Доверительные интервалы. Задача 1

Ильичёв А.С., 693

```
import numpy as np
import scipy.stats as sts
from matplotlib import pyplot as plt
%matplotlib inline
```

1. Сгенерируем выборки $X_1, \ldots, X_{100}$ из распределений P_θ в теоретических задачах $6.1, 6.3, 6.4, 6.5$ и построим доверительные интервалы, полученные в этих задачах, для уровня доверия $\alpha = 0.95$ и $n \leq 100$. Для $n = 100$ оценим вероятность попадания истинного значения в интервал.

```
N = 100
ns = np.arange(1, N + 1)
theta = 10
alpha = 0.95
```

Напишем функцию для построения доверительных интервалов.

```
def plot_CI(left, right, sample, lim=None):
    plt.figure(figsize=(10, 5))
    lefts = [left(sample[:n]) for n in ns]
    rights = [right(sample[:n]) for n in ns]
    plt.plot(ns, lefts, c='black')
    plt.plot(ns, rights, c='black')
    plt.fill_between(ns, lefts, rights, color='lightgrey',
                     label=r'ДИ для $\theta$')
    plt.plot([ns[0], ns[-1]], [theta, theta], '--', c='red',
             label=r'Истинное значение $\theta$')
    plt.legend()
    plt.xlabel(r'$n$')
    if lim:
        plt.ylim(lim[0], lim[1])
    plt.show()
```

Напишем функцию для оценки вероятности попадания истинного значения в интервал. Для этого сгенерируем достаточно много выборок, построим по каждой из них интервалы и определим, попадает ли в интервал истинное значение θ. Будем брать 10000 выборок, чтобы получить оценку с 4 знаками после запятой. Попадание оценки в интервал является событием из распределения Бернулли. Как известно, эффективной оценкой для распределения Бернулли является $\overline{X}$. Ее и будем считать.

```
def calc_probability(distr, left, right, sample):
    num = 10000
    samples = distr.rvs(size=(num, N))
    xsum = 0
    for s in samples:
        xsum += (left(s) < theta < right(s))
    print('Оценка вероятности попадания истинного '+
          'значения theta в интервал: ', xsum / num)
```

6.1. $U[0, \theta]$, $\theta = 10$

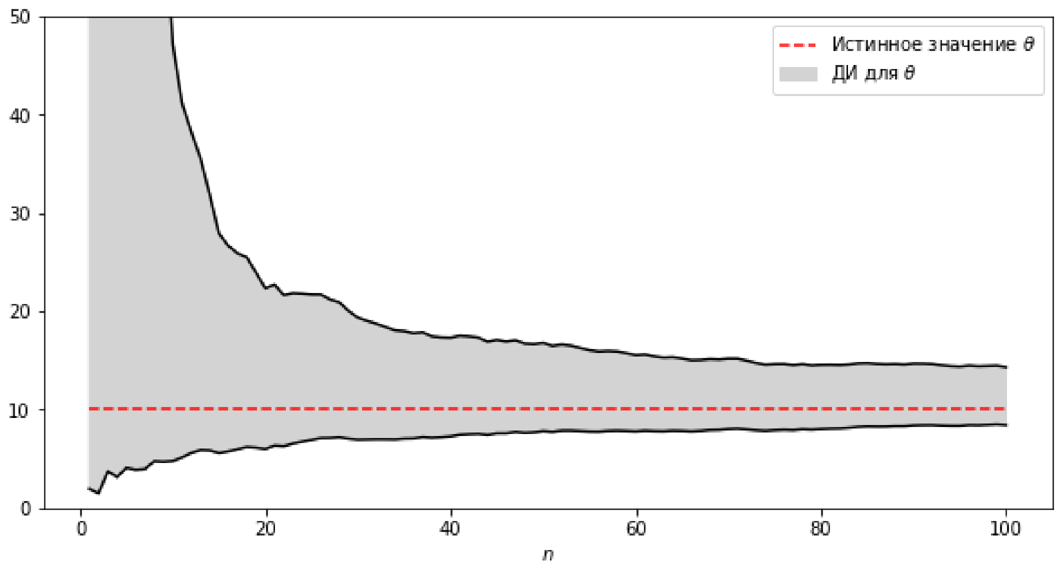
```
distr = sts.uniform(0, theta)
sample = distr.rvs(N)
```

а) Используем статистику $\overline{X}$. Доверительный интервал (не является точным):

$$\left(\frac{\overline{X}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12n(1-\alpha)}}}, \begin{cases} \frac{\overline{X}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12n(1-\alpha)}}}, & \text{if } \sqrt{12n(1-\alpha)} > 2 \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases} \right).$$

Такой необычный вид правой границы связан с условием $\overline{X} \geq 0$ и тем, что мы получали доверительный интервал из неравенства Чебышёва для $\overline{X}$.

```
left = lambda x: np.mean(x) / (1 / 2 + 1/np.sqrt(12 * len(x) * (1 - alpha)))
right = lambda x: (np.mean(x) / (1 / 2 - 1/np.sqrt(12 * len(x) * (1 - alpha)))
                   if np.sqrt(12 * len(x) * (1 - alpha)) > 2 else 10**9)
plot_CI(left, right, sample, lim=(0, 50))
calc_probability(distr, left, right, sample)
```

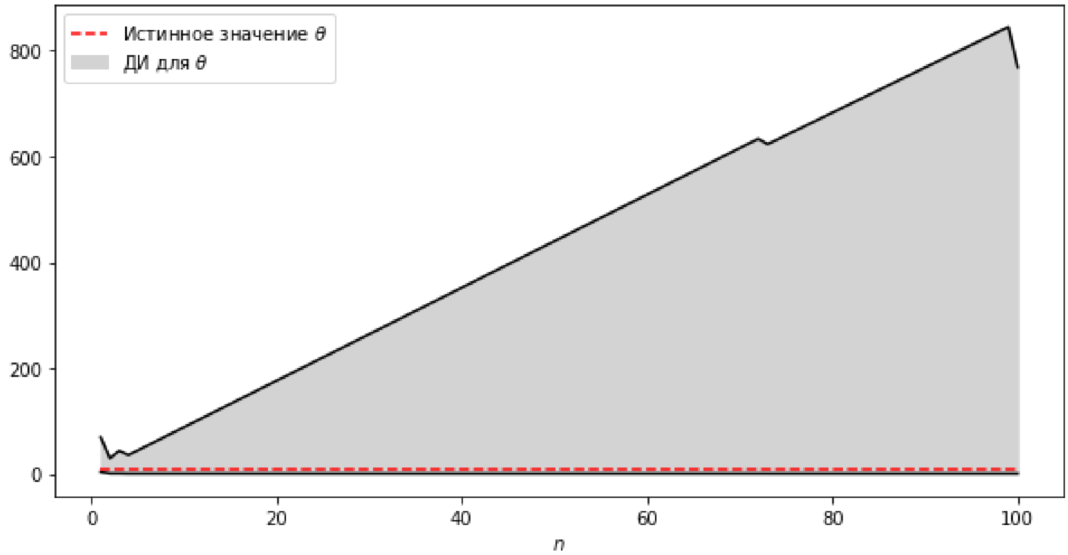



```
Оценка вероятности попадания истинного значения theta в интервал:  1.0
```

б) Используем статистику $X_{(1)}$. Доверительный интервал (точный):

$$\left(X_{(1)},\ \frac{X_{(1)}}{1-\sqrt[n]{\alpha}}\right).$$

```
left = lambda x: np.min(x)
right = lambda x: np.min(x) / (1 - alpha ** (1 / len(x)))
plot_CI(left, right, sample)
calc_probability(distr, left, right, sample)
```

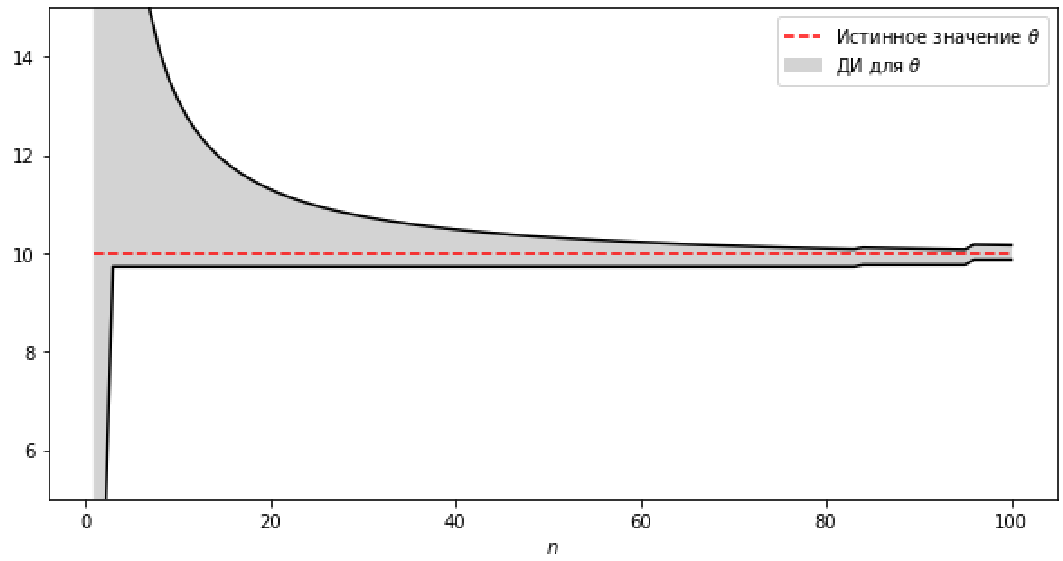



```
Оценка вероятности попадания истинного значения theta в интервал:  0.9472
```

в) Используем статистику $X_{(n)}$. Доверительный интервал (точный):

$$\left(X_{(n)},\ \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{1-\alpha}}\right).$$

```
left = lambda x: np.max(x)
right = lambda x: np.max(x) / (1 - alpha) ** (1 / len(x))
plot_CI(left, right, sample, lim=(5, 15))
calc_probability(distr, left, right, sample)
```




```
Оценка вероятности попадания истинного значения theta в интервал:  0.9508
```

6.3. $Cauchy(\theta, 1)$, $\theta = 10$. Асимптотический доверительный интервал:

$$\left(\hat{\mu} - \frac{\pi U_{\frac{1+\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}, \hat{\mu} + \frac{\pi U_{\frac{1+\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}\right),$$

где U_p - p-квантиль стандартного нормального распределения (реализован как `sts.norm.ppf(p)`), а $\hat{\mu}$ - выборочная медиана.

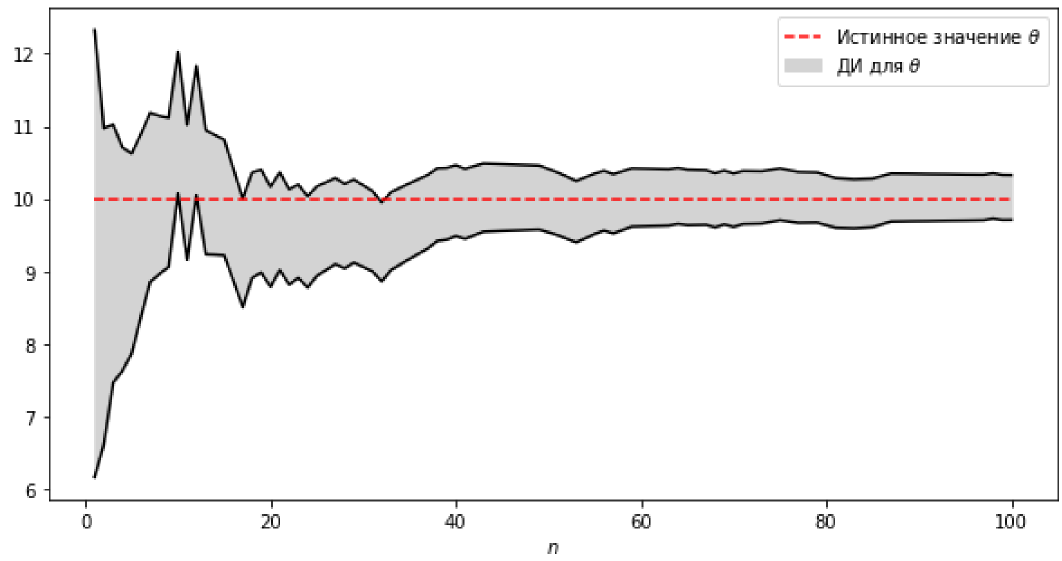
Мы еще встретим в дальнейшем $\frac{1+\alpha}{2}$-квантиль, поэтому сохраним в его в отдельную переменную.

```
u = sts.norm.ppf((1 + alpha) / 2)
```

```
u
```

```
1.959963984540054
```

```
distr = sts.cauchy(loc=theta)
sample = distr.rvs(N)
left = lambda x: np.median(x) - (np.pi * u / (2 * np.sqrt(len(x))))
right = lambda x: np.median(x) + (np.pi * u / (2 * np.sqrt(len(x))))
plot_CI(left, right, sample)
calc_probability(distr, left, right, sample)
```

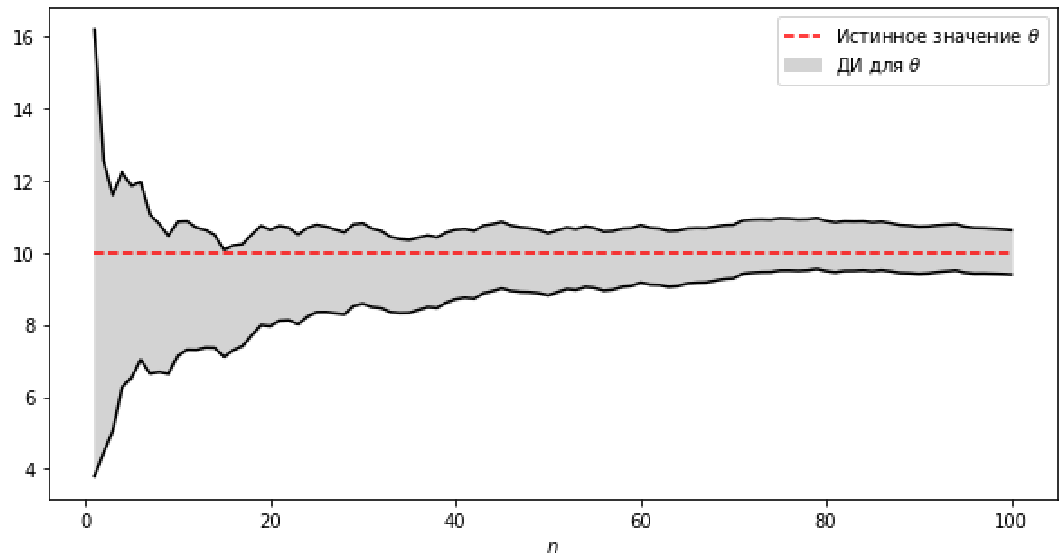



```
Оценка вероятности попадания истинного значения theta в интервал:  0.9451
```

6.4. $Pois(\theta)$, $\theta = 10$. Асимптотический доверительный интервал:

$$\left(\overline{X} - \sqrt{\frac{\overline{X}}{n}} U_{\frac{1+\alpha}{2}}, \overline{X} + \sqrt{\frac{\overline{X}}{n}} U_{\frac{1+\alpha}{2}}\right).$$

```
distr = sts.poisson(theta)
sample = distr.rvs(N)
left = lambda x: np.mean(x) - u * np.sqrt(np.mean(x)/len(x))
right = lambda x: np.mean(x) + u * np.sqrt(np.mean(x)/len(x))
plot_CI(left, right, sample)
calc_probability(distr, left, right, sample)
```




```
Оценка вероятности попадания истинного значения theta в интервал:  0.9484
```

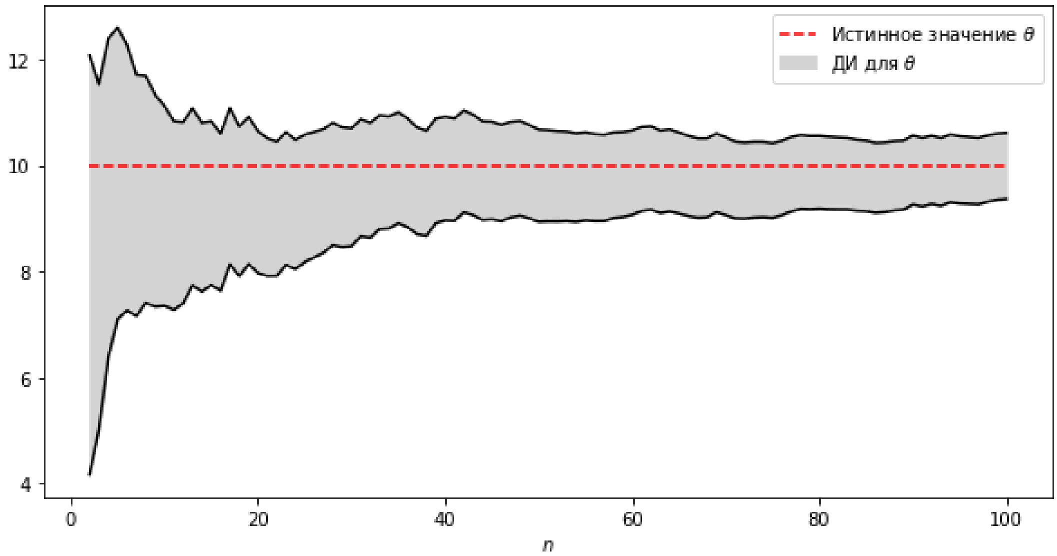
6.5. $Gamma(\theta, \lambda)$, $\theta = 10, \lambda = 3$.

```
lam = 3
distr = sts.gamma(a=theta, scale=1/lam)
sample = distr.rvs(N)
```

а) Пусть λ известно. Асимптотический доверительный интервал:

$$\left(\lambda\left(\overline{X}-\sqrt{\frac{\overline{X}}{\lambda n}}U_{\frac{1+\alpha}{2}}\right),\lambda\left(\overline{X}+\sqrt{\frac{\overline{X}}{\lambda n}}U_{\frac{1+\alpha}{2}}\right)\right).$$

```
left = lambda x: lam * (np.mean(x) - u * np.sqrt(np.mean(x)/(len(x) * lam)))
right = lambda x: lam * (np.mean(x) + u * np.sqrt(np.mean(x)/(len(x) * lam)))
plot_CI(left, right, sample)
calc_probability(distr, left, right, sample)
```



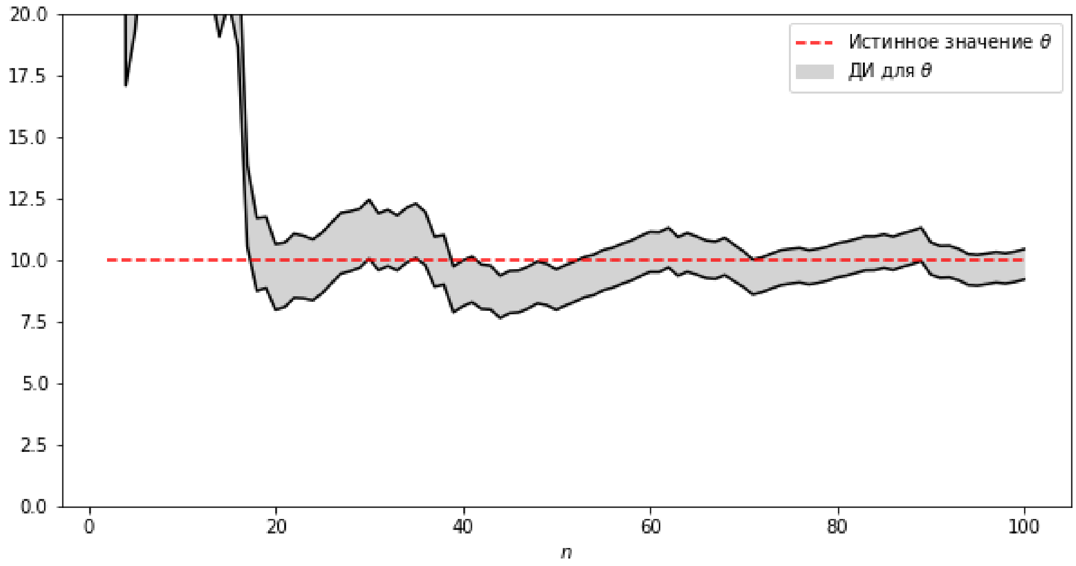

```
Оценка вероятности попадания истинного значения theta в интервал:  0.949
```

б) Пусть λ неизвестно. Тогда, так как ДИ асимптотический, мы можем в интервале заменить λ на ее состоятельную оценку. Таковой является оценка методом моментов $\lambda^* = \frac{\overline{X}}{\overline{X^2}-\left(\overline{X}\right)^2}$ (по утверждению из семинара). Получаем:

$$\left(A-\sqrt{\frac{A}{n}}U_{\frac{1+\alpha}{2}},\,A+\sqrt{\frac{A}{n}}U_{\frac{1+\alpha}{2}}\right),\text{где } A=\lambda^*\overline{X}=\frac{\left(\overline{X}\right)^2}{\overline{X^2}-\left(\overline{X}\right)^2}.$$

```
N = 100
# для n = 1 будет 0 в знаменателе, поэтому начнем с 2
ns = np.arange(2, N + 1)
A = lambda x: np.mean(x)**2 / (np.mean(x**2) -
                 np.mean(x)**2)
left = lambda x: A(x) - np.sqrt(A(x)/len(x)) * u
right = lambda x: A(x) + np.sqrt(A(x)/len(x)) * u
```

```
plot_CI(left, right, sample, lim=(0, 20))
calc_probability(distr, left, right, sample)
```




```
Оценка вероятности попадания истинного значения theta в интервал:  0.3211
```

2. Вывод.

Доверительные интервалы, построенные с помощью состоятельных (с точностью до постоянного множителя) оценок, сужаются с ростом n. При этом оценка вероятности попадания истинного значения в интервал с хорошей точностью соответствует уровню доверия интервала даже в асимптотическом случае. В пункте **6.1 (б)** интервал расходится, это связано с тем, что оценка не является состоятельной (по сути, мы пытаемся оценить верхнюю границу распределения, имея только нижнюю). В **6.5 (б)** получается очень низкая оценка вероятности попадания в интервал. Это может объясняться как тем, что метод построения интервала, в котором мы заменяем неизвестный параметр его оценкой, не очень эффективный, так и тем, что сама оценка λ, полученная методом моментов, недостаточно “хорошая” (например, медленно сходится к истинному значению; в утверждении, доказывающем состоятельность, не уточняется скорость сходимости).