ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский технический университет связи и информатики

Д.В. Дубнов, С.А. Маненков

ПРАКТИКУМ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Для бакалавров

Учебное пособие по направлениям

02.03.02, 09.03.01, 09.03.02, 09.03.03, 10.03.01, 10.05.02

Москва 2022

УДК 517

Дубнов Д.В., Маненков С.А. Практикум по дискретной математике для бакалавров.: Учебное пособие/ МТУСИ. – М., 2022. – 124 с.

Пособие является сборником типовых примеров с решениями и задач для самостоятельной работы. Разбивка на занятия полностью соответствует рабочим программам по курсу дискретной математики для направлений подготовки бакалавров МТУСИ, у которых данный курс выделен отдельной дисциплиной. Предназначено для проведения практических занятий, самостоятельной работы студентов и подготовки к зачету и экзамену.

Ил. 91, список лит. 11 назв.

Издание утверждено методическим советом ОТФ. Протокол № 1 от 31.08.2022г.

Отв. редактор: С.А. Маненков, к.ф.-м.н., доцент

Рецензенты:
В. Г. Данилов, д. ф.-м.н., профессор (НИУ ВШЭ)
А.Р. Лакерник, к. ф.-м.н., доцент (МТУСИ)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для бакалавров МТУСИ, обучающихся по программам направлений подготовки «Фундаментальная информатика и информационные технологии», «Информатика и вычислительная техника», «Информационные системы и технологии», «Прикладная информатика», «Информационная безопасность», «Информационная безопасность телекоммуникационных систем». Целью издания является получение студентами практических навыков в решении задач по дискретной математике. В каждом разделе даются краткие теоретические сведения по изучаемой теме, необходимые для практического применения материала, а также типовые задачи для аудиторных занятий с подробными решениями и задачи для самостоятельной работы. Упражнения, использованные в пособии, составлены авторами или взяты из задачников и учебников [1]-[11].

Количество и содержание разделов практикума полностью соответствует количеству и темам практических занятий в рабочих программах дисциплины «Дискретная математика», поэтому данное пособие можно использовать для подготовки к зачету или экзамену, а также для самостоятельного изучения материала в случае пропуска практического занятия. Кроме того, практикум позволяет при уменьшении числа аудиторных часов по программе для бакалавров уделять больше внимания самостоятельной работе.

ЗАНЯТИЕ 1

МНОЖЕСТВА

1.1. Основные понятия.

1.1.1. *Множество* – совокупность некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку.

1.1.2. Обозначение $a \in A$ означает, что элемент a *принадлежит* множеству A. Если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, то A есть *подмножество* B. При этом вводится обозначение $A \subseteq B$. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то говорят, что A есть собственное подмножество B, и пишут $A \subset B$.

1.1.3. Два множества называются *равными*, если они стоят из одних и тех же элементов (например, {1,2,3}={2,3,1}). При этом $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

1.1.4. *Пустое множество* $\varnothing$ – это множество, не содержащее элементов. *Универсальное множество* U - это множество, включающее в себя все рассматриваемые множества.

1.1.5. Совокупность всех подмножеств данного множества A называется *булеаном* (обозначение: 2^A). При этом считается, что $\varnothing \subseteq A$, $A \subseteq A$.

1.1.6. *Объединением множеств* A и B называется множество $C = A \cup B$, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.

1.1.7. *Пересечением множеств* A и B называется множество $C = A \cap B$, состоящее из элементов, которые принадлежат обоим множествам A и B.

1.1.8. *Разностью множеств* A и B называется множество $C = A \setminus B$, состоящее из тех элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B. В частности множество $\overline{A} = U \setminus A$ называется *дополнением множества* A.

1.1.9. *Симметрической разностью* множеств A и B называется множество $C \equiv A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1.1.10. Операции над множествами удовлетворяют так называемым законам **алгебры Кантора** [3,4,6].

1.1.11. *Мощностью* конечного множества называется число его элементов.

1.1.12. Два множества A и B называются *равномощными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. Обозначение: $A \sim B$. В частности, если $A \sim \mathbb{N}$, то множество A называется *счетным*.

1.2. Решение типовых задач.

1.2.1. Доказать, что множество A целых чисел, делящихся на 6 равно множеству B целых чисел, делящихся на 2 и на 3.

Решение. Докажем, что $A \subseteq B$. Пусть $x \in A \Rightarrow x = 6n, \quad n \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что тогда число x делится на 2 и на 3, то есть $x \in B \Rightarrow A \subseteq B$. Далее покажем, что $B \subseteq A$. Пусть $x \in B \Rightarrow x = 2m, \quad m \in \mathbb{Z}$, так как x делится на 2. С другой стороны, так как x делится на 3, то такое возможно лишь, когда m делится на 3, то есть $m = 3n, \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2m = 2 \cdot 3n = 6n$. То есть $x \in A \Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow A = B$.

1.2.2. Доказать, что множество A четных целых чисел, равно множеству B целых чисел, представимых в виде суммы двух нечетных чисел.

Решение. Докажем, что $A \subseteq B$. Пусть $x \in A \Rightarrow x = 2n, \quad n \in \mathbb{Z}$. Тогда $x = (2n-1)+1$. Очевидно, что $x \in B \Rightarrow A \subseteq B$. Далее покажем, что $B \subseteq A$. Пусть $x \in B \Rightarrow x = (2m-1)+(2n-1), \quad m,n \in \mathbb{Z}$. Видим, что тогда $x \in B \Rightarrow x = 2(m+n-1)$. То есть $x \in A \Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow A = B$.

1.2.3. Даны множества: $A = \{1,2,4,7,11\}, B = \{-1,0,2,4\}$. Задайте списками элементов следующие множества: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \Delta B$.

Решение. В соответствие с определением операций над множествами получаем: $A \cup B = \{-1,0,1,2,4,7,11\}, A \cap B = \{2,4\}$, $A \setminus B = \{1,7,11\}, B \setminus A = \{-1,0\}, A \Delta B = \{-1,0,1,7,11\}$.

1.2.4. Пусть $A = \{2,4,9\}$. Выписать булеан этого множества.

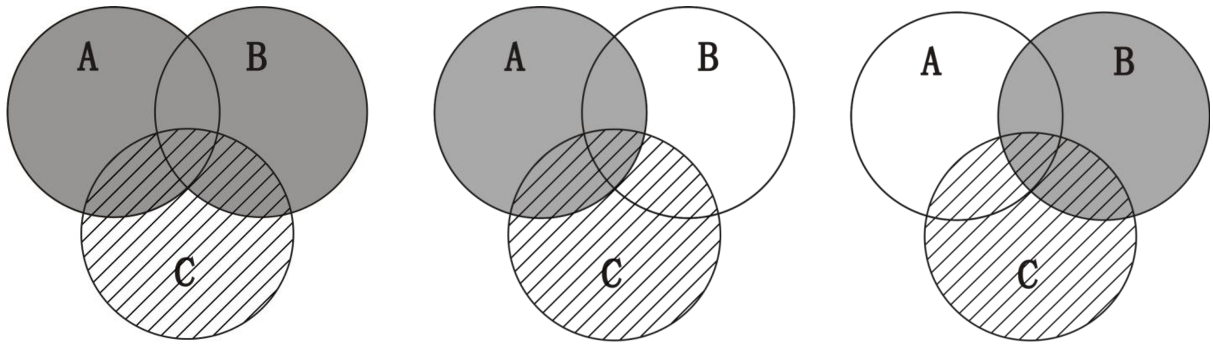
Решение. Необходимо выписать множество всех подмножеств данного множества. Начинаем с пустого множества, затем рассматриваем все одно, двух, трехэлементные подмножества (включая само множество A). В результате, получим:

$$2^A = \{\varnothing, \{2\}, \{4\}, \{9\}, \{2,4\}, \{2,9\}, \{4,9\}, \{2,4,9\}\}$$

1.2.5. Пользуясь диаграммами Эйлера-Венна, показать справедливость тождества:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Решение. Нарисуем на диаграммах отдельно множества $(A \cup B) \cap C$, $A \cap C$ и $B \cap C$. Эти множества показаны на рисунках 1.1а, 1.1б и 1.1в соответственно.



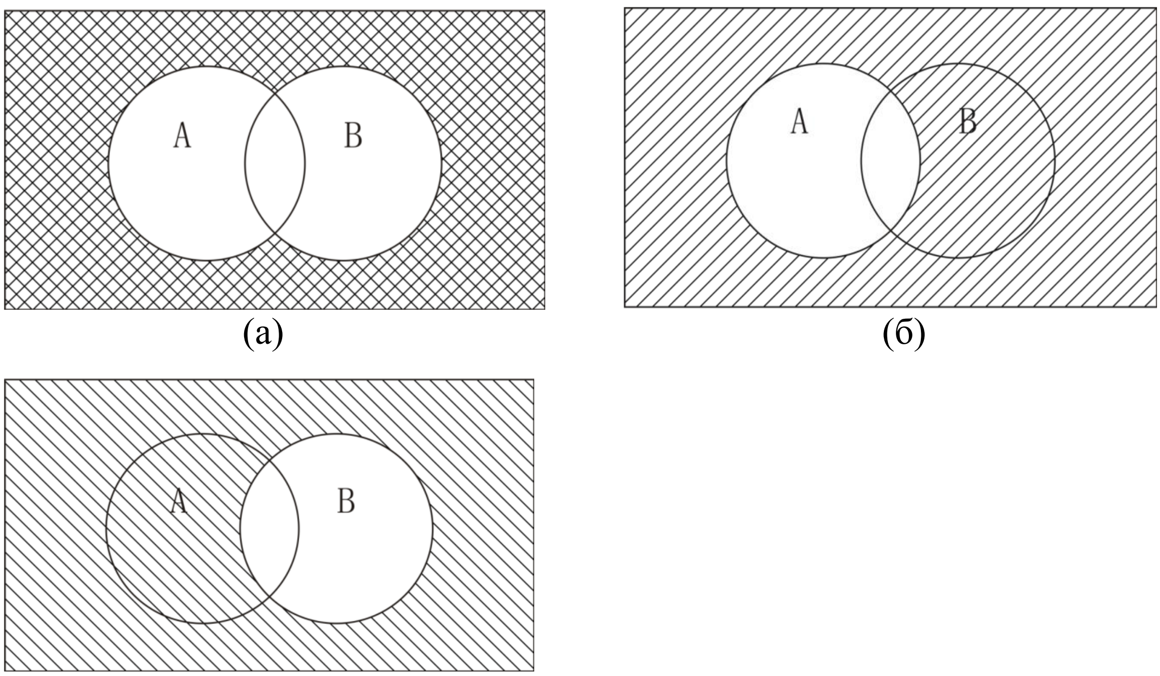
(а) (б) (в)

Рис. 1.1

Видим, что левая часть тождества (см. рис. 1.1а) совпадает с объединением множеств $A \cap C$ и $B \cap C$, изображенных на рис. 1.1б и 1.1в (закрашенных цветом и одновременно покрытых штриховкой), то есть совпадает с правой частью доказываемого тождества.

1.2.6. Пользуясь диаграммами Эйлера-Венна, показать справедливость закона де Моргана: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Решение. Левая часть доказываемого тождества изображена на рис. 1.2а, а



(а) (б) (в)

Рис. 1.2

множества $\bar{A}$ и $\bar{B}$ показаны на рис. 1.2б и 1.2в, соответственно. Очевидно, что пересечение множеств, изображенных на рисунках 1.2б и 1.2в, совпадает с левой частью доказываемого тождества.

1.2.7. Показать, пользуясь диаграммой Эйлера-Венна, что справедливо равенство $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Решение. Правая часть тождества изображена на рис. 1.3. Видим, что область, покрытая двойной штриховкой, совпадает с множеством $A\setminus B.$ То есть, тождество доказано.

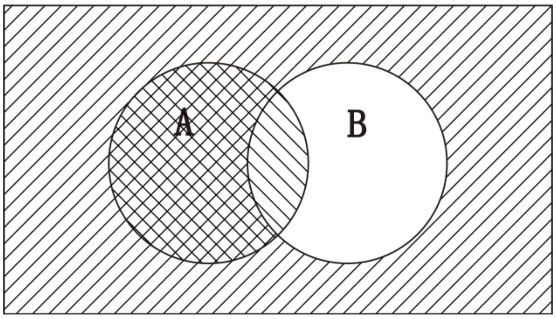


Рис. 1.3

1.2.8. Не пользуясь диаграммами Эйлера-Венна, доказать следующие тождества:
а) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B,$
б) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C).$

Решение.
а). Используем результат задачи 1.2.7. Тогда левая часть нашего тождества может быть записана в виде

$$A\setminus(A\setminus B)=A\setminus(A\cap\bar{B})=A\cap\overline{(A\cap\bar{B})}=A\cap(\bar{A}\cup B)=$$

$$=(A\cap\bar{A})\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B.$$

Здесь мы использовали закон де Моргана и дистрибутивный закон.
б). Аналогично предыдущему преобразуем левую часть тождества

$$(A\setminus B)\setminus C=\left(A\cap\bar{B}\right)\setminus C=\left(A\cap\bar{B}\right)\cap\bar{C}=A\cap\bar{B}\cap\bar{C}=A\cap\left(\overline{B\cup C}\right)=$$
$$=A\setminus(B\cup C).$$

1.2.9. Доказать включение $(A\cup B)\setminus C\subseteq A\cup(B\setminus C).$

Решение. Для доказательства преобразуем правую часть формулы, обозначив предварительно левую часть через X:

$$A\cup(B\setminus C)=A\cup(B\cap\bar{C})=(A\cup B)\cap(A\cup\bar{C})=$$
$$=((A\cup B)\cap A)\cup((A\cup B)\cap\bar{C})=A\cup((A\cup B)\setminus C)=A\cup X$$

Видим, что выполняется включение $(A\cup B)\setminus C=X\subseteq A\cup X=A\cup(B\setminus C).$ То есть включение доказано.

1.2.10. Доказать, что множество четных целых чисел счетно.

Решение. Пронумеруем все целые числа следующим образом: 0,-1,1,-2,2, -3,3…. Ясно, что мы получаем взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$.

1.2.11. Доказать, что множество X четных целых чисел счетно.

Решение. Запишем эти числа в виде $x = 2n, \quad n \in \mathbb{Z}$. Отсюда следует, что $X \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$, в силу результата задачи 1.2.10.

1.2.12. Доказать, что множества $\mathrm{A} = (0,1)$ и $\mathrm{B} = (1,\infty)$ равномощны.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \dfrac{1}{x}$, где $x \in A, y \in B$. Очевидно, с помощью этой функции мы задаем взаимно однозначное соответствие между элементами множеств *A* и *B*. Действительно, например, числу ½ при указанном отображении будет соответствовать единственное число 2, и обратно, например, задавая *y*=2, получим, что тогда *x*=½. И так будет для любых элементов $x \in A, y \in B$. Поэтому данные множества равномощны.

1.3. Задачи для самостоятельного решения.

1.3.1. Доказать, что множество A целых чисел, делящихся на три, равно множеству B целых чисел, представимых в виде суммы двух чисел, одно из которых делится на три с остатком 1, а другое делится на три с остатком 2.

1.3.2. Даны множества:
$A = \{0,2,4,6,8,10\}, B = \{1,2,5,6,10,12\}, \mathrm{C} = \{-2,-1,0,1,2\}$. Задайте списками элементов следующие множества: $A \cup B \cup C, A \cap B \cap C, A\Delta B, B \setminus C$.

1.3.3. Выписать элементы данных множеств:
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \le 6\}, B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 4 = 0\}, \ C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 8, \ x \ne 1\}$. Запись $x \mid 8$ означает, что 8 делится нацело на *x*.

1.3.4. Пусть $A = \{a,b,c,d\}$. Выписать булеан этого множества.

1.3.5. Пользуясь диаграммами Эйлера-Венна, показать справедливость тождеств:
а). $A \cap \left(A \cup B\right) = A$
б). $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

1.3.6. Не пользуясь диаграммами Эйлера-Венна, доказать следующие тождества:
а) $\mathrm{A}\,\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,
а) $(\mathrm{A} \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

1.3.7. Доказать включение $(A \cup C) \setminus B \subseteq (A \setminus B) \cup C$.

1.3.8. Доказать, что множество рациональных чисел счетно.

1.3.9. Доказать, что множества $\mathrm{A} = (-\pi/2, \pi/2)$ и $\mathbb{R}$ равномощны.

Ответы. 1.3.2. $A \cup B \cup C = \{-2,-1,0,1,2,4,5,6,8,10,12\}, A \cap B \cap C = \{2\}$, $A\Delta B = \{0,1,4,5,8,12\}, B \setminus C = \{5,6,10,12\}$. **1.3.3.**$A$={3,4,5,6}, B={-2,2}, C={2,4,8}.

1.3.4. $2^A = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},$
$\{a,b,c\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,d\},\{a,b,c,d\}\}$

ЗАНЯТИЕ 2

ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ И ИСКЛЮЧЕНИЙ. ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

2.1. Основные понятия.

2.1.1. Теорема (формула включений и исключений для двух множеств).
Пусть A и B - конечные множества. Тогда:
$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|,$ (1)
где символ $|A|$ означает мощность множества A.

2.1.2. *Декартовым произведением множеств* A и B называется множество $C = A\times B$ всех упорядоченных пар вида (x, y), где $x\in A, y\in B$.

2.1.3. *Декартовым произведением множеств* $A_1, A_2, ..., A_n$ называется множество $C = A_1\times A_2\times ...\times A_n$ всех упорядоченных наборов вида $(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_1\in A_1, x_2\in A_2, ..., x_n\in A_n$. Вводится обозначение:
$\underbrace{A\times A\times ...\times A}_{n\ раз} = A^n$.

2.1.4. Если $B = \{0,1\}$, то B^n называется *n-мерным булевым кубом*.

2.2. Решение типовых задач.

2.2.1. В группе из 100 человек 60 человек знает английский язык, 55 знают французский, 23 человека знают оба языка. Найти сколько человек знают какой-либо из этих языков и не знают ни одного языка.

Решение. Введем множества: A - множество людей, знающих английский язык, B - множество людей, знающих французский. Тогда по условию задачи $|A| = 60, |B| = 55, |A\cap B| = 23$. Очевидно, что множество людей, знающих какой-либо язык, это $A\cup B$. Тогда по формуле включений и исключений для двух множеств получим
$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B| = 60 + 55 - 23 = 92.$
Очевидно, что количество человек, не знающих ни одного языка, равно $|\overline{A\cup B}| = |U| - |A\cup B| = 100 - 92 = 8.$ Мы использовали тот факт, что универсум в данной задаче - это множество всех людей в данной группе.

2.2.2. Вывести формулу включений и исключений для трех множеств.

Решение. Запишем мощность объединения трех множеств
$|A\cup B\cup C| = |(A\cup B)\cup C| = |A\cup B| + |C| - |(A\cup B)\cap C| =$
$= |A\cup B| + |C| - |(A\cap C)\cup(B\cap C)| = |A| + |B| - |A\cap B| + |C| -$
$-(|A\cap C| + |B\cap C| - |(A\cap C)\cap(B\cap C)|) = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| -$
$-|A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|.$

Здесь мы два раза использовали формулу включений и исключений для двух множеств. Итак
$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

2.2.3. Вывести формулу для нахождения мощности множества $A\setminus(B\cup C)$.

Решение. Пользуясь очевидным равенством $|A\setminus X|=|A|-|A\cap X|$, получаем
$|A\setminus(B\cup C)|=|A|-|A\cap(B\cup C)|=|A|-|(A\cap B)\cup(A\cap C)|=|A|-$
$-(|A\cap B|+|A\cap C|-|(A\cap B)\cap(A\cap C)|)=|A|-|A\cap B|-|A\cap C|+$
$+|A\cap B\cap C|$.
Итак $|A\setminus(B\cup C)|=|A|-|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$.

2.2.4. Найти количество натуральных чисел не превосходящих 100 и
а) делящихся на 2 или на 3,
б) делящихся на 2, но не на 3,
в) делящихся хотя бы на одно из чисел 2, 3 или 5,
г) делящихся ровно на одно из чисел 2, 3 или 5.

Решение. Введем в рассмотрения множества *A*,*B*,*C* - множества натуральных чисел, не превосходящих 100 и делящихся на 2, 3 и 5 соответственно. Тогда очевидно, что количество натуральных чисел, делящихся на число *n* и не превосходящих *N* равно целой части числа *N*/*n*. В результате получим
$|A|=50, |B|=33, |C|=20, |A\cap B|=16, |B\cap C|=6,\ |A\cap C|=10, |A\cap B\cap C|=3.$
Пояснение: если число делится одновременно, например, на 2 и 3, то оно делится на 6, то есть $|A\cap B|=16$. Решим п. а). Используем формулу (1):
$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=50+33-16=67.$
б). $|A\setminus B|=|A|-|A\cap B|=50-16=34.$
Здесь мы использовали то, что множества $A\setminus B$ и $A\cap B$ не пересекаются.
в). Нам необходимо найти мощность множества $A\cup B\cup C.$ Используем результат задачи 2.2.2 . Применяя формулу включений и исключений, получим
$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=$
$=50+33+20-16-6-10+3=74.$
г). Очевидно, что нам необходимо найти величину $|A\setminus(B\cup C)|+$
$|B\setminus(A\cup C)|+|C\setminus(A\cup B)|$. Имеем (см. задачу 2.2.3):
$|A\setminus(B\cup C)|+|B\setminus(A\cup C)|+|C\setminus(A\cup B)|=|A|-|A\cap B|-|A\cap C|+$
$+|A\cap B\cap C|+|B|-|A\cap B|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|+|C|-|A\cap C|-$
$-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=|A|+|B|+|C|-2|A\cap B|-2|A\cap C|-2|B\cap C|+$
$+3|A\cap B\cap C|=50+33+20-32-12-20+9=48.$

2.2.5. Найти декартовы произведения $C=A\times B$ и $D=B\times A$ множеств $A=\{1,2,3\}$ и $B=\{a,b\}$.

Решение. Имеем по определению
$C=\{(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)\},$
$D=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}.$

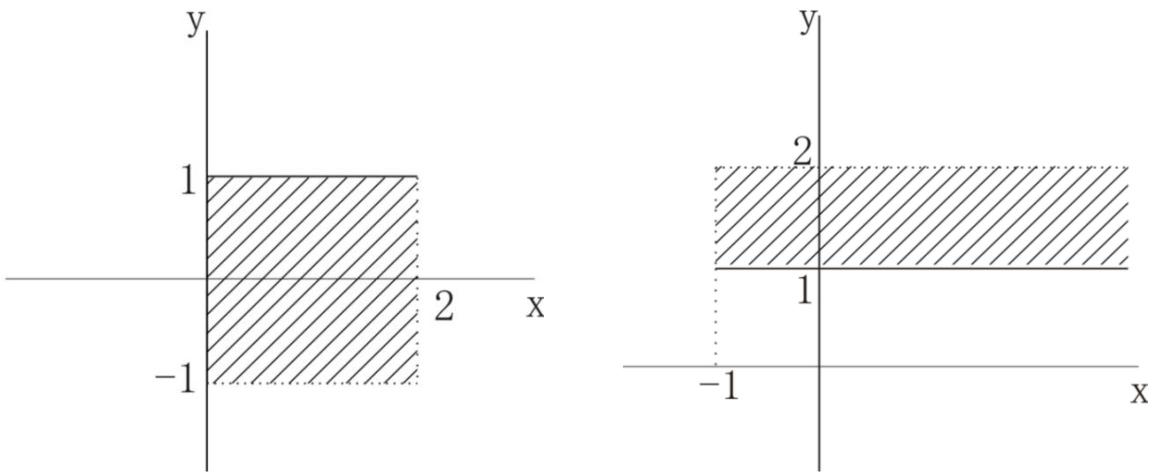
Видим, что данные множества не совпадают.

2.2.6. Найти декартово произведение $C = A^2$ для множества $A = \{-1, 0, 1, 2\}$.

Решение. Имеем
$C = \{(-1,-1), (-1,0), (-1,1), (-1,2), (0,-1), (0,0), (0,1), (0,2),$
$(1,-1), (1,0), (1,1), (1,2), (2,-1), (2,0), (2,1), (2,2)\}.$

2.2.7. Изобразить декартово произведение $C = A \times B$ множеств на плоскости:
а). $A = [0, 2)$, $B = (-1, 1]$,
б). $A = (-1, \infty)$, $B = [1, 2)$.

Решение. Изобразим данные произведения на координатной плоскости (*x*,*y*). Получим



(а) (б)

Рис. 2.1

Из рис. 2.1а и 2.1б видно, что в случае а) получаем квадрат, а в случае б) - бесконечную полуполосу. Обратите внимание, какая часть границы входит в каждую из изображенных на рисунке областей.

2.3. Задачи для самостоятельного решения.

2.3.1. В библиотеке имеются книги по математике и физике. В один день 10 человек взяли в библиотеке по одной книге по математике, 15 человек – по одной книге по физике, а 3 человека взяли по одной книге по обоим предметам. Сколько было посетителей, если известно, что в этот день не было ни одного человека, не взявшего ни одной книги?

2.3.2. При опросе 100 студентов были получены следующие данные о числе студентов, изучающих иностранные языки. Английский язык – 26 человек, французский – 48, английский и французский - 8 человек, французский и испанский – 8 человек, только английский язык изучает 18 человек, английский, но не испанский - 23 человека, ни одного языка – 24. Найти:
а) сколько человек изучает испанский язык,

б) изучают либо французский, либо испанский,
б) сколько человек изучает английский и испанский, но не французский.

2.3.3. При опросе 100 студентов были получены следующие данные о числе студентов, прочитавших книги А, В и С. Книгу А читало 23 человека, книгу В – 50 человек, книгу С – 30 человек, книгу А и С – 10 человек, книгу В и С – 8 человек, книгу А и В – 20 человек. Все три книги читало 5 человек. Позже выяснилось, что приведенные данные не верны. Поясните, в чем состоит ошибка.

2.3.4. Отрезок [0,1] разделен на 30 одинаковых частей точками деления. После этого на этот же отрезок поставлены еще 47 точек с шагом 1/48. На сколько частей в итоге разделен данный отрезок обоими множествами точек?

2.3.5.Выписать элементы множества B^3, где $B=\{0,1\}$.

2.3.6.Изобразить декартово произведение $C = A\times B$ множеств

а) $A=[0,\infty)$, $B=(-\infty,0]$,

б) $A=(2,4)$, $B=[-1,5]\cup\{6\}$.

2.3.7. Доказать: если A и B - конечные множества, то $|A\times B| = |A|\cdot|B|$.

Ответы. 2.3.1. 22 человека. **2.3.2. а)** 18 человек, **б)** 50 человек, **в)** ни одного. **2.3.4.** 72. **2.3.5**. (0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1).

ЗАНЯТИЕ 3

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

3.1. Основные понятия.

3.1.1. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ - непустые множества. *n-местным отношением*, заданном на декартовом произведении $C = A_1\times A_2\times ...\times A_n$, называется любое подмножество R множества C. В случае n=2 отношение R называется *бинарным отношением*. В этом случае применяется обозначение: $(x, y)\in R \Leftrightarrow xRy$.

3.1.2. *Областью определения* бинарного отношения $R\subseteq A\times B$ называется множество: $D=\{x\,|\,(x,y)\in R,\ \text{для некоторого } y\}$. *Областью значений* бинарного отношения R называется множество: $E=\{y\,|\,(x,y)\in R,\ \text{для некоторого } x\}$.

3.1.3. *Обратным* к отношению R называется множество $R^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in R\}$.

3.1.4. *Композицией бинарных отношений* $R_1 \subseteq A\times B$ и $R_2 \subseteq B\times C$ называется множество $R_1 \circ R_2 = \{(x,y) \mid x\in A, y\in C, \exists z\in B : (x,z)\in R_1 \wedge (z,y)\in R_2\}$**.** В литературе также используется обозначение композиции в виде $R_2 \circ R_1$ [4].

3.1.5. Пусть $R\subseteq A\times B$, где $A=\{x_1,x_2,...,x_m\}$, $B=\{y_1,y_2,...,y_n\}$ Матрицей бинарного отношения *R* называется матрица $P(m\times n)$, элемент которой определяются по формуле:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, (x_i, y_j)\in R, \\ 0, (x_i, y_j)\notin R. \end{cases}$$

3.1.6. Бинарное отношение $R\subseteq A^2$ называется *рефлексивным*, если $(x,x)\in R,$ *для* $\forall x\in A$.

3.1.7. Бинарное отношение $R\subseteq A^2$ называется *симметричным*, если $(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R,$ *для* $\forall x,y\in A$**.**

3.1.8. Бинарное отношение $R\subseteq A^2$ называется *антисимметричным*, если $(x,y)\in R\wedge (y,x)\in R \Rightarrow x=y,$ *для* $\forall x,y\in A$.

3.1.9. Бинарное отношение $R\subseteq A^2$ называется *транзитивным*, если $(x,z)\in R\wedge (z,y)\in R \Rightarrow (x,y)\in R,$ *для* $\forall x,y,z\in A$.

3.1.10. Бинарное отношение $R\subseteq A^2$ называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. *Классом эквивалентности* называется множество $[x]=\{y \mid y\in A\wedge (x,y)\in R\}$. Всякое отношение эквивалентности порождает разбиение множества на классы эквивалентности.

3.1.11. Бинарное отношение $R\subseteq A^2$ называется *отношением частичного порядка*, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Обозначается $(x,y)\in R \Leftrightarrow x\le y$. Отношение частичного порядка, заданного на множестве *A*, для которого любые два элемента сравнимы (то есть, либо $x\le y$, либо $y\le x$), называется отношением *линейного* порядка.

3.1.12. Бинарное отношение $f\subseteq A\times B$ называется *функцией* из множества *A* в множество *B* (обозначается: $xfy \Leftrightarrow y=f(x)$), если $D=A,$ $E\subseteq B$ и $(x,y_1)\in f\wedge (x,y_2)\in f \Rightarrow y_1=y_2$.

3.2. Решение типовых задач.

3.2.1.Дано *A*={2,3,7,6,9,12} и отношение $R\subseteq A^2 : xRy \Leftrightarrow (x\mid y)\wedge (x\le 3)$. Выписать все пары, принадлежащие множеству *R*. Найти область определения и область значений этого отношения. Найти обратное бинарное отношение.

Решение. По условию *y* должно делиться на *x* и, кроме того $x \le 3$. Поэтому получаем
R={(2,2),(2,6),(2,12),(3,3),(3,6),(3,9),(3,12)}. Далее в соответствии с определением 3.1.2 получаем *D*={2,3}, *E*={2,3,6,9,12}. Для нахождения R^{-1} достаточно поменять местами числа каждой пары из *R*. Тогда имеем:
R^{-1}={(2,2),(6,2),(12,2),(3,3),(6,3),(9,3),(12,3)}.

3.2.2. Дано *A*={1,3,7,9,11} и отношение $R \subseteq A^2 : xRy \Leftrightarrow 3|(x+y)$. Выписать матрицу и построить граф *R*.

Решение. Матрица *P* бинарного отношения *R* будет иметь размер 5×5, так как число элементов множества *A* равно 5. Эта матрица будет состоять только из нулей и единиц. Рассмотрим элементы первой строки матрицы. Так как пара $(1,1) \notin R$, то элемент $p_{11} = 0$. Аналогично, в силу того, что $(1,3) \notin R, (1,7) \notin R, (1,9) \notin R,$ $p_{12} = p_{13} = p_{14} = 0$. Далее, так как $(1,11) \in R$, то элемент $p_{15} = 1$. Поступая так дальше, получим матрицу:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нарисуем граф данного отношения. Вершины этого графа соответствуют элементам множества *A*, а дуга (*x*,*y*) присутствует тогда и только тогда, когда xRy. Паре (*x*,*x*) соответствует петля. Например, имеется петля у вершины 3 и дуга из 1 в 11. Граф изображен на рис. 3.1.

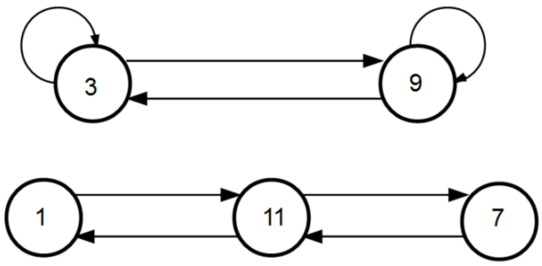


Рис. 3.1

3.2.3.Дано *A*={1,6,11,15,25} и отношение $R \subseteq A^2 : xRy \Leftrightarrow 5|(x-y)$. Выписать матрицу этого отношения и выяснить, какими специальными свойствами обладает *R*.

Решение. Аналогично предыдущей задаче выписываем матрицу данного бинарного отношения:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее будем проверять свойства бинарного отношения, пользуясь только матрицей *P*.

1). Проверяем рефлексивность. У матрицы рефлексивного отношения все диагональные элементы состоят из единиц. Следовательно, в нашем случае это свойство выполняется.

2). Проверим симметрию. Матрица симметричного отношения является симметричной, то есть при транспонировании не меняется. Видим, что это свойство также выполнено.

3). Из-за того, что матрица данного отношения является симметричной и не диагональная (не все внедиагональные элементы равны нулю) следует, что отношение не является антисимметричным. В общем случае для того, чтобы отношение было антисимметричным необходимо и достаточно, чтобы произведение $P \wedge P^T$ было диагональной матрицей, причем произведение матриц производится поэлементно. В нашем случае $P \wedge P^T = P$, то есть указанная матрица не диагональная.

4). Проверим свойство транзитивности. Для этого рассмотрим булево произведение $P^2 = P * P$. Поясним, как умножаются матрицы в этом случае. Запишем рядом дважды матрицу *P*:

$$P^2 = P * P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим первый столбец результирующей матрицы. Видим, что первый столбец матрицы, являющейся вторым множителем, содержит единицы в первых трех позициях. Поэтому произведем логическое сложение первых трех столбцов первой матрицы (первого множителя). То есть столбцы складываются поэлементно по правилам: 0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=1. Аналогично поступим со вторым и третьим столбцами. В случае четвертого столбца видим, что в соответствующем столбце второго множителя две единицы, стоящие в четвертой и пятой позициях. Следовательно, для получения четвертого столбца произведения наших матриц, сложим четвертый и пятый столбец первой матрицы. Аналогично, чтобы получить пятый столбец необходимо сделать то же самое действие. В итоге получим $P^2 = P$. Далее для проверки транзитивности необходимо проверить неравенства: $p_{ij}^{(2)} \le p_{ij}, i, j = 1,2,3,4,5.$ Здесь $p_{ij}^{(2)}$ - это элементы матрицы P^2, полученной выше. В нашем случае неравенства выполнены, так как $P^2 = P$. Следовательно, отношение транзитивно.

3.2.4. Проверить по данной матрице бинарного отношения выполнимость свойств этого отношения: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Решение. Сразу же заметим, что данное отношение рефлексивно и несимметрично. Далее проверяем антисимметрию. Имеем:

$$P \wedge P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Видим, что результирующая матрица не диагональная, следовательно, свойство не выполняется. Таким образом, отсутствие свойства симметрии не гарантирует того, что отношение будет антисимметричным. Проверим транзитивность. Рассмотрим булево произведение:

$$P * P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Видим, что транзитивность не выполняется, так как $p_{23}^{(2)} > p_{23}.$ Таким образом, данное бинарное отношение только рефлексивно.

3.2.5. Дано $A = [-1,1]$ и отношение $R \subseteq A^2 : xRy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$. Выяснить, какими специальными свойствами обладает *R*.

Решение. В данной задаче нельзя использовать матрицу бинарного отношения, так как множество *A* бесконечно и даже несчетно. Поэтому будем исходить из определений 3.1.5-3.1.8. Рассмотрим свойство рефлексивности. Оно не выполнено, так как, например, пара $(0,0) \notin R$. Рассмотрим свойство симметрии. Должно быть $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R, \textit{для } \forall x, y \in A$. В нашем случае $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 + x^2 = 1$, следовательно, свойство выполняется. Далее, например, $(1,0) \in R \wedge (0,1) \in R,$ но при этом $1 \ne 0$. Поэтому отношение не антисимметрично. Наконец, так как $(1,0) \in R \wedge (0,1) \in R \not\Rightarrow (1,1) \in R \ \left(1^2 + 1^2 \ne 1\right)$, то отношение нетранзитивно.

Итак, отношение только симметрично.

3.2.6. Даны $A = \{a,b,c\}, B = \{1,2,3,4\}, R_1 \subseteq A \times B, R_2 \subseteq B^2$.

$R_1 = \{(a,2),(a,4),(c,1),(c,4),(b,2),(c,3),(b,1)\}$,

$R_2 = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,4),(4,3),(4,4)\}$.

Найти отношение $R_1 \circ R_2$.

Решение. 1-й способ. Выпишем матрицы P_1 и P_2 бинарных отношений R_1 и R_2. Тогда матрица искомого отношения (композиции) будет равна булевому произведению матриц заданных отношений. Имеем

$$P_1 * P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее возвращаемся от матрицы к парам, входящим в искомое бинарное отношение:

$R_1 \circ R_2 = \{(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,3),(c,4)\}$

2-й способ. Решим задачу при помощи графа, на котором точками изображены элементы множеств *A*, *B* и *C* (=*B*), а дуги соответствуют парам, входящим в заданные бинарные отношения (см. рис. 3.2).

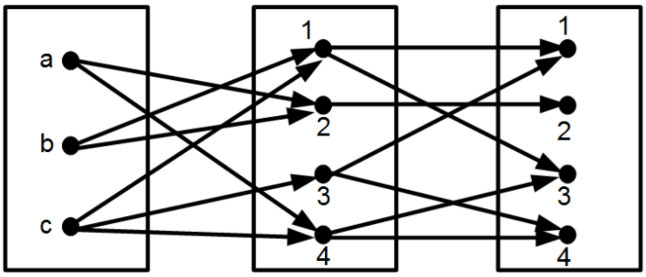


Рис. 3.2

Например, имеется дуга из вершины *a* в вершину 2, так есть пара $(a,2) \in R_1$. Аналогично есть дуга из вершины 1 в 3, так как $(1,3) \in R_2$. Для нахождения пар искомого отношения необходимо найти такие пары вершин из первого и последнего множеств, изображенных на рис. 3.2, которые соединены хотя бы одним путем (из двух дуг). Например, пара $(a,2) \in R_1 \circ R_2$, так как есть путь *a*-2-2, соединяющий вершины *a* и 2 и т.д. Легко видеть, что выписывая все пути, получаем вновь тот же ответ, что и выше.

3.2.7. Доказать, что отношение $R \subseteq \mathbb{Z}^2 : xRy \Leftrightarrow x \equiv y (\bmod 3)$ является отношением эквивалентности. Описать классы эквивалентности.

Решение. Запись $x \equiv y (\bmod 3)$ означает, что разность $x - y$ делится на три без остатка. Проверим три свойства отношения эквивалентности. Выше мы рассмотрели аналогичную задачу (см. пример 3.2.3) при помощи матрицы бинарного отношения. Здесь, так как множество целых чисел бесконечно, то будем использовать определения 3.1.5-3.1.8.

1). Докажем, что данное отношение рефлексивно, то есть $(x,x) \in R,\ \textit{для}\ \forall x \in \mathbb{Z}$. Но это очевидно, так как $x \equiv x (\bmod 3)$ для любого целого *x*.

2). Проверим симметрию. Имеем $x \equiv y(\bmod 3) \Rightarrow y \equiv x(\bmod 3), \forall x, y \in \mathbb{Z}$. То есть свойство выполняется.
3). Для проверки транзитивности запишем
$x \equiv z(\bmod 3) \Leftrightarrow x - z = 3m,$
$z \equiv y(\bmod 3) \Leftrightarrow z - y = 3n.$
Здесь m и n - целые числа. Тогда, складывая эти равенства, получаем $x - y = 3(m+n) \Leftrightarrow x \equiv y(\bmod 3)$. Таким образом,
$x \equiv z(\bmod 3) \wedge z \equiv y(\bmod 3) \Rightarrow x \equiv y(\bmod 3), \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$. То есть, отношение транзитивно. Значит данное отношение – отношение эквивалентности.
Найдем классы эквивалентности. Рассмотрим, например, класс $[0] = \{y \mid y \in \mathbb{Z} \wedge (0, y) \in R\} \Leftrightarrow \{y \mid y \in \mathbb{Z} \wedge 0 \equiv y(\bmod 3)\}$. Но это множество целых чисел, делящихся на 3 без остатка. Далее $[1] = \{y \mid y \in \mathbb{Z} \wedge y \equiv 1(\bmod 3)\}$ множество целых чисел, делящихся на 3 с остатком 1. Аналогично [2] - множество целых чисел, делящихся с остатком 2 на 3. Теперь, если взять, например, класс [3], то очевидно, что он совпадает с классом [0], класс [4] совпадает с классом [1] и т.д. Таким образом, имеем три класса эквивалентности, порождаемые данным отношением: [0],[1],[2].

3.2.8.Доказать, что отношение $R \subseteq \mathbb{Z}^2 : xRy \Leftrightarrow x \mid y$ является отношением частичного порядка на множестве целых чисел. Построить граф этого отношения в виде диаграмм Хассе для множества A={2,3,4,6,8,11}.

Решение. Проверим три свойства отношения порядка.
1). Докажем, что данное отношение рефлексивно, то есть $(x, x) \in R,\ \textit{для}\ \forall x \in \mathbb{Z}$. Но это очевидно, так как $x \mid x$ для любого целого x (любое число делится само на себя).
2). Проверим антисимметрию. Нам нужно доказать, что $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y,\ \textit{для}\ \forall x, y \in \mathbb{Z}$. Пусть $x \mid y \wedge y \mid x$.Тогда, так как y делится на x и, одновременно x делится на y, то $x = y$. То есть свойство выполняется.
3). Для проверки транзитивности запишем:
$x \mid z \Leftrightarrow z = mx \wedge z \mid y \Leftrightarrow y = nz \Rightarrow y = (mn)x \Rightarrow x \mid y.$ Здесь m и n - целые числа. Таким образом, отношение транзитивно.

В результате получаем, что данное отношение есть отношение порядка. При этом этот порядок не является линейным, так как, например, числа 2 и 3 не сравнимы. Изобразим множество A, на котором введено отношение делимости в виде диаграммы Хассе. Диаграмма Хассе строится следующим образом. Меньшие по порядку элементы располагают ниже, а большие – выше. Далее проводят линии, показывающие, какой из двух элементов больше, а какой меньше другого. При этом достаточно нарисовать лишь линии для непосредственно следующих друг за другом элементов. Диаграмма Хассе для нашего примера изображена на рис. 3.3.

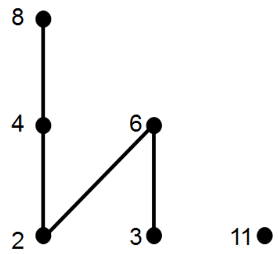


Рис. 3.3

3.2.9.Являются ли следующие бинарные отношения функциями:
а) $R=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$, **б)** $R=\{(1,2),(1,3),(3,1)\}$,
в) $R=\{(x,y)\,|\,y=\sin x,\ x\in R,\ y\in[-1,1]\}$, **г)** $R=\{(x,y)\,|\,y^2=x,\ x\geq 0,\ y\in\mathbb{R}\}$?

Решение: в случае а) и в) имеем функции, а в остальных двух случаях нет, так как в этих примерах одному и тому же *x* соответствуют несколько значений *y*.

3.3. Задачи для самостоятельного решения.

3.3.1.Дано *A*={2,3,4,5,6,7,8,9} и отношение $R\subseteq A^2 : xRy \Leftrightarrow \exists z\in A : z\,|\,x\wedge z\,|\,y$. Найти область определения и область значений этого отношения. Выписать матрицу отношения *R* и построить граф *R*.

3.3.2.Дано *A*={-2,-1,0,1,2} и отношение $R\subseteq A^2 : xRy \Leftrightarrow |x|\leq|y|$. Выписать матрицу отношения *R* и с ее помощью выяснить, какими специальными свойствами обладает отношение *R*.

3.3.3.Дано $A=[-3,3]$ и отношение $R\subseteq A^2 : xRy \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Выяснить, какими специальными свойствами обладает*R*.

3.3.4.Даны $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$, $R_1\subseteq A\times B$, $R_2\subseteq B^2$.
$R_1=\{(a,1),(a,2),(a,3),(c,1),(b,3),(c,4),(b,5)\}$,

$R_2=\{(1,2),(1,5),(2,3),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5),(4,1),(4,3),(5,2)\}$.

Найти отношение $\overline{R_1\circ R_2^{-1}}$. Дополнение отношения $R\subseteq A\times B$ понимается так, что $\overline{R}=\left(A\times B\right)\setminus R$.

3.3.5. Доказать, что отношение $R\subseteq\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : (x_1,y_1)R(x_2,y_2)\Leftrightarrow$ $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$ является отношением эквивалентности. Описать классы эквивалентности и построить эти множества на плоскости.

3.3.6. Пусть $R\subseteq\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : (x_1,y_1)R(x_2,y_2)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1\leq x_2,\\ y_1\leq y_2.\end{cases}$

Доказать, что отношение *R* является отношением частичного порядка и нарисовать диаграмму Хассе для множества *A*={(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(0,2), (2,2)}, упорядоченного данным отношением порядка.

3.3.7. Пусть U– универсум. Рассмотрим все подмножества этого множества (булеан). Доказать, что отношение $R \subseteq 2^U \times 2^U : XRY \Leftrightarrow X \subseteq Y$, где X и Y - любые два подмножества U, является отношением частичного порядка и нарисовать диаграмму Хассе для множества 2^U, где U={1,2,3}, упорядоченного данным отношением порядка.

3.3.8. Заданы следующие бинарные отношения:
а) $R = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$, **б)** $R = \{(1,2),(2,1),(3,1)\}$,
в) $R = \{(x, y) \mid y = \sin x, x \in [-\pi/2, \pi/2], y \in [-1,1]\}$,
г) $R = \{(x, y) \mid y = x^2, x \in \mathbb{R}, y \ge 0\}$.
Найти обратные отношения для каждого случая и выяснить являются ли они функциями.

Ответы.

3.3.1. $D = A, E = A,\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.3.2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, рефлексивно и транзитивно. **3.3.3.** Не обладает ни одним из четырех свойств. **3.3.4.** $\overline{R_1 \circ R_2^{-1}} = \{(b,5),(c,1),(c,2),(c,5)\}$.

3.3.8.
а) $R^{-1} = \{(2,1),(3,2),(1,3)\}$ – функция, б) $R^{-1} = \{(2,1),(1,2),(1,3)\}$ – не функция,
в) $R^{-1} = \{(x, y) \mid y = \arcsin x, x \in [-1,1], y \in [-\pi/2, \pi/2]\}$ – функция,
г) $R^{-1} = \{(x, y) \mid y^2 = x, x \ge 0, y \in \mathbb{R}\}$ – не функция.

ЗАНЯТИЕ 4

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ. МНОГОЧЛЕНЫ ЖЕГАЛКИНА. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Основные понятия.

4.1.1. *Логической* (*булевой*) функцией (или просто функцией) n переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется такая функция, у которой все переменные и сама функция могут принимать только два значения: 0 и 1. При этом булева функция является отображением булева куба B^n на множество $\{0,1\}$.

4.1.2. *Отрицанием*, *конъюнкцией* и *дизъюнкцией* называются булевы функции, заданные, соответственно, следующими таблицами истинности:

x	y	$\overline{x}$	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

4.1.3. *Импликацией*, *эквивалентностью*, *сложением по модулю два*, *коимпликацией*, *штрихом Шеффера* и *стрелкой Пирса* называются функции, заданные, соответственно, следующими таблицами истинности:

x	y	$x \to y$	$x \sim y$	$x \oplus y$	$x \leftarrow y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0

4.1.4. <u>Законы булевой алгебры.</u>

1. $\overline{\overline{a}} = a$ - *закон двойного отрицания;*

2. $a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a$ - *коммутативный закон;*

3. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ - *ассоциативныйзакон;*

4. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ - *дистрибутивный закон;*

5. $a \vee a = a, \quad a \wedge a = a$ - *закон идемпотентности;*

6. $\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}, \quad \overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$ - *закон де Моргана;*

7. $a \vee 1 = 1, \quad a \wedge 1 = a, \quad a \vee 0 = a, \quad a \wedge 0 = 0$

8. $(a \vee b) \wedge a = a, \quad (a \wedge b) \vee a = a$

9. $a \vee \overline{a} = 1, \quad a \wedge \overline{a} = 0$

Эти законы полностью аналогичны законам алгебры Кантора для множеств, если в последних поменять операции дополнения, объединения и пересечения $-, \cup, \cap$, соответственно на операции $-, \vee, \wedge$.

Ниже значок конъюнкции писать не будем (например, $x \wedge y = xy$).

4.2. Решение типовых задач.

4.2.1. Доказать тождество $(x \to y) \to y = x \vee y$.

Решение. 1-й способ. Запишем таблицу истинности для булевой функции, стоящей в левой и правой части равенства.

x	y	$(x \to y) \to y$	$x \vee y$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Видим, что правые части таблиц истинности совпадают, то есть тождество верное.

2-способ. Применим метод тождественных преобразований на основе законов булевой алгебры. Преобразуем левую часть равенства:

$(x \to y) \to y = (\bar{x} \vee y) \to y = \overline{(\bar{x} \vee y)} \vee y = x\bar{y} \vee y = (x \vee y)(\bar{y} \vee y) = x \vee y$.

Видим, что обе части равенства совпадают.

4.2.2. Привести булеву функцию к ДНФ: $f = (x \sim y)(y \sim z)$.

Решение. Понятие ДНФ и КНФ приведено в книгах [4,6,8,10,11]. Используем тождество: $x \sim y = xy \vee \bar{x}\,\bar{y}$. Тогда получим:

$f = (x \sim y)(y \sim z) = (xy \vee \bar{x}\,\bar{y})(xz \vee \bar{x}\,\bar{z}) = xyxz \vee \bar{x}\,\bar{y}xz \vee xy\bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{x}\,\bar{z} =$
$xyz \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$.

4.2.3. Привести булеву функцию к ДНФ: $f = (x \oplus \bar{y}) \,|\, (x \sim yz)$.

Решение. Используем тождества: $x \,|\, y = \overline{xy},\ x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y},\ \overline{x \oplus y} = x \sim y$.

Тогда получим:

$f = (x \oplus \bar{y}) \,|\, (x \sim yz) = \overline{(x \oplus \bar{y})(x \sim yz)} = \overline{(x \oplus \bar{y})} \vee \overline{(x \sim yz)} = (x \sim \bar{y}) \vee (x \oplus yz) =$
$= (\bar{x}y \vee x\bar{y}) \vee (x\overline{yz} \vee \bar{x}yz) = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee x(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee \bar{x}yz = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}yz =$
$= \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \cancel{\bar{x}yz} = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee x\bar{z}$.

В последней строке использовали закон поглощения: $a \vee ab = a$.

4.2.4. Привести булеву функцию к КНФ: $f = x \sim yz$.

Решение. Найдем КНФ по алгоритму $f = \overline{\text{ДНФ}(\bar{f})} = \text{КНФ}(f)$. Тогда, получаем:

$\bar{f} = \overline{x \sim yz} = x \oplus yz = x\overline{yz} \vee \bar{x}yz = x(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee \bar{x}yz = x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}yz$.

Далее применяем отрицание к полученному выражению, используя обобщенный закон де Моргана, то есть дизъюнкцию заменяем на конъюнкцию и, наоборот, и ставим отрицание над всеми переменными (в случае переменной с отрицанием получаем двойное отрицание):

$f = \overline{x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}yz} = (\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.

4.2.5. Привести булеву функцию к КНФ: $f = ((xy)\,|\,z) \to (\bar{x} \sim y)$.

Решение. Найдем КНФ тем же методом:

$$\bar{f} = \overline{((xy)\,|\,z) \to (\bar{x} \sim y)} = \overline{\overline{\overline{xyz}} \to (\bar{x} \sim y)} = \overline{xyz \vee (\bar{x} \sim y)} = \overline{xyz}(\bar{x} \oplus y) =$$
$$= (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(xy \vee \bar{x}\,\bar{y}) = \bar{x}xy \vee \bar{y}xy \vee \bar{z}xy \vee \bar{x}\,\bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{y}\,\bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{z}\,\bar{x}\,\bar{y} =$$
$$= xy\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}.$$

Теперь $f = \overline{xy\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}} = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y)$.

4.2.6. Составить таблицу истинности и выписать СДНФ и СКНФ булевой функции
$f = ((x \sim z) \oplus y) \cdot (x\,|\,yz)$.

Решение. Понятие СДНФ и СКНФ приведено в книгах [4,6,8,10,11]. Составляем таблицу истинности:

x	y	z	$x \sim z$	$(x \sim z) \oplus y$	yz	$x\,|\,yz$	f
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	0	0

Далее СДНФ составляется по единицам правой части таблицы истинности, причем если $f\,(x, y, z) = 1$, то если $x = 0$, в соответствующей конъюнкции СДНФ берется $\bar{x}$, а если $x = 1$ в СДНФ берется x. Аналогично поступают и с другими переменными. СКНФ составляется по нулям таблицы истинности, т. е. если $f\,(x, y, z) = 0$ и $x = 0$, то в соответствующей дизъюнкции берётся x, а если $x = 1$, то $\bar{x}$. Поэтому СДНФ и СКНФ для данной функции имеют вид:

СДНФ: $f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$,

СКНФ: $f = \left(x \vee y \vee \bar{z}\right)\left(x \vee \bar{y} \vee z\right)\left(\bar{x} \vee y \vee z\right)\left(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}\right)$.

4.2.7. Составить многочлен Жегалкина для функций $f_1 = x \vee y,\ f_2 = x\,|\,y$.

Решение. Понятие многочлена Жегалкина см. в [4,6]. Решим задачу методом треугольника Паскаля. Для этого запишем таблицу для дизъюнкции

x	y	f	**«Треугольник Паскаля»**				**Слагаемые**
0	0	0	**0**	1	1	1	1
0	1	1	**1**	0	0		y
1	0	1	**1**	0			x
1	1	1	**1**				xy

Первая строка треугольника Паскаля это транспонированная правая часть таблицы истинности. Очередной элемент треугольника получается путем сложения по модулю два элемента над ним и его соседа справа. Слагаемые многочлена Жегалкина соответствуют единицам в левом крайнем столбце треугольника (выделено жирным шрифтом в таблице) В них входят переменные, принимающие значение 1. В итоге получаем $f_1 = x \oplus y \oplus xy$.

Можно получить многочлен Жегалкина другими методами. В частности, для $f_2 = x \mid y = \overline{xy}$ воспользуемся тождеством: $\overline{a} = a \oplus 1$. В результате сразу же получаем $f_2 = xy \oplus 1$. Можно проверить, что тот же результат получается при помощи треугольника Паскаля (проделайте это самостоятельно).

4.2.8. Составить многочлен Жегалкина для функции из примера 4.2.6.

Решение. Используем треугольник Паскаля для функции трех переменных:

x	y	z	f	**«Треугольник Паскаля»**								**Слагаемые**
0	0	0	1	**1**	0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	**1**	0	1	1	1	0	1		z
0	1	0	0	**1**	1	0	0	1	1			y
0	1	1	1	**0**	1	0	1	0				yz
1	0	0	0	**1**	1	1	1					x
1	0	1	1	**0**	0	0						xz
1	1	0	1	**0**	0							xy
1	1	1	0	**0**								xyz

Выписываем ответ (см. столбец, показанный жирным шрифтом):
$f = x \oplus y \oplus z \oplus 1$.

4.2.9. Решить систему логических уравнений:

$$\begin{cases} (x_1 \downarrow x_3) \to x_2 = 1 \\ (x_1 \oplus x_2) \sim x_3 = 1 \\ (x_1 \vee \overline{x}_2) \mid x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение. Для решения задачи рассмотрим три булевы функции:

$f_1 = (x_1 \downarrow x_3) \to x_2$
$f_2 = (x_1 \oplus x_2) \sim x_3$
$f_3 = (x_1 \vee \overline{x}_2) \mid x_3$

Далее выпишем для них общую таблицу истинности:

x_1	x_2	x_3	$x_1 \downarrow x_3$	f_1	$x_1 \oplus x_2$	f_2	$x_1 \vee \overline{x}_2$	f_3
0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	**0**	**1**	0	**1**	1	**1**	1	**0**
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	0

Для наглядности мы привели промежуточные данные в 4, 6 и 8 столбцах. Из приведенной таблицы видим, что равенства $f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_3 = 0$ выполняются одновременно при наборе переменных $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$ (соответствующая строка выделена жирным шрифтом). Этот набор является ответом задачи.

4.2.10. Решить систему логических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 \oplus x_2 \oplus x_5 = 0 \\ x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 = 1 \\ x_1 \oplus x_3 \oplus x_5 = 0 \\ x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 = 0 \\ x_1 \oplus x_4 = 0 \end{cases}$$

Решение. Можно было решить систему, как в предыдущей задаче, однако учитывая, что в данном случае имеется только одна операция – сложение по модулю два, лучше решать эту задачу методом Гаусса в двоичной арифметике. Для этого выпишем расширенную матрицу системы, состоящую только из нулей и единиц, и приведем ее к ступенчатому виду элементарными преобразованиями над строками. При этом в роли вычитания будет выступать операция $\oplus$, так как $1 \oplus 1 = 0$. Имеем

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

В результате получили верхнюю треугольную матрицу. Далее возвращаемся от матрицы к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 \oplus x_2 \oplus x_5 = 0 \\ x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 = 1 \\ x_3 \oplus x_5 = 1 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

Откуда, двигаясь снизу вверх, получим:

$$\begin{cases} x_1 \oplus x_2 \oplus x_5 = 0 \Rightarrow x_1 \oplus 0 \oplus 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 = 1 \Rightarrow x_2 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \Rightarrow x_2 = 0 \\ x_3 \oplus 1 = 1 \Rightarrow x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

Таким образом, ответ (1,0,0,1,1).

4.2.11. Решить систему логических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 \oplus x_4 \oplus x_5 = 1 \\ x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 1 \\ x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 = 0 \\ x_2 \oplus x_3 \oplus x_5 = 1 \\ x_2 \oplus x_5 = 1 \end{cases}$$

Решение. Решим задачу вновь, используя метод Гаусса. Имеем:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

В процессе решения мы поменяли местами строки. Видим, что одна строка – нулевая, поэтому имеется одна свободная переменная x_5, которую мы обозначим буквой c. При этом $c \in \{0,1\}$. Далее возвращаемся от матрицы к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 \oplus x_4 \oplus x_5 = 1 \\ x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 = 0 \\ x_3 \oplus x_4 = 1 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = c \end{cases}$$

Отсюда сразу находим $x_3 = 0$. Далее подставляем все в первое и во второе уравнения. Тогда

$$\begin{cases} x_1 \oplus 1 \oplus c = 1 \Rightarrow x_1 \oplus \cancel{1} \oplus \cancel{c} \oplus \cancel{1} \oplus \cancel{c} = 1 \oplus 1 \oplus c = c \\ x_2 \oplus 0 \oplus 1 \oplus c = 0 \Rightarrow x_2 \oplus \cancel{1} \oplus \cancel{c} \oplus \cancel{1} \oplus \cancel{c} = 0 \oplus 1 \oplus c = 1 \oplus c \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = c \end{cases}$$

В итоге получаем

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = 1 \oplus c \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = c \end{cases}$$

Чтобы выписать все ответ нужно подставить в полученные равенства вместо величины c последовательно 0 и 1. В результате найдем два решения системы: (0,1 0,1,0) (1,0,0,1,1).

4.3. Задачи для самостоятельного решения.

4.3.1. Доказать тождества

а) $(x \to y)(y \to z) \to (x \to z) = 1$,

б) $(x \oplus y)z = xz \oplus yz$.

4.3.2. Привести булеву функцию к ДНФ: $f = (xz \to y) \downarrow (xy \sim z)$.

4.3.3. Привести булеву функцию к КНФ: $f = (x \oplus y\mathrm{z}) \,|\, (xy \oplus 1)$.

4.3.4. Получить формулы $x \to y = \overline{x} \vee y,\ x \oplus y = \overline{x}y \vee x\overline{y},\ \overline{x \oplus y} = x \sim y$, используя СДНФ или СКНФ соответствующих функций.

4.3.5. Выписать СДНФ, СКНФ и многочлен Жегалкина для функции $f = ((x \vee \overline{y})\mathrm{z}) \to (x \oplus y)$.

4.3.6. Решить системы логических уравнений

а) $\begin{cases} x_1 \to (x_2 \oplus x_3) = 1 \\ x_2 \mid (x_1 \sim x_3) = 1 \\ x_1 x_2 \vee (\bar{x}_1 \to \bar{x}_3) = 0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 = 1 \\ x_1 \oplus x_3 = 0 \\ x_2 \oplus x_5 = 1 \\ x_2 \oplus x_4 \oplus x_5 = 1 \\ x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 = 0 \end{cases}$

Ответы.
4.3.2. $f = x\bar{y}z$. **4.3.3.** $f = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$. **4.3.5.** СДНФ: $f = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,z \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z \vee x\,y\,\bar{z}$, СКНФ: $f = (x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$, многочлен Жегалкина: $f = xz \oplus yz \oplus z \oplus 1$. **4.3.6.** а). $(0,1,1),(0,0,1)$, б). $(0,1,0,0,0),(0,0,0,0,1),(1,1,1,0,0),(1,0,1,0,1)$.

ЗАНЯТИЕ 5

МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

5.1. Основные понятия.

5.1.1. ДНФ называется *минимальной* (МДНФ), если она содержит наименьшее общее число вхождений логических переменных по сравнению со всеми равными ей ДНФ.

5.1.2. ДНФ называется *тупиковой* (ТДНФ), если уничтожение одной или нескольких переменных в ней приводит к неравной ДНФ

5.1.3. Метод *Квайна* и *Квайна-Мак-Класки*, как и минимизация по *карте Карно* – различные реализации *классической схемы минимизации* дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм. Эта схема состоит из двух шагов:

1). Поиск всех *простых импликант* данной булевой функции на множестве всевозможных *элементарных конъюнкций* (произведений различных литералов – переменных и их отрицаний). Дизъюнкция всех простых импликант равна самой булевой функции и называется *сокращённой* ДНФ (аналогично для КНФ).

2). Поиск всех *тупиковых* ДНФ (КНФ), среди которых находятся и все минимальные ДНФ (КНФ).

В методе Квайна (Квайна-Мак-Класки) для случая минимизации ДНФ первый шаг реализуется *последовательной обобщённой склейкой* слагаемых СДНФ (*конституэнт единицы, минтермов*), а в минимизации по карте Карно склейкой по максимальным областям, выделяемым визуально.

5.2. Решение типовых задач.

5.2.1. Минимизировать СДНФ булевой функции методом Квайна и по карте Карно. Привести к скобочной форме, построить логическую схему. Пусть функция трех переменных, задана таблицей истинности:

n	*x*	*y*	*z*	*f*	
0	0	0	0	1	$\rightarrow x^0y^0z^0 = \bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}$
1	0	0	1	0	
2	0	1	0	1	$\rightarrow x^0y^1z^0 = \bar{x}\ y\bar{z}$
3	0	1	1	1	$\rightarrow x^0y^1z^1 = \bar{x}\ y\ z$
4	1	0	0	1	$\rightarrow x^1y^0z^0 = x\ \bar{y}\ \bar{z}$
5	1	0	1	1	$\rightarrow x^1y^0z^1 = x\ \bar{y}z$
6	1	1	0	0	
7	1	1	1	0	

Решение. Запишем СДНФ нашей функции

$$f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z$$

Решим задачу методом Квайна (Квайна-Мак-Класки). Выпишем в двоичном коде слагаемые СДНФ в нашем примере и объединим в блоки по числу единиц (весу Хэмминга). Склеиваются две элементарные конъюнкции в том случае, когда соответствующие наборы различаются ровно в одном разряде (расстояние Хэмминга равно 1). Из этого следует, что они принадлежат соседним блокам. При склейке вместо исчезнувшей переменной ставим прочерк (пример: $000 \vee 010 = 0-0$). Простые импликанты не участвуют в дальнейших склейках (не имеют потомков). В нашем примере это 0-0, -00, 10-, 01- (см. рис.5.1).

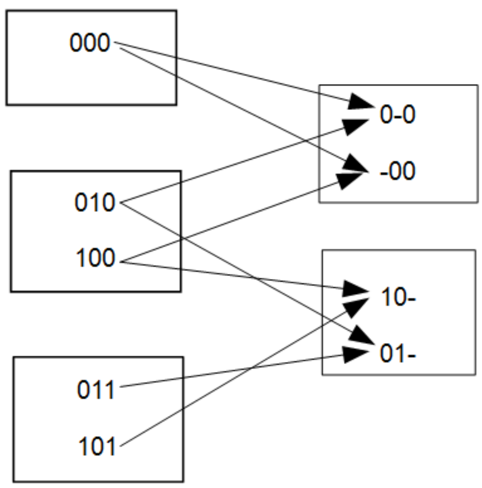


Рис.5.1

Второй шаг — это поиск *минимального покрытия* строками *таблицы Квайна* (*импликантной таблицы*). Наиболее мощным и универсальным является *метод функций Петрика*, но его недостатком является большой объём вычислений. В нашем случае таблица Квайна имеет вид:

		000	010	011	100	101
A	0-0	+	+			
B	-00	+			+	
C	01-		+	+		
D	10-				+	+

В первой строке таблицы стоят слагаемые СДНФ, а в первом столбце перечислены простые импликанты. Знаки «+» стоят там, где простая импликанта содержит данное слагаемое СДНФ. Составим и приведём к дизъюнктивной форме в соответствии с правилами раскрытия скобок и поглощения функцию Петрика. Для составления функции Петрика надо для каждого столбца взять дизъюнкцию простых импликант, отмеченных «+», и перемножить получившиеся выражения:

$$K = (A \vee B)(A \vee C)C(B \vee D)D = (A \vee B)((A \vee C)C)((B \vee D)D) =$$
$$= (A \vee B)CD = ACD \vee BCD$$

Каждому слагаемому теперь соответствует тупиковая ДНФ, конъюнкции надо заменить на дизъюнкции. В нашем случае обе ТДНФ являются минимальными:

МДНФ1=$A \vee C \vee D = \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}$; МДНФ2=$B \vee C \vee D = \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}$.

Запишем результат в скобочной форме: $\bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}y \vee x\bar{y} = \bar{x}(\bar{z} \vee y) \vee x\bar{y}$,

$\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y \vee x\bar{y} = \bar{y}(\bar{z} \vee x) \vee \bar{x}y$

Построим далее логическую схему для МДНФ1. Она изображена на рис. 5.2. Здесь «¬» означает отрицание, а амперсанд – конъюнкцию.

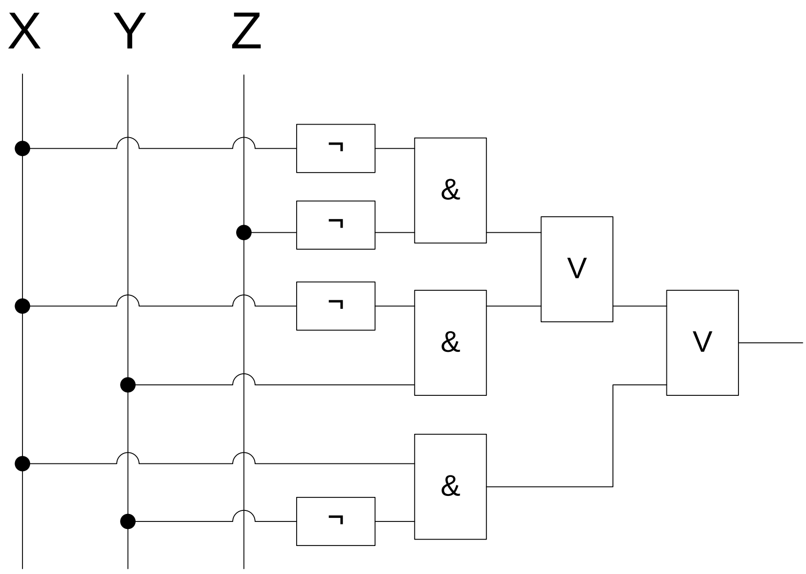


Рис. 5.2

Получим заново этот же результат с помощью карты Карно. Составим карту Карно, отметив на ней только единицы. Для первого шага классической схемы минимизации нужно найти все простые импликанты, соответствующие максимальным допустимым областям. Напомним, что допустимой областью называется прямоугольник из единиц, стороны которого равны 1, 2 или 4 (с учётом того, что карта Карно представляет собой тор). В данном случае имеются 4 максимальные области *A,B,C,D* (также отмечены на карте). Получаем рисунок 5.3.

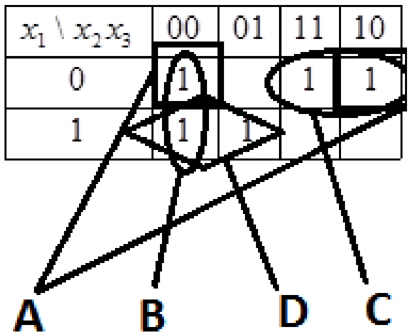


Рис. 5.3

Представим склейку по найденным областям следующей таблицей склейки:

Область	x	y	z	Результат склейки (простая импликанта)
$A = 000 \vee 010$	0	-	0	$\bar{x}\,\bar{z}$
$B = 000 \vee 100$	-	0	0	$\bar{y}\,\bar{z}$
$C = 011 \vee 010$	0	1	-	$\bar{x}\,y$
$D = 100 \vee 101$	1	0	-	$x\,\bar{y}$

Для каждой из областей C и D существует единственное поле (011 и 101 соответственно), покрываемое только этой областью. Следовательно, склейки по этим областям обязательно входят в любую тупиковую ДНФ, в частности МДНФ (такие простые импликанты называются *ядровым*, их сумма называется ядровой ДНФ). Эти области покрывают все поля, кроме поля 000, которое покрывается любой из областей A или B. Таким образом, мы имеем две тупиковые ДНФ: $A \vee C \vee D$ и $B \vee C \vee D$, каждая из которых является минимальной. То есть, получаем тот же ответ, что и выше.

5.2.2. Решим задачу минимизации двумя методами для булевой функции четырех переменных, заданной таблицей истинности

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Решение.1-й этап метода Квайна – склейка. Имеем следующую таблицу (см. предыдущий пример):

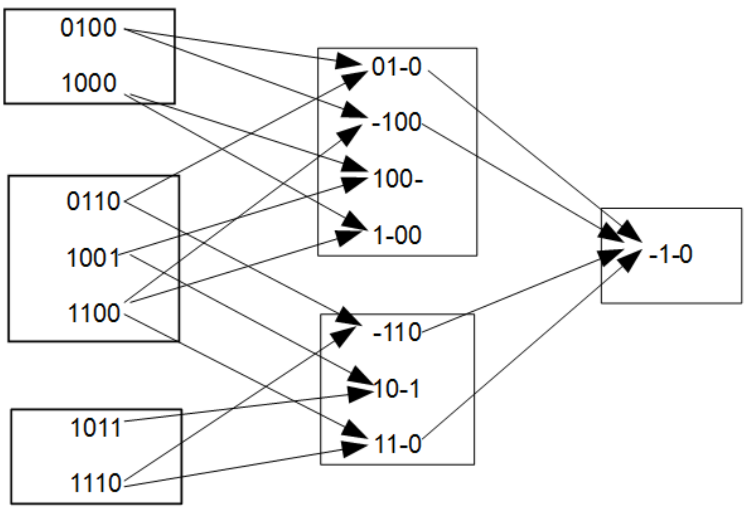


Рис. 5.4

В данном примере имеем четыре простые импликанты: 100-, 1-00, -110, -1-0. Рассмотрим поиск минимального покрытия строками таблицы Квайна. Имеем таблицу:

		0100	1000	0110	1001	1100	1011	1110
A	-1-0	+		+		+		+
B	10-1				+		+	
C	100-		+		+			
D	1-00		+			+		

Составим и приведём к дизъюнктивной форме в соответствии с правилами раскрытия скобок и поглощения функцию Петрика:
$K = A(C \vee D)A(B \vee C)(A \vee D)BA = AB(C \vee D) = ABC \vee ABD$
В нашем случае вновь обе тупиковые ДНФ являются минимальными: МДНФ1= $A \vee B \vee C$; МДНФ2= $A \vee B \vee D$.

Получим заново этот же результат с помощью карты Карно (максимальные области, отвечающие простым импликантам, выделены графически):

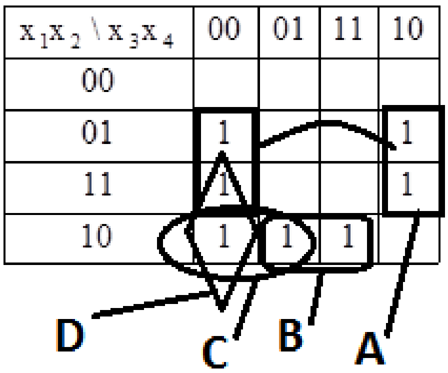


Рис. 5.5

Представим склейку по найденным областям следующей таблицей:

Область	x_1	x_2	x_3	x_4	Результат склейки (простая импликанта)
A=0100 $\vee$ 0110 $\vee$ 1100 $\vee$ 1110	-	1	-	0	$x_2\overline{x_4}$
B=1001 $\vee$ 1011	1	0	-	1	$x_1\overline{x_2}x_4$
C=1000 $\vee$ 1001	1	0	0	-	$x_1\overline{x_2}\overline{x_3}$
D=1100 $\vee$ 1000	1	-	0	0	$x_1\overline{x_3}\overline{x_4}$

Для каждой из областей *A* и *B* вновь существует поле (например, 0100 и 1011 соответственно), покрываемое только этой областью. Следовательно, ядровые импликанты соответствуют двум данным областям. Эти области покрывают все поля, кроме поля 1000, которое покрывается любой из областей *C* или *D*. Таким образом, мы имеем две тупиковые ДНФ: $A \vee B \vee C$

и $A \vee B \vee D$, каждая из которых является минимальной. Две найденные МДНФ не являются равноценными. Это видно из их скобочных форм:

$$МДНФ1 = A \vee B \vee C = x_2\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2 x_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 = x_2\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2(x_4 \vee \overline{x}_3)$$

$$МДНФ2 = A \vee B \vee D = x_2\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2 x_4 \vee x_1\overline{x}_3\overline{x}_4 = x_2\overline{x}_4 \vee x_1(\overline{x}_2 x_4 \vee \overline{x}_3\overline{x}_4)$$

(первая МДНФ имеет ещё одну скобочную форму длины 7).

Построим по первой, более короткой скобочной форме контактную схему. В контактной схеме литералы изображаем прямоугольниками, конъюнкции соответствует последовательное соединение, а дизъюнкции параллельное. Получаем схему:

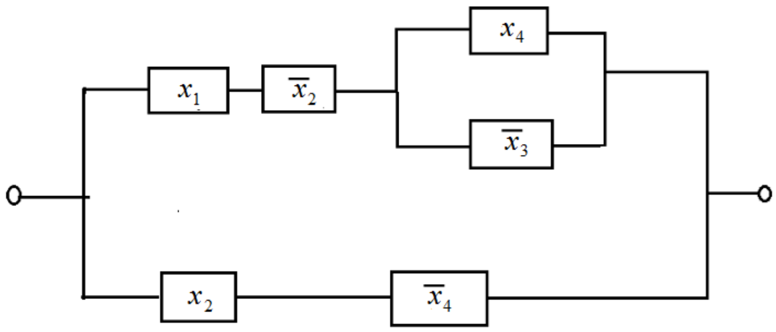


Рис. 5.6

Проверьте самостоятельно, что на любом двоичном наборе, значения МДНФ1 и исходной булевой функции совпадают.

5.2.3. Решить задачу минимизации двумя методами для булевой функции четырех переменных, заданной своей СДНФ:

$$f = 0000 \vee 0011 \vee 0100 \vee 0101 \vee 0110 \vee 0111 \vee 1000 \vee 1010 \vee 1011$$

Решение. Кратко рассмотрим первый этап – склейку. Получаем:

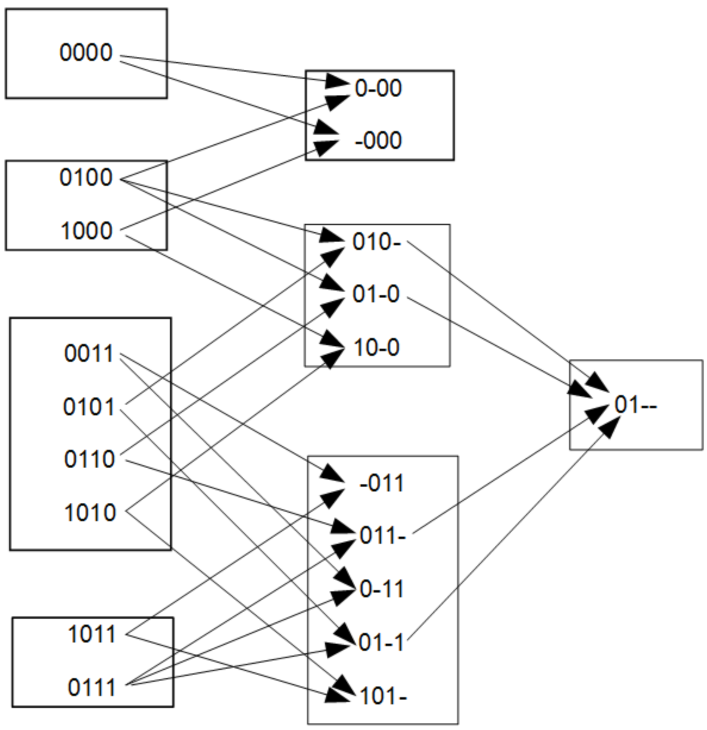


Рис. 5.7

Далее рисуем таблицу Квайна (второй этап):

		0000	~~0100~~	1000	0011	~~0101~~	~~0110~~	1010	~~0111~~	1011
A	0-00	+	+							
B	-000	+		+						
C	10-0			+				+		
D	-011				+					+
E	0-11				+				+	
F	101-							+		+
~~G~~	~~01--~~		~~+~~			~~+~~	~~+~~		~~+~~	

Для нахождения всех тупиковых ДНФ применим комбинированный метод, то есть метод Петрика применим не сразу, а после вычеркивания обязательных строк. Из таблицы следует, что в столбце под числом 0101 стоит только один плюс, то есть последняя строка это единственная строка, покрывающая этот столбец. Поэтому данная строка – обязательная (она соответствует ядровой конъюнкции 01--). Вычеркнем эту строку и столбцы, которые она покрывает. Для оставшегося множества строк и столбцов применим метод функции Петрика. Составим эту функцию и упростим ее. Получим:

$K=(A\vee B)(B\vee C)(D\vee E)(C\vee F)(D\vee F)=(AB\vee B\vee AC\vee BC)(D\vee E)(CD\vee$
$FD\vee\vee CF\vee F)=(B\vee AC)(D\vee E)(CD\vee F)=(B\vee AC)(CD\vee ECD\vee DF\vee EF)$
$=BCD\vee\vee\cancel{BECD}\vee BDF\vee BEF\vee ACD\vee\cancel{AECD}\vee\cancel{ACDF}\vee ACEF=BCD\vee$
$BDF\vee BEF\vee\vee ACD\vee ACEF$

В итоге получаем четыре минимальные (они же тупиковые) и одну тупиковую ДНФ, не являющуюся минимальной (вычеркнутую обязательную строку учитываем в ответе):

$f=\bar{x}_1x_2\vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4\vee\bar{x}_2x_3x_4\vee\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
$f=\bar{x}_1x_2\vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4\vee\bar{x}_2x_3x_4\vee\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$
$f=\bar{x}_1x_2\vee x_1\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_2x_3x_4\vee\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
$f=\bar{x}_1x_2\vee x_1\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1x_3x_4\vee\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
$f=\bar{x}_1x_2\vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4\vee\bar{x}_1x_3x_4\vee\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4\vee x_1\bar{x}_2x_3$

Проверяем результат по картам Карно. Заметим, что ядровая конъюнкция 01-- присутствует на каждой из пяти карт Карно, отвечающим различным тупиковым ДНФ:

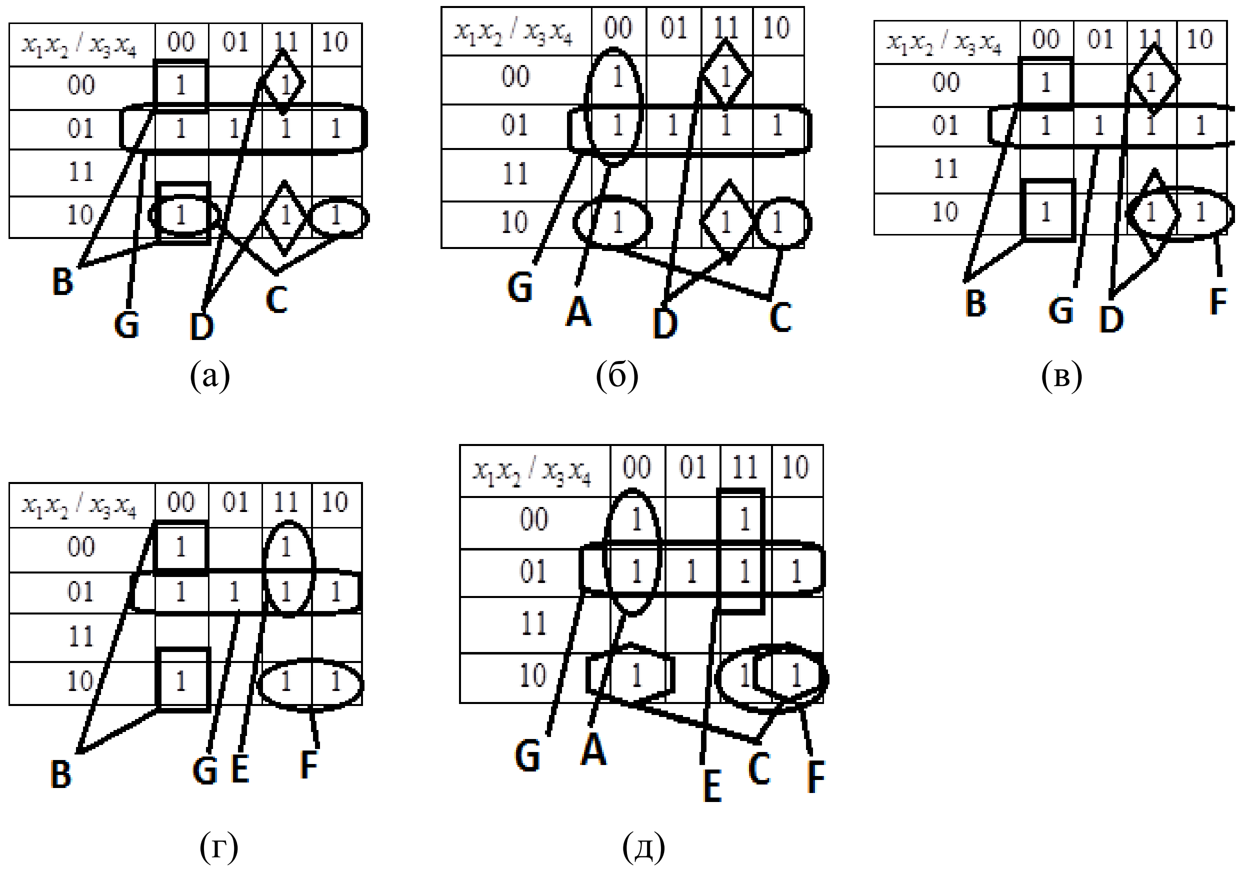


Рис. 5.8

5.3. Задачи для самостоятельного решения.

5.3.1. Минимизировать с помощью алгоритма Квайна функцию, правая часть таблицы истинности которой равна 11010011. Результат проверить по картам Карно. Построить логическую и контактную схему для любой полученной МДНФ.

5.3.2. Минимизировать с помощью алгоритма Квайна функцию, правая часть таблицы истинности которой равна 1111100001001100. Результат проверить по картам Карно. Построить логическую схему для любой полученной МДНФ.

5.3.3.Найти все тупиковые ДНФ с помощью алгоритма Квайна для функции, правая часть таблицы истинности которой равна 0001101111100111. Результат проверить по картам Карно.

Ответы.5.3.1. $f=\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3,\ \ f=\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee x_2x_3.$

5.3.2. $f=\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_3x_4.$

5.3.3. Пять тупиковых ДНФ и одна МДНФ:

$f=\bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2x_3,$

$f=\bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_4,$

$f=\bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_3\bar{x}_4 \vee x_2x_3,$

$f=\bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_4 \vee x_2x_3,$

$f=\bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_4.$

ЗАНЯТИЕ 6

ПОЛНОТА СИСТЕМЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ. КРИТЕРИЙ ПОСТА

6.1. Основные понятия.

6.1.1. Пусть имеется некоторый набор K, состоящий из конечного числа булевых функций. *Суперпозицией* функций из этого набора называются новые функции, полученные с помощью конечного числа применения двух операций;
1) можно переименовать любую переменную, входящую в функцию из K;
2) вместо любой переменной можно подставить функцию из набора K или уже образованную ранее суперпозицию.
Суперпозицию еще иначе называют *сложной функцией*.

6.1.2. Набор (система) функций называется *полным*, если – любую булеву функцию можно выразить в виде сложной функции, составленной из функций данного набора.

6.1.3. Полный набор функций называется *базисом* в том случае если какую-то функцию удалить из набора, то этот набор перестанет быть полным.

6.1.4. T_0 – это набор всех тех логических функций, которые на нулевом наборе принимают значение 0 (T_0 – это класс функций, *сохраняющих нуль*).

6.1.5. T_1 – это набор всех логических функций, которые на единичном наборе принимают значение 1 (T_1 – это класс функций, *сохраняющих единицу*).

6.1.6. L – класс *линейных* функций т. е. функций, для которых полином Жегалкина не содержит произведений переменных.

6.1.7. S – класс *самодвойственных* функций т. е. функций, для которых $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)} = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

6.1.8. Пусть имеются два различных набора из n переменных: $s_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $s_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Будем говорить, что набор s_1 меньше набора s_2, если все $x_i \le y_i$. Функция от n переменных называется *монотонной* (принадлежит классу M), если на меньшем наборе она принимает меньшее или равное значение, чем на большем наборе.

6.2. Решение типовых задач.

6.2.1. Выразить операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции через:
а) штрих Шеффера,
б) импликацию и константу 0.

Решение.
а). Имеем:
$$\overline{x} = \overline{x \cdot x} = x \mid x, \quad xy = \overline{\overline{xy}} = \overline{x \mid y} = (x \mid y) \mid (x \mid y),$$
$$x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}} = \overline{x} \mid \overline{y} = (x \mid x) \mid (y \mid y).$$

б). Используя определение импликации в виде КНФ ($x \to y = \bar{x} \vee y$), получаем:

$$\bar{x} = \bar{x} \vee 0 = x \to 0, \quad x \vee y = \bar{\bar{x}} \vee y = \bar{x} \to y = (x \to 0) \to y,$$

$$xy = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = \overline{x \to \bar{y}} = (x \to (y \to 0)) \to 0.$$

6.2.2. Привести пример нелинейной функции трех переменных, принадлежащей остальным классам Поста.

Решение. Рассмотрим функцию: $f = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$. Выпишем ее таблицу истинности

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Проверим, линейная ли эта функция. Строим треугольник Паскаля

x_1	x_2	x_3	f	**«Треугольник Паскаля»**								**Слагаемые**
0	0	0	0	**0**	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	**0**	0	1	1	1	0	0		x_3
0	1	0	0	**0**	1	0	0	1	0			x_2
0	1	1	1	**1**	1	0	1	1				$x_2\ x_3$
1	0	0	0	**0**	1	1	0					x_1
1	0	1	1	**1**	0	1						$x_1\ x_3$
1	1	0	1	**1**	1							$x_1\ x_2$
1	1	1	1	**0**								$x_1\ x_2\ x_3$

Видим, что полином Жегалкина имеет вид $f = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3$, то есть функция нелинейная. Далее видим, что *f*(0,0,0)=0, *f*(1,1,1)=1, то есть $f \in T_0, \quad f \in T_1$. Проверим самодвойственность нашей функции. Для этого запишем столбец правой части таблицы истинности в обратном порядке и применим к получившемуся столбцу поэлементное отрицание. Легко видеть, что мы вновь получим ту же функцию. Следовательно, функция *f* самодвойственная. Наконец проверим ее монотонность. Разделим для этого набор правой части пополам: 0001|0111 и сравним поэлементно полученные наборы. Видим, что левый набор не превосходит правый. Если бы это было не так, то функция была бы не монотонна. Далее делим каждый из полученных наборов еще раз пополам: 00|01, 01|11. Сравниваем попарно полученные наборы слева и справа от черты. Видим, что $00 \le 01, 01 \le 11$**.** Следовательно, еще раз делим каждый из полученных четырех наборов пополам и $0 \le 0, 0 \le 1, 0 \le 1, 1 \le 1$. Отсюда делаем вывод, что функция монотонна. Таким образом, наша функция не принадлежит только классу L.

6.2.3. Нарисовать логическую схему для функции $f = x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2$. Заменить элементы отрицания, дизъюнкции и конъюнкции на соответствующие элементы базиса Шеффера $\{|\}$, а затем импликативного базиса $\{\to, 0\}$.

Решение. Имеем логическую схему

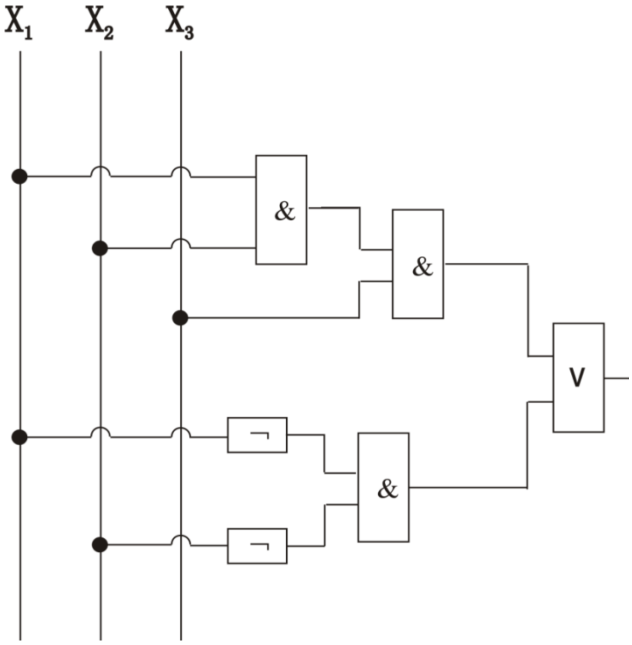


Рис. 6.1.

Далее используем результат задачи 6.2.1. В соответствии с полученными выше формулами, имеем следующие схемы, реализующие основные Булевы операции в базисе Шеффера:

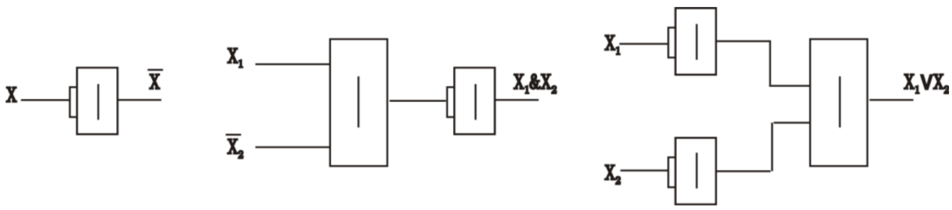


Рис. 6.2.

В результате замены соответствующих блоков, получим схему в базисе Шеффера:

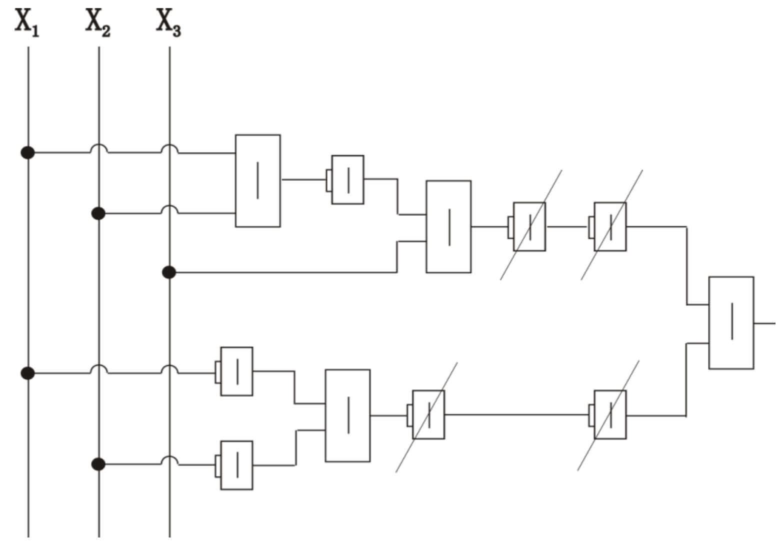


Рис. 6.3

Убираем двойные отрицания и записываем ответ в виде формулы, пользуясь рис. 6.3:

$$f=\Big(\big((x_1\,|\,x_2)\,|\,(x_1\,|\,x_2)\big)\,|\,x_3\Big)\,|\,\big((x_1\,|\,x_1)\,|\,(x_2\,|\,x_2)\big).$$

Аналогично предыдущему и используя результат задачи 6.2.1, получаем следующие схемы для отрицания, конъюнкции и дизъюнкции в импликативном базисе:

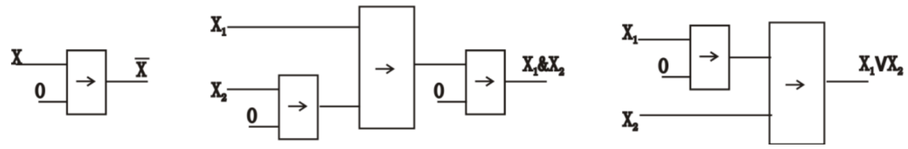


Рис. 6.4

Далее заменяем соответствующие элементы схемы рис. 6.1. В результате получим схему в импликативном базисе:

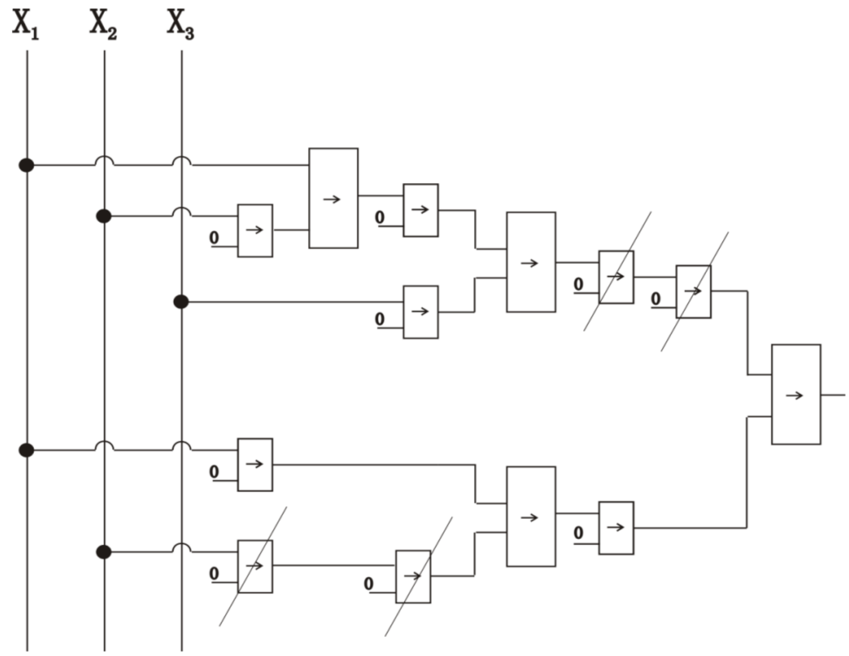


Рис.6.5

Вновь убираем двойные отрицания и записываем ответ (см. рис. 6.5):
$f = \Big(\big(\big(x_1 \to (x_2 \to 0)\big) \to 0\big) \to (x_3 \to 0)\Big) \to \Big(\big(\big(x_1 \to 0\big) \to x_2\big) \to 0\Big)$.

6.2.4. Пользуясь критерием Поста, проверить будет ли полной система функций: $f_1 = x \vee y,\ f_2 = x \wedge y,\ f_3 = x \sim y,\ f_4 = x \oplus y,\ f_5 = 1$ и если да, то найти все базисы данной системы функций.

Решение. Заполним так называемую таблицу Поста. В случае, если данная функция принадлежит какому либо из классов Поста, в соответствующей графе ставим знак «+». Ясно, что $f_1(0,0) = 0,\ f_1(1,1) = 1$, поэтому $f_1 \in T_0,\ f_1 \in T_1$. Аналогично $f_2 \in T_0,\ f_2 \in T_1$. Далее $f_2(0,0) = 1,\ f_2(1,1) = 1$, то есть $f_2 \notin T_0,\ f_2 \in T_1$. Поступая так дальше, заполняем первые два столбца таблицы. Далее проверяем функции на линейность. Ясно, что $f_3 = x \sim y = \overline{x \oplus y} = (x \oplus y) \oplus 1$, поэтому функция f_3 линейна. Линейны будут f_4 и f_5. Далее $f_2 = xy$ нелинейная (она сама является многочленом Жегалкина). Функция f_1 может быть записана в виде $f_1 = \overline{\overline{x}\,\overline{y}} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y \oplus 1$, то есть она нелинейная. Далее видим, что функции f_1^*, двойственной к f_1, будет соответствовать набор 0001, то есть $f_1^* \neq f_1$, следовательно f_1 не самодвойственная. Аналогично все остальные функции также не принадлежат классу S (проверьте это самостоятельно). Далее проверяем свойство монотонности. Рассмотрим набор 0111. Разбивая его на два видим, что $01 \le 11$ и далее $0 \le 1, 1 \le 1$. Следовательно, f_1 монотонна. Аналогично получаем, что $f_2, f_5 \in M,\ f_3, f_4 \notin M$. В итоге получаем таблицу:

	T_0	$\cancel{T_1}$	L	$\cancel{S}$	$\cancel{M}$
f_1	+	+	-	-	+
f_2	+	+	-	-	+
f_3	-	+	+	-	-
~~f_4~~	~~+~~	~~-~~	~~+~~	~~-~~	~~-~~
f_5	-	+	+	-	+

По таблице найдем все базисы данной системы функций. Воспользуемся критерием Поста, который сводится к тому, что в каждом столбце нашей таблицы должен стоять хотя бы один минус. То есть мы должны решить задачу покрытия всех столбцов таблицы, если считать, что строка покрывает столбец, в том случае, если на пересечении этой строки и этого столбца стоит знак минус. Эта задача аналогична задаче покрытия при минимизации булевых функций (см. занятие 5). Итак, найдем все покрытия. Видим, что в столбце S нет знаков «+». Следовательно, этот столбец покрывается любой строкой. Значит, его можно не рассматривать. Далее в столбце T_1 имеется только один «-» и он покрывается строкой f_4. Следовательно строка f_4 обязательная. Вычеркиваем ее и столбцы, которые она покрывает (T_1 и M) (см., таблицу). Остаются не покрытыми два столбца: L и T_0. Применяем метод Петрика. Имеем

$K = (f_3 \vee f_5)(f_1 \vee f_2) = f_1 f_3 \vee f_1 f_5 \vee f_2 f_3 \vee f_2 f_5$.

Таким образом, получаем четыре базиса: $\{f_1, f_3, f_4\}$,$\{f_1, f_4, f_5\}$, $\{f_2, f_3, f_4\}$, $\{f_2, f_4, f_5\}$. Заметим, что исходная система функций полна, так как все строки покрывают таблицу. Очевидно, система не является базисом, так как из нее можно убрать две функции с сохранением свойства полноты.

6.2.5. Решить аналогичную задачу для системы функций:
1) $f_1(x,y,z) = (x\,y) \downarrow (y \sim z)$, 2) $f_2(x,y) = x\,y \oplus x$, 3) $f_3(x,y,z) = x \sim (y\,z)$, 4) $f_4(x, y) = x \oplus \bar{y}$, 5) $f_5(x, y, z) = x\,y \vee \bar{z}$.

Указать все базисы этой системы функций.

Решение. Составляем таблицу истинности для каждой из этих пяти функций (для f_2 и f_4 таблицу составим отдельно).

x, y, z	xy	$y \sim z$	f_1	yz	f_3	f_5
000	0	1	0	0	1	1
001	0	0	1	0	1	0
010	0	0	1	0	1	1
011	0	1	0	1	0	0
100	0	1	0	0	0	1
101	0	0	1	0	0	0
110	1	0	0	0	0	1
111	1	1	0	1	1	1

x, y	xy	f_2	f_4
00	0	0	1
01	0	0	0
10	0	1	0
11	1	0	1

Из таблиц видно $f_1, f_2 \in T_0$, $f_3, f_4, f_5 \in T_1$. Далее проверим монотонность f_1. Записываем набор правой части этой функции 0110|0100. Видим, что левая половина набора не меньше или равна правой. Значит функция не монотонная. Аналогично получаем, что не монотонны остальные функции. Проверяем самодвойственность. Пишем набор, соответствующий двойственной к f_1 функции: 11011001. Он не совпадает с набором для f_1, поэтому эта функция не самодвойственная. Аналогично показываем, что остальные функции также не самодвойственные. Далее проверим линейность. Имеем: $f_2 \notin L$, $f_3 = x \sim (yz) = \overline{x \oplus (yz)} = x \oplus yz \oplus 1$, то есть f_3 нелинейная; $f_4 = x \oplus \bar{y} = x \oplus y \oplus 1$, то есть эта функция линейная. Далее, используя треугольник Паскаля, получим (проделайте самостоятельно): $f_1 = xyz \oplus xy \oplus y \oplus z$, $f_5 = xyz \oplus z \oplus 1$, то есть $f_1, f_5 \notin L$.

Все эти сведения сведём в таблицу Поста:

	T_0	T_1	L	S	M
f_1	+	-	-	-	-
f_2	+	-	-	-	-
f_3	-	+	-	-	-
f_4	-	+	+	-	-
f_5	-	+	-	-	-

Видим, что для того чтобы покрыть таблицу, можно взять пары функций: f_1 и f_3; f_1 и f_4; f_2 и f_4; f_1 и f_5, f_2 и f_5. Можно проверить это и с помощью метода функции Петрика. Заметим, что полными наборами будут любые наборы, содержащие какой-нибудь базис.

6.3. Задачи для самостоятельного решения.

6.3.1. Выразить операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции через:

а) стрелку Пирса,

б) импликацию и отрицание.

6.3.2. Привести пример немонотонной функции пяти переменных, принадлежащей остальным классам Поста.

6.3.3. Используя результат задачи 6.3.1 нарисовать логические схемы для функции задачи 6.2.3 в базисе Пирса и в базисе $\{\to, -\}$. Записать ответы в виде формул.

В заданиях **6.3.4** и **6.3.5** составить таблицу Поста и найти все базисы систем из следующих функций.

6.3.4. $f_1 = x \leftarrow y$, $f_2 = \bar{x}$, $f_3 = 0$, $f_4 = x \vee y$, $f_5 = x \sim y$.

6.3.5. $f_1 = x \vee (y \sim z)$, $f_2 = x(x \oplus y)$, $f_3 = (x \to z)y$, $f_4 = \bar{x} \mid (x \vee y)$.

Ответы.

6.3.1. а) $\overline{x} = x \downarrow x,\ x \vee y = \left(x \downarrow y\right) \downarrow \left(x \downarrow y\right),\ xy = \left(x \downarrow x\right) \downarrow \left(y \downarrow y\right).$

б) $x \vee y = \overline{x} \to y,\ xy = \overline{x \to \overline{y}}.$ **6.3.3.** В базисе Пирса:

$f = a \downarrow a,\ a = \left(\left(\left(\left(x_1 \downarrow x_1\right) \downarrow \left(x_2 \downarrow x_2\right)\right) \downarrow \left(\left(x_1 \downarrow x_1\right) \downarrow \left(x_2 \downarrow x_2\right)\right)\right) \downarrow \left(x_3 \downarrow x_3\right)\right) \downarrow$

$\downarrow \left(x_1 \downarrow x_2\right)$. В базисе $\{\to, -\}$: $f = ((\overline{x_1 \to \overline{x}_2}) \to \overline{x}_3) \to \overline{(\overline{x}_1 \to x_2)}$.

6.3.4. Базисы: $\{f_1, f_2\}, \{f_1, f_5\}, \{f_2, f_4\}, \{f_3, f_4, f_5\}$.

6.3.5. Базисы: $\{f_1, f_2\}, \{f_2, f_4\}$.

ЗАНЯТИЕ 7

КОМБИНАТОРИКА

7.1. Основные понятия.

7.1.1. Правило суммы. Если объект x может быть выбран m способами, а объект y - другими n способами, то выбор "либо x, либо y" может быть осуществлен $m+n$ способами.

7.1.2. Правило произведения. Если объект x может быть выбран m способами, и после каждого из таких выборов объект y может быть выбран n способами, то выбор упорядоченной пары (x,y) может быть произведен mn способами.

7.1.3. Набор элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}$ из множества $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ называется *выборкой объема k из n элементов* или (n, k) *выборкой*.

7.1.4. Выборка называется *упорядоченной*, если задан порядок элементов в выборке. Если порядок элементов не является существенным, то выборка называется *неупорядоченной*.

7.1.5. Упорядоченная (n, k) выборка, в которой элементы могут повторяться называется (n, k) *размещением с повторениями*. Число (n, k) размещений с повторениями обозначается через $\overline{A}_n^k$.

7.1.6. Упорядоченная (n, k) выборка, в которой элементы попарно различны называется (n, k) *размещением без повторений* или просто (n, k) *размещением*. (n, n) размещение без повторений называется *перестановкой* множества A. Число (n, k) размещений обозначается через A_n^k, а число перестановок через P_n.

7.1.7. Неупорядоченная (n, k) выборка, в которой элементы могут повторяться называется (n, k) *сочетанием с повторениями*. Число (n, k) сочетаний с повторениями обозначается через $\overline{C}_n^k$.

7.1.8. Неупорядоченная (n, k) выборка, в которой элементы попарно различны называется (n, k) *сочетанием без повторений* или просто (n, k) *сочетанием*. Число (n, k) сочетаний обозначается через C_n^k.

7.1.9. Справедливы утверждения**:**

а) $\bar{A}_n^k = n^k$**,** (1)

б) $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1)$**,** (2)

в) $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$**,** (3)

г) $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$. (4)

7.1.10. Теорема: пусть имеется множество A, состоящее из n элементов. Рассмотрим разбиение этого множества на непересекающиеся подмножества такое, что в первое подмножество попадет n_1 элементов, во второе - n_2 элементов, и т.д., в последнее k-е подмножество попадет n_k элементов, причем $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Тогда число таких способов разбиения множества A равно

$$N = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}. \qquad (5)$$

7.2. Решение типовых задач.

7.2.1. В магазине «Все для чая» есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

Решение. Представим множества чашек и блюдец в виде двух множеств A и B с элементами: $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, \quad B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Очевидно, что тогда задача сводится к нахождению количества всех пар вида $(a_i, b_j), \quad i = 1,2,3; \quad j = 1,2$. Ясно, что таких пар будет $5 \cdot 3 = 15$.

Действительно первый элемент пары можно выбрать 5 способами, а второй элемент – 3 способами, следовательно, по правилу произведения получаем, что количество указанных пар равно 15.

7.2.2. В Стране Чудес есть четыре города: А, Б, В и Г. Из города А в город Б ведет 6 дорог, а из города Б в город В – 4 дороги, Из города А в город Г – две дороги, и из города Г в город В – тоже две дороги. Сколькими способами можно проехать от А до В?

Решение. Из города А в город В можно доехать либо через город Б, либо через город Г. В первом случае по правилу произведения получаем $6 \cdot 4 = 24$ способа добраться из А в В. Во втором случае таких способов будет $2 \cdot 2 = 4$. Тогда по правилу суммы получаем, что число всех способов добраться из города А в город В будет 28.

7.2.3. Сколько трехкнопочных комбинаций существует на кодовом замке (все три кнопки нажимаются одновременно), если на нем всего 10 цифр?

Решение. Задача сводится к нахождению всех комбинаций из трех цифр от 0 до 9. Ясно, что каждую из цифр можно выбрать 10 способами, поэтому по правилу произведения получим, что число всех комбинаций равно $10 \cdot 10 \cdot 10 = \overline{A}_{10}^{3} = 1000$.

7.2.4. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв А, Б и В. Словом является любая непустая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

Решение. Очевидно, что количество слов в языке племени равно сумме (по правилу суммы) слов, состоящих из одной, двух, трех или четырех букв. Количество слов из одной букв равно трем. Далее для того, чтобы найти количество слов из двух букв заметим, что обе буквы можно выбрать 3 способами, следовательно, по правилу произведения таких слов будет 9. Аналогично слов из 3 и 4 букв равно 27 и 81 соответственно. Получаем ответ: всего будет 3+9+27+81=120 слов.

7.2.5. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Капитана можно выбрать из 11 человек 11 способами. После этого заместителя можно выбрать 10 способами. Тогда по правилу произведения всего способов выбрать этих двух человек равно 110 или A_{11}^{2} (проверьте это самостоятельно).

7.2.6.Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Первую ладью можно поставить на доску 64 способами, тогда вторая ладья не может находиться на одной линии с первой, то есть она не может находиться в 15 клетках. Тогда число способов поставить вторую ладью – 64-15=49. Следовательно, по правилу произведения получаем ответ $64 \cdot 49 = 3136$ способов.

7.2.7. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если: а) цифры не повторяются; б) цифры могут повторяться;
в) используются только нечетные цифры и могут повторяться; г) должны получиться только нечетные числа и цифры могут повторяться.

Решение.
а). Так как на первом месте не может находиться цифра 0, то имеется 5 возможностей для выбора 1-й цифры. Далее вторая цифра не должна совпадать с первой, поэтому ее можно выбрать также пятью способами (цифра 0 допускается). Следующую цифру можно выбрать четырьмя способами и последнюю – тремя. По правилу произведения получаем ответ - $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ чисел.

б). Вновь для первой цифры имеется пять возможностей, а все остальные цифры можно выбрать 6 способами, то есть получаем $5 \cdot 6^3 = 1080$ чисел.

в). В данном случае все цифры можно выбрать тремя способами, то есть ответ $3^4 = 81$ число.

г). Так должны получиться нечетные числа, то они могут оканчиваться лишь цифрами 1,3,5. Тогда первая цифра может быть выбрана пятью способами, вторая и третья – шестью, а последняя - тремя. В итоге имеем $5 \cdot 6^2 \cdot 3$ или 540 чисел.

7.2.8. Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг – это сборники стихотворений, так, чтобы сборники стояли рядом?

Решение. Так как сборники должны стоять рядом, то их можно рассмотреть как одну книгу. Закодируем все возможности расстановки сборников на полке в виде числа из одного нуля и семи единиц (то есть оставшихся книг). Например, число 01111111 означает, что сборники стоят левее всех остальных книг, а 10111111 означает, что сборники стоят между первой и второй книгой не сборником. Таких чисел будет 8. То есть, имеем 8 серий из $7! \cdot 5!$ перестановок. Действительно, если мы зафиксировали расположение сборников между другими книгами, то мы можем менять местами эти сборники между собой и также менять местами между собой оставшиеся книги. Следовательно, всего будет $8 \cdot 7! \cdot 5! = 4838400$ способов.

7.2.9. Слово – любая конечная последовательность букв русского алфавита. Выясните, сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слов
а) «ВЕКТОР»;
б) «БИССЕКТРИСА».

Решение.
а). Очевидно, что в этом случае (так как все буквы различны), то число различных слов равно числу перестановок букв слова «ВЕКТОР», то есть равно 6!=720.

б). В данном случае есть повторяющиеся буквы. Пронумеруем все места для букв нашего слова (их будет 11). Разобьем множество этих мест на подмножества, которые будут содержать номера мест для одинаковых букв. Например, для буквы «С» нужно зарезервировать три места (например, 1, 3 и 7), для буквы «И» - два места (например, 2 и 10), для остальных букв - по одному месту. Таким образом, множество всех мест разбилось на непересекающиеся подмножества, причем в первое множество попадет три элемента, во второе – два и т.д. Тогда по формуле (5) получим, что число всех таких разбиений, то есть слов, составленных из букв слова «БИССЕКТРИСА» равно:

$$N = \frac{11!}{3! \cdot 2! \cdot 1!^6} = 3326400 \text{ слов.}$$

7.2.10. Восемь авторов должны написать книгу из шестнадцати глав. Сколькими способами возможно распределение материала между авторами, если два человека напишут по три главы, четыре – по две, два – по одной главе книги?

Решение. Будем считать, имеется 8 «ящиков» (то есть авторов), по которым необходимо разложить 16 «шаров» (то есть главы), причем в первый и второй ящики должно быть положено по три шара, в третий, четвертый, пятый и шестой по два шара и в оставшиеся два ящика необходимо положить по одному шару. Используем формулу (5):

$N = \dfrac{16!}{3!^2 \cdot 2!^4} = 36324290000$ способов**.**

7.2.11. Сколько слов можно составить из пяти букв А и не более чем из трех букв Б?

Решение. Найдем сколько слов можно составить из пяти букв А и одной, двух или трех букв Б, а затем применим правило суммы. Ясно, что число слов, содержащих одну букву Б равно пять (то есть это слова вида БААААА, АБАААА и т.д.). Далее, рассмотрим слова вида ББААААА, АБААААБ и т.д., состоящие из пяти букв А и двух букв Б. Ясно, что если обозначить букву А нулем, а букву Б единицей, то получим всевозможные наборы из пяти нулей и двух единиц. Таких наборов будет C_7^2. Аналогично слов с тремя буквами Б будет C_8^3. Следовательно общее число слов равно $C_5^0 + C_6^1 + C_7^2 + C_8^3 = 84$. Здесь мы записали все числа в виде биномиальных коэффициентов.

7.2.12. Сколькими способами можно разложить десять одинаковых монет по трем различным карманам?

Решение. Будем нумеровать монеты следующим образом: если данная монета кладется в карман под номером *k*, то ее номер равен *k*. Тогда мы получим взаимно однозначное соответствие между множеством способов распределения монет по карманам и множеством выборок из трехэлементного множества {1,2,3} по 10 элементов с повторениями (например, 1111222333, 1222222233 и т.д.). Очевидно, что таких выборок будет $\overline{C}_3^{10}$ или $C_{10+3-1}^{10} = C_{12}^{10} = 66$

7.2.13. Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение

$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = N$?

Решение. Вновь имеем аналогичную задачу, если рассмотреть *m* «карманов» и *N* «монет». Если, например, *N*=10, *m*=3 и $x_1 = 4, x_2 = 4, x_3 = 2$, то это соответствует выборке 1111222233. Следовательно, ответом будет число $\overline{C}_m^N$.

7.2.14. На танцплощадке собрались *N* юношей и *N* девушек. Сколькими способами они могут разбиться на пары для участия в очередном танце?

Решение. Пронумеруем юношей натуральными числами от 1 до N. Тогда мы можем считать, что имеется N «ящиков», пронумерованных от 1 до N и N различных шаров. При этом необходимо разложить шары по ящикам так, чтобы в каждом из них было ровно по одному шару. Таким образом, имеем число способов равное $N!$

7.2.15. Найти число кратчайших путей, идущих по линиям координатной сетки из начала координат в точку A(12;7).

Решение. Поставим в соответствие каждому кратчайшему пути последовательность из нулей и единиц: ноль будет означать сдвиг на единицу вдоль оси абсцисс, а единица - вдоль оси ординат. Например, отмеченному на рисунке пути соответствует последовательность 0010001100010000111. Таким образом, множеству кратчайших путей взаимно однозначно соответствует множество последовательностей из 12 нулей и 7 единиц. Количество таких последовательностей равно

$$C_{19}^{7} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{7!} = 50388.$$

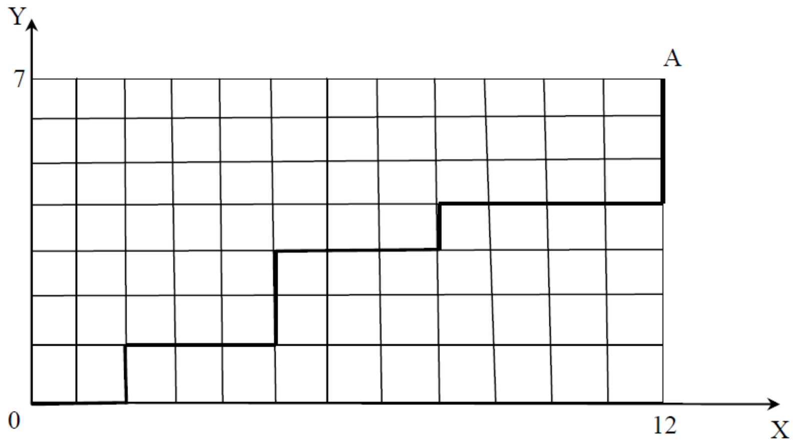


Рис. 7.1

7.2.16. Сколько у выпуклого n-угольника

а) диагоналей;

б) неупорядоченных пар диагоналей, пересекающихся во внутренней точке?

в) чему примерно равна при больших n вероятность того, что две случайно взятые диагонали пересекаются во внутренней точке?

Решение.

а) Диагональ задаётся двумя своими концами, это любая неупорядоченная пара несоседних вершин. Первую вершину можно выбрать n способами, а вторую – (n-3) способами. Следовательно, общее число диагоналей равно $n(n-3)/2$. Здесь мы учли, что $n(n-3)$ – это число всех <u>упорядоченных</u> пар несоседних вершин, тогда число неупорядоченных пар будет в два раза меньше.

б) Неупорядоченным парам диагоналей, пересекающихся во внутренней точке, взаимно однозначно соответствуют неупорядоченные четвёрки вершин многоугольника (концы диагоналей). Таким образом, искомое количество таких диагоналей равно C_n^4.

в) Согласно классической вероятностной схеме, данная вероятность равна отношению числа (неупорядоченных) пар диагоналей, пересекающихся во внутренней точке к числу всех возможных неупорядоченных пар диагоналей. Используя результат п. а) и б), получаем:

$$P(n)=\frac{C_n^4}{C^2_{\frac{n(n-3)}{2}}}=\frac{n!}{4!(n-4)!}:\frac{\frac{n(n-3)}{2}\left(\frac{n(n-3)}{2}-1\right)}{2}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}:\frac{(n^2-3n)(n^2-3n-2)}{8}=\frac{(n-1)(n-2)}{3(n^2-3n-2)}$$

При больших n эта вероятность приближённо равна предельному значению

$$\lim_{n\to\infty}P(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n-2)}{3(n^2-3n-2)}=\frac{1}{3}.$$

7.3. Задачи для самостоятельного решения.

7.3.1. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «КРУЖОК»?

7.3.2. В стране 20 городов, каждые два из которых соединены авиалинией. Сколько авиалиний в этой стране?

7.3.3. Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну перчатку на правую руку так, чтобы эти перчатки были различных размеров?

7.3.4. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску двух слонов так, чтобы они не били друг друга?

7.3.5. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

7.3.6. Сколькими способами можно построить в одну шеренгу игроков двух футбольных команд (каждая по 11 человек) так, чтобы при этом два футболиста одной команды не стояли рядом?

7.3.7. На полке стоят 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)?

7.3.8. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составляются всевозможные пятизначные числа: не содержащие одинаковых цифр. Определить количество чисел, в которых есть цифры 2, 4 и 5 одновременно.

7.3.9. На плоскости дано n точек, из которых k точек лежат на одной прямой; любые три из остальных точек не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести через эти n точек?

7.3.10. В шахматном турнире участвуют 10 шахматистов. Определить количество расписаний первого тура (расписания считаются различными, если они отличаются участниками хотя бы одной партии; цвет фигур и номер доски не учитываются).

7.3.11. Сколькими способами натуральное число N можно представить в виде суммы k натуральных слагаемых (представления, различающиеся лишь порядком слагаемых, считаются разными)?

7.3.12. Сколько разных делителей (включая 1 и само число) имеет число 35 × 54?

7.3.13. 52 карты (в них 4 масти) раздаются 4-м игрокам, каждому по 13 карт. Сколькими способами их можно раздать, если
а) один из игроков получит все 13 карт единой масти;
б) каждый игрок получит туза;
в) все тузы попадут к одному из игроков;
г) два определенных игрока не получат ни одного туза.

Ответы. 7.3.1. 8. **7.3.2.** 190. **7.3.3.** 30. **7.3.4.** 3472. **7.3.5.** 884375. **7.3.6.** $2\cdot 11!^2$ **7.3.7.** 325. **7.3.8.** 1800. **7.3.9.** $C_{n-k}^2+k(n-k)+1$**. 7.3.10.** 945**. 7.3.11.** $\overline{C}_k^{N-k}=C_{N-1}^{N-k}$**.** **7.3.12.** 32. **7.3.13. а)** $16\dfrac{39!}{13!^3}$; **б)** $4!\dfrac{48!}{12!^4}$; **в)** $4\dfrac{48!}{9!\cdot 13!^3}$; **г)** $\dfrac{48!\cdot 26!}{22!\cdot 13!^4}$.

ЗАНЯТИЕ 8

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ. МАРШРУТЫ И ПУТИ. КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ. ИЗОМОРФИЗМ

8.1. Основные понятия

8.1.1. *Графом* называется набор точек (эти точки называются вершинами), некоторые из которых объявляются *смежными* (или *соседними*). Считается, что смежные вершины соединены между собой *ребрами* (или *дугами*). Граф обозначается как $G(X,\Gamma)$, где X - множество вершин, Γ - множество ребер или дуг графа.

8.1.2. Граф называется *ориентированным* (или *орграфом*), если все связи $(u,v)\in\Gamma$, где $u,v\in X$ являются упорядоченными (тогда (u,v) дуга). Это означает, что в орграфе некоторая вершина может быть соединена с другой вершиной, а обратного соединения нет. В случае если все связи в графе неупорядоченные, то граф называется *неориентированным* графом или просто графом (т.е. любая связь (u,v) – ребро). Если вершина x является началом или концом ребра (дуги) e, то говорят, что x и e *инцидентны*.

8.1.3. Помимо этого, в теории графов рассматриваются также *мультиграфы* – это такие графы, в которых могут быть *петли* (т. е. некоторая вершина соединена сама с собой ребром) или некоторые пары вершины могут быть соединены между собой несколькими ребрами или дугами.

8.1.4. *Маршрут* (*путь*) в графе (орграфе) – это последовательность соседних (смежных) вершин и ребер (дуг), их соединяющих. Маршрут (путь) в графе (орграфе) называется *циклом* (*контуром*), если в нем первая вершина совпадает с последней и ребра (дуги) не повторяются. Незамкнутый маршрут (путь), в котором все ребра (дуги) попарно различны - это *цепь*. *Простая цепь* - это цепь, в которой все вершины попарно различны. *Простой цикл* (*контур*) - это цикл (контур), в котором все вершины, кроме первой и последней попарно различны.

8.1.5. *Степень вершины* – это число ребер, входящих в эту вершину. *Полустепень исхода* в орграфе - число дуг, выходящих из данной вершины, а *полустепень захода* - число дуг, входящих в эту вершину.

8.1.6. Граф (орграф) G называется *связным* (*сильно связным*), если для любых его вершин существует соединяющий их маршрут (путь). Рассмотрим разбиение множества вершин графа G на непересекающиеся подмножества: $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k$ такое, что вершины в каждом множестве X_i взаимно достижимы, а вершины из разных X_i не взаимно достижимы. Тогда подграфы $G_1(X_1, \Gamma_1), G_2(X_2, \Gamma_2), \ldots, G_k(X_k, \Gamma_k)$ графа G, где множество Γ_i состоит из всех ребер (дуг) графа G таких, что $(u, v) \in \Gamma_i \Leftrightarrow u, v \in X_i$, называются *компонентами связности* (*сильной связности*) графа (орграфа) G.

8.1.7. Два графа $G_1(X_1,\Gamma_1)$ и $G_2(X_2,\Gamma_2)$ называются *изоморфными* если существует такое взамно-однозначное соответствие между множествами вершин X_1 и X_2, которое сохраняет соответствие между ребрами (дугами). Практически это означает, что изоморфные графы отличаются только нумерацией вершин.

8.2. Решение типовых задач.

8.2.1. Написать матрицы смежности и инцидентности для следующих графов:

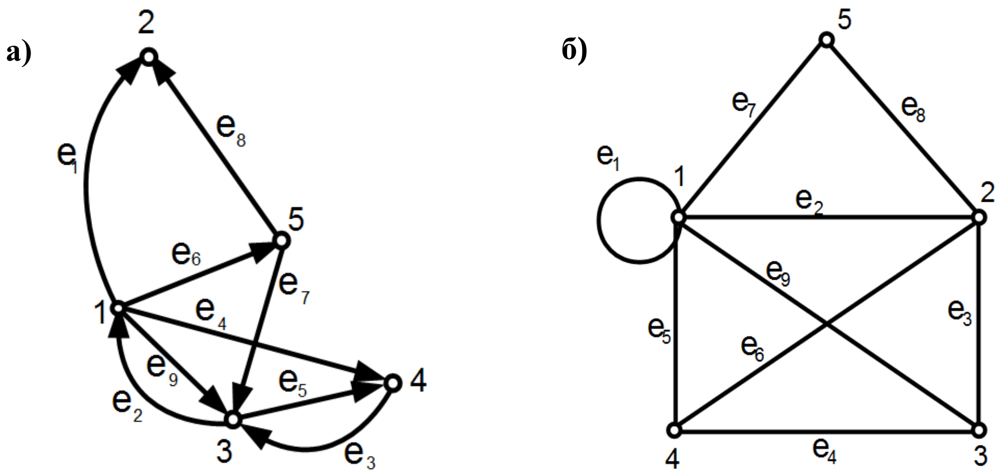


Рис. 8.1

Решение. Определение матриц смежности и инцидентности даны в книгах [3,4,6]. Для графа а) имеем: из вершины 1 выходят дуги, ведущие в 2,3,4,5. Поэтому элементы первой строки матрицы смежности равны 1, кроме элемента a_{11}, так как нет петли в вершине 1. Аналогично заполняем оставшиеся элементы матрицы. Получаем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Далее рассмотрим матрицу инцидентности для графа на рис. 1а. Она имеет размер (5×9), так как граф имеет 5 вершин и 9 дуг. Удобно заполнять матрицу по столбцам. Так как первая дуга выходит из вершины 1 и заходит в вершину 2, то элементы матрицы инцидентности $b_{11} = 1, \quad b_{21} = -1$. Остальные элементы первого столбца равны 0. Аналогично, так как дуга e_2 выходит из третьей вершины и заходит в первую, то во втором столбце $b_{12} = -1, \quad b_{32} = 1$. Остальные элементы второго столбца нулевые. Аналогично заполняются другие столбцы. В итоге получаем

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для графа б) элемент a_{ij} матрицы смежности равен 1, в том случае, если есть ребро, соединяющее вершины i и j (матрица симметрична). Матрица инцидентности заполняется аналогично первому примеру с той разницей, что ее элементы равны лишь 0 и 1. При этом петле на графе соответствует нулевой столбец матрицы *B*. Таким образом, имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.2.2. Определить: сколько существует маршрутов длины три дуги из вершины 1 в вершину 5 в графе.

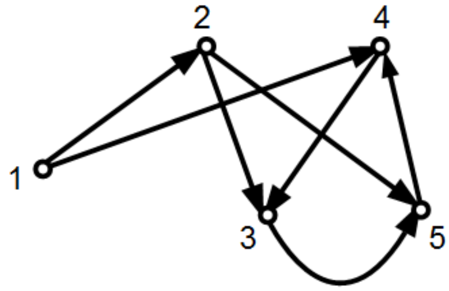


Рис. 8.2

Задачу решить алгебраически, без использования рисунка.

Решение. Рассмотрим матрицу смежности графа

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Возведем ее в квадрат, а затем в куб. Получим

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&2&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1&2\\0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Видим, что элемент последней матрицы (1,5) равен 2. Это значит, что существует два пути длины три дуги из вершины 1 в вершину 5. Действительно, из рисунка видим, что это пути 1-2-3-5 и 1-4-3-5.

8.2.3. Определить: есть ли в орграфе с данной матрицей смежности контур.

а) $\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$

Решение.

а). Возведем матрицу смежности орграфа в квадрат. Получим

$$\begin{pmatrix}0&2&1&1\\0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

Видим, что на главной диагонали стоят единицы в третьей и четвертой строке. Поэтому в графе есть один контур из двух дуг, проходящий через вершину 3 и один контур, проходящий через вершину 4. Из матрицы смежности видно, что имеется путь 3-4-3, т.е. контур, проходящий через указанные вершины.

б). Возведем матрицу смежности орграфа в квадрат. Получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что на главной диагонали стоят нулевые элементы. Поэтому в графе нет контуров, состоящих из двух дуг. Возведем матрицу в куб.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем один контур из трех дуг, проходящий через вершину 1 и один контур, проходящий через вершину 3 и аналогично через 4. Из матрицы смежности видно, что имеется путь 1-3-4-1, т.е. контур, проходящий через указанные вершины.

8.2.4. Для графа а) из задачи 8.2.1 определить степени захода (исхода) каждой вершины, а для графа б) степени вершин. Проверить теорему Эйлера.

Решение. В случае графа на рисунке а):

$$\delta_+(1)=4, \delta_-(1)=1; \quad \delta_+(2)=0, \delta_-(2)=2;$$

$$\delta_+(3)=2, \delta_-(3)=3; \quad \delta_+(4)=1, \delta_-(4)=2;$$

$$\delta_+(5)=2, \delta_-(5)=1$$

Таким образом,

$$\delta_+(1)+\delta_+(2)+\delta_+(3)+\delta_+(4)+\delta_+(5)=9=m,$$

$$\delta_-(1)+\delta_-(2)+\delta_-(3)+\delta_-(4)+\delta_-(5)=9=m,$$

где m - число дуг графа. В случае графа на рисунке б) имеем (вклад петли равен 2):

$$\delta(1)=6, \delta(2)=4, \delta(3)=3, \delta(4)=3, \delta(5)=2.$$

По **теореме Эйлера** для орграфа сумма степеней захода (исхода) всех вершин равна числу дуг графа, а для неориентированного графа сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер. В нашем случае получаем:

$$\delta(1)+\delta(2)+\delta(3)+\delta(4)+\delta(5)=18=2m,$$

где m - число ребер графа. Следовательно, теорема Эйлера справедлива.

8.2.5. Сколько ребер имеется у полного графа K_n (это граф из n вершин, причем любые две вершины соединены ребром).

Решение. Очевидно, что степень каждой вершины графа равна (n-1). По теореме Эйлера сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер. Поэтому

$$n(n-1) = 2m \Rightarrow \quad m = \frac{n(n-1)}{2}.$$

8.2.6. Указать пары изоморфных графов. Решение обосновать.

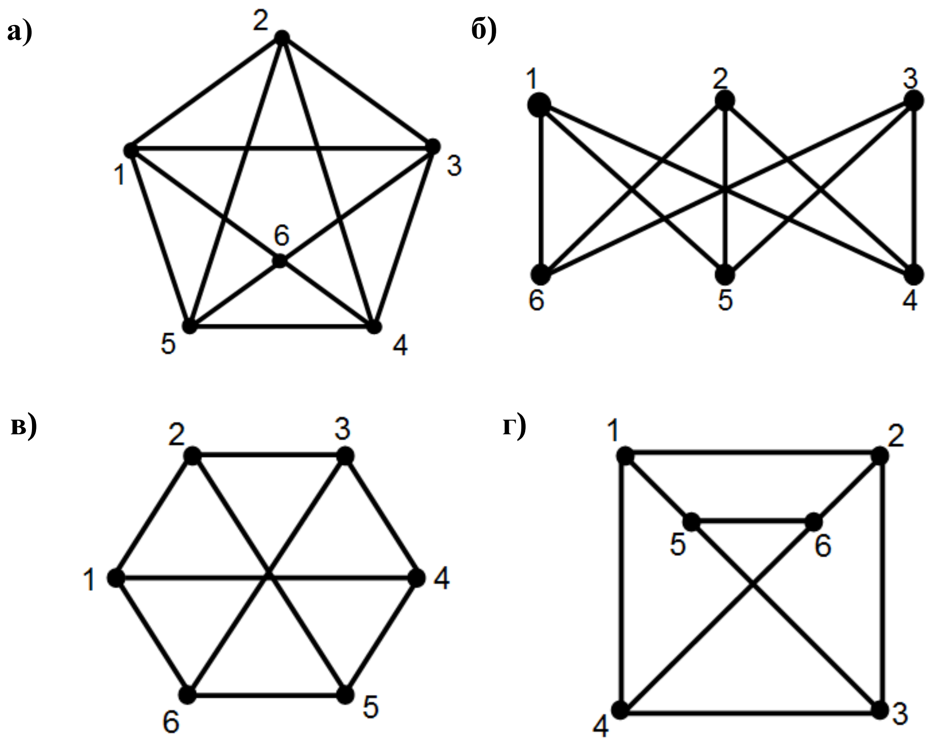


Рис. 8.3

Решение. Графы б) - г) изоморфны. Имеем соответствие вершин для графов б) и в): 1-1, 2-5, 3-3, 4-4, 5-2, 6-6. Для графов б) и г) соответствие вершин следующее: 1-1, 2-6, 3-3, 4-4, 5-5, 6-2. Граф на рис. а) не изоморфен остальным графам, так как степени вершин у него равны 4, а не 3.

8.2.7. Найти компоненты сильной связности орграфов, заданных матрицей смежности. Задачу решить алгебраически, не используя рисунок графа.

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, **б)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Рассмотрим граф пункта а). Решение задачи состоит из нескольких этапов.

1). Находим матрицу достижимости графа по формуле

$$T = E \vee A \vee A_*^2 \vee A_*^3 \vee \ldots \vee A_*^{n-1},$$

где n – число вершин (в нашем случае n=4). Звездочка означает, что рассматривается булево произведение матриц, то есть матрицы умножаются обычным способом, но сложение заменяется на дизъюнкцию (см. занятие 3). Операция дизъюнкции в формуле для матрицы T означает поэлементное логическое сложение матриц. В нашем случае

$$A_*^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_*^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2). Находим матрицу сильной связности по формуле

$$S = T \wedge T^T,$$

где конъюнкция означает поэлементное умножение матриц. В нашем примере

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3). По матрице S находим вершины, принадлежащие одной компоненте сильной связности (КС) графа. А именно, вершины, которым соответствуют строки матрицы, содержащие цифру 1 в столбце j, образуют множество вершин графа, принадлежащих одной КС, содержащей вершину x_j.

Например, в столбце 1 имеется только одна единица, поэтому первая КС графа содержит одну вершину - x_1. Аналогично, вторая КС содержит только вершину x_2. Так как в столбце 3 стоят единицы в последних двух позициях, то вершины x_3 и x_4 принадлежат одной КС. Таким образом, у графа имеется три КС: $\{x_1\},\{x_2\},\{x_3, x_4\}$. Проверьте по рисунку графа, что это действительно так.

Рассмотрим граф пункта б). По аналогии с предыдущим примером имеем

$$A_*^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_*^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$S=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&1\\0&0&1&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&0\\1&1&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Таким образом, у графа имеется четыре КС: $\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\}$. Ответ проверьте по рисунку графа.

8.3. Задачи для самостоятельного решения.

8.3.1. Написать матрицы смежности и инцидентности для следующих графов:

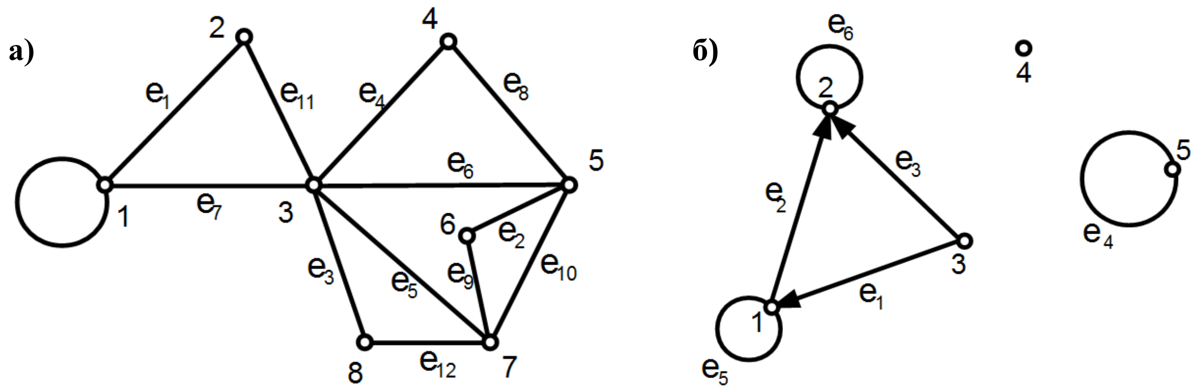


Рис. 8.4

8.3.2. Определить: сколько существует путей длины три ребра, идущих из вершины 1 в вершину 4 в графе

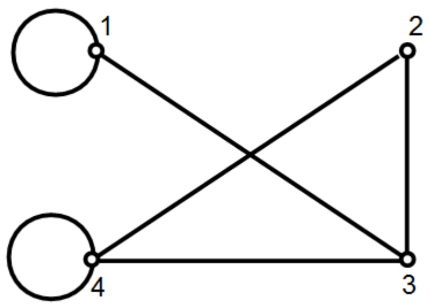


Рис. 8.5

8.3.3. Определить: есть ли в орграфе, с данной матрицей, смежности контур.

а) $A=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&0&0\\1&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ **б)** $A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ **в)** $A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$

8.3.4. Определить степени вершин графа, заданного матрицей смежности. Задачу решить без использования рисунка.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.3.5. Существует ли граф, сумма степеней всех вершин которого равна 17?

8.3.6. Дан граф из 5 вершин и 8 ребер. Известно, что у него четыре вершины имеют степень 2 и одна - 4. Чему равна степень оставшейся вершины?

8.3.7. Для графов из каждой пары графов, изображенных на рисунке, выяснить изоморфны ли они. Ответ обосновать.

а)

б)

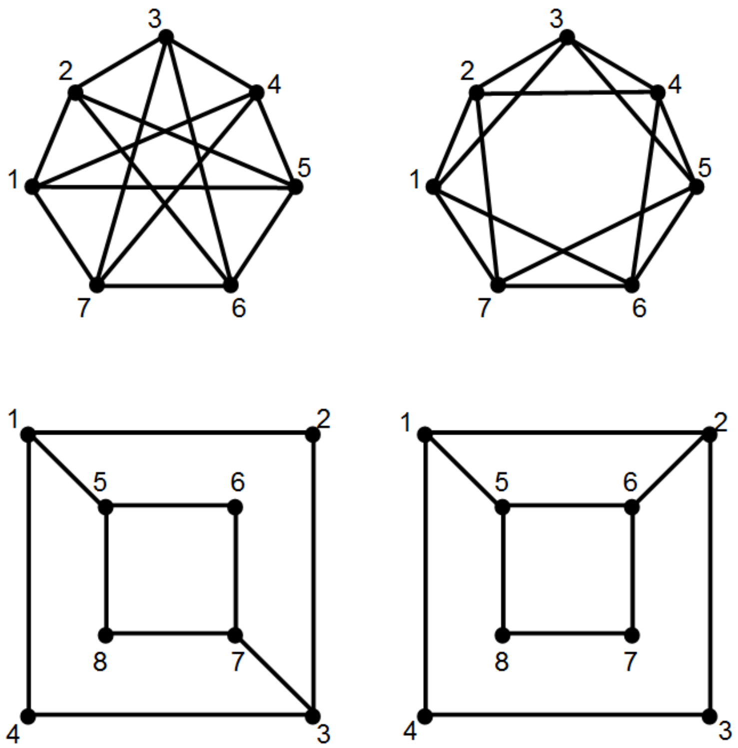


Рис. 8.6

8.3.8. Найти компоненты сильной связности орграфов, заданных матрицей смежности. Задачу решить алгебраически, не используя рисунок графа.

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, **б)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответы.

8.3.1. а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8.3.2. 3 пути. **8.3.3**. а) есть два контура 1-2-1, 1-4-2-1; б) контур 1-3-2-4-1; в) нет контуров. **8.3.4.** $\delta(1) = 3, \delta(2) = 4, \delta(3) = 2, \delta(4) = 2, \delta(5) = 3$. **8.3.5.** не существует. **8.3.6.** 4. **8.3.7.** а) изоморфны, б) не изоморфны**.** **8.3.8.** а) это сильно связный граф; б) три компоненты: $\{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_4\}$.

ЗАНЯТИЕ 9

ЗАДАЧА О КРАТЧАЙШЕМ ПУТИ В НАГРУЖЕННОМ ГРАФЕ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ВЕСАМИ РЕБЕР

9.1. Основные понятия

9.1.1. Пусть задан граф, каждому ребру (дуге) (s, q) которого поставлено в соответствие число $\omega(s, q)$, называемое *длиной ребра (дуги)*.

9.1.2. *Длиной пути* называется сумма длин ребер (дуг), составляющих путь.

9.1.3. Задача о кратчайшем пути ставится так. Найти длину кратчайшего пути (пути минимальной длины) от фиксированной вершины s до какой-либо другой вершины q и найти последовательность вершин между s и вершиной q (то есть найти кратчайший путь).

9.2. Решение типовых задач методом Дейкстры.

Будем считать, что веса всех ребер неотрицательны. Тогда применим алгоритм **Дейкстры** [1,3,6]. При этом в графе могут быть циклы.

9.2.1. С помощью алгоритма Дейкстры найти путь минимального веса между вершинами s и t в нагруженном графе.

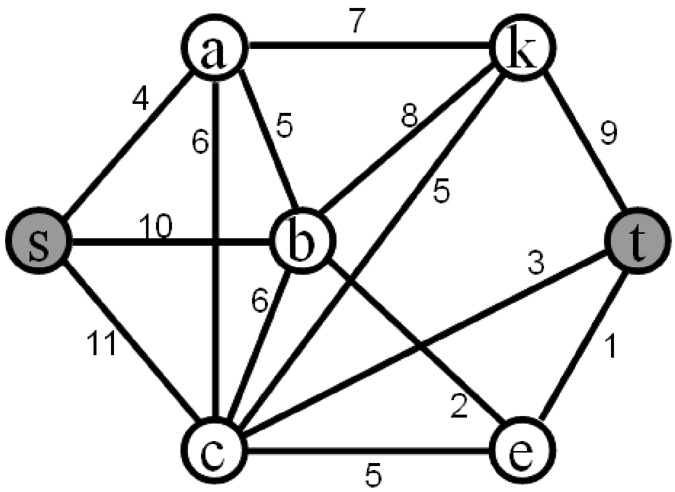


Рис. 9.1

Решение. Приписываем следующие метки вершинам:
$d(s) = 0^*, \quad d(a) = d(b) = d(c) = d(e) = d(k) = d(t) = \infty$

1 итерация: текущая вершина с постоянной меткой $y = s$ (поэтому у метки s проставлена звездочка), далее расставляем метки у вершин, смежных с s

$d(a) = 4^* \,(s)$

$d(b) = 10\,(s)$

$d(c) = 11\,(s)$

$d(e) = d(k) = d(t) = \infty$

В скобках указана та вершина, через которую модифицируется метка рассматриваемой вершины (на первой итерации везде стоит вершина s). Звездочкой отмечена наименьшая метка из чисел 4, 10, 11. При этом данная метка будет постоянной (в нашем случае 4) и вершина a в дальнейшем не рассматривается (выбывает).

2 итерация: текущая вершина с постоянной меткой $y = a$, далее меняем метки у вершин с временными метками

$d(b) = \min(10, 4+5) = 9^*$ (a)

$d(c) = \min(11, 4+6) = 10$ (a)

$d(e) = \infty$

$d(k) = \min(\infty, 4+7) = 11$ (a)

$d(t) = \infty$

Метка a, стоящая в скобке в строчке для $d(b)$, означает, что путь из s в b, проходящий через вершину a, короче пути, состоящего из одной дуги $s-b$. Аналогично в двух других случаях (2 и 4 строка).

3 итерация: текущая вершина с постоянной меткой $y = b$,

$d(c) = \min(10, 9+6) = 10^*$ (a)

$d(e) = \min(\infty, 9+2) = 11$ (b)

$d(k) = \min(11, 9+8) = 11$ (a)

$d(t) = \infty$

4 итерация: текущая вершина с постоянной меткой $y = c$,

$d(e) = \min(11, 10+5) = 11^*$ (b)

$d(k) = \min(11, 10+5) = 11$ (a)

$d(t) = \min(\infty, 10+3) = 13$ (c)

Имеем две одинаковые метки с минимальным значением, поэтому выбираем любую из них (в данном случае e)

5 итерация: текущая вершина с постоянной меткой $y = e$,

$d(k) = 11^*$ (a)

$d(t) = \min(13, 11+1) = 12$ (e)

6 итерация: текущая вершина с постоянной меткой $y = k$,

$d(t) = \min(12, 11+9) = 12^*$ (e)

Вершина t имеет постоянную метку, следовательно, 12 – длина кратчайшего пути от s до t. Сам путь находим по меткам, расставленным в скобках. Для этого составим таблицу, в которую заносится протокол работы алгоритма. Жирным шрифтом показаны длины путей до соответствующих вершин и метки "предшествующих" вершин. Из таблицы видим, что вершине t предшествует e, далее e предшествует b, аналогично b предшествует a и, наконец a предшествует s. Таким образом, имеем путь s-a-b-e-t.

a	b	c	e	k	t
$4/s$	$10/s$	$11/s$	∞	∞	∞
	$\mathbf{9/a}$	$10/a$	∞	$11/a$	∞
		$\mathbf{10/a}$	$11/b$	$11/a$	∞
			$\mathbf{11/b}$	$11/a$	$13/c$
				$\mathbf{11/a}$	$12/e$
					$\mathbf{12/e}$

9.2.2. С помощью алгоритма Дейкстры найти дерево путей минимального веса из вершины x_1 до остальных вершин, если имеется следующий граф

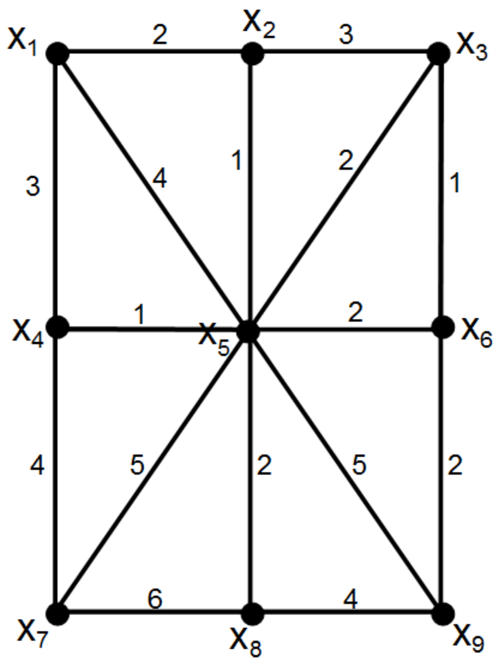


Рис. 9.2

Решение. По аналогии с предыдущей задачей полагаем:
$d(x_1)=0^*,\quad d(x_2)=d(x_3)=d(x_4)=d(x_5)=d(x_6)=d(x_7)=d(x_8)=d(x_9)=\infty.$

1 итерация: текущая вершина с постоянной меткой $y=x_1$, далее расставляем метки у вершин, смежных с x_1

$d(x_2) = 2^* \ (x_1)$

$d(x_3) = \infty$

$d(x_4) = 3(x_1)$

$d(x_5) = 4(x_1)$

$d(x_6) = d(x_7) = d(x_8) = d(x_9) = \infty$

2 итерация: текущая вершина с постоянной меткой $y = x_2$, далее меняем метки у вершин с временными метками

$d(x_3) = \min(\infty, 2+3) = 5 \ (x_2)$

$d(x_4) = 3^*(x_1)$

$d(x_5) = \min(4, 2+1) = 3(x_2)$

$d(x_6) = d(x_7) = d(x_8) = d(x_9) = \infty$

3 итерация: текущая вершина с постоянной меткой $y = x_4$,

$d(x_3) = 5 \ (x_2)$

$d(x_5) = \min(3, 3+1) = 3^*(x_2)$

$d(x_6) = \infty$

$d(x_7) = \min(\infty, 3+4) = 7(x_4)$

$d(x_8) = d(x_9) = \infty$

4 итерация: текущая вершина с постоянной меткой $y = x_5$,

$d(x_3) = \min(5, 3+2) = 5^{\ *}(x_2)$

$d(x_6) = \min(\infty, 3+2) = 5(x_5)$

$d(x_7) = \min(7, 3+5) = 7(x_4)$

$d(x_8) = \min(\infty, 3+2) = 5(x_5)$

$d(x_9) = \min(\infty, 3+5) = 8(x_5)$

5 итерация: текущая вершина с постоянной меткой $y = x_3$,

$d(x_6) = \min(5, 5+1) = 5^*(x_5)$

$d(x_7) = 7(x_4)$

$d(x_8) = 5(x_5)$

$d(x_9) = 8(x_5)$

6 итерация: текущая вершина с постоянной меткой $y = x_6$,

$d(x_7) = 7(x_4)$

$d(x_8) = 5^*(x_5)$

$d(x_9) = \min(8, 5+2) = 7(x_6)$

7 итерация: текущая вершина с постоянной меткой $y = x_8$,

$d(x_7) = \min(7, 5+6) = 7^*(x_4)$

$d(x_9) = \min(7, 5+4) = 7(x_6)$

8 итерация: текущая вершина с постоянной меткой $y = x_7$,

$d(x_9) = 7^*(x_6)$

Составляем итоговую таблицу (протокол работы алгоритма):

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
$2/x_1$	∞	$3/x_1$	$4/x_1$	∞	∞	∞	∞
	$5/x_2$	$\mathbf{3/x_1}$	$3/x_2$	∞	∞	∞	∞
	$5/x_2$		$\mathbf{3/x_2}$	∞	$7/x_4$	∞	∞
	$\mathbf{5/x_2}$			$5/x_5$	$7/x_4$	$5/x_5$	$8/x_5$
				$\mathbf{5/x_5}$	$7/x_4$	$5/x_5$	$8/x_5$
					$7/x_4$	$\mathbf{5/x_5}$	$7/x_6$
					$\mathbf{7/x_4}$		$7/x_6$
							$\mathbf{7/x_6}$

Таким образом, находим минимальные по весу пути:

$x_1 - x_2, \quad d = 2$	$x_1 - x_2 - x_5 - x_6, \quad d = 5$
$x_1 - x_2 - x_3, \quad d = 5$	$x_1 - x_4 - x_7, \quad d = 7$
$x_1 - x_4, \quad d = 3$	$x_1 - x_2 - x_5 - x_8, \quad d = 5$
$x_1 - x_2 - x_5, \quad d = 3$	$x_1 - x_2 - x_5 - x_6 - x_9, \quad d = 7$

На рисунке графа дерево кратчайших путей показано сплошной линией (см. рис. 9.3).

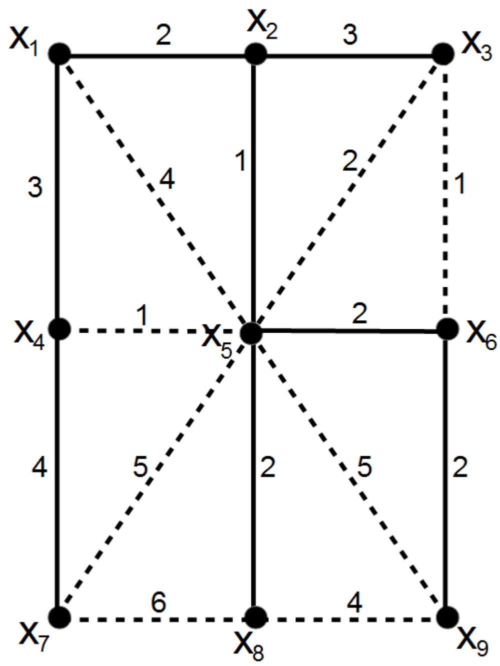


Рис. 9.3

9.2.3. С помощью алгоритма Дейкстры найти путь минимального веса между вершинами x_1 и x_6 в нагруженном орграфе, заданном матрицей весов:

$$\Omega = \begin{pmatrix} - & 13 & \infty & 15 & \infty & \infty \\ \infty & - & 16 & 1 & 15 & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 2 & 14 \\ \infty & \infty & 17 & - & 18 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Решение. Инициализация**:**

$d(x_1) = 0^*, \quad d(x_2) = d(x_3) = d(x_4) = d(x_5) = d(x_6) = \infty$

1 итерация: текущая вершина с постоянной меткой $y = x_1$, далее, пользуясь первой строкой весовой матрицы расставляем метки у вершин, смежных с x_1

$d(x_2) = 13^*\ (x_1)$

$d(x_3) = \infty$

$d(x_4) = 15(x_1)$

$d(x_5) = \infty$

$d(x_6) = \infty$

2 итерация: текущая вершина с постоянной меткой $y = x_2$, далее, пользуясь второй строкой весовой матрицы расставляем метки у вершин с временными метками, смежных с x_2

$d(x_3) = \min(\infty, 13+16) = 29(x_2)$

$d(x_4) = \min(15, 13+1) = 14^*(x_2)$

$d(x_5) = \min(\infty, 13+15) = 28(x_2)$

$d(x_6) = \infty$

3 итерация: текущая вершина с постоянной меткой $y = x_4$, далее, пользуясь четвертой строкой весовой матрицы расставляем метки у вершин, смежных с x_4

$d(x_3) = \min(29, 14+17) = 29(x_2)$

$d(x_5) = \min(28, 14+18) = 28^*(x_2)$

$d(x_6) = \infty$

4 итерация: текущая вершина с постоянной меткой $y = x_5$, далее, пользуясь пятой строкой весовой матрицы расставляем метки у вершин, смежных с x_5

$d(x_3) = 29^*(x_2)$

$d(x_6) = \min(\infty, 28+12) = 40(x_5)$

5 итерация: текущая вершина с постоянной меткой $y = x_3$, далее, пользуясь третьей строкой весовой матрицы расставляем метки у вершин, смежных с x_3

$d(x_6) = \min(40, 29+14) = 40^*(x_5)$

Имеем следующий протокол работы алгоритма

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$13/x_1$	∞	$15/x_1$	∞	∞
	$29/x_2$	**$14/x_2$**	$28/x_2$	∞
	$29/x_2$		**$28/x_2$**	∞
	$29/x_2$			$40/x_5$
				$40/x_5$

Тогда путь мин. веса $x_1 - x_2 - x_5 - x_6, \quad d = 40$.

9.3. Задачи для самостоятельного решения.

9.3.1. С помощью алгоритма Дейкстры найти путь минимального веса между вершинами 1 и 6 в нагруженном графе:

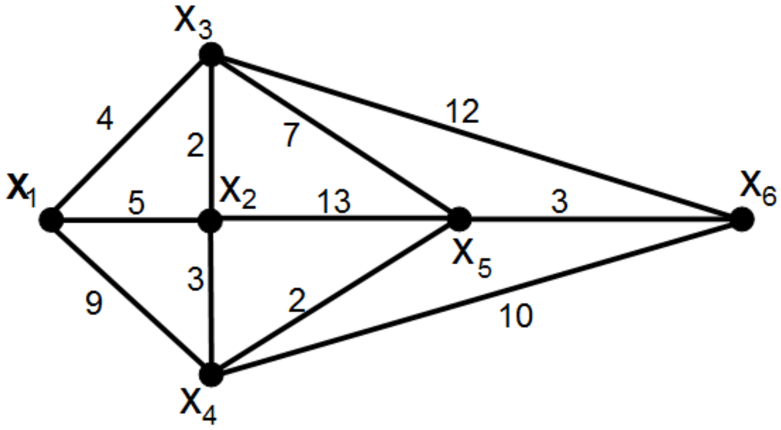


Рис. 9.4

9.3.2. С помощью алгоритма Дейкстры найти путь минимального веса между вершинами 1 и 6 в нагруженном графе, заданном матрицей весов.

$$\begin{pmatrix} - & 7 & 15 & \infty & 14 & \infty \\ \infty & - & 7 & 16 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & 19 & \infty & 21 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 17 \\ \infty & 13 & 14 & 15 & - & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

9.3.3. С помощью алгоритма Дейкстры найти пути минимального веса между вершиной 1 и остальными вершинами в нагруженном графе, заданном матрицей весов

$$\begin{pmatrix} - & 10 & 11 & 6 & \infty & \infty \\ 10 & - & 13 & 8 & 11 & 17 \\ 11 & 13 & - & 5 & 6 & 15 \\ 6 & 8 & 5 & - & 7 & \infty \\ \infty & 11 & 6 & 7 & - & 9 \\ \infty & 17 & 15 & \infty & 9 & - \end{pmatrix}$$

Ответы.

9.3.1. $d = 13$, путь $x_1 - x_2 - x_4 - x_5 - x_6$. **9.3.2.** $d = 32$, путь $x_1 - x_5 - x_6$.

9.3.3.

$x_1 - x_2$, $d = 10$, $x_1 - x_3$, $d = 11$; $x_1 - x_4$, $d = 6$; $x_1 - x_4 - x_5$, $d = 13$; $x_1 - x_4 - x_5 - x_6$, $d = 22$.

ЗАНЯТИЕ 10

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КРАТЧАЙШЕМ ПУТИ МЕТОДОМ ФОРДА-БЕЛЛМАНА

10.1. Решение типовых задач.

10.1.1. Пример, поясняющий неприменимость алгоритма Дейкстры к решению задачи о кратчайшем пути в нагруженном графе с отрицательными весами дуг. Рассмотрим граф:

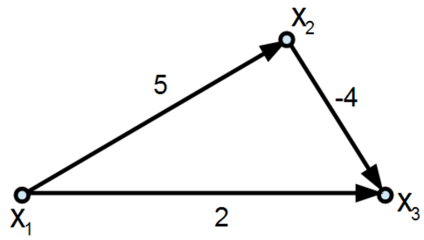


Рис. 10.1

Требуется найти путь минимального веса из x_1 в x_3.

Решение. Применим алгоритм Дейкстры:

$d(x_1)=0^*,\quad d(x_2)=d(x_3)=\infty$

Далее

$d(x_2)=5$

$d(x_3)=2^*$

Таким образом, по алгоритму Дейкстры получаем, что длина кратчайшего пути равна 2. Но как видно из рисунка на самом деле (путь $x_1-x_2-x_3$) она равна 1. То есть алгоритм Дейкстры дает неверный результат. Рассмотрим более универсальный метод - метод Форда-Беллмана, пригодный для случая, когда веса дуг в графе могут иметь любой знак.

10.1.2. Найти путь минимального веса между вершинами x_1 и x_4 нагруженного графа

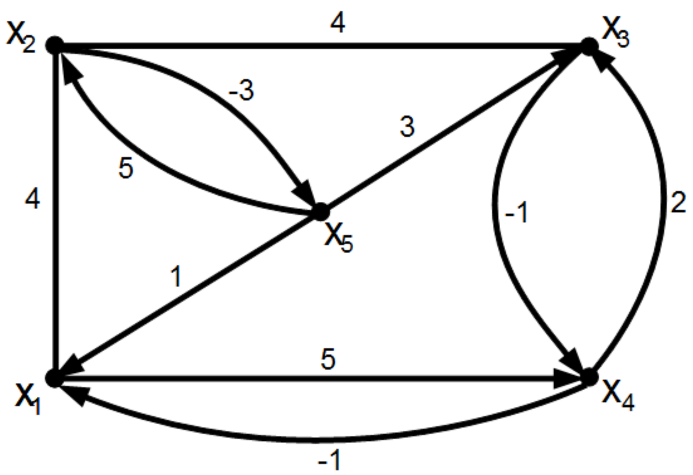


Рис. 10.2

Решение. Заметим, что в данном случае мы имеем смешанный граф, у которого есть как ребра, так и дуги. Однако это не влияет на применимость метода. Будем решать задачу методом Форда-Беллмана. Инициализация**:**
$d(x_1)=0,\quad d(x_2)=d(x_3)=d(x_4)=d(x_5)=d(x_6)=\infty$

Обратите внимание, что звездочку у метки ноль мы не ставим, так как в этом методе нет деления меток на временные и постоянные. Рассмотрим далее веса дуг, соединяющих вершину x_1 и все ее соседние вершины. Тогда метки всех вершин графа будут следующими
$d(x_1)=0,\quad d(x_2)=4(x_1),\quad d(x_3)=\infty,\quad d(x_4)=5(x_1),\quad d(x_5)=\infty$

Как и в случае метода Дейкстры в скобках указана вершина, благодаря которой произошла модификация метки. Таким образом, после первого шага алгоритма метки вершин x_2 и x_4 отличны от бесконечности. Далее поочередно, начиная с вершины x_1 проверим возможность улучшить метку каждой вершины через соседние вершины, среди которых должны быть <u>только</u> x_2 и x_4. Имеем

$d(x_1)=\min(0,4+4,5-1)=0(x_1)$

$d(x_2)=4(x_1)$

$d(x_3)=\min(\infty,4+4,5+2)=7(x_4)$

$d(x_4)=5(x_1)$

$d(x_5)=\min(\infty,4-3)=1(x_2)$

После второго шага изменились метки вершин x_3 и x_5. Следовательно на следующем шаге нужно модифицировать метки тех вершин, которые достижимы из x_3 и x_5. Заметим, что метка вершины x_1 не изменилась, в противном случае мы имели бы цикл отрицательного веса, проходящий через x_1. Далее третий шаг

$d(x_1)=\min(0,1+1)=0(x_1)$

$d(x_2)=\min(4,7+4,1+5)=4(x_1)$

$d(x_3)=\min(7,1+3)=4(x_5)$

$d(x_4)=\min(5,7-1)=5(x_1)$

$d(x_5)=1(x_2)$

Изменились метка вершины x_3. Следовательно, на следующем шаге модифицируем только те вершины, которые достижимы из x_3

$d(x_1)=0(x_1)$

$d(x_2)=\min(4,4+4)=4(x_1)$

$d(x_3)=4(x_5)$

$d(x_4)=\min(5,4-1)=3(x_3)$

$d(x_5)=1(x_2)$

Изменились метка вершины x_4. Следовательно, далее имеем

$d(x_1) = \min(0, 3-1) = 0(x_1)$

$d(x_2) = 4(x_1)$

$d(x_3) = \min(4, 3+2) = 4(x_5)$

$d(x_4) = 3(x_3)$

$d(x_5) = 1(x_2)$

Нет вершин, у которых изменились метки. Поэтому на следующем шаге ничего не меняется, то есть найдены длины кратчайших путей из x_1 до остальных вершин. Сами пути находим, записав таблицу:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$4/x_1$	∞	$5/x_1$	∞
0	$4/x_1$	$7/x_4$	$5/x_1$	$1/x_2$
0	$4/x_1$	$4/x_5$	$5/x_1$	$1/x_2$
0	$4/x_1$	$4/x_5$	$3/x_3$	$1/x_2$
0	$4/x_1$	$4/x_5$	$3/x_3$	$1/x_2$

Путь минимального веса находим, пользуясь последней строкой таблицы протокола алгоритма:

$x_1 - x_2 - x_5 - x_3 - x_4, \quad d = 3.$

10.1.3. Найти путь минимального веса между вершинами x_1 и x_7 нагруженного графа

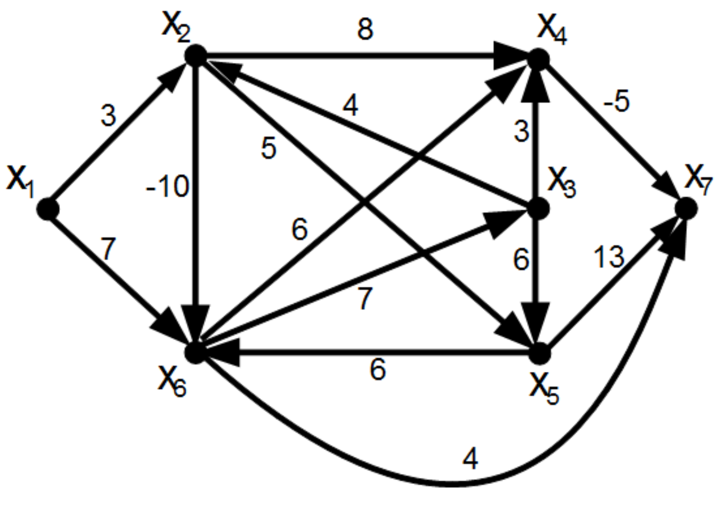


Рис. 10.3

Решение. По аналогии с предыдущей задачей имеем (вершину x_1 не рассматриваем, так как нет дуг, входящих в нее).

1 итерация:

$d(x_2) = 3(x_1), \quad d(x_6) = 7(x_1), \quad d(x_3) = d(x_4) = d(x_5) = d(x_7) = \infty$

2 итерация:

$d(x_2) = 3(x_1)$

$d(x_3) = \min(\infty, 7+7) = 14(x_6)$

$d(x_4) = \min(\infty, 3+8, 7+6) = 11(x_2)$

$d(x_5) = \min(\infty, 3+5) = 8(x_2)$

$d(x_6) = \min(7, 3-10) = -7(x_2)$

$d(x_7) = \min(\infty, 7+4) = 11(x_6)$

3 итерация:

$d(x_2) = \min(3, 14+4) = 3(x_1)$

$d(x_3) = \min(14, -7+7) = 0(x_6)$

$d(x_4) = \min(11, 14+3, -7+6) = -1(x_6)$

$d(x_5) = \min(8, 14+6) = 8(x_2)$

$d(x_6) = \min(-7, 8+6) = -7(x_2)$

$d(x_7) = \min(11, 11-5, 8+13, -7+4) = -3(x_6)$

4 итерация:

$d(x_2) = \min(3, 0+4) = 3(x_1)$

$d(x_3) = 0(x_6)$

$d(x_4) = \min(-1, 0+3) = -1(x_6)$

$d(x_5) = \min(8, 0+6) = 6(x_3)$

$d(x_6) = -7(x_2)$

$d(x_7) = \min(-3, -1-5) = -6(x_4)$

5 итерация:

$d(x_2) = 3(x_1)$

$d(x_3) = 0(x_6)$

$d(x_4) = -1(x_6)$

$d(x_5) = 6(x_3)$

$d(x_6) = \min(-7, 6+6) = -7(x_2)$

$d(x_7) = \min(-6, 6+13) = -6(x_4)$

Изменений меток не произошло, поэтому алгоритм заканчивает работу. Рисуем таблицу

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	$3/x_1$	∞	∞	∞	$7/x_1$	∞
0	$3/x_1$	$14/x_6$	$11/x_2$	$8/x_2$	$-7/x_2$	$11/x_6$
0	$3/x_1$	$0/x_6$	$-1/x_6$	$8/x_2$	$-7/x_2$	$-3/x_6$
0	$3/x_1$	$0/x_6$	$-1/x_6$	$6/x_3$	$-7/x_2$	$-6/x_4$
0	$3/x_1$	$0/x_6$	$-1/x_6$	$6/x_3$	$-7/x_2$	$-6/x_4$

Путь мин. веса $x_1 - x_2 - x_6 - x_4 - x_7, \quad d = -6$.

10.1.4. Построить дерево путей минимального веса из вершины x_1 до остальных вершин в нагруженном орграфе, заданном матрицей весов

$$\Omega = \begin{pmatrix} - & 2 & \infty & \infty & 4 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ \infty & 2 & - & 3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & -7 & 1 & - & \infty & \infty & 4 \\ \infty & -4 & \infty & 8 & - & \infty & 11 \\ \infty & \infty & \infty & -3 & -5 & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Решение. Применяем алгоритм Форда-Беллмана.

1 итерация. Используя первую строку матрицы весов, имеем

$d(x_1) = 0, \quad d(x_2) = 2(x_1), \quad d(x_5) = 4(x_1), \quad d(x_3) = d(x_4) = d(x_6) = d(x_7) = \infty$

2 итерация. Используя поочередно столбцы матрицы весов, меняем метки вершин, смежных с вершинами x_2 и x_5

$d(x_2) = \min(2, 4-4) = 0(x_5)$

$d(x_3) = \infty$

$d(x_4) = \min(\infty, 4+8) = 12(x_5)$

$d(x_5) = 4(x_1)$

$d(x_6) = \min(\infty, 2+10) = 12(x_2)$

$d(x_7) = \min(\infty, 4+11) = 15(x_5)$

3 итерация. Используя поочередно столбцы матрицы весов, меняем метки вершин, смежных с вершинами x_2, x_4, x_6, x_7 (у этих вершин поменялись метки)

$d(x_2) = \min(0,12-7) = 0(x_5)$

$d(x_3) = \min(\infty,12+1) = 13(x_4)$

$d(x_4) = \min(12,12-3) = 9(x_6)$

$d(x_5) = \min(4,12-5) = 4(x_1)$

$d(x_6) = \min(12,0+10) = 10(x_2)$

$d(x_7) = \min(15,12+4,12+3) = 15(x_5)$

4 итерация. Используя поочередно столбцы матрицы весов, меняем метки вершин, смежных с вершинами x_3, x_4, x_6 (у этих вершин поменялись метки)

$d(x_2) = \min(0,13+2,9-7) = 0(x_5)$

$d(x_3) = \min(13,9+1) = 10(x_4)$

$d(x_4) = \min(9,13+3,10-3) = 7(x_6)$

$d(x_5) = \min(4,13+6,10-5) = 4(x_1)$

$d(x_6) = 10(x_2)$

$d(x_7) = \min(15,9+4,10+3) = 13(x_4)$

5 итерация. Используя поочередно столбцы матрицы весов, меняем метки вершин, смежных с вершинами x_3, x_4, x_7 (у этих вершин поменялись метки)

$d(x_2) = \min(0,10+2,7-7) = 0(x_5)$

$d(x_3) = \min(10,7+1) = 8(x_4)$

$d(x_4) = \min(7,10+3) = 7(x_6)$

$d(x_5) = \min(4,10+6) = 4(x_1)$

$d(x_6) = 10(x_2)$

$d(x_7) = \min(13,7+4) = 11(x_4)$

6 итерация. Изменилась только метка у x_3, x_7. Поэтому

$d(x_2) = \min(0,8+2) = 0(x_5)$

$d(x_3) = 8(x_4)$

$d(x_4) = \min(7,8+3) = 7(x_6)$

$d(x_5) = \min(4,8+6) = 4(x_1)$

$d(x_6) = 10(x_2)$

$d(x_7) = 11(x_4)$

Изменений меток не произошло, поэтому алгоритм заканчивает работу. Рисуем итоговую таблицу:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	$2/x_1$	∞	∞	$4/x_1$	∞	∞
0	$0/x_5$	∞	$12/x_5$	$4/x_1$	$12/x_2$	$15/x_5$
0	$0/x_5$	$13/x_4$	$9/x_6$	$4/x_1$	$10/x_2$	$15/x_5$
0	$0/x_5$	$10/x_4$	$7/x_6$	$4/x_1$	$10/x_2$	$13/x_4$
0	$0/x_5$	$8/x_4$	$7/x_6$	$4/x_1$	$10/x_2$	$11/x_4$
0	$0/x_5$	$8/x_4$	$7/x_6$	$4/x_1$	$10/x_2$	$11/x_4$

Последняя строка позволяет построить дерево путей минимального веса:

$x_1 - x_5 - x_2, \quad d = 0$

$x_1 - x_5 - x_2 - x_6 - x_4 - x_3, \quad d = 8$

$x_1 - x_5 - x_2 - x_6 - x_4, \quad d = 7$

$x_1 - x_5, \quad d = 4$

$x_1 - x_5 - x_2 - x_6, \quad d = 10$

$x_1 - x_5 - x_2 - x_6 - x_4 - x_7, \quad d = 11$

10.1.5. Пример обнаружения цикла отрицательного веса методом Форда-Беллмана**.** Найти путь минимального веса между вершинами 1 и 2 нагруженного графа, заданного матрицей весов

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 4 \\ \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -6 \\ \infty & 1 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. Запишем сразу же итоговую таблицу

1	2	3	4
0	$1/1$	∞	$4/1$
0	$1/1$	$3/2$	$4/1$
0	$1/1$	$3/2$	$-3/3$
0	$-2/4$	$3/2$	$-3/3$

Известно, что если граф содержит n вершин, то алгоритм Форда-Беллмана обнаруживает цикл отрицательного веса в том случае, если при переходе от (n -1)-й строки таблицы протокола алгоритма к n-й меняются метки вершин.

При этом алгоритм "зацикливается" и в дальнейшем метки вершин будут продолжать меняться, то есть в графе имеется цикл отрицательного веса. Как следует из таблицы, в нашем примере при переходе от 3-й к 4-й строке изменилась метка 2-й вершины. Видно, что путь из четырех дуг 1-2-3-4-2 оказался короче пути из одной дуги 1-2. Таким образом, алгоритм обнаружил цикл отрицательного веса и решение задачи о кратчайшем пути не существует.

10.2. Задачи для самостоятельного решения.

10.2.1. С помощью алгоритма Форда-Беллмана найти путь минимального веса между вершинами x_1 и x_6 в нагруженном графе

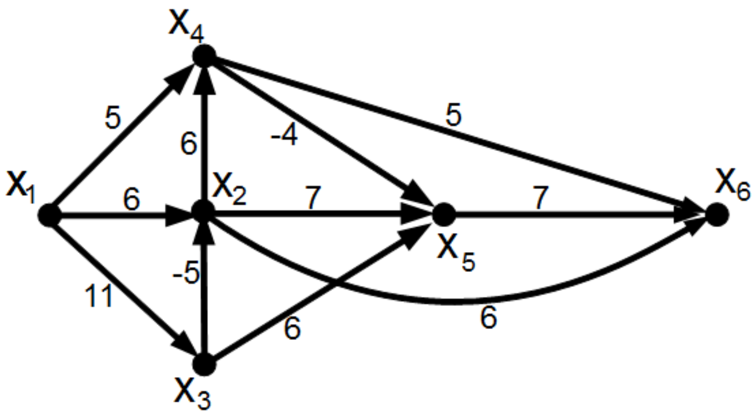


Рис. 10.4

10.2.2. С помощью алгоритма Форда-Беллмана найти путь минимального веса между вершинами x_1 и x_7 нагруженного графа, заданного матрицей весов

$$\begin{pmatrix} - & 3 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ \infty & - & \infty & 8 & 5 & -10 & \infty \\ \infty & 4 & - & 3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & -5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 & 13 \\ \infty & \infty & 7 & 6 & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

10.2.3. С помощью алгоритма Форда-Беллмана построить дерево путей минимального веса из вершины x_1 до остальных вершин в нагруженном орграфе, заданном матрицей весов

$$\begin{pmatrix} - & 7 & \infty & -8 & \infty & \infty \\ \infty & - & 13 & -9 & 10 & \infty \\ \infty & \infty & - & 3 & -4 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & - & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

10.2.4. Найти оптимальный путь из вершины 1 в вершину 4 для графа, заданного матрицей весов

$$\begin{pmatrix} \infty & \infty & 2 & 3 \\ -4 & \infty & \infty & 1 \\ 0 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Ответы.

10.2.1. $d = 8$**,** путь $x_1 - x_4 - x_5 - x_6$. **10.2.2**. $d = -6$, путь $x_1 - x_2 - x_6 - x_4 - x_7$.

10.2.3.

$x_1 - x_2,\quad d = 7;\quad x_1 - x_2 - x_3,\quad d = 20;\quad x_1 - x_4,\quad d = -8;$
$x_1 - x_4 - x_5,\quad d = 1;\quad x_1 - x_4 - x_5 - x_6,\quad d = 9.$

10.2.4. Решения не существует.

ЗАНЯТИЕ 11

ОСТОВЫ ГРАФА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РАЗРЕЗЫ

11.1. Основные понятия

11.1.1. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить некоторым маршрутом (путем). На рис.11.1 изображен связный граф.

11.1. 2. *Деревом* называется связный граф без циклов (см. рис.11.2).

11.1. 3. *Подграфом графа G* называется граф G^*, все вершины и ребра которого принадлежат графу G.

11.1.4. *Остовным деревом* графа G называется такой подграф графа G, который является деревом и проходит через все вершины графа G. Например, для графа, изображенного на рис. 11.1, остов образуют ребра 1-2, 2-3, 2-4,2-5, 1-6, 5-7.

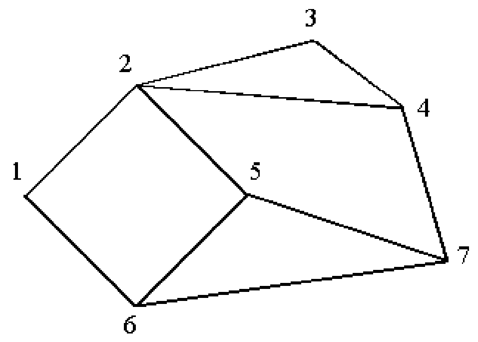


Рис. 11.1

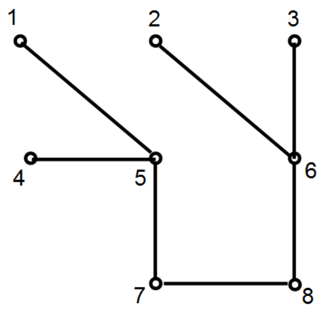


Рис. 11.2

11.1.5. *Цикломатическим числом графа G*, имеющего *m* ребер (дуг), *n* вершин и *p* компонент связности называется величина $\nu = m - n + p$.

11.1.6. Пусть цикл – это любой замкнутый маршрут (без учета направления дуг). Тогда любой цикл, получаемый добавлением какой-либо дуги связного графа *G* (называемой *хордой*), не лежащей в остове *T* графа *G*, к дугам остова *T* называется *фундаментальным циклом*. Количество фундаментальных циклов в графе равно ν.

11.1.7. Пусть все вершины графа $G(X, \Gamma)$ разбиты на два множества X' и X'' так, что $X = X' \cup X''$, $X' \cap X'' = \varnothing$. Тогда множество дуг графа, одни концы которых лежат в множестве X', а другие – в множестве X'', называется *разрезом графа G*.

11.1. 8. *Фундаментальные разрезы* графа *G* относительно остова *T* - это такие (*n*-1) разрезов, каждый из которых содержит одну и только одну дугу остова *T*.

11.2. Решение типовых задач.

11.2.1. Найти количество остовов графа на рис. 11.3 и перечислить все остовы.

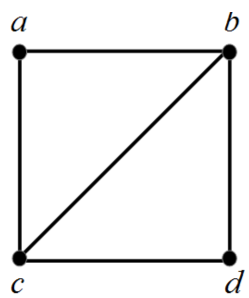


Рис. 11.3

Решение. Известна теорема, в соответствии с которой число остовов графа равно любому алгебраическому дополнению матрицы Кирхгофа. Эта матрица строится по правилу:

$$k_{ij} = \begin{cases} -1,\ x_i \text{ и } x_j \text{ смежны}, \\ 0,\ x_i \text{ и } x_j \text{ не смежны}, \\ \text{степень вершины } \delta(x_i),\ i = j. \end{cases}$$

Для нашей задачи матрица Кирхгофа имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем алгебраическое дополнение

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

В соответствии с указанной теоремой имеем 8 остовов. Нарисуем их:

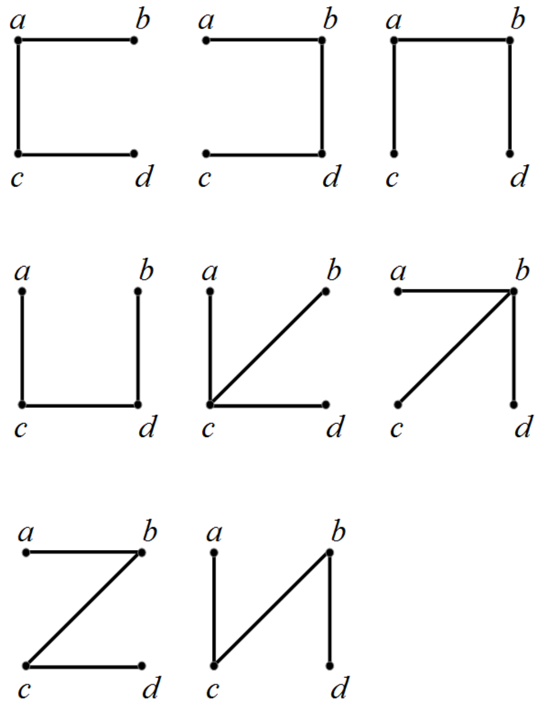


Рис. 11.4

11.2.2. То же условие для графа

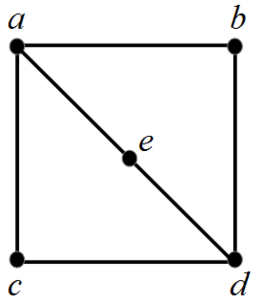


Рис. 11.5

Решение. Для нашей задачи матрица Кирхгофа имеет вид

$$K=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем алгебраическое дополнение:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 5 & 0 \end{vmatrix}=-1(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}=2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=12$$

В соответствии с указанной теоремой имеем 12 остовов. Нарисуем их:

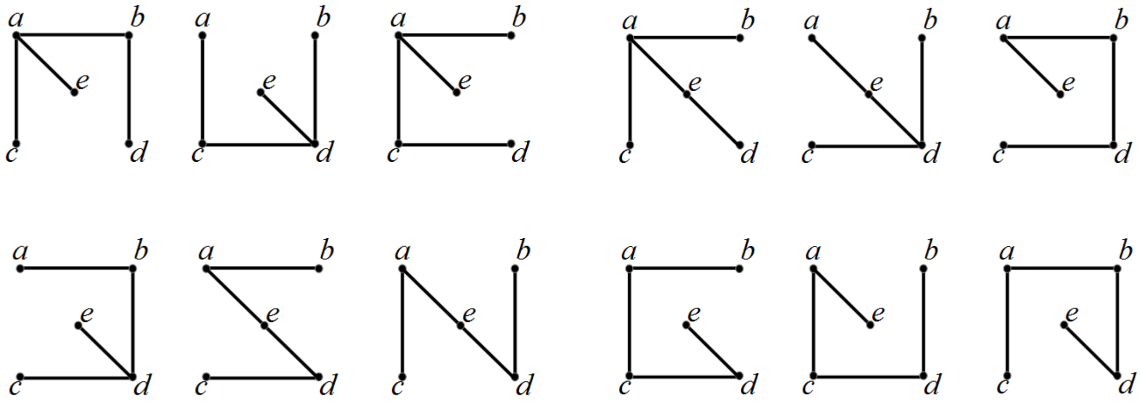


Рис. 11.6

11.2.3. Найти цикломатическое число графа (см. рис. 11.7). Выписать матрицы фундаментальных циклов и разрезов относительно остова, показанного жирной линией на рисунке 11.7. Записать вектор-цикл, проходящий через дуги 2,6,7,8,9,3, и представить этот цикл в виде линейной комбинации фундаментальных циклов. И аналогично, записать вектор разреза,указанный пунктиром на рисунке 11.7, и представить его в виде линейной комбинации фундаментальных разрезов.

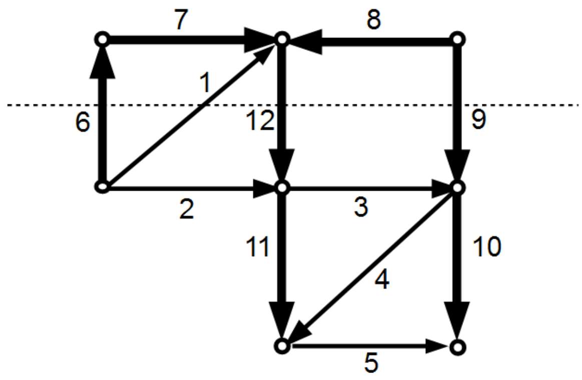


Рис. 11.7

Решение. В этой задаче под *циклом* понимается *любой неориентированный замкнутый маршрут* [4]. Имеем связный граф из 8 вершин и 12 дуг. Его цикломатическое число есть $\nu = 12 - 8 + 1 = 5$, то есть числу хорд графа. Заполним далее первую строку матрицы фундаментальных циклов. Для этого мысленно уберем из рисунка графа все хорды, кроме первой (для наглядности все хорды, кроме первой изображены пунктиром на рис. 11.8).

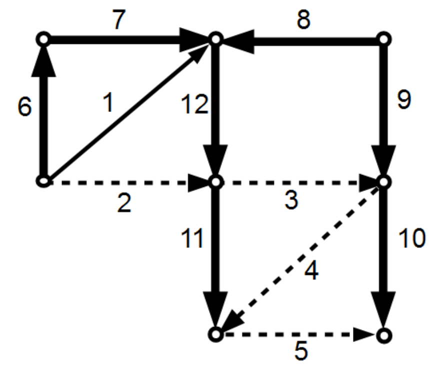


Рис. 11.8

Получим единственный цикл в графе. Он проходит через дуги 1,6 и 7. Поэтому вектор-цикл будет состоять из 12 разрядов, причем на 1 позиции будет стоять число 1, а на 6 и 7 позициях будет стоять (-1), так как дуги 6 и 7 направлены противоположно дуге 1 (то есть, по часовой стрелке). Остальные элементы первой строки равны нулю. Поступая так дальше, получим следующую матрицу фундаментальных циклов:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим цикл, проходящий через дуги 2,6,7,8,9,3. Ему соответствует вектор: (0,1,1,0,0,-1,-1,1,-1,0,0,0), так как, например, дуга 8 направлена против часовой стрелки, как и дуга 2, а дуга 9 направлена по часовой стрелке. При этом направление цикла зададим, например, совпадающим с направлением хорды 2. Так как дуги 2 и 3 – это хорды, которые содержатся во втором и третьем фундаментальных циклах, то наш цикл будет являться линейной комбинацией этих фундаментальных циклов (проходимых по одному разу). Тогда имеем:

$$(0,1,1,0,0,-1,-1,1,-1,0,0,0) = (0,1,0,0,0,-1,-1,0,0,0,0,-1) +$$
$$+(0,0,1,0,0,0,0,1,-1,0,0,1)$$

Видим, что равенство верное.

Далее заполним матрицу фундаментальных разрезов. Этих разрезов будет столько же, сколько имеется ветвей остова, то есть 7, причем каждый из них пересекает только одну дугу остова. Например, разрез, пересекающий ветвь 6, будет также пересекать дуги 1 и 2 (см. рис. 11.9) и не пересекать другие ветви остова. Так как все дуги, входящие в данный разрез, выходят из одной

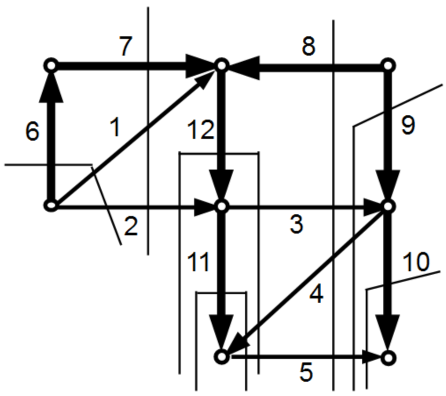


Рис. 11.9

вершины, то в 1-й, 2-й и 6-й позициях вектора-разреза будут стоять только 1. Рассмотрим еще разрез, пересекающий ветвь 8. Он пересекает дуги 3,4,5. При этом дуга 4 ориентирована так же, как и дуга 8, а остальные две противоположным образом (см. рис. 11.9). Поэтому в 4-й и 8-й позициях вектора-разреза будут стоять 1, а в 3-й и 5-й записываем -1. Поступая так для каждого разреза, показанного на рис. 11.9, получим матрицу фундаментальных разрезов:

$$K=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим разрез, пересекающий дуги 1,6,9,12, заданный в условии задачи. Ему соответствует вектор: (1,0,0,0,0,1,0,0,-1,0,0,-1), так как, например, дуга 1 направлена также как и 6, а дуги 9 и 12 направлены противоположно. Так как дуги 6,9,12 – это ветви остова, которые содержатся в 1, 4 и 7 фундаментальных разрезах, то наш разрез будет являться линейной комбинацией этих фундаментальных разрезов. Тогда имеем:

$$\left(1,0,0,0,0,1,0,0,-1,0,0,-1\right)=\left(1,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0\right)-$$
$$\left(0,0,1,-1,1,0,0,0,1,0,0,0\right)-\left(0,1,-1,1,-1,0,0,0,0,0,0,1\right)$$

Видим, что равенство верное.

11.3. Задачи для самостоятельного решения.

11.3.1. Найти количество остовов графа, изображенного на рисунке. Перечислить все остовы.

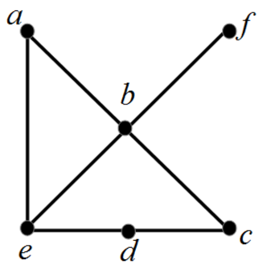


Рис. 11.10

11.3.2. Найти количество остовов графа, изображенного на рисунке 11.11. Перечислить остовы не нужно.

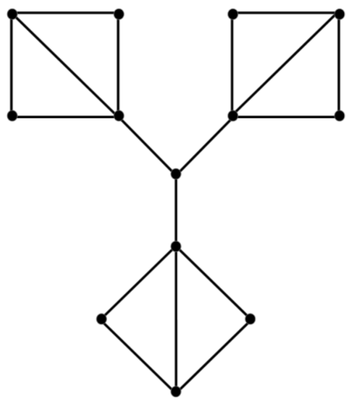


Рис. 11.11

11.3.3. Найти цикломатическое число графа. Выписать матрицы фундаментальных циклов и разрезов относительно остова, показанного жирной линией на рисунке 11.12. Записать вектор-цикл, проходящий через дуги 3,5,6,7,8,9,12, и представить этот цикл в виде линейной комбинации фундаментальных циклов. Записать вектор разреза,указанный пунктиром на рисунке, и представить его в виде линейной комбинации фундаментальных разрезов.

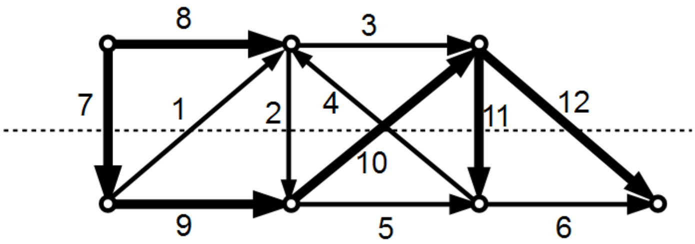


Рис. 11.12

Ответы. 11.3.1. 11 остовов. **11.3.2.** 512 остовов.

11.3.3. $$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ЗАНЯТИЕ 12

ПОСТРОЕНИЕ ОСТОВА МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА

12.1. Решение типовых задач.

Рассмотрим задачу построения остова нагруженного графа, имеющего наименьший вес. Будем решать ее при помощи алгоритмов **Краскала** или **Прима.**

12.1.1. Построить минимальное по весу остовное дерево следующего нагруженного графа:

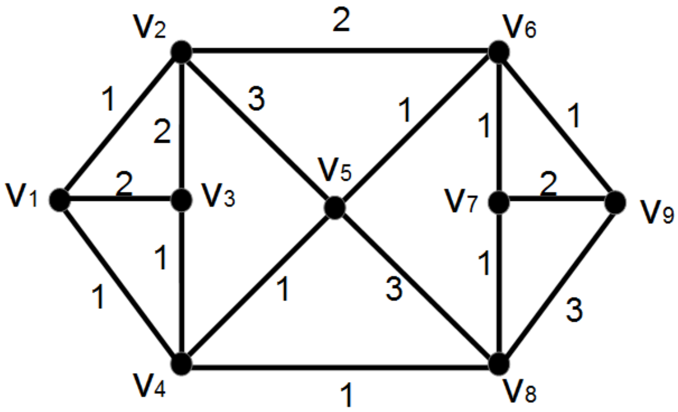


Рис. 12.1

Решение (методом Краскала).

Шаг 1: Выбираем ребро графа, имеющее наименьший вес. Например, берем ребро $e_1(v_1, v_2)$. Его вес равен 1.

Шаг 2: Из оставшихся ребер выбираем ребро графа, имеющее наименьший вес и не образующее цикла с уже выбранными ребрами. Например, берем ребро $e_3(v_1, v_4)$.

Шаг 3: Аналогично берем ребро $e_5(v_3, v_4)$.

Шаг 4: Аналогично берем ребро $e_7(v_4, v_5)$.

Шаг 5: Аналогично берем ребро $e_{10}(v_5, v_6)$.

Шаг 6: Аналогично берем ребро $e_{12}(v_6, v_7)$.

Шаг 7: Аналогично берем ребро $e_{13}(v_7, v_8)$.

Шаг 8: Аналогично берем ребро $e_{15}(v_6, v_9)$. Заметим, что нельзя взять ребро $e_9(v_4, v_8)$, которое тоже имеет малый вес 1, но образует цикл с уже выбранными ребрами.

Далее, так как все вершины охвачены, то алгоритм останавливается. В результате вес всей схемы дорог равен 1+1+1+1+1+1+1+1=8. Остов показан на рис. 12.2 сплошной линией.

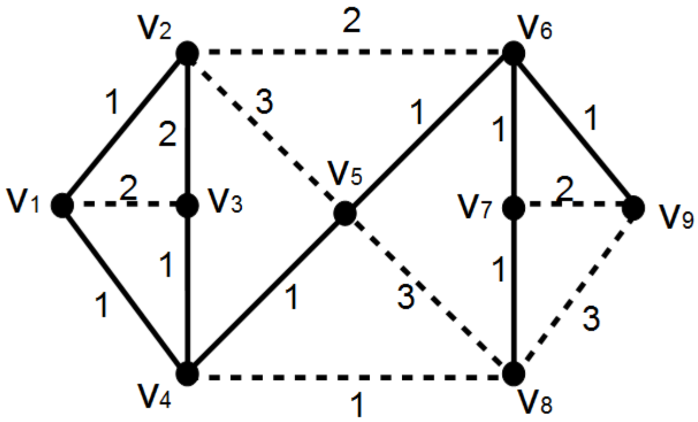


Рис. 12.2

12.1.2. Фирма получила заказ на прокладку кабеля для кабельного телевидения. Узлы сети, показанной на рис. 12.3 представляют собой пункты, к которым должна быть проложена кабельная сеть. Веса дуг сети показывают количество километров между соответствующими пунктами. Требуется выбрать такой способ прокладки кабеля ко всем пунктам, при котором общая протяженность сети будет наименьшей.

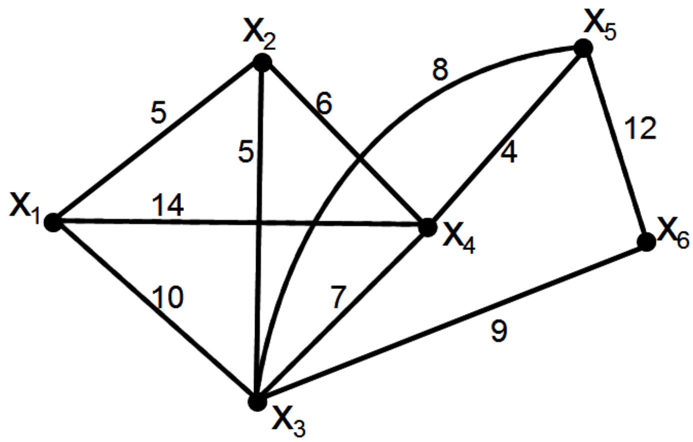


Рис. 12.3

Решение. Данная задача сводится к построению остова минимального веса в нагруженном графе. Применим алгоритм Прима. Вначале выбираем некоторую вершину графа, например x_1. Тогда получаем разбиение множества вершин графа: $X' = \{x_1\}$, $X'' = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Кроме этого формируем множество Γ' ветвей остова. На первом шаге $\Gamma' = \varnothing$. Далее выбираем очередное ребро остова так, что одна его вершина $x_i \in X'$, а другая $x_j \in X''$ и среди указанных ребер это ребро должно иметь минимальный вес. Присоединяем к множеству X' вершину x_j, а к множеству Γ' ребро (x_i, x_j). Проверка на окончание: если $X' = X$, где X - множество вершин исходного графа, то алгоритм заканчивает свою работу. Дерево $G = (X', \Gamma')$ есть искомое остовное дерево. Применим алгоритм к графу, показанному на рисунке 12.3.

1 итерация:
Шаг 1: Рассматриваем ребра, выходящие из вершины x_1. Из них ребро (x_1, x_2) имеет наименьший вес. Включаем его в остов. Таким образом, $X' = \{x_1, x_2\}, \quad X'' = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $\Gamma' = \{(x_1, x_2)\}$
Шаг 2: $X' \neq X$, поэтому переходим на начало шага 1.

2 итерация:
Шаг 1: Рассматриваем ребра, выходящие из вершин x_1, x_2 (кроме (x_1, x_2)). Из них ребро (x_2, x_3) имеет наименьший вес. Включаем его в остов. Тогда $X' = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad X'' = \{x_4, x_5, x_6\}$, $\Gamma' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3)\}$
Шаг 2: $X' \neq X$, поэтому переходим на начало шага 1.

3 итерация:
Шаг 1: Рассматриваем ребра, выходящие из вершин x_1, x_2, x_3 (кроме (x_1, x_2) и (x_2, x_3)). Ребро (x_1, x_3) не может быть включено в остов, так как оба его конца находятся в множестве X'. Из оставшихся ребер (x_2, x_4) имеет наименьший вес. Включаем его в остов. Теперь
$X' = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \quad X'' = \{x_5, x_6\}$, $\Gamma' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4)\}$
Шаг 2: $X' \neq X$, поэтому переходим на начало шага 1.

4 итерация:
Шаг 1: $X' = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \quad X'' = \{x_6\}$, $\Gamma' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_5)\}$
Шаг 2: $X' \neq X$, поэтому переходим на начало шага 1.

5 итерация:
Шаг1: $X' = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \; X'' = \varnothing$,
$\Gamma' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_5), (x_3, x_6)\}$
Шаг 2: $X' = X$, конец работы алгоритма.

Складывая веса ребер, вошедших в остов, получаем вес остова $d = 29$. Остов показан на рисунке 12.4 сплошной кривой.

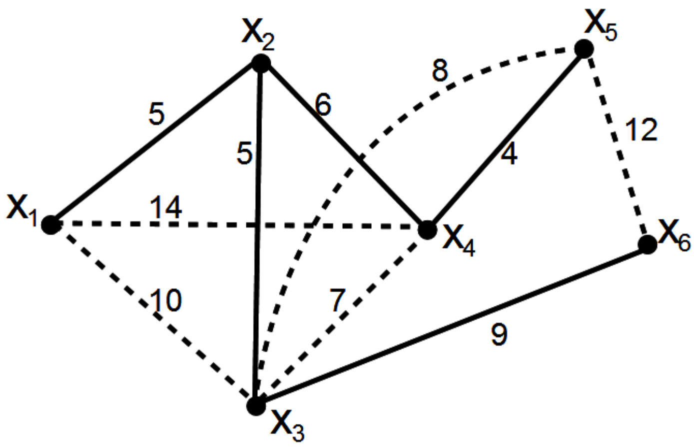


Рис. 12.4

12.1.3. Построить минимальное по весу остовное дерево графа, заданного матрицей инцидентности

x_1	1		1						1			1			
x_2						1			1		1			1	1
x_3	1						1						1		1
x_4		1		1		1	1					1			
x_5		1			1			1						1	
x_6			1	1				1		1			1		
x_7					1					1	1				
	4	5	6	6	6	6	7	7	8	8	8	9	9	10	11

Решение. Заметим, что для решения задачи с помощью алгоритма Прима столбцы матрицы инцидентности расположены по возрастанию весов ребер (этого всегда можно добиться перестановкой столбцов). Применяем метод Прима:

$X' = \{x_1\}, \quad X'' = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}, \ \Gamma' = \varnothing$

1 итерация:

Шаг 1: $X' = \{x_1, x_3\}, \quad X'' = \{x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}, \ \Gamma' = \{(x_1, x_3)\}$

Шаг 2: $X' \neq X$, поэтому переходим на начало шага 1.

2 итерация:

Шаг 1: $X' = \{x_1, x_3, x_6\}, \quad X'' = \{x_2, x_4, x_5, x_7\}, \ \Gamma' = \{(x_1, x_3), (x_1, x_6)\}$

Шаг 2: $X' \neq X$, поэтому переходим на начало шага 1.

3 итерация:

Шаг 1: $X' = \{x_1, x_3, x_4, x_6\}, \quad X'' = \{x_2, x_5, x_7\}, \ \Gamma' = \{(x_1, x_3), (x_1, x_6), (x_4, x_6)\}$

Шаг 2: $X' \neq X$, поэтому переходим на начало шага 1.

4 итерация:

Шаг 1: $X' = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \quad X'' = \{x_2, x_7\},$

$\Gamma' = \{(x_1, x_3), (x_1, x_6), (x_4, x_6), (x_4, x_5)\}$

Шаг 2: $X' \neq X$, поэтому переходим на начало шага 1.

5 итерация:

Шаг 1: $X' = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \quad X'' = \{x_7\},$

$\Gamma' = \{(x_1, x_3), (x_1, x_6), (x_4, x_6), (x_4, x_5), (x_2, x_4)\}$

Шаг 2: $X' \neq X$, поэтому переходим на начало шага 1.

6 итерация:

Шаг1: $X'\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}, \ X'' = \varnothing,$

$\Gamma' = \{(x_1, x_3), (x_1, x_6), (x_4, x_6), (x_4, x_5), (x_2, x_4), (x_5, x_7)\}$

Шаг 2: $X' = X$, конец работы алгоритма.

Складывая веса ребер, вошедших в остов, получаем вес остова $d = 33$. Приведем рисунок остова:

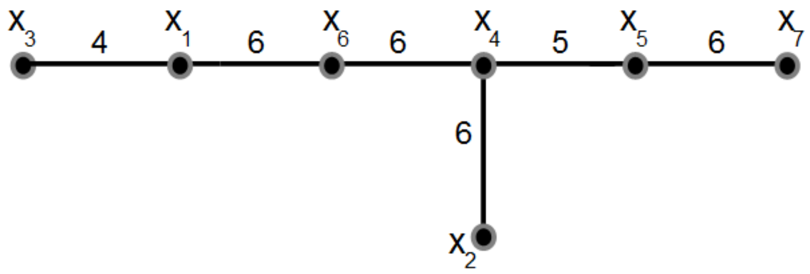


Рис. 12.5

12.2. Задачи для самостоятельного решения.

12.2.1. Построить минимальное по весу остовное дерево графа методом Краскала:

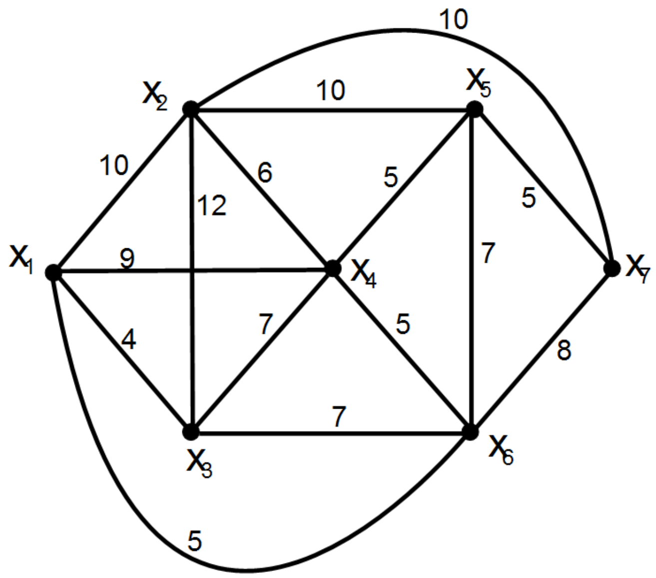


Рис. 12.6

В задачах **12.2.2** и **12.2.3** построить минимальное по весу остовное дерево графа, заданного матрицей инцидентности

12.2.2.

x_1	1	1					1							1	
x_2	1		1	1				1			1				
x_3			1		1	1				1			1		
x_4		1		1									1		1
x_5					1			1	1			1		1	
x_6							1		1	1					
x_7						1					1	1			1
	2	7	1	8	4	10	5	6	9	3	4	10	2	4	5

12.2.3.

x_1			1				1	1						1	
x_2	1						1		1						1
x_3		1						1		1					
x_4		1		1	1						1				
x_5			1	1		1				1			1		
x_6	1				1							1	1		1
x_7						1			1		1	1		1	
	3	9	8	11	6	15	4	5	7	10	13	8	7	6	12

Ответы (ветви остовов и вес).
12.2.1. $\Gamma' = \{(x_1, x_3), (x_1, x_6), (x_2, x_4), (x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_7)\}$. Вес остова 30.
12.2.2. $\Gamma' = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_7), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_3, x_6)\}$. Вес остова 16.
12.2.3. $\Gamma' = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_7), (x_2, x_6), (x_4, x_6), (x_5, x_6)\}$. Вес остова 31.

ЗАНЯТИЕ 13

ЭЙЛЕРОВЫ И ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ. ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

13.1. Основные понятия

13.1.1. Граф называется *эйлеровым*, если существует цикл без повторения ребер (такой цикл называют *эйлеровым*), обходящий все вершины графа. Граф называется *полуэйлеровым*, если существует маршрут без повторения ребер (эйлеров путь), обходящий все ребра графа ровно один раз.

13.1.2. *Гамильтонов цикл* - это простой цикл, проходящий через каждую вершину графа. Аналогично определяется *гамильтонова цепь*. Если такой цикл (маршрут) существует, то граф называется *гамильтоновым (полугамильтоновым)*.

13.1.3. Теорема Эйлера. В связном графе существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степени всех вершин четные числа. В связном графе существует эйлерова цепь тогда и только тогда, когда степени ровно двух вершин нечетные числа.

13.2. Решение типовых задач.

13.2.1. Определить какие из приведенных графов являются эйлеровыми (полуэйлеровами) или гамильтоновыми (полугамильтоновыми):

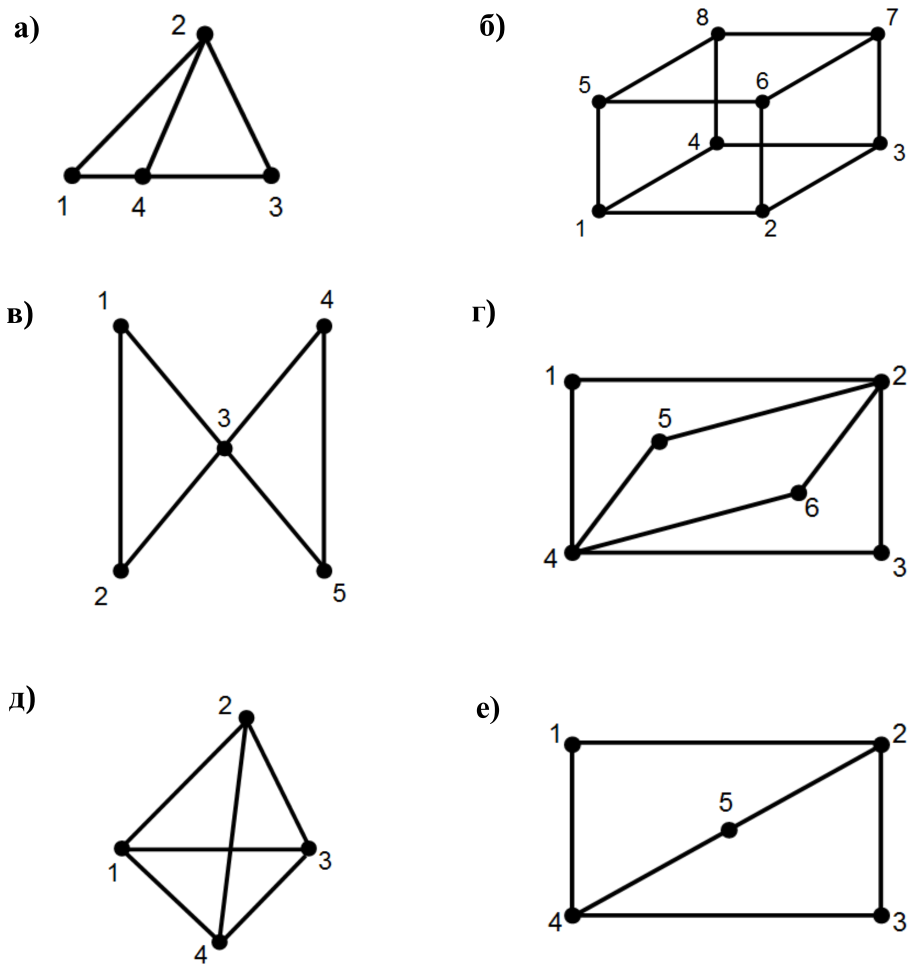


Рис. 13.1

Решение:
а) полуэйлеров (эйлерова цепь 2-1-4-3-2-4) и гамильтонов (цикл 1-2-3-4-1), б) гамильтонов (цикл 1-2-3-7-6-5-8-4-1), в) эйлеров (цикл 1-2-3-4-5-3-1) и полугамильтонов (цепь 1-2-3-4-5), г) эйлеров (цикл 4-1-2-3-4-5-2-6-4), д) гамильтонов (цикл 1-2-3-4-1), е) полуэйлеров (цепь 4-1-2-5-4-3-2) и полугамильтонов (цепь 1-2-5-4-3).

13.2.2. Решить задачу коммивояжера для графа, заданного матрицей весов.

$$\begin{pmatrix} \infty & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 9 & \infty & 9 & 3 & 8 \\ 7 & 1 & \infty & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & \infty & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & \infty \end{pmatrix}$$

Решение. Задача коммивояжера заключается в нахождении гамильтонова контура в нагруженном полном орграфе, имеющим наименьший вес. Будем решать эту задачу методом ветвей и границ. Рассмотрим кратко **основные моменты метода**.

1) Из элементов каждой строки матрицы весов вычитаем минимальный элемент соответствующей строки. Затем, то же самое делаем со столбцами матрицы. Эта операция называется операцией приведения. Складывая все числа, которые мы вычитали, получаем, что нижняя граница длин всех гамильтоновых контуров равна h.
2) На каждом шаге рассматривается некоторое множество M гамильтоновых контуров графа. Первоначально - это множество Z всех контуров (нижняя граница этого множества найдена на шаге 1).
3) Известна нижняя граница $\omega(M)$ длин всех контуров множества M: длина любого из них не меньше $\omega(M)$.
4) Множество M разбивается (ветвится) на два непересекающихся подмножества M' и M'' так, что все контуры, принадлежащие M', содержат некоторую дугу (u,v) нулевой длины (в приведенном графе), а все контуры M'' не содержат дуги (u,v).
5)Дуга (u,v) выбирается так, чтобы нижняя граница $\omega(M'')$ для контуров множества M'' была наибольшей.
6) После завершения очередного ветвления из всех подмножеств, на которые оказалось разбито множество Z, выбирается множество с наименьшей нижней границей для дальнейшего ветвления.
7) После всех шагов алгоритма будет найдено множество M с наименьшей нижней границей $\omega(M)$, содержащее единственный контур, который имеет наименьший вес равный $\omega(M)$.

Применим алгоритм к нашей задаче. Вначале вычитаем из каждой строки матрицы весов минимальный элемент этой строки. Получаем

$$\begin{pmatrix} \infty & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 9 & \infty & 9 & 3 & 8 \\ 7 & 1 & \infty & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & \infty & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & \infty \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \infty & 2 & 5 & 0 & 3 \\ 6 & \infty & 6 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & \infty & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & \infty & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 7 & \infty \end{pmatrix}$$

Видно, что вычитать минимальные элементы из столбцов матрицы не нужно, так как в каждом столбце есть хотя бы один нуль. Складываем далее полученные при вычитании числа (они показаны в столбце справа от матрицы) получаем константу приведения на первом шаге равную $h = 7$. Это значит, что вес всех гамильтоновых контуров в исходном графе не меньше 7.

В процессе решения задачи удобно пользоваться деревом ветвления, изображенном на рис. 13.2. Как указано выше, буквой Z обозначено множество всех гамильтоновых контуров исходного графа. Далее проставляем над каждым нулевым элементом матрицы числа, равные сумме минимального элемента строки и столбца, на пересечении которых стоит данный нулевой элемент, исключая сам этот элемент. Например, для нулевого элемента (1,4) сумма минимального элемента первой строки и четвертого столбца, если исключить ноль в позиции (1,4), равна 2. Поступая аналогично, получаем новую матрицу

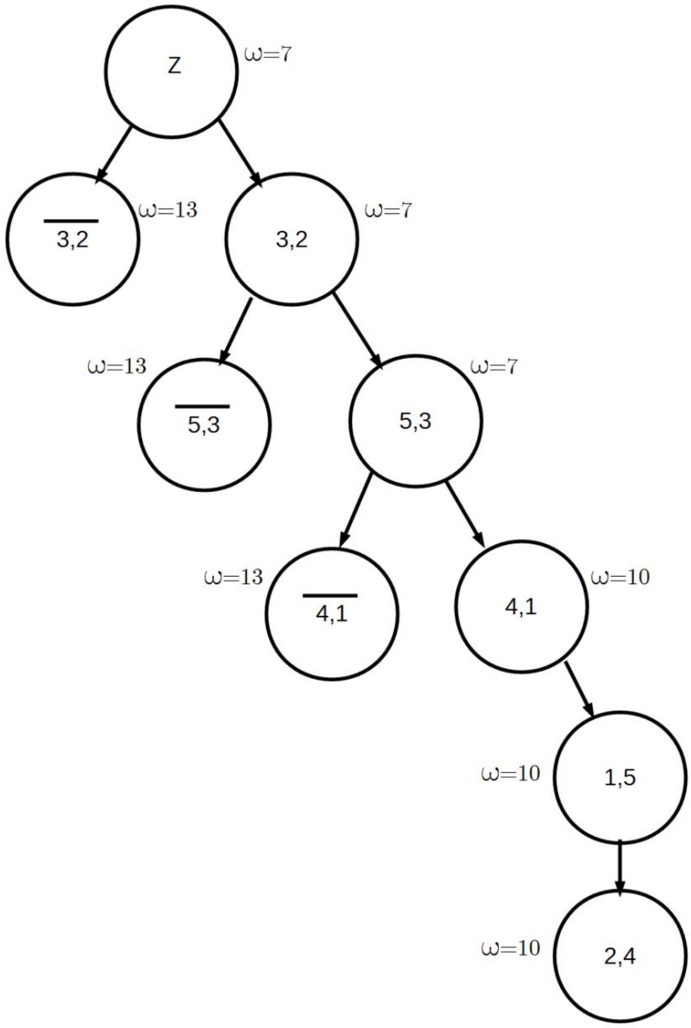


Рис. 13.2

$$\begin{pmatrix} \infty & 2 & 5 & 0^{2} & 3 \\ 6 & \infty & 6 & 0^{5} & 5 \\ 6 & 0^{6} & \infty & 6 & 4 \\ 0^{1} & 3 & 5 & \infty & 0^{3} \\ 1 & 4 & 0^{6} & 7 & \infty \end{pmatrix}$$

Далее рассмотрим нулевые элементы полученной матрицы. Выберем из них тот элемент, над которым проставлено наибольшее число. Это элементы (3,2) и (5,3) (у них числа одинаковы). Возьмем любой из этих элементов, например, (3,2). Произведем стягивание по дуге (3,2), для чего вычеркнем из приведенной матрицы строку 3 и столбец 2. Кроме того, заменим элемент, соответствующий дуге (2,3) в полученной матрице на бесконечность. При этом на графе, изображающем дерево ветвления, показываем, что множество всех гамильтоновых контуров разбито на множество контуров, проходящих через дугу (3,2) (это изображается вершиной 3,2) и не проходящих через эту дугу (вершина $\overline{3,2}$ на дереве). Получаем матрицу четвертого порядка:

$$\begin{pmatrix} \infty & 2 & 5 & 0^{2} & 3 \\ 6 & \infty & 6 & 0^{5} & 5 \\ 6 & 0^{6} & \infty & 6 & 4 \\ 0^{1} & 3 & 5 & \infty & 0^{3} \\ 1 & 4 & 0^{6} & 7 & \infty \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{ccccc} & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & \infty & 5 & 0 & 3 \\ x_2 & 6 & \infty & 0 & 5 \\ x_4 & 0 & 5 & \infty & 0 \\ x_5 & 1 & 0 & 7 & \infty \end{array}$$

Видим, что в полученной матрице во всех строках и столбцах есть хотя бы один нулевой элемент. Поэтому константа приведения на этом шаге равна 0. Таким образом, нижняя граница всех гамильтоновых контуров, проходящих через дугу (3,2) не меняется и равна 7, а нижняя граница гамильтоновых контуров не проходящих через дугу (3,2) равна 7+6=13 (см. число над нулевым элементом (3,2)). Далее вновь проставляем над каждым нулевым элементом числа, равные сумме минимального элемента строки и столбца, на пересечении которых находится данный нулевой элемент. Получим

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & \infty & 5 & 0^{3} & 3 \\ x_2 & 6 & \infty & 0^{5} & 5 \\ x_4 & 0^{1} & 5 & \infty & 0^{3} \\ x_5 & 1 & 0^{6} & 7 & \infty \end{array}$$

Выбираем дугу для ветвления с максимальным числом, стоящим над нулевым элементом. Это дуга (5,3). Производим стягивание по этой дуге (результат показываем на дереве ветвления). В результате имеем

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & \infty & 5 & 0^{3} & 3 \\ x_2 & 6 & \infty & 0^{5} & 5 \\ x_4 & 0^{1} & 5 & \infty & 0^{3} \\ x_5 & 1 & 0^{6} & 7 & \infty \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & x_1 & x_4 & x_5 \\ x_1 & \infty & 0 & 3 \\ x_2 & 6 & 0 & 5 \\ x_4 & 0 & \infty & 0 \end{array}$$

Видим, что константа приведения вновь равна 0. Поэтому нижняя граница гамильтоновых контуров, проходящих через дуги (3,2) и (5,3) равна 7+0=7. Нижняя граница гамильтоновых контуров, проходящих через дугу (3,2) и не проходящих через дугу (5,3) равна 7+6=13 (см. матрицу четвертого порядка). Выбираем дугу для ветвления:

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & x_4 & x_5 \\ x_1 & \infty & 0^{3} & 3 \\ x_2 & 6 & 0^{5} & 5 \\ x_4 & 0^{6} & \infty & 0^{3} \end{array}$$

Видим, что это дуга (4,1). Далее производим стягивание по дуге (4,1). Получаем

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \infty & 0^{|3} & 3 \\ 6 & 0^{|5} & 5 \\ 0^{|6} & \infty & 0^{|3} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_4 & x_5 \end{array} & \end{array} \to \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \infty & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} x_4 & x_5 \end{array} & \end{array}$$

При этом нижняя граница гамильтоновых контуров, проходящих через дуги (3,2) и (5,3) и не проходящих через дугу (4,1) равна 7+6=13 (см. матрицу третьего порядка). Константа приведения на этом шаге равна 3 (вычитаем из первой строки матрицы второго порядка 3). Следовательно, нижняя граница гамильтоновых контуров, проходящих через дуги (3,2), (5,3) и (4,1) равна 7+3=10. Вычитая 3 из первой строки, получаем матрицу

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \infty & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} x_4 & x_5 \end{array} & \end{array}$$

Отсюда ясно, что оставшиеся дуги, которые нужно включить в оптимальный гамильтонов контур это (1,5) и (2,4). В итоге получаем оптимальный контур 3-2-4-1-5-3 (см. рис.13.2). Его вес 10.

13.2.3. Решить ту же задачу для графа, заданного матрицей весов:

$$\begin{pmatrix} \infty & 30 & 46 & 19 & 2 \\ 10 & \infty & 19 & 3 & 2 \\ 21 & 15 & \infty & 35 & 0 \\ 26 & 22 & 30 & \infty & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & \infty \end{pmatrix}$$

Решение. Будем вновь решать задачу методом ветвей и границ. Вычитаем из каждой строки матрицы весов минимальный элемент этой строки. Получаем

$$\begin{pmatrix} \infty & 30 & 46 & 19 & 2 \\ 10 & \infty & 19 & 3 & 2 \\ 21 & 15 & \infty & 35 & 0 \\ 26 & 22 & 30 & \infty & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & \infty \end{pmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{array} \to \begin{pmatrix} \infty & 28 & 44 & 17 & 0 \\ 8 & \infty & 17 & 1 & 0 \\ 21 & 15 & \infty & 35 & 0 \\ 22 & 18 & 26 & \infty & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

Затем вычитаем из первых трех столбцов минимальные элементы этих столбцов. Тогда получим

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} \infty & 28 & 44 & 17 & 0 \\ 8 & \infty & 17 & 1 & 0 \\ 21 & 15 & \infty & 35 & 0 \\ 22 & 18 & 26 & \infty & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \infty \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & \;\;2 & \;\;1 & \;\;0 & \;\;0 \end{matrix}\end{array} \to \begin{pmatrix} \infty & 26 & 43 & 17 & 0 \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 0 \\ 20 & 13 & \infty & 35 & 0 \\ 21 & 16 & 25 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

Складываем числа, которые мы вычитали из строк и столбцов. Получим константу приведения h=14. Отмечаем это число на дереве ветвления (см. рис. 13.3). Таким образом, вес всех гамильтоновых контуров в исходном графе не меньше 14. Далее проставляем над каждым нулевым элементом матрицы числа, равные сумме минимального элемента строки и столбца, на пересечении которых стоит данный нулевой элемент, исключая сам этот элемент. Получаем

$$\begin{pmatrix} \infty & 26 & 43 & 17 & 0^{17} \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 0^{1} \\ 20 & 13 & \infty & 35 & 0^{13} \\ 21 & 16 & 25 & \infty & 0^{16} \\ 0^{7} & 0^{13} & 0^{16} & 0^{1} & \infty \end{pmatrix}$$

Далее выберем дугу ветвления. Это дуга (1,5). Произведем стягивание по дуге (1,5), для чего вычеркнем из приведенной матрицы первую строку и пятый столбец. Кроме того, заменим элемент, соответствующий дуге (5,1) в полученной матрице на бесконечность. Отмечаем соответствующие изменения на дереве ветвления. Получаем

$$\begin{pmatrix} \infty & 26 & 43 & 17 & 0^{17} \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 0^{1} \\ 20 & 13 & \infty & 35 & 0^{13} \\ 21 & 16 & 25 & \infty & 0^{16} \\ 0^{7} & 0^{13} & 0^{16} & 0^{1} & \infty \end{pmatrix} \to \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 7 & \infty & 16 & 1 \\ 20 & 13 & \infty & 35 \\ 21 & 16 & 25 & \infty \\ \infty & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 & \;\; x_2 & \;\; x_3 & \;\; x_4 \end{matrix} & \end{array}$$

Видим, что в полученной матрице не во всех строках и столбцах есть нулевые элементы. Поэтому вычитаем из первой строки 1, из второй 13, из третьей 16. Затем вычитаем из первого столбца полученной матрицы 5. В результате константа приведения на этом шаге равна $h' = 35 \Rightarrow h + h' = 49$. Таким образом, нижняя граница всех гамильтоновых контуров, проходящих через дугу (1,5) равна 49, а нижняя граница гамильтоновых контуров не

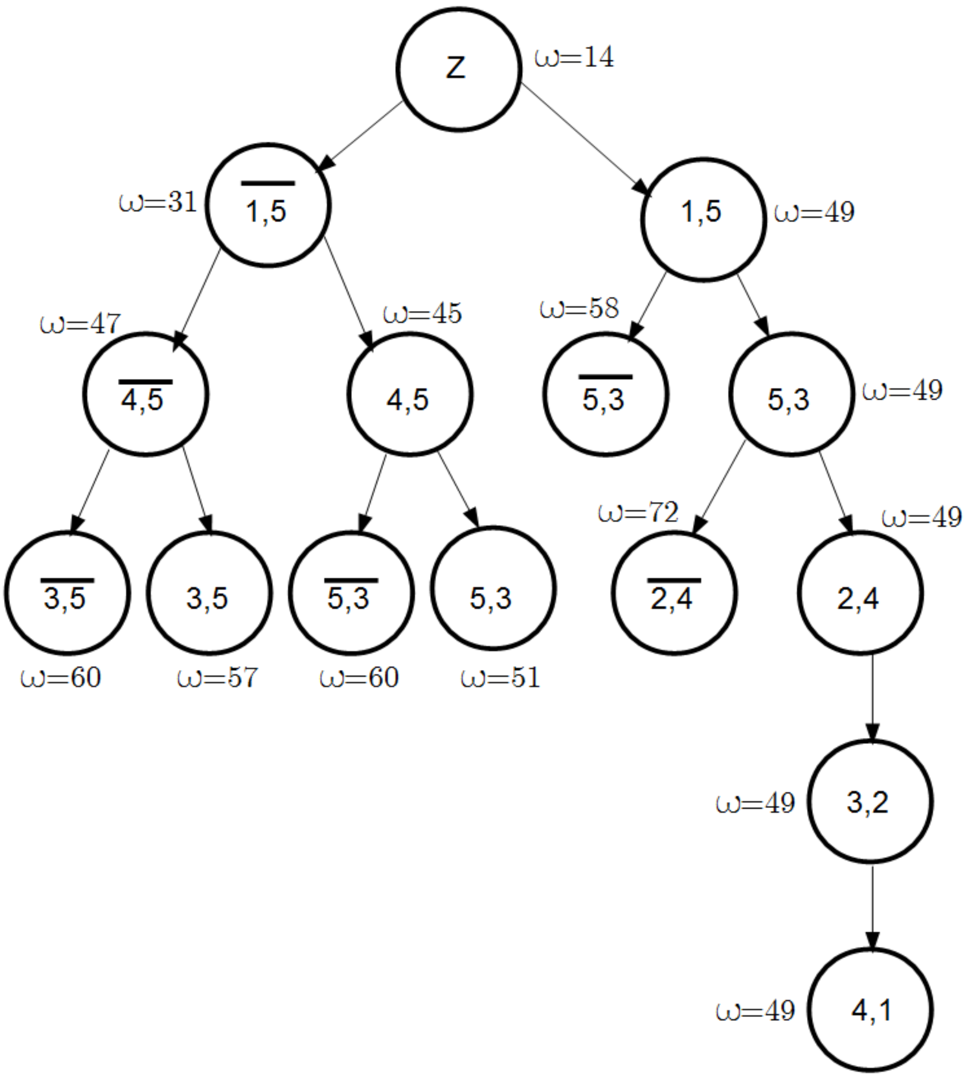


Рис. 13.3

проходящих через дугу (1,5) равна 17+14=31 (см. число над нулевым элементом (1,5)). Так как 31<49, то необходимо далее производить ветвление множества контуров, не проходящих по дуге (1,5) (это соответствует «левой» ветви дерева ветвления на рис. 13.3). Для этого рассмотрим приведенную матрицу пятого порядка, изображенную выше. Заменим в ней элемент (1,5) на бесконечность. Получим

$$\begin{pmatrix} \infty & 26 & 43 & 17 & \infty \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 0 \\ 20 & 13 & \infty & 35 & 0 \\ 21 & 16 & 25 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

Видно, что константа приведения будет равна 14+17=31. То есть вновь получаем, что вес гамильтоновых контуров, не проходящих через дугу (1,5) не меньше 31. Далее вновь проставляем над каждым нулевым элементом числа, равные сумме минимального элемента строки и столбца, на пересечении которых находится данный нулевой элемент. Выбираем затем дугу ветвления (4,5). Тогда имеем

$$\begin{pmatrix} \infty & 9 & 26 & 0^{|9} & \infty \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 0^{|1} \\ 20 & 13 & \infty & 35 & 0^{|13} \\ 21 & 16 & 25 & \infty & 0^{|16} \\ 0^{|7} & 0^{|9} & 0^{|16} & 0^{|0} & \infty \end{pmatrix} \to \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \infty & 9 & 26 & 0 \\ 7 & \infty & 16 & 1 \\ 20 & 13 & \infty & 35 \\ 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 & \quad x_2 & \quad x_3 & \quad x_4 \end{matrix} & \end{array}$$

Заметим, что в матрице пятого порядка имеется два нулевых элемента с одинаковыми числами над ними равными 16. Выбираем любой из них. Мы взяли элемент (4,5). После стягивания по дуге (4,5) получаем матрицу четвертого порядка, изображенную выше. Видим, что константа приведения на этом шаге равна $h'' = 14$ (вычитаем 1 из второй строки и 13 из третьей), поэтому нижняя граница гамильтоновых контуров, проходящих через дугу (4,5) и не проходящих через дугу (1,5) равна 45, а не проходящих через дуги (4,5) и (1,5) равна 31+16=47 (см. матрицу пятого порядка). Так как узел ветвления (4,5) на дереве ветвления имеет минимальный вес 45, то нужно ветвить далее множество контуров, проходящих через дугу (4,5). Поэтому продолжаем работать с матрицей четвертого порядка, приведенной выше. Имеем

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \infty & 9 & 26 & 0^{|9} \\ 6 & \infty & 15 & 0^{|6} \\ 7 & 0^{|7} & \infty & 22 \\ 0^{|6} & 0^{|0} & 0^{|15} & \infty \end{pmatrix} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 & \quad x_2 & \quad x_3 & \quad x_4 \end{matrix} & \end{array}$$

Выбираем дугу для ветвления с максимальным числом, стоящим над нулевым элементом. Это дуга (5,3). Производим стягивание по этой дуге (результат показываем на дереве ветвления). В результате имеем:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \infty & 9 & 26 & 0^{|9} \\ 6 & \infty & 15 & 0^{|6} \\ 7 & 0^{|7} & \infty & 22 \\ 0^{|6} & 0^{|0} & 0^{|15} & \infty \end{pmatrix} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 & \quad x_2 & \quad x_3 & \quad x_4 \end{matrix} & \end{array} \to \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \infty & 9 & 0 \\ 6 & \infty & 0 \\ 7 & 0 & 22 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 & \quad x_2 & \quad x_4 \end{matrix} & \end{array}$$

Видим, что константа приведения равна 6. Нижняя граница гамильтоновых контуров, не проходящих через дугу (1,5) и проходящих через дуги (4,5) и (5,3), равна 45+6=51, а контуров, не проходящих через (1,5), (5,3) и проходящих через (4,5) равна 45 +15=60. Минимальный вес 47 теперь будет у узла $\overline{(4,5)}$ на дереве ветвления, поэтому нужно ветвить далее это множество. Для этого вновь возвращаемся к матрице пятого порядка, в которой элемент

(1,5) заменен на бесконечность. Заменяем в ней элемент (4,5) также на бесконечность. Тогда константа приведения $h'' = 16 + 17 = 33$. Это значит, что нижняя граница гамильтоновых контуров, не проходящих через дуги (1,5) и (4,5) равна 14+33=47 (что мы уже получали другим способом). В результате вычитания из первой строки матрицы числа 17 и из четвертой строки числа 16 получим

$$\begin{pmatrix} \infty & 9 & 26 & 0^{|9} & \infty \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 0^{|1} \\ 20 & 13 & \infty & 35 & 0^{|13} \\ 5 & 0^{|5} & 9 & \infty & \infty \\ 0^{|5} & 0^{|0} & 0^{|9} & 0^{|0} & \infty \end{pmatrix}$$

Видим, что нужно ветвить по дуге (3,5). Произведя стягивание, имеем

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \infty & 9 & 26 & 0 \\ 7 & \infty & 16 & 1 \\ 5 & 0 & 9 & \infty \\ 0 & 0 & \infty & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \end{array}$$

Видно, что константа приведения у данной матрицы равна 10, поэтому веса у узлов ветвления на самом левом ярусе дерева ветвления (3,5) и $\overline{(3,5)}$ равны 47+10=57 и 47+13=60 соответственно. Это значит, что минимальный вес имеет узел (1,5) на самом правом ярусе дерева ветвления (его вес 49). Поэтому вновь возвращаемся к матрице четвертого порядка, полученной при ветвлении по дуге (1,5) (см. выше), и вычитаем соответствующие элементы из первой, второй и третьей строк, а затем из первого столбца:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 7 & \infty & 16 & 1 \\ 20 & 13 & \infty & 35 \\ 21 & 16 & 25 & \infty \\ \infty & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & \infty & 15 & 0 \\ 2 & 0 & \infty & 22 \\ 0 & 0 & 9 & \infty \\ \infty & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \end{array}$$

Проставляем соответствующие числа над нулевыми элементами полученной матрицы

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & \infty & 15 & 0^{|1} \\ 2 & 0^{|2} & \infty & 22 \\ 0^{|1} & 0^{|0} & 9 & \infty \\ \infty & 0^{|0} & 0^{|9} & 0^{|0} \end{pmatrix} \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \end{array}$$

Нужно ветвить по дуге (5,3). После стягивания получаем матрицу

$$\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\left(\begin{array}{ccc} 1 & \infty & 0^{|23} \\ 2 & 0^{|2} & 22 \\ 0^{|1} & 0^{|0} & \infty \end{array}\right)} & \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \\ x_1 & x_2 & x_4 & \end{array}$$

Ее константа приведения равна нулю. Поэтому продолжаем ветвить по самой правой ветви дерева. Ветвим (см. матрицу выше) по дуге (2,4). Далее производим стягивание по дуге (2,4). Получаем

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{3}{c}{\left(\begin{array}{ccc} \cancel{1} & \cancel{\infty} & \cancel{0^{|23}} \\ 2 & 0^{|2} & \cancel{22} \\ 0^{|1} & 0^{|0} & \cancel{\infty} \end{array}\right)} & \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \\ x_1 & x_4 & x_5 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & \infty \end{array}\right)} & \begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \end{array} \\ x_1 & x_2 & \end{array}$$

Константа приведения на этом шаге равна 0. Видим, что оставшиеся дуги, которые нужно включить в оптимальный гамильтонов контур это (3,2) и (4,1). В итоге получаем оптимальный контур 1-5-3-2-4-1 (см. рис.13.3). Его вес 49.

13.3. Задачи для самостоятельного решения.

13.3.1. Определить какие из приведенных графов являются эйлеровыми (полуэйлеровами) или гамильтоновыми (полугамильтоновыми).

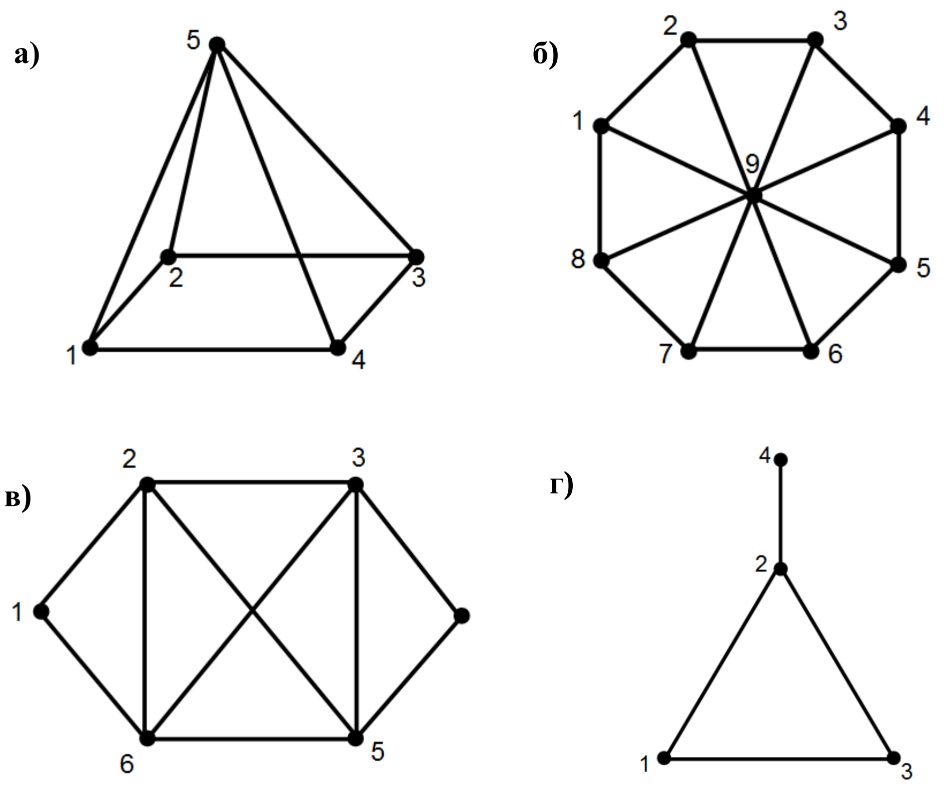


Рис. 13.4

13.3.2. Решить задачу коммивояжера для графов, заданных матрицами весов

а) $\begin{pmatrix} \infty & 22 & 13 & 31 & 1 \\ 42 & \infty & 9 & 31 & 16 \\ 9 & 11 & \infty & 9 & 7 \\ 21 & 13 & 13 & \infty & 9 \\ 39 & 29 & 10 & 13 & \infty \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} \infty & 30 & 19 & 46 & 2 \\ 13 & \infty & 6 & 22 & 5 \\ 31 & 27 & \infty & 35 & 9 \\ 4 & 17 & 37 & \infty & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 4 & \infty \end{pmatrix}$

Ответы. 13.3.1. а), б) гамильтонов, **в)** гамильтонов и эйлеров, **г)** полуэйлеров и полугамильтонов. **13.3.2. а)**1-5-4-2-3-1, вес цикла 45. **б)** 1-5-2-3-4-1, вес цикла 52.

ЗАНЯТИЕ 14

ПОТОКИ В СЕТЯХ

14.1. Основные понятия

14.1.1. *Транспортной сетью* называется связный граф, в котором заданы *пропускные способности* дуг, т. е. числа c_{ij}. *Исток* - вершина, в которую не входит ни одна дуга, *сток* - вершина, из которой не выходит ни одна дуга.

14.1.2. *Потоком* в сети между вершиной s (истоком) и t (стоком) называется набор чисел φ_{ij}, (т. е. количество условного “груза”, перевозимого из вершины с номером i в вершину с номером j), удовлетворяющих четырем условиям:

1) числа $\varphi_{ij}\geq 0$;

2) числа $\varphi_{ij} \leq c_{ij}$ (соответствующих пропускных способностей дуг);

3) если вершина с номером i – промежуточная (не совпадает с источником и стоком), то

$$\sum_j \varphi_{ij} = \sum_k \varphi_{ki},$$

т. е. количество “груза”, вывозимого из вершины i, равно количеству “груза”, ввозимого в эту вершину;

4) количество “груза”, вывозимого из источника s, должно быть равно количеству груза, ввозимого в сток t:

$$\sum_j \varphi_{sj} = \sum_i \varphi_{it} = f$$

14.1.3. Число f называется *величиной данного потока* или просто *потоком* между s и t.

14.1.4. *Разрезом* (*сечением*) транспортной сети называется множество дуг, соединяющих множества Y и Z , где Y, Z - разбиение множества вершин X графа на два непересекающихся подмножества таких, что $s \in Y, t \in Z$.

14.1.5. *Величиной* (*пропускной способностью*) *разреза* называется сумма пропускных способностей дуг, образующих разрез:

$$C(P) = \sum_{(x_i, x_j) \in P} c_{ij} \qquad (1)$$

причем сумма берется по всем дугам таким, что $x_i \in Y$, $x_j \in Z$

14.1.6. *Величиной потока через разрез* назовем величину

$$f(P) = \sum_{(x_i, x_j) \in P^+} \varphi_{ij} - \sum_{(x_k, x_l) \in P^-} \varphi_{lk} \qquad (2)$$

где P^+- множество дуг разреза с началом в Y, а P^- - множество дуг с началом в Z.

14.1.7. Разрез называется *минимальным* (*максимальным*), если величина потока через разрез минимальна (максимальна).

14.1.8. Теорема Форда – Фалкерсона. Максимальный поток между вершинами s и t равен величине минимального разреза между этими вершинами.

14.2. Решение типовых задач.

14.2.1. Задан граф транспортной сети

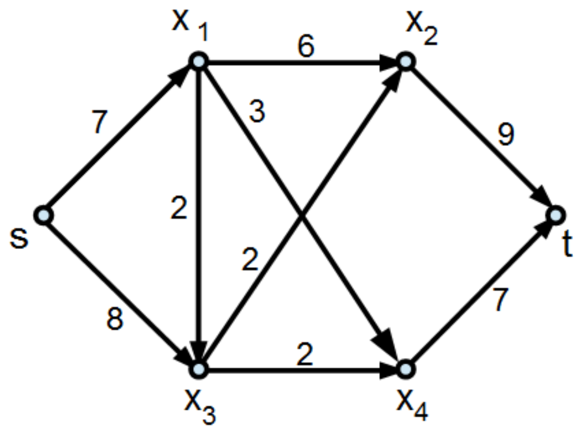


Рис.14.1

Найти максимальный поток в заданной транспортной сети, используя алгоритм Форда-Фалкерсона. Проверить ответ по теореме Форда-Фалкерсона (найти минимальный разрез графа сети).

Решение. Находим путь из s в t как можно большей пропускной способности. Путь максимальной пропускной способности можно найти с помощью алгоритма Дейкстры, а для небольшой сети – визуально по графу. В данном случае это путь $s - x_1 - x_2 - t$.

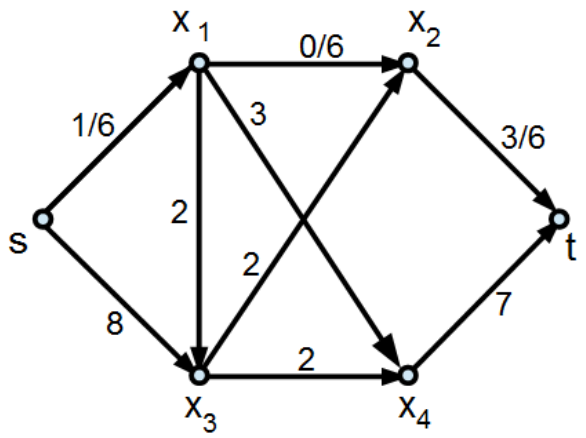


Рис. 14.2

Пропускная способность этого пути равна 6. На графе показываем остаточные пропускные способности дуг вдоль рассматриваемого пути. При отображении данной информации будем использовать формат *A*/*B*, где *A* = *c*(*u*,*v*) – остаточная пропускная способность дуги, *B* = *c*(*v*,*u*) – остаточная пропускная способность противоположной дуги (то есть, сколько единиц груза можно провести в обратном направлении). Например, для дуги $s-x_1$ *A*=1, *B*=6, так как в прямом направлении можно еще провести 1 единицу груза, а в обратном 6 единиц. Обратим внимание, что ноль у метки дуги x_1-x_2 означает (см. рис. 14.2), что эта дуга насыщенная, то есть в прямом направлении по ней нельзя провести больше груза.

Находим следующий путь максимальной пропускной способности, пользуясь новым рисунком 14.2. Это путь $s-x_3-x_4-t$. Его пропускная способность 2. Делаем пометки на графе:

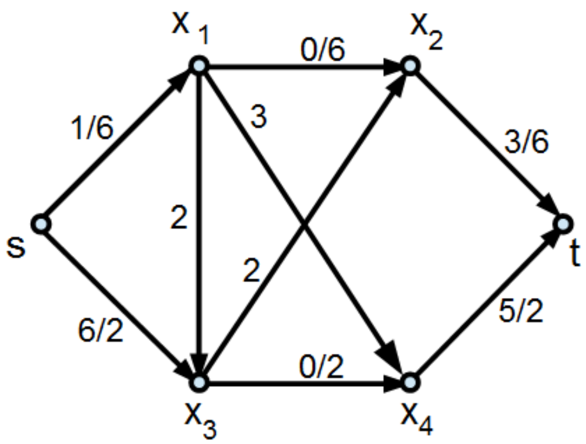


Рис. 14.3

Появилась еще одна насыщенная дуга x_3-x_4. Видим, что следующий путь $s-x_3-x_2-t$. Меняем метки на графе:

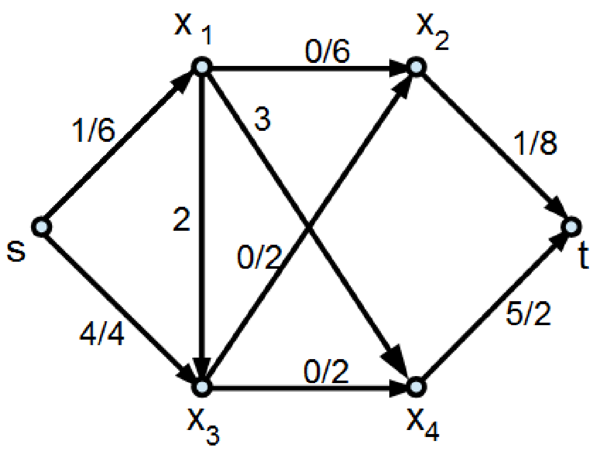


Рис. 14.4

Обратите внимание, что у дуг $s-x_3, x_3-x_2, x_2-t$ числа, стоящие слева от черты уменьшаются на 2, а числа, стоящие справа увеличиваются на 2. Из рис. 14.4 видно, что остается единственный путь $s-x_1-x_4-t$. Его пропускная способность равна 1. Меняем метки вдоль этого пути

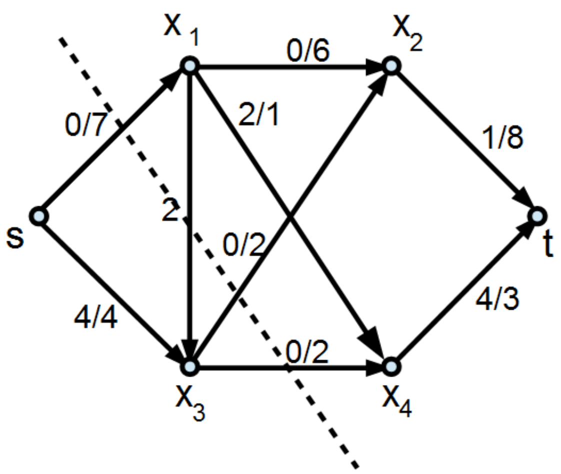


Рис. 14.5

Для того, чтобы провести минимальный разрез сети поступаем следующим образом. Пометим вершины графа, к которым можно еще провести груз из истока *s*. Это вершины s, x_3 (сам исток всегда помечен). Вершины s, x_3 образуют множество *Y*, оставшиеся вершины образуют множество *Z*. Разрез сети отделяет помеченные и непомеченные вершины. Он показан пунктирной линией на рисунке 14.5. Заметим, что числа, стоящие справа от черты у меток дуг графа определяют величины потока через данную дугу. Видим, что разрез сети проходит по насыщенным прямым дугам, идущим из множества *Y* в множество *Z* и одной дуги, идущей из *Z* в *Y* с нулевым значением потока. В соответствии с формулой (2) величина потока через разрез равна 7+2+2-0=11. При этом в соответствии с формулой (1) величина разреза равна 7+2+2=11. Таким образом, выполняется утверждение теоремы Форда-Фалкерсона.

14.2.2. Решить аналогичную задачу для транспортной сети

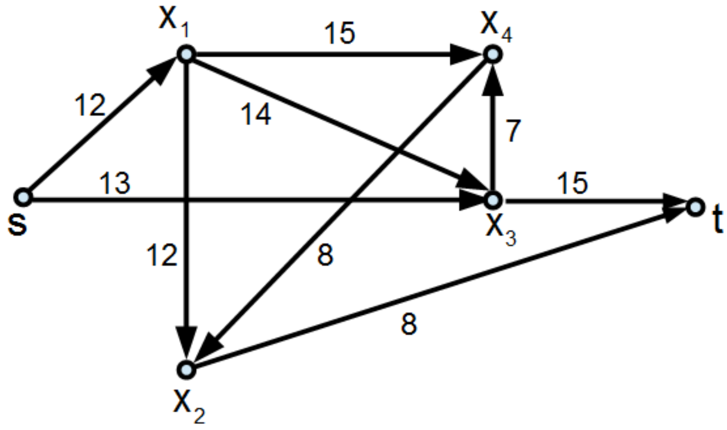


Рис.14.6

Решение. Имеем путь максимальной пропускной способности $s-x_3-t$. Его пропускная способность 13. Получаем новый рисунок графа

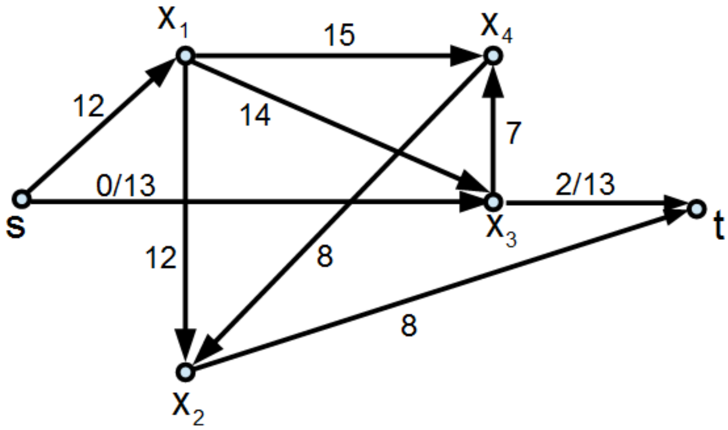


Рис. 14.7

Следующий путь $s-x_1-x_2-t$. Его пропускная способность 8. Получаем новый рисунок

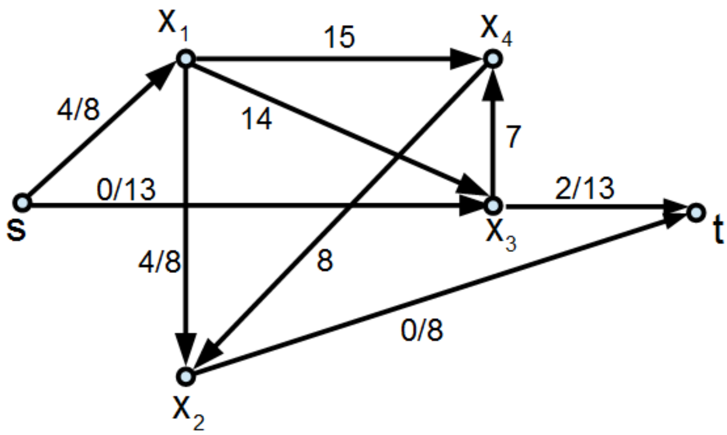


Рис. 14.8

Остается путь $s-x_1-x_3-t$. Его пропускная способность 2. Получаем граф

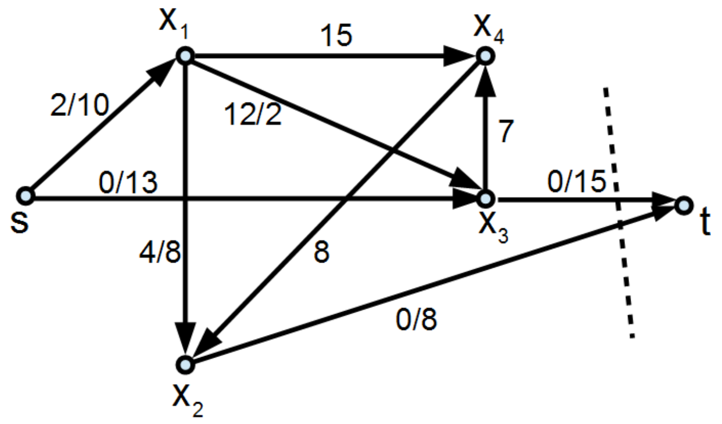


Рис. 14.9

Видим, что множество вершин, которые можно пометить $Y=\{s, x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Множество *Z* состоит только из одной вершины *t*. Поэтому разрез проводим, как показано на рис. 14.9 (пунктирной линией). Величина максимального потока равна 23.

14.2.3. Решить аналогичную задачу для транспортной сети

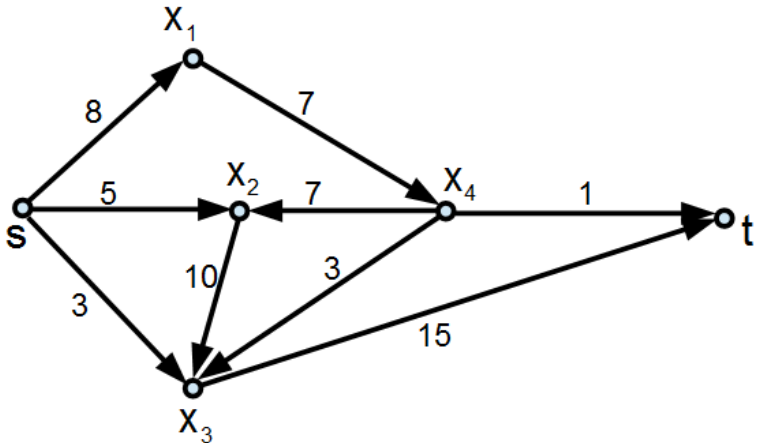


Рис. 14.10

Решение. Имеем путь максимальной пропускной способности $s-x_1-x_4-x_2-x_3-t$. Его пропускная способность 7. Имеем новый рисунок графа

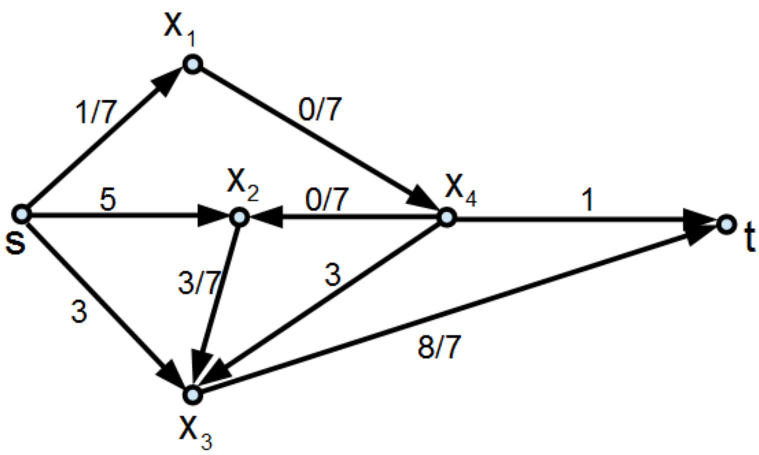


Рис. 14.11

Далее имеем путь $s - x_3 - t$. Его пропускная способность 3. Имеем новый рисунок графа

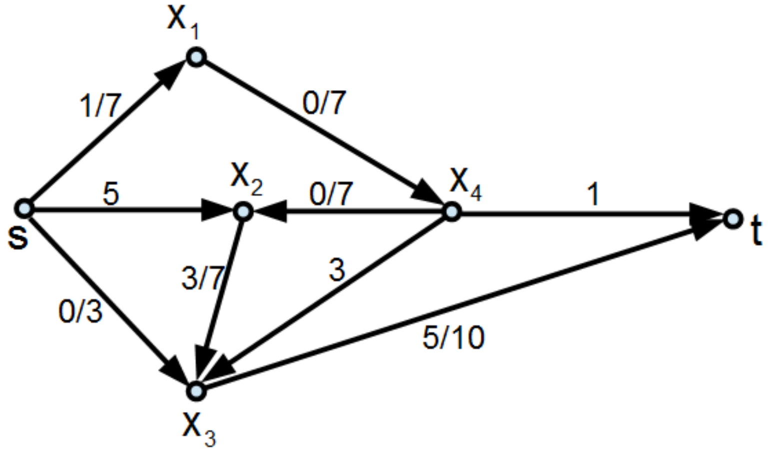


Рис. 14.12

Следующий путь $s - x_2 - x_3 - t$. По нему можно также пропустить 3 единицы груза. Получаем

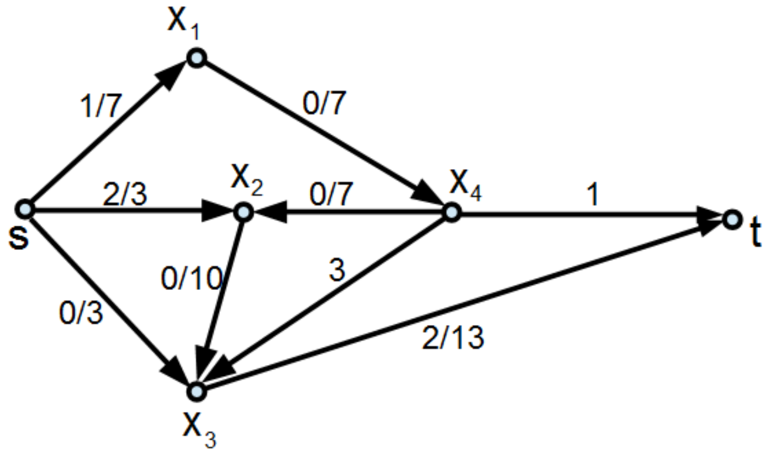


Рис. 14.13

Видим, что больше путей, состоящих из прямых дуг, из вершины *s* в вершину *t* нет. На этом этапе можно найти так называемый полный поток. Его величина равна сумме всех потоков, которые мы получили вдоль рассмотренных выше путей: 7+3+3=13. Далее рассмотрим неориентированный путь $s - x_2 - x_4 - x_3 - t$, в котором дуга $x_2 - x_4$ - обратная. Видно, что пропускная способность этого пути равна 2. Делаем пометки на графе. При этом для обратной дуги прибавляем 2 к цифре, стоящей слева от черты и вычитаем 2 из цифры, стоящей справа. Получим

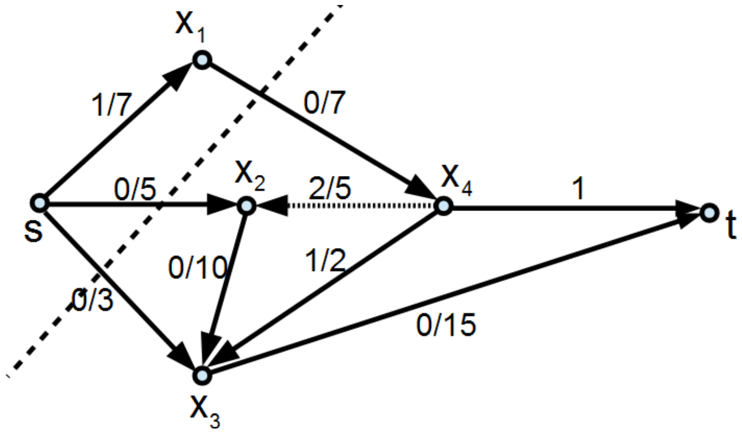


Рис. 14.14

Обратная дуга показана точками на рис. 14.14. Далее помечаем вершины, в которые можно попасть из s. Это $Y = \{s, x_1\}$. Остальные вершины не помечены. Разрез показан на рисунке пунктирной линией. Он состоит из прямых дуг $s - x_1$, $s - x_2$, $s - x_3$. Величина максимального потока равна 7+5+3=15.

14.3. Задачи для самостоятельного решения.

14.3.1. Найти максимальный поток в заданных транспортных сетях, заданных на рис. 14.15. Найти минимальный разрез графа сети.

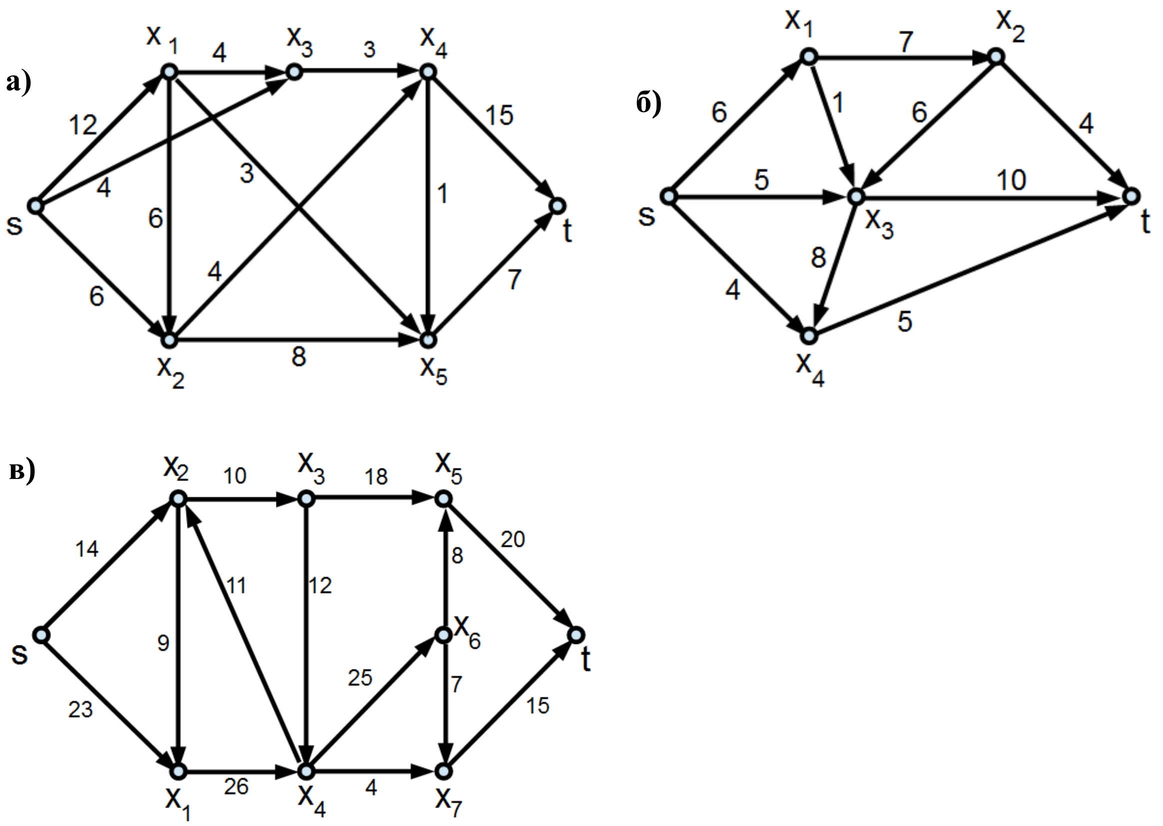


Рис. 14.15

Ответы (величина максимального потока)**. а).** 14. **б).** 15**. в).** 29**.**

ЗАНЯТИЕ 15

ПЛАНАРНОСТЬ ГРАФОВ

15.1. Основные понятия

15.1.1. *Плоским* называется граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра - непрерывными плоскими линиями без самопересечений, причем никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины.

15.1.2. Любой граф, изоморфный плоскому графу, называется *планарным*.

15.1.3. Если по части плоскости, ограниченной циклом плоского графа, не проходит ни одна цепь этого графа, начало и конец которой принадлежит данному циклу, то эту часть плоскости называют *гранью* плоского графа.

15.1.4. Теорема Эйлера. Для всякого плоского связного графа выполняется равенство

$$p - q + f = 2,$$

где p - число вершин, q - число ребер и f - число граней графа.

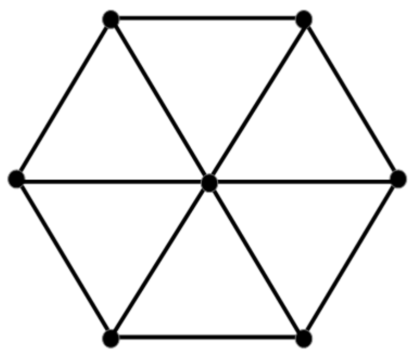
15.1.5. *Операцией разбиения* ребра $e=(u,v)$ называют замену ребра e двумя ребрами (u,s) и (s,v), где s - новая вершина.

15.1.6. Два графа называются *гомеоморфными*, если они могут быть получены из одного графа с помощью операции разбиения ребер или обратной к ней операции.

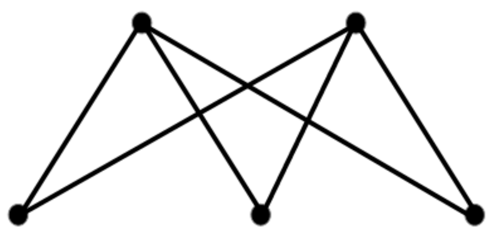
15.1.7. Теорема Понтрягина-Куратовского. Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$.

15.2. Решение типовых задач.

15.2.1. Проверить теорему Эйлера для графа W_n и графа $K_{2,n}$. Примеры данных графов изображены на рис. 15.1.



а) Граф W_7



б) Граф $K_{2,3}$

Рис. 15.1

Решение.
а). Для графа W_n имеем
$p = n, \quad q = 2n - 2, \quad f = n \Rightarrow \quad p - q + f = n - (2n - 2) + n = 2.$
б). Граф $K_{2,n}$ изоморфен плоскому графу. Например, для графа $K_{2,3}$ имеем изоморфный плоский граф:

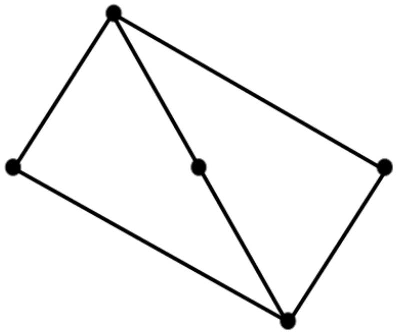
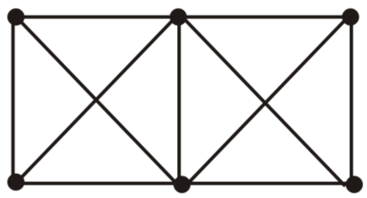


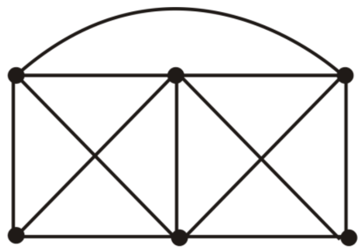
Рис. 15.2

имеем $p = n + 2, \quad q = 2n, \quad f = n \Rightarrow \quad p - q + f = n + 2 - 2n + n = 2$.

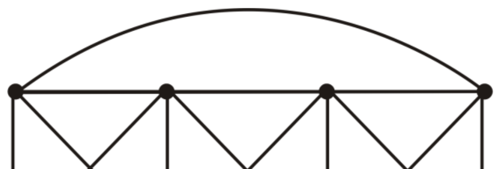
15.2.2. Какие из графов, изображенных на рис. 15.3 являются планарными?



а)



б)



в)

Рис. 15.3

Решение. На рисунке 15.4 изображены графы, изоморфные графам рис. 15.3. Как видно графы рис. 15.3 а) и б) планарны, а граф рис. 15.3 в) не планарен (ребро указанное пунктиром нельзя расположить в какой либо грани графа, то есть оно имеет точку пересечения, не совпадающую с вершиной ребра). Ниже будет строго доказано, что граф рис. 15.3 в) не планарен.

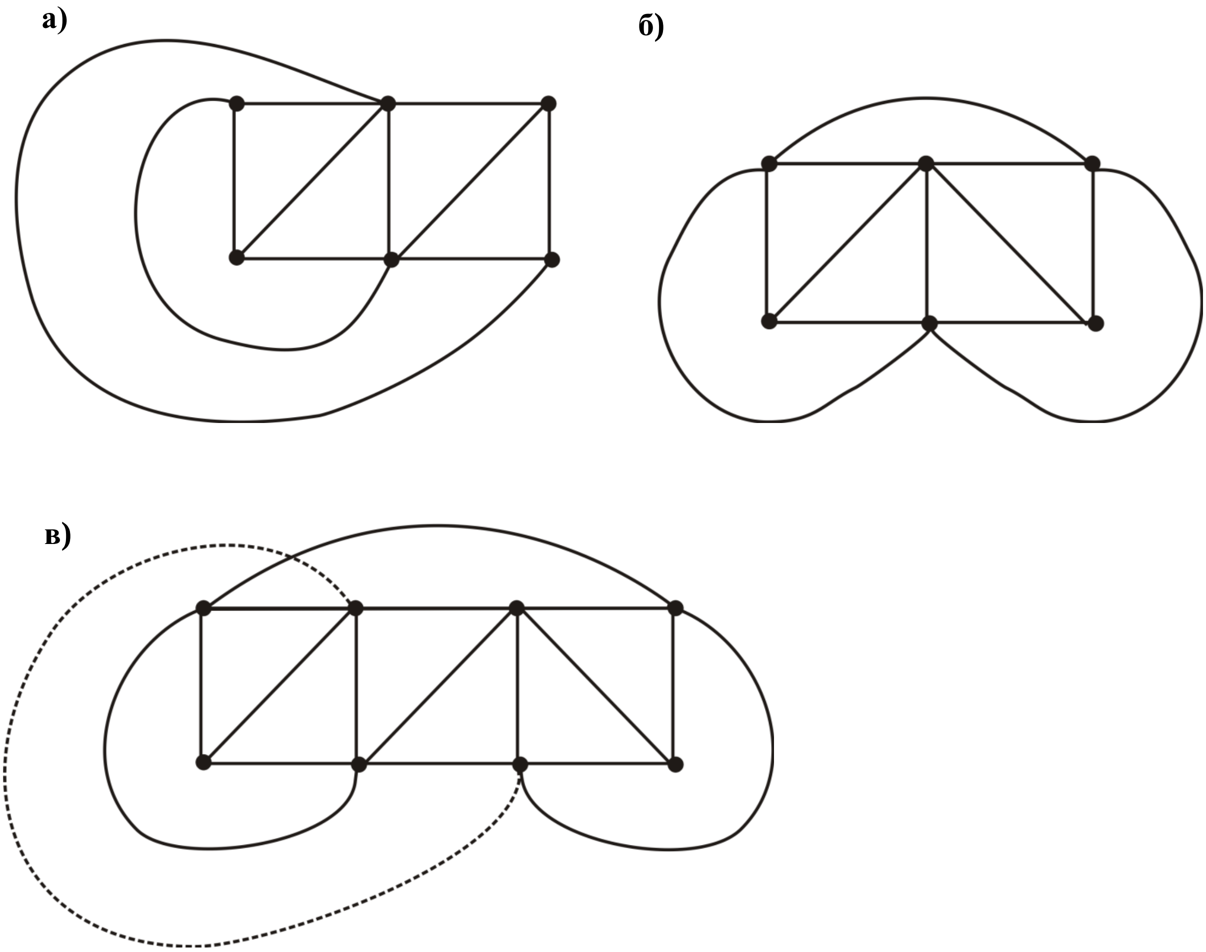


Рис. 15.4

15.2.3. Установить непланарность графа K_5, используя теорему Эйлера.
Решение. Обозначим через φ_3 - число граней, ограниченных *k* ребрами. Так как в графе нет петель и кратных ребер, то

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

Запишем соотношения

$$f = \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \ldots$$

$$2q = 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 5\varphi_5 + \ldots$$

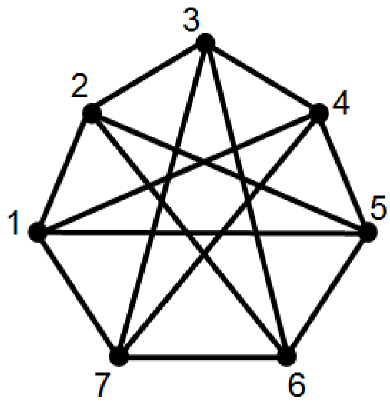
Во втором равенстве просуммированы ребра, ограничивающие каждую грань, при этом каждое ребро учитывается дважды, поэтому в левой части стоит величина 2*q*. У графа K_5 *p*=5, *q*=10. Если бы граф K_5 был плоским, то из теоремы Эйлера следовало бы, что *f* =7. Тогда получаем

$$21 = 3\varphi_3 + 3\varphi_4 + 3\varphi_5 + \ldots$$

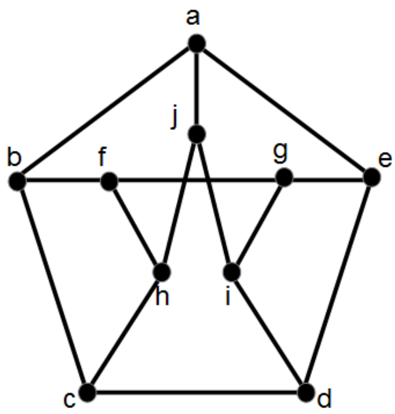
$$20 = 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 5\varphi_5 + \ldots$$

Получаем противоречие. То есть граф непланарен.

15.2.4. Применяя критерий Понтрягина-Куратовского, доказать непланарность графов



а)



б)

Рис. 15.5

и графа рис. 15.3 в).

Решение.

а) Удалим из графа ребра 37, 47, 26, 15. Получаем

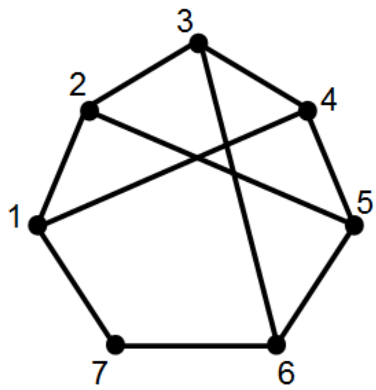


Рис. 15.6

Проводя обратное подразбиение ребер 17 и 76, получаем граф $K_{3,3}$:

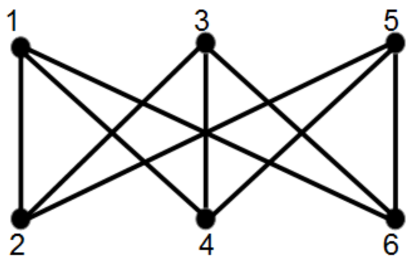


Рис. 15.7

б). После удаления рёбер eg и fh получаем подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$:

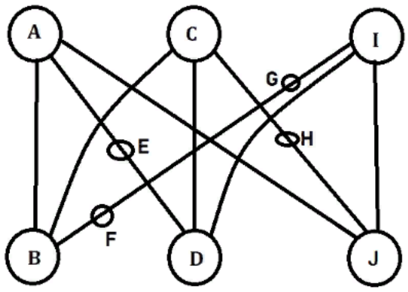


Рис. 15.8

в). Докажем, что граф рис. 15.8 в) не планарен. Имеем следующий подграф

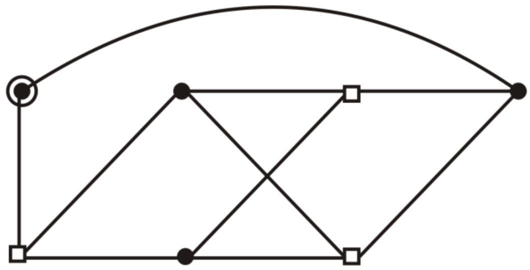


Рис. 15.9

Он гомеоморфен $K_{3,3}$, следовательно рассматриваемый граф не планарен.

15.3. Задачи для самостоятельного решения.

15.3.1. Какие из графов, изображенных на рис.15.10 являются планарными?

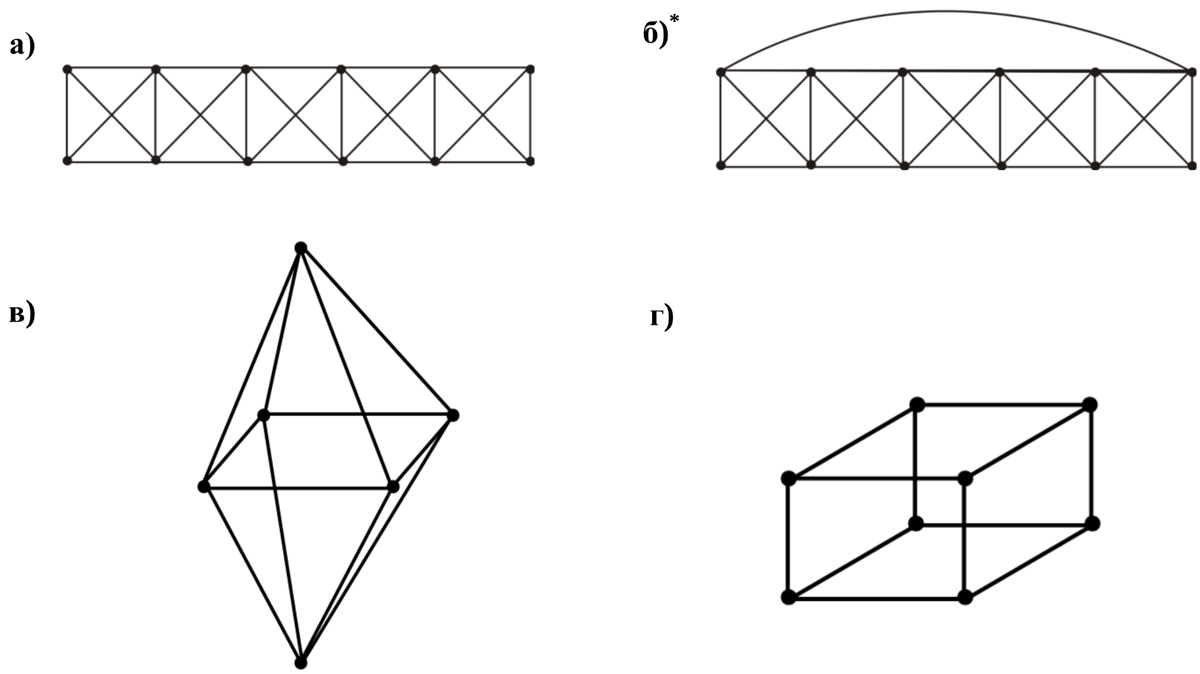


Рис. 15.10

Указание: для рис. 15.10 б) использовать результат задачи 15.2.4.

15.3.2. Доказать непланарность графов K_6 и $K_{3,3}$, используя формулу Эйлера.

15.3.3. Применяя критерий Понтрягина-Куратовского, доказать непланарность графов:

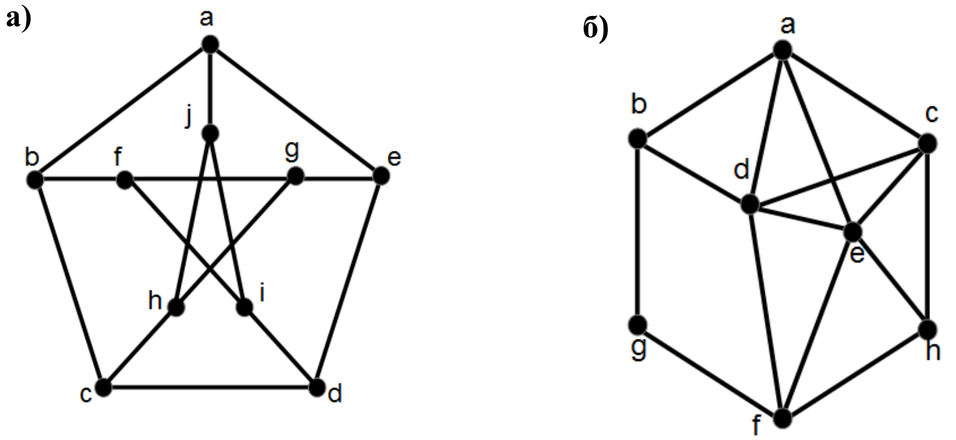


Рис. 15.11

Ответы. 15.3.1. Графы, изображенные на рисунках 15.10а,15.10в, 15.10г планарны.

ЗАНЯТИЕ 16

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

16.1. Основные понятия

16.1.1. *Конечным автоматом* называется совокупность пяти объектов: $A = (X, Y, Q, \delta, \lambda)$, где X, Y, Q - некоторые непустые конечные множества. Множество X называется *входным алфавитом*, а последовательности символов из множества X называются *входными словами*. Множество Y называется *выходным алфавитом*, а последовательности элементов из Y – *выходными словами*. Множество Q называется *множеством состояний* автомата. Функция $\delta : X \times Q \to Q$ называется *функцией переходов*, а функция $\lambda : X \times Q \to Y$ - *функцией выходов*.

16.1.2. Пусть зафиксировано некоторое состояние автомата q_0. Тогда соотношения

$$\begin{cases} q(t+1) = \delta[x(t), q(t)] \\ y(t) = \lambda[x(t), q(t)]. \end{cases} \qquad (1)$$

где $q(t), q(t+1) \in Q, x(t) \in X, y(t) \in Y$, дополненные начальным условием $q(1) = q_0$, задают оператор, который преобразует всякую последовательность входных символов: $x(1), x(2), ..., x(r)$ в некоторую последовательность выходных символов той же длины: $y(1), y(2), ..., y(r)$. Модель автомата, описываемая уравнениями (1), называется автоматом *Мили*.

16.1.3. Автомат *Мура* – это автомат, задаваемый равенствами:

$$\begin{cases} q(t+1) = \delta[x(t), q(t)] \\ y(t) = \lambda[q(t+1)]. \end{cases} \qquad (2)$$

Таким образом, у автомата Мура функция выходов зависит только от состояния автомата и не зависит от входных символов.

16.1.4. Пусть q_1 - некоторое состояние автомата A_1, а q_2 – некоторое состояние автомата A_2. Тогда эти состояния *эквивалентны*, если при данных начальных состояниях автоматы A_1 и A_2 создают одинаковое выходное слово при любом одинаковом входном слове.

16.1.5. Два автомата называются *эквивалентными*, если для любого состояния одного из автоматов найдется эквивалентное ему состояние другого автомата.

16.2. Решение типовых задач.

16.2.1. По заданной матрице переходов и выходов построить графы автоматов Мили и Мура и найти выходное слово при заданном входном слове $x_2x_1x_1x_2x_2$. В случае автомата Мили первые цифры (до запятой) означают номер состояния, а вторые (после запятой) – выходной символ на данном шаге.

Автомат Мили:

q→	**1**	**2**	**3**	**4**
x_1	4,3	1,3	4,2	1,1
x_2	2,1	3,4	3,4	2,4

Автомат Мура:

y→	3	2	4	1
q→	**1**	**2**	**3**	**4**
x_1	2	4	1	1
x_2	1	2	2	3

Решение. Рассмотрим в начале автомат Мили. Пусть в начальный момент автомат находился в состоянии 1. Так как первый поступающий символ на вход автомата это x_2, то воспользовавшись вторым столбцом и третьей строкой матрицы, получаем, что на выходе автомата будем иметь символ y_1. При этом автомат перейдет в состояние 2. Далее, так как теперь автомат находится в состоянии 2, а на вход поступает символ x_1, то используя элемент матрицы во второй строке и третьем столбце, получаем, что на данном шаге автомат перейдет в состояние 1, а на выходе будем иметь символ y_3. Продолжая так дальше, в итоге получим следующую последовательность номеров состояний и выходных символов:

1	2	1	4	2	3
	y_1	y_3	y_3	y_4	y_4

На рис. 16.1 показан граф данного автомата. Вершины графа соответствуют его состояниям, а над стрелками проставлены входные (в начале стрелок) и выходные (в конце стрелок) символы (для краткости мы обозначили их как 1, 2, 3 и 4).

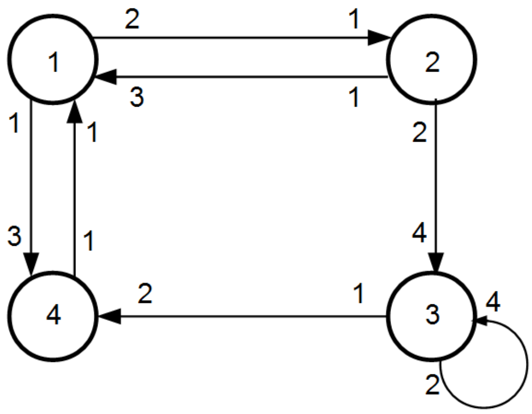


Рис.16.1

Рассмотрим теперь автомат Мура. Так как в начальный момент автомат находится в первом состоянии и на вход поступает символ x_2, то используем клетку таблицы, стоящую на пересечении второго столбца и четвертой строки. Видим, что автомат остается в первом состоянии, при этом в первой строке над номером 1, расположенном во второй строке, стоит число 3, поэтому на выходе автомата будем иметь символ y_3. Далее на вход поступает символ x_1. Тогда, так как автомат вновь находится в состоянии 1, то используя клетку таблицы, стоящую на пересечении второго столбца и третьей строки, получим, что автомат перейдет в состояние 2. Так как в первой строке над номером 2, расположенном во второй строке, стоит число 2, то на выходе автомата будем иметь символ y_2. Продолжая так дальше, в итоге получим следующую последовательность номеров состояний и выходных символов:

1	1	2	4	3	2
	y_3	y_2	y_1	y_4	y_2

На рис. 16.2 показан граф данного автомата Мура. Вершины графа соответствуют его состояниям, а над стрелками проставлены входные символы. Выходные символы указаны рядом с вершинами графа (так как они не зависят от входных символов, а зависят только от номера состояния).

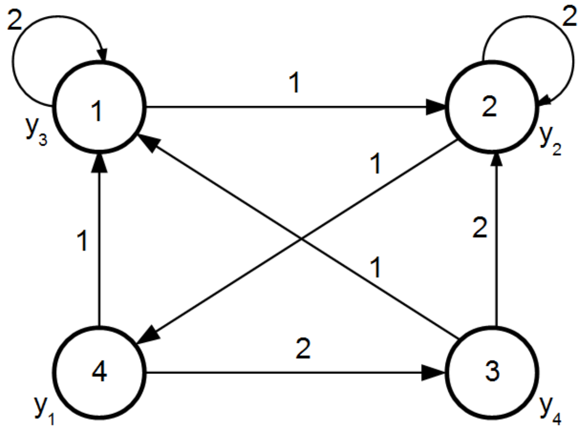


Рис.16.2

16.2.2. Построить таблицу переходов и выходов и граф для элемента задержки. Элемент задержки представляет собой устройство, значение выходного сигнала которого в момент t+1 совпадает со значением сигнала в предыдущий момент t. Если на вход устройства поступает некоторое слово, то на выходе будем иметь такое же слово, но смещенное на один символ (то есть, первый символ в выходном слове есть 0, а далее имеется последовательность символов входного слова). Таким образом, автомат с задержкой можно описать формулами:

$$\begin{cases} q(t+1) = x(t) \\ y(t) = q(t) = x(t-1). \end{cases}$$

Решение. Предположим, что входной и выходной алфавиты есть {0,1}. Тогда Q={0,1}. Из формул, приведенных выше, получаем

$$\delta(0,0)=0,\ \delta(0,1)=0,\ \delta(1,0)=1,\ \delta(1,1)=1$$
$$\lambda(0,0)=0,\ \lambda(0,1)=1,\ \lambda(1,0)=0,\ \lambda(1,1)=1$$

Таким образом, имеем следующую таблицу:

q→	0	1
0	0,0	0,1
1	1,0	1,1

На рис. 16.3 изображен граф элемента задержки (в скобках указаны выходные символы).

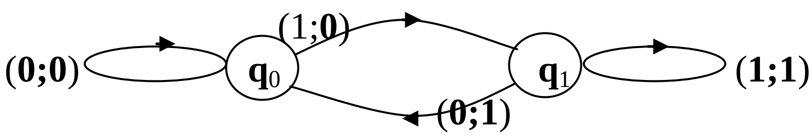


Рис.16.3

16.2.3. Построить таблицу переходов и выходов для двоичного сумматора и граф этого автомата. Сумматор представляет собой устройство, осуществляющее сложение двух чисел в двоичной системе счисления. На два входа подаются числа x_1 и x_2, начиная с младших разрядов. На выходе формируется последовательность, соответствующая записи числа $x_1 + x_2$ в двоичной системе счисления.

Решение: входной и выходной алфавиты сумматора можно закодировать следующим образом: X={00,01,10,11}, Y={0,1}. Множество состояний автомата определяется значением переноса при сложении соответствующих разрядов чисел x_1 и x_2. Если при сложении некоторых разрядов образовался перенос, то автомат переходит в состояние q_1, иначе он будет находиться в состоянии q_0. Например, если автомат находился в состоянии q_0, а на вход поступил символ 11, то образуется перенос разряда (так как 1+1=10) и автомат перейдет в состояние q_1, а на выходе выдаст 0. Таким образом, получим таблицу этого автомата:

q→	0	1
00	0,0	0,1
01	0,1	1,0
10	0,1	1,0
11	1,0	1,1

Граф сумматора изображен на рис. 16.4.

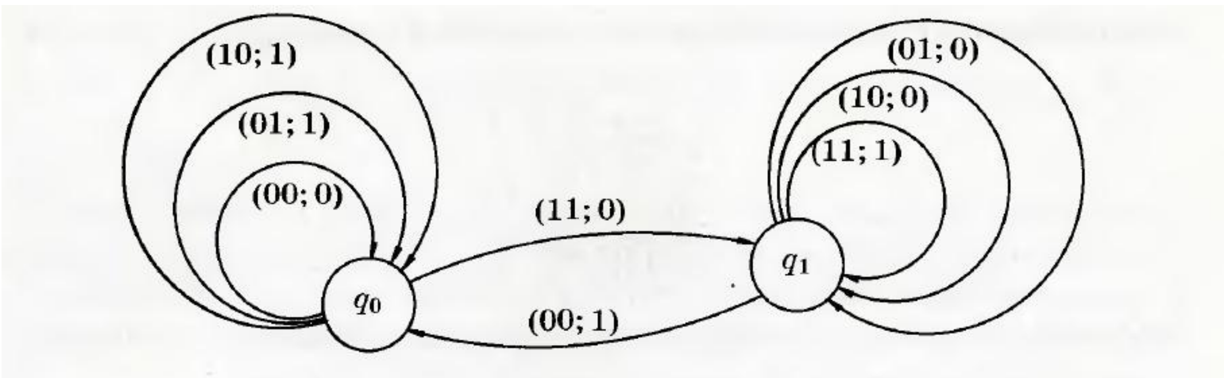


Рис.16.4

16.2.4. Автомат задается следующим образом. На вход поступают символы **a** и **b**. Устройство заменяет в произвольном входном слове каждое третье вхождение символа **b** на символ **a**, а все остальные символы входного слова автомат оставляет без изменения. Построить граф этого автомата и сделать проверку на каком-либо входном слове.

Решение: введем три состояния автомата, из которых первое отвечает ожиданию первого символа **b** во входной последовательности, второе – отвечает ожиданию второго символа **b**, а третье означает, что произошла замена символа **b** на символ **a.** Тогда будем иметь следующий граф автомата:

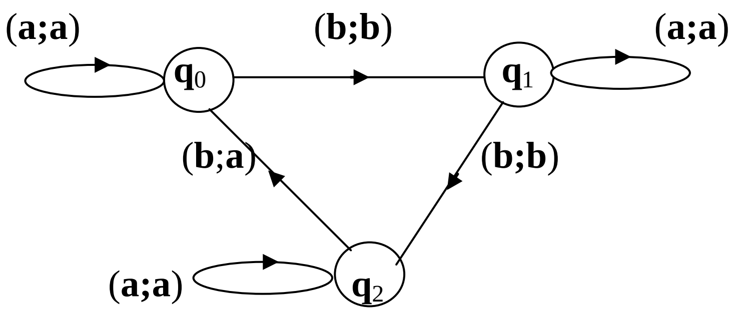


Рис.16.5

Проверку работы автомата проделайте самостоятельно.

16.3.Сжатие конечных автоматов.

Рассмотрим задачу *минимизации числа состояний* конечного автомата. То есть найдем автомат, эквивалентный заданному и обладающий минимально возможным числом состояний. Это так называемый *минимизированный* автомат.

16.3.1. Пусть автомат задан таблицей переходов и выходов:

	a	b	c	d	e	f	g	h
x=0	b/1	h/0	c/1	b/0	b/1	h/0	a/0	b/1
x=1	c/1	d/0	g/1	a/0	c/1	d/0	d/0	c/1

Построить минимизированный автомат при помощи **метода Хофмана-Мили** и проверить его работу на входном слове $x = 11010$.

Решение. Разбиваем состояния автомата на блоки, имеющие одинаковые выходные символы. В нашем случае в первый блок будут входить состояния a,c,e,h, во второй – b,d,f,g. Под каждым полученным новым состоянием запишем номера блоков, в которое это состояние перейдет при различных входных сигналах. Например, при входном сигнале x=0 из состояния *a* исходный автомат переходит в состояние *b,* а это состояние принадлежит блоку 2, поэтому пишем под состоянием *a* напротив «x=0» цифру 2. Поступая так дальше, получим:

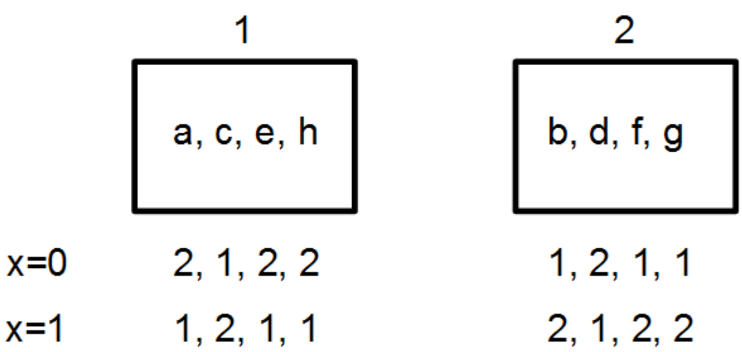


Рис. 16.6

Далее разбиваем каждый блок на новые блоки с новой нумерацией, причем каждый блок состоит из:

а) состояний из одного предыдущего блока,

б) состояний, с одинаковыми номерами, имеющих одинаковый порядок.

После этого под каждым состоянием вновь записываем новые номера блоков, в которые состояния переходят. В нашем примере получим:

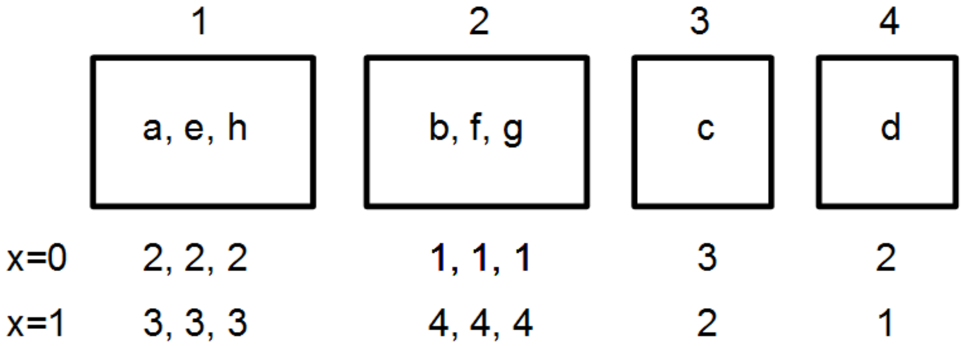


Рис. 16.7

Видим, что больше разбиений на блоки не требуется. Получили минимизированный автомат с четырьмя состояниями {a,e,h}, {b,f,g},{c} и {d}, граф которого будет иметь вид:

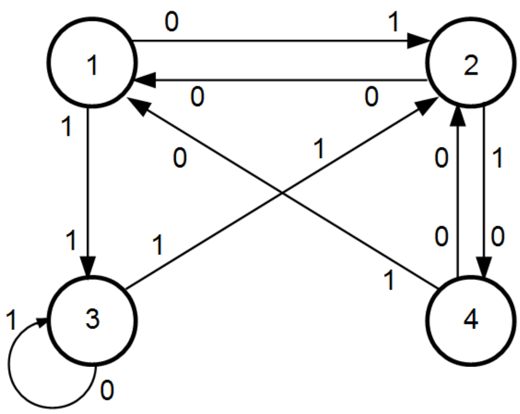


Рис. 16.8

Делаем проверку работы минимизированного автомата. Для исходного автомата (начальное состояние *a*):

c	*g*	*a*	*c*	*c*
1	1	0	1	1

для минимизированного (начальное состояние 1):

3	2	1	3	3
1	1	0	1	1

То есть выходные слова совпадают.

16.4. Задачи для самостоятельного решения.

16.4.1. По заданной матрице переходов и выходов построить графы автоматов Мили и Мура и найти выходное слово при заданном входном слове 011100.

а). Автомат Мили (начальное состояние автомата – 0):

q→	0	1	2	3
0	1,1	3,0	2,0	2,0
1	2,1	2,0	3,0	3,0

б). Автомат Мура (начальное состояние автомата – 1):

y→	3	2	1	1	3
q→	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1	3	3	5	2
1	5	1	4	2	3

16.4.2. Построить таблицу переходов и выходов и граф следующего автомата. Автомат представляет собой устройство, позволяющее выяснить, равны ли сравниваемые числа, записанные в двоичной системе счисления, и если не равны, то выяснить, какое из них больше другого. Выходные сигналы определяются по правилу

$y_1(t)=0,\ y_2(t)=0,\quad \textit{если}\quad x_1(t)=x_2(t)$

$y_1(t)=0,\ y_2(t)=1,\quad \textit{если}\quad x_1(t)=0,\quad x_2(t)=1$

$y_1(t)=1,\ y_2(t)=0,\quad \textit{если}\quad x_1(t)=1,\quad x_2(t)=0$

На два входа устройства подаются числа x_1 и x_2, начиная со старших разрядов. На выходе формируется последовательность в соответствии с вышеуказанными правилами. Если на выходе имеются только нулевые пары, то числа равны, если первая отличная от нуля пара имеет вид (0,1), то $x_1 < x_2$, а если (1,0), то $x_1 > x_2$.

Указание: ввести три состояния автомата {0,1,2} или {00, 01,10}.

16.4.3. Автомат вычисляет функцию $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ – число, записанное в двоичной системе счисления. На вход автомата поступают разряды числа $\mathbf{x}$, начиная с младших. Построить граф этого автомата.

16.4.4. Построить таблицу переходов и выходов и граф автомата для элемента задержки на два такта. Элемент задержки на два такта представляет собой устройство, на выходе которого получается входное слово, сдвинутое на два символа (то есть, в начале выходного слова имеются два нуля, а затем идут символы входного слова).

Указание: ввести четыре состояния: 00, 01, 10, 11.

16.4.5. По данной таблице автомата построить минимизированный автомат. Сделать проверку для какого-либо входного слова.

а)

	a	b	c	d	e	f	g	h
x=0	f/1	d/1	b/0	g/0	a/0	h/0	e/1	c/1
x=1	g/1	h/1	d/0	a/0	f/0	b/0	a/1	b/1

б)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
x=0	e/0	c/1	g/0	e/0	f/1	i/0	f/1	d/1	a/1
x=1	b/1	a/0	i/1	h/1	g/0	e/1	e/0	c/0	d/0

Ответы.

16.4.1. Последовательные состояния и выходные символы:

а).

1	2	3	3	2	2
1	0	0	0	0	0

б).

1	5	3	4	5	2
3	3	1	1	3	2

16.4.2.

q→	0	1	2
00	0,00	1,01	2,10
01	1,01	1,01	2,10
10	2,10	1,01	2,10
11	0,00	1,01	2,10

16.4.3. Граф будет такой же, как у элемента задержки.

16.4.4.

q→	00	01	10	11
0	00,0	10,0	00,1	10,1
1	01,0	11,0	01,1	11,1

16.4.5.

а).

q→	1	2	3	4
0	4/1	3/1	1/0	2/0
1	2/1	1/1	4/0	1/0

б).

q→	1	2	3	4
0	3/0	1/1	4/1	2/0
1	2/1	1/0	3/0	3/1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Фридлендер Б.И., Хаиров Р.А. Графы – Учебно-методическое пособие. – М.: МГИЭМ, 2007. – 75 с.

[2] Фридлендер Б.И. Конечные автоматы – Учебно-методическое пособие. – М.: МГИЭМ, 2008. – 75 с.

[3] Шапорев С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 400 с.

[4] Нефедов В.И., Осипова В.А. Курс дискретной математики – М.: МАИ, 1992. – 264 с.

[5] Белов В.В. Воробьев В.М., Шаталов В.Е. Теория графов – М.: Высшая школа, 1976. – 392 с.

[6] Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. 3-е издание. – М.: Вузовская книга, 2000. – 280 с.

[7] Эвнин А.Ю. Задачник по дискретной математике. 2-е изд., перераб. и доп. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2002. – 164 с.

[8] Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н. Конспект лекций по дискретной математике. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 176 с.

[9] Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 352 с.

[10] Рабкин Е.Л., Фарфоровская Ю.Б. Дискретная математика. Булевы функции и элементы теории графов. Методические указания и контрольные задания. Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича. – 60 с.

[11] Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике: Учеб. пособие - 3-е изд. перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 416 с.