Свойства оценок. Задача 3

Ильичёв А.С., 693

```
import numpy as np
import scipy.stats as sts
from matplotlib import pyplot as plt
%matplotlib inline
```

1. Придумаем распределение, у которого конечны первые четыре момента, а пятый - нет, и сгенерируем выборку $X_1, \ldots, X_N$ из этого распределения для $N = 10^4$.

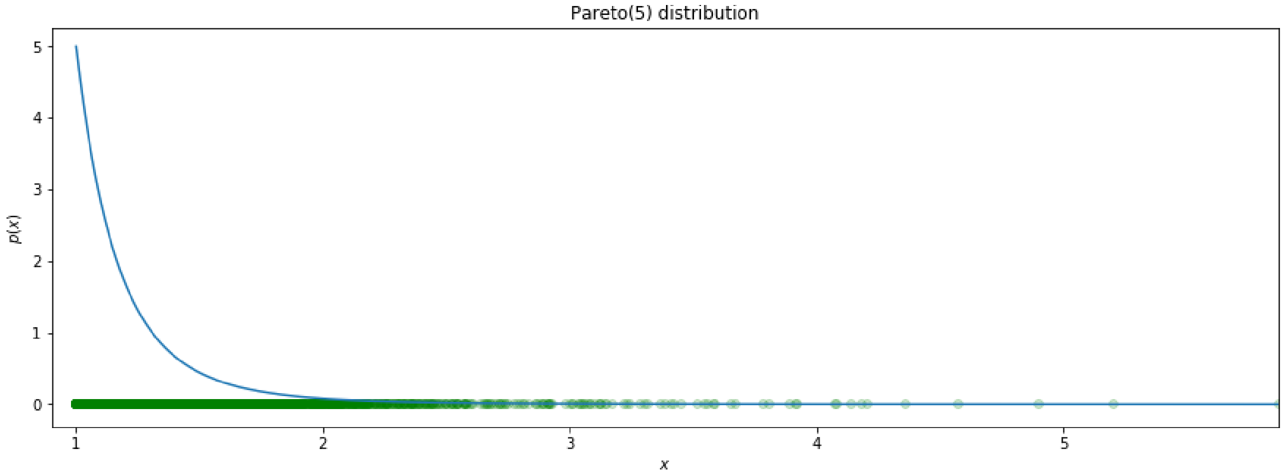
Примером такого распределения является $\mathrm{Pareto}(\gamma)$ с плотностью $p(x) = \frac{\gamma}{x^{\gamma+1}} I(x > 1)$. Так как интеграл $\int_1^\infty \frac{\gamma x^k}{x^{\gamma+1}} dx$ сходится при $\gamma > k$ (и в этом случае равен $\frac{\gamma}{\gamma - k}$), для выполнения условия можно взять $\gamma = 5$.

```
N = 10 ** 4
gamma = 5
ns = np.arange(1, N + 1)
pareto_distr = sts.pareto(gamma)
sample_par = pareto_distr.rvs(size=N)
```

2. Построим график плотности распределения и нанесем точки выборки на график.

```
def make_pdf(distr, sample, title, lim):
    plt.figure(figsize=(15,5))
    x = np.linspace(lim[0], lim[1], 1000)
    y = distr.pdf(x)
    plt.plot(x, y)
    plt.scatter(sample, np.zeros(len(sample)), alpha=0.2, c='green')
    plt.title(title)
    plt.xlim(lim[0] - 0.1, lim[1]) # небольшой отступ для красоты
    plt.xlabel(r'$x$')
    plt.ylabel(r'$p(x)$')
    plt.show()
```

```
make_pdf(pareto_distr, sample_par, 'Pareto(5) distribution', (1,
np.max(sample_par)))
```



3. Для всех $n \leq N$ посчитаем оценку $s^2 = s^2(X_1, \dots, X_n)$ для дисперсии.

```
s2_par = np.array([(sample_par[:i]**2).mean() -
                   (sample_par[:i].mean())**2 for i in ns])
```

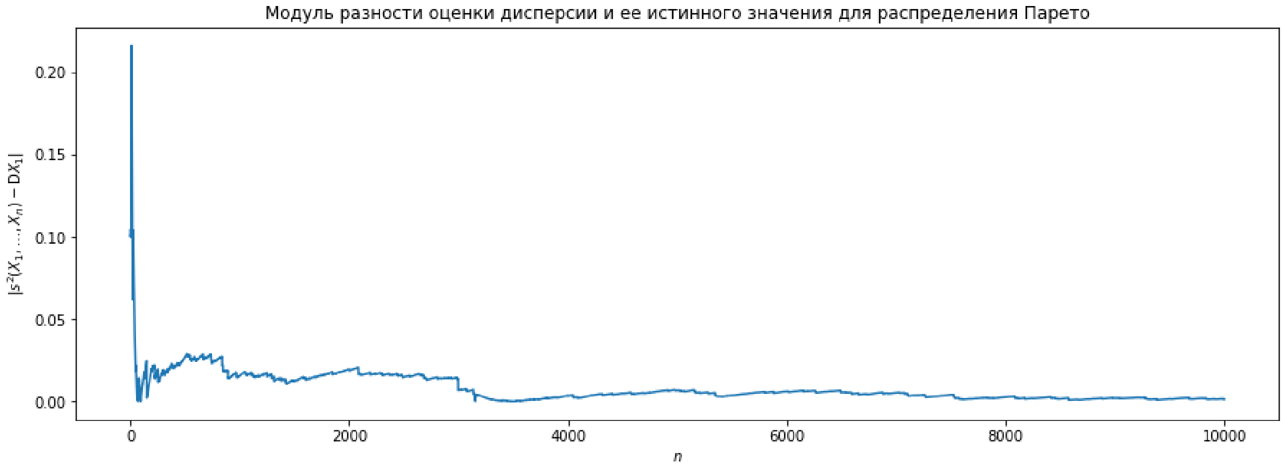
Найдем истинное значение дисперсии.

$$\mathrm{D_p} X_1 = \mathrm{E} X_1^2 - (\mathrm{E} X_1)^2 = \frac{5}{3} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5}{48}$$

```
true_var_par = 5/48
```

4. Построим график зависимости модуля разности оценки дисперсии и ее истинного значения от n.

```
plt.figure(figsize=(15,5))
plt.plot(ns, np.abs(s2_par - true_var_par))
plt.title('Модуль разности оценки дисперсии и ее\
          истинного значения для распределения Парето')
plt.xlabel(r'$n$')
plt.ylabel(r'$|s^2(X_1, \dots, X_n) - \mathrm{D}X_1|$')
plt.show()
```



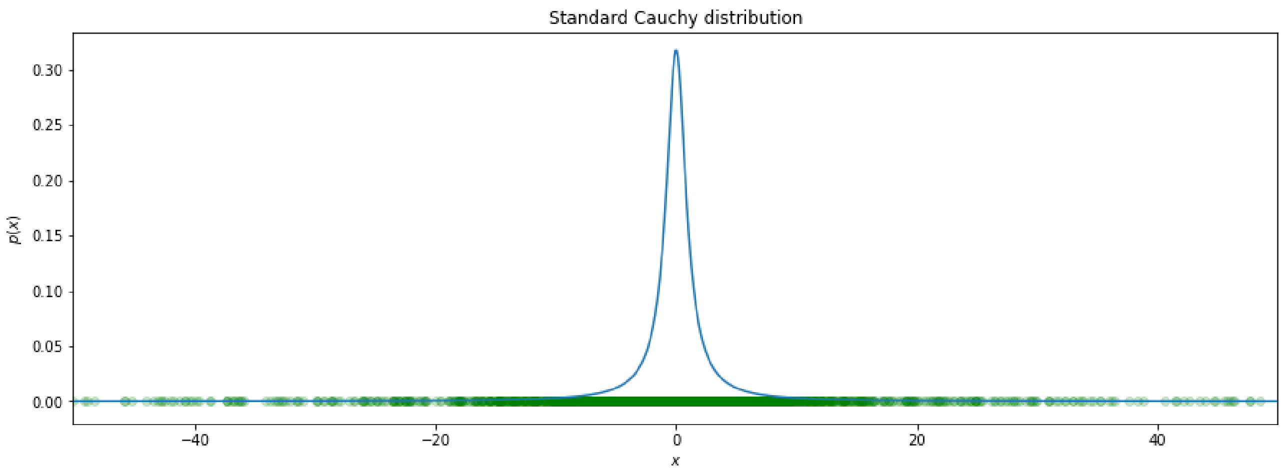
5. Проведем аналогичное исследование для выборки из распределения Коши.

Сгенерируем стандартное распределение Коши.

```
cauchy_distr = sts.cauchy()
sample_cau = cauchy_distr.rvs(size=N)
```

Построим график плотности (для наглядности ограничим диапазон значений x).

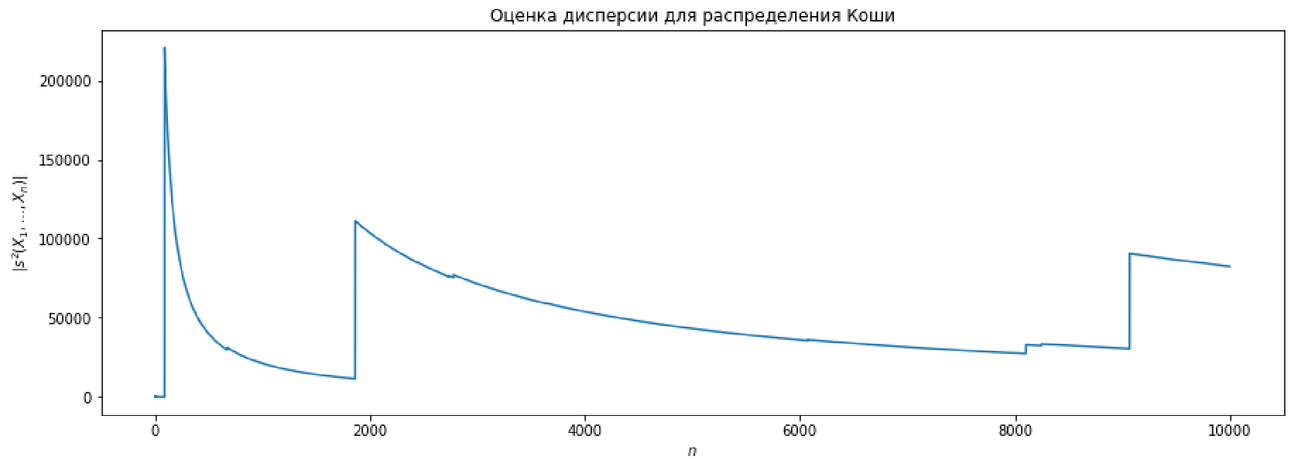
```
make_pdf(cauchy_distr, sample_cau, 'Standard Cauchy distribution', (-50, 50))
```



Найдем выборочную дисперсию и построим ее график.

```
s2_cau = np.array([(sample_cau[:i]**2).mean() -
                   (sample_cau[:i].mean())**2 for i in ns])
```

```
plt.figure(figsize=(15,5))
plt.plot(ns, s2_cau)
plt.title('Оценка дисперсии для распределения Коши')
plt.xlabel(r'$n$')
plt.ylabel(r'$|s^2(X_1, \dots, X_n)|$')
plt.show()
```



5. Сделаем выводы.

Для распределения Парето модуль разности оценки дисперсии на графике стремится к нулю при увеличении n. Это следует из теоретической задачи 4 (такая оценка является состоятельной). Оценка дисперсии для распределения Коши расходится, потому что у этого распределения не существует моментов. “Скачки” увеличения дисперсии на графике связаны с появлением в выборке больших по модулю значений.