模式识别课程

核函数

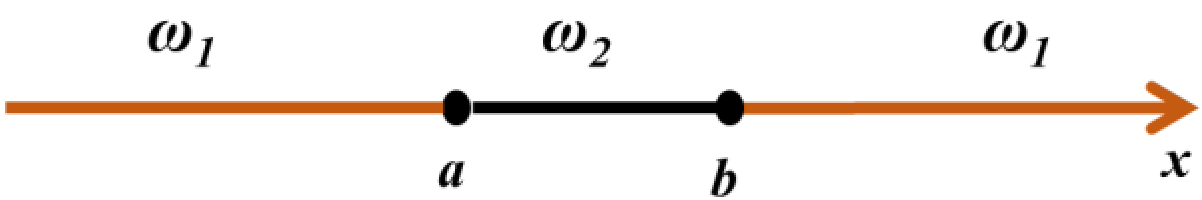
张俊超

中南大学
航空航天学院

模式识别-线性分类器

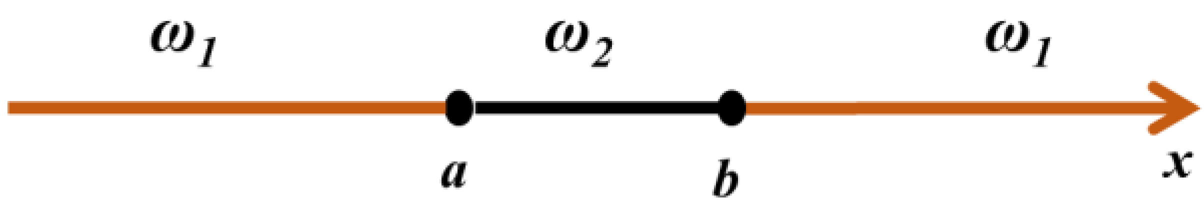
一维空间的分类问题：

$$x\begin{cases} a<x<b, x\in\omega_2 \\ others, x\in\omega_1 \end{cases}$$



模式识别-线性分类器

$$x\begin{cases} a<x<b, x\in\omega_2 \\ others, x\in\omega_1 \end{cases}$$

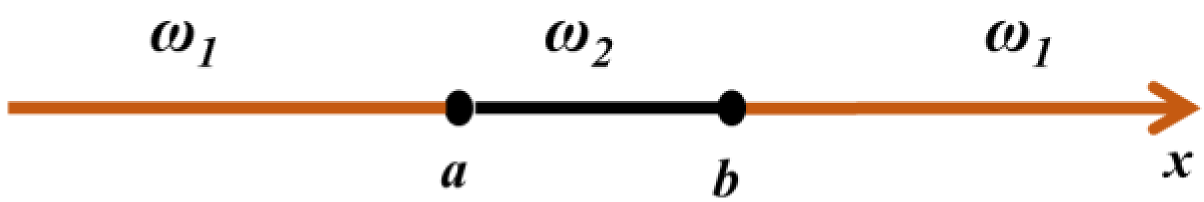


判别函数：$G(x)=(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$

怎么转化成线性的呢？

模式识别-线性分类器

$$x\begin{cases} a < x < b, x \in \omega_2 \\ others, x \in \omega_1 \end{cases}$$



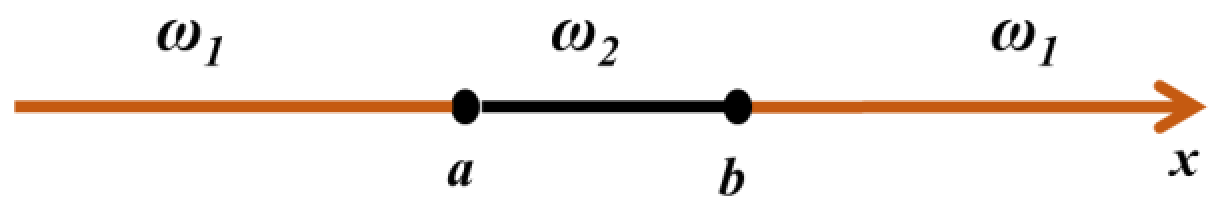
判别函数：$G(x) = (x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$

令$y_1 = x^2, y_2 = x$

$G(y) = y_1 - (a+b)y_2 + ab$

1D升到了2D

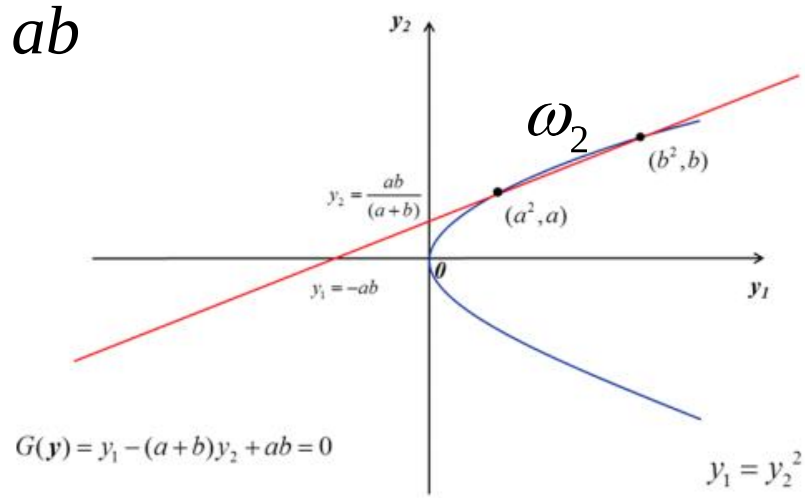
模式识别-线性分类器



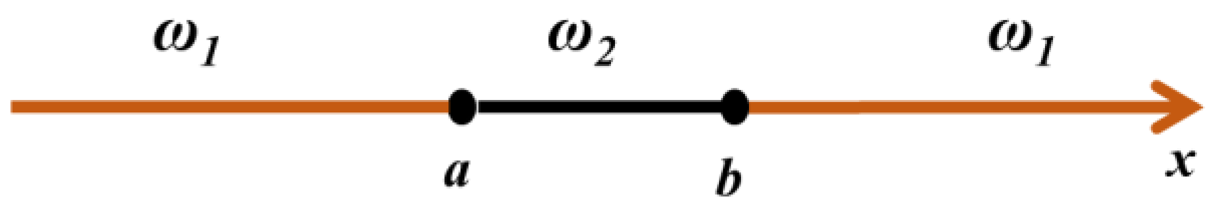
判别函数：$G(x)=(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$

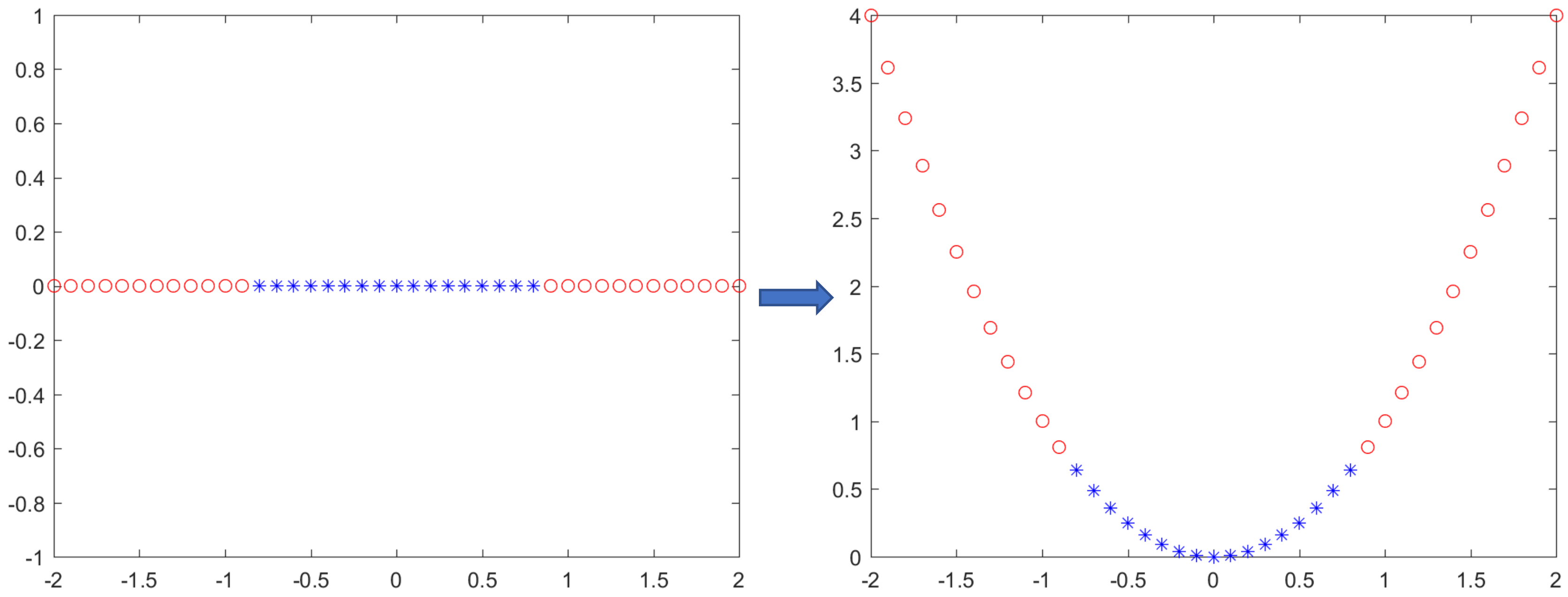
令$y_1=x^2, y_2=x$

$G(y)=y_1-(a+b)y_2+ab$



模式识别-线性分类器



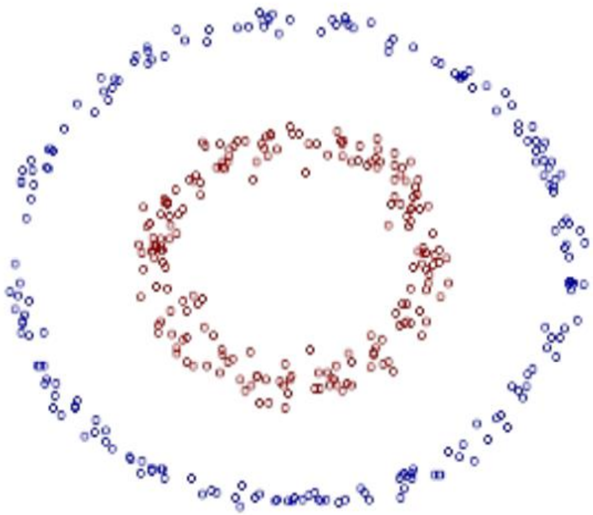


模式识别-线性分类器

- 升维之后，非线性可分问题变得线性可分了，是不是所有的非线性问题升维后都可以线性可分？
- 升维会带来什么问题？

维数灾难

模式识别-线性分类器



判别函数：$G(x_1, x_2) = a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3 x_2^2 + a_4 x_2 + a_5 x_1 x_2 + a_6 = 0$

$$\Downarrow \text{升维}(2\text{D} \rightarrow 5\text{D})$$

$$y_1 = x_1, y_2 = x_1^2, y_3 = x_2, y_4 = x_2^2, y_5 = x_1 x_2$$

原特征空间维数是n,要构造一个广义线性判别函数实现二阶多项式判别函数，那么变换后的特征空间的维数是$n(n+3)/2$

模式识别-线性分类器

判别函数：$G(x_1,x_2)=a_1x_1^2+a_2x_1+a_3x_2^2+a_4x_2+a_5x_1x_2+a_6=0$

$$\Downarrow 升维(2\mathrm{D}\rightarrow 5\mathrm{D})$$

$$y_1=x_1, y_2=x_1^2, y_3=x_2, y_4=x_2^2, y_5=x_1x_2$$

$\phi(\cdot)$：表示$2D\rightarrow 5D$的映射

$$\phi(\mathbf{x})=\phi(x_1,x_2)=\left(x_1,x_1^2,x_2,x_2^2,x_1x_2\right)^T$$

$$内积\langle\phi(\mathbf{x}),\phi(\mathbf{y})\rangle=\left(\phi(\mathbf{x})\right)^T\phi(\mathbf{y})$$

$$=\left(x_1,x_1^2,x_2,x_2^2,x_1x_2\right)\cdot\left(y_1,y_1^2,y_2,y_2^2,y_1y_2\right)^T$$

$$=x_1y_1+x_1^2y_1^2+x_2y_2+x_2^2y_2^2+x_1x_2y_1y_2$$

模式识别-线性分类器

$$\text{内积}\langle\phi(\mathbf{x}),\phi(\mathbf{y})\rangle=(\phi(\mathbf{x}))^T\phi(\mathbf{y})$$

$$=\left(x_1,x_1^2,x_2,x_2^2,x_1x_2\right)\cdot\left(y_1,y_1^2,y_2,y_2^2,y_1y_2\right)^T$$

$$=x_1y_1+x_1^2y_1^2+x_2y_2+x_2^2y_2^2+x_1x_2y_1y_2$$

二者很相似

$$\text{计算}(\langle\mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle+1)^2=(x_1y_1+x_2y_2+1)^2$$

$$=2x_1y_1+x_1^2y_1^2+2x_2y_2+x_2^2y_2^2+2x_1x_2y_1y_2+1$$

$$\boxed{\phi(\mathbf{x})=\phi(x_1,x_2)=\left(x_1,x_1^2,x_2,x_2^2,x_1x_2\right)^T}$$

调整为

$$\boxed{\phi(\mathbf{x})=\phi(x_1,x_2)=\left(\sqrt{2}x_1,x_1^2,\sqrt{2}x_2,x_2^2,\sqrt{2}x_1x_2,1\right)^T}$$

模式识别-线性分类器

$$\boxed{\phi(\mathbf{x})=\phi(x_1,x_2)=\left(x_1,x_1^2,x_2,x_2^2,x_1x_2\right)^T}$$

调整为

$$\boxed{\phi(\mathbf{x})=\phi(x_1,x_2)=\left(\sqrt{2}x_1,x_1^2,\sqrt{2}x_2,x_2^2,\sqrt{2}x_1x_2,1\right)^T}$$

$$\langle\phi(\mathbf{x}),\phi(\mathbf{y})\rangle=\left(\langle\mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle+1\right)^2$$

核函数$\kappa(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\left(\langle\mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle+1\right)^2$

核函数的好处：

- 将特征从低维到高维进行转换，但核函数是在低维上进行计算，而将实质上的分类效果表现在了高维上，也就是避免了直接在高维空间中的复杂计算。

常见的核函数：

1.多项式核：$\kappa(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=(\langle\mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle+R)^d$，原始空间维度$m\xrightarrow{\text{映射后}}$维度$\binom{m+d}{d}$

2.高斯核：$\kappa(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\exp\left\{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{2\sigma^2}\right\}$

3.线性核：$\kappa(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\langle\mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle$

如何选择核函数？

遗憾的是，无论是核函数的形式还是参数，都没有确定的选择方法，只能依靠经验来试。

模式识别-线性分类器

核函数应用在SVM中

SVM分类器： $f(\mathbf{x}) = \operatorname{sgn}\left(\mathbf{w}^T\mathbf{x} + w_0\right)$

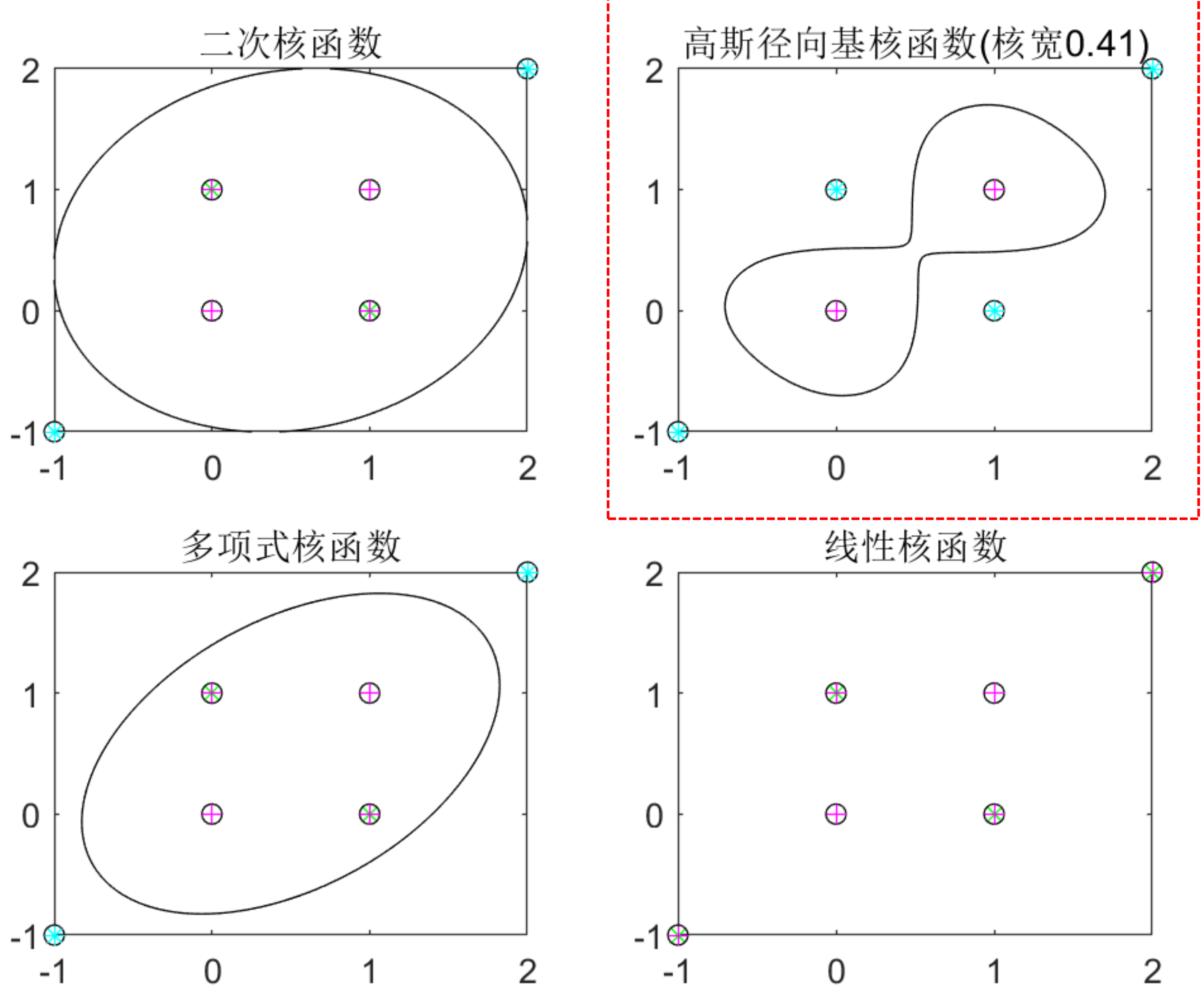
$$= \operatorname{sgn}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i \mathbf{x}_i\right)^T \mathbf{x} + w_0\right)$$

$$= \operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i y_i \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}\right) + w_0\right)$$

$$= \operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i y_i \boxed{\left\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}\right\rangle}\right) + w_0\right)$$

$$f(\mathbf{x}) = \operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i y_i \boxed{\left\langle \phi(\mathbf{x}_i), \phi(\mathbf{x})\right\rangle}\right) + w_0\right) = \operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i y_i \boxed{\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})}\right) + w_0\right)$$

模式识别-线性分类器



支持向量机高斯核调参小结

https://www.cnblogs.com/pinard/p/6126077.html

核函数特点

- 核函数的引入避免了“维数灾难”,大大减小了计算量。
- 无需知道非线性变换函数Φ的形式和参数。
- 核函数的形式和参数的变化会隐式地改变从输入空间到特征空间的映射，进而对特征空间的性质产生影响，最终改变各种核函数方法的性能。
- 核函数方法可以和不同的算法相结合，形成多种不同的基于核函数技术的方法，且这两部分的设计可以单独进行，并可以为不同的应用选择不同的核函数和算法。

模式识别-线性分类器


谢谢聆听！