证明题

1. 证明: $\mathrm{E}\left(y_0-\hat{f}\left(x_0\right)\right)^2=\operatorname{Var}\left(\hat{f}\left(x_0\right)\right)+\left[\operatorname{Bias}\left(\hat{f}\left(x_0\right)\right)\right]^2+\operatorname{Var}(\epsilon)$

2. 试证明：二元线性回归模型

$$Y_i=\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\mu_i$$

中变量 X_1 与 X_2 的参数的普通最小二乘估计可以写成

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_1&=\frac{\left(\sum y_i x_{i1}\right)\left(\sum x_{i2}^2\right)-\left(\sum y_i x_{i2}\right)\left(\sum x_{i1} x_{i2}\right)}{\sum x_{i1}^2 \sum x_{i2}^2\left(1-r^2\right)} \\
\hat{\beta}_2&=\frac{\left(\sum y_i x_{i2}\right)\left(\sum x_{i1}^2\right)-\left(\sum y_i x_{i1}\right)\left(\sum x_{i1} x_{i2}\right)}{\sum x_{i1}^2 \sum x_{i2}^2\left(1-r^2\right)}
\end{aligned}$$

其中, r 为 X_1 与 X_2 的相关系数。讨论 r 等于或接近于 1 时, 该模型的估计问题。

3. 对一元回归模型

$$Y_i=\beta_0+\beta_1 X_i+\mu_i$$

假如其他基本假设全部满足，但 $\operatorname{Var}\left(\mu_i\right)=\sigma_i^2 \neq \sigma^2$ ，试证明估计的斜率项仍是无偏的, 但方差变为

$$\operatorname{Var}\left(\tilde{\beta}_1\right)=\frac{\sum x_i^2 \sigma_i^2}{\left(\sum x_i^2\right)^2}$$