Сравнение оценок и эффективные оценки. Задача 1

Ильичёв А.С., 693

```
import numpy as np
import scipy.stats as sts
from matplotlib import pyplot as plt
%matplotlib inline
```

1. Сгенерируем $M = 100$ выборок $X_1, \ldots, X_{1000}$ из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$ для трех значений θ .

```
M = 100
N = 1000
thetas = [1, 5, 13]
all_samples = [sts.uniform(0, theta).rvs(size=(M, N)) for theta in thetas]
```

2. Для каждой выборки $X_1, \ldots, X_n$ для всех $n \leq 1000$ посчитаем оценки параметра θ из теоретической задачи.

```
def make_estimator(func): # функция построения массива оценок
    # цикл по наборам выборок для каждого theta
    ests = []
    for samples in all_samples:
        ests.append(np.array([[func(sample[:i]) for i in range(1, N + 1)]
                              for sample in samples]))
    return ests
```

```
est = [None] * 4
```

a) $\hat{\theta}_0 = 2\overline{X}$

```
est[0] = make_estimator(lambda x: 2 * np.mean(x))
```

b) $\hat{\theta}_1 = (n+1)X_{(1)}$

```
est[1] = make_estimator(lambda x: (len(x) + 1) * np.min(x))
```

c) $\hat{\theta}_2 = X_{(1)} + X_{(n)}$

```
est[2] = make_estimator(lambda x: np.max(x) + np.min(x))
```

d) $\hat{\theta}_3 = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$

```
est[3] = make_estimator(lambda x: (len(x) + 1) / len(x) * np.max(x))
```

3. Посчитаем для всех полученных оценок $\hat{\theta}$ квадратичную функцию потерь $(\hat{\theta} - \theta)^2$ и для каждого фиксированного n усредним по выборкам.

```
def calc_losses(theta_num):
    losses = [None] * len(est)
    for num, estimator in enumerate(est):
        losses[num] = []
        # среднее по выборкам для каждого n
        for j in range(N):
            losses[num].append(np.mean(
                [(estimator[theta_num][i][j] - thetas[theta_num])**2
                 for i in range(M)]))
    return losses
```

```
losses = [calc_losses(i) for i in range(len(thetas))]
```

Также зададим функции риска, посчитанные в теоретической задаче.

```
theor_loss = [None] * 4
```

```
theor_loss[0] = lambda theta, n: theta ** 2 / (3 * n)
```

```
theor_loss[1] = lambda theta, n:  n * theta ** 2 / (n + 2)
```

Для оценки c) мы не считали функцию риска.

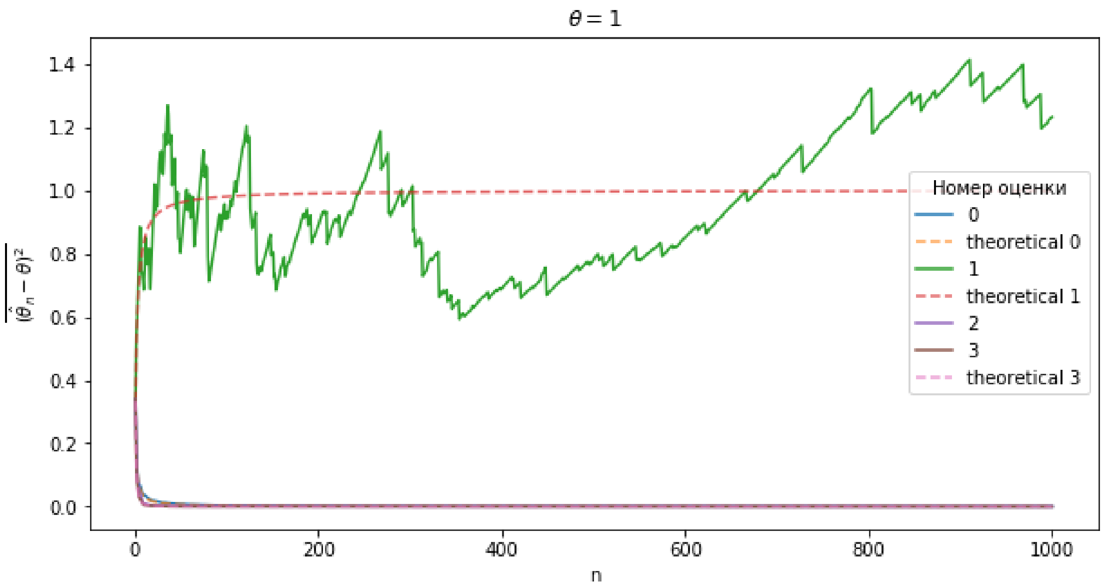
```
theor_loss[3] = lambda theta, n: theta ** 2 / (n * (n + 2))
```

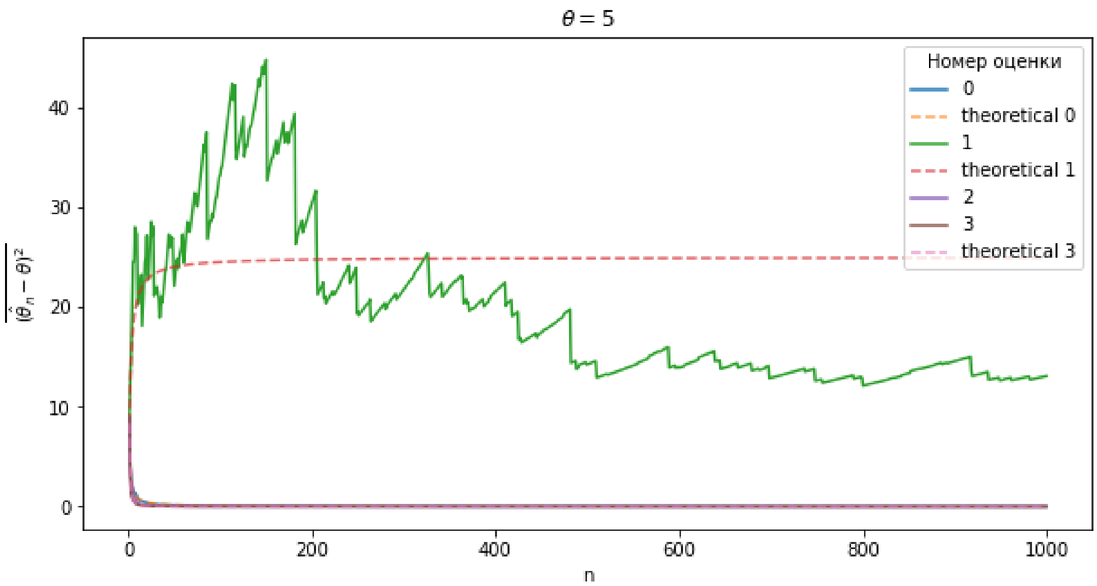
4. Для каждого из трех значений θ построим графики усредненных функций потерь в зависимости от n.

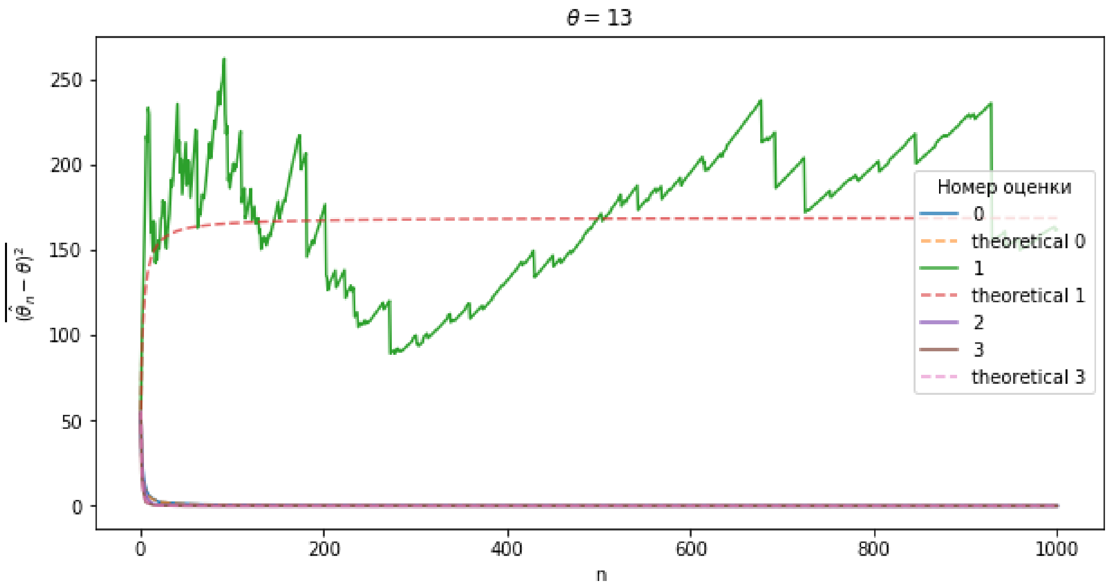
```
ns = np.arange(1, N + 1)
# limit_per - процент от значения theta
def make_plot(exclude=set(), limit_per=None):
    for theta_num, theta in enumerate(thetas):
        plt.figure(figsize=(10, 5))
        est_nums = list(set(np.arange(len(est))) - exclude) # set difference
```

```
        for est_num in est_nums:
            plt.plot(ns, losses[theta_num][est_num], label=str(est_num))
            if est_num != 2:
                plt.plot(ns, theor_loss[est_num](theta, ns), alpha=0.7,
                         label='theoretical '+str(est_num), linestyle='--')
        plt.xlabel('n')
        plt.ylabel(r'$\overline{(\hat \theta_n - \theta)^2}$')
        plt.legend(title='Номер оценки')
        plt.title(r'$\theta =$'+str(theta))
        if limit_per:
            plt.ylim(0, limit_per * theta)
        plt.show()
```

```
make_plot()
```



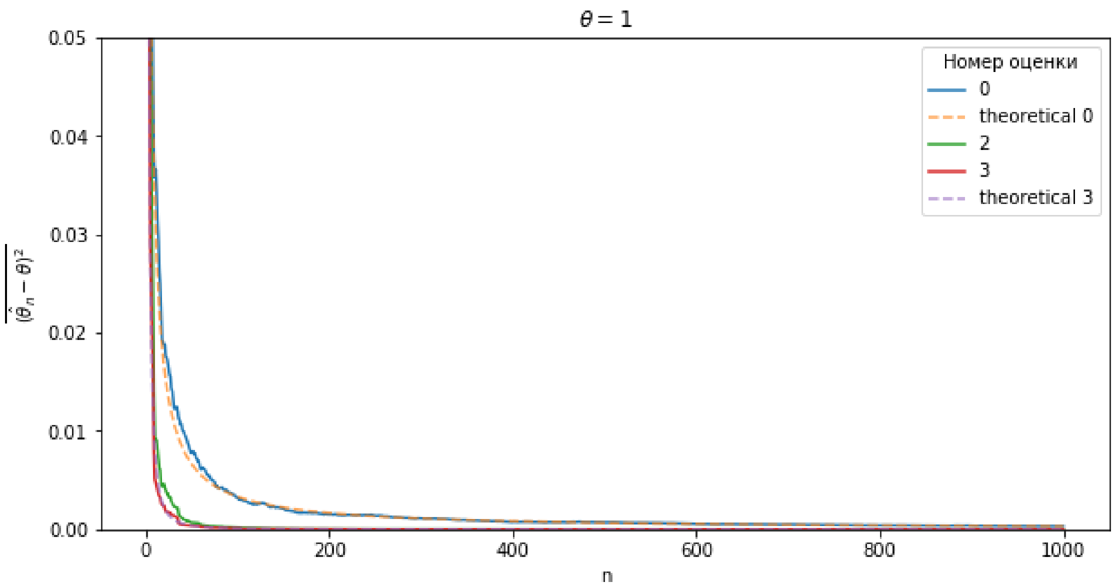


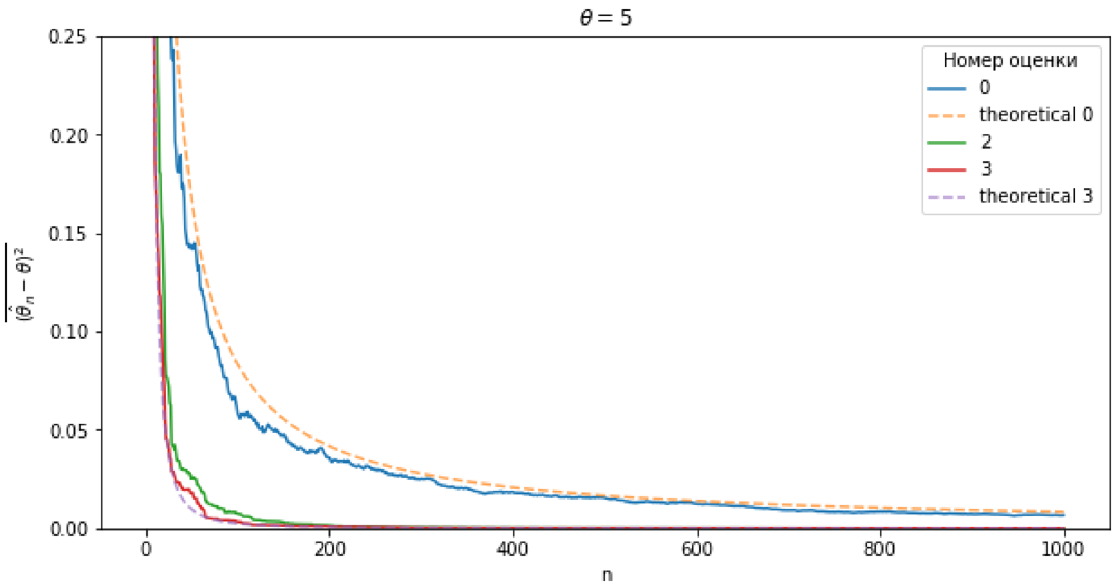


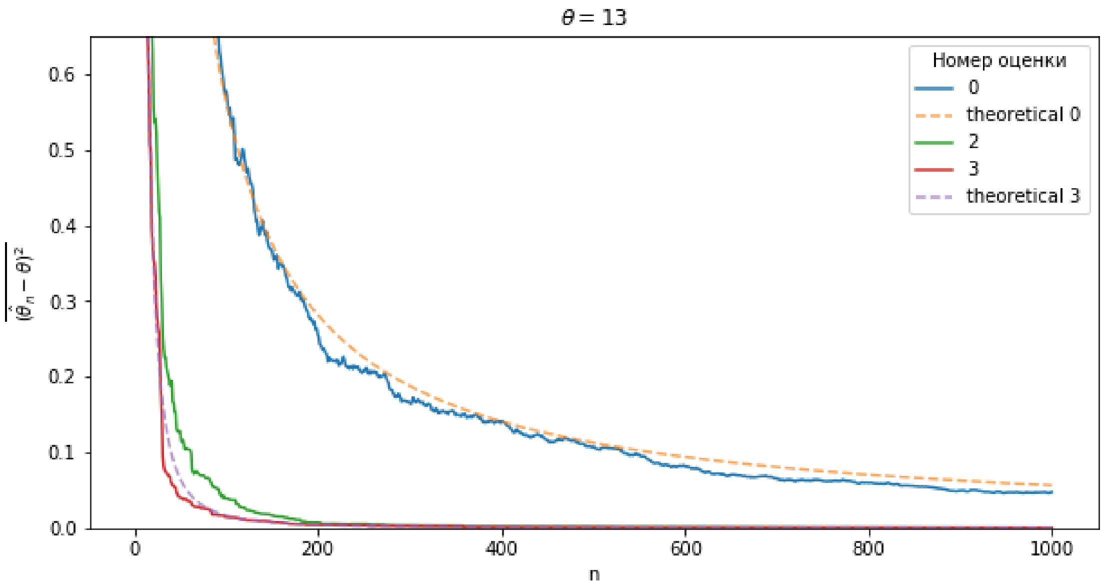
Оценка (1), как мы уже видели в задаче 2.1, не является состоятельной. В этой задаче факт еще раз подтверждается как теорией (функция риска стремится не к нулю, а к θ^2 с ростом n), так и экспериментом (на графике при больших n средний квадрат разности оценки и истинного значения колеблется около θ^2).

Теперь исключим оценку (1) и посмотрим на другие.

```
make_plot(exclude={1}, limit_per=0.05)
```

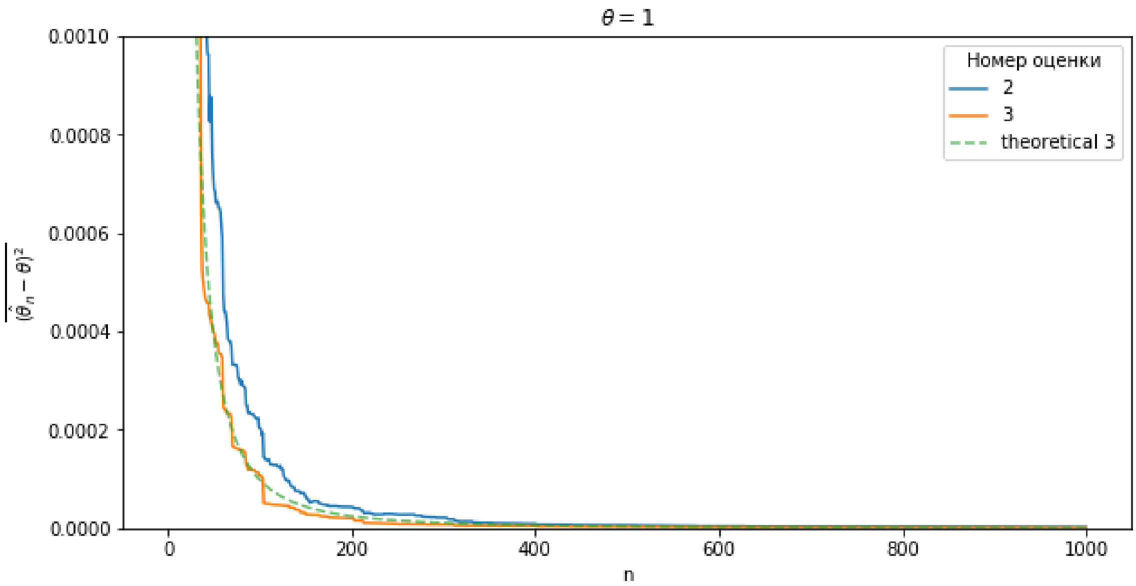


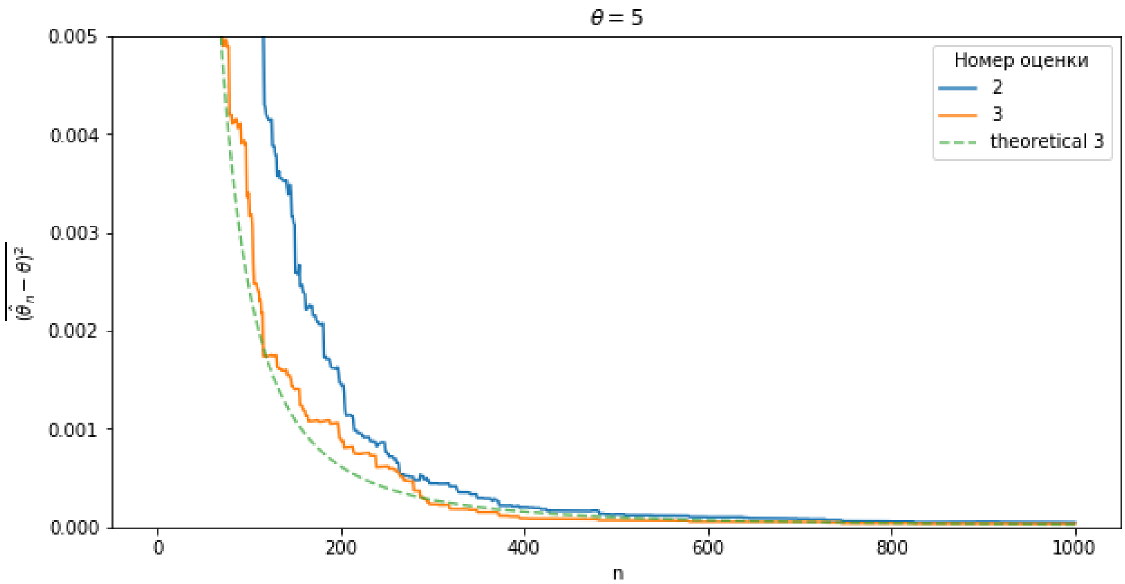


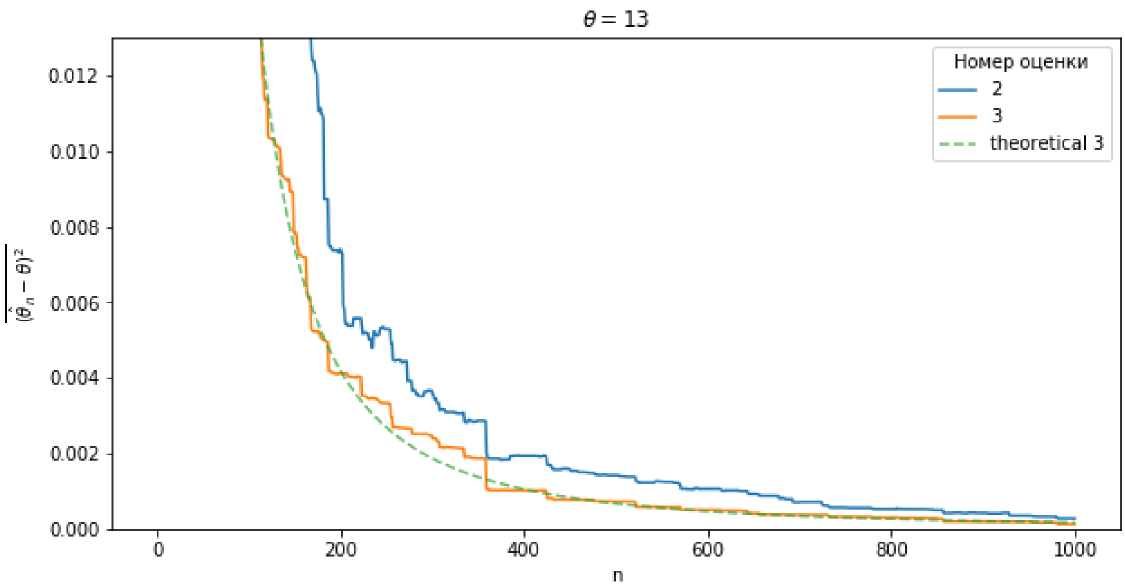


Усредненная функция потерь для оценки (0) ведет себя так, как предсказано теорией (пропорциональна $1/n$). Усредненная функция потерь для оценки (3) пропорциональна $1/n^2$, поэтому посмотрим на нее поближе.

```
make_plot(exclude={1, 0}, limit_per=0.001)
```







Тоже видим согласие с теорией.

5. Вывод.

Промежуточные выводы уже были сделаны. Согласие теории и эксперимента объясняется тем, что усреднением по 100 выборкам мы симулируем взятие матожидания в функции риска. Функция риска оценки (2), не посчитанная теоретически, стремится к нулю чуть медленнее функции риска оценки (3), однако заметно быстрее всех остальных. Можно предположить, что она также пропорциональна $1/n^2$ с чуть большим коэффициентом, чем в (3).