Свойства оценок. Задача 1

Ильичёв А.С., 693

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
%matplotlib inline
```

1. Зададим массив из значений θ и сгенерируем выборки $X_1, \ldots, X_N$ из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$ для $N = 10^4$ и для каждого θ.

```
N = 10 ** 4
ns = np.arange(1, N + 1)
thetas = [0.5, 1, 5, 13, 27]
# выборки для каждого theta
samples = [np.random.uniform(0, theta, N) for theta in thetas]
```

2. Для всех $n \leq N$ посчитаем оценки параметра θ из теоретической задачи.

```
def make_estimator(func): # функция построения массива оценок
    est = []
    for sample in samples:
        est.append([func(sample[:i]) for i in ns])
    return np.array(est)
est = [None] * 5
```

a) $\hat{\theta}_0 = 2\overline{X}$

```
est[0] = make_estimator(lambda x: 2 * np.mean(x))
```

b) $\hat{\theta}_1 = \overline{X} + X_{(n)}/2$

```
est[1] = make_estimator(lambda x: np.mean(x) + np.max(x) / 2)
```

c) $\hat{\theta}_2 = (n+1)X_{(1)}$

```
est[2] = make_estimator(lambda x: (len(x) + 1) * np.min(x))
```

d) $\hat{\theta}_3 = X_{(1)} + X_{(n)}$

```
est[3] = make_estimator(lambda x: np.max(x) + np.min(x))
```

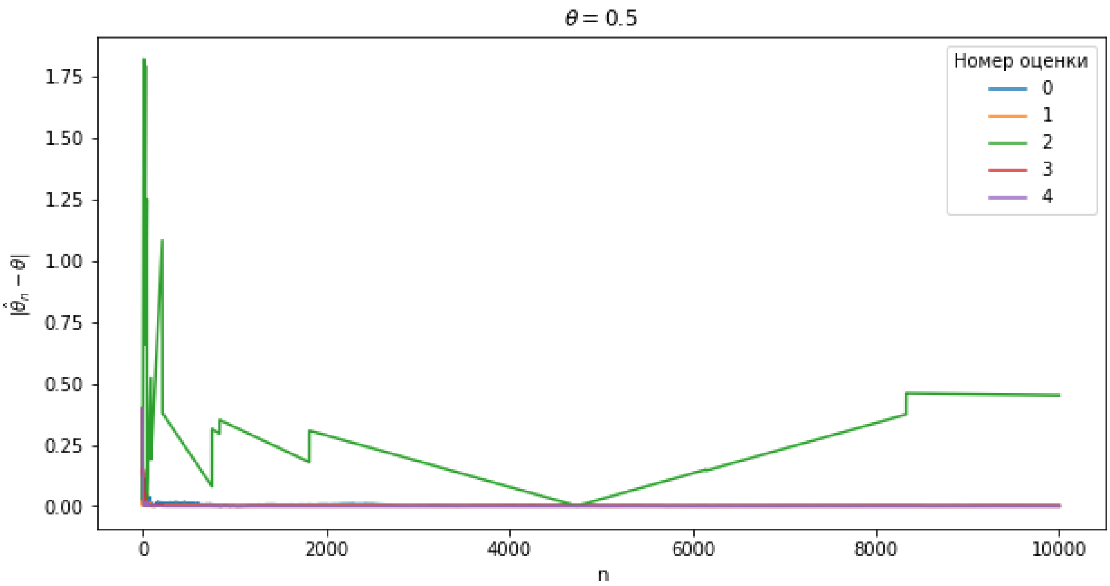
e) $\hat{\theta}_4 = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$

```
est[4] = make_estimator(lambda x: (len(x) + 1) / len(x) * np.max(x))
```

3. Построим на одном графике для всех оценок функции модуля разности оценки и истинного значения θ в зависимости от n

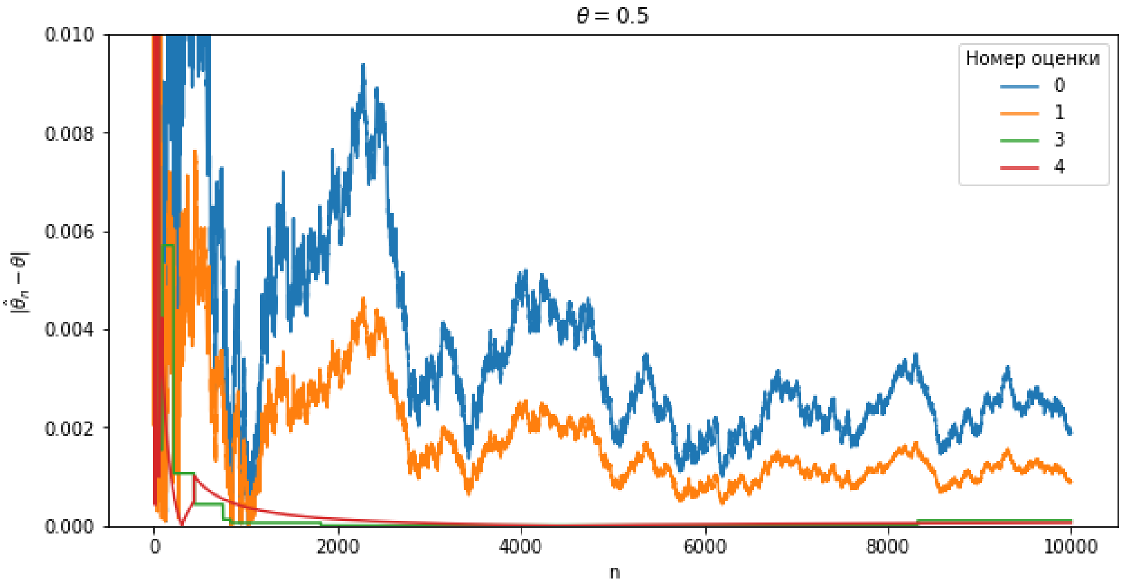
```
def make_plot(theta_num, exclude=set(), limit=True):
    plt.figure(figsize=(10,5))
    est_nums = list(set(np.arange(len(est))) - exclude) # set difference
    for est_num in est_nums:
        plt.plot(ns, np.abs(est[est_num][theta_num] - thetas[theta_num]),
                 label=str(est_num))
    plt.xlabel('n')
    plt.ylabel(r'$|\hat \theta_n - \theta|$')
    plt.legend(title='Номер оценки')
    plt.title(r'$\theta =$'+str(thetas[theta_num]))
    if limit:
        plt.ylim(0, 0.02 * thetas[theta_num])
    plt.show()
```

```
make_plot(theta_num=0, limit=False)
```

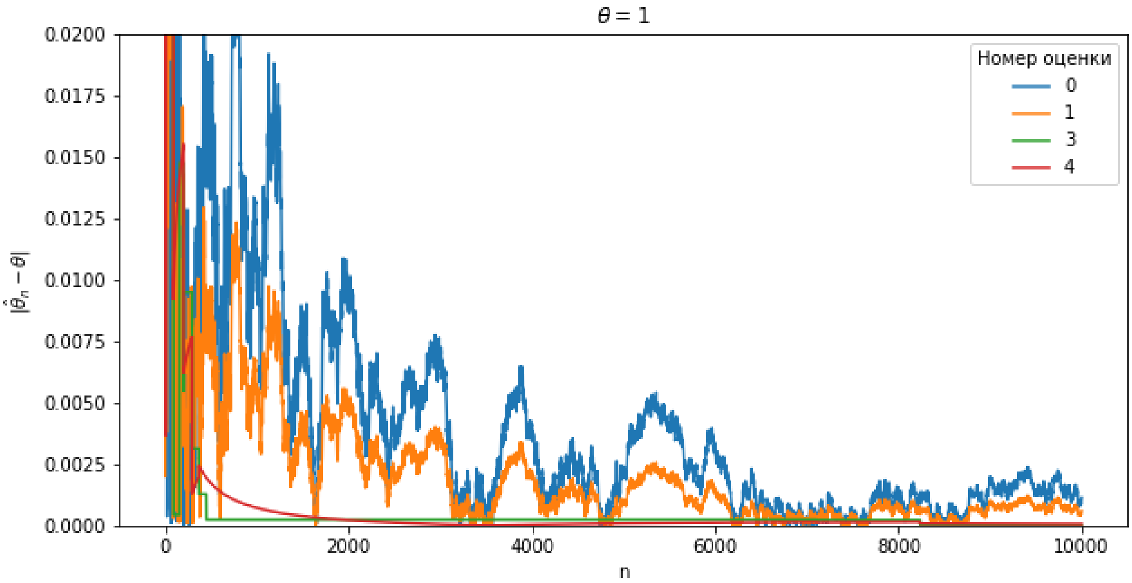


Как видно, оценка (2) сильно отличается от истинных значений θ. Это происходит из-за того, что, как следует из решения теоретической задачи, такая оценка не является состоятельной (и стремится к 0 п.н. при $n \to \infty$). Исключим ее из рассмотрения и построим графики оценок для всех θ.

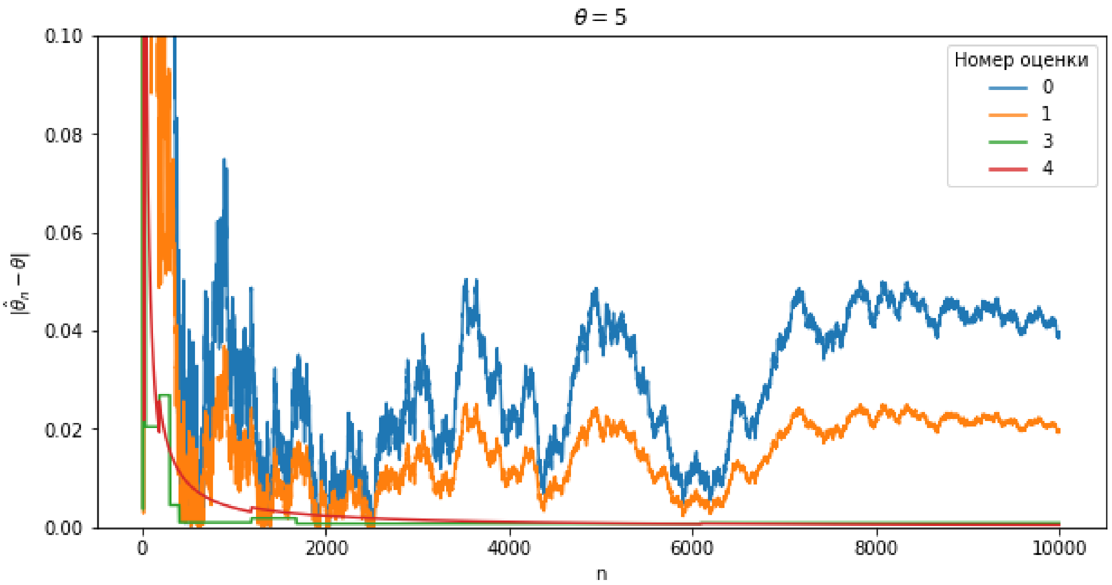
```
for i, theta in enumerate(thetas):
    make_plot(theta_num=i, exclude={2})
```



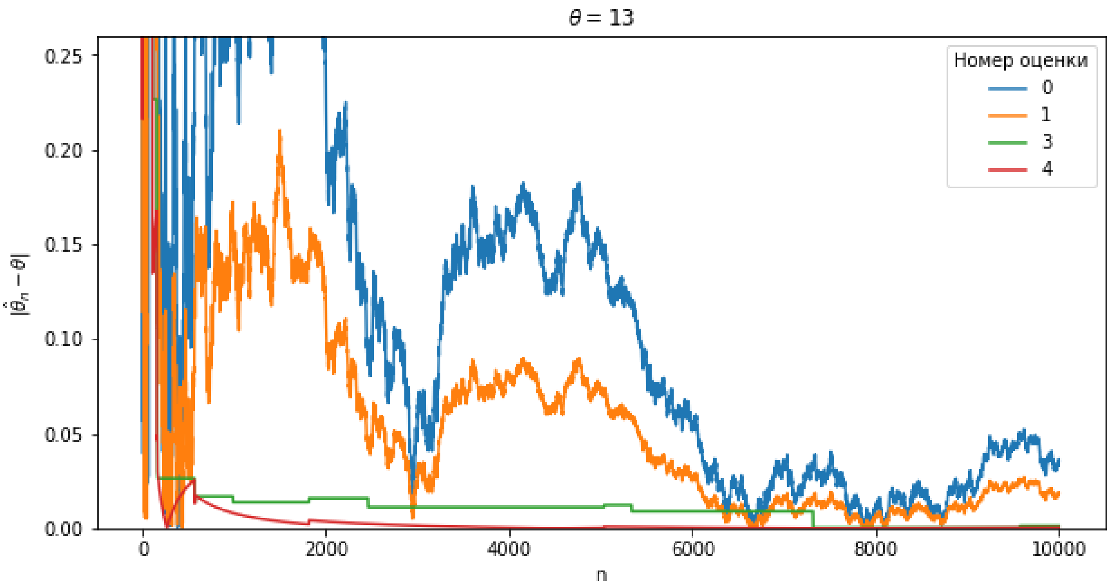
$\theta = 0.5$
Номер оценки
0
1
3
4
$|\hat{\theta}_n - \theta|$
n

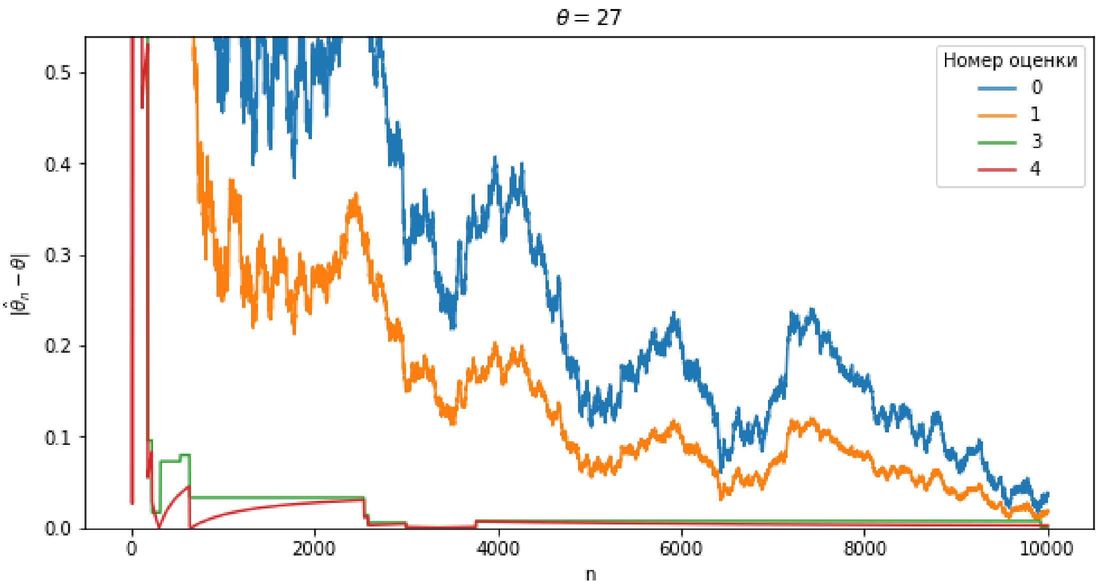


$\theta = 1$
Номер оценки
0
1
3
4
$|\hat{\theta}_n - \theta|$
n



$\theta = 5$
Номер оценки
0
1
3
4
$|\hat{\theta}_n - \theta|$
n





4. Сделаем выводы.

Все оценки, кроме (3), являются состоятельными (из решения теоретической задачи). Как видно из графиков, лучше всего себя ведут оценки (3) и (4), не включающие в себя выборочное среднее. Оценка (0), состоящая только из выборочного среднего, ведет себя хуже остальных. Скорее всего, это происходит из-за того, что первая и n-ая порядковые статистики менее подвержены флуктуациям, т.е. с ростом n (и приближением статистик к границам отрезка) вероятность изменения их значения уменьшается (например, для минимума $P(x < \alpha) = \frac{\alpha}{\theta}$), при этом номер n, на котором будет достигнут уровень приближения $|\hat{\theta}_n - \theta| < \beta \ll 1$, удовлетворяет геометрическому распределению, т.е. уровень убывает экспоненциально с ростом n. Это заметно на графике. Выборочное среднее же изменяется с каждым новым измерением (вклад которого пропорционален $1/n$), и потому медленнее сходится к истинному значению θ.