

多类线性分类器  
张俊超

中南大学  
航空航天学院

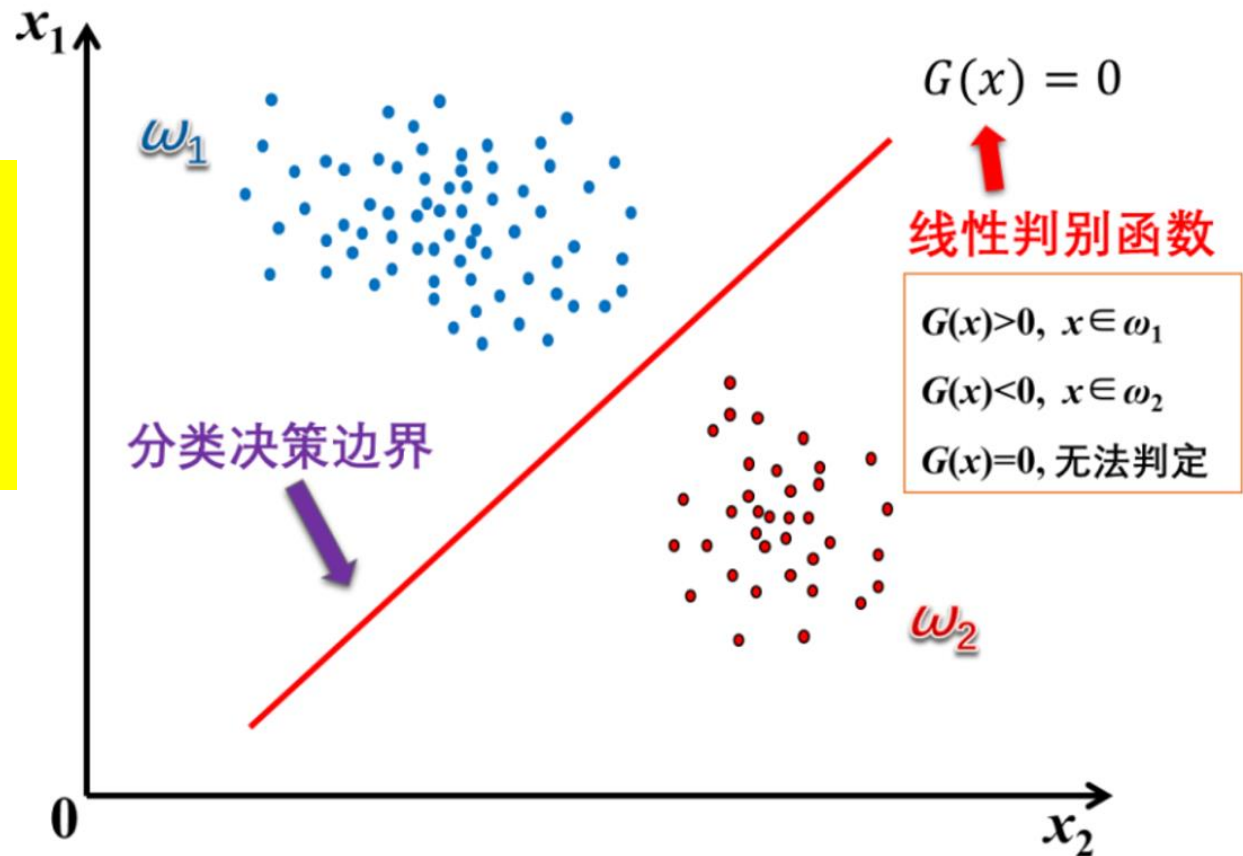




# 模式识别-多类线性分类器

## 二分类的问题

- 感知器
- LMSE(HK)
- SVM
- Fisher



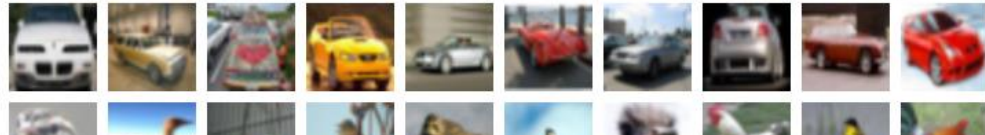
# 模式识别 - 多类线性分类器

Cifar-10数据集(<http://www.cs.toronto.edu/~kriz/cifar.html>)

airplane



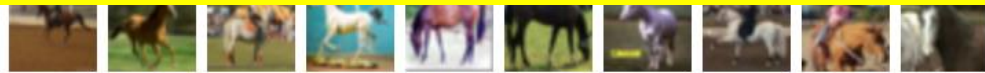
automobile



Q: 多分类问题怎么办? 这些算法还能用吗?

- 感知器
- LMSE(HK)
- SVM
- Fisher

horse



ship



truck





# 模式识别-多类线性分类器

解决多分类问题的思路:

- 把多分类问题分解成多个两类问题
- 直接设计多类分类器

【记号】

类别 $\omega_i$ 的判别函数为:  $G_i(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0}$

增广向量的形式:  $G_i(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\alpha}_i^T \mathbf{y}$

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T = [\mathbf{w}_i^T, w_{i0}], \mathbf{y} = [\mathbf{x}, 1]^T$$



# 模式识别-多类线性分类器

Case1:用 $\omega_i/\overline{\omega_i}$ 的方式将多分类问题进行分解

$\omega_i$ :第 $i$ 个类别

$\overline{\omega_i}$ :第 $i$ 个类别之外的所有类别

判决规则:

$$G_i(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0} \begin{cases} > 0 \Rightarrow \mathbf{x} \in \omega_i \\ = 0 \Rightarrow \text{任意判决或拒绝判决} \\ < 0 \Rightarrow \mathbf{x} \in \overline{\omega_i} \end{cases}$$

$c$ 类问题需要的分类边界数是 $c$ 个

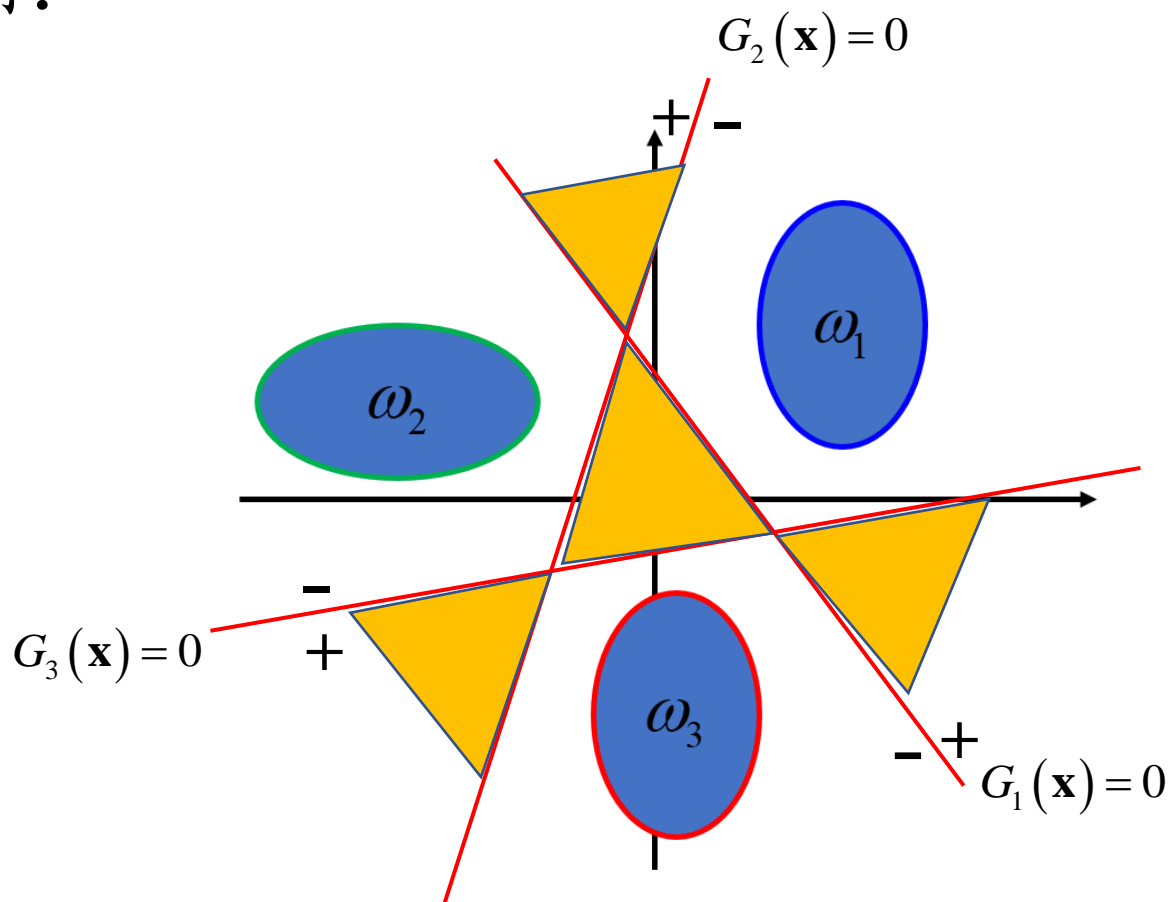




# 模式识别-多类线性分类器

两维三类示例：

$$\begin{cases} \omega_1 / \overline{\omega_1} \\ \omega_2 / \overline{\omega_2} \\ \omega_3 / \overline{\omega_3} \end{cases}$$





# 模式识别-多类线性分类器

Case2:用 $\omega_i/\omega_j$ 的方式将多分类问题进行分解  
(任意两类都进行判别)

判决规则:  $G_{ij}(\mathbf{x}) = G_i(\mathbf{x}) - G_j(\mathbf{x})$

$$G_{ij}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_{ij}^T \mathbf{x} + w_{ij0} \begin{cases} > 0 \Rightarrow \mathbf{x} \in \omega_i \\ = 0 \Rightarrow \text{任意判决或拒绝判决} \\ < 0 \Rightarrow \mathbf{x} \in \omega_j \end{cases}$$

$$G_{ij}(\mathbf{x}) = -G_{ji}(\mathbf{x})$$

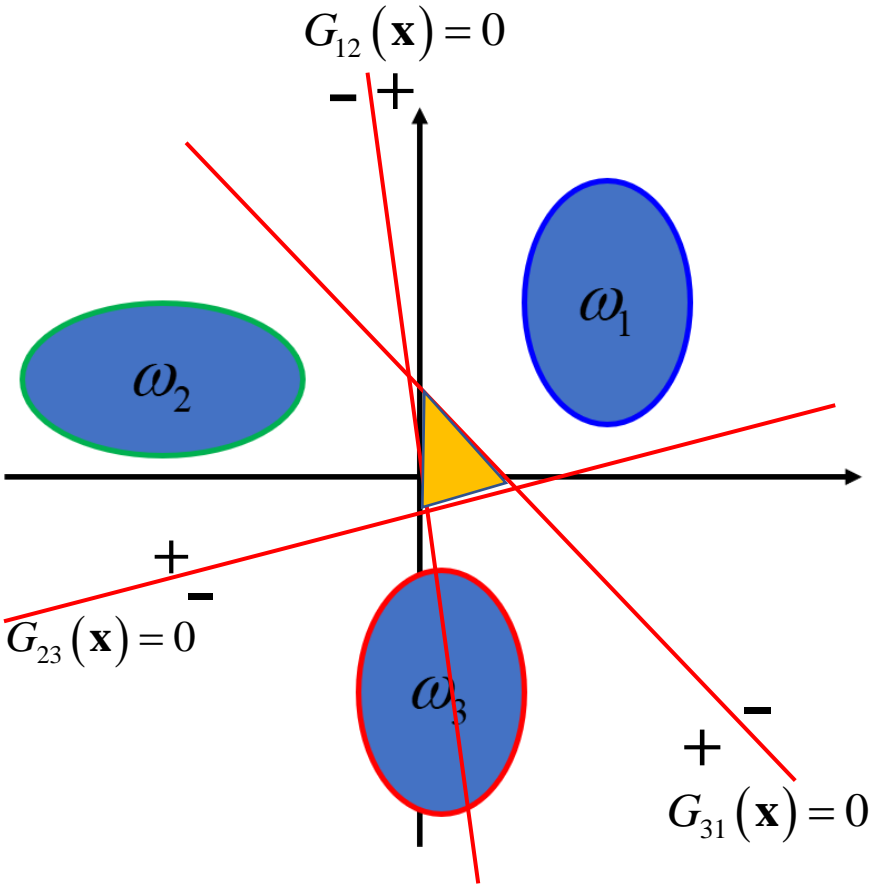
$c$ 类问题需要的分类边界数是  $C_c^2 = c(c-1)/2$  个



# 模式识别-多类线性分类器

两维三类示例：

$$\begin{cases} \omega_1/\omega_2 \\ \omega_1/\omega_3 \\ \omega_2/\omega_3 \end{cases}$$



不确定区域减少了，可是计算量加大了





# 模式识别-多类线性分类器

Case3:直接设计多分类器

(每个类别定义一个判别函数, 并采用最大值判决)

判决规则:

若  $G_i(\mathbf{x}) = \max \{G_j(\mathbf{x})\}, j = 1, 2, \dots, c$ , 则  $\mathbf{x} \in \omega_i$

即  $\forall j = 1, 2, \dots, c$  且  $j \neq i$

$$G_{ij}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_{ij}^T \mathbf{x} + w_{ij0} > 0 \Rightarrow \mathbf{x} \in \omega_i$$

$c$ 类问题需要的分类边界数是  $C_c^2 = c(c-1)/2$  个



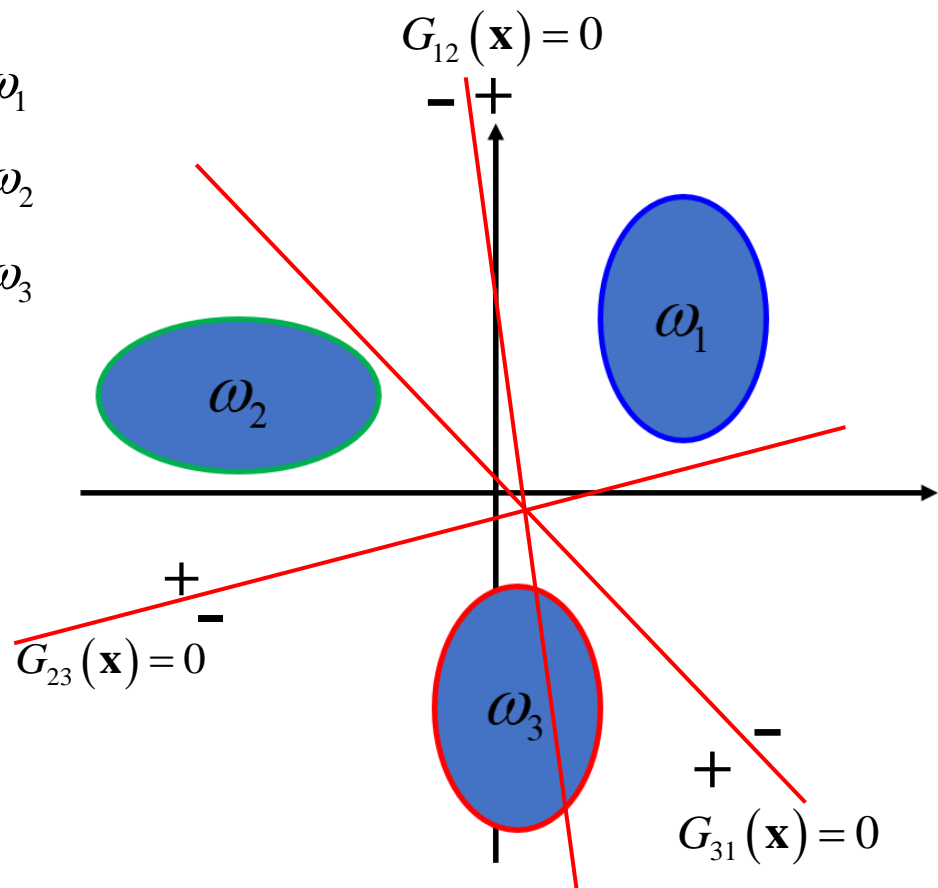
# 模式识别-多类线性分类器

两维三类示例：

$$\left[ G_{12}(\mathbf{x}) > 0 \text{ and } G_{31}(\mathbf{x}) < 0 \right] \Rightarrow \mathbf{x} \in \omega_1$$

$$\left[ G_{12}(\mathbf{x}) < 0 \text{ and } G_{23}(\mathbf{x}) > 0 \right] \Rightarrow \mathbf{x} \in \omega_2$$

$$\left[ G_{23}(\mathbf{x}) < 0 \text{ and } G_{31}(\mathbf{x}) > 0 \right] \Rightarrow \mathbf{x} \in \omega_3$$

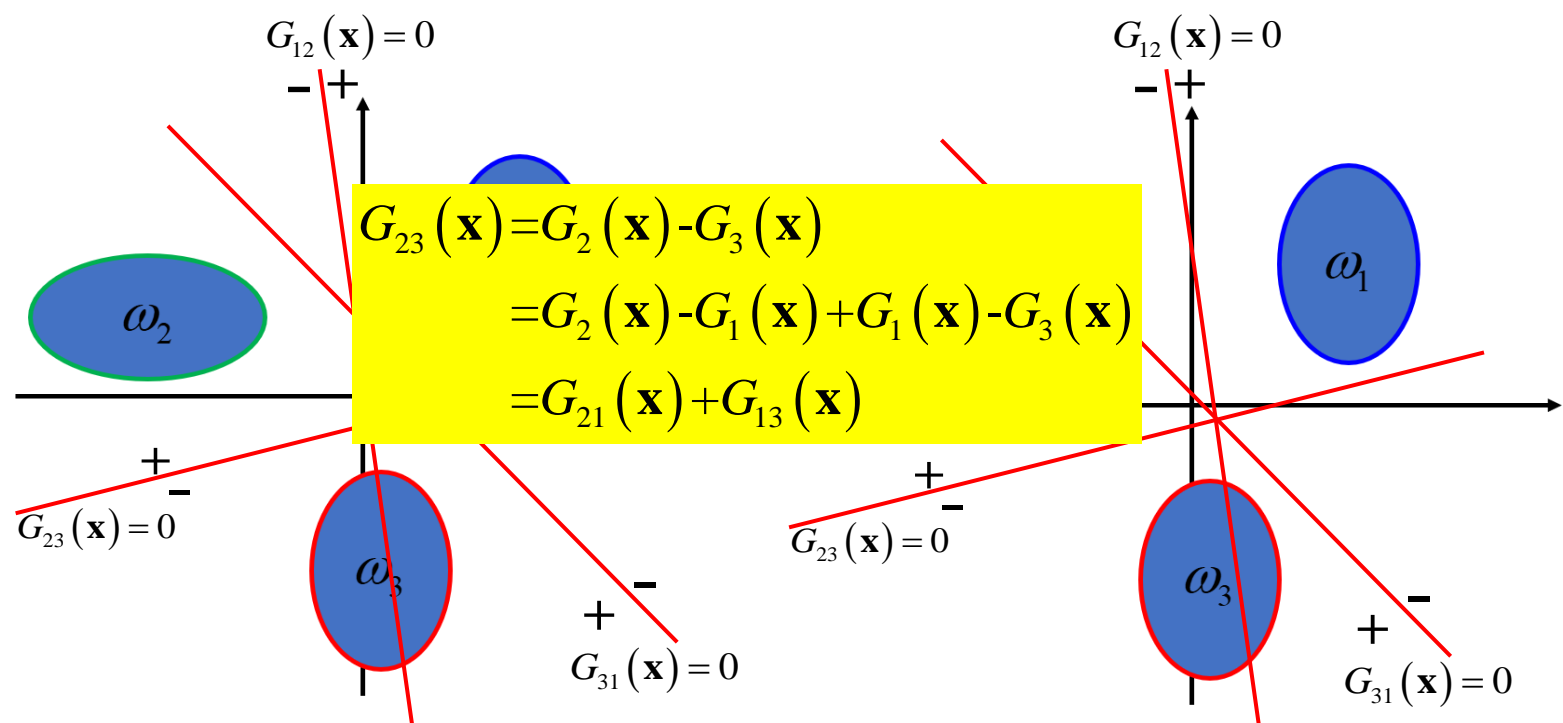




# 模式识别-多类线性分类器

Q: Case3和Case2有哪些区别?

Case3: 判别函数不是相互独立的

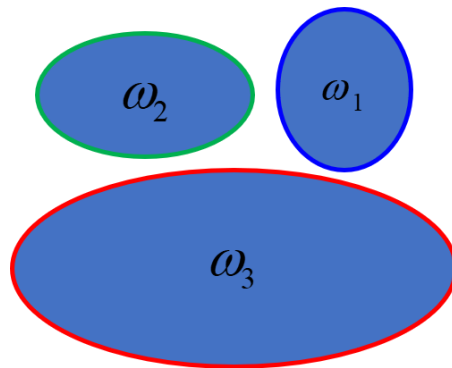




# 模式识别-多类线性分类器

## 三种情况之间的关系：

- 在第二种情况下线性可分的样本集在第一种情况下未必是线性可分的。
- 第一种情况下线性可分的样本集在第二种情况下也一定是线性可分的。
- 若第三种情况下是线性可分的，则在第二种情况下也是线性可分的。
- 若在第二种情况下是线性可分的，则在第三种情况下不一定有解。





# 模式识别-多类线性分类器

感知器算法(多分类-Case 3):

增广向量的形式:  $G_i(\mathbf{y}) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{y}$

1. 初始化权向量  $\mathbf{a}_i(0), i = 1, 2, \dots, c$ , 置  $t = 0$

2. 考查某个样本  $\mathbf{y}^k \in \omega_i$ , 若  $\mathbf{a}_i(t)^T \mathbf{y}^k > \mathbf{a}_j(t)^T \mathbf{y}^k$ , 则所有权向量不变;  
若存在某个类  $j$ , 使  $\mathbf{a}_i(t)^T \mathbf{y}^k \leq \mathbf{a}_j(t)^T \mathbf{y}^k$ , 对各类的权值进行如下修改:

$$\mathbf{a}_i(t+1) = \mathbf{a}_i(t) + \rho_t \mathbf{y}^k$$

$$\mathbf{a}_j(t+1) = \mathbf{a}_j(t) - \rho_t \mathbf{y}^k$$

$$\mathbf{a}_l(t+1) = \mathbf{a}_l(t), l \neq i, j$$

3. 所有样本都分类正确, 则停止; 否则重复2.



# 模式识别-多类线性分类器

%% 生成数据

```
randn('seed', 2020);
```

```
mu1 = [2 3];
```

```
sigma1 = [0.5 0;  
          0 0.5];
```

```
data1 = mvnrnd(mu1, sigma1, 300);
```

```
randn('seed', 2021);
```

```
mu2 = [6 7];
```

```
sigma2 = [0.5 0;  
          0 0.5];
```

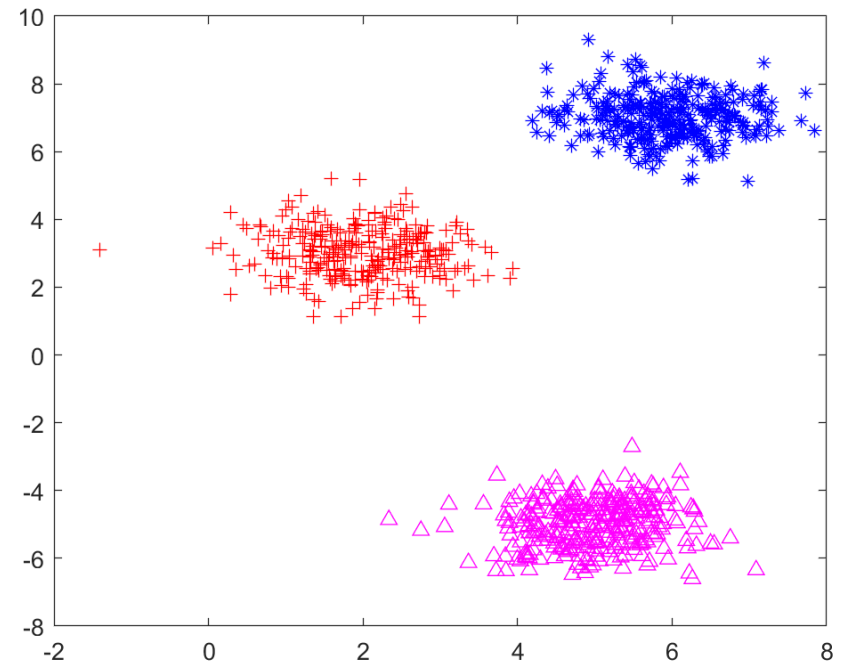
```
data2 = mvnrnd(mu2, sigma2, 300);
```

```
randn('seed', 2022);
```

```
mu3 = [5 -5];
```

```
sigma3 = [0.5 0;  
          0 0.5];
```

```
data3 = mvnrnd(mu3, sigma3, 300);
```







# 模式识别-多类线性分类器

```
Label1 = ones(length(data1),1);
Label2 = ones(length(data1),1)+1;
Label3 = ones(length(data1),1)+2;
Data = [data1;data2;data3];
Label = [Label1;Label2;Label3];
[xmin, ymin] = min(Data,[],1);
[xmax, ymax] = max(Data,[],1);
Data = [Data,ones(size(Data,1),1)];
%%
[N,M]=size(Data);
A = randn(M,3);
p = 1;
t = 0;%迭代器
MaxInt = 1000;%最大迭代次数
while(t<MaxInt)
    C = 0;%分类正确计算器
    for i = 1:N
        y = Data(i,:)' ;
        tmp = A'*y;
        [v,ind]=max(tmp);
        if ind==Label(i)
            C= C+1;
        else
            A(:,ind) = A(:,ind) - p*y;
            A(:,Label(i)) = A(:,Label(i)) + p*y;
        end
    end
    t = t + 1;
    if C == N
        break;
    end
end
```



# 模式识别-多类线性分类器

%% 求交点

```
A_ = A(1:2, :)';
```

```
b_ = -A(3, :)';
```

```
pt = inv(A_*A_)*A_*b_;
```

%%

```
w1 = A(:, 1)-A(:, 2);
```

```
w2 = A(:, 1)-A(:, 3);
```

```
w3 = A(:, 2)-A(:, 3);
```

```
X1 = xmin:0.1:pt(1);
```

```
X2 = pt(1):0.1:xmax+5;
```

```
Y1 = (-w1(1)*X1-w1(3))/(w1(2));
```

```
Y2 = (-w2(1)*X1-w2(3))/(w2(2));
```

```
Y3 = (-w3(1)*X2-w3(3))/(w3(2));
```

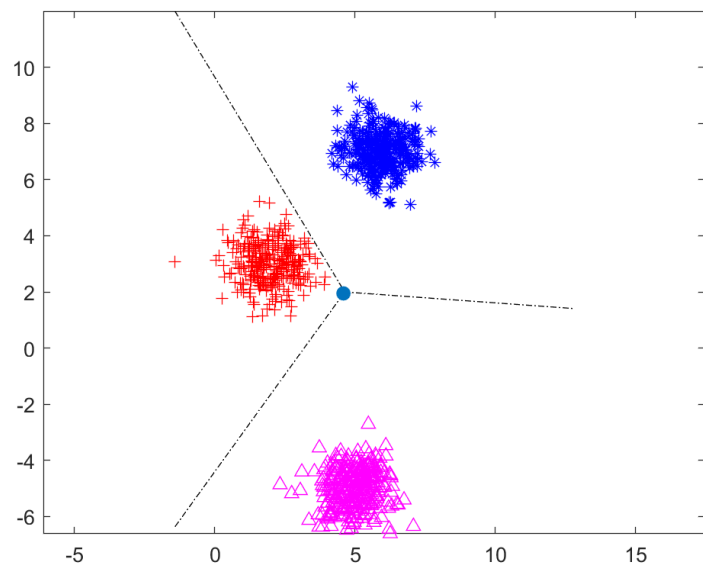
```
plot(X1, Y1, 'k-.');hold on;
```

```
plot(X1, Y2, 'k-.');hold on;
```

```
plot(X2, Y3, 'k-.');hold on;
```

```
plot(pt(1), pt(2), '.', 'MarkerSize', 24);
```

```
axis equal;
```





# 模式识别-多类线性分类器

【作业】基于上述数据，编程实现Case1和Case2的多分类问题。

说明：

1. 分类算法：感知器，HK均可(都实现，加分)
2. 编程语言：Matlab/Python
3. 提交实验报告和源代码(命名规则：多分类\_学号\_姓名，发到邮箱：[zhangjunchao\\_work@163.com](mailto:zhangjunchao_work@163.com))
4. 作业迟交 $n$ 天，本次作业分数乘以 $0.98^n$ 。



# 模式识别-多类线性分类器

若干素材取自网络，特此致谢！





# 模式识别-多类线性分类器

谢谢聆听！

