maΣprof∫.ru

Высшая математика – просто и доступно!

Интенсивный курс
«Как найти частные производные?»

Этот небольшой курс позволяет буквально за пару часов научиться находить частные производные функций двух и трёх переменных. Методичка предназначена для читателей с начальным уровнем подготовки, в частности, для ***студентов заочных отделений****.*

Внимание! Чтобы освоить данный материал, нужно уметь находить производные функции одной переменной!

Автор: Александр Емелин

Оглавление

1. Частные производные функции двух переменных 3
2. Частные производные функции трёх переменных 18
3. Решения и ответы 29

1. Частные производные функции двух переменных

Начнём с самого понятия функции двух переменных**.** Такая функция имеет **следующий вид**:

$z = f(x; y)$, при этом переменные x, y называются *независимыми переменными* или *аргументами*, а буковка z – *зависимой переменной* или *функцией*.

Пример: $z = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$ – функция двух переменных.

Иногда используют запись $f(x; y) = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$. Также встречаются задания, где вместо буквы z используется буква u.

И, как нетрудно догадаться, у функции двух переменных есть **две** частные производные *первого порядка*. **Обозначения:**

z'_x или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – частная производная по «икс»;

z'_y или $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – частная производная по «игрек».

В ходу больше обозначение со штрихом, но составители учебников, задачников и методичек любят использовать и громоздкие обозначения – так что не теряйтесь!

Пожалуйста, откройте или распечатайте *Приложение* ***Правила дифференцирования и таблица производных***. Оно должно быть перед глазами.

Потому что

для частных производных справедливы все правила дифференцирования и таблица производных элементарных функций.

Есть только пара небольших отличий, с которыми мы познакомимся прямо сейчас:

Пример 1

Найти частные производные функции двух переменных
$z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$

Решение: такая формулировка, как правило, подразумевает производные 1-го порядка. В первую очередь обычно находят z'_x.

Правило: когда мы находим частную производную по «икс», то переменная y считается константой (числом).

Здесь и далее я буду приводить решение сразу, а комментарии записывать ниже:

$$z'_x \overset{(1)}{=} (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_x \overset{(2)}{=}$$
$$= 2y^3(x^2)'_x + 3(x^4)'_x + (5y)'_x - (7)'_x \overset{(3)}{=}$$
$$= 2y^3 \cdot 2x + 3 \cdot 4x^3 + 0 - 0 \overset{(4)}{=}$$
$$= 4xy^3 + 12x^3$$

Комментарии к выполненным действиям:

(1) Первое, что мы делаем при нахождении частной производной – заключаем **всю** функцию в скобки под штрих **с подстрочным индексом**.

Внимание, важно! Подстрочные индексы по ходу решения НЕ ТЕРЯЕМ. В данном случае, если Вы где-нибудь нарисуете «штрих» без $_x$, то преподаватель, как минимум, может поставить рядом с заданием $\pm$ (сразу откусить часть балла за невнимательность).

(2) Используем *свойство линейности* $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(Cu)' = Cu'$. Для простого примера, как этот, оба правила вполне можно применить на одном шаге. Обратите внимание на первое слагаемое: так как y **считается константой, а любую константу можно вынести за знак производной**, то y^3 мы выносим за скобки. То есть в данной ситуации y^3 ничем не лучше обычного числа. Теперь посмотрим на третье слагаемое $5y$: здесь, наоборот, выносить нечего. Так как y константа, то $5y$ – тоже константа, и в этом смысле она ничем не лучше последнего слагаемого – «семерки».

(3) Используем табличные производные $(C)' = 0$ и $(x^n)' = nx^{n-1}$.

(4) Упрощаем, или, как я люблю говорить, «причёсываем» ответ.

Теперь найдём z'_y.

Правило: когда мы находим частную производную по «игрек», то переменная x считается константой.

$$z'_y = (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_y \overset{(1)}{=}$$
$$= 2x^2(y^3)'_y + (3x^4)'_y + 5(y)'_y - (7)'_y \overset{(2)}{=}$$
$$= 2x^2 \cdot 3y^2 + 0 + 5 \cdot 1 - 0 = 6x^2y^2 + 5$$

(1) Используем те же правила $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(Cu)' = Cu'$. В первом слагаемом выносим константу x^2 за знак производной, во втором слагаемом ничего вынести нельзя поскольку $3x^4$ – уже константа.

(2) Используем таблицу производных элементарных функций. **Мысленно поменяем в таблице все «иксы» на «игреки». То есть данная таблица рАвно справедлива и для y (да и вообще почти для любой буквы)**. В частности, используемые нами формулы выглядят так: $(C)' = 0$ и $(y^n)' = ny^{n-1}$.

Чуть-чуть потренировавшись на подобных примерах, вы будете сразу видеть **ответ** $z'_x = 4xy^3 + 12x^3, \quad z'_y = 6x^2y^2 + 5$

И, не отходя от кассы, разберёмся с частными производными *второго порядка*. Часто требуются. Напоминаю, что **вторая производная – это производная от первой производной**. И поскольку **каждую** производную z'_x, z'_y можно продифференцировать либо по «икс», либо по «игрек», то всего существует 4 производные второго порядка.

Обозначения:

z''_{xx} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – вторая производная по «икс»;

z''_{xy} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – вторая *смешанная* производная по «икс, игрек»;

z''_{yy} или $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – вторая производная по «игрек»;

z''_{yx} или $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ – вторая *смешанная* производная по «игрек, икс».

В практических примерах можно ориентироваться на равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$ – грубо говоря, *смешанные* частные производные должны совпасть. Незамедлительно проверим этот факт на конкретном примере. Дифференцируем по «игрек» частную производную $z'_x = 4xy^3 + 12x^3$:

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (4xy^3 + 12x^3)'_y = 4x(y^3)'_y + (12x^3)'_y = 4x \cdot 3y^2 + 0 = 12xy^2$$

и выполняем «зеркальное» действие с производной $z'_y = 6x^2y^2 + 5$:

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (6x^2y^2 + 5)'_x = 6y^2(x^2)'_x + (5)'_x = 6y^2 \cdot 2x + 0 = 12xy^2$$

Таким образом, $z''_{xy} = z''_{yx}$, в чём и требовалось убедиться. И, кроме того, это хорошая *(однако не 100%-ная)* проверка частных производных 1-го порядка.

Осталось найти «однобуквенные» производные второго порядка. Никаких изобретений, берём $z'_x = 4xy^3 + 12x^3$ и дифференцируем её по «икс» еще раз:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (4xy^3 + 12x^3)'_x = 4y^3(x)'_x + 12(x^3)'_x = 4y^3 \cdot 1 + 12 \cdot 3x^2 = 4y^3 + 36x^2$$

Аналогично поступаем с производной $z'_y = 6x^2y^2 + 5$:

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (6x^2y^2 + 5)'_y = 6x^2(y^2)'_y + (5)'_y = 6x^2 \cdot 2y + 0 = 12x^2y$$

Следует отметить, что при нахождении z''_{xx}, z''_{yy} нужно проявлять ПОВЫШЕННОЕ внимание, ибо никаких чудесных равенств для их проверки не существует.

Тренируемся самостоятельно:

Пример 2

Найти частные производные 1-го и 2-го порядков:

а) $z = x^2 + 2xy - 4x - 2y - 3$;

б) $z = x^2 y - 4x\sqrt{y} - 6y^2 + 5$.

И вопрос на засыпку: что нужно сделать в первую очередь? Прежде всего, нужно посмотреть, СКОЛЬКО переменных содержит предложенная функция *(в условии ведь не сказано!)*. Может статься, вам дана функция одной, трёх или даже бОльшего количества переменных. Затем находим частные производные 1-го порядка, затем – 2-го. Порядок нахождения производных второго порядка не имеет особого значения, но в тяжёлых случаях сначала выгоднее найти смешанные частные производные *(для проверки z'_x, z'_y)*.

Решения и ответы в конце методички.

Систематизируем новые прикладные правила:

1) Когда мы дифференцируем по x, переменная y считается константой.

2) Когда же дифференцирование осуществляется по y, то константой считается x.

3) Правила и таблица производных справедливы и применимы для любой переменной *(x, y либо какой-нибудь другой)*, по которой ведется дифференцирование.

Но расслабляться рано!

Впереди ещё немало важных и любопытных вещей:

Пример 3

Найти частные производные первого порядка функции $z = yx^y$

Решение: найдём частную производную по «икс»:

$$z'_{x(y=const)} = (y \cdot x^y)'_x \overset{(1)}{=} y \cdot (x^y)'_x \overset{(2)}{=} y \cdot y \cdot x^{y-1} = y^2 x^{y-1}$$

Обратите внимание на подстрочный индекс: $x(y = const)$, рядом с «иксом» не возбраняется в скобках записывать, что y – константа. Данная пометка может быть очень полезна для начинающих, чтобы легче было ориентироваться в решении.

(1) Используем правило $(Cu)' = Cu'$.

(2) Так как «игрек» считается константой *(МЫСЛЕННО замените его, например, «пятёркой»)*, то x^y – это *степенная* функция, и мы используем формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Найдём частную производную по «игрек»:

$$z'_{y(x=const)}=(y\cdot x^y)'_y\overset{(1)}{=}(y)'_y\cdot x^y+y\cdot(x^y)'_y\overset{(2)}{=}1\cdot x^y+y\cdot x^y\ln x=x^y(1+y\ln x)$$

(1) Поскольку перед нами произведение двух множителей, КАЖДЫЙ из которых зависит от «живой» переменной «игрек», то нужно использовать правило дифференцирования произведения $(uv)'=u'v+uv'$

(2) Так как «икс» считается константой, то x^y – это *показательная* функция *(МЫСЛЕННО замените x той же «пятёркой»)*, и, согласно таблице: $(a^y)'=a^y\ln a$.

Самостоятельно убедитесь, что $z''_{xy}=z''_{yx}$. Чтобы «свести» *смешанные* производные к единому виду, здесь придётся немного преобразовать степени – *Приложение **Горячие школьные формулы*** в помощь. Подробное решение в конце методички.

Да, этого не требует условие, но **по возможности всегда выполняйте такую проверку на черновике!**

Ответ: $z'_x=y^2x^{y-1},\quad z'_y=x^y(1+y\ln x)$

Разогреваемся далее:

Пример 4

Дана функция $z=e^{x-2y}$. Найти частные производные первого и второго порядков.

Решение: в этом простеньком примере мы вспомним правило дифференцирования сложной функции $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$. Очевидно, что внешней функцией является экспонента: $u(v)=e^{x-2y}$, а её вложением – сумма $v=x-2y$. …Очевидное-очевидным, но одну производную я всё же закомментирую:

$$z'_x=(e^{x-2y})'_x\overset{(1)}{=}e^{x-2y}\cdot(x-2y)'_x\overset{(2)}{=}e^{x-2y}\cdot((x)'-(2y)'_x)=e^{x-2y}\cdot(1-0)=e^{x-2y}$$

(1) Используем правило $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$, и который раз обращаю ваше внимание на то, что вложение «вэ» не меняется.

(2) Используем правило $(u+v)'=u'+v'$. Может быть, некоторые не помнят, разность – это та же самая алгебраическая сумма: $(u-v)'=(u+(-v))'$

На практике во многих случаях будет достаточно решения $z'_x=(e^{x-2y})'_x=e^{x-2y}$, однако будьте готовы расписать его подробно.

Найдём «игрековую» производную:

$z'_y=(e^{x-2y})'_y=e^{x-2y}\cdot(x-2y)'_y=e^{x-2y}\cdot(0-2)=-2e^{x-2y}$ – в отличие от предыдущего случая, правило $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$ сработало «с последствиями».

При нахождении производных 2-го порядка можно и нужно использовать результаты предыдущего пункта:

$$z''_{xx}=(z'_x)'_x=(e^{x-2y})'_x=e^{x-2y}$$
$$z''_{xy}=(z'_x)'_y=(e^{x-2y})'_y=-2e^{x-2y}$$
$$z''_{yx}=(z'_y)'_x=(-2e^{x-2y})'_x=-2(e^{x-2y})'_x=-2e^{x-2y}$$
$$z''_{yy}=(z'_y)'_y=(-2e^{x-2y})'_y=-2\cdot(-2)e^{x-2y}=4e^{x-2y}$$

Ответ: $z'_x=e^{x-2y}$, $z'_y=-2e^{x-2y}$, $z''_{xx}=e^{x-2y}$, $z''_{xy}=z''_{yx}=-2e^{x-2y}$, $z''_{yy}=4e^{x-2y}$

Вперёд без страха и сомнений:

Пример 5

Дана функция двух переменных $z=e^{\frac{x}{2}}(2\cos y+x\sin y)$. Найти частные производные первого порядка и смешанные производные второго порядка.

После нахождения производных целесообразно выполнять «уборку», а именно, «заталкивать» в одну скобку все слагаемые: $e^{\frac{x}{2}}(...)$. Решение и ответ в конце методички.

Теперь **разберёмся, как дифференцировать дроби**. **Дроби бывают разные**:

Пример 6

Найти частные производные первого порядка функции $z=\dfrac{y\sin 2y}{\sqrt[3]{x^2}}$. Проверить, что $z''_{xy}=z''_{yx}$. Записать полный дифференциал первого порядка dz.

Решение: найдём частные производные первого порядка:

$$z'_{x(y=const)}=\left(\frac{y\sin 2y}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'_x\overset{(1)}{=}$$
$$=y\sin 2y\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'_x\overset{(2)}{=}$$
$$=y\sin 2y\cdot\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'_x=y\sin 2y\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2y\sin 2y}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

(1) Поскольку y и $\sin 2y$ считаются константами, то их произведение $y\sin 2y$ подлежит выносу за знак производной.

(2) Ещё раз вспоминаем, как правильно дифференцировать корни *(см. Приложения **Таблица производных** и **Горячие школьные формулы**)*.

Результат, разумеется, лучше «причесать».

Разруливаем «игрековую» производную:

$$z'_{y(x=const)} = \left(\frac{y\sin 2y}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'_y \overset{(1)}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot (y\sin 2y)'_y \overset{(2)}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot ((y)'_y \sin 2y + y(\sin 2y)'_y) \overset{(3)}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot (1 \cdot \sin 2y + y\cos 2y \cdot (2y)'_y) =$$

$$= \frac{(\sin 2y + 2y\cos 2y)}{\sqrt[3]{x^2}}$$

(1) Выносим «солдатика» $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ за знак производной. А были ли дробь? ☺

(2) Под штрихом у нас осталось произведение двух множителей, **каждое** из которых зависит от «живой» переменной «игрек», следовательно, нужно использовать правило дифференцирования произведения $(uv)' = u'v + uv'$.

(3) Не забываем, что $\sin 2y$ – это сложная функция *(хоть и простейшая из сложных)*. Используем соответствующее правило: $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$.

Теперь найдём *смешанные* производные второго порядка:

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(-\frac{2y\sin 2y}{3\sqrt[3]{x^5}}\right)'_y = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} \cdot (y\sin 2y)'_y =$$

$$= -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} \cdot (1 \cdot \sin 2y + y\cos 2y \cdot (2y)'_y) = -\frac{2(\sin 2y + 2y\cos 2y)}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

Внимательно изучаем каждый шаг! Ибо это та тема, где спешить НЕ НУЖНО.

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = \left(\frac{(\sin 2y + 2y\cos 2y)}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'_x = (\sin 2y + 2y\cos 2y) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'_x =$$

$$= (\sin 2y + 2y\cos 2y) \cdot \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'_x = (\sin 2y + 2y\cos 2y) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x^{-\frac{5}{3}} =$$

$$= -\frac{2(\sin 2y + 2y\cos 2y)}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

$z''_{xy} = z''_{yx}$, что мы и хотели увидеть.

Запишем полный дифференциал dz. Строго говоря, это уже частное задание, которое не относится к технике дифференцирования, но оно настолько часто идёт «довеском» к нахождению частных производных, что я счёл нужным включить его в этот курс. Полный дифференциал *первого порядка* функции двух переменных имеет следующий вид:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy$$

В данном случае:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = -\frac{2y\sin 2y}{3\sqrt[3]{x^5}}dx + \frac{(\sin 2y + 2y\cos 2y)}{\sqrt[3]{x^2}}dy$$

То есть, в формулу дифференциала нужно тупо подставить найденные частные производные первого порядка.

И, конечно, выдержим хороший математический тон:

Ответ:
$$z'_x = -\frac{2y\sin 2y}{3\sqrt[3]{x^5}},\ z'_y = \frac{(\sin 2y + 2y\cos 2y)}{\sqrt[3]{x^2}},\quad dz = -\frac{2y\sin 2y dx}{3\sqrt[3]{x^5}} + \frac{(\sin 2y + 2y\cos 2y)dy}{\sqrt[3]{x^2}},$$
$$z''_{xy} = z''_{yx} = -\frac{2(\sin 2y + 2y\cos 2y)}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

Готово.

Маньячить сильно не будем:

Пример 7

Дана функция двух переменных $z = \ln(xy-1)$.

Найти $z'_x,\ z'_y,\ dz,\ z''_{xx},\ z''_{yy},\ z''_{xy},\ z''_{yx}$.

Это пример для самостоятельного решения.

Закрепим материал сборной «солянкой», которая достаточно популярна на практике:

Пример 8

Найти частные производные первого порядка функции двух переменных

$$z = \frac{2^y}{y} + x^2 tgx + \ln(x^2 + y^3)$$

И чего тут только нет – и сумма, и произведение, и частное, и сложная функция. Но это нам уже не страшно!

Решение: найдём «иксовую» производную:

$$z'_x=\left(\frac{2^y}{y}+x^2tgx+\ln(x^2+y^3)\right)'_x\overset{(1)}{=}\left(\frac{2^y}{y}\right)'_x+(x^2tgx)'_x+(\ln(x^2+y^3))'_x\overset{(2)}{=}$$

$$=0+(x^2)'_x\cdot tgx+x^2(tgx)'_x+\frac{1}{(x^2+y^3)}\cdot(x^2+y^3)'_x=$$

$$=2x\cdot tgx+x^2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{(x^2+y^3)}\cdot(2x+0)=2xtgx+\frac{x^2}{\cos^2 x}+\frac{2x}{(x^2+y^3)}$$

(1) Используем правило дифференцирования суммы

(2) Первое слагаемое считается константой, поскольку в выражении $\frac{2^y}{y}$ нет ничего, зависящего от «икс» – только «игреки». Знаете, всегда приятно, когда дробь удаётся превратить в ноль). Для второго слагаемого применяем правило дифференцирования произведения. Кстати, в этом смысле ничего бы не изменилось, если бы вместо x^2tgx было дано, например, произведение $x^2tg(xy)$ – важно, что здесь **произведение двух множителей, КАЖДЫЙ из которых зависит от «икс»**, а поэтому, нужно использовать правило дифференцирования произведения. Для третьего слагаемого применяем правило дифференцирования сложной функции.

Найдём «игрековую» производную:

$$z'_y=\left(\frac{2^y}{y}+x^2tgx+\ln(x^2+y^3)\right)'_y=\left(\frac{2^y}{y}\right)'_y+(x^2tgx)'_y+(\ln(x^2+y^3))'_y\overset{(1)}{=}$$

$$=\frac{(2^y)'_y\cdot y-2^y\cdot(y)'_y}{y^2}+0+\frac{1}{(x^2+y^3)}\cdot(x^2+y^3)'_y=$$

$$=\frac{2^y\cdot\ln 2\cdot y-2^y\cdot 1}{y^2}+\frac{1}{(x^2+y^3)}\cdot(0+3y^2)=\frac{2^y\cdot\ln 2\cdot y-2^y}{y^2}+\frac{3y^2}{(x^2+y^3)}$$

(1) В первом слагаемом **и** в числителе **и** в знаменателе содержится «игрек», следовательно, нужно использовать правило дифференцирования частного: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$. Второе слагаемое зависит ТОЛЬКО от «икс», значит, x^2tgx считается константой и превращается в ноль. Для третьего слагаемого используем правило дифференцирования сложной функции.

Заметьте, что проверка первых производных через равенство $z''_{xy}=z''_{yx}$ здесь не столь эффективна. Почему?

$$z''_{xy}=(z'_x)'_y=\left(2xtgx+\frac{x^2}{\cos^2 x}+\frac{2x}{(x^2+y^3)}\right)'_y=0+0+2x\cdot((x^2+y^3)^{-1})'_y=\ldots,$$ но ведь ошибка могла быть допущена в первых двух слагаемых! Аналогично обстоят дела с производной z''_{yx}, и что делать в подобных случаях, я расскажу чуть позже.

Ответ: $z'_x=2xtgx+\frac{x^2}{\cos^2 x}+\frac{2x}{(x^2+y^3)}$, $z'_y=\frac{2^y\cdot\ln 2\cdot y-2^y}{y^2}+\frac{3y^2}{(x^2+y^3)}$

Похожее задание для самостоятельного решения:

Пример 9

Найти частные производные функции $z=\dfrac{y}{\sin y}+\sqrt{x}\ln x+\cos(2x+2y)$

Не ленимся! – практические навыки ой как пригодятся при дифференцировании более сложных функций, коих очень и очень много:

Пример 10

Найти частные производные первого порядка функции $z=\sin\sqrt{\dfrac{y}{x^3+y^2}}$

Решение оформлю в уже привычном стиле:

$$z'_x=\left(\sin\sqrt{\frac{y}{x^3+y^2}}\right)'_x\overset{(1)}{=}\cos\sqrt{\frac{y}{x^3+y^2}}\cdot\left(\sqrt{\frac{y}{x^3+y^2}}\right)'_x\overset{(2)}{=}\cos\sqrt{\frac{y}{x^3+y^2}}\cdot\sqrt{y}\cdot((x^3+y^2)^{-\frac{1}{2}})'_x\overset{(3)}{=}$$

$$=\cos\sqrt{\frac{y}{x^3+y^2}}\cdot\sqrt{y}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x^3+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(x^3+y^2)'_x=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos\sqrt{\frac{y}{x^3+y^2}}\cdot\sqrt{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x^3+y^2)^3}}\cdot 3x^2=-\frac{3x^2}{2}\sqrt{\frac{y}{(x^3+y^2)^3}}\cos\sqrt{\frac{y}{x^3+y^2}}$$

(1) Применяем правило дифференцирования сложной функции $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$.

И ещё раз напоминаю: когда мы по таблице превращаем синус *(внешнюю функцию)* в косинус, то вложение $\sqrt{\dfrac{y}{x^3+y^2}}$ *(внутренняя функция)* у нас <u>не меняется</u>.

(2) Используем свойство степеней *(см. Приложение **Горячие школьные формулы**)*: $\sqrt{\dfrac{y}{x^3+y^2}}=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^3+y^2}}$ и выносим $\sqrt{y}$ за знак производной, а корень $\sqrt{x^3+y^2}$ представляем в нужном для дифференцирования виде.

(3) Снова используем правило дифференцирования сложной функции и ВНИМАТЕЛЬНО наводим окончательный марафет.

Следует отметить, что результат записывается и компактнее:

$$-\frac{3x^2\sqrt{y}\cos\sqrt{\dfrac{y}{x^3+y^2}}}{2\sqrt{(x^3+y^2)^3}}.$$

Однако, **«навороченные» производные можно и вовсе не упрощать** – так вы уменьшите вероятность ошибки и облегчите проверку преподавателю. Этот совет особенно актуален для «чайников».

Как вам правильно подсказывает сердце, при нахождении z'_y нам предстоит брать громоздкую производную от дроби, и поэтому этот вопрос удобно решить сразу же:

$$\left(\frac{y}{x^3+y^2}\right)'_y=\frac{(y)'_y(x^3+y^2)-y(x^3+y^2)'_y}{(x^3+y^2)^2}=\frac{1\cdot(x^3+y^2)-y\cdot(0+2y)}{(x^3+y^2)^2}=$$
$$=\frac{x^3+y^2-2y^2}{(x^3+y^2)^2}=\frac{x^3-y^2}{(x^3+y^2)^2}$$

Теперь всё произойдёт быстро – дважды используем правило дифференцирования сложной функции:

$$z'_y=\left(\sin\sqrt{\frac{y}{x^3+y^2}}\right)'_y=\cos\sqrt{\frac{y}{x^3+y^2}}\cdot\left(\sqrt{\frac{y}{x^3+y^2}}\right)'_y\overset{(\sqrt{\alpha})'=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\cdot\alpha'}{=}$$
$$=\cos\sqrt{\frac{y}{x^3+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{x^3+y^2}}}\cdot\left(\frac{y}{x^3+y^2}\right)'_y=\cos\sqrt{\frac{y}{x^3+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{x^3+y^2}}}\cdot\frac{x^3-y^2}{(x^3+y^2)^2}$$

Как я только что рекомендовал, начинающим лучше оставлять ответы именно в таком виде. Но с другой стороны, почему бы и не уменьшить его «этажность» *(см. Приложение **Горячие школьные формулы**)*:

$$\ldots=\cos\sqrt{\frac{y}{x^3+y^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^3+y^2}}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{x^3-y^2}{(x^3+y^2)^2}=\frac{(x^3-y^2)\cos\sqrt{\frac{y}{x^3+y^2}}}{2\sqrt{y(x^3+y^2)^3}}$$

Ответ: $z'_x=-\dfrac{3x^2\sqrt{y}\cos\sqrt{\frac{y}{x^3+y^2}}}{2\sqrt{(x^3+y^2)^3}},\quad z'_y=\dfrac{(x^3-y^2)\cos\sqrt{\frac{y}{x^3+y^2}}}{2\sqrt{y(x^3+y^2)^3}}$

Смешанные производные как-то находить не хочется ☺ и возникает вопрос: как проверить решение? Читатели, «поднабившие руку», вполне могут проверить ответ устно! Но вообще, в подобных ситуациях лучше придерживаться схемы, которую я называю **методом «двойного решения»**.

В чём его суть?

1) Прорешиваем пример на черновике и убираем листочек с глаз долой. Через каких-то 10-15 минут решение благополучно забывается.

2) Решаем пример заново и сравниваем ответы.

Эта схема – тоже не панацея, но почти гарантия, что ошибка «не пройдёт» *(если, конечно, вы хорошо понимаете тему)*. Причём, двойное решение можно использовать и в условиях ограниченного времени, например, на письменном зачёте или экзамене. И более того, он работает во многих других задачах, где нет хорошего способа проверки.

Пара примеров для самостоятельного решения:

Пример 11

Найти частные производные первого порядка
$z = arctg^2(x\sqrt{y})$.

Здесь достаточно легко выполнить устную проверку

Пример 12

Найти z'_x, z'_y функции $z = \ln\sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}$.

А тут, конечно, не надо проявлять героизм ;)

Как и с производными функции одной переменной, всегда есть смысл посмотреть,

а нельзя ли упростить функцию ещё ДО дифференцирования?

Ещё один типичный случай:

Пример 13

Дана функция двух переменных $z = \cos^2(3-2xy)$.

Найти все частные производные 1-го и 2-го порядков.

Да, чтобы хитрые студенты не «прикидывались валенком», в условие часто включают слово «все» ☺

Прямое **решение** сулит нам дифференцирование квадрата, затем косинуса и затем суммы. Но зачем такие трудности? Есть тригонометрическая формула $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$:

$$z = \cos^2(3-2xy) = \frac{1+\cos(2(3-2xy))}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(6-4xy)$$

Ну вот, совсем другое дело:

$$z'_x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(6-4xy)\right)'_x = 0 + \frac{1}{2}\cdot(-\sin(6-4xy))\cdot(6-4xy)'_x =$$

$$= -\frac{1}{2}\sin(6-4xy)\cdot(0-4y) = 2y\sin(6-4xy)$$

$$z'_y = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(6-4xy)\right)'_y = 0 + \frac{1}{2}\cdot(-\sin(6-4xy))\cdot(6-4xy)'_y =$$

$$= -\frac{1}{2}\sin(6-4xy)\cdot(0-4x) = 2x\sin(6-4xy)$$

Ввиду не самых простых результатов сначала лучше найти смешанные производные:

$$\begin{aligned}
&z''_{xy}=(z'_x)'_y=(2y\sin(6-4xy))'_y=\\
&=(2y)'_y\cdot\sin(6-4xy)+2y\cdot(\sin(6-4xy))'_y=\\
&=2\cdot\sin(6-4xy)+2y\cos(6-4xy)\cdot(6-4xy)'_y=\\
&=2\sin(6-4xy)+2y\cos(6-4xy)\cdot(0-4x)=\\
&=2\sin(6-4xy)-8xy\cos(6-4xy)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&z''_{yx}=(z'_y)'_x=(2x\sin(6-4xy))'_x=\\
&=(2x)'_x\cdot\sin(6-4xy)+2x\cdot(\sin(6-4xy))'_x=\\
&=2\cdot\sin(6-4xy)+2x\cos(6-4xy)\cdot(6-4xy)'_x=\\
&=2\sin(6-4xy)+2x\cos(6-4xy)\cdot(0-4y)=\\
&=2\sin(6-4xy)-8xy\cos(6-4xy)
\end{aligned}$$

И ОЧЕНЬ внимательно берём «однобуквенные» производные:

$$\begin{aligned}
&z''_{xx}=(z'_x)'_x=(2y\sin(6-4xy))'_x=2y(\sin(6-4xy))'_x\\
&=2y\cos(6-4xy)\cdot(6-4xy)'_x=2y\cos(6-4xy)\cdot(0-4y)=-8y^2\cos(6-4xy)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&z''_{yy}=(z'_y)'_y=(2x\sin(6-4xy))'_y=2x(\sin(6-4xy))'_y=\\
&=2x\cos(6-4xy)\cdot(6-4xy)'_y=2x\cos(6-4xy)\cdot(0-4x)=-8x^2\cos(6-4xy)
\end{aligned}$$

Впрочем, производные здесь «зеркальны» и, очевидно, мы не ошиблись.

Ответ: $z'_x=2y\sin(6-4xy),\quad z'_x=2x\sin(6-4xy)$,
$z''_{xx}=-8y^2\cos(6-4xy),\quad z''_{xy}=z''_{yx}=2\sin(6-4xy)-8xy\cos(6-4xy),\quad z''_{yy}=-8x^2\cos(6-4xy)$

Интересно отметить, что в этом примере всё же можно пойти напрямую:

$$\begin{aligned}
&z'_x=(\cos^2(3-2xy))'_x=\\
&=2\cos(3-2xy)\cdot(\cos(3-2xy))'_x=\\
&=2\cos(3-2xy)\cdot(-\sin(3-2xy))\cdot(3-2xy)'_x=\\
&=-2\cos(3-2xy)\cdot\sin(3-2xy)\cdot(0-2y)=\\
&=4y\sin(3-2xy)\cos(3-2xy)
\end{aligned}$$

и такой результат уже толсто намекает, что производную надо упрощать. Используем известную формулу $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ в обратном направлении:

$...=4y\cdot\dfrac{1}{2}\sin(2(3-2xy))=2y\sin(6-4xy)$, и всё возвращается на круги своя.

Но ещё интереснее, что иногда упрощения удлиняют и усложняют решение *(см. концовку Примера 12)*.

Следующее задание для самостоятельного решения:

Пример 14

Дана функция двух переменных $z = \arcsin \frac{y}{x^2}$.

Найти все частные производные первого и второго порядков.

Несмотря на внешнюю простоту, это технически трудный пример, в котором нужно грамотно управиться с корнями и трёхэтажными дробями *(см. Приложение **Горячие школьные формулы**)*.

И заключение параграфа коротко о логарифмическом дифференцировании, которое, в отличие от «обычных» производных, встречается довольно редко:

Пример 15

Дана функция $z = x^{2x+3y}$. Найти z'_x, z'_y.

Решение: при нахождении z'_x «живая» переменная «икс» находится **и в основании и показателе**, таким образом, функция $z = x^{2x+3y}$ считается *степенно-показательной*. Логарифмируем обе части и «разваливаем» правый логарифм:

$$\ln z = \ln x^{2x+3y}$$
$$\ln z = (2x+3y)\ln x$$

«Навешиваем» «иксовые» штрихи на обе части:

$$(\ln z)'_x = ((2x+3y)\ln x)'_x$$

Слева используем правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$. Почему? Потому что буква «зет» САМА ПО СЕБЕ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКИЕЙ. Справа следует применить правило $(uv)' = u'v + uv'$ (т. к. оба множителя зависят от «живого икс»):

$$\frac{1}{z} \cdot z'_x = (2x+3y)'_x \cdot \ln x + (2x+3y) \cdot (\ln x)'_x$$
$$\frac{1}{z} \cdot z'_x = (2+0) \cdot \ln x + (2x+3y) \cdot \frac{1}{x}$$

Теперь «поднимаем» «зет» наверх правой части, и вспоминаем, что $z = x^{2x+3y}$:

$$z'_x = \left(2\ln x + (2x+3y) \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot z = \left(2\ln x + \frac{2x+3y}{x}\right) \cdot x^{2x+3y}$$

С «игрековой» производной всё проще. Поскольку «икс» считается константой, то функция $z = x^{2x+3y}$ играет роль *показательной* функции. Тут просто используем правило $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$z'_y = (x^{2x+3y})'_y = x^{2x+3y} \ln x \cdot (2x+3y)'_y = 3\ln x \cdot x^{2x+3y}$$

Самостоятельно убедитесь в справедливости равенства $z''_{xy} = z''_{yx}$, благо, частные производные $(x^{2x+3y})'_x$, $(x^{2x+3y})'_y$ уже известны.

Ответ: $z'_x = \left(2\ln x + \dfrac{2x+3y}{x}\right) \cdot x^{2x+3y}$, $\quad z'_y = 3\ln x \cdot x^{2x+3y}$

Но, повторюсь, что функции наподобие $z = \dfrac{\sqrt{x+y} \cdot \sqrt[3]{x-y}}{\sin xy}$ – крайне редкий гость на практике.

Что дальше?

Дальше нужно немного отдохнуть (хотя бы минут 15-20), и приступить к изучению второго параграфа.

И коль скоро на этой странице ещё осталось место, то анекдот в тему:

Однажды в пространстве функций появилась злобная производная и как пошла всех дифференцировать. Все функции разбегаются кто куда, никому не хочется превращаться! И только одна функция никуда не убегает. Подходит к ней производная и спрашивает:

– А почему это ты от меня никуда не убегаешь?

– Ха. А мне всё равно – ведь я «е в степени икс», и ты со мной ничего не сделаешь!

На что злобная производная с коварной улыбкой отвечает:

– Вот здесь ты ошибаешься, я продифференцирую тебя по «игрек»!

2. Частные производные функции трёх переменных

Функция трёх переменных имеет вид $u = f(x; y; z)$, при этом переменные x, y, z называются *независимыми переменными* или *аргументами*, переменная u называется *зависимой переменной* или *функцией*.

Пример: $u = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8$ – функция трёх переменных. В ходу также запись $f(x; y; z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8$

И совершенно понятно, что функция трёх переменных имеет **три** частные производные *первого порядка*:

u'_x или $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ – частная производная по «икс»;

u'_y или $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ – частная производная по «игрек»;

u'_z или $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ – частная производная по «зет»,

рАвно как очевидно и следующее **правило:**

При дифференцировании по какой-либо переменной <u>два других</u> аргумента считаются константами.

Собственно, полетели:

Пример 16

Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных $u = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8$

Решение традиционно начнём с частной производной по «икс»:

$$u'_{x(y,\,z-const)} = (2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8)'_x \overset{(1)}{=}$$
$$= 2\cdot(x^2)'_x + (2y^2)'_x + (z^2)'_x + 8z\cdot(x)'_x - (z)'_x + (8)'_x \overset{(2)}{=}$$
$$= 2\cdot 2x + 0 + 0 + 8z\cdot 1 - 0 + 0 = 4x + 8z$$

Обратите внимание на подстрочный индекс $x(y,\,z-const)$ – начинающим рекомендую помечать, что y, z считаются константами. Меньше риск запутаться.

(1) Используем *свойство линейности* производной. Второе слагаемое $2y^2$ считается константой, и поэтому здесь выносить ничего не нужно. В слагаемом $8xz$ за знак производной вынесена «обычная» константа 8 и «замороженная» переменная «зет».

(2) Находим простейшие производные, не забывая при этом, что y, z – константы. Далее причёсываем ответ.

Найдём частную производную по «игрек»:

$$u'_{y(x,\, z-const)}=(2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8)'_y\overset{(1)}{=}$$
$$=(2x^2)'_y+2\cdot(y^2)'_y+(z^2)'_y+(8zx)'_y-(z)'_y+(8)'_y\overset{(2)}{=}$$
$$=0+2\cdot 2y+0+0-0+0=4y$$

(1) Используем свойство линейности. И снова заметьте, что слагаемые $2x^2$, $8zx$ считаются константами, а значит, за знак производной выносить ничего не нужно.

(2) Находим производные, не забывая, что x, z константы. Далее упрощаем ответ.

И, наконец, частная производная по «зет»:

$$u'_{z(x,\, y-const)}=(2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8)'_z=$$
$$=(2x^2)'_z+(2y^2)'_z+(z^2)'_z+8x\cdot(z)'_z-(z)'_z+(8)'_z=$$
$$=0+0+2z+8x\cdot 1-1+0=2z+8x-1$$

Ответ: $u'_x=4x+8z,\quad u'_y=4y,\quad u'_z=2z+8x-1$

Немного позанудничаю и повторюсь, что при оформлении данных задач следует быть предельно внимательным, в частности, **нельзя терять подстрочные индексы**, которые указывают, по какой переменной проводится дифференцирование. Потеря индекса будет ГРУБЫМ НЕДОЧЁТОМ.

Следующий пример для самостоятельного решения:

Пример 17

Найти частные производные первого порядка
$u=3x^2-4xy+12xy^2z^3+yz^2+15x$

И снова вспоминаем предыдущий параграф: что здесь нужно сделать **в первую очередь?** ;)

Ситуация осложнится, если к такой формулировке прикрепить, например, функцию $u=3x^2-4xy$ – здесь будет не понятно, это дана функция **двух** или **трёх** переменных? В этом случае условие должно быть снабжено соответствующим словесным комментарием или же потребуется уточнить этот момент у преподавателя.

Рассмотренные два примера достаточно просты и, решив несколько подобных задачек, даже «чайник» приноровится расправляться с ними устно.

Но сейчас-то ПИШЕМ, ПИШЕМ! Решение и ответ в конце методички.

И чтобы вы не заскучали, решим пару головоломок:

Пример 18

Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных
$u = (\sin x)^{yz}$

Решение: вроде бы тут «всё просто», но первое впечатление обманчиво. При нахождении частных производных многие будут гадать на кофейной гуще и ошибаться.

Разберём пример последовательно, чётко и подробно.

Начнём с частной производной по «икс». Когда мы находим частную производную по «икс», то переменные y, z считаются константами. Следовательно, показатель нашей функции yz – тоже константа. Для «чайников» рекомендую уже знакомый приём решения: на черновике поменяйте константу yz на конкретное положительное целое число, например, на «пятерку». В результате получится функция одной переменной:

$u = (\sin x)^5$ или ещё можно записать так: $u = \sin^5 x$

Это степенная функция со сложным основанием (синус). По правилу $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ дифференцирования сложной функции:

$$u'_x = ((\sin x)^5)'_x = 5(\sin x)^{5-1} \cdot (\sin x)'_x = 5(\sin x)^{5-1} \cdot \cos x$$

Теперь вспоминаем, что $5 = yz$, таким образом:

$$u'_x = yz(\sin x)^{yz-1} \cdot \cos x$$

На чистовике, конечно, решение следует оформить так:

$$u'_{x(y,\, z-const)} = ((\sin x)^{yz})'_x = yz(\sin x)^{yz-1} \cdot (\sin x)'_x = yz(\sin x)^{yz-1} \cdot \cos x$$

Находим частную производную по «игрек», x, z считаются константами. Если «икс» константа, то $\sin x$ – тоже константа. На черновике проделываем тот же трюк: $\sin x$ заменим, например, на 3, «зет» – заменим той же «пятёркой». В результате снова получается функция одной переменной:

$$u = 3^{5y}$$

Это показательная функция со сложным показателем. По правилу дифференцирования сложной функции:

$$u'_y = (3^{5y})'_y = 3^{5y} \cdot \ln 3 \cdot (5y)'_y = 5 \cdot 3^{5y} \cdot \ln 3$$

Теперь выполняем обратную замену $3 = \sin x, 5 = z$:

$$u'_y = z \cdot (\sin x)^{zy} \cdot \ln(\sin x)$$

На чистовике, понятно, оформление должно выглядеть, благообразно:

$$u'_{y(x,\, z-const)} = ((\sin x)^{yz})'_y = (\sin x)^{yz} \cdot \ln(\sin x) \cdot (yz)'_y = z\ln(\sin x) \cdot (\sin x)^{yz}$$

И зеркальный случай с частной производной по «зет» (x, y – константы):

$$u'_{z(x,\,y-const)}=((\sin x)^{yz})'_z=(\sin x)^{yz}\cdot\ln(\sin x)\cdot(yz)'_z=y\ln(\sin x)\cdot(\sin x)^{yz}$$

Попробуйте провести аналогичный анализ мысленно.

Ответ: $u'_x=yz(\sin x)^{yz-1}\cdot\cos x,\quad u'_y=z\ln(\sin x)\cdot(\sin x)^{yz},\quad u'_z=y\ln(\sin x)\cdot(\sin x)^{yz}$

Забавная вариация темы для самостоятельного решения:

Пример 19

Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных
$u=x^y+y^z+z^x$

Решение и ответ в привычном месте. Если возникнут затруднения, используйте «любительский» приём с заменой, он гарантированно должен помочь. И очередной дубль совета – **не спешите**. Такие примеры быстро не решаю даже я.

Нарабатываем технику решения:

Пример 20

Дана функция трёх переменных. Найти частные производные и дифференциал первого порядка

$$u=arctg(xy^2+z)$$

Решение: найдём частную производную по «икс»:

$$u'_{x(y,\,z-const)}=(arctg(xy^2+z))'_x\overset{(1)}{=}$$
$$=\frac{1}{1+(xy^2+z)^2}\cdot(xy^2+z)'_x\overset{(2)}{=}$$
$$=\frac{1}{1+(xy^2+z)^2}\cdot(y^2\cdot(x)'_x+(z)'_x)\overset{(3)}{=}$$
$$=\frac{1}{1+(xy^2+z)^2}\cdot(y^2\cdot 1+0)=\frac{y^2}{1+(xy^2+z)^2}$$

(1) Перед нами сложная функция, и на первом шаге следует взять производную от арктангенса. При этом мы, по сути, используем табличную формулу производной арктангенса, и по правилу $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$ результат необходимо домножить на производную внутренней функции (вложения): $(xy^2+z)'_x$.

(2) Используем свойство линейности (расписал тут подробно)

(3) и берём оставшиеся производные, не забывая, что y, z считаются константами.

Преимуществом подобных заданий является тот факт, что другие частные производные находятся по очень похожей схеме:

$$u'_{y\,(x,\,z-const)} = (arctg(xy^2+z))'_y = \frac{1}{1+(xy^2+z)^2}\cdot(xy^2+z)'_y =$$

$$= \frac{1}{1+(xy^2+z)^2}\cdot(x\cdot(y^2)'_y+(z)'_y) = \frac{1}{1+(xy^2+z)^2}\cdot(x\cdot 2y+0) = \frac{2xy}{1+(xy^2+z)^2}$$

Как видите, шаблон решения точно такой же.

И, наконец, производная по «зет»:

$$u'_{z\,(x,\,y-const)} = (arctg(xy^2+z))'_z = \frac{1}{1+(xy^2+z)^2}\cdot(xy^2+z)'_z =$$

$$= \frac{1}{1+(xy^2+z)^2}\cdot((xy^2)'_z+(z)'_z) = \frac{1}{1+(xy^2+z)^2}\cdot(0+1) = \frac{1}{1+(xy^2+z)^2}$$

Выполняем вторую часть задания – составим дифференциал первого порядка. Это очень просто, по аналогии с функцией двух переменных, дифференциал первого порядка записывается по формуле:

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz$$

В данном случае:

$$du = \frac{y^2}{1+(xy^2+z)^2}\cdot dx + \frac{2xy}{1+(xy^2+z)^2}\cdot dy + \frac{1}{1+(xy^2+z)^2}\cdot dz$$

Ответ: $u'_x = \frac{y^2}{1+(xy^2+z)^2}$, $u'_y = \frac{2xy}{1+(xy^2+z)^2}$, $u'_z = \frac{1}{1+(xy^2+z)^2}$,

$$du = \frac{y^2dx+2xydy+dz}{1+(xy^2+z)^2}$$

Самостоятельно:

Пример 21

Найти u'_x, u'_y, u'_z, du следующих функций:

а) $u = e^{xy+z^2}$;

б) $u = \sqrt{x^2-y+4z^3}$.

Ни в коем случае не пропускаем и прилежно записываем решения! И ответ! Затем устно проверяем результаты.

Теперь немного усложним задание:

Пример 22

Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных
$u = \frac{xy}{z}\ln(x^2 + y^2 + z^2)$

Решение:

$$u'_{x(y,\,z-const)} = \left(\frac{xy}{z}\ln(x^2 + y^2 + z^2)\right)'_x \overset{(1)}{=} \frac{y}{z}(x\ln(x^2 + y^2 + z^2))'_x \overset{(2)}{=}$$
$$= \frac{y}{z}((x)'_x \cdot \ln(x^2 + y^2 + z^2) + x \cdot (\ln(x^2 + y^2 + z^2))'_x) \overset{(3)}{=}$$
$$= \frac{y}{z}\left(1 \cdot \ln(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)'_x\right) \overset{(4)}{=}$$
$$= \frac{y}{z}\left(\ln(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

(1) Используя свойство линейности, выносим $y,\ \frac{1}{z}$.

(2) Под знаком производной у нас находится **произведение** двух функций, **каждая из которых зависит** от нашей «живой» переменной «икс». Поэтому необходимо использовать правило дифференцирования произведения $(uv)' = u'v + uv'$.

(3) С производной $(x)'_x$ сложностей никаких, а вот $(\ln(x^2 + y^2 + z^2))'_x$ является производной сложной функции.

(4) Думаю, все уже освоились с простейшими примерами вроде $(x^2 + y^2 + z^2)'_x$ – тут у нас «жив» только x^2, производная которого равна $2x$

Практически зеркален случай с производной по «игрек», его я запишу короче и без комментариев:

$$u'_{y(x,\,z-const)} = \left(\frac{xy}{z}\ln(x^2 + y^2 + z^2)\right)'_y = \frac{x}{z}(y\ln(x^2 + y^2 + z^2))'_y =$$
$$= \frac{x}{z}((y)'_y \ln(x^2 + y^2 + z^2) + y(\ln(x^2 + y^2 + z^2))'_y) =$$
$$= \frac{x}{z}\left(\ln(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

И чуть интереснее обстоят дела с производной по «зет», хотя, всё равно почти то же самое:

$$u'_{z\,(x,\,y-const)}=\left(\frac{xy}{z}\ln(x^2+y^2+z^2)\right)'_z\overset{(1)}{=}xy\cdot\left(\frac{1}{z}\ln(x^2+y^2+z^2)\right)'_z\overset{(2)}{=}$$

$$=xy\cdot\left(\left(\frac{1}{z}\right)'_z\cdot\ln(x^2+y^2+z^2)+\frac{1}{z}(\ln(x^2+y^2+z^2))'_z\right)\overset{(3)}{=}$$

$$=xy\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\cdot\ln(x^2+y^2+z^2)+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}\cdot(x^2+y^2+z^2)'_z\right)=$$

$$=xy\cdot\left(-\frac{\ln(x^2+y^2+z^2)}{z^2}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}\cdot 2z\right)=xy\cdot\left(-\frac{\ln(x^2+y^2+z^2)}{z^2}+\frac{2}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

(1) Используем свойство линейности.

(2) Здесь опять произведение двух функций, **каждая из которых зависит** от «живой» переменной «зет». В принципе, можно использовать формулу производной частного, но проще таки пойти другим путём – найти производную от произведения.

(3) Производная $\left(\frac{1}{z}\right)'_z=-\frac{1}{z^2}$ – это табличная производная. Во втором слагаемом – уже знакомая производная сложной функции.

В случае громоздких производных **ответ** лучше записать столбиком:

$$u'_x=\frac{y}{z}\left(\ln(x^2+y^2+z^2)+\frac{2x^2}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$u'_y=\frac{x}{z}\left(\ln(x^2+y^2+z^2)+\frac{2y^2}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$u'_z=xy\left(-\frac{\ln(x^2+y^2+z^2)}{z^2}+\frac{2}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

Преподаватель скажет вам спасибо (проверять удобнее). Да и сами устно проверите результаты – здесь это вполне и вполне реально.

И пример для самостоятельного решения:

Пример 23

Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных

$$u=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

Подумайте, как рациональнее находить ту или иную частную производную. Полное решение и ответ в конце методички.

Наверное, все обратили внимание, что до сих пор я даже не упоминал о частных производных *второго порядка*.

Потому что их 9 штук, и у нас бы тут образовалась «куча мала».

Первая группа – это вторые производные по тем же переменным:

u''_{xx} или $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – вторая производная по «икс»;

u''_{yy} или $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ – вторая производная по «игрек»;

u''_{zz} или $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ – вторая производная по «зет».

Вторая группа – это *смешанные* частные производные 2-го порядка, их шесть:

u''_{xy} или $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ – *смешанная* производная по «икс, игрек»;

u''_{yx} или $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ – *смешанная* производная по «игрек, икс»;

u''_{xz} или $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$ – *смешанная* производная по «икс, зет»;

u''_{zx} или $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$ – *смешанная* производная по «зет, икс»;

u''_{yz} или $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$ – *смешанная* производная по «игрек, зет»;

u''_{zy} или $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$ – *смешанная* производная по «зет игрек».

…Ничего, ничего – всё осилим =)

По аналогии с производными функции двух переменных, при решении задач можно ориентироваться на следующие равенства смешанных производных второго порядка:

$$u''_{xy} = u''_{yx}$$
$$u''_{xz} = u''_{zx}$$
$$u''_{yz} = u''_{zy}$$

Однако, зачастую они не слишком выгодны для проверки – разве что в простых случаях наподобие *Примеров 16-17* (потренируйтесь!). В большинстве примеров таки лучше устная проверка либо «двойное решение».

Но задачи на нахождения частных производных 2-го порядка встречаются сами по себе и следующие примеры как раз таковы:

Пример 24

Найти частные производные второго порядка функции $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{\sqrt{z}} - \frac{x}{z}$

Решение: фольклорный сетевой персонаж по имени Капитан Очевидность говорит нам о том, что сначала нужно найти частные производные 1-го порядка:

$$u'_x = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{\sqrt{z}} - \frac{x}{z}\right)'_x = \frac{1}{y}\cdot(x)'_x + \left(\frac{y}{\sqrt{z}}\right)'_x - \frac{1}{z}\cdot(x)'_x = \frac{1}{y} + 0 - \frac{1}{z} = \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$$

$$u'_y = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{\sqrt{z}} - \frac{x}{z}\right)'_y = x\cdot\left(\frac{1}{y}\right)'_y + \frac{1}{\sqrt{z}}\cdot(y)'_y - \left(\frac{x}{z}\right)'_y = x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{z}} - 0 = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{\sqrt{z}}$$

$$u'_z = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{\sqrt{z}} - \frac{x}{z}\right)'_z = \left(\frac{x}{y}\right)'_z + y\cdot(z^{-\frac{1}{2}})'_z - x\cdot\left(\frac{1}{z}\right)'_z = 0 - \frac{1}{2}yz^{-\frac{3}{2}} - x\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{y}{2\sqrt{z^3}} + \frac{x}{z^2}$$

Есть. Теперь второй вагон. **Общий принцип** нахождения частных производных 2-го порядка функции трёх переменных **аналогичен принципу** нахождения частных производных 2-го порядка функции двух переменных. Рекомендую начинать со смешанных производных (хотя это принципиально):

Берём найденную производную $u'_x = \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$ и дифференцируем её по «игрек»:

$$u''_{xy} = (u'_x)'_y = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)'_y = \left(\frac{1}{y}\right)'_y - \left(\frac{1}{z}\right)'_y = -\frac{1}{y^2} - 0 = -\frac{1}{y^2}$$

Берём найденную производную $u'_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{\sqrt{z}}$ и дифференцируем её по «икс»:

$$u''_{yx} = (u'_y)'_x = \left(-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)'_x = -\frac{1}{y^2}\cdot(x)'_x + \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)'_x = -\frac{1}{y^2} + 0 = -\frac{1}{y^2}$$

Равенство $u''_{xy} = u''_{yx}$ выполнено. Гуд.

Разбираемся со второй парой смешанных производных.

Берём найденную производную $u'_x = \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$ и дифференцируем её по «зет»:

$$u''_{xz} = (u'_x)'_z = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)'_z = \left(\frac{1}{y}\right)'_z - \left(\frac{1}{z}\right)'_z = 0 - \left(-\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{z^2}$$

Берём найденную производную $u'_z = -\frac{y}{2\sqrt{z^3}} + \frac{x}{z^2}$ и дифференцируем её по «икс»:

$$u''_{zx} = (u'_z)'_x = \left(-\frac{y}{2\sqrt{z^3}} + \frac{x}{z^2}\right)'_x = \left(-\frac{y}{2\sqrt{z^3}}\right)'_x + \frac{1}{z^2}\cdot(x)'_x = 0 + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^2}$$

$u''_{xz} = u''_{zx}$, ОК

Аналогично разбираемся с третьей парой смешанных производных:

$$u''_{yz}=(u'_y)'_z=\left(-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)'_z=\left(-\frac{x}{y^2}\right)'_z+(z^{-\frac{1}{2}})'_z=0-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{z^3}}$$

$$u''_{zy}=(u'_z)'_y=\left(-\frac{y}{2\sqrt{z^3}}+\frac{x}{z^2}\right)'_y=-\frac{1}{2\sqrt{z^3}}\cdot(y)'_y+\left(\frac{x}{z^2}\right)'_y=-\frac{1}{2\sqrt{z^3}}+0=-\frac{1}{2\sqrt{z^3}}$$

$$u''_{yz}=u''_{zy}$$

И после сиих приятных результатов осталось найти три «однобуквенные» производные. Вот здесь уже следует максимально сконцентрировать внимание:

$$u''_{xx}=(u'_x)'_x=\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)'_x=\left(\frac{1}{y}\right)'_x-\left(\frac{1}{z}\right)'_x=0-0=0$$

$$u''_{yy}=(u'_y)'_y=\left(-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)'_y=-x\cdot(y^{-2})'_y+\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)'_y=-x\cdot(-2y^{-3})+0=\frac{2x}{y^3}$$

$$u''_{zz}=(u'_z)'_z=\left(-\frac{y}{2\sqrt{z^3}}+\frac{x}{z^2}\right)'_z=-\frac{y}{2}\cdot(z^{-\frac{3}{2}})'_z+x\cdot(z^{-2})'_z=-\frac{y}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot z^{-\frac{5}{2}}-2xz^{-3}=\frac{3y}{4\sqrt{z^5}}-\frac{2x}{z^3}$$

Ответ:

$$u'_x=\frac{1}{y}-\frac{1}{z},\quad u'_y=-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{\sqrt{z}},\quad u'_z=-\frac{y}{2\sqrt{z^3}}+\frac{x}{z^2},$$

$$u''_{xx}=0,\quad u''_{yy}=\frac{2x}{y^3},\quad u''_{zz}=\frac{3y}{4\sqrt{z^5}}-\frac{2x}{z^3},$$

$$u''_{xy}=u''_{yx}=-\frac{1}{y^2},\quad u''_{xz}=u''_{zx}=\frac{1}{z^2},\quad u''_{yz}=u''_{zy}=-\frac{1}{2\sqrt{z^3}}$$

Готово. Задание не столько сложное, сколько объемное. И коль скоро оно встречается не так часто, мы ограничимся заключительным примером:

Пример 25

Найти все частные производные первого и второго порядка функции трёх переменных

$$u=z\sin(xy)+\frac{xy}{1-z}$$

Решение можно несколько сократить и сослаться на равенства смешанных частных производных, но тогда могут придраться к тому (и вполне справедливо), что найдены НЕ ВСЕ производные. Кроме того, не будет проверки (пусть не 100%-ной).

Это пример для самостоятельного решения.

На практике теоретически может встретиться и логарифмическое диференцирование, с которым, думаю, у вас не возникнет трудностей.

И так же эфемерны задания с производными функций бОльшего количества переменных. Однако с ними тоже всё просто, и я хочу подтвердить вашу догадку.

Если мы дифференцируем функцию $u = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ по какой-либо переменной, то остальные аргументы «замораживаются» и считаются константами. Тут, кстати, чтобы «не разводить грязь», лучше использовать «двухэтажные» обозначения частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

Ну что же, кто предупреждён – тот вооружён!

Спасибо за внимание и успехов!

Более подробную информацию и дополнительные примеры можно найти в соответствующем разделе портала mathprofi.ru *(ссылка на аннотацию к разделу)*.

Из учебной литературы рекомендую 2-й том К.А. Бохана *(попроще)*
и 2-й том Г.М. Фихтенгольца *(посложнее)*.

3. Решения и ответы

Пример 2. ***Решение:***

а) Найдём частные производные 1-го порядка:

$$z'_x=(x^2+2xy-4x-2y-3)'_x=(x^2)'_x+2y(x)'_x-4(x)'_x-(2y)'_x-(3)'_x=$$
$$=2x+2y\cdot 1-4\cdot 1-0-0=2x+2y-4$$
$$z'_y=(x^2+2xy-4x-2y-3)'_y=(x^2)'_y+2x(y)'_y-(4x)'_y-2(y)'_y-(3)'_y=$$
$$=0+2x\cdot 1-0-2\cdot 1-0=2x-2$$

Найдём частные производные 2-го порядка:

$$z''_{xx}=(z'_x)'_x=(2x+2y-4)'_x=2+0-0=2$$
$$z''_{xy}=(z'_x)'_y=(2x+2y-4)'_y=0+2-0=2$$
$$z''_{yy}=(z'_y)'_y=(2x-2)'_y=0-0=0$$
$$z''_{yx}=(z'_y)'_x=(2x-2)'_x=2-0=2$$

б) Частные производные 1-го порядка:

$$z'_x=(x^2y-4x\sqrt{y}-6y^2+5)'_x=2xy-4\cdot 1\cdot\sqrt{y}-0+0=2xy-4\sqrt{y}$$
$$z'_y=(x^2y-4x\sqrt{y}-6y^2+5)'_y=x^2\cdot 1-4x\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}-6\cdot 2y+0=x^2-\frac{2x}{\sqrt{y}}-12y$$

Частные производные 2-го порядка:

$$z''_{xx}=(z'_x)'_x=(2xy-4\sqrt{y})'_x=2\cdot 1\cdot y-0=2y$$
$$z''_{xy}=(z'_x)'_y=(2xy-4\sqrt{y})'_y=2x\cdot 1-4\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=2x-\frac{2}{\sqrt{y}}$$
$$z''_{yx}=(z'_y)'_x=\left(x^2-\frac{2x}{\sqrt{y}}-12y\right)'_x=(x^2)'_x-\frac{2}{\sqrt{y}}\cdot(x)'_x-(12y)'_x=2x-\frac{2}{\sqrt{y}}\cdot 1-0=2x-\frac{2}{\sqrt{y}}$$
$$z''_{yy}=(z'_y)'_y=\left(x^2-\frac{2x}{\sqrt{y}}-12y\right)'_y=(x^2)'_y-2x\cdot(y^{-\frac{1}{2}})'_y-12(y)'_y=$$
$$=0-2x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot y^{-\frac{3}{2}}-12\cdot 1=\frac{x}{\sqrt{y^3}}-12$$

Ответ: *а)* $z'_x=2x+2y-4,\ z'_y=2x-2,\quad z''_{xx}=2,\ z''_{xy}=2,\ z''_{yy}=0,\ z''_{yx}=2$

б) $z'_x=2xy-4\sqrt{y},\ z'_y=x^2-\dfrac{2x}{\sqrt{y}}-12y,\quad z''_{xx}=2y,\ z''_{xy}=z''_{yx}=2x-\dfrac{2}{\sqrt{y}},\ z''_{yy}=\dfrac{x}{\sqrt{y^3}}-12$

Пример 3. ***Проверка****: найдём смешанные производные второго порядка:*

$$z''_{xy}=(z'_x)'_y=(y^2x^{y-1})'_y=(y^2)'_y\cdot x^{y-1}+y^2\cdot(x^{y-1})'_y=$$

$$=2y\cdot x^{y-1}+y^2\cdot x^{y-1}\ln x\cdot(y-1)'_y=x^{y-1}(2y+y^2\ln x\cdot(1-0))=yx^{y-1}(2+y\ln x)$$

Примечание: *при нахождении производной* $(x^{y-1})'_y$ *используется правило дифференцирования сложной функции:* $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$*, однако на практике можно опускать такие простые моменты и сразу записывать, что* $(x^{y-1})'_y=x^{y-1}\ln x$

$$z''_{yx}=(z'_y)'_x=(x^y(1+y\ln x))'_x=(x^y)'_x\cdot(1+y\ln x)+x^y\cdot(1+y\ln x)'_x=$$

$$=yx^{y-1}\cdot(1+y\ln x)+x^y\cdot\left(0+y\cdot\frac{1}{x}\right)=yx^{y-1}\cdot(1+y\ln x)+x^y\cdot x^{-1}\cdot y=$$

$$=yx^{y-1}\cdot(1+y\ln x)+yx^{y-1}=yx^{y-1}\cdot(1+y\ln x+1)=yx^{y-1}\cdot(2+y\ln x)$$

Таким образом, $z''_{xy}=z''_{yx}$, ***что и требовалось проверить.***

Пример 5. ***Решение****: найдем частные производные первого порядка:*

$$z'_x=\left(e^{\frac{x}{2}}(2\cos y+x\sin y)\right)'_x=$$

$$=(e^{\frac{x}{2}})'_x(2\cos y+x\sin y)+e^{\frac{x}{2}}(2\cos y+x\sin y)'_x=$$

$$=e^{\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'_x\cdot(2\cos y+x\sin y)+e^{\frac{x}{2}}((2\cos y)'_x+\sin y\cdot(x)'_x)=$$

$$=e^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot(2\cos y+x\sin y)+e^{\frac{x}{2}}(0+\sin y\cdot 1)=$$

$$=e^{\frac{x}{2}}\left(\cos y+\frac{1}{2}x\sin y\right)+e^{\frac{x}{2}}\sin y=$$

$$=e^{\frac{x}{2}}\left(\cos y+\sin y+\frac{1}{2}x\sin y\right)$$

$$z'_y=\left(e^{\frac{x}{2}}(2\cos y+x\sin y)\right)'_y=e^{\frac{x}{2}}(2\cos y+x\sin y)'_y=$$

$$=e^{\frac{x}{2}}(2(\cos y)'_y+x(\sin y)'_y)=e^{\frac{x}{2}}(-2\sin y+x\cos y)$$

Найдём смешанные производные второго порядка:

$$z''_{xy}=(z'_x)'_y=\left(e^{\frac{x}{2}}\left(\cos y+\sin y+\frac{1}{2}x\sin y\right)\right)'_y=e^{\frac{x}{2}}\left(\cos y+\sin y+\frac{1}{2}x\sin y\right)'_y=$$

$$=e^{\frac{x}{2}}\left((\cos y)'_y+(\sin y)'_y+\frac{1}{2}x(\sin y)'_y\right)=e^{\frac{x}{2}}\left(-\sin y+\cos y+\frac{1}{2}x\cos y\right)$$

$$z''_{yx}=(z'_y)'_x=\left(e^{\frac{x}{2}}(-2\sin y+x\cos y)\right)'_x=$$

$$=(e^{\frac{x}{2}})'_x(-2\sin y+x\cos y)+e^{\frac{x}{2}}(-2\sin y+x\cos y)'_x=$$

$$=e^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-2\sin y+x\cos y)+e^{\frac{x}{2}}(0+1\cdot\cos y)=$$

$$=e^{\frac{x}{2}}\left(-\sin y+\frac{1}{2}x\cos y\right)+e^{\frac{x}{2}}\cos y=$$

$$=e^{\frac{x}{2}}\left(-\sin y+\cos y+\frac{1}{2}x\cos y\right)$$

Ответ: $z'_x=e^{\frac{x}{2}}\left(\cos y+\sin y+\frac{1}{2}x\sin y\right)$, $\quad z'_y=e^{\frac{x}{2}}(-2\sin y+x\cos y)$,

$$z''_{xy}=z''_{yx}=e^{\frac{x}{2}}\left(-\sin y+\cos y+\frac{1}{2}x\cos y\right)$$

Пример 7. ***Решение***: *найдём частные производные 1-го порядка:*

$$z'_x=(\ln(xy-1))'_x=\frac{1}{xy-1}\cdot(xy-1)'_x=\frac{1}{xy-1}\cdot(y-0)=\frac{y}{xy-1}$$

$$z'_y=(\ln(xy-1))'_y=\frac{1}{xy-1}\cdot(xy-1)'_y=\frac{1}{xy-1}\cdot(x-0)=\frac{x}{xy-1}$$

Запишем дифференциал 1-го порядка: $dz=z'_xdx+z'_ydy=\frac{y}{xy-1}dx+\frac{x}{xy-1}dy$

Найдём смешанные производные 2-го порядка:

$$z''_{xy}=(z'_x)'_y=\left(\frac{y}{xy-1}\right)'_y=\frac{(y)'_y\cdot(xy-1)-y\cdot(xy-1)'_y}{(xy-1)^2}=$$

$$=\frac{1\cdot(xy-1)-y\cdot(x-0)}{(xy-1)^2}=\frac{xy-1-xy}{(xy-1)^2}=-\frac{1}{(xy-1)^2}$$

$$z''_{yx}=(z'_y)'_x=\left(\frac{x}{xy-1}\right)'_x=\frac{(x)'_x\cdot(xy-1)-x\cdot(xy-1)'_x}{(xy-1)^2}=$$

$$=\frac{1\cdot(xy-1)-x\cdot(y-0)}{(xy-1)^2}=\frac{xy-1-xy}{(xy-1)^2}=-\frac{1}{(xy-1)^2}$$

$$z''_{xx}=(z'_x)'_x=\left(\frac{y}{xy-1}\right)'_x=y\cdot((xy-1)^{-1})'_x=-y(xy-1)^{-2}\cdot(xy-1)'_x=-\frac{y}{(xy-1)^2}\cdot y=-\frac{y^2}{(xy-1)^2}$$

$$z''_{yy}=(z'_y)'_y=\left(\frac{x}{xy-1}\right)'_y=x\cdot((xy-1)^{-1})'_y=-x(xy-1)^{-2}\cdot(xy-1)'_y=-\frac{x}{(xy-1)^2}\cdot x=-\frac{x^2}{(xy-1)^2}$$

Ответ: $z'_x=\frac{y}{xy-1}$, $\quad z'_y=\frac{x}{xy-1}$, $\quad dz=\frac{ydx+xdy}{xy-1}$,

$z''_{xx}=-\frac{y^2}{(xy-1)^2}$, $\quad z''_{yy}=-\frac{x^2}{(xy-1)^2}$, $\quad z''_{xy}=z''_{yx}=-\frac{1}{(xy-1)^2}$

Пример 9. ***Решение:***

$$z'_x=\left(\frac{y}{\sin y}+\sqrt{x}\ln x+\cos(2x+2y)\right)'_x=\left(\frac{y}{\sin y}\right)'_x+(\sqrt{x}\ln x)'_x+(\cos(2x+2y))'_x=$$

$$=0+(\sqrt{x})'_x\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot(\ln x)'_x-\sin(2x+2y)\cdot(2x+2y)'_x=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}-\sin(2x+2y)\cdot(2+0)=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}-2\sin(2x+2y)$$

$$z'_y=\left(\frac{y}{\sin y}+\sqrt{x}\ln x+\cos(2x+2y)\right)'_y=\left(\frac{y}{\sin y}\right)'_y+(\sqrt{x}\ln x)'_y+(\cos(2x+2y))'_y=$$

$$=\frac{(y)'_y\sin y-y(\sin y)'_y}{\sin^2 y}+0-\sin(2x+2y)\cdot(2x+2y)'_y=$$

$$=\frac{1\cdot\sin y-y\cdot\cos y}{\sin^2 y}-\sin(2x+2y)\cdot(0+2)=\frac{\sin y-y\cos y}{\sin^2 y}-2\sin(2x+2y)$$

Ответ: $z'_x=\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2\sin(2x+2y),\quad z'_y=\dfrac{\sin y-y\cos y}{\sin^2 y}-2\sin(2x+2y)$

Пример 11. ***Решение****: дважды используем правило дифференцирования сложной функции:*

$$z'_x=(arctg^2(x\sqrt{y}))'_x=2arctg(x\sqrt{y})\cdot(arctg(x\sqrt{y}))'_x=$$

$$=2arctg(x\sqrt{y})\cdot\frac{1}{1+(x\sqrt{y})^2}\cdot(x\sqrt{y})'_x=\frac{2arctg(x\sqrt{y})}{1+x^2y}\cdot\sqrt{y}\cdot(x)'_x=$$

$$=\frac{2arctg(x\sqrt{y})}{1+x^2y}\cdot\sqrt{y}\cdot 1=\frac{2\sqrt{y}arctg(x\sqrt{y})}{1+x^2y}$$

Аналогично:

$$z'_y=(arctg^2(x\sqrt{y}))'_y=2arctg(x\sqrt{y})\cdot(arctg(x\sqrt{y}))'_y=$$

$$=2arctg(x\sqrt{y})\cdot\frac{1}{1+(x\sqrt{y})^2}\cdot(x\sqrt{y})'_y=\frac{2arctg(x\sqrt{y})}{1+x^2y}\cdot x\cdot(\sqrt{y})'_y=$$

$$=\frac{2arctg(x\sqrt{y})}{1+x^2y}\cdot x\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{xarctg(x\sqrt{y})}{\sqrt{y}(1+x^2y)}$$

Ответ: $z'_x=\dfrac{2\sqrt{y}arctg(x\sqrt{y})}{1+x^2y},\quad z'_y=\dfrac{xarctg(x\sqrt{y})}{\sqrt{y}(1+x^2y)}$

Пример 12. ***Решение***: *с помощью известных свойств (см. Приложение* ***Горячие школьные формулы****, п. II) преобразуем логарифм:*

$$\ln\sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}=\ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)=\frac{1}{3}(\ln(x+y)-\ln(x-y))$$

Найдём частные производные 1-го порядка:

$$z'_x=\left(\ln\sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}\right)'_x=\left(\frac{1}{3}(\ln(x+y)-\ln(x-y))\right)'_x=\frac{1}{3}((\ln(x+y))'_x-(\ln(x-y))'_x)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+y}\cdot(x+y)'_x-\frac{1}{x-y}\cdot(x-y)'_x\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+y}\cdot(1+0)-\frac{1}{x-y}\cdot(1-0)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right)=\frac{x-y-(x+y)}{3(x+y)(x-y)}=-\frac{2y}{3(x^2-y^2)}$$

$$z'_y=\left(\ln\sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}\right)'_y=\left(\frac{1}{3}(\ln(x+y)-\ln(x-y))\right)'_y=\frac{1}{3}((\ln(x+y))'_y-(\ln(x-y))'_y)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+y}\cdot(x+y)'_y-\frac{1}{x-y}\cdot(x-y)'_y\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+y}\cdot(0+1)-\frac{1}{x-y}\cdot(0-1)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}\right)=\frac{x-y+x+y}{3(x+y)(x-y)}=\frac{2x}{3(x^2-y^2)}$$

Самостоятельно проверьте, что $z''_{xy}=z''_{yx}$. *Любопытно, что для нахождения* z''_{xy}, z''_{yx} *проще использовать* $z'_x=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right)$, $z'_y=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}\right)$, *нежели их «причёсанные» версии*

Ответ: $z'_x=-\frac{2y}{3(x^2-y^2)}$, $\quad z'_y=\frac{2x}{3(x^2-y^2)}$

Пример 14. ***Решение:*** *найдем частные производные первого порядка:*

$$z'_x=\left(\arcsin\frac{y}{x^2}\right)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{y}{x^2}\right)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^4}}}\cdot y\cdot(x^{-2})'_x=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^4-y^2}{x^4}}}\cdot y\cdot(-2x^{-3})=\frac{x^2}{\sqrt{x^4-y^2}}\cdot y\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)=-\frac{2x^2y}{x^3\sqrt{x^4-y^2}}=-\frac{2y}{x\sqrt{x^4-y^2}}$$

$$z'_y=\left(\arcsin\frac{y}{x^2}\right)'_y=\frac{x^2}{\sqrt{x^4-y^2}}\cdot\left(\frac{y}{x^2}\right)'_y=\frac{x^2}{\sqrt{x^4-y^2}}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^4-y^2}}$$

Найдём частные производные второго порядка:

$$z''_{xy}=(z'_x)'_y=\left(-\frac{2y}{x\sqrt{x^4-y^2}}\right)'_y=-\frac{2}{x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^4-y^2}}\right)'_y=-\frac{2}{x}\cdot\frac{(y)'_y\sqrt{x^4-y^2}-y\cdot(\sqrt{x^4-y^2})'_y}{(\sqrt{x^4-y^2})^2}=$$

$$=-\frac{2}{x}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{x^4-y^2}-y\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^4-y^2}}\cdot(x^4-y^2)'_y}{x^4-y^2}=-\frac{2}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^4-y^2}-\dfrac{y(0-2y)}{2\sqrt{x^4-y^2}}}{x^4-y^2}=$$

$$=-\frac{2}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^4-y^2}+\dfrac{y^2}{\sqrt{x^4-y^2}}}{x^4-y^2}=-2\cdot\frac{x^4-y^2+y^2}{x(x^4-y^2)\sqrt{x^4-y^2}}=-2\cdot\frac{x^4}{x\sqrt{(x^4-y^2)^3}}=-\frac{2x^3}{\sqrt{(x^4-y^2)^3}}$$

$$z''_{yx}=(z'_y)'_x=\left(\frac{1}{\sqrt{x^4-y^2}}\right)'_x=\left((x^4-y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'_x=-\frac{1}{2}(x^4-y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(x^4-y^2)'_x=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{(x^4-y^2)^3}}\cdot(4x^3-0)=\frac{-2x^3}{\sqrt{(x^4-y^2)^3}}$$

$$z''_{xx}=(z'_x)'_x=\left(-\frac{2y}{x\sqrt{x^4-y^2}}\right)'_x=\left(-\frac{2y}{\sqrt{x^6-x^2y^2}}\right)'_x=-2y\cdot\left((x^6-x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'_x=$$

$$=-2y\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(x^6-x^2y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(x^6-x^2y^2)'_x=\frac{y}{\sqrt{(x^6-x^2y^2)^3}}\cdot(6x^5-2xy^2)=$$

$$=\frac{y\cdot 2x(3x^4-y^2)}{x^3\sqrt{(x^4-y^2)^3}}=\frac{2y(3x^4-y^2)}{x^2\cdot\sqrt{(x^4-y^2)^3}}$$

$$z''_{yy}=(z'_y)'_y=\left(\frac{1}{\sqrt{x^4-y^2}}\right)'_y=\left((x^4-y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'_y=-\frac{1}{2}(x^4-y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(x^4-y^2)'_y=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{(x^4-y^2)^3}}\cdot(0-2y)=\frac{y}{\sqrt{(x^4-y^2)^3}}$$

Ответ: $z'_x=-\dfrac{2y}{x\sqrt{x^4-y^2}}$, $\quad z'_y=\dfrac{1}{\sqrt{x^4-y^2}}$,

$z''_{xx}=\dfrac{2y(3x^4-y^2)}{x^2\cdot\sqrt{(x^4-y^2)^3}}$, $\quad z''_{yy}=\dfrac{y}{\sqrt{(x^4-y^2)^3}}$, $\quad z''_{xy}=z''_{yx}=-\dfrac{2x^3}{\sqrt{(x^4-y^2)^3}}$

Пример 17. ***Решение:***

$u'_x=(3x^2-4xy+12xy^2z^3+yz^2+15x)'_x=3\cdot(x^2)'_x-4y\cdot(x)'_x+12y^2z^3\cdot(x)'_x+(yz^2)'_x+15\cdot(x)'_x=$
$=3\cdot 2x-4y\cdot 1+12y^2z^3\cdot 1+0+15\cdot 1=6x-4y+12y^2z^3+15$

$u'_y=(3x^2-4xy+12xy^2z^3+yz^2+15x)'_y=(3x^2)'_y-4x\cdot(y)'_y+12xz^3\cdot(y^2)'_y+z^2\cdot(y)'_y+(15x)'_y=$
$=0-4x\cdot 1+12xz^3\cdot 2y+z^2\cdot 1+0=-4x+24xyz^3+z^2$

$u'_z=(3x^2-4xy+12xy^2z^3+yz^2+15x)'_z=(3x^2)'_z-(4xy)'_z+12xy^2\cdot(z^3)'_z+y\cdot(z^2)'_z+(15x)'_z=$
$=0-0+12xy^2\cdot 3z^2+y\cdot 2z+0=36xy^2z^2+2yz$

***Ответ**:* $u'_x=6x-4y+12y^2z^3+15,\quad u'_y=-4x+24xyz^3+z^2,\quad u'_z=36xy^2z^2+2yz$

Пример 19. ***Решение:***

$u'_x=(x^y+y^z+z^x)'_x=yx^{y-1}+0+z^x\ln z=yx^{y-1}+z^x\ln z$
$u'_y=(x^y+y^z+z^x)'_y=x^y\ln x+zy^{z-1}+0=x^y\ln x+zy^{z-1}$
$u'_z=(x^y+y^z+z^x)'_z=0+y^z\ln y+xz^{x-1}=y^z\ln y+xz^{x-1}$

***Ответ**:* $u'_x=yx^{y-1}+z^x\ln z,\quad u'_y=x^y\ln x+zy^{z-1},\quad u'_z=y^z\ln y+xz^{x-1}$

Пример 21. ***Решение**: а) Найдём частные производные первого порядка:*

$u'_x=(e^{xy+z^2})'_x=e^{xy+z^2}\cdot(xy+z^2)'_x=e^{xy+z^2}\cdot(y+0)=ye^{xy+z^2}$
$u'_y=(e^{xy+z^2})'_y=e^{xy+z^2}\cdot(xy+z^2)'_y=e^{xy+z^2}\cdot(x+0)=xe^{xy+z^2}$
$u'_z=(e^{xy+z^2})'_z=e^{xy+z^2}\cdot(xy+z^2)'_z=e^{xy+z^2}\cdot(0+2z)=2ze^{xy+z^2}$

Составим дифференциал первого порядка:

$du=u'_xdx+u'_ydy+u'_zdz=ye^{xy+z^2}dx+xe^{xy+z^2}dy+2ze^{xy+z^2}dz$

б) Найдём частные производные и дифференциал первого порядка:

$$u'_x=(\sqrt{x^2-y+4z^3})'_x=\frac{1}{2\sqrt{x^2-y+4z^3}}\cdot(x^2-y+4z^3)'_x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-y+4z^3}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y+4z^3}}$$

$$u'_y=(\sqrt{x^2-y+4z^3})'_y=\frac{1}{2\sqrt{x^2-y+4z^3}}\cdot(x^2-y+4z^3)'_y=-\frac{1}{2\sqrt{x^2-y+4z^3}}$$

$$u'_z=(\sqrt{x^2-y+4z^3})'_x=\frac{1}{2\sqrt{x^2-y+4z^3}}\cdot(x^2-y+4z^3)'_z=\frac{12z^2}{2\sqrt{x^2-y+4z^3}}=\frac{6z^2}{\sqrt{x^2-y+4z^3}}$$

$$du=\frac{x}{\sqrt{x^2-y+4z^3}}dx-\frac{1}{2\sqrt{x^2-y+4z^3}}dy+\frac{6z^2}{\sqrt{x^2-y+4z^3}}dz$$

***Ответ**: а)* $u'_x=ye^{xy+z^2},\quad u'_y=xe^{xy+z^2},\quad u'_z=2ze^{xy+z^2},\quad du=e^{xy+z^2}(ydx+xdy+2zdz)$

б)

$$u'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2-y+4z^3}},\quad u'_y=-\frac{1}{2\sqrt{x^2-y+4z^3}},\quad u'_z=\frac{6z^2}{\sqrt{x^2-y+4z^3}},\quad du=\frac{2xdx-dy+12z^2dz}{\sqrt{x^2-y+4z^3}}$$

Пример 23. ***Решение:***

$$u'_x=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)'_x=\frac{(x)'_x\cdot(x^2+y^2+z^2)-x\cdot(x^2+y^2+z^2)'_x}{(x^2+y^2+z^2)^2}=$$

$$=\frac{1\cdot(x^2+y^2+z^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{x^2+y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$u'_y=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)'_y=x\cdot((x^2+y^2+z^2)^{-1})'_y=-x\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-2}\cdot(x^2+y^2+z^2)'_y=$$

$$=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^2}\cdot 2y=-\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$u'_z=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)'_z=x\cdot((x^2+y^2+z^2)^{-1})'_z=-x\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-2}\cdot(x^2+y^2+z^2)'_z=$$

$$=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^2}\cdot 2z=-\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

Ответ: $u'_x=\dfrac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $u'_y=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $u'_z=-\dfrac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

Пример 25. ***Решение:*** *найдем частные производные первого порядка:*

$$u'_x=\left(z\sin(xy)+\frac{xy}{1-z}\right)'_x=z(\sin(xy))'_x+\frac{y}{1-z}\cdot(x)'_x=$$

$$=z\cos(xy)\cdot(xy)'_x+\frac{y}{1-z}\cdot 1=yz\cos(xy)+\frac{y}{1-z}$$

$$u'_y=\left(z\sin(xy)+\frac{xy}{1-z}\right)'_y=z(\sin(xy))'_y+\frac{x}{1-z}\cdot(y)'_y=$$

$$=z\cos(xy)\cdot(xy)'_y+\frac{x}{1-z}\cdot 1=xz\cos(xy)+\frac{x}{1-z}$$

$$u'_z=\left(z\sin(xy)+\frac{xy}{1-z}\right)'_z=\sin(xy)\cdot(z)'_z+xy\cdot((1-z)^{-1})'_z=$$

$$=\sin(xy)\cdot 1-\frac{xy}{(1-z)^2}\cdot(1-z)'_z=\sin(xy)+\frac{xy}{(1-z)^2}$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$u''_{xx}=(u'_x)'_x=\left(yz\cos(xy)+\frac{y}{1-z}\right)'_x=yz(\cos(xy))'_x+\left(\frac{y}{1-z}\right)'_x=$$

$$=yz\cdot(-\sin(xy))\cdot(xy)'_x+0=-y^2z\sin(xy)$$

$$u''_{yy}=(u'_y)'_y=\left(xz\cos(xy)+\frac{x}{1-z}\right)'_y=xz(\cos(xy))'_y+\left(\frac{x}{1-z}\right)'_y=$$

$$=xz\cdot(-\sin(xy))\cdot(xy)'_y+0=-x^2z\sin(xy)$$

$$u''_{zz}=(u'_z)'_z=\left(\sin(xy)+\frac{xy}{(1-z)^2}\right)'_z=(\sin(xy))'_z+xy\cdot((1-z)^{-2})'_z=$$

$$=0-\frac{2xy}{(1-z)^3}\cdot(1-z)'_z=\frac{2xy}{(1-z)^3}$$

$$u''_{xy}=(u'_x)'_y=\left(yz\cos(xy)+\frac{y}{1-z}\right)'_y=z(y\cos(xy))'_y+\frac{1}{1-z}\cdot(y)'_y=$$

$$=z\big((y)'_y\cos(xy)+y(\cos(xy))'_y\big)+\frac{1}{1-z}\cdot 1=z(\cos(xy)-xy\sin(xy))+\frac{1}{1-z}$$

$$u''_{yx}=(u'_y)'_x=\left(xz\cos(xy)+\frac{x}{1-z}\right)'_x=z(x\cos(xy))'_x+\frac{1}{1-z}\cdot(x)'_x=$$

$$=z\big((x)'_x\cos(xy)+x(\cos(xy))'_x\big)+\frac{1}{1-z}\cdot 1=z(\cos(xy)-xy\sin(xy))+\frac{1}{1-z}$$

$$u''_{xz}=(u'_x)'_z=\left(yz\cos(xy)+\frac{y}{1-z}\right)'_z=y\cos(xy)\cdot(z)'_z+y\left(\frac{1}{1-z}\right)'_z=y\cos(xy)+\frac{y}{(1-z)^2}$$

Подробнее: $\left(\frac{1}{1-z}\right)'_z=((1-z)^{-1})'_z=-(1-z)^{-2}\cdot(1-z)'_z=-\frac{1}{(1-z)^2}\cdot(0-1)=\frac{1}{(1-z)^2}$

$$u''_{zx}=(u'_z)'_x=\left(\sin(xy)+\frac{xy}{(1-z)^2}\right)'_x=\cos(xy)\cdot(xy)'_x+\frac{y}{(1-z)^2}\cdot(x)'_x=y\cos(xy)+\frac{y}{(1-z)^2}$$

$$u''_{yz}=(u'_y)'_z=\left(xz\cos(xy)+\frac{x}{1-z}\right)'_z=x\cos(xy)\cdot(z)'_z+x\left(\frac{1}{1-z}\right)'_z=x\cos(xy)+\frac{x}{(1-z)^2}$$

$$u''_{zy}=(u'_z)'_y=\left(\sin(xy)+\frac{xy}{(1-z)^2}\right)'_y=\cos(xy)\cdot(xy)'_y+\frac{x}{(1-z)^2}\cdot(y)'_y=x\cos(xy)+\frac{x}{(1-z)^2}$$

Ответ:

$$u'_x=yz\cos(xy)+\frac{y}{1-z},\quad u'_y=xz\cos(xy)+\frac{x}{1-z},\quad u'_z=\sin(xy)+\frac{xy}{(1-z)^2},$$

$$u''_{xx}=-y^2z\sin(xy),\quad u''_{yy}=-x^2z\sin(xy),\quad u''_{zz}=\frac{2xy}{(1-z)^3},$$

$$u''_{xy}=u''_{yx}=z(\cos(xy)-xy\sin(xy))+\frac{1}{1-z},$$

$$u''_{xz}=u''_{zx}=y\cos(xy)+\frac{y}{(1-z)^2},$$

$$u''_{yz}=u''_{zy}=x\cos(xy)+\frac{x}{(1-z)^2}$$