Свойства оценок. Задача 2

Ильичёв А.С., 693

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
%matplotlib inline
```

1. Сгенерируем выборку $X_1, \dots, X_N$ из экспоненциального распределения с параметром $\theta = 1$ для $N = 10^4$.

```
N = 10 ** 4
ns = np.arange(1, N + 1)
theta = 1
sample = np.random.exponential(theta, N)
```

2. Для всех $n \leq N$ посчитаем оценку параметра $\left(k!/\overline{X^k}\right)^{1/k}$ для разных k.

```
ks = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 13, 15, 20]
```

```
def make_estimators(ks): # функция построения массива оценок
    est = []
    for k in ks:
        est.append([(np.math.factorial(k)/(sample[:i]**k).mean())**(1/k) for i in
ns])
    return np.array(est)
```

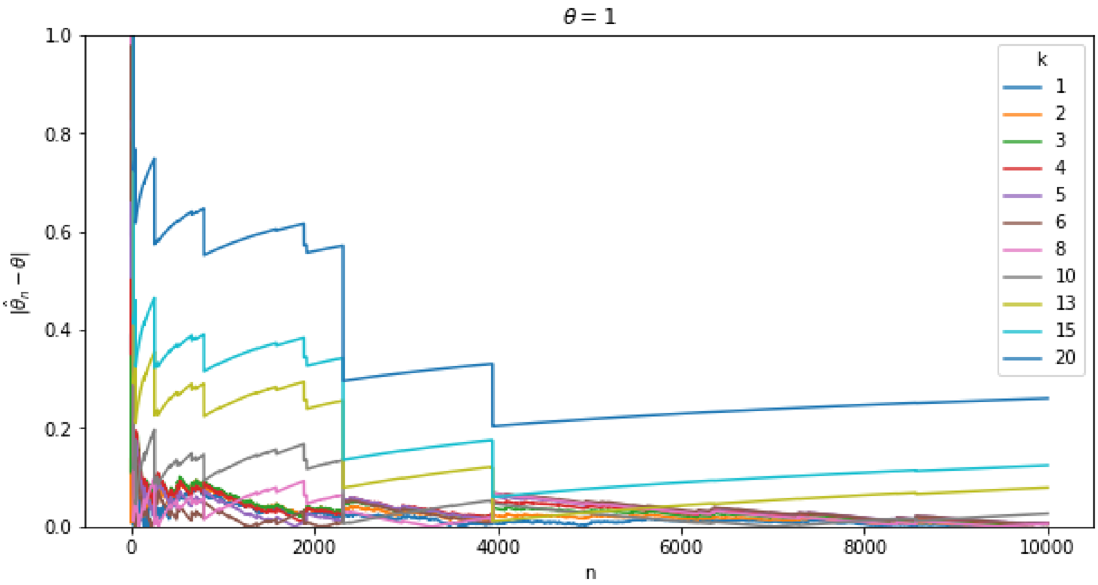
```
est = make_estimators(ks)
```

3. Построим на одном графике для всех оценок функции модуля разности оценки и истинного значения θ в зависимости от k

```
def make_plot(exclude=set(), low_limit=True):
    plt.figure(figsize=(10, 5))
    est_nums = list(set(np.arange(len(est))) - exclude) # set difference
    for est_num in est_nums:
        plt.plot(ns, np.abs(est[est_num] - theta), label=str(ks[est_num]))
    plt.xlabel('n')
    plt.ylabel(r'$|\hat \theta_n - \theta|$')
    plt.legend(title=r'k')
    plt.title(r'$\theta = $'+str(theta))
```

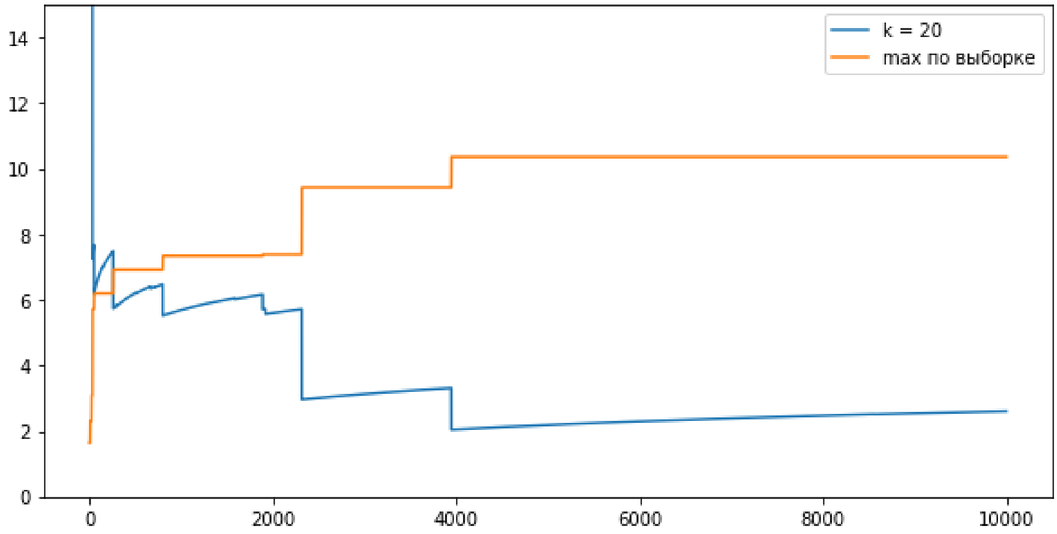
```
    plt.ylim(0, 1)
    if low_limit:
        plt.ylim(0, 0.15)
```

```
make_plot(low_limit=False)
```



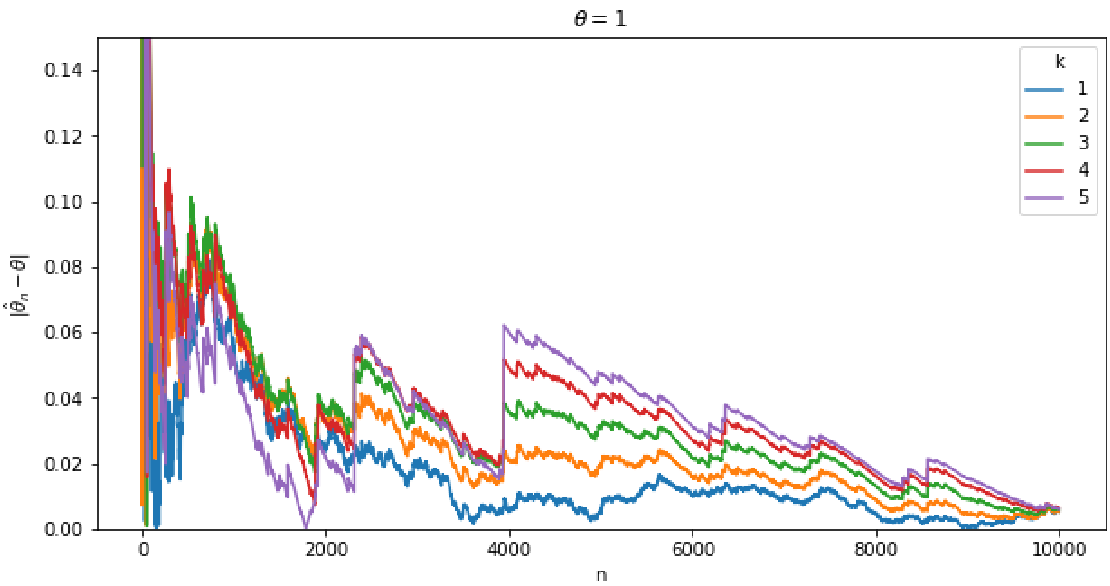
Как видно, при больших k оценки сильно отличаются от истинного значения. Кроме того, у графиков при больших k одинаковые изломы. Это можно объяснить следующим образом. Предположим, в выборке появилось значение, сильно отклоняющееся от среднего по выборке, тогда, чем больше k, тем сильнее это значение повлияет на статистику $\overline{X^k}$. Эти резкие изменения мы и видим на изломах. Для демонстрации построим зависимость максимального значения в выборке $X_1, \ldots, X_n$ от n, и рядом график модуля разности оценки и истинного значения θ для $k = 20$, умноженного на 10 (тут важна только форма кривых).

```
maxs = [np.max(sample[:i]) for i in ns]
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(ns, 10 * np.abs(est[len(est) - 1] - theta), label='k = 20')
plt.plot(ns, maxs, label='max по выборке')
plt.legend()
plt.ylim(0, 15)
plt.show()
```



Предположение оказалось верным. Исключим теперь большие k из рассмотрения (оставим первые 5) и ограничим масштаб.

```
make_plot(exclude=set(range(5, len(ks))))
```



4. Сделаем выводы.

Как видно из графиков, чем меньше k, тем лучше ведет себя оценка. Действительно, асимптотическая дисперсия этой оценки, как следует из решения теоретической задачи, является возрастающей по k функцией (в числителе факториалы k), а чем меньше дисперсия, тем ближе к нулю будет модуль разности оценки и истинного значения параметра.