

Анализ временных рядов.

1 (1 балл) Пусть временной ряд $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ с нулевым матожиданием подчиняется модели авторегрессии $AR(2)$: $X_n = \alpha X_{n-1} + \beta X_{n-2} + \varepsilon_n$, где белый шум ε_n не зависит от X_{n-i} , $i \geq 1$. Не используя утверждение с 19-го слайда лекции, доказать, что необходимыми условиями того, чтобы ряд X_n являлся стационарным в широком смысле, являются $|\alpha + \beta| \leq 1$, $|\alpha - \beta| \leq 1$.

2 (2 балла) Выдан временной ряд $\{X_i\}_{i=1}^{n+k}$. С помощью модели ARIMA сделать прогноз значений ряда $(\hat{X}_{n+1}, \dots, \hat{X}_{n+2k})$ по первым n наблюдениям. Визуализировать прогноз на графике в сравнении с истинными значениями ряда.

3 (3 балла) Выдан временной ряд $\{X_i\}_{i=1}^{n+k}$. Предсказать значения $(\hat{X}_{n+1}, \dots, \hat{X}_{n+k})$ по первым n наблюдениям с помощью метода экспоненциального сглаживания и в рамках модели ARIMA, сравнить качество полученных прогнозов с помощью U-коэффициента Тейла (если он равен 1, то прогноз так же плох, как и наивный: $\hat{X}_{n+i} = X_n$)

$$U = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^k (\hat{X}_{n+i} - X_{n+i})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^k (X_{n+i} - X_n)^2}}.$$

4 (3 балла) Выдан временной ряд $\{Y_i\}_{i=1}^{n+k}$, а также признаки $\{x_{ij}\}_{i=1}^{n+k}$, $j = 1, \dots, m$. Методами анализа временных рядов и регрессионного анализа построить прогноз значений ряда $(\hat{Y}_{n+1}, \dots, \hat{Y}_{n+2k})$ по первым n наблюдениям. Визуализировать прогнозы на графике в сравнении с истинными значениями ряда.

5 (3 балла) Пусть $(X_t, t \in \mathbb{R})$ – гауссовский центрированный стационарный процесс с ковариационной функцией $R(s, t) = e^{-|t-s|}$. Промоделировать этот процесс моделями AR(1) и AR(2). Вывести несколько траекторий смоделированных процессов. По полученным значениям оценить ковариационную функцию процесса с помощью оценки

$$\hat{R}_N(m) := \frac{1}{N-m} \sum_{k=0}^{N-m-1} X_{m+k} X_k \quad \text{при } 0 \leq m \leq N-1,$$

и сравнить её с истинным значением функции. Как зависит близость оценки к истинному значению от величины шага при моделировании?