1. 已知两类训练样本，(0,0), (0,1)属于w1, (1,0), (1,1)属于w2, 试用感知器算法求$\boldsymbol{\alpha}^*$

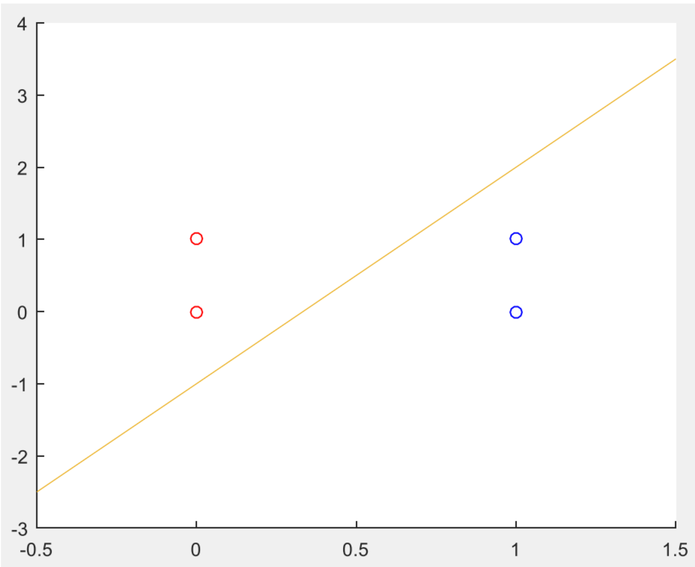
【初始化α(0)=(1,1,1)’，学习速率ρ=2 给出最优权向量和决策边界方程，并给出图形表示。】

解：

$$t=1,\alpha_0^T\cdot y_1=1>0,\alpha_1=\alpha_0=(1,1,1)^T$$
$$t=2,\alpha_1^T\cdot y_2=2>0,\alpha_2=\alpha_1=(1,1,1)^T$$
$$t=3,\alpha_2^T\cdot y_3=-2<0,\alpha_3=\alpha_2+2\cdot y_3=(-1,1,-1)^T$$
$$t=4,\alpha_3^T\cdot y_4=1>0,\alpha_4=\alpha_3=(-1,1,-1)^T$$
$$t=5,\alpha_4^T\cdot y_1=-1<0,\alpha_5=\alpha_4+2\cdot y_1=(-1,1,1)^T$$
$$t=6,\alpha_5^T\cdot y_2=2>0,\alpha_6=\alpha_5=(-1,1,1)^T$$
$$t=7,\alpha_6^T\cdot y_3=0,\alpha_7=\alpha_6+2\cdot y_3=(-3,1,-1)^T$$
$$t=8,\alpha_7^T\cdot y_4=3>0,\alpha_8=\alpha_7=(-3,1,-1)^T$$
$$t=9,\alpha_8^T\cdot y_1=-1<0,\alpha_9=\alpha_8+2\cdot y_1=(-3,1,1)^T$$
$$t=10,\alpha_9^T\cdot y_2=2>0,\alpha_{10}=\alpha_9=(-3,1,1)^T$$
$$t=11,\alpha_{10}^T\cdot y_3=2>0,\alpha_{11}=\alpha_{10}=(-3,1,1)^T$$
$$t=12,\alpha_{11}^T\cdot y_4=1>0,\alpha_{12}=\alpha_{11}=(-3,1,1)^T$$

因此，最优权向量$\alpha^*=(-3,1,1)$

决策边界方程为$-3x_1+x_2+1=0$



2. 设两类样本的类内离散度矩阵分别为:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_1 = (2,0)^T, m_2 = (2,2)^T$$

试用Fisher准则求其决策面方程。

解:

总的类内离散度矩阵为:

$$\mathbf{S}_w = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{S}_w^{-1}(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2) = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -4/3 \end{bmatrix}$$

$$d = \frac{(\mathbf{w}^*)^T (\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2)}{2} = 0$$

决策面方程为: $\frac{2}{3} * x_1 - \frac{4}{3} * x_2 = 0$

即 $x_1 - 2 * x_2 = 0$

3. 证明：当误差向量 e 的各分量小于等于零（但不全部等于零）时样本是线性不可分的。

证明：用反证法证明

假定训练样本集线性可分，则根据定义，可知：存在$\boldsymbol{\alpha}^*$和$\mathbf{b}^* > 0$，使得：

$$\mathbf{Y}\boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{b}^*$$

成立。且$\mathbf{e}^T\mathbf{b}^* < 0$

$$\begin{gathered}
\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}\boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{Y}^T\mathbf{b}^* \\
\mathbf{Y}^T\left(\mathbf{Y}\boldsymbol{\alpha}^* - \mathbf{b}^*\right) = \mathbf{0} \\
\mathbf{Y}^T\mathbf{e} = \mathbf{0} \\
\mathbf{e}^T\mathbf{Y} = \mathbf{0}^T \\
\mathbf{e}^T\mathbf{Y}\boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{e}^T\mathbf{b}^* = 0
\end{gathered}$$

与上述假设推出的结论($\mathbf{e}^T\mathbf{b}^* < 0$)矛盾。证毕。