1 已知两个一维模式类别的类概率密度函数为

$$p(x|\omega_1)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 2-x, & 1\le x\le 2 \\ 0, & else \end{cases}$$

$$p(x|\omega_2)=\begin{cases} x-1, & 1\le x<2 \\ 3-x, & 2\le x\le 3 \\ 0, & else \end{cases}$$

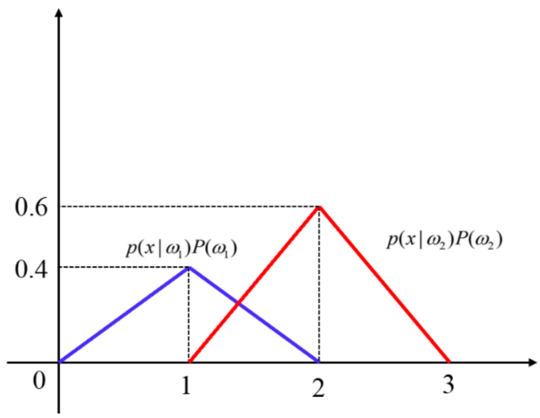
先验概率分别为 $p(\omega_1)=0.4, p(\omega_2)=0.6$。试求最大后验概率判决函数以及总的分类错误概率 $P(e)$。

解：

$$p(\boldsymbol{X}|\omega_1)P(\omega_1)>p(\boldsymbol{X}|\omega_2)P(\omega_2)\Rightarrow \boldsymbol{X}\in\omega_1$$
$$p(\boldsymbol{X}|\omega_1)P(\omega_1)>p(\boldsymbol{X}|\omega_2)P(\omega_2)\Rightarrow \boldsymbol{X}\in\omega_2$$

$$p(x|\omega_1)P(\omega_1)=\begin{cases} 0.4x, & 0\le x<1 \\ 0.8-0.4x, & 1\le x\le 2 \\ 0, & else \end{cases}$$

$$p(x|\omega_2)P(\omega_2)=\begin{cases} 0.6x-0.6, & 1\le x<2 \\ 1.8-0.6x, & 2\le x\le 3 \\ 0, & else \end{cases}$$



$0<x<1$:

$p(x|\omega_1)P(\omega_1)=0.4x$

$p(x|\omega_2)P(\omega_2)=0$

$p(x|\omega_1)P(\omega_1)>p(x|\omega_2)P(\omega_2)\Rightarrow x\in\omega_1$

$1\le x<2$:

$p(x|\omega_1)P(\omega_1)=0.8-0.4x$

$p(x|\omega_2)P(\omega_2)=0.6x-0.6$

$s.t.\, p(x|\omega_1)P(\omega_1)=p(x|\omega_2)P(\omega_2)\Rightarrow x=1.4$

$1\le x<1.4$:

$p(x|\omega_1)P(\omega_1)>p(x|\omega_2)P(\omega_2)\Rightarrow x\in\omega_1$

$1.4<x<2$:

$p(x|\omega_1)P(\omega_1)<p(x|\omega_2)P(\omega_2)\Rightarrow x\in\omega_2$

$2\le x<3$:

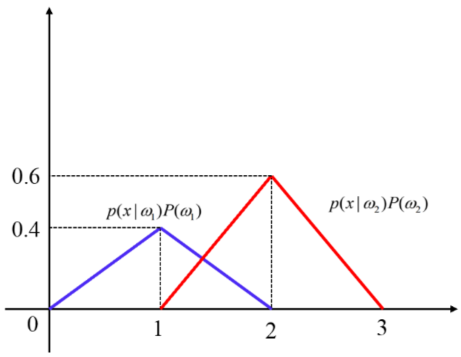
$p(x|\omega_1)P(\omega_1)=0$

$p(x|\omega_2)P(\omega_2)=1.8-0.6x$

$p(x|\omega_1)P(\omega_1)<p(x|\omega_2)P(\omega_2)\Rightarrow x\in\omega_2$

综上，

$$\begin{cases} \omega_1, & 0<x<1.4 \\ \omega_2, & 1.4<x<3 \\ \text{无法判断}, & otherwise \end{cases}$$



分类错误概率：

$$P(e)=\int_0^{1.4} p(x|\omega_2)P(\omega_2)\mathrm{d}x+\int_{1.4}^{3} p(x|\omega_1)P(\omega_1)\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^{1.4}(0.6x-0.6)\mathrm{d}x+\int_{1.4}^{2}(0.8-0.4x)\mathrm{d}x=0.12$$

2 在图像识别中，假定有灌木丛和坦克两种类型，它们的先验概率分别是 0.8 和 0.2，损失函数如下表所示，其中 ω_1 和 ω_2 分别表示灌木丛和坦克，α_1 和 α_2 表示判决为灌木丛和坦克，α_3 表示拒绝判决。

	ω_1	ω_2
α_1	0.5	6
α_2	2	1
α_3	1.5	1.5

现在做了三次实验，从类概率密度函数曲线上查得三个样本 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 的类概率密度值如下：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{X}_1: p(\boldsymbol{X}_1|\omega_1)=0.1, p(\boldsymbol{X}_1|\omega_2)=0.7 \\ &\boldsymbol{X}_2: p(\boldsymbol{X}_2|\omega_1)=0.3, p(\boldsymbol{X}_2|\omega_2)=0.45 \\ &\boldsymbol{X}_3: p(\boldsymbol{X}_3|\omega_1)=0.6, p(\boldsymbol{X}_3|\omega_2)=0.5 \end{aligned}$$

(1) 试用贝叶斯最小误判概率准则判决三个样本各属于哪一个类型。

(2) 假定只考虑前两种判决，试用贝叶斯最小风险判决准则判决三个样本各属于哪一个类型。

(3) 把拒绝判决考虑在内，重新考核三次实验的结果。

解：

(1) 贝叶斯最小误判准则：

$$p(\boldsymbol{X}|\omega_1)P(\omega_1) > p(\boldsymbol{X}|\omega_2)P(\omega_2) \Rightarrow \boldsymbol{X} \in \omega_1$$
$$p(\boldsymbol{X}|\omega_1)P(\omega_1) > p(\boldsymbol{X}|\omega_2)P(\omega_2) \Rightarrow \boldsymbol{X} \in \omega_2$$

$$P(\omega_1) = 0.8, P(\omega_2) = 0.2$$
$$P(\omega_1)P(X_1|\omega_1) = 0.08 < P(\omega_2)P(X_1|\omega_2) = 0.14, X_1 \in \omega_2$$
$$P(\omega_1)P(X_2|\omega_1) = 0.24 > P(\omega_2)P(X_2|\omega_2) = 0.09, X_2 \in \omega_1$$
$$P(\omega_1)P(X_3|\omega_1) = 0.48 > P(\omega_2)P(X_3|\omega_2) = 0.1, X_1 \in \omega_1$$

（2）只考虑前两种判决，用贝叶斯最小风险判决准则判决三个样本：

$$P(\omega_1|X_1)=\frac{P(X_1|\omega_1)P(\omega_1)}{P(X_1|\omega_1)P(\omega_1)+P(X_1|\omega_2)P(\omega_2)}=\frac{P(X_1|\omega_1)P(\omega_1)}{C}$$

$$R(\alpha_1|X_1) = \lambda_{11}P(\omega_1|X_1) + \lambda_{12}P(\omega_2|X_1) = \frac{0.88}{C_1} > R(\alpha_2|X_1) = \lambda_{21}P(\omega_1|X_1) + \lambda_{22}P(\omega_2|X_1) = \frac{0.3}{C_1}$$
$$R(\alpha_1|X_2) = \lambda_{11}P(\omega_1|X_2) + \lambda_{12}P(\omega_2|X_2) = \frac{0.66}{C_2} > R(\alpha_2|X_2) = \lambda_{21}P(\omega_1|X_2) + \lambda_{22}P(\omega_2|X_2) = \frac{0.57}{C_2}$$
$$R(\alpha_1|X_3) = \lambda_{11}P(\omega_1|X_3) + \lambda_{12}P(\omega_2|X_3) = \frac{0.84}{C_3} < R(\alpha_2|X_3) = \lambda_{21}P(\omega_1|X_3) + \lambda_{22}P(\omega_2|X_3) = \frac{1.06}{C_3}$$
$$\therefore X_1 \in \omega_2, X_2 \in \omega_2, X_3 \in \omega_1$$

（3）把拒绝判断考虑在内，重新考核三个样本：

$$P(\alpha_3|X_1) = 0.33/C_1, P(\alpha_3|X_2) = 0.495/C_2, P(\alpha_3|X_3) = 0.87/C_3$$
$\therefore X_1 \in \omega_2$，$X_2$拒绝判断，$X_3 \in \omega_1$

3 二维空间中的两类样本均服从正态分布，其参数分别为：

均值向量：$\boldsymbol{\mu}_1 = (1,0)^T, \boldsymbol{\mu}_2 = (-1,0)^T$

协方差矩阵：$\boldsymbol{\Sigma}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

且两类的先验概率相等，试证明其基于最小错误率判决准则的决策分界面方程为一圆，并求其方程。

解：

$$d=2, |\boldsymbol{\Sigma}_1|=1, |\boldsymbol{\Sigma}_2|=4, \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$p(\boldsymbol{X}\,|\,\omega_1)=\frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_1)^T\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_1)\}$$

$$p(\boldsymbol{X}\,|\,\omega_2)=\frac{1}{4\pi}\exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_2)^T\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_2)\}$$

由 $p(\boldsymbol{X}\,|\,\omega_1)P(\omega_1)=p(\boldsymbol{X}\,|\,\omega_2)P(\omega_2)$ 得

$$\frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_1)^T\Sigma_1^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_1)\}=\frac{1}{4\pi}\exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_2)^T\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_2)\}$$

令 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$，并对上式左右同时取自然对数

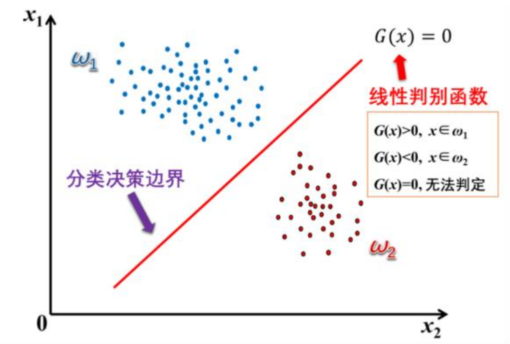
$$\ln 2-\frac{1}{2}[(x_1-1)^2+x_2^2]=-\frac{1}{4}(x_1+1)^2-\frac{1}{4}x_2^2$$

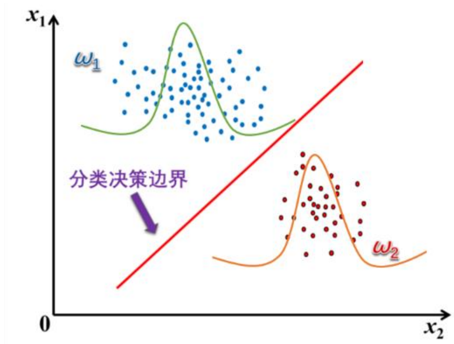
整理得到

$$(x_1-3)^2+x_2^2=8+4\ln 2$$

【讨论】

1. 贝叶斯分类器(朴素)与线性分类器的区别?





2. 贝叶斯分类器本质上是线性分类器吗?

3. 贝叶斯分类器和线性分类器怎么处理非线性可分的问题?

4. …