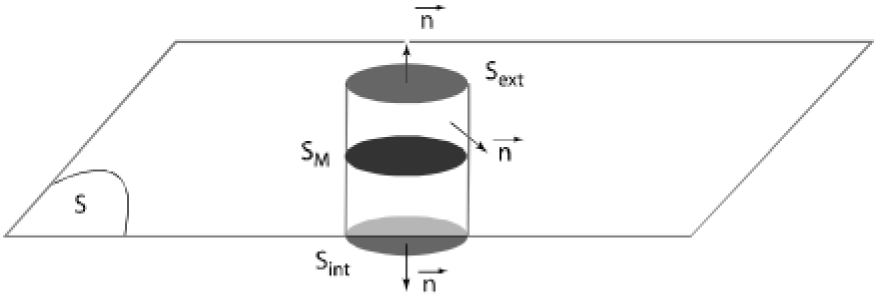
Ce résultat peut se comprendre par l'effet de répulsion que celles-ci exercent les unes sur les autres. A l'équilibre, les charges tendent donc à se trouver aussi éloignées les unes des autres qu'il est possible de le faire.

(c) Théorème de Coulomb

En un point M infiniment voisin de la surface S d'un conducteur, le champ électrostatique $\vec{E}$ est normal à S. Considérons une petite surface S_{ext} parallèle à la surface S du conducteur. On peut ensuite construire une surface fermée Σ en y adjoignant une surface rentrant à l'intérieur du conducteur S_{int} ainsi qu'une surface latérale. En appliquant le théorème de Gauss sur cette surface fermée, on obtient

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{S_L} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} + \iint_{S_{ext}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} + \iint_{S_{ext}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = 2E \cdot S_{ext}$$

$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iint_{S_M} \sigma dS = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot S_M$$



Où S_M est la surface dessinée par le tube de flux passant S_{ext} par donc $S_M = S_{ext}$ (on peut choisir ces surfaces aussi petites que l'on veut).

Théorème : le champ électrostatique à proximité immédiate d'un conducteur de densité σ ssurfacique vaut :

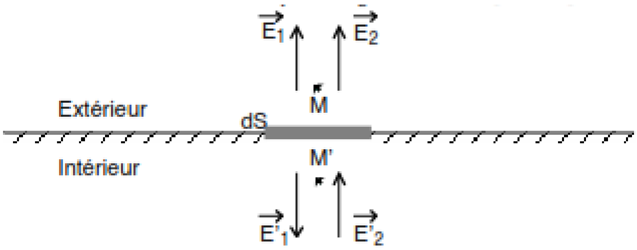
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$$

Où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal au conducteur et dirigé vers l'extérieur.

Lorsque le champ au voisinage d'un conducteur dépasse une certaine limite, une étincelle est observée : le milieu entourant le conducteur devient alors conducteur. Ce champ maximal, de l'ordre de 3 Méga V/m dans l'air, est appelé champ disruptif. Il correspond à l'ionisation des particules du milieu (molécules dans le cas de l'air).

(d) Pression électrostatique

Soient deux points M et M' infiniment proches de la surface d'un conducteur de densité ssurfacique σ, situé à l'extérieur tandis que M' est situé à l'intérieur. Considérons maintenant une surface élémentaire dS située entre ces deux points. Soit $\overrightarrow{E_1}$ le champ créé en M par les charges situées sur dS et $\overrightarrow{E_2}$ le champ créé en M par toutes les autres charges situées à la surface du conducteur. Soient $\overrightarrow{E_1'}$ et $\overrightarrow{E_2'}$ les champs respectifs en M'.



On a alors les trois propriétés suivantes

1. $\overrightarrow{E_2}(M) = \overrightarrow{E_2}(M')$ car M et M'sont infiniment proches.
2. $\overrightarrow{E_2'} = -\overrightarrow{E_1'}$ car le champ électrostatique à l'intérieur du conducteur est nul
3. $\overrightarrow{E_1}(M) = -\overrightarrow{E_1}(M')$ car $\overrightarrow{E_1}$ est symétrique par rapport à dS, considérée comme un plan puisque M et M' peuvent être infiniment rapprochés.

Grâce à ces trois propriétés, on en déduit que $\overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{E_1}$ c'est à dire que la contribution de l'ensemble du conducteur est égale à celle de la charge située à proximité immédiate. Comme le champ total vaut (théorème de Coulomb),

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

on en déduit que le champ créé par l'ensemble du conducteur (à l'exclusion des charges situées en dS) au voisinage du point M est

$$\overrightarrow{E_2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

Autrement dit, la force électrostatique $\vec{F}$ subie par cette charge $dq = \sigma dS$ de la part de l'ensemble des autres charges du conducteur vaut

$$\overrightarrow{dF} = dq\overrightarrow{E_2} = \sigma dS\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}dS\vec{n}$$

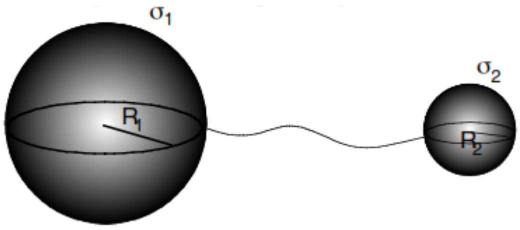
Quel que soit le signe de σ, la force est normale et toujours dirigée vers l'extérieur du conducteur. Cette propriété est caractéristique d'une pression, force par unité de surface. Ainsi, la pression électrostatique subie en tout point d'un conducteur vaut

$$P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

Cette pression est en général trop faible pour arracher les charges de la surface du conducteur. Mais elle peut déformer ou déplacer celui-ci, les charges communiquant au solide la force électrostatique qu'elles subissent

(e) Pouvoir des pointes

Cette expression décrit le fait expérimental que, à proximité d'une pointe, le champ électrostatique est toujours très intense. En vertu du théorème de Coulomb, cela signifie que la densité surfacique de charges est, au voisinage d'une pointe, très élevée.



On peut aborder ce phénomène avec deux sphères chargées de rayons différents, reliées par un fil conducteur et placées loin l'une de l'autre. On peut donc considérer que chaque sphère est isolée mais qu'elle partage le même potentiel V. Cela implique alors

$$V_1 = V_2 \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S_1}\frac{\sigma dS}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S_2}\frac{\sigma dS}{R_2}$$

soit

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Donc, plus l'une des sphères aura un rayon petit et plus sa densité de charges sera élevée. Tout se passe comme si les charges « préféraient » les zones à forte courbure. A priori, cela semble en contradiction avec l'idée naïve que les charges non compensées ont tendance à se repousser mutuellement. Le résultat ci-dessus nous montre l'effet d'une pointe (accumulation de charges), mais ne nous offre aucune explication de ce phénomène. Qu'est ce qui, physiquement, a permis une « accumulation » de charges sur une pointe ? Prenons une sphère chargée placée seule dans l'espace. Se repoussant mutuellement, les charges vont produire une distribution surfacique uniforme. Maintenant, si l'on fait un creux (zone concave), les charges situées au fond du creux « voient » non seulement le champ électrostatique créé par les charges immédiatement voisines, mais également celui créé par les charges situées sur les bords du creux. Ainsi, au fond du creux, le champ total est plus fort et repousse les charges vers l'extérieur, vidant ainsi le creux de charges. Faisons maintenant une pointe (zone convexe). Là, le phénomène contraire se produit. Quand une charge se retrouve, sous l'effet répulsif des autres charges, repoussée vers la pointe, le champ qu'elle-même crée devient moins important (puisqu'elle est éloignée des autres charges) vis-à-vis des charges restées sur la partie uniforme de la sphère. Cela permet ainsi à une autre charge de prendre sa place : cette nouvelle charge se déplace donc et se retrouve elle-même repoussée sur la pointe. Le conducteur atteint l'équilibre électrostatique lorsque le champ répulsif créé par toutes les charges accumulées au niveau de la pointe compense celui créé par les charges restées sur le « corps » du conducteur.

III.1.3- Capacité d'un conducteur isolé

Nous avons vu qu'il était possible de faire une analogie entre la température d'un corps et le potentiel électrostatique. Or, pour une quantité de chaleur donnée, la température d'un corps dépend en fait de sa capacité calorifique. Il en va de même pour le potentiel électrostatique : il dépend de la capacité du corps à « absorber » les charges électriques qu'il reçoit. On peut donc suivre cette analogie et définir une nouvelle notion, la capacité électrostatique :

$$\text{Capacité électrostatique} \Leftrightarrow \text{Capacité calorifique}$$

Soit un conducteur à l'équilibre électrostatique isolé dans l'espace, chargé avec une distribution surfacique σ et porté au potentiel V. Celui-ci s'écrit

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{Surface} \frac{\sigma(P)dS}{PM}$$

en tout point M du conducteur, le point P étant un point quelconque de sa surface. Par ailleurs, la charge électrique totale portée par ce conducteur s'écrit

$$Q = \iint_{Surface} \sigma(P)dS$$

Si on multiplie la densité surfacique par un coefficient constant a, on obtient une nouvelle charge totale $Q' = a \cdot Q$ et un nouveau potentiel $V' = a \cdot V$. On a ainsi un nouvel état d'équilibre électrostatique, parfaitement défini. On voit donc que, quoi qu'on fasse, tout état d'équilibre d'un conducteur isolé (caractérisé par Q et V) est tel que le rapport Q/V reste constant (cela résulte de la linéarité de Q et V en fonction de σ).

Définition : La capacité électrostatique d'un conducteur à l'équilibre est définie par

$$C = \frac{Q}{V}$$

où Q est la charge électrique totale du conducteur porté au potentiel V. L'unité de la capacité est le Farad (symbole F).

Remarques :

1. La capacité C d'un conducteur est une grandeur toujours positive. Elle ne dépend que des caractéristiques géométriques et du matériau dont est fait le conducteur.
2. Les unités couramment utilisées en électrocinétique sont le nF ou pF.
3. Exemple : capacité d'une sphère de rayon R, chargée avec une densité surfacique ….

$$V = V(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{Surface} \frac{\sigma(P)dS}{OP} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{Surface} \frac{\sigma(P)dS}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\iint_{Surface} \sigma(P)dS}{R}$$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

III.1.4- Superposition des états d'équilibre

Nous avons vu qu'un conducteur isolé, à l'équilibre électrostatique, est caractérisé par sa charge Q et son potentiel V, qui sont reliés entre eux par la capacité C du conducteur. Inversement, étant donné un conducteur de capacité C, la donnée de sa distribution surfacique C détermine complètement son état d'équilibre, puisque

$$Q = \iint_{Surface} \sigma \cdot dS \text{ et } V = \frac{Q}{C}$$

Soit maintenant un autre état d'équilibre du même conducteur défini par une densité surfacique σ'. Le conducteur porte alors une charge Q' et a un potentiel V'. Du fait de la linéarité de Q et V avec σ, toute combinaison linéaire de σ et σ' est encore un état d'équilibre :

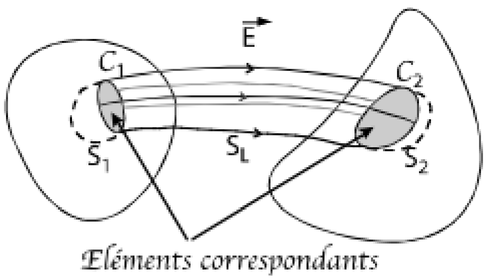
$$Q = a\cdot\sigma + b\cdot\sigma' \Leftrightarrow \begin{cases} Q'' = a\cdot Q + b\cdot Q' \\ V'' = \dfrac{Q''}{C} = a\cdot V + b\cdot V' \end{cases}$$

On a donc ici un résultat qui nous sera utile plus tard : toute superposition d'états d'équilibre (d'un conducteur ou d'un ensemble de conducteurs) est également un état d'équilibre.

III.2- Systèmes de conducteurs en équilibre

III.2.1- Théorème des éléments correspondants

Soit deux conducteurs (A1) et (A2), placés l'un à coté de l'autre et portant des densités ssurfaciques σ_1 et σ_2 et à l'équilibre. S'ils ne sont pas au même potentiel, des lignes de champ électrostatique relient (A1) à (A2). Soit un petit contour fermé C_1 situé sur la surface de (A1) tel que l'ensemble des lignes de champ issues de (A1) et s'appuyant sur C_1 rejoignent (A2) (et y dessinent un contour fermé C_2)



L'ensemble de ces lignes de champ constitue ce qu'on appelle un tube de flux : le flux du champ électrostatique à travers la surface latérale S_L dessinée par ce tube est nul par construction ($\vec{E} \cdot \vec{dS} = 0$). Soit une surface fermée produite $S = S_L + S_1 + S_2$. S_1 est une surface qui s'appuie sur C_1 et plonge à l'intérieur de (A1) et S_2 une surface similaire pour (A2). En vertu du théorème de Gauss, on a

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_L} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{dS} = 0$$

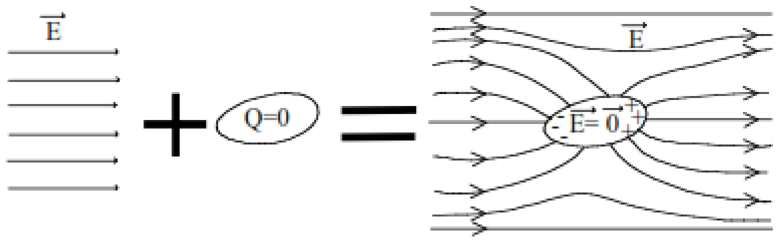
$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} + \frac{Q_2}{\varepsilon_0}$$

Où Q_1 est la charge totale contenue sur la surface de (A1) embrassée par Q_2 est la charge contenue sur la surface correspondante de (A2). Du coup $Q_1 = -Q_2$ tandis que nécessairement.

Théorème : les charges électriques portées par deux éléments correspondants sont opposées.

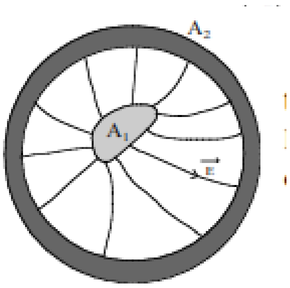
III.2.2- Phénomène d'influence électrostatique

Jusqu'à présent nous n'avons abordé que les conducteurs chargés, isolés dans l'espace. Que se passe-t-il lorsque, par exemple, on place un conducteur neutre dans un champ électrostatique uniforme ? Etant neutre, sa charge $Q = \iint_{Surface} \sigma \cdot dS$ doit rester nulle. Mais étant un conducteur, les charges sont libres de se déplacer : on va donc assister à un déplacement de charges positives dans la direction de $\vec{E}$ et de charges négatives dans la direction opposée. On obtient alors une polarisation du conducteur (création de pôles + et -), se traduisant par une distribution surfacique σ non-uniforme (mais telle que Q=0).



Considérons maintenant le cas plus compliqué d'un conducteur (A1) de charge Q_1 avec une densité surfacique σ_1, placé à proximité d'un conducteur neutre (A2). En vertu de ce qui a été dit précédemment, on voit apparaître une densité surfacique σ_2 non-uniforme sur (A2) due au champ électrostatique de (A1). Mais, en retour, la présence de charges σ_2 de de charges situées à proximité (A1) modifie la distribution de (A1) l'équilibre électrostatique, les deux distributions de charges σ_1 et σ_2 dépendent l'une de l'autre. On appelle cette action réciproque, l'influence électrostatique. Dans cet exemple, l'influence est dite partielle, car l'ensemble des lignes de champ électrostatique issues de

(A1) n'aboutissent pas sur (A2). Soit q_2 la charge portée par la région de (A2) reliée à (A1). En vertu du théorème des éléments correspondants, on a $|q_2| \prec |Q_1|$



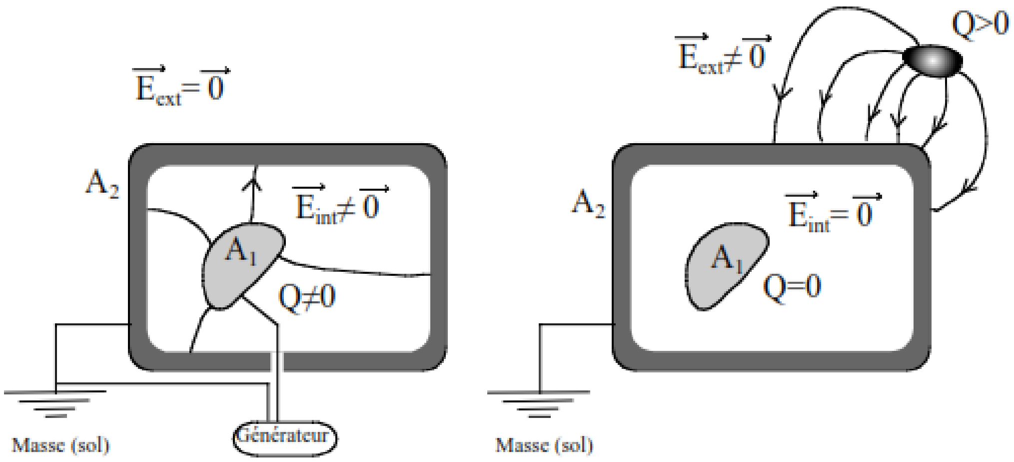
On peut créer des conditions d'influence électrostatique totale en plaçant (A1) à l'intérieur de (A2). Puisque l'ensemble des lignes de champ issues de (A1) aboutit sur (A2), on voit apparaître la charge $Q_2^{\text{int}} = -Q_1$ sur la face correspondante interne de (A2), et ceci quelle que soit la position de (A1). Cette propriété (démontrée à partir du théorème des éléments correspondants) est connue sous le nom de théorème de Faraday. La charge électrique totale sur (A2) est simplement

$$Q_2 = Q_2^{\text{int}} + Q_2^{ext} = -Q_1 + Q_2^{ext}$$

Notion d'écran ou de blindage électrostatique : la cage de Faraday

Un conducteur à l'équilibre a un champ nul : de ce fait, s'il possède une cavité, celle-ci se trouve automatiquement isolée (du point de vue électrostatique) du monde extérieur. On définit par écran électrostatique parfait tout conducteur creux maintenu à un potentiel constant.

Lorsqu'on relie (A2) au sol, on a $Q_2^{ext} = 0$ (les charges s'écoulent vers la Terre ou proviennent de celle-ci). Dans ce cas, le champ électrostatique mesuré à l'extérieur de (A2) est nul, malgré la présence de (A1) chargé à l'intérieur de (A2). Ainsi, l'espace extérieur à (A2) est protégé de toute influence électrostatique provenant de la cavité. L'inverse est également vrai.



Prenons maintenant le cas où (A1) porte une charge nulle et où (A2) est placé à proximité d'autres conducteurs chargés. A l'équilibre, on aura $Q_2^{\text{int}} = 0$ mais un champ électrostatique non nul mesuré à l'extérieur de (A2), dépendant de la distribution surfacique externe de (A2). Ainsi, malgré la charge portée par la surface extérieure de (A2), la cavité interne possède un champ électrostatique nul. Nous voyons donc que le champ électrostatique régnant à l'intérieur de (A2) est parfaitement indépendant de celui à l'extérieur. Noter que ceci reste vrai même si (A2) n'est pas maintenu à potentiel constant. Une combinaison linéaire de ces deux situations permettant de décrire tous les cas possibles, nous venons de démontrer que tout conducteur creux maintenu à potentiel constant constitue bien un écran électrostatique dans les deux sens. Un tel dispositif est appelé cage de Faraday. Alors que la distribution des charges Q_2^{int} dépend de la position de (A1), celle des charges Q_2^{ext} portées par la surface externe de (A2) dépend, elle, uniquement de ce qui se passe à l'extérieur.

Applications :

1. Protection contre la foudre : un paratonnerre est en général complété par un réseau de câbles entourant l'édifice à protéger, reliés à la Terre.
2. Tout conducteur transportant un courant faible est entouré d'une gaine métallique (appelée blindage) reliée au sol. Cette gaine est parfois simplement le châssis de l'appareil.

III.2.3- Coefficients d'influence électrostatique

Nous avons vu que lorsque plusieurs conducteurs sont mis en présence les uns des autres, ils exercent une influence électrostatique réciproque. A l'équilibre (mécanique et électrostatique), les densités surfaciques de chaque conducteur dépendent des charges qu'ils portent, de leur capacité et de leurs positions relatives. Si l'on cherche à calculer, par exemple, le potentiel pris par l'un des conducteurs, alors il nous faut résoudre le problème complet : calculer les potentiels de tous les conducteurs. Soit un ensemble de n conducteurs (Ai) de charge électrique totale Q_i et potentiel, en équilibre électrostatique. Prenons (A1) et appliquons la notion vue précédemment de superposition des états d'équilibre. On peut toujours décomposer la distribution surfacique sur (A1) de la forme

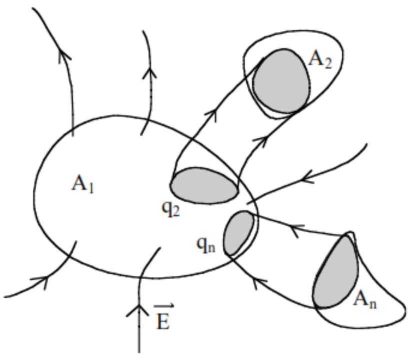
$\sigma_1 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{1j}$ ou σ_{11} est la densité surfacique de charges apparaissant sur (A1) si tous les autres conducteurs étaient portés au potentiel nul (mais présents) et σ_{1j} celle apparaissant lorsque tous (y compris A1) sont portés au potentiel nul, sauf (Aj). On peut alors écrire que la charge totale sur (A1) est

$$Q_1 = \iint_{S_1} \sigma_1 \cdot dS = \sum_{j=1} \iint_{S_1} \sigma_{1j} \cdot dS = q_{11} + q_{12} + ... + \mathrm{q}_{1n}$$

Pour connaître Q_1 il faut donc connaître les n états d'équilibre électrostatique. Considérons le premier, celui où tous les autres conducteurs en présence sont mis au potentiel nul. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} q_{11} &= C_{11} \cdot V_1 \\ q_{21} &= C_{21} \cdot V_1 \\ q_{31} &= C_{31} \cdot V_1 \\ &\vdots \\ q_{n1} &= C_{n1} \cdot V_1 \end{aligned}$$

En effet, la charge apparaissant sur (A1) ne peut être due qu'à étant la capacité du V_1, C_{11} conducteur (A1) en présence des autres conducteurs. Mais par influence, une distribution σ_{11} apparaît sur tous les autres conducteurs (Aj). Celle-ci dépend du nombre de lignes de champ qui joignent (A1) à chaque conducteur (Aj). En vertu du théorème des éléments correspondants, la charge qui « apparaît » est de signe opposé à celle sur (A1), elle-même proportionnelle à q_{11} donc à les coefficients d'influence V_1 sont donc négatifs.



Considérons maintenant le deuxième état d'équilibre, où tous les conducteurs sauf (A2) sont mis au potentiel nul. On a alors dans ce cas

$$
\begin{aligned}
q_{12} &= C_{12} \cdot V_2 \\
q_{22} &= C_{22} \cdot V_2 \\
q_{32} &= C_{32} \cdot V_2 \\
\vdots & \quad \vdots \\
q_{n2} &= C_{n2} \cdot V_2
\end{aligned}
$$

Bien évidemment, en reproduisant cette opération, on obtient que l'état d'équilibre le plus général est décrit par

$$Q_i = q_{i1} + q_{i2} + \ldots + q_{in} = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \cdot V_i$$

ou, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

Les coefficients C_{ij} sont appelés coefficients d'influence. Les coefficients C_{ii} appelés coefficients de capacité ou capacités des conducteurs en présence des autres. Il ne faut pas les confondre avec les capacités propres C_i des conducteurs isolés, seuls dans l'espace. D'une façon générale, on a la propriétés suivantes : sont parfois

1. Les C_{ii} sont toujours positifs.
2. Les C_{ij} sont toujours négatifs et $C_{ij} = C_{ji}$ (matrice symétrique).
3. $C_{ii} \geq -\sum_{j \neq i} C_{ji}$ l'égalité n'étant possible que dans le cas d'une influence totale.

La dernière inégalité est une conséquence du théorème des éléments correspondants. En effet, prenons le conducteur (A1) porté au potentiel V_1 alors que les autres sont mis au potentiel nul. Tous les tubes de flux partant de (A1) n'aboutissent pas nécessairement à un autre conducteur (ils ne le feraient que pour une influence totale). Donc, cela signifie que la charge totale située sur (A1) est (en valeur absolue) supérieure à l'ensemble des charges situées sur les autres conducteurs, c'est à dire

$$Q_1 = C_{11} \cdot V_1 \geq |q_{21}| + \ldots + |q_{n1}| = \sum_{j \neq i} |C_{j1}| \cdot V_1$$

Références

[1] Electromagnétisme PCSIP. Krempf - Editions Bréal 2003
[2] Physique Cours compagnon PCSI T. Cousin / H.Perodeau - Editions Dunod 2009
[3] Electromagnétisme 1ère année MPSI-PCSI-PTSI - JM.Brébec - Editions Hachette
[4] Cours de physique, électromagnétisme, 1.Electrostatique et magnétostatique - D.Cordier – Editions Dunod
[5] La physique en fac cours et exercices corrigés - Emile Amzallag - Joseph Cipriani - Jocelyne Ben Aïm - Norbert Piccioli
[6] http://wiki.sillages.info/index.php/Coordonnées_polaires_et_cylindriques
[7] http://epiphys.emn.fr
[8] http://turrier.fr/maths-physique/coordonees/systemes-de-coordonnees.html
[9] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/
[10] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/

Pour le Calcul de champ par méthode intégrale : exemple du fil infini suivez

Lien web https://www.physagreg.fr/electromagnetisme-11-champ-electrostatique.php

lien vidéo : https://youtu.be/zitm54XT6i0

Le condensateur

Séance 7 en Distanciel – PHY104 : Electrostatique et Electrocinétique

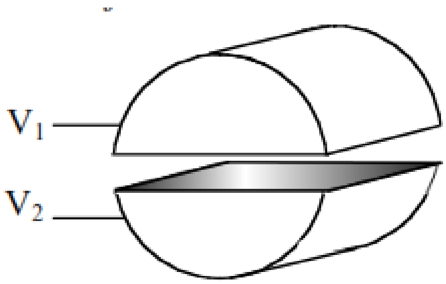
Ing. Agbassou Guenoukpati, Département du Génie Electrique, ENSI, Université de Lome, Togo

III.3- Le condensateur

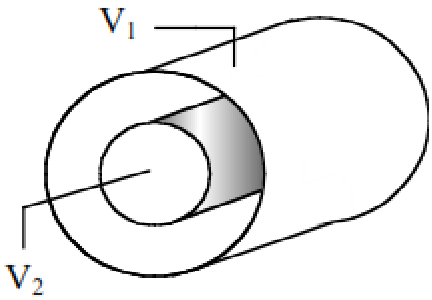
III.3.1- Condensation de l'électricité

Définition : On appelle condensateur tout système de deux conducteurs en influence électrostatique. Il y a deux sortes de condensateurs :

- à armatures rapprochées
- à influence totale



Armatures rapprochées



Influence totale

En général, les deux armatures sont séparées par un matériau isolant (un diélectrique), ce qui a pour effet d'accroître la capacité du condensateur. Dans ce qui suit on suppose qu'il n'y a que du vide. Soient donc deux conducteurs (A1) et (A2) portant une charge totale Q_1 et Q_2. de Potentiels V_1 et V_2. D'après la section précédente, on a

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11} \cdot V_1 + C_{12} \cdot V_2 \\ Q_2 = C_{21} \cdot V_1 + C_{22} \cdot V_2 \end{cases}$$

Les coefficients C_{ij} étant indépendants des valeurs de Q et de V, il suffit, pour les trouver, de considérer des cas particuliers simples (formellement on a ici 2 équations à 4 inconnues). Regardons ce qui se passe dans le cas d'un condensateur à influence totale, c'est à dire un condensateur pour lequel on a

$$Q_1 = Q_2^{ext} + Q_2^{\text{int}} = Q_2^{ext} - Q_1$$

Si on relie (A2) à la masse ($V_2 = 0$, $Q_2^{ext} = 0$ car on néglige toute influence extérieure), alors on obtient

$$\begin{cases} Q_1 = -Q_2 \\ C_{11} = C_{21} \end{cases}$$

La première relation n'est vraie que si (A2) est à la masse, mais la seconde est générale. Par ailleurs, on sait que $C_{12} = C_{21}$ (on peut aussi le redémontrer en reliant les deux conducteurs par un fil ($V_1 = V_2$) et choisir $Q_1 = 0$). Par convention, la capacité C du condensateur, sa charge Q et sa tension entre armatures sont alors définies de la façon suivante,

$$C = C_{11}$$
$$U = V_1 - V_2$$
$$Q = Q_1$$

ce qui fournit la relation des condensateurs

$$Q = C \cdot U$$

Remarques

1. Pourquoi appelle-t-on ces dispositifs des condensateurs ? Parce qu'ils permettent de mettre en évidence le phénomène de « condensation de l'électricité », à savoir l'accumulation de charges électriques dans une petite zone de l'espace. Ainsi, en construisant des condensateurs de capacité C élevée, on obtient des charges électriques élevées avec des tensions U faibles.
2. La charge située sur l'armature (A2) est $Q_2 = Q_2^{ext} - Q_1$ (pour un condensateur à influence totale) et, en toute rigueur, ne vaut –Q que lorsque (A2) est mise à la masse. En général, elle reste cependant négligeable devant Q dans les cas considérés dans ce cours et on n'en tiendra donc pas compte.

Pour un condensateur à armatures rapprochées, on obtient le même résultat, moyennant une séparation faible (devant leur taille) des conducteurs. Dans ce type de condensateur, les charges Q_1 et Q_2 correspondent à celles qui se trouvent réparties sur l'ensemble de la surface de chaque conducteur. Mais si la distance est faible, l'influence électrostatique va condenser les charges sur les surfaces en regard, de telle sorte que l'on peut faire l'hypothèse suivante

$$Q_1 = Q_1^{ext} + Q_1^S \approx Q_1^S$$

$$Q_2 = Q_2^{ext} + Q_2^S \approx Q_2^{ext} - Q_1^S \simeq Q_2^{ext} - Q_1$$

ce qui nous ramène à une expression identique à celle d'un condensateur à influence totale.

III.3.2- Capacités de quelques condensateurs simples

Dans ce qui suit, nous allons voir plusieurs exemples de calculs de capacités. Pour obtenir la capacité C d'un condensateur, il faut calculer la relation entre sa charge Q et sa tension U, c'est à dire

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{Q}{C}$$

Autrement dit, il faut être capable de calculer la circulation du champ électrostatique entre les deux armatures ainsi que la charge Q.

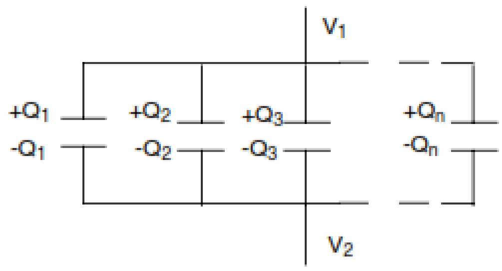
III.3.3- Associations de condensateurs

(a) Condensateurs en parallèle

Soient n condensateurs de capacités C_i mis en parallèle avec la même tension $U = V_1 - V_2$. La charge électrique de chacun d'entre eux est donnée par $Q_i = C_i \cdot U$ est simplement. La charge électrique totale

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = \left(\sum_{i=1}^{n} C_i \right) \cdot U$$

ce qui correspond à une capacité équivalente $\sum_{i=1}^{n} C_i$ qui est la somme des capacités individuelles.



Condensateurs en parallèle

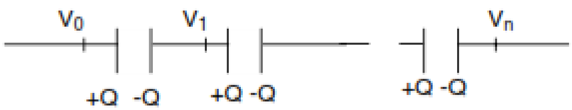
(b) Condensateurs en série

Soient n condensateurs de capacités C_i mis en série les uns derrière les autres. On porte aux potentiels V_0 et V_n les deux extrémités de la chaîne et on apporte la charge Q sur le premier condensateur. En supposant que tous les condensateurs sont initialement neutres, il s'établit la charge ±Q (par influence) sur les armatures des condensateurs adjacents. La tension totale aux bornes de la chaîne de condensateurs s'écrit alors simplement

$$U = V_0 - V_n = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \cdots + (V_{n-1} - V_n).$$

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_n}$$

et correspond à celle d'une capacité unique C de capacité équivalente $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$



Condensateurs en série

Références

[1] Electromagnétisme PCSIP. Krempf - Editions Bréal 2003
[2] Physique Cours compagnon PCSI T. Cousin / H.Perodeau - Editions Dunod 2009
[3] Electromagnétisme 1ère année MPSI-PCSI-PTSI - JM.Brébec - Editions Hachette
[4] Cours de physique, électromagnétisme, 1.Electrostatique et magnétostatique - D.Cordier – Editions Dunod
[5] La physique en fac cours et exercices corrigés - Emile Amzallag - Joseph Cipriani - Jocelyne Ben Aïm - Norbert Piccioli
[6] http://wiki.sillages.info/index.php/Coordonnées_polaires_et_cylindriques
[7] http://epiphys.emn.fr
[8] http://turrier.fr/maths-physique/coordonees/systemes-de-coordonnees.html
[9] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/
[10] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/

Pour le Calcul de champ par méthode intégrale : exemple du fil infini suivez

Lien web https://www.physagreg.fr/electromagnetisme-11-champ-electrostatique.php

lien vidéo : https://youtu.be/zitm54XT6i0