Основные методы поиска оценок. Задача 1

Ильичёв А.С., 693

```
import numpy as np
import scipy.stats as sts
from matplotlib import pyplot as plt
%matplotlib inline
```

1. В этой задаче нужно оценить дисперсию оценки для разных распределений методом бутстрепа. Сначала зададим число элементов N в исходной выборке и напишем необходимые функции.

```
N = 1000
ns = np.arange(1, N + 1)
```

Функция, вычисляющая оценку по методу моментов для каждого $n \leq N$.

```
def calculate_estimator(sample, first_func, second_func=None):
    est = np.array([first_func(sample[:i]) for i in ns])
    if second_func:
        est2 = np.array([second_func(sample[:i]) for i in ns])
        ests = [est, est2]
    else:
        ests = [est]
    return ests
```

Функция, осуществляющая построение графиков.

```
def make_plot(var_par, var_nonpar):
    plt.figure(figsize=(10, 5))
    plt.plot(var_par[0], var_par[1][0], c='blue',
             label = '1, парам. бутстреп', alpha=0.7)
    plt.plot(var_nonpar[0], var_nonpar[1][0], c='green',
             label = '1, непарам. бутстреп', alpha=0.7)
    plt.title(r'Зависимость бутстрепной оценки дисперсии '
              r'оценки $\theta_1$ от $n$')
    plt.legend(title='Номер параметра')
    plt.show()
    if var_par[1][1][0]: # первый элемент массива не None
        plt.figure(figsize=(10, 5))
        plt.plot(var_par[0], var_par[1][1], c='orange',
                 label = '2, парам. бутстреп')
        plt.plot(var_nonpar[0], var_nonpar[1][1], c='red',
                 label = '2, непарам. бутстреп', alpha=0.7)
```

```
        plt.title(r'Зависимость бутстрепной оценки дисперсии '
                  r'оценки $\theta_2$ от $n$')
        plt.legend(title='Номер параметра')
        plt.show()
```

Главная функция подсчета бутстрепных оценок (реализация метода, описанного во введении к заданию). Для увеличения быстродействия оценка производится по сетке (с шагом, задаваемым параметром `grid_step`). Для n < 100 считать не будем, т.к. там оценка дисперсии велика и масштаб графиков увеличивается.

```
# число бутстрепных выборок
straps_num = N
# номер n, с которого начинается подсчет
start_from = 100
def bootstrap(parametric, distr, distr_sample, ests, grid_step,
              parametric_distr, first_func, second_func=None):
    ns_strap = np.arange(max(start_from, grid_step), N + 1, grid_step)
    var_strap1 = [None] * len(ns_strap)
    var_strap2 = [None] * len(ns_strap)
    for i, n in enumerate(ns_strap):
        # генерируем N бутстрепных выборок размера n
        if not parametric:
            samples = np.random.choice(distr_sample[:n], size=(straps_num, n))
        else:
            if second_func: # если функция задана, то распределение
                            # двухпараметрическое
                samples = parametric_distr(ests[0][n - 1],
                                           ests[1][n - 1]).rvs(size=(N, n))
            else: # однопараметрическое распределение
                samples = parametric_distr(ests[0][n - 1]).rvs(size=(straps_num,
n))
        if second_func:
                # считаем оценку второго параметра и ее дисперсию для бутстрепной
                # выборки
                ests_strap2 = np.array([second_func(sample) for sample in samples])
                var_strap2[i] = np.mean(ests_strap2**2) - (np.mean(ests_strap2))**2
        # считаем оценку первого параметра и ее дисперсию для бутстрепной выборки
        ests_strap1 = np.array([first_func(sample) for sample in samples])
        var_strap1[i] = np.mean(ests_strap1**2) - (np.mean(ests_strap1))**2
    return [ns_strap, (var_strap1, var_strap2)]
```

Обертка, проводящая бутстрепную оценку и строящая графики.

```
def make_bootstrap(general_distr, sample, ests, grid_step, first_func,
                   second_func=None, parametric_distr=None):
    if not parametric_distr:
        parametric_distr = general_distr
    var_par = bootstrap(parametric=True, distr=general_distr,
                        distr_sample=sample, ests=ests, grid_step=grid_step,
                        first_func=first_func, second_func=second_func,
                        parametric_distr=parametric_distr)
    var_nonpar = bootstrap(parametric=False, distr=general_distr,
                        distr_sample=sample, ests=ests, grid_step=grid_step,
                        first_func=first_func, second_func=second_func,
```

```
                          parametric_distr=None)
    make_plot(var_par, var_nonpar)
```

2. Проведем бутстрепную оценку для всех распределений из задачи.

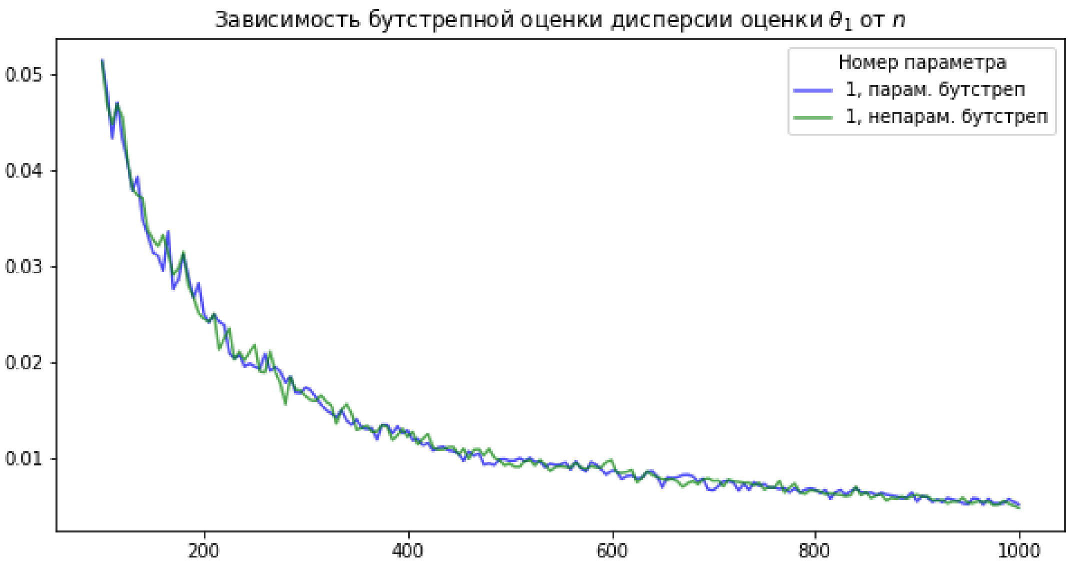
а) $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

$a^* = \overline{X}$, $(\sigma^2)^* = \overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2$

```
norm_distr = sts.norm
a_func = lambda x: np.mean(x)
sigma_func = lambda x: np.mean(x**2) - (np.mean(x))**2
params = [(0,1), (5, 5), (5, 10), (10, 10)]
def parametric_distr(param1, param2):
    # функция принимает корень из дисперсии
    return norm_distr(param1, np.sqrt(param2))

for param in params:
    distr = parametric_distr(param[0], param[1])
    sample = distr.rvs(size=N)
    ests = calculate_estimator(sample, a_func, sigma_func)
    print('theta = ', param)
    make_bootstrap(norm_distr, sample, ests, 5, a_func,
                   sigma_func, parametric_distr)
```

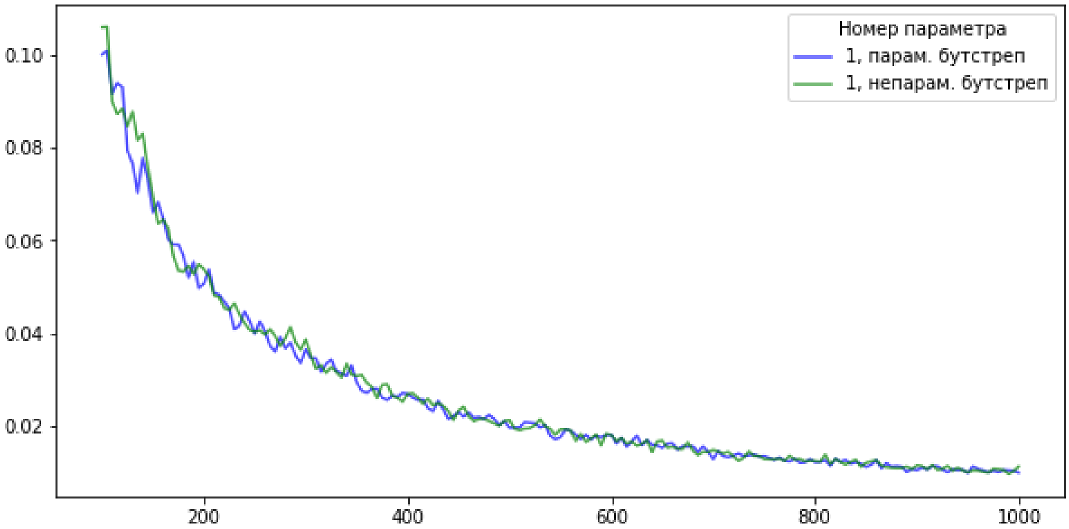
```
theta =  (0, 1)
```


```
theta =  (5, 5)
```

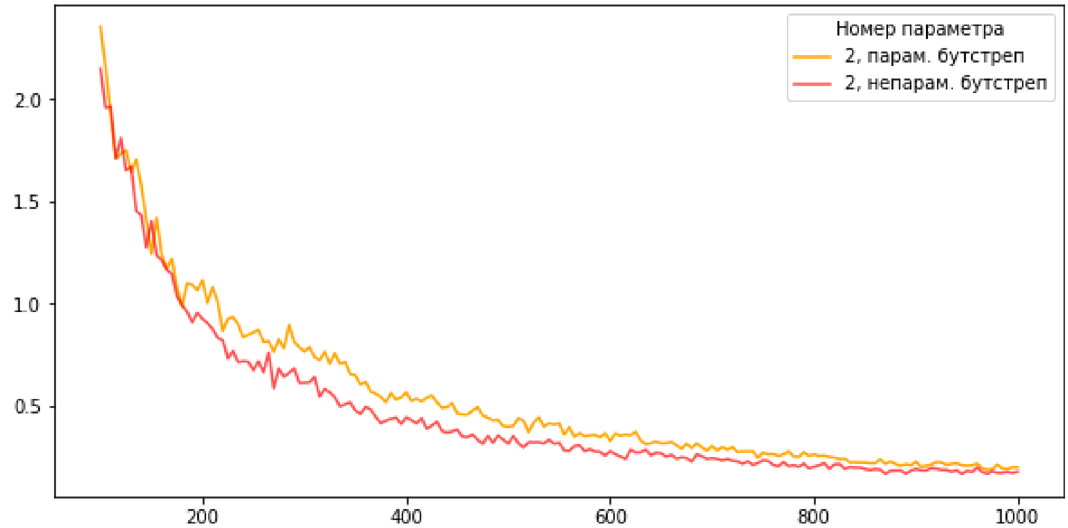



```
theta =  (5, 10)
```

Зависимость бутстрепной оценки дисперсии оценки θ_1 от n

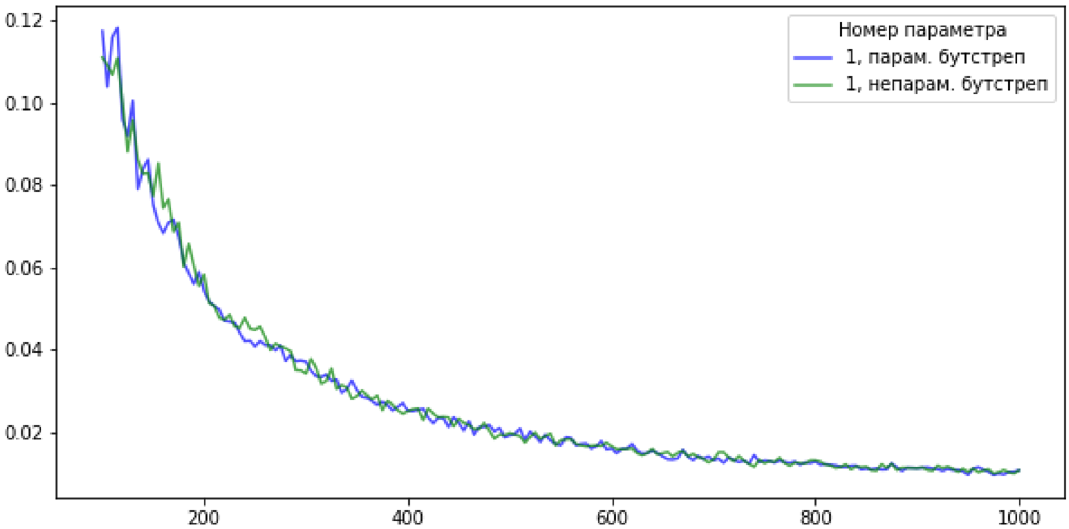


Зависимость бутстрепной оценки дисперсии оценки θ_2 от n




```
theta =  (10, 10)
```

Зависимость бутстрепной оценки дисперсии оценки θ_1 от n



б) $\Gamma(\alpha, \lambda)$.

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1}\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} I(x > 0)$$

$$\alpha^* = \frac{\left(\overline{X}\right)^2}{\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2}, \lambda^* = \frac{\overline{X}}{\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2}$$

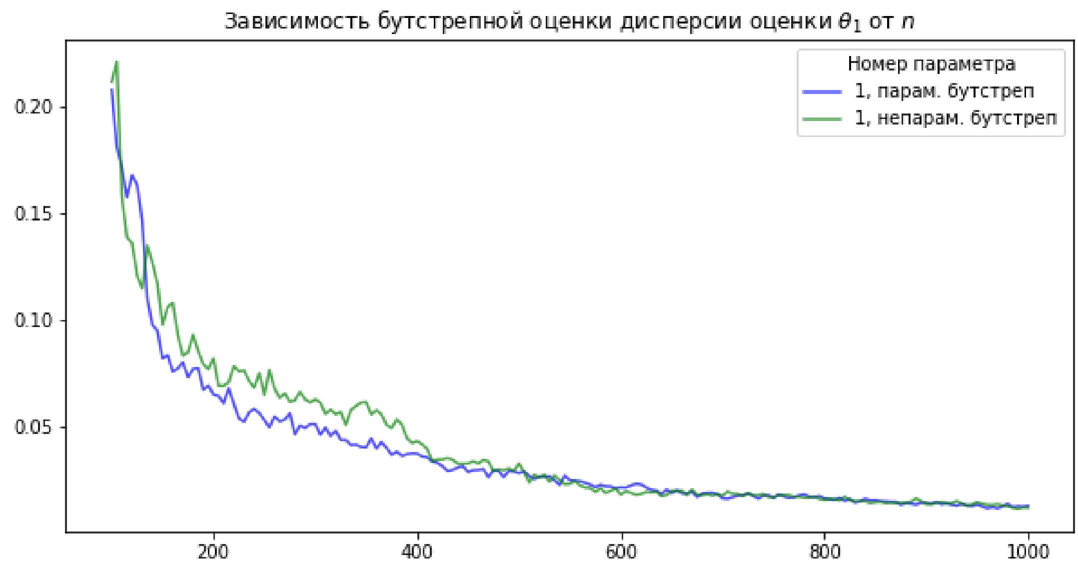
```
gamma_distr = sts.gamma
# для n = 1, например, функция оценки методом моментов вернет бесконечность
# не будем выводить предупреждения о таких случаях
np.seterr(divide='ignore')
alpha_func = lambda x: np.mean(x)**2/(np.mean(x**2) - (np.mean(x))**2)
lambda_func = lambda x: np.mean(x)/(np.mean(x**2) - (np.mean(x))**2)
params = [(1,1), (2, 1), (2, 0.01)]
def parametric_distr(param1, param2):
    # функция принимает параметр масштаба, обратный нашему
    return gamma_distr(a=param1, scale=1/param2)

for param in params:
    distr = parametric_distr(param[0], param[1])
    sample = distr.rvs(size=N)
    ests = calculate_estimator(sample, alpha_func, lambda_func)
    print('theta = ', param)
    make_bootstrap(norm_distr, sample, ests, 5, alpha_func,
                   lambda_func, parametric_distr)
```

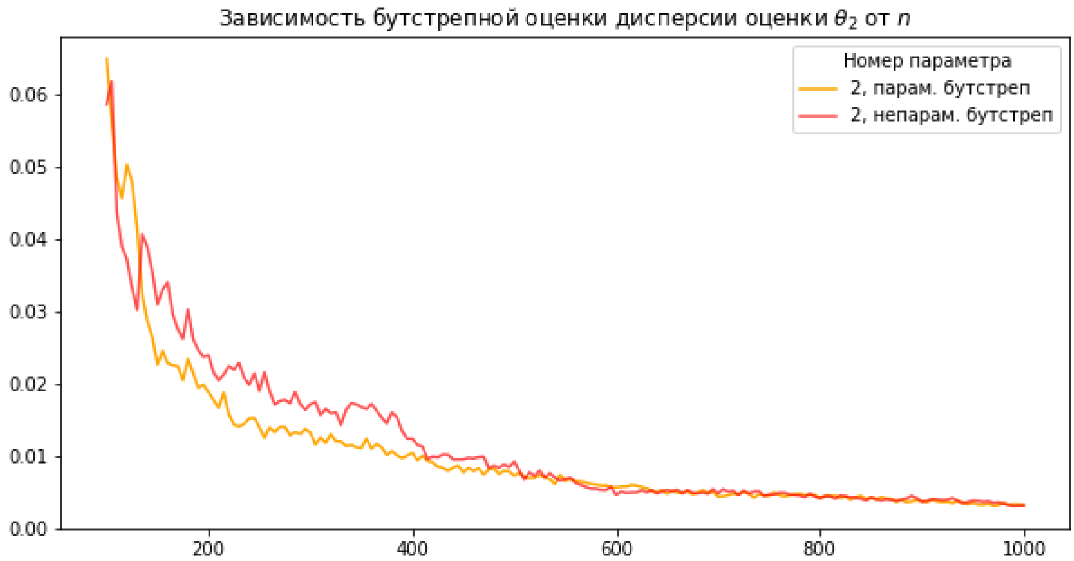
```
theta =  (1, 1)
```


Зависимость бутстрепной оценки дисперсии оценки θ_1 от n
Номер параметра
1, парам. бутстреп
1, непарам. бутстреп
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
200
400
600
800
1000

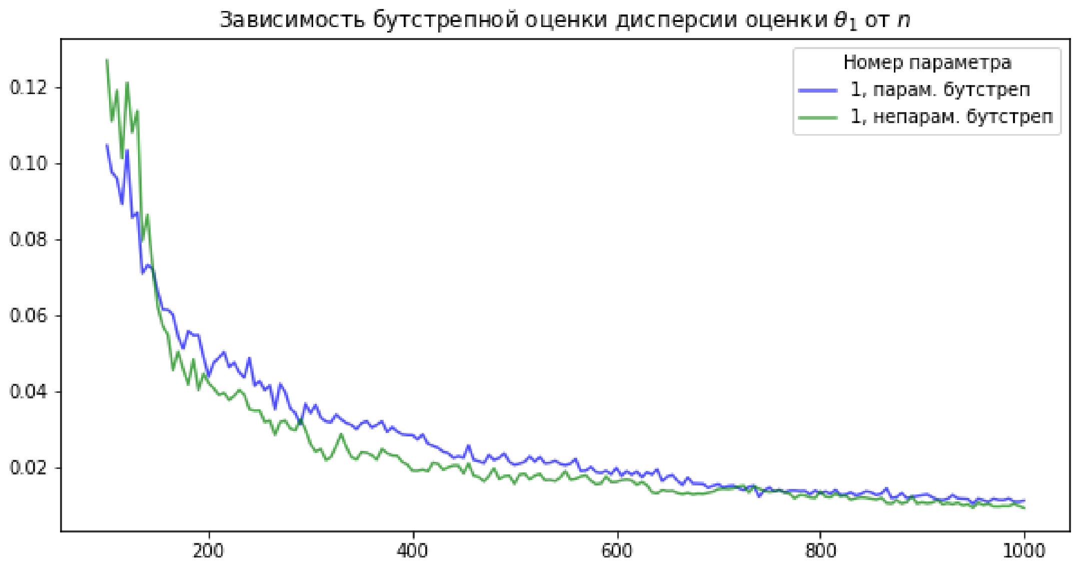

Зависимость бутстрепной оценки дисперсии оценки θ_2 от n
Номер параметра
2, парам. бутстреп
2, непарам. бутстреп
0.08
0.06
0.04
0.02
200
400
600
800
1000

```
theta =  (2, 1)
```


Зависимость бутстрепной оценки дисперсии оценки θ_1 от n
Номер параметра
1, парам. бутстреп
1, непарам. бутстреп
0.20
0.15
0.10
0.05
200
400
600
800
1000




```
theta =  (2, 0.01)
```



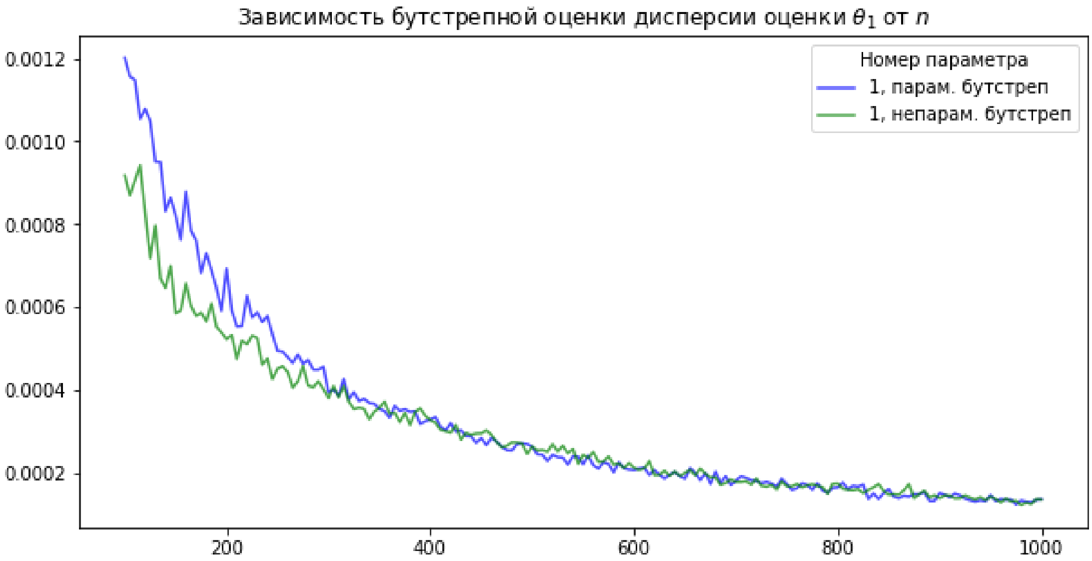
в) $R(a, b)$

$$a^* = \overline{X} - \sqrt{3\left(\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2\right)}, b^* = \overline{X} + \sqrt{3\left(\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2\right)}$$

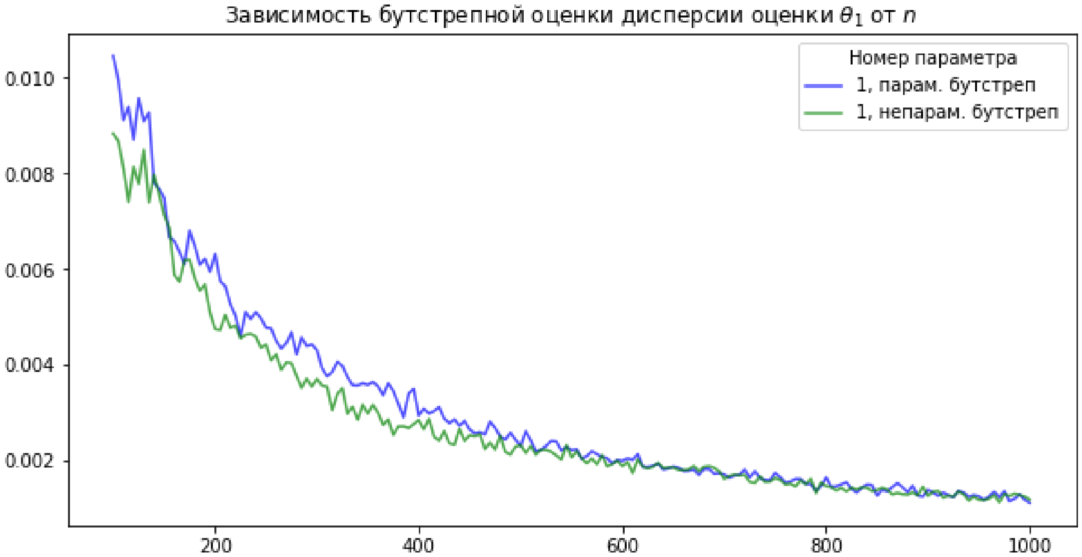
```
uniform_distr = sts.uniform
a_func = lambda x: np.mean(x) - np.sqrt(3 * (np.mean(x**2) - (np.mean(x))**2))
b_func = lambda x: np.mean(x) + np.sqrt(3 * (np.mean(x**2) - (np.mean(x))**2))
params = [(0,1), (5, 6), (5, 8), (5, 100)]
def parametric_distr(param1, param2):
    # функция возвращает распределение на [a, a+b]
    return uniform_distr(param1, param2 - param1)

for param in params:
    distr = parametric_distr(param[0], param[1])
    sample = distr.rvs(size=N)
    ests = calculate_estimator(sample, a_func, b_func)
    print('theta = ', param)
    make_bootstrap(uniform_distr, sample, ests, 5, a_func,
                   b_func, parametric_distr)
```

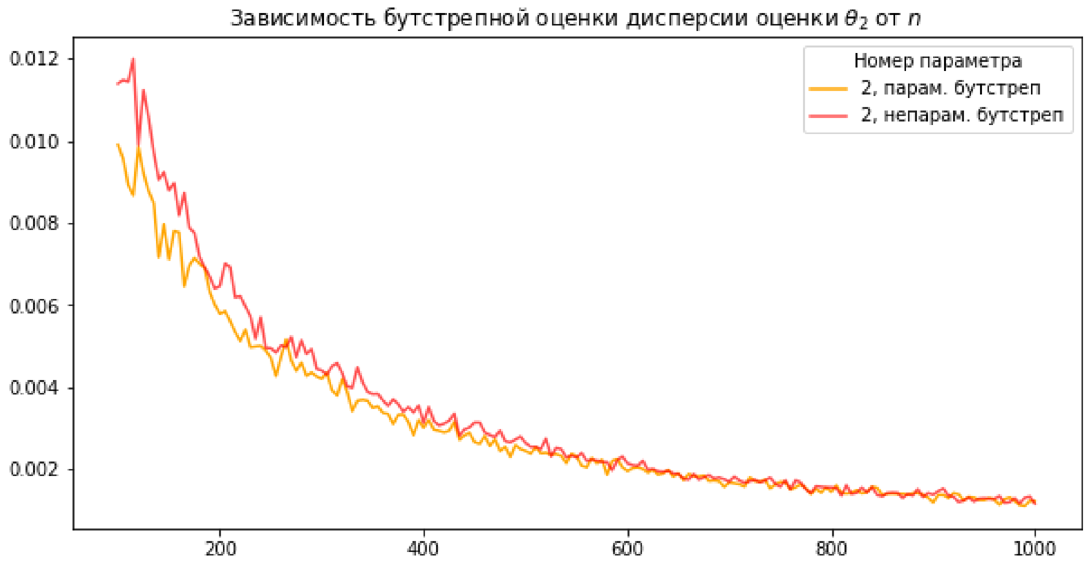
```
theta =  (0, 1)
```

```
theta =  (5, 6)
```




```
theta =  (5, 8)
```






```
theta =  (5, 100)
```

г) $\mathrm{Pois}(\lambda)$

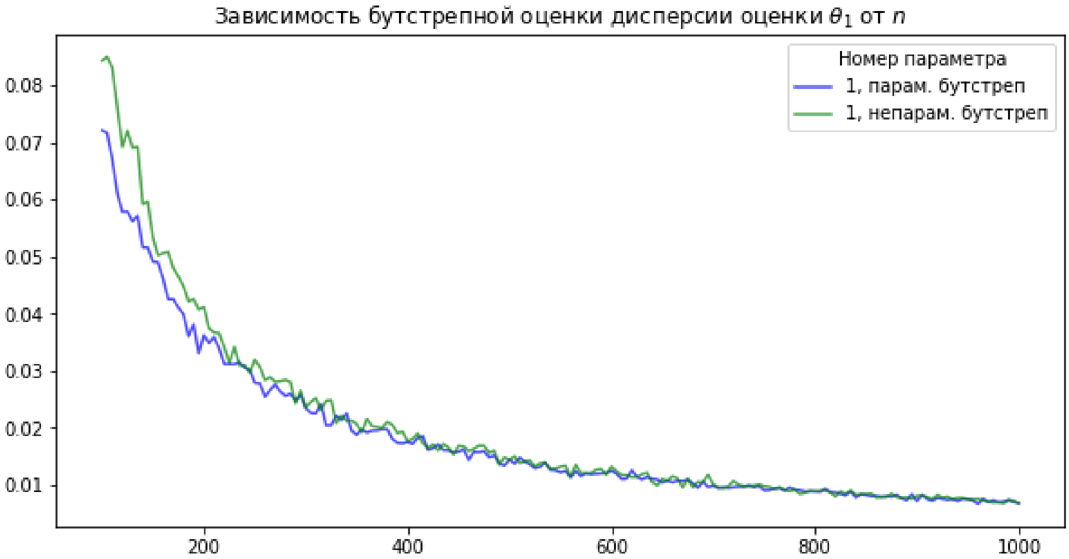
$\lambda^* = \overline{X}$

```
poisson_distr = sts.poisson
lambda_func = lambda x: np.mean(x)
params = [1, 4, 7, 11]

for param in params:
    distr = poisson_distr(param)
    sample = distr.rvs(size=N)
    ests = calculate_estimator(sample, lambda_func)
    print('theta = ', param)
    make_bootstrap(poisson_distr, sample, ests, 5, lambda_func)
```

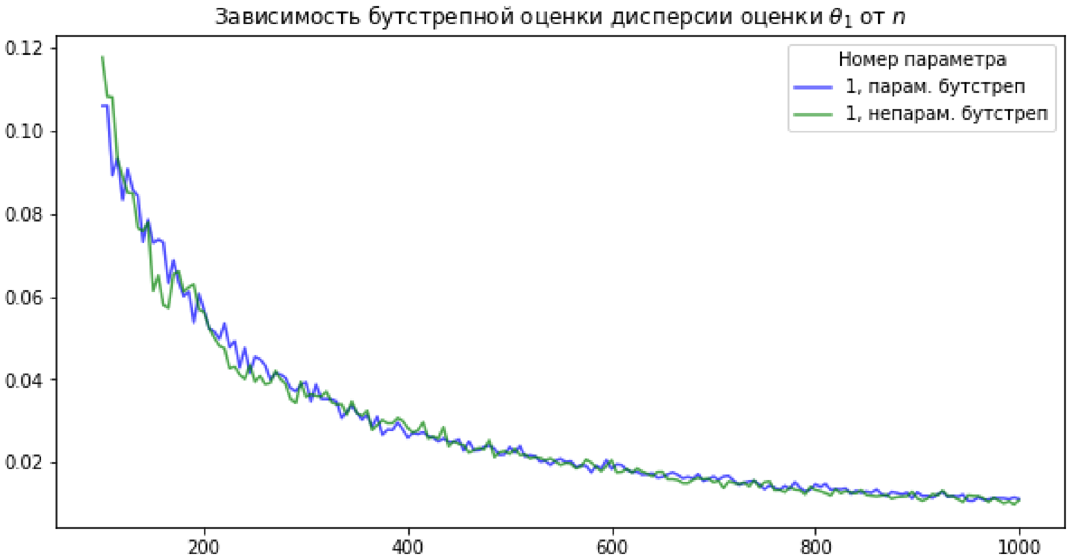
```
theta =  1
```


```
theta =  4
```


```
theta =  7
```




```
theta =  11
```



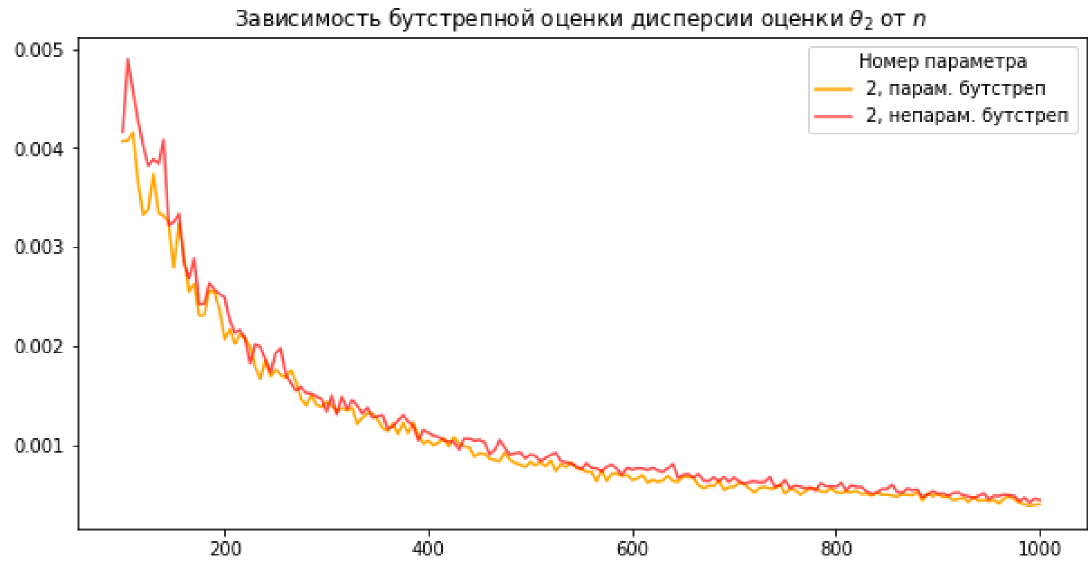
д) $\mathrm{Bin}(m, p)$

$$m^* = \frac{\left(\overline{X}\right)^2}{\overline{X}+\left(\overline{X}\right)^2-\overline{X^2}}, p^* = \frac{\overline{X}+\left(\overline{X}\right)^2-\overline{X^2}}{\overline{X}}$$

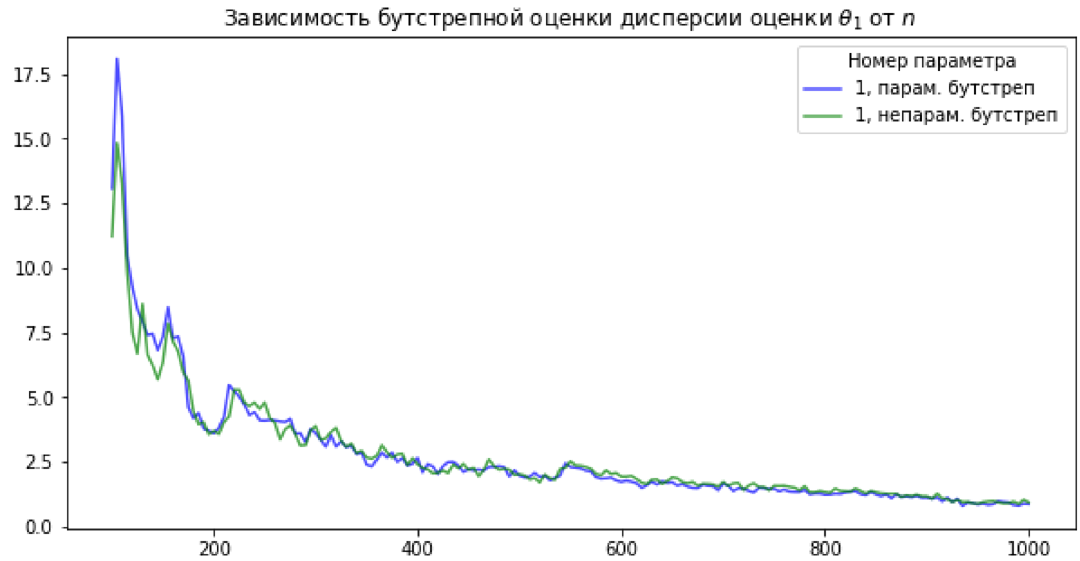
```
binom_distr = sts.binom
m_func = lambda x: np.mean(x)**2 / (np.mean(x) + np.mean(x)**2 - np.mean(x**2))
p_func = lambda x: (np.mean(x) + np.mean(x)**2 - np.mean(x**2)) / np.mean(x)
params = [(5, 0.5), (20, 0.5), (20, 0.7), (25, 0.4)]
def parametric_distr(param1, param2):
    # оценка m может получаться нецелой
    return binom_distr(int(round(param1)), param2)

for param in params:
    distr = parametric_distr(param[0], param[1])
    sample = distr.rvs(size=N)
    ests = calculate_estimator(sample, m_func, p_func)
```

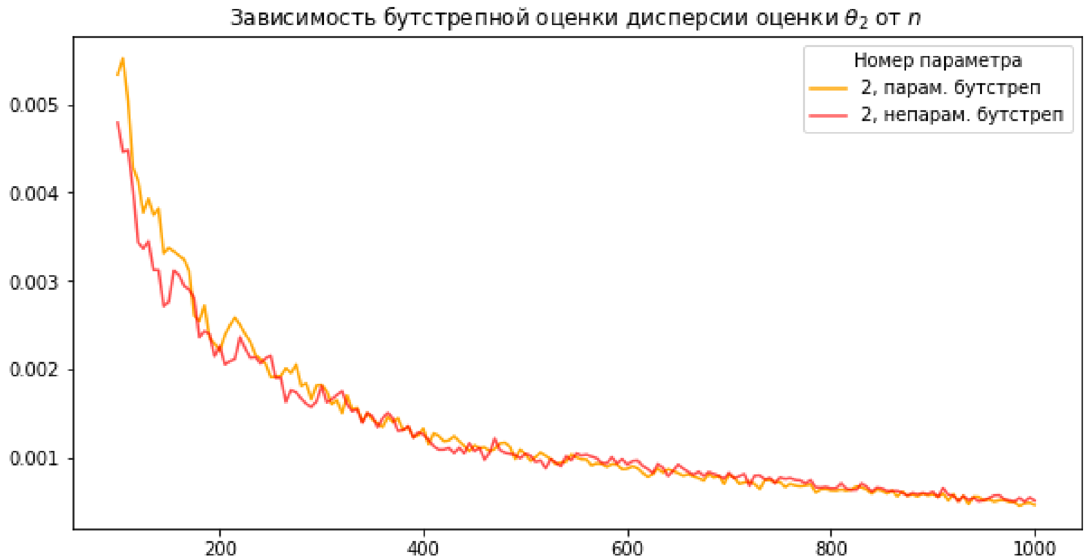
```
    print('theta = ', param)
    make_bootstrap(binom_distr, sample, ests, 5, m_func,
                   p_func, parametric_distr)
```

```
theta =  (5, 0.5)
```




```
theta =  (20, 0.5)
```


Зависимость бутстрепной оценки дисперсии оценки θ_1 от n
Номер параметра
1, парам. бутстреп
1, непарам. бутстреп
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
200
400
600
800
1000


Зависимость бутстрепной оценки дисперсии оценки θ_2 от n
Номер параметра
2, парам. бутстреп
2, непарам. бутстреп
0.001
0.002
0.003
0.004
0.005
200
400
600
800
1000

```
theta =  (20, 0.7)
```


Зависимость бутстрепной оценки дисперсии оценки θ_1 от n
Номер параметра
1, парам. бутстреп
1, непарам. бутстреп
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
200
400
600
800
1000


```
theta =  (25, 0.4)
```

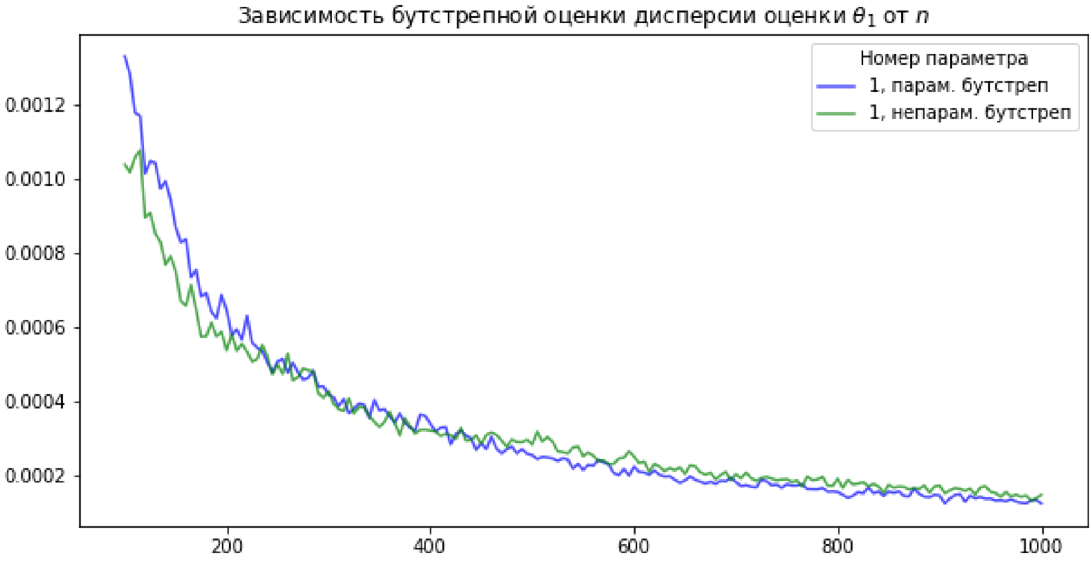
e) $\mathrm{Geom}(p)$

$p^* = 1/\overline{X}$

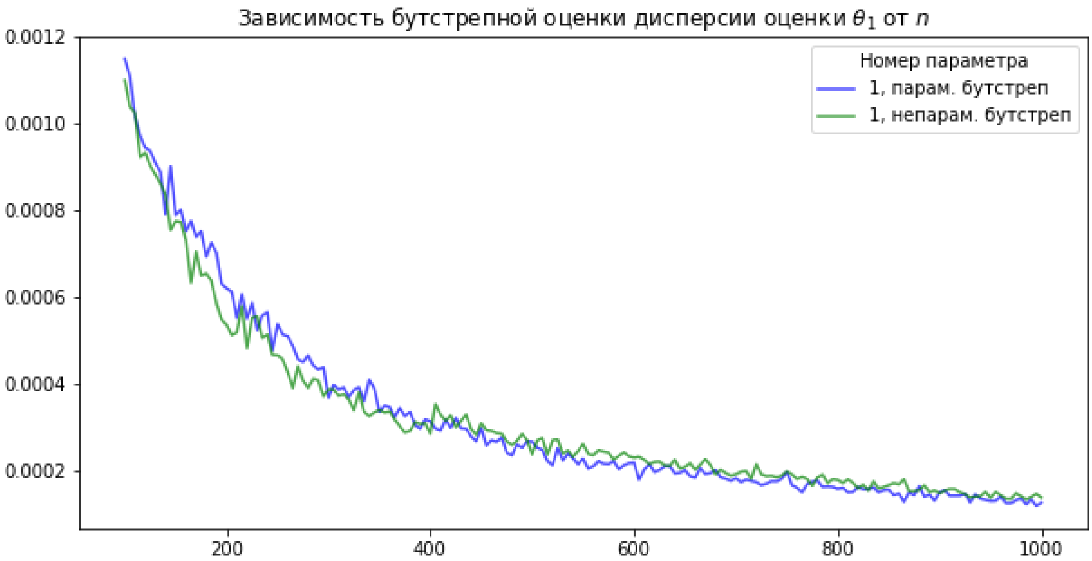
```
geom_distr = sts.geom
p_func = lambda x: 1 / np.mean(x)
params = [0.2, 0.5, 0.8]

for param in params:
    distr = geom_distr(param)
    sample = distr.rvs(size=N)
    ests = calculate_estimator(sample, p_func)
    print('theta = ', param)
    make_bootstrap(geom_distr, sample, ests, 5, p_func)
```

```
theta =  0.2
```


```
theta =  0.5
```




```
theta =  0.8
```

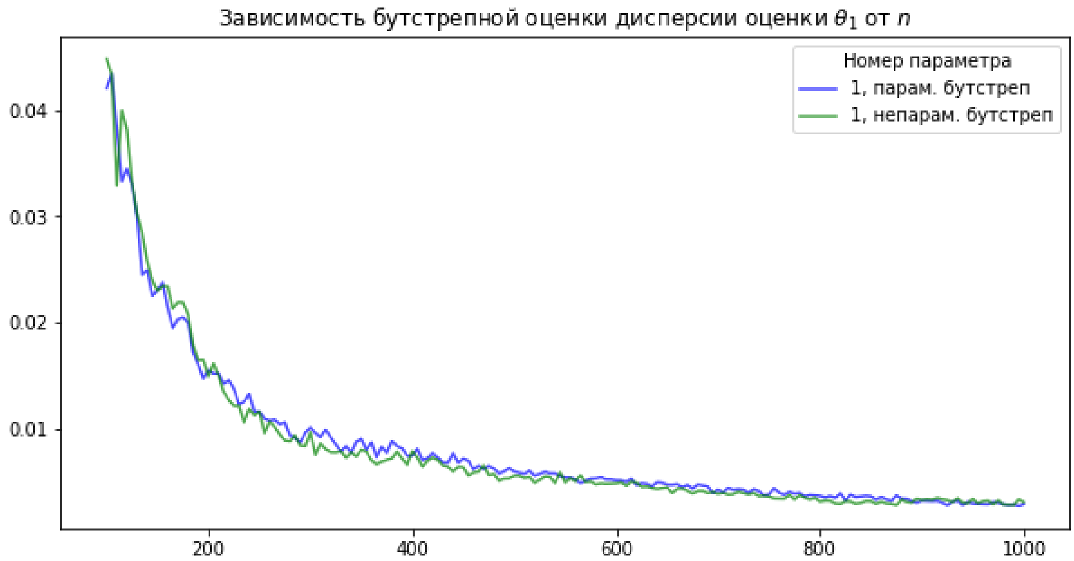


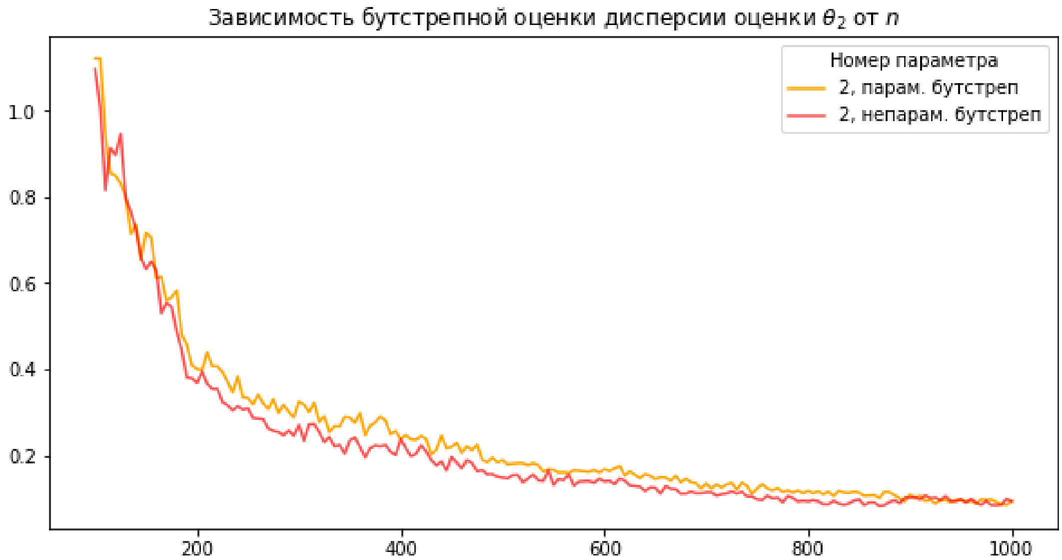
ж) $\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$

$$\alpha^* = \frac{\left(\overline{X}\right)^2 - \overline{X^2}\,\overline{X}}{\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2}, \beta^* = \frac{(\overline{X} - \overline{X^2})(1 - \overline{X})}{\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2}$$

```
beta_distr = sts.beta
alpha_func = lambda x: (np.mean(x)**2 - np.mean(x**2)*
                        np.mean(x)) / (np.mean(x**2) - (np.mean(x))**2)
beta_func = lambda x: (np.mean(x) - np.mean(x**2)) * (1 -
                       np.mean(x)) / (np.mean(x**2) - (np.mean(x))**2)
params = [(1,5), (0.5, 0.5), (5, 1)]

for param in params:
    distr = beta_distr(param[0], param[1])
    sample = distr.rvs(size=N)
    ests = calculate_estimator(sample, alpha_func, beta_func)
    print('theta = ', param)
    make_bootstrap(beta_distr, sample, ests, 5, alpha_func,
                   beta_func)
```

```
theta =  (1, 5)
```

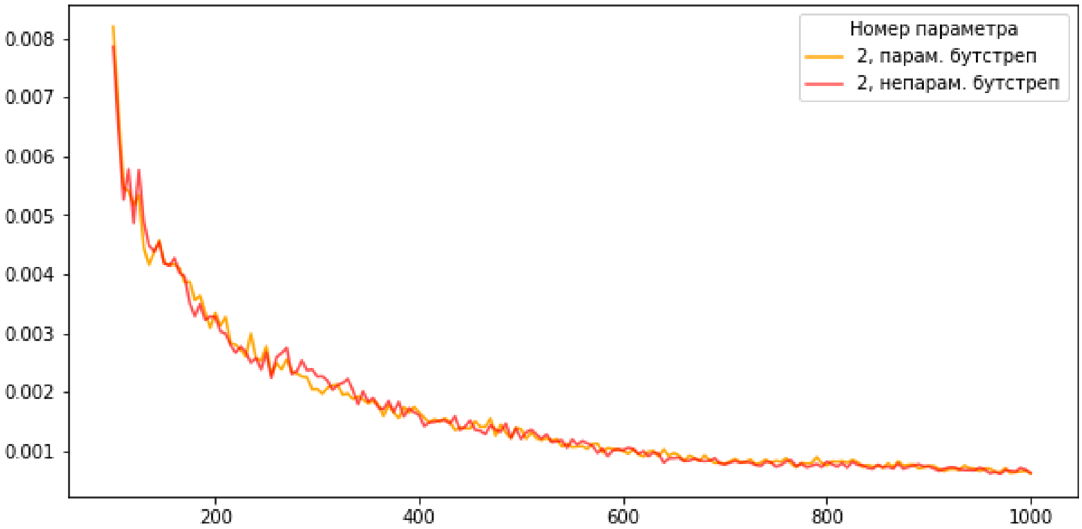

Зависимость бутстрепной оценки дисперсии оценки θ_1 от n
Номер параметра
1, парам. бутстреп
1, непарам. бутстреп


Зависимость бутстрепной оценки дисперсии оценки θ_2 от n
Номер параметра
2, парам. бутстреп
2, непарам. бутстреп

```
theta =  (0.5, 0.5)
```

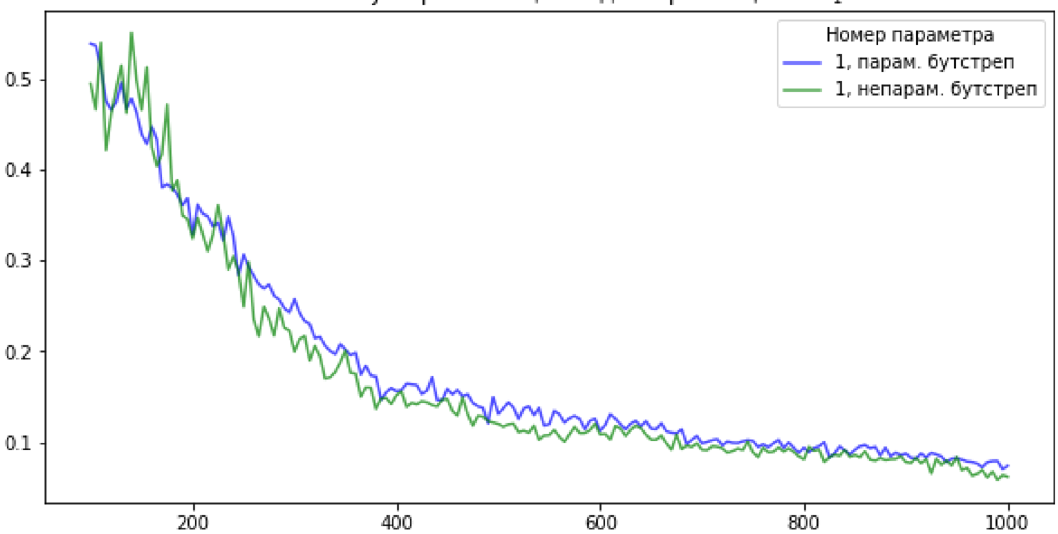

Зависимость бутстрепной оценки дисперсии оценки θ_1 от n
Номер параметра
1, парам. бутстреп
1, непарам. бутстреп

Зависимость бутстрепной оценки дисперсии оценки θ_2 от n

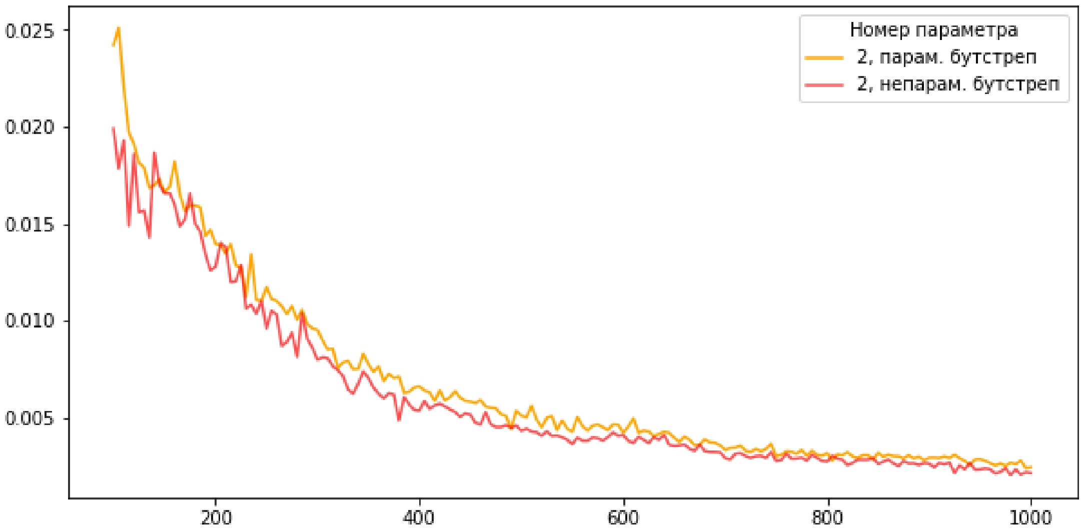



```
theta =  (5, 1)
```

Зависимость бутстрепной оценки дисперсии оценки θ_1 от n



Зависимость бутстрепной оценки дисперсии оценки θ_2 от n

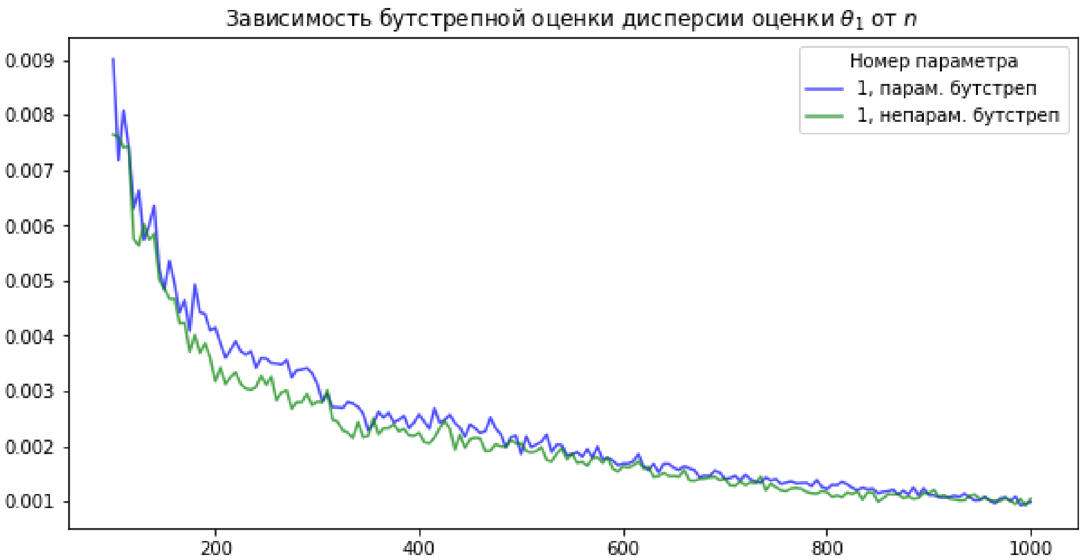


3) $\mathrm{Pareto}(\gamma)$

$\gamma^* = 1/\overline{\ln(X)}$

```
pareto_distr = sts.pareto
gamma_func = lambda x: 1 / np.mean(np.log(x))
params = [1, 3, 5]

for param in params:
    distr = pareto_distr(param)
    sample = distr.rvs(size=N)
    ests = calculate_estimator(sample, gamma_func)
    print('theta = ', param)
    make_bootstrap(pareto_distr, sample, ests, 5, gamma_func)
```

```
theta =  1
```




```
theta =  3
```


```
theta =  5
```

и) $\mathrm{Cauchy}(\theta)$

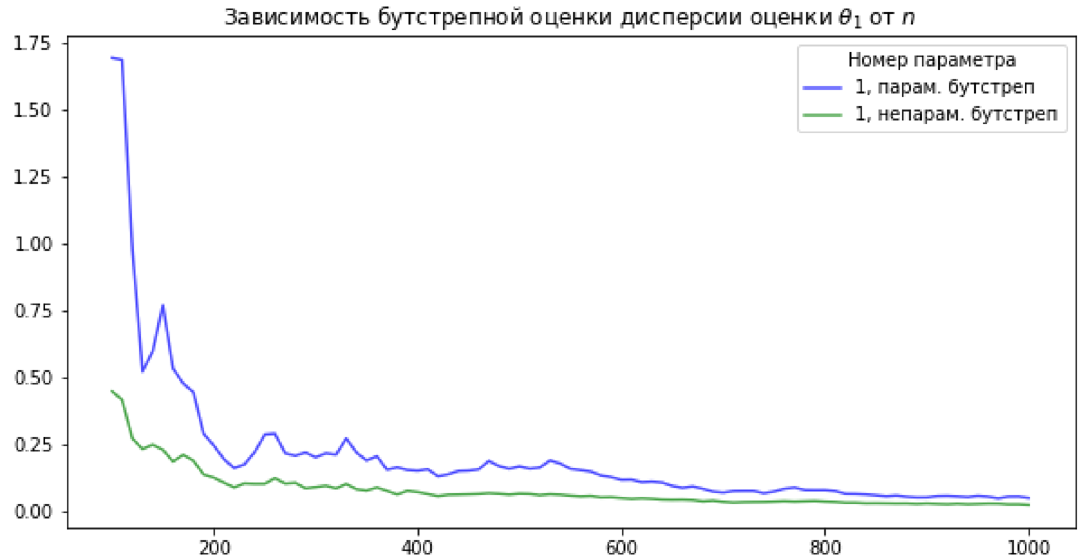
$$\theta^* = \frac{1}{\mathrm{tg}\left(\pi \overline{I(x \in [0,1])}\right)}$$

```
cauchy_distr = sts.cauchy
theta_func = lambda x: 1 / np.tan(np.pi * ((x <= 1) & (x >= 0)).sum() / len(x))
params = [0.5, 1, 1.5]

def parametric_distr(param):
    return cauchy_distr(scale=param)

for param in params:
    distr = cauchy_distr(param)
    sample = distr.rvs(size=N)
    ests = calculate_estimator(sample, theta_func)
    print('theta = ', param)
    make_bootstrap(cauchy_distr, sample, ests, 10, theta_func)
```

```
theta =  0.5
```


```
theta =  1
```


```
theta =  1.5
```



3. Вывод.

Для всех рассмотренных распределений наблюдаются одни и те же закономерности. Бутстрепная оценка дисперсии оценки уменьшается с ростом n, и, как правило, зависит от величины значения самой оценки (например, увеличивается при увеличении параметра масштаба), при этом оставаясь в пределе много меньше его. Результаты, полученные параметрическим и непараметрическим методом, совпадают. Дальнейшие свойства бутстрепа станут ясны из 4 задания.