Épreuve blanche
PHY 1120 : Éléments de mécanique du point
Licence Fondamentale GM, LT, GE, GC, GI/ Semestre 1
Durée : 2h

Exercice

Dans le système des coordonnées sphériques $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$. Un point M se déplace sur la surface d'une sphère de rayon R. Ses deux coordonnées sphériques sont :

$$\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM}}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi(t) = \omega t^2, \quad \omega = constante \quad positive$$

1. Trouver la vitesse et l'accélération de M dans la base sphérique.
2. Calculer les modules de la vitesse et de l'accélération,
3. en déduire l'accélération normale.

Problème

Dans un repère $R(O, XYZ)$ supposé fixe et muni de la base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, un cercle (C) de centre O_1 et de rayon a passe par l'origine O. On désigne par $R_1(O_1, X_1Y_1Z_1)$ le repère lié au cercle et muni de la base orthonormé directe $\left(\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k}\right)$. Le cercle (C) tourne dans le plan (OXY) avec la vitesse angulaire constante ω telle que $\left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i_1}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j_1}}\right) = \varphi(t) = \omega t$, comme l'indique la figure ci-dessous. Un point matériel M se déplace sur le cercle (C) avec une vitesse angulaire constante ω telle que $\left(\widehat{\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{e_\rho}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{e_\varphi}}\right) = \varphi(t) = \omega t$. On désigne par $R_2(O_1, X_2Y_2Z)$ le repère lié au point M et muni de la base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{k}\right)$.

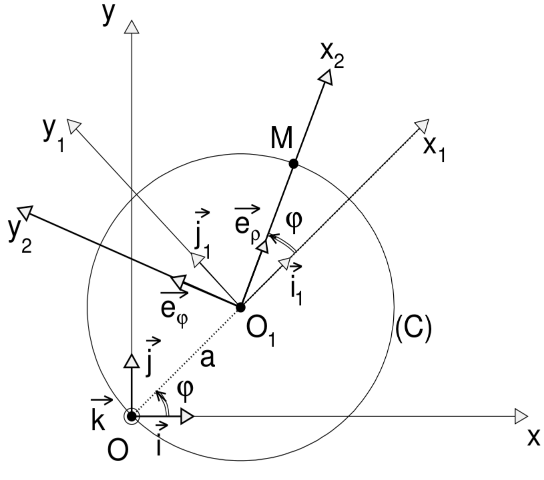

FIGURE 1 – Figure d'étude du problème

Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base $\left(\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k}\right)$.

Partie 1 : Étude du mouvement de M dans R

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{j_1}$.
2. Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ du point M.
3. En déduire la vitesse absolue et l'accélération absolue du point M.

Partie 2 : Étude du mouvement de M dans R_1

On suppose que $R_1\left(O_1, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k}\right)$ est le repère relatif, $R\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ étant le repère absolu.

1. Vérifier que le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}\left(R_1/R\right) = \omega \overrightarrow{k}$.
2. Déterminer la vitesse relative $\overrightarrow{V_r} = \overrightarrow{V\left(M/R_1\right)}$ et la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{V_e}$ du point M.
3. Déterminer l'accélération relative $\overrightarrow{a_r} = \overrightarrow{a\left(M/R_1\right)}$, l'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c}$ du point M.
4. En déduire la vitesse absolue $\overrightarrow{V\left(M/R\right)}$ et l'accélération absolue $\overrightarrow{a\left(M/R\right)}$ du point M. Comparer les résultats trouvés avec ceux calculés en **Partie 1-3.**.

Partie 3 : Étude du mouvement de M dans R_2

On suppose dans ce cas que le repère $R_2\left(O_{2,}\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{k}\right)$ est repère relatif, $R\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ étant le repère absolu.

1. Déterminer $\overrightarrow{\Omega}\left(R_2/R_1\right)$. En déduire que $\overrightarrow{\Omega}\left(R_2/R\right) = 2\omega \overrightarrow{k}$.
2. Déterminer la vitesse relative $\overrightarrow{V_r} = \overrightarrow{V\left(M/R_2\right)}$ et la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{V_e}$ du point M.
3. Déterminer l'accélération relative $\overrightarrow{a_r} = \overrightarrow{a\left(M/R_2\right)}$, l'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c}$ du point M.
4. En déduire la vitesse absolue $\overrightarrow{V\left(M/R\right)}$ et l'accélération absolue $\overrightarrow{a\left(M/R\right)}$ du point M. Comparer les résultats trouvés avec ceux calculés en **Partie 1-3.** et en **Partie 2-4.**