Cours de Mathématiques - ASINSA-1

Les espaces vectoriels

Frédéric STURM

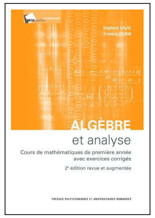
Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon

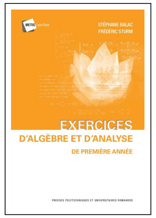
Année académique 2011-2012

Pour plus de compléments, voir les deux ouvrages suivants parus aux Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR) dans la collection METIS LyonTech :

www.ppur.org

- **Algèbre et analyse, 2e édition revue et augmentée,** **Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés**, S. Balac, F. Sturm, 1110 pages, paru en 2009.
- **Exercices d'algèbre et d'analyse,** **154 exercices corrigés de première année**, S. Balac, F. Sturm, 448 pages, paru en 2011.





Plan du cours

Définition

On considère :

- un corps commutatif $\mathbb{K}$ muni des opérations $+_{\mathbb{K}}$ et $\times_{\mathbb{K}}$,
- un ensemble E muni d'une addition (notée « $+$ ») et d'une multiplication par un scalaire (notée « $\cdot$ »).

Définition 1.1

On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) si $(E,+)$ est un groupe commutatif et si on a les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{rrcl}
\forall \alpha\in\mathbb{K}\quad \forall(\vec{x},\vec{y})\in E\times E & \alpha\cdot(\vec{x}+\vec{y}) & = & \alpha\cdot\vec{x}+\alpha\cdot\vec{y},\\
\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}\quad \forall\vec{x}\in E & (\alpha+_{\mathbb{K}}\beta)\cdot\vec{x} & = & \alpha\cdot\vec{x}+\beta\cdot\vec{x},\\
\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}\quad \forall\vec{x}\in E & \alpha\cdot(\beta\cdot\vec{x}) & = & (\alpha\times_{\mathbb{K}}\beta)\cdot\vec{x},\\
\forall\vec{x}\in E & 1_{\mathbb{K}}\cdot\vec{x} & = & \vec{x}.
\end{array}$$

Notation

- Les éléments de E sont appelés vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.
- Les éléments $\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{a},\vec{b},\vec{c},\ldots$ désignent des vecteurs. On les note aussi parfois sans les flèches :

$$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$$

- Les éléments $\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,\ldots$ désignent des scalaires.

C'est au mathématicien **Giuseppe Peano** (1858, Cuneo - 1932, Turin) que nous devons la première définition axiomatique d'un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.

Rappel

Rappelons que « $(E,+)$ est un groupe commutatif » signifie :

- Pour tout $(\vec{x},\vec{x}',\vec{x}'')\in E^3$, $(\vec{x}+\vec{x}')+\vec{x}''=\vec{x}+(\vec{x}'+\vec{x}'')$.
- Existence d'un élément appelé zéro et noté $\vec{0}_E$ dans E tel que, pour tout $\vec{x}\in E$, $\vec{0}_E+\vec{x}=\vec{x}+\vec{0}_E=\vec{x}$.
- Tout $\vec{x}\in E$ possède un opposé dans l'ensemble E.
- Pour tout $(\vec{x},\vec{x}')\in E^2$, $\vec{x}+\vec{x}'=\vec{x}'+\vec{x}$.

Remarque

Tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. L'ensemble produit $E=\mathbb{K}^n$ défini par

$$\mathbb{K}^n \overset{\text{déf.}}{=} \{(x_1,\ldots,x_n)\mid x_1\in\mathbb{K},\ldots,x_n\in\mathbb{K}\}$$

muni des deux lois $+$ et $\cdot$ définies pour tous $(x_1,\ldots,x_n)$ et $(y_1,\ldots,y_n)$ appartenant à $\mathbb{K}^n$ et pour tout $\alpha\in\mathbb{K}$ par :

$$\begin{array}{rcl}
(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n) & \overset{\text{déf.}}{=} & (x_1+_{\mathbb{K}}y_1,\ldots,x_n+_{\mathbb{K}}y_n)\\
\alpha\cdot(x_1,\ldots,x_n) & \overset{\text{déf.}}{=} & (\alpha\times_{\mathbb{K}}x_1,\ldots,\alpha\times_{\mathbb{K}}x_n)
\end{array}$$

possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Un vecteur de $\mathbb{K}^n$ est un n-uplet et on le note

$$\boxed{\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n.}$$

- L'élément neutre pour l'addition est le vecteur

$$\vec{0}_{\mathbb{K}^n}\overset{\text{déf.}}{=}(0,0,\ldots,0)\in\mathbb{K}^n.$$

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$

- L'ensemble $E=\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$ muni des deux lois $+$ et $\cdot$ définies pour tous $P=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}[X]$ et pour tout $\alpha\in\mathbb{K}$ par :

$$\begin{array}{rcl}
P+Q & \overset{\text{déf.}}{=} & (a_n+_{\mathbb{K}}b_n)_{n\in\mathbb{N}}\\
\alpha\cdot P & \overset{\text{déf.}}{=} & (\alpha\times_{\mathbb{K}}a_n)_{n\in\mathbb{N}}
\end{array}$$

possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

- Les vecteurs de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes.

$$\boxed{P=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n\in\mathbb{K}[X].}$$

- Le vecteur nul est le polynôme $0_{\mathbb{K}[X]}\in\mathbb{K}[X]$.

L'ensemble $\mathcal{A}(\mathcal{I},\mathbb{K})$ des applications de $\mathcal{I}$ vers $\mathbb{K}$

- Soit $\mathcal{I}$ un ensemble. L'ensemble $E=\mathcal{A}(\mathcal{I},\mathbb{K})$ des applications de $\mathcal{I}$ vers $\mathbb{K}$ muni des deux lois $+$ et $\cdot$ définies pour tous $f:\mathcal{I}\longrightarrow\mathbb{K}$, $g:\mathcal{I}\longrightarrow\mathbb{K}$ et tout $\alpha\in\mathbb{K}$ par :

$$\begin{array}{rcl}
\forall x\in\mathcal{I}\quad (f+g)(x) & \overset{\text{déf.}}{=} & f(x)+_{\mathbb{K}}g(x)\\
\forall x\in\mathcal{I}\quad (\alpha\cdot f)(x) & \overset{\text{déf.}}{=} & \alpha\times_{\mathbb{K}}f(x)
\end{array}$$

possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

- Un vecteur de $\mathcal{A}(\mathcal{I},\mathbb{K})$ est une application $f:\mathcal{I}\longrightarrow\mathbb{K}$ à ne pas confondre avec sa valeur $f(x)$ en un point $x\in\mathcal{I}$ (c'est un scalaire).

$$\boxed{f\in\mathcal{A}(\mathcal{I},\mathbb{K}).}$$

- Le vecteur nul est l'application qui à tout $x\in\mathcal{I}$ associe $0_{\mathbb{K}}$. On l'appelle l'application nulle.

Cas particulier : les suites à valeurs dans $\mathbb{K}$

- L'ensemble $E = \mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ muni des deux lois $+$ et $\cdot$ définies pour toutes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ par :

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} &\overset{\text{déf.}}{=} (u_n +_{\mathbb{K}} v_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \alpha \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} &\overset{\text{déf.}}{=} (\alpha \times_{\mathbb{K}} u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

  possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- Un vecteur de $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à ne pas confondre avec son terme général u_n (c'est un scalaire).

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{K}).}$$

- Le vecteur nul est la suite de terme général nul.

Propriétés élémentaires

Proposition 1.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On a les propriétés suivantes :
- *Pour tout vecteur $\vec{x}$ appartenant à E, $0_{\mathbb{K}} \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$.*
- *Pour tout scalaire α dans $\mathbb{K}$, $\alpha \cdot \vec{0}_E = \vec{0}_E$.*
- *Pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ et pour tout vecteur $\vec{x} \in E$*

$$(-\alpha) \cdot \vec{x} = -(\alpha \cdot \vec{x}) = \alpha \cdot (-\vec{x}).$$

- *Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\vec{x} \in E$. Alors*

$$\alpha \cdot \vec{x} = \vec{0}_E \iff \left(\alpha = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } \vec{x} = \vec{0}_E\right).$$

Remarque

Afin d'alléger les écritures, on note $\alpha\vec{x}$ au lieu de $\alpha \cdot \vec{x}$.

Combinaison linéaire de vecteurs
Cas d'une famille finie

Définition 1.2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p \in E$. On dit que le vecteur $\vec{x} \in E$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ si

$$\exists(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p \quad \vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_p\vec{v}_p.$$

Les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ de $\mathbb{K}$ se nomment coefficients de la combinaison linéaire.

Exemple 1.1

Tout vecteur $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$ est combinaison linéaire des trois vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ et $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Combinaison linéaire de vecteurs
Cas d'une famille infinie

On dit qu'un vecteur $\vec{x}$ de E est combinaison linéaire de la famille infinie $(\vec{v}_i)_{i\in I}$ s'il existe $J \subset I$ tel que $\text{card}(J) < +\infty$ et si

$$\exists(\alpha_i)_{i\in J} \subset \mathbb{K}^J \quad \vec{x} = \sum_{i\in J} \alpha_i \vec{v}_i.$$

Les scalaires α_i, $i \in J$, se nomment encore coefficients de la combinaison linéaire. Ils sont en nombre fini.

Exemple 1.2

Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est combinaison linéaire de la famille infinie $(X^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1_{\mathbb{K}[X]}, X, \ldots, X^n, X^{n+1}, \ldots)$. Par exemple, si $P = 12X^{17} - X$ alors $J = \{1, 17\}$ et $\alpha_1 = -1, \alpha_{17} = 12$ car

$$P = \sum_{i\in\{1,17\}} \alpha_i X^i = \alpha_1 X + \alpha_{17} X^{17}.$$

Plan du cours

Préambule : l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons l'ensemble suivant :

$$\mathbb{K}_n[X] \overset{\text{déf.}}{=} \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leqslant n\}.$$

On remarque les points suivants :
- $0_{\mathbb{K}[X]} \in \mathbb{K}_n[X]$ car $\deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$.
- Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ alors $P + Q \in \mathbb{K}_n[X]$.
- Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ alors $\alpha P \in \mathbb{K}_n[X]$.
- Plus généralement, pour tous P, Q dans $\mathbb{K}_n[X]$ et tous α, β dans $\mathbb{K}$,

$$\alpha P + \beta Q \in \mathbb{K}_n[X].$$

En résumé, on dit que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace $\mathbb{K}[X]$.

Préambule : les suites de Fibonacci généralisées

Soit F l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Connaissons-nous des suites qui appartiennent à F ? Oui :
- la suite de Fibonacci (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, etc),
- la suite de Lucas (2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, etc).

On remarque les points suivants :
- La suite nulle appartient à F.
- Pour tous $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans F et tous α, β dans $\mathbb{C}$,

$$\alpha(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F.$$

En résumé, on dit que F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace des suites complexes.

Préambule : équation différentielle homogène

Soit $\mathcal{S}_0$ l'ensemble de toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène suivante :

$$(\mathrm{E}_0) \quad ay'' + by' + cy = 0$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. On remarque les points suivants :
- L'application nulle est solution sur $\mathbb{R}$ de (E_0).
- Si $y_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$, $y_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ sont deux solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_0) alors, pour tous α, β dans $\mathbb{K}$, $\alpha y_1 + \beta y_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ est aussi solution sur $\mathbb{R}$ de (E_0).

En résumé, on dit que l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_0) est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

Définition

Définition 2.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace et F un sous-ensemble de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E (notation abrégée : s.e.v.) si $F \neq \emptyset$ et si

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall\vec{x} \in F \quad \forall\vec{y} \in F \quad \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in F.$$

Remarques

- Un sous-espace F de E n'est jamais vide puisque $\vec{0}_E \in F$.
- Les deux sous-ensembles $\{\vec{0}_E\}$ et E constituent deux sous-espaces vectoriels triviaux de E.

Proposition 2.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace et F un sous-ensemble de E. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors F est un $\mathbb{K}$-espace.

Remarques

- Si G s.e.v. de F et F s.e.v. de E alors G s.e.v. de E.
- Si F est un sous-espace de E alors $\complement_E(F)$ n'est pas un sous-espace de E car $\vec{\mathbf{0}}_E \notin \complement_E(F)$.

Exemple 2.1

- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\vec{\boldsymbol{u}} \in E$. L'ensemble

$$\mathbb{K}\vec{\boldsymbol{u}} \overset{\text{déf.}}{=} \{\alpha\vec{\boldsymbol{u}} \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

- Soit $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$. L'ensemble

$$F = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{K}^3 \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$.

Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 2.2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou infinie) de sous-espaces vectoriels de E. Alors l'intersection $H = \bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 2.2

- Soient $F_1 = \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $F_3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$. Alors :

$$F_1 \cap F_3 = \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\} = \{(0,x_2,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Ainsi, $F_1 \cap F_3 = \mathbb{R}\vec{\boldsymbol{e}}_2$ avec $\vec{\boldsymbol{e}}_2 = (0,1,0)$.

- Si $\vec{\boldsymbol{u}}$ et $\vec{\boldsymbol{v}}$ désignent deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$ alors $\mathbb{R}\vec{\boldsymbol{u}} \cap \mathbb{R}\vec{\boldsymbol{v}} = \{\vec{\mathbf{0}}_{\mathbb{R}^2}\}$.

Remarques

- L'intersection de sous-espaces F et G d'un même espace E n'est jamais vide : elle contient au moins le vecteur nul.

$$\vec{\mathbf{0}}_E \in F \cap G.$$

- Considérons les deux sous-espaces F_1 et F_2 de l'espace produit $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$F_1 = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x_1,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}\},$$
$$F_2 = \{0\} \times \mathbb{R} = \{(0,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Alors, l'ensemble $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ puisque $(1,0) \in F_1$ et $(0,1) \in F_2$ et

$$(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin F_1 \cup F_2.$$

Sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs

Soient $\vec{\boldsymbol{v}}_1,\ldots,\vec{\boldsymbol{v}}_m$ des vecteurs d'un même $\mathbb{K}$-espace E.

- Soit $\vec{\boldsymbol{x}}$ une combinaison linéaire de $(\vec{\boldsymbol{v}}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$:

$$\exists(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in \mathbb{K}^m \quad \vec{\boldsymbol{x}} = \alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \ldots + \alpha_m\vec{\boldsymbol{v}}_m,$$

- Soit $\vec{\boldsymbol{y}}$ une combinaison linéaire de $(\vec{\boldsymbol{v}}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$:

$$\exists(\beta_1,\ldots,\beta_m) \in \mathbb{K}^m \quad \vec{\boldsymbol{y}} = \beta_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \ldots + \beta_m\vec{\boldsymbol{v}}_m.$$

- Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$. Que pouvons-nous dire de $\alpha\vec{\boldsymbol{x}} + \beta\vec{\boldsymbol{y}}$?

$$\begin{aligned}\alpha\vec{\boldsymbol{x}} + \beta\vec{\boldsymbol{y}} &= \alpha(\alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \ldots + \alpha_m\vec{\boldsymbol{v}}_m) + \beta(\beta_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \ldots + \beta_m\vec{\boldsymbol{v}}_m)\\ &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \ldots + (\alpha\alpha_m + \beta\beta_m)\vec{\boldsymbol{v}}_m\end{aligned}$$

avec $\alpha\alpha_i + \beta\beta_i \in \mathbb{K}$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

- Rappelons que $\vec{\mathbf{0}}_E$ est combinaison linéaire de n'importe quelle famille de vecteurs.

Définition 2.2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (\vec{\boldsymbol{v}}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle sous-espace engendré par la famille $\mathcal{F}$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_m$. Autrement dit,

$$\text{Vect}\,(\vec{\boldsymbol{v}}_1,\ldots,\vec{\boldsymbol{v}}_m) \overset{\text{déf.}}{=} \left\{\alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \ldots + \alpha_m\vec{\boldsymbol{v}}_m \;\middle|\; (\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in \mathbb{K}^m\right\}.$$

La famille $(\vec{\boldsymbol{v}}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ est alors dite génératrice du sous-espace Vect $(\vec{\boldsymbol{v}}_1,\ldots,\vec{\boldsymbol{v}}_m)$.

Remarque

En particulier, $\text{Vect}(\vec{\mathbf{0}}_E) = \{\vec{\mathbf{0}}_E\}$.

Remarque

Le sous-espace engendré par une famille de vecteurs ne change pas lorsqu'on modifie l'ordre des vecteurs. Par exemple,

$$\text{Vect}\,(\vec{\boldsymbol{u}}_1,\vec{\boldsymbol{u}}_2,\vec{\boldsymbol{u}}_3) = \text{Vect}\,(\vec{\boldsymbol{u}}_2,\vec{\boldsymbol{u}}_3,\vec{\boldsymbol{u}}_1).$$

Exemple 2.3

Soit $\vec{\boldsymbol{u}}$ un vecteur d'un $\mathbb{K}$-espace E. On a

$$\text{Vect}\,(\vec{\boldsymbol{u}}) \overset{\text{déf.}}{=} \left\{\alpha\vec{\boldsymbol{u}} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{K}\right\} \overset{\text{not.}}{=} \mathbb{K}\vec{\boldsymbol{u}}.$$

En particulier :

- Si $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\mathbf{0}}_E$ alors $\text{Vect}\,(\vec{\boldsymbol{u}}) = \{\vec{\mathbf{0}}_E\}$.
- Si $\vec{\boldsymbol{u}} \neq \vec{\mathbf{0}}_E$ alors $\text{Vect}\,(\vec{\boldsymbol{u}})$ est appelée droite vectorielle engendrée par $\vec{\boldsymbol{u}}$.

Exemple 2.4

Soient $\vec{\boldsymbol{u}}$ et $\vec{\boldsymbol{v}}$ deux vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace E. On a

$$\text{Vect}\,(\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}}) \overset{\text{déf.}}{=} \left\{\alpha\vec{\boldsymbol{u}} + \beta\vec{\boldsymbol{v}} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K}\right\}.$$

Si $\vec{\boldsymbol{u}} \neq \gamma\vec{\boldsymbol{v}}$ pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$ et $\vec{\boldsymbol{v}} \neq \gamma'\vec{\boldsymbol{u}}$ pour tout $\gamma' \in \mathbb{K}$ alors $\text{Vect}\,(\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}})$ est appelé plan vectoriel engendré par $\vec{\boldsymbol{u}}$ et $\vec{\boldsymbol{v}}$.

Remarques

- Supposons qu'il existe $\gamma \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{\boldsymbol{u}} = \gamma\vec{\boldsymbol{v}}$.
  - Si $\vec{\boldsymbol{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}_E$ alors $\text{Vect}\,(\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}})$: droite vect. engendrée par $\vec{\boldsymbol{v}}$.
  - Si $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\mathbf{0}}_E$ alors $\text{Vect}\,(\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}}) = \{\vec{\mathbf{0}}_E\}$.
- Supposons qu'il existe $\gamma' \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{\boldsymbol{v}} = \gamma'\vec{\boldsymbol{u}}$.
  - Si $\vec{\boldsymbol{u}} \neq \vec{\mathbf{0}}_E$ alors $\text{Vect}\,(\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}})$: droite vect. engendrée par $\vec{\boldsymbol{u}}$.
  - Si $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\mathbf{0}}_E$ alors $\text{Vect}\,(\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}}) = \{\vec{\mathbf{0}}_E\}$.

Soient $\vec{\boldsymbol{u}}$ et $\vec{\boldsymbol{v}}$ deux vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace E. Désignons par F le sous-espace engendré par ces deux vecteurs.

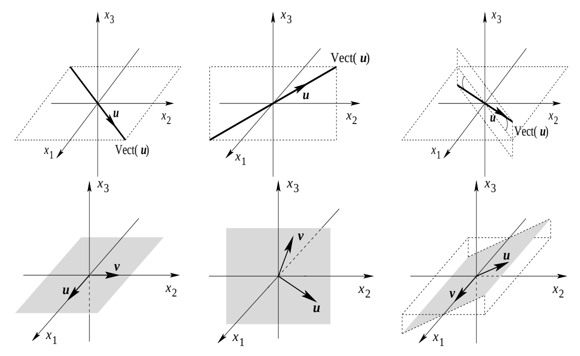
$$F = \text{Vect}\,(\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}}).$$

Quels sont les sous-espaces de F ? Suggestions :

- $\{\vec{\mathbf{0}}_E\}$ sous-espace vectoriel de F ? oui.
- $\mathbb{K}\vec{\boldsymbol{u}}$ sous-espace vectoriel de F ? oui.
- $\mathbb{K}\vec{\boldsymbol{v}}$ sous-espace vectoriel de F ? oui.
- $\mathbb{K}(\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}})$ sous-espace vectoriel de F ? oui.
- $\mathbb{K}(-\vec{\boldsymbol{u}} + 17\vec{\boldsymbol{v}})$ sous-espace vectoriel de F ? oui.

Plus généralement, on vérifie que si $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ alors $\mathbb{K}(\lambda\vec{\boldsymbol{u}} + \mu\vec{\boldsymbol{v}})$ est aussi un sous-espace vectoriel de F.

Exemples de sous-espaces engendrés dans $\mathbb{R}^3$



Proposition 2.3

Soient E un $\mathbb{K}$-espace et $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}$ des vecteurs de E. Si $\vec{v}_{m+1}$ est combinaison linéaire des m autres vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ alors

$$\mathrm{Vect}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}\right) = \mathrm{Vect}\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\right).$$

En particulier, $\mathrm{Vect}\left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \vec{0}_E\right) = \mathrm{Vect}\left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\right)$.

Exemple 2.5

Considérons dans $\mathbb{R}^4$ les trois vecteurs

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 0, -1), \quad \vec{v}_2 = (1, 2, 1, 0), \quad \vec{v}_3 = (3, 5, 2, -1).$$

On a : $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$. D'où $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

Remarque

Une conséquence est que l'on a :

$$\mathrm{Vect}\left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_m\right) = \mathrm{Vect}\Big(\vec{v}_1, \ldots, \alpha\vec{v}_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} \beta_j \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_m\Big)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et pour tout $\beta_j \in \mathbb{K}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{i\}$.

Cela signifie que

- on ne modifie pas l'espace engendré par une famille de vecteurs lorsqu'on multiplie un des vecteurs par un scalaire non nul,
- on ne modifie pas l'espace engendré par une famille de vecteurs lorsqu'on additionne à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres (et uniquement des autres) vecteurs.

ATTENTION L'opération qui consiste à additionner à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs doit être manipulée avec précaution.

Convaincu ? Considérons par exemple deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ d'un $\mathbb{K}$-espace E. Supposons $\vec{v}_1 \neq \gamma\vec{v}_2$ et $\vec{v}_2 \neq \gamma\vec{v}_1$ pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$. On a :

$$\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_2)$$

mais on a :

$$\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \neq \mathrm{Vect}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \mathbb{K}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

En effet, ni $\vec{v}_1$, ni $\vec{v}_2$ n'appartiennent à la droite vectorielle $\mathbb{K}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$.

Plan du cours

Famille liée

Définition 3.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (\vec{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille ***finie*** *de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est liée si l'on peut trouver des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ dans $\mathbb{K}$ dont un au moins est non nul et tels que :*

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_p\vec{v}_p = \vec{0}_E.$$

On dit alors que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ sont linéairement dépendants.

Autrement dit, la famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ est liée si

$$\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$$
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \neq (0, \ldots, 0) \quad \text{et} \quad \alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_p\vec{v}_p = \vec{0}_E.$$

Exemple 3.1

- Dans $\mathbb{C}^4$, les trois vecteurs

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (0, 2, 2\mathrm{i}, 6), \quad \vec{v}_3 = (1, \mathrm{i}, 0, 1 + 3\mathrm{i})$$

  sont liés puisque $\vec{v}_1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0}_{\mathbb{C}^4}$.

Remarques

- Pour une famille de vecteurs, la propriété d'être « liée » ne change pas si l'on réarrange l'ordre des vecteurs. Par exemple, si $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est liée alors $\mathcal{F}' = (\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1)$ est aussi liée.
- Lorsque **deux** vecteurs d'un même espace vectoriel sont liés, on dit qu'ils sont colinéaires.
- Lorsque **trois** vecteurs d'un même espace vectoriel sont liés, on dit qu'ils sont coplanaires.

Famille libre

Définition 3.2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (\vec{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille ***finie*** *de vecteurs de E. Si la famille n'est pas liée, on dit qu'elle est libre. On dit alors que les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ sont linéairement indépendants.*

Comment montrer qu'une famille est libre ?
La propriété pour une famille $\mathcal{F}$ d'être « libre » est la négation de celle d'être « liée » :

$$\text{« } \mathcal{F} \text{ est libre »} = \text{non}\,(\text{« } \mathcal{F} \text{ est liée »}).$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ est libre si

$$\forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$$
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = (0, \ldots, 0) \quad \text{ou} \quad \alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_p\vec{v}_p \neq \vec{0}_E.$$

Rappelons que : (non(P) ou Q) $\equiv$ ($P \implies Q$). Ainsi,

$$\overbrace{\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_p\vec{v}_p \neq \vec{0}_E}^{=\text{non}(P)} \quad \text{ou} \quad \overbrace{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = (0, \ldots, 0)}^{=Q}$$

$$\equiv$$

$$\underbrace{\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_p\vec{v}_p = \vec{0}_E}_{=P} \quad \implies \quad \underbrace{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = (0, \ldots, 0)}_{=Q}.$$

En d'autres termes, pour montrer que $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p)$ est une famille libre, il convient de montrer que la relation

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_p\vec{v}_p = \vec{0}_E \quad \text{(appelée relation de liaison)}$$

entraîne : $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0_{\mathbb{K}}$.

Exemple 3.2

- Dans $\mathbb{K}^4$, la famille $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ où

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$$

  est libre. En effet, la relation de liaison

$$\alpha_1(1, 0, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, 0) + \alpha_3(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

  est équivalente à :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0) = (0, 0, 0, 0).$$

  On en déduit, par identification, que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{F}_n = \left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 3.1 (Caractérisation d'une famille liée)

Une famille est liée si, et seulement si, un de ses vecteurs peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Exemple 3.3

Dans $\mathbb{R}^4$ les trois vecteurs

$$\vec{\boldsymbol{v}}_1 = (1, 1, 0, -1), \quad \vec{\boldsymbol{v}}_2 = (1, 2, 1, 0) \quad \text{et} \quad \vec{\boldsymbol{v}}_3 = (3, 5, 2, -1)$$

sont liés puisque l'un des vecteurs s'exprime comme une combinaison linéaire des deux autres vecteurs. On a en effet :

$$\vec{\boldsymbol{v}}_3 = \vec{\boldsymbol{v}}_1 + 2\vec{\boldsymbol{v}}_2.$$

La méthode permettant d'obtenir cette relation sera explicitée ultérieurement (méthodes « des zéros échelonnés »).

Remarques

- La famille constituée d'un seul vecteur est liée si, et seulement si, ce vecteur est nul.
- Toute famille contenant le vecteur nul est nécessairement liée. Par exemple, dans $\mathbb{R}^4$, les trois vecteurs

  $$\vec{\boldsymbol{v}}_1 = (1, -2, 12, 17), \ \vec{\boldsymbol{v}}_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0, -7), \ \vec{\boldsymbol{v}}_3 = (0, 0, 0, 0)$$

  sont liés puisque $0\vec{\boldsymbol{v}}_1 + 0\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \vec{\boldsymbol{v}}_3 = \vec{\boldsymbol{0}}_{\mathbb{R}^4}$.

Proposition 3.2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace et $\mathcal{F}$ une famille de E.

- *Si $\mathcal{F}$ est libre alors toute sous-famille $\mathcal{F}'$ est libre.*
- *Si $\mathcal{F}$ est liée alors toute sur-famille $\mathcal{F}'$ est liée.*

Remarque

Soient E un $\mathbb{K}$-espace et $\vec{\boldsymbol{v}} \in E$. Alors $\mathcal{F} = (\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{v}})$ est liée. En effet, on peut écrire ($\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$) :

$$\alpha\vec{\boldsymbol{v}} - \alpha\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{0}}_E.$$

Ainsi, toute famille comportant deux vecteurs égaux est liée.

Attention Si des vecteurs forment une famille libre alors ils sont nécessairement tous distincts. La réciproque est bien évidemment fausse. Par exemple, dans $\mathbb{R}^4$, les trois vecteurs

$$\vec{\boldsymbol{v}}_1 = (1, 1, 0, -1), \ \vec{\boldsymbol{v}}_2 = (1, 2, 1, 0), \ \vec{\boldsymbol{v}}_3 = (3, 5, 2, -1)$$

sont distincts. Ils sont liés.

Écriture sous forme échelonnée

On considére les quatre vecteurs $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{d}}$ de $\mathbb{K}^5$ que nous plaçons en lignes superposées :

$$\begin{array}{lcl} \vec{\boldsymbol{a}} &=& (\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\ ) \text{ avec } a_1 \neq 0, \\ \vec{\boldsymbol{b}} &=& (\ 0,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\ ) \text{ avec } b_2 \neq 0, \\ \vec{\boldsymbol{c}} &=& (\ 0,\ 0,\ c_3,\ c_4,\ c_5\ ) \text{ avec } c_3 \neq 0, \\ \vec{\boldsymbol{d}} &=& (\ 0,\ 0,\ 0,\ d_4,\ d_5\ ) \text{ avec } d_4 \neq 0. \end{array}$$

La relation de liaison $\alpha_1\vec{\boldsymbol{a}} + \alpha_2\vec{\boldsymbol{b}} + \alpha_3\vec{\boldsymbol{c}} + \alpha_4\vec{\boldsymbol{d}} = \vec{\boldsymbol{0}}_{\mathbb{K}^5}$ s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_1 a_1 &=& 0 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 &=& 0 \\ \alpha_1 a_3 + \alpha_2 b_3 + \alpha_3 c_3 &=& 0 \\ \alpha_1 a_4 + \alpha_2 b_4 + \alpha_3 c_4 + \alpha_4 d_4 &=& 0 \\ \alpha_1 a_5 + \alpha_2 b_5 + \alpha_3 c_5 + \alpha_4 d_5 &=& 0 \end{array} \right.$$

D'où $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$: la famille $\left(\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{d}}\right)$ est libre.

Proposition 3.3

Soient E un $\mathbb{K}$-espace et $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_m \in E$. Toute famille d'au moins $m+1$ vecteurs appartenant à Vect $(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_m)$ est liée.

Par exemple, soient E un $\mathbb{K}$-espace et $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_3$ trois vecteurs quelconques de E. Considérons les 4 vecteurs $\vec{\boldsymbol{x}}_1, \vec{\boldsymbol{x}}_2, \vec{\boldsymbol{x}}_3, \vec{\boldsymbol{x}}_4$:

$$\left\{ \begin{array}{lcrcrcr} \vec{\boldsymbol{x}}_1 &=& 3\vec{\boldsymbol{v}}_1 &+& \vec{\boldsymbol{v}}_2 &+& \vec{\boldsymbol{v}}_3 \\ \vec{\boldsymbol{x}}_2 &=& \vec{\boldsymbol{v}}_1 &-& 2\vec{\boldsymbol{v}}_2 &+& \vec{\boldsymbol{v}}_3 \\ \vec{\boldsymbol{x}}_3 &=& -\vec{\boldsymbol{v}}_1 &-& 2\vec{\boldsymbol{v}}_2 &+& \vec{\boldsymbol{v}}_3 \\ \vec{\boldsymbol{x}}_4 &=& \vec{\boldsymbol{v}}_1 &-& \vec{\boldsymbol{v}}_2 &+& \vec{\boldsymbol{v}}_3 \end{array} \right. .$$

Ces 4 vecteurs appartiennent à Vect $(\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_3)$. Ils sont nécessairement liés. On peut d'ailleurs obtenir la relation de liaison :

$$\vec{\boldsymbol{x}}_1 + \vec{\boldsymbol{x}}_2 + \vec{\boldsymbol{x}}_3 - 3\vec{\boldsymbol{x}}_4 = \vec{\boldsymbol{0}}_E.$$

Corollaire 3.1

Si un espace E est engendré par m vecteurs alors toute famille constituée d'au moins $m+1$ vecteurs appartenant à E est liée.

Considérons par exemple le $\mathbb{K}$-espace produit $E = \mathbb{K}^3$. Alors les trois vecteurs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ engendrent $\mathbb{K}^3$. Pour s'en convaincre, soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$. On a :

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1).$$

Alors, toute famille constituée d'au moins $3 + 1 = 4$ vecteurs de $\mathbb{K}^3$ est nécessairement liée. C'est le cas par exemple des quatre vecteurs :

$$(1, 1, 0), \ (1, 2, 1), \ (3, 5, 2), \ (12, 2, -3).$$

Base algébrique

Définition 3.3

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathcal{B}$ est une base algébrique de E si $\mathcal{B}$ est à la fois une famille libre dans E et une famille génératrice de E.

Cas d'une famille finie - La famille finie $\mathcal{B} = (\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n)$ est une base de E si pour tout vecteur $\vec{\boldsymbol{x}} \in E$

$$\exists\,!\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \quad \vec{\boldsymbol{x}} = \alpha_1\vec{\boldsymbol{e}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{\boldsymbol{e}}_n.$$

Les éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de $\mathbb{K}$ sont appelés les coordonnées (ou composantes) du vecteur $\vec{\boldsymbol{x}}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Cas d'une famille infinie - Soit $\mathcal{B} = (\vec{\boldsymbol{e}}_i)_{i \in I}$ avec I un ensemble infini. La famille infinie $\mathcal{B}$ est une base de E si pour tout vecteur $\vec{\boldsymbol{x}} \in E$ il existe $J \subset I$ avec card$(J) < +\infty$ tel que

$$\exists\,!\,(\alpha_i)_{i \in J} \subset \mathbb{K}^J \quad \vec{\boldsymbol{x}} = \sum_{i \in J} \alpha_i \vec{\boldsymbol{e}}_i.$$

Les éléments $(\alpha_i)_{i \in J}$ de $\mathbb{K}$ sont appelés les coordonnées du vecteur $\vec{\boldsymbol{x}}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Exemple 3.4

- Soit $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{B}_n = \left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)$: base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- $\mathcal{B}_\infty = (1, X, \ldots, X^n, \ldots)$: base de $\mathbb{K}[X]$.
- La famille $\mathcal{B} = (\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n)$ avec

  $$\vec{\boldsymbol{e}}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ \vec{\boldsymbol{e}}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ \ldots, \ \vec{\boldsymbol{e}}_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

  est une base de $\mathbb{K}^n$. C'est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Plan du cours

Définition 4.1

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

- *On dit que E est de dimension finie s'il existe une famille finie de vecteurs générateurs de E.*
- *Dans le cas contraire, E est dit de dimension infinie.*

Exemple 4.1

- Tout espace possédant une base finie est nécessairement de dimension finie. C'est par exemple le cas de $\mathbb{K}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- L'espace $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.
- Soient E un $\mathbb{K}$-espace (de dimension finie ou infinie) et $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in E$. Le sous-espace $\text{Vect}\left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\right)$ est, par construction, de dimension finie.

Considérons un espace E non réduit au vecteur nul. Supposons E de dimension finie. Cela signifie qu'il possède une famille $\mathcal{F}$ génératrice de E et finie. La famille $\mathcal{F}$ est-elle nécessairement libre ? Non.

- Si $\mathcal{F}$ est libre, c'est donc une base de E.
- Si $\mathcal{F}$ est liée alors on peut toujours extraire de $\mathcal{F}$ une sous-famille $\mathcal{F}'$ qui, elle, est libre. Il est clair que $\mathcal{F}'$ est encore génératrice de E. C'est donc une base (finie) de E.

Proposition 4.1

- *Un $\mathbb{K}$-espace (non réduit au vecteur nul) de dimension finie possède au moins une base finie.*
- *Toutes les bases d'un même espace de dimension finie ont même cardinal.*

Dimension d'un espace vectoriel

Définition 4.2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$. On appelle dimension de E le cardinal d'une base de E :

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) \overset{\text{déf.}}{=} card\,(\mathcal{B})$$

où $\mathcal{B}$ est une base de E, et on convient que $\dim_{\mathbb{K}}\left(\{\vec{0}_E\}\right) \overset{\text{déf.}}{=} 0$.

Exemple 4.2

- $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$. En particulier, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$.
- $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$.

Exemple 4.3

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène

$$ay'' + by' + cy = 0$$

est un $\mathbb{K}$-espace de dimension 2. Base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{S}_0$?

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors $\mathcal{B} = \left(x \longrightarrow e^{\rho_1 x}, x \longrightarrow e^{\rho_2 x}\right)$ où ρ_1 et ρ_2 sont les racines de l'équation caractéristique.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors $\mathcal{B} = \left(x \longrightarrow x e^{\tilde{\rho} x}, x \longrightarrow e^{\tilde{\rho} x}\right)$ où $\tilde{\rho}$ est l'unique racine de l'équation caractéristique.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors

$$\mathcal{B} = \left(x \longrightarrow e^{\alpha x}\cos(\beta x), x \longrightarrow e^{\alpha x}\sin(\beta x)\right)$$

où $\alpha = \mathrm{Re}(\rho)$ et $\beta = \mathrm{Im}(\rho)$ avec ρ une racine complexe de l'équation caractéristique.

Lien entre le cardinal d'une famille génératrice ou libre et celui d'une base

Proposition 4.2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$.

- *Toute famille $\mathcal{G}$ génératrice de E vérifie :*

$$card\,(\mathcal{G}) \geqslant n.$$

En particulier, toute famille génératrice constituée de n vecteurs est une base de E.

- *Toute famille $\mathcal{L}$ libre dans E vérifie :*

$$card\,(\mathcal{L}) \leqslant n.$$

En particulier, toute famille libre constituée de n vecteurs est une base de E.

Remarque

Si $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ est une famille libre dans E avec $p < n$, alors on peut trouver $n - p$ vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-p} \in E$ tels que la sur-famille

$$\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-p})$$

est une base de E.

Proposition 4.3 (Dimension d'un sous-espace vectoriel)

Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie est lui-même de dimension finie et

$$\dim_{\mathbb{K}}(F) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

En particulier, si $\dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$ alors $F = E$.

Plan du cours

Rang d'un famille finie de vecteurs

Définition 5.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace et $\mathcal{F} = \left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\right)$. On appelle rang de $\mathcal{F}$ la dimension du sous-espace (de E) engendré par $\mathcal{F}$.

$$rg\,(\mathcal{F}) \overset{\text{déf.}}{=} \dim_{\mathbb{K}}\Big(Vect\left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\right)\Big).$$

Comment calculer le rang d'une famille de vecteurs ? Il faut calculer la dimension du sous-espace $F = \text{Vect}\left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\right)$. Pour cela, il convient :

1. dans un premier temps de trouver une base de F ;
2. dans un second temps d'en calculer le cardinal.

Comment trouver une base de F ? Elle s'obtient par extraction à partir de la famille génératrice $\mathcal{F} = \left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\right)$.

Exemple 5.1

Considérons dans $\mathbb{R}^4$ la famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ avec

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 0, -1), \quad \vec{v}_2 = (1, 2, 1, 0), \quad \vec{v}_3 = (3, 5, 2, -1).$$

Soit F le sous-espace engendré par ces trois vecteurs.

1. Ces trois vecteurs sont liés car $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$. Ainsi,

$$F = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2).$$

Posons $\mathcal{F}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Il est clair que la famille $\mathcal{F}'$ est libre. Elle est aussi génératrice de F. C'est donc une base de F.

2. On a donc : $\dim_{\mathbb{K}}(F) = \text{card}(\mathcal{F}') = 2$.

On en déduit alors le rang de la famille $\mathcal{F}$:

$$rg\,(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{K}}(F) = 2.$$

Remarques

- Puissque $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ ne sont pas nécessairement libres : $\operatorname{rg}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p) \leqslant p$.
- En particulier, si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n$ alors
$$\operatorname{rg}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p) \leqslant \min\{n, p\}.$$

Définition 5.2 (Droites et plans vectoriels, hyperplans)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace de E.

- *F est appelé droite vectorielle si $\dim_{\mathbb{K}}(F) = 1$.*
- *F est appelé plan vectoriel si $\dim_{\mathbb{K}}(F) = 2$.*
- *En particulier, lorsque E est de dimension $n \geqslant 1$, le sous-espace F est appelé hyperplan vectoriel si*
$$\dim_{\mathbb{K}}(F) = n - 1.$$

La méthode des « zéros échelonnés »

But

Connaître le rang d'une famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ constituée de p vecteurs d'un espace de dimension n.

Justification

Un sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs est inchangé

- si l'on échange l'ordre des vecteurs,
- si l'on multiplie un vecteur par un scalaire non nul,
- si l'on ajoute à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Méthodologie

On décompose chacun des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ dans une base quelconque $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ de E. On obtient

$$\left\{\begin{array}{lcl} \vec{v}_1 & = & a_{11}\,\vec{e}_1 + a_{12}\,\vec{e}_2 + \ldots + a_{1n}\,\vec{e}_n \\ \vec{v}_2 & = & a_{21}\,\vec{e}_1 + a_{22}\,\vec{e}_2 + \ldots + a_{2n}\,\vec{e}_n \\ \vec{v}_3 & = & a_{31}\,\vec{e}_1 + a_{32}\,\vec{e}_2 + \ldots + a_{3n}\,\vec{e}_n \\ \vdots & & \\ \vec{v}_p & = & a_{p1}\,\vec{e}_1 + a_{p2}\,\vec{e}_2 + \ldots + a_{pn}\,\vec{e}_n \end{array}\right.$$

On dispose alors les coordonnées en lignes superposées :

$$\mathcal{T}_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & a_{p4} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

Convention et notation

On convient des notations suivantes :

- Échange des lignes L_k et $\mathrm{L}_{k'}$:
$$\mathrm{L}_k \longleftrightarrow \mathrm{L}_{k'}$$
- Multiplication de la ligne L_k par le scalaire $\alpha \in \mathbb{K}^*$:
$$\mathrm{L}_k \longleftarrow \alpha \mathrm{L}_k$$
- Addition d'une ligne à une autre ($\beta \in \mathbb{K}$) :
$$\mathrm{L}_k \longleftarrow \mathrm{L}_k + \beta \mathrm{L}_{k'}$$
- Échange de colonnes C_k et $\mathrm{C}_{k'}$:
$$\mathrm{C}_k \longleftrightarrow \mathrm{C}_{k'}.$$

Étape 1

Supposons $a_{11} \neq 0$. Le but est de faire apparaître $p-1$ zéros dans la première colonne au-dessous de a_{11} :

$$\mathrm{L}_2 \longleftarrow \mathrm{L}_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\mathrm{L}_1, \quad \mathrm{L}_3 \longleftarrow \mathrm{L}_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}\mathrm{L}_1, \quad \ldots, \quad \mathrm{L}_p \longleftarrow \mathrm{L}_p - \frac{a_{p1}}{a_{11}}\mathrm{L}_1$$

et on dit que l'on a utilisé a_{11} comme pivot. On obtient :

$$\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{p2} & a'_{p3} & a'_{p4} & \cdots & a'_{pn} \end{pmatrix}.$$

Discussion : si tous les coefficients a'_{ij} sont nuls alors $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = 1$. Sinon, on poursuit.

Étape 2

Supposons $a'_{22} \neq 0$. Le but est de faire apparaître $p-2$ zéros dans la deuxième colonne au-dessous de a'_{22} :

$$\mathrm{L}_3 \longleftarrow \mathrm{L}_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}\mathrm{L}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{L}_p \longleftarrow \mathrm{L}_p - \frac{a'_{p2}}{a'_{22}}\mathrm{L}_2$$

et, cette fois-ci, c'est a'_{22} qui a été utilisé comme pivot. On obtient le tableau :

$$\mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{p3} & a''_{p4} & \cdots & a''_{pn} \end{pmatrix}.$$

Discussion - Si tous les coefficients a''_{ij} sont nuls alors $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = 2$. Sinon, on poursuit !

. . . Étape r

et ainsi de suite, jusqu'à l'obtention à l'issue de l'**étape r** d'un tableau de la forme suivante :

$$\mathcal{T}_r = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * & \cdots & * \\ 0 & a'_{22} & \cdots & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a^{(r-1)}_{rr} & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où les coefficients $a_{11}, a'_{22}, \ldots, a^{(r-1)}_{rr}$ sont tous <u>non nuls</u>. Ce sont les pivots. On obtient

$$\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = r.$$

Exemple 5.2

Soit la famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ de $\mathbb{R}^4$ avec $\vec{v}_1 = (1, 1, 0, -1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 1, 0)$ et $\vec{v}_3 = (3, 5, 2, -1)$. On a

$$\mathcal{T}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = 2$. Les trois vecteurs sont donc liés. On a aussi :

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$$

Plan du cours

Préambule

Considérons dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ les sous-espaces vectoriels :

$$F = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)\},\ \text{(applications paires)}$$

$$G = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)\}.\ \text{(applications impaires)}$$

Il est possible d'écrire toute application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ comme la somme d'une application paire $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et d'une application impaire $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ puisque

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{=g(x)} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{=h(x)}$$

On dira que l'espace E est la somme des deux sous-espaces F et G et on notera $E = F + G$.

Définition 6.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace et F, G deux sous-espaces de E.

- *La somme de F et G est le sous-espace de E défini par*

$$F + G \stackrel{\text{déf.}}{=} \{\vec{x}_F + \vec{x}_G \mid \vec{x}_F \in F, \vec{x}_G \in G\}.$$

- *La somme de F et G est dite directe si*

$$\forall \vec{x} \in F+G \quad \exists!\, \vec{x}_F \in F \quad \exists!\, \vec{x}_G \in G \quad \vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G.$$

Les vecteurs $\vec{x}_F$ et $\vec{x}_G$ sont alors appelés les composants du vecteur $\vec{x}$ respectivement dans F et dans G. Le sous-espace $F+G$ se note alors $F \oplus G$.

- *F et G sont dits supplémentaires dans E si*

$$E = F \oplus G.$$

Remarque

- L'ensemble $F+G$ est bien un sous-espace vectoriel de E.
- Les deux sous-espaces F et G de E constituent deux sous-espaces évidents du sous-espace $F+G$.
- Si F et G sont de dimensions finies (non nécessairement égales) alors le sous-espace $F+G$ est lui-même de dimension finie et on a :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F+G) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G).$$

- Tout sous-espace d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E possède au moins un supplémentaire dans E.

Proposition 6.1

Une condition nécessaire et suffisante pour que la somme des deux sous-espaces F et G soit directe est que $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$.

Exemple 6.1

La seule application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et impaire est l'application nulle. En d'autres termes,

$$F \cap G = \{x \in \mathbb{R} \longmapsto 0 \in \mathbb{R}\}$$

où F désigne l'ensemble des applications paires et G l'ensemble des applications impaires. La somme des deux sous-espaces F et G est donc directe. On la note alors $F \oplus G$. Or, $E = F + G$. On peut alors écrire que

$$E = F \oplus G.$$

Cas d'un espace de dimension finie

Théorème 6.1 (de Grassmann)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces de E. Si F et G sont de dimensions finies alors

$$\dim_{\mathbb{K}}(F+G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G).$$

Hermann Grassmann
(1809, Stettin - 1877, Stettin).

Remarque : si F et G sont supplémentaires dans E (avec E de dimension finie) alors

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G).$$

Exemple 6.2

- Considérons dans $E = \mathbb{R}^3$ les deux sous-espaces $F = \mathbb{R}\vec{e}_1$ et $G = \mathbb{R}\vec{e}_2$. On obtient :

$$F \oplus G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\} \neq \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad F \cap G = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\}.$$

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(F \oplus G)}_{=2} = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(F)}_{=1} + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(G)}_{=1}.$$

- Considérons dans $E = \mathbb{R}^3$ les deux sous-espaces $F = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ et $G = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$. On obtient :

$$F + G = \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad F \cap G = \mathbb{R}\vec{e}_1.$$

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(F+G)}_{=3} = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(F)}_{=2} + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(G)}_{=2} - \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(F \cap G)}_{=1}.$$

Corollaire 6.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Si on a à la fois

$$\dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E) \quad \text{et} \quad F \cap G = \{\vec{0}_E\}$$

alors $E = F \oplus G$.

Exemple 6.3

Considérons dans $E = \mathbb{R}^3$ les deux sous-espaces suivants :

- la droite vectorielle $F = \mathbb{R}\vec{u}$, ce qui suppose $\vec{u} \neq \vec{0}_E$;
- le plan vectoriel $G = \mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$, ce qui suppose $\vec{v}$ et $\vec{w}$ libres entre eux.

Si $\vec{u} \notin \mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$ alors $F \cap G = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\}$. De plus,

$$\dim_{\mathbb{R}}(F) + \dim_{\mathbb{R}}(G) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3), \quad \text{d'où} \quad F \oplus G = \mathbb{R}^3.$$