

# 圓錐曲線

*Li4*

February 9, 2021

# 目錄

<b>前言</b>	<b>i</b>
<b>0 基礎圓錐曲線</b>	<b>1</b>
0.1 定義與基本性質 . . . . .	1
0.2 交比 . . . . .	4
0.3 圓錐曲線上的交比 . . . . .	11
0.4 一些定理 . . . . .	14
<b>1 配極</b>	<b>21</b>
1.1 極 . . . . .	21
1.2 交比再現 . . . . .	25
1.3 對合 . . . . .	31
1.4 等共軛變換 . . . . .	38
1.5 等角共軛點 . . . . .	44
<b>2 等軸雙曲線</b>	<b>51</b>
2.1 特殊圓錐曲線與龐色列點 . . . . .	51
2.2 費爾巴哈雙曲線 . . . . .	58
2.3 Kiepert 雙曲線 . . . . .	64
2.4 Jerabek 雙曲線 . . . . .	70
2.5 正交共軛點 . . . . .	73
<b>3 完美六邊形與等角共軛軌跡</b>	<b>80</b>
3.1 完美六邊形 . . . . .	80
3.2 等角共軛點是完美的 . . . . .	85
3.3 當不動點遇上牛頓線 . . . . .	95

<b>4 完全四線形的心</b>	<b>99</b>
4.1 基礎的心 . . . . .	99
4.2 三尖瓣線 . . . . .	100
4.3 Hervey 的心 . . . . .	107
4.4 莫利與他的心臟線 . . . . .	109
<b>5 基礎三次曲線與梁-澤利克定理</b>	<b>116</b>
5.1 非奇異三次曲線的群運算 . . . . .	116
5.2 配極之路 . . . . .	118
5.3 等三次曲線 . . . . .	120
5.4 梁-澤利克定理 . . . . .	123
<b>參考資料</b>	<b>130</b>

---

# 前言

這份講義大部分都是自己打爽的。習題就放一些可能會出現在競賽也可能不會出現的東西，但我會想辦法讓他出現 (?)

另外，如果你有發現 typo 或錯誤的地方，請寄信到 [chjh21005@gmail.com](mailto:chjh21005@gmail.com) 告訴我。

---

## 符號約定

若  $X, Y$  為兩點， $XY$  代表過  $X, Y$  的直線， $\overline{XY}$  代表連接  $X, Y$  的線段 (不包含無窮遠線  $\mathcal{L}_\infty$  的那個)。若  $K, L$  為兩線， $K \cap L$  代表  $K$  與  $L$  的交點， $\angle(K, L)$  代表  $K$  與  $L$  的無向夾角， $\angle(K, L)$  代表  $K$  與  $L$  的有向夾角。

$\odot(XYZ)$  為  $\triangle XYZ$  的外接圓， $\odot(\overline{XY})$  是以  $\overline{XY}$  為直徑的圓， $\odot(X)$  則是以  $X$  為圓心的圓。給定一圓  $\Gamma$  及圓上一點  $X$ ，我們通常以  $XP \cap \Gamma$  或  $\Gamma \cap XP$  代表  $XP$  與  $\Gamma$  的異於  $X$  的交點 (若  $XP$  與  $\Gamma$  相切則還是  $X$ )。

有時，若有三線  $a, b, c$ ，我們會以  $\triangle abc$  代表以  $a, b, c$  三線圍成的三角形  $\triangle(b \cap c)(c \cap a)(a \cap b)$ 。

在沒有特別說明的情況下，我們都是以  $\triangle ABC$  作為基本三角形。 $I, G, O, H$  分別為  $\triangle ABC$  的內心、重心、外心和垂心。 $I_X$  ( $X = A, B, C$  或  $a, b, c$ ) 通常會是三個旁心。

我們說  $\triangle X_1Y_1Z_1$  與  $\triangle X_2Y_2Z_2$  正向相似，記為  $\triangle X_1Y_1Z_1 \stackrel{+}{\sim} \triangle X_2Y_2Z_2$ ，若  $\triangle X_1Y_1Z_1$  與  $\triangle X_2Y_2Z_2$  相似且

$$\angle Y_1X_1Z_1 = \angle Y_2X_2Z_2, \angle Z_1Y_1X_1 = \angle Z_2Y_2X_2, \angle X_1Z_1Y_1 = \angle X_2Z_2Y_2.$$

我們說  $\triangle X_1Y_1Z_1$  與  $\triangle X_2Y_2Z_2$  反向相似，記為  $\triangle X_1Y_1Z_1 \stackrel{-}{\sim} \triangle X_2Y_2Z_2$ ，若  $\triangle X_1Y_1Z_1$  與  $\triangle X_2Y_2Z_2$  相似且

$$\angle Y_1X_1Z_1 = -\angle Y_2X_2Z_2, \angle Z_1Y_1X_1 = -\angle Z_2Y_2X_2, \angle X_1Z_1Y_1 = -\angle X_2Z_2Y_2.$$

給定  $\triangle ABC$  與一點  $P$ ，我們有： $P$  關於  $\triangle ABC$  的

- 西瓦三角形  $\triangle(AP \cap BC)(BP \cap CA)(CP \cap AB)$
- 反西瓦三角形，使得  $P$  關於其西瓦三角形為  $\triangle ABC$  (當然我們還不知道存在性與唯一性)
- 佩多 (垂足) 三角形  $\triangle(P \infty_{\perp BC} \cap BC)(P \infty_{\perp CA} \cap CA)(P \infty_{\perp AB} \cap AB)$
- 反佩多三角形  $\triangle(A \infty_{\perp AP})(B \infty_{\perp BP})(C \infty_{\perp CP})$ ，使得  $P$  關於其佩多三角形為  $\triangle ABC$
- 圓西瓦三角形  $\triangle(AP \cap \odot(ABC))(BP \cap \odot(ABC))(CP \cap \odot(ABC))$

---

其中，西瓦三角形的定義關於  $A, B, C, P$  四個點是對稱的，所以也被定義為一個完全四點形的西瓦三角形。

給定  $\triangle ABC$  與一線  $\ell$ ，我們有： $\ell$  關於  $\triangle ABC$  的

- 西瓦三角形  $\triangle(A(BC \cap \ell))(B(CA \cap \ell))(C(AB \cap \ell))$
- 反西瓦三角形，使得  $\ell$  關於其西瓦三角形為  $\triangle ABC$  (同樣地我們還不知道存在性與唯一性)

跟點的情形一樣，西瓦三角形的定義也可以延伸至完全四線形 (但一般稱作對角線三角形)。

---

# Chapter 0

## 基礎圓錐曲線

### 0.1 定義與基本性質

先介紹高中定義圓錐曲線的方式之一：

**Definition 0.1.1.** 令  $\odot(O)$  為空間中一圓，過  $O$  作一條直線  $\ell$  使其與過  $\odot(O)$  的平面正交，在  $\ell$  上任取一點  $V \neq O$ ，當動點  $M \in \odot(O)$  移動時，我們稱  $VM$  所形成的曲面為一個直圓錐面 (Circular Conical Surface)、 $\odot(O)$  為其準線 (Directrix)、 $V$  為其頂點 (Vertex)。

**Definition 0.1.2.** 我們稱  $\mathcal{C}$  為平面  $E$  上的一個圓錐曲線 (Conic) 若存在一以  $V$  為頂點的直圓錐面  $S$ ，使得  $\mathcal{C} = S \cap E$ 。

之後，在沒有提及空間的情況下，我們皆省略「在平面  $E$  上」。因為圓錐曲線的解析式為二次式的關係，所以又稱為二次曲線 (但我其實不喜歡這樣叫它們)。

**Definition 0.1.3.** 令  $\mathcal{C}$  為一圓錐曲線， $\mathcal{L}_\infty$  為無窮遠線，則我們稱  $\mathcal{C}$  為

- (i) 橢圓 (Ellipse)，若  $|\mathcal{C} \cap \mathcal{L}_\infty| = 0$ ；
- (ii) 拋物線 (Parabola)，若  $|\mathcal{C} \cap \mathcal{L}_\infty| = 1$ ；
- (iii) 雙曲線 (Hyperbola)，若  $|\mathcal{C} \cap \mathcal{L}_\infty| = 2$ 。

之後都以  $\mathcal{L}_\infty$  簡寫無窮遠線， $\infty_L := L \cap \mathcal{L}_\infty$  則為直線  $L \neq \mathcal{L}$  上的無窮遠點。

以下為較常看到的圓錐曲線等價定義：

**Proposition 0.1.4.** 令  $C$  為一圓錐曲線，則

(i)  $C$  為橢圓若且唯若存在兩點  $F_1, F_2$  及正實數  $a > \overline{F_1 F_2}/2$  使得

$$C = \{P \mid \overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} = 2a\}$$

(ii)  $C$  為拋物線若且唯若存在一點  $F$  及一線  $L$  使得

$$C = \{P \mid \overline{FP} = d(L, P)\}$$

(iii)  $C$  為雙曲線若且唯若存在兩點  $F_1, F_2$  及正實數  $a < \overline{F_1 F_2}/2$  使得

$$C = \{P \mid |\overline{F_1 P} - \overline{F_2 P}| = 2a\}$$

並且稱  $F_1, F_2$  或  $F$  為  $C$  的焦點 (**Focus**)， $L$  為  $C$  的準線 (**Diretrix**)。

*Proof.* 只證明橢圓的情形，其餘類似。由圓錐曲線定義知，存在頂點為  $V$  的直圓錐面  $S$  及平面  $E$  滿足  $C = S \cap E$ ，令  $B_1, B_2$  為與  $S$  及  $E$  皆相切的兩球，並設  $\odot(O_1) = S \cap B_1, \odot(O_2) = S \cap B_2, F_1 = E \cap B_1, F_2 = E \cap B_2$ ，對於任意一點  $P \in S$ ，設  $A_1, A_2$  分別為  $PV$  與  $\odot(O_1), \odot(O_2)$  的交點，易知  $\overline{A_1 A_2}$  為定值，取  $a = \overline{A_1 A_2}/2$ ，這時有

$$\overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} = \overline{A_1 P} + \overline{A_2 P} = \overline{A_1 A_2} = 2a$$

故  $C \subseteq \{P \mid \overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} = 2a\}$ 。

若  $P \in \{P \mid \overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} = 2a\} \setminus C$ ，令射線  $F_1 P$  與  $S$  交於  $P' \in C$ ，則

$$\overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} = 2a = \overline{F_1 P'} + \overline{F_2 P'} \implies \overline{F_2 P} = \overline{F_2 P'} \pm \overline{PP'}$$

即  $F_2 \in PP'$  且  $P, P'$  位於  $F_2$  同向，矛盾。所以  $C = \{P \mid \overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} = 2a\}$ 。 ■

在講下個性質前我們先承認一些事情——所有圓錐曲線都是光滑的，並規定一些記號：

(i)  $TC$  為  $C$  的所有切線所形成的集合

(ii)  $T_P C$  為  $P$  關於  $C$  的切線，其中  $P \in C$



(iii)  $T_\ell C$  為  $\ell$  關於  $C$  的切點，其中  $\ell \in TC$

所以我們顯然有  $TC = \{T_P C \mid P \in C\}$ ,  $C = \{T_\ell C \mid \ell \in TC\}$ 。

**Proposition 0.1.5.** 令  $C$  為一圓錐曲線，一直線  $\ell$  與  $C$  只有一個交點若且唯若  $\ell \in TC$ 。

*Proof.* 設  $C$  位於平面  $E$  上且以  $\odot(O)$  為準線的直圓錐面  $S$  滿足  $C = S \cap E$ 。令  $E_1$  為過  $S$  的頂點及  $\ell$  的平面， $E_2$  為  $\odot(O)$  所在的平面，則

$$1 = |\ell \cap C| = |E \cap E_1 \cap S| \iff 1 = |(E_1 \cap E_2) \cap \odot(O)| = |E_1 \cap E_2 \cap S|$$

因此只需考慮當  $C$  為圓的情況，交給讀者自行驗證。 ■

現在我們可以證明圓錐曲線的光學性質：

**Proposition 0.1.6.** 令非拋物線的圓錐曲線  $C$  的焦點為  $F_1, F_2$ ，則對於  $C$  上任意一點  $P$ ， $T_P C$  為  $\angle F_1 P F_2$  的分角線。

*Proof.* 只證明橢圓的情形，雙曲線則類似。令  $T'_P$  為  $\angle F_1 P F_2$  的外角平分線， $F'_2$  為  $F_2$  關於  $T'_P$  的對稱點，則  $F_1, P, F'_2$  共線，所以對於任意一點  $Q \in T'_P \setminus \{P\}$

$$\overline{F_1 Q} + \overline{F_2 Q} = \overline{F_1 Q} + \overline{F'_2 Q} > \overline{F_1 F'_2} = \overline{F_1 P} + \overline{F'_2 P} = \overline{F_1 P} + \overline{F_2 P}$$

故  $Q \notin C$ ，因此  $T'_P = T_P C$ 。 ■

**Proposition 0.1.7.** 令拋物線  $\mathcal{P}$  的焦點為  $F$ ，準線為  $L$ ，對於  $\mathcal{P}$  上任意一點  $P$ ， $P$  關於  $L$  的垂足為  $K$ ，則  $T_P \mathcal{P}$  為  $\angle FPK$  的內角平分線且為  $\overline{FK}$  的中垂線。

*Proof.* 令  $T'_P$  為  $\angle FPK$  的內角平分線，由  $\overline{FP} = \overline{KP}$  知  $T'_P$  為  $\overline{FK}$  的中垂線，所以對於任意一點  $Q \in T'_P \setminus \{P\}$ ，令  $K_Q$  為  $Q$  關於  $L$  的垂足，我們有

$$\overline{K_Q Q} < \overline{K Q} = \overline{F Q} \implies Q \notin \mathcal{P}$$

即  $T'_P = T_P \mathcal{P}$ 。 ■

**Remark.** 透過上面這個性質，我們可以將拋物線的另一個焦點視為垂直於準線方向上的無窮遠點，這樣依舊可以保持光學性質的命題成立。

**Definition 0.1.8.** 對於任意圓錐曲線  $C$ ，令其焦點為  $F_1, F_2$ ，則我們稱  $\overline{F_1 F_2}$  中點  $O$  為  $C$  的中心。

**Proposition 0.1.9.** 對於非拋物線的圓錐曲線  $C$ ，令  $O$  為其中心，則  $C$  關於  $O$  點對稱。

*Proof.* 由焦點的定義。 ■

## 習題

**Problem 1.** 試證明曲線  $C$  為一圓錐曲線若且唯若  $C$  為一圓或存在一點  $F$ 、一線  $L$  及一實數  $e > 0$  使得

$$C = \{P \mid \overline{FP} = e \cdot d(L, P)\}$$

其中，

- (i) 當  $e < 1$  時， $C$  為橢圓
- (ii) 當  $e = 1$  時， $C$  為拋物線
- (iii) 當  $e > 1$  時， $C$  為雙曲線

我們也可以定義圓為  $L = \mathcal{L}_\infty, e = 0$  時的情況，這時候必須假設  $e \cdot d(L, P)$  為常數，則  $C$  以  $F$  為圓心。

**Problem 2.** 令  $C$  為一個橢圓，並且  $F$  為其中一個焦點。設  $\Gamma$  是以  $C$  的長軸為直徑的圓，若  $L \in TC$ ，證明： $F$  關於  $L$  的垂足位於  $\Gamma$  上。

**Problem 3.** 令  $F_1, F_2$  為圓錐曲線  $C$  的兩個焦點，設  $\ell_1, \ell_2 \in TC$ ， $A$  為  $\ell_1$  與  $\ell_2$  的交點。證明： $\angle(\ell_1, AF_1) + \angle(\ell_2, AF_2) = 0$ 。

## 0.2 交比

交比可以說是研究圓錐曲線的出發點，至於為什麼我們馬上就會看到了。

**Definition 0.2.1.** 對於共線四點  $P_1, P_2, P_3, P_4$

$$(P_i) := (P_1, P_2; P_3, P_4) := \frac{P_1P_3/P_3P_2}{P_1P_4/P_4P_2},$$

稱為點列  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  的交比 (**Cross Ratio**)。

這邊定義事實上有點問題，因為我們並沒有排除  $P_i \in \mathcal{L}_\infty$  上的情形，不過對於任意兩點  $A, B \notin \mathcal{L}_\infty$ ，我們可以定義

$$\frac{A\infty_{AB}}{\infty_{AB}B} = -1$$

在這樣的定義下，我們就只剩  $P_1, P_2, P_3, P_4$  都在無窮遠線上的情形了，我們晚點再回來定義它。先看看這個交比最重要的基礎定理：

**Theorem 0.2.2.** 給定共點四線  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ ，若非無窮遠線的直線  $L \not\cap \bigcap \ell_i$  分別交  $\ell_i$  於  $P_i$ ，則  $(P_i)$  為定值（與  $L$  的選取無關）。當  $\bigcap \ell_i \notin \mathcal{L}_\infty$  時，

$$(P_i) = \frac{\sin \angle(\ell_1, \ell_3) / \sin \angle(\ell_3, \ell_2)}{\sin \angle(\ell_1, \ell_4) / \sin \angle(\ell_4, \ell_2)}$$

（注意到線的方向選取並不會影響其值）

*Proof.* 令  $L' \not\cap \bigcap \ell_i$  為另外一線且分別交  $\ell_i$  於  $P'_i$ ，若  $\bigcap \ell_i \in \mathcal{L}_\infty$ ，則顯然有

$$\frac{P_1P_3}{P_3P_2} = \frac{P'_1P'_3}{P'_3P'_2}, \quad \frac{P_1P_4}{P_4P_2} = \frac{P'_1P'_4}{P'_4P'_2} \implies (P_i) = (P'_i)$$

若  $A := \bigcap \ell_i \notin \mathcal{L}_\infty$ ，並且不失一般性假設  $P_1, P_2, P_3 \notin \mathcal{L}_\infty$ ，則由面積公式知

$$\frac{\sin \angle P_1AP_3}{\sin \angle P_3AP_2} = \frac{P_1P_3/P_3P_2}{AP_1/AP_2}, \quad \frac{\sin \angle P_1AP_4}{\sin \angle P_4AP_2} = \frac{P_1P_4/P_4P_2}{AP_1/AP_2},$$

（注意到若  $P_4 \in \mathcal{L}_\infty$  上式仍然成立）。所以結合兩式就有

$$(P_i) = \frac{\sin \angle P_1AP_3 / \sin \angle P_3AP_2}{\sin \angle P_1AP_4 / \sin \angle P_4AP_2}.$$

同理有

$$(P'_i) = \frac{\sin \angle P_1AP_3 / \sin \angle P_3AP_2}{\sin \angle P_1AP_4 / \sin \angle P_4AP_2} = (P_i),$$

故  $(P_i)$  的值與  $L$  的選取無關。 ■

所以我們就可以定義線束的交比：

**Definition 0.2.3.** 對於共點四線  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ ,

$$(\ell_i) := (L \cap \ell_i)$$

，其中  $L \not\equiv \bigcap \ell_i$  為非無窮遠線的直線，稱為線束  $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$  的交比。

還有所有點都位於無窮遠線上的點交比：

**Definition 0.2.4.** 對於共線四點  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{L}_\infty$ ,

$$(P_i) := \frac{\sin \angle P_1 A P_3 / \sin \angle P_3 A P_2}{\sin \angle P_1 A P_4 / \sin \angle P_4 A P_2}$$

，其中  $A \notin \mathcal{L}_\infty$ 。

由這個定義，(0.2.2) 仍然成立於  $L = \mathcal{L}_\infty$  時。而交比本身在這樣的定義下我們顯然有任何旋似變換或位似變換  $\varphi$  保交比，即  $(\varphi(P_i)) = (P_i)$ 。在完整的定義完交比後，可以得到你不可不知的交比小性質：

**Proposition 0.2.5.** 對於共線四點  $P_1, P_2, P_3, P_4$ ，若  $(P_i) = \lambda$ ，則

$$(i) \quad (P_2, P_1; P_3, P_4) = (P_1, P_2; P_4, P_3) = \lambda^{-1}$$

$$(ii) \quad (P_1, P_3; P_2, P_4) = 1 - \lambda。$$

■

當然，把點改成線這一樣是對的。那事實上由這個性質就可以把所有  $(P_{\sigma(i)})$  都用  $(P_i)$  來表示了，其中  $\sigma \in S_4$ 。

**Example 0.2.6.** 我們說四點  $P_1, P_2, P_3, P_4$  調和若  $(P_i) = -1$ ，四線  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$  調和若  $(\ell_i) = -1$ 。由上面的性質，1, 3 交換，2, 4 交換，或  $\{1, 3\}, \{2, 4\}$  也都是調和的，因此調和的四點或四線可以分成兩組。所以我們有時會說  $\{P_1, P_3\}$  調和分割  $\{P_2, P_4\}$ ，那這等價於  $\{P_2, P_4\}$  調和分割  $\{P_1, P_3\}$ 。線的情況則同理。

再來這個是交比界中最重要性質，沒有它你什麼都做不到 (?)

**Proposition 0.2.7.**

$$(i) \quad \text{對於共線五點 } P_1, P_2, P_3, P_4, P_j, P_j = P_k \text{ 若且唯若 } (P_i) = (P_{i'}),$$

(ii) 對於共點五線  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_j$ ， $\ell_j = \ell_k$  若且唯若  $(\ell_i) = (\ell_{i'})$ ,

其中

$$i' = i + \delta_{ik}(j - i) = \begin{cases} i, & \text{if } i \neq k \\ j, & \text{if } i = k. \end{cases} \quad \blacksquare$$

注意到 (ii) 可以由 (i) 推得，而 (i) 的證明就是將線段長炸開，詳細證明就留給讀者。我們現在定義一些方便的記號：

**Definition 0.2.8.**

(i) 對於任意五點  $P_1, P_2, P_3, P_4, A$ ，

$$A(P_i) := A(P_1, P_2; P_3, P_4) := (AP_1, AP_2; AP_3, AP_4).$$

(ii) 對於任意五線  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, L$ ，

$$L(\ell_i) := L(\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4) := (L \cap \ell_1, L \cap \ell_2; L \cap \ell_3, L \cap \ell_4).$$

如此一來，我們可以用這些記號簡化下面這些證明共線的好方法。

**Proposition 0.2.9.** 對於共線三點  $P_1, P_2, P_3 \in \ell$  及  $\ell$  外兩點  $A, B$ ，若點  $P_4$  滿足  $P_4 \notin AB$ ，則  $A(P_i) = B(P_i)$  若且唯若  $P_4 \in \ell$ 。

*Proof.* 證回來不難，留給讀者。令  $P'_i = P_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $P'_4 = AP_4 \cap \ell$ ，則

$$B(P'_i) = (P'_i) = A(P'_i) = A(P_i) = B(P_i),$$

因此  $P'_4 \in BP_4$ ，所以  $P'_4 = AP_4 \cap BP_4 = P_4$ ，即  $P_4 \in \ell$ 。 ■

**Proposition 0.2.10.** 對於三點  $P_1, P_2, P_3$  及兩點  $A, B \notin \bigcup P_i P_j$ ，

$$A(P_1, P_2; P_3, B) = B(P_1, P_2; P_3, A)$$

若且唯若  $P_1, P_2, P_3$  共線。

*Proof.* 證回來一樣不難，留給讀者。令  $P_4 = AB \cap P_2 P_3$ ，則  $P_2, P_3, P_4$  共線且

$$A(P_1, P_2; P_3, P_4) = A(P_1, P_2; P_3, B) = B(P_1, P_2; P_3, A) = B(P_1, P_2; P_3, P_4),$$

因此  $P_1 \in P_2 P_3$ 。 ■

有了共線之後當然也會有共點的：

**Proposition 0.2.11.** 對於共點三線  $\ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3 = P$  及點外兩線  $K, L$ ，若線  $\ell_4$  滿足  $K \cap L \notin \ell_4$ ，則  $K(\ell_i) = L(\ell_i)$  若且唯若  $P \in \ell_4$ 。

**Proposition 0.2.12.** 對於三線  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  及兩線  $K, L \cap (\bigcup \ell_i \cap \ell_j) = \emptyset$ ，

$$K(\ell_1, \ell_2; \ell_3, L) = L(\ell_1, \ell_2; \ell_3, K)$$

若且唯若  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  共點。

上面的證明都跟共線的證明類似。這樣就可以證明一個常見的定理：

**Theorem 0.2.13** (迪沙格定理/Desargues'). 對於兩個三角形  $\triangle A_1 B_1 C_1$  與  $\triangle A_2 B_2 C_2$ ， $B_1 C_1 \cap B_2 C_2, C_1 A_1 \cap C_2 A_2, A_1 B_1 \cap A_2 B_2$  共線若且唯若  $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2$  共點。

*Proof.* 令  $X = B_1 B_2 \cap C_1 C_2$ ,  $P_{BC} = B_1 C_1 \cap B_2 C_2$ ,  $P_{CA} = C_1 A_1 \cap C_2 A_2$ ,  $P_{AB} = A_1 B_1 \cap A_2 B_2$ ， $A_1 A_2$  分別交  $B_i C_i$  於  $Z_i$ 。注意到  $X \in A_1 A_2$  等價於  $X \in Z_1 Z_2$ ，即

$$(P_{BC}, C_1; B_1, Z_1) \stackrel{X}{=} (P_{BC}, C_2; B_2, Z_2)$$

而  $P_{BC}, P_{CA}, P_{AB}$  共線則由 (0.2.10) 等價於 (注意到  $A_i \notin \bigcup P_{CA} P_{AB}$ )

$$A_1(P_{BC}, P_{CA}; P_{AB}, A_2) = A_2(P_{BC}, P_{CA}; P_{AB}, A_3).$$

因此由

$$A_i(P_{BC}, P_{CA}; P_{AB}, A_{3-i}) = (P_{BC}, C_i; B_i, Z_i),$$

知兩者等價。 ■

接下來我們想要在圓上定義交比，所以我們先觀察到如下的事實：

**Proposition 0.2.14.** 給定共圓四點  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \odot(O)$ ，若  $A$  為  $\odot(O)$  上異於  $P_i$  的點，則  $A(P_i)$  為定值 (與  $A$  的選取無關)。

*Proof.* 令  $A'$  為  $\odot(O)$  上異於  $P_i$  的點，由圓周角性質知  $\angle P_i A P_j = \angle P_i A' P_j$ 。因此由 (0.2.2) 知  $A(P_i) = A'(P_i)$ ，故  $A(P_i)$  為定值。 ■

**Remark.** 在上述性質中，若對於某個  $i$ ， $A = P_i$ ，則我們將  $A(P_i) = (AP_i)$  中的  $AA$  視為  $T_A \odot(O)$ ，那麼此時命題依舊成立，而這個記號將一直沿用至圓錐曲線的情形。

所以就可以直接定義交比了：

**Definition 0.2.15.** 對於共圓四點  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \odot(O)$ ，

$$(P_i) := (P_1, P_2; P_3, P_4) := A(P_i)$$

其中  $A \in \odot(O)$ 。

**Remark.** 如果把平面擴張成  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  而不是  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  的話，那這時候圓及直線上的交比就會跟「直線」 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  的交比定義一樣了，而且四個點之交比是實數若且唯若它們共圓或共直線。

以下這個定理說明了配極變換為保交比變換，是一個經常使用的技巧。

**Theorem 0.2.16.** 給定任意一圓  $\odot(O)$ ，令共點四線  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$  分別為共線四點  $P_1, P_2, P_3, P_4$  關於  $\odot(O)$  的極線，則  $(P_i) = (\ell_i)$ 。

*Proof.* 若  $O \notin \overline{P_1 P_2 P_3 P_4}$ ，由配極性質知  $OP_i \perp \ell_i$ ，因此

$$\angle P_i O P_j = \angle(OP_i, OP_j) = \angle(\ell_i, \ell_j),$$

所以由角度關係知

$$(P_i) = O(P_i) = (\ell_i).$$

若  $O \in \overline{P_1 P_2 P_3 P_4}$ ，作不過  $O$  的一線  $L$ ，並令  $P'_i$  為  $P_i$  關於  $L$  的垂足， $\ell'_i$  為  $P'_i$  關於  $\odot(O)$  的極線。設  $Q_i = \ell_i \cap \ell'_i$ ，則  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  共線。所以有

$$(P_i) = (P'_i) = (\ell'_i) = (Q_i) = (\ell_i). \quad \blacksquare$$

這定理有個重要的推論——反演變換保交比(直線上)，這可以說是交比界中第二重要的性質。

**Corollary 0.2.17.** 給定四線  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \in T\odot(O)$ ，若  $L \in T\odot(O)$  為異於  $\ell_i$  的直線，則  $L(\ell_i)$  為定值(與  $L$  的選取無關)。

*Proof.* 若  $L' \in T \odot(O)$  為異於  $\ell_i$  的直線，則由 (0.2.16) 知

$$L(\ell_i) = T_L \odot(O)(T_{\ell_i} \odot(O)) = T_{L'} \odot(O)(T_{\ell_i} \odot(O)) = L'(\ell_i),$$

故  $L(\ell_i)$  為定值。 ■

於是也可以定義切線的交比：

**Definition 0.2.18.** 對於四線  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \in T \odot(O)$ ，

$$(\ell_i) := (\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4) := L(\ell_i),$$

其中  $L$  為切  $\odot(O)$  的直線。

**Remark.** 跟點的情況一樣，若對於某個  $i$ ， $L = \ell_i$ ，則我們將  $L(\ell_i) = (L \cap \ell_i)$  中的  $L \cap \ell_i$  視為  $T_L \odot(O)$ ，那麼此時命題依舊成立，而這個記號也將一直沿用至圓錐曲線的情形。

## 習題

**Problem 1.** 證明一個完全四線形的其中一個對角線段與另外兩個對角線段的交點調和分割這個對角線段的端點。

**Problem 2.** 給定線上四點  $P_1, P_2, P_3, P_4$  及線外一點  $A$ ，證明以下兩個命題皆可推得剩餘兩個：

- (1)  $P_1, P_2, P_3, P_4$  調和
- (2)  $\angle P_1 A P_2 = 90^\circ$
- (3)  $AP_1$  平分  $\angle P_3 A P_4$
- (4)  $AP_2$  平分  $\angle P_3 A P_4$

**Problem 3.** 令  $\triangle ABC$  的內切圓  $\omega$  分別切  $CA, AB$  於  $E, F$ ， $P = BC \cap EF$ ，平行於  $BC$  且與  $\omega$  相切的直線分別交  $CA, AB$  於  $Y, Z$ ，證明  $P$  關於  $\omega$  異於  $BC$  的另一條切線平分  $\overline{YZ}$ 。



**Problem 4.** 令  $P$  為  $\triangle ABC$  內任意一點， $BP, CP$  分別交  $CA, AB$  於  $E, F$ ， $EF$  交  $\odot(ABC)$  於  $B', C'$ ， $B'P, C'P$  分別交  $BC$  於  $C'', B''$ ，證明  $B'B'', C'C'', \odot(ABC)$  共點。

**Problem 5.** 設  $\triangle DEF$  為  $\triangle ABC$  的內切三角形， $X, Y, Z$  位於  $\triangle ABC$  的內切圓  $\odot(DEF)$  上。證明： $AX, BY, CZ$  共點若且唯若  $DX, EY, FZ$  共點或  $DX \cap EF, EY \cap FD, FZ \cap DE$  共線。

**Problem 6.** 令  $P_1, P_2, P_3, P_4$  為共線四點， $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  為另一組共線四點且兩線相異，設  $R_i = P_i Q_{i+1} \cap P_{i+1} Q_i$ 。證明： $R_1, R_2, R_3$  共線若且唯若  $(P_i) = (Q_i)$ 。

**Problem 7.** 給定直線  $\ell$  上五點  $P_1, P_2, P_3, P_4, P'_4$ 。證明：可以只用直尺在  $\ell$  上找到兩點  $Q, R$  滿足

$$(P_1, P_2; P_3, Q) = (P_1, P_2; P_3, P_4) \cdot (P_1, P_2; P_3, P'_4), \text{ 及}$$

$$(P_1, P_2; P_3, R) = (P_1, P_2; P_3, P_4) + (P_1, P_2; P_3, P'_4).$$

### 0.3 圓錐曲線上的交比

**Definition 0.3.1.**  $E_1, E_2$  為空間  $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$  中兩平面， $M$  為  $E_1 \cup E_2$  外一點，令  $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$  定義為

$$\varphi(Q) = MQ \cap E_2 \quad \forall Q \in E_1,$$

則我們稱  $\varphi$  為將  $E_1$  映射至  $E_2$  的透視變換 (Perspective Transformation)， $M$  為其中心。

**Proposition 0.3.2.**  $E_1, E_2$  為兩平面， $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$  為一透視變換，則對於  $E_1$  上任一直線  $\ell$ ， $\varphi(\ell)$  為一直線。

*Proof.* 令  $M$  為  $\varphi$  的中心，並設  $G$  為過  $M$  與  $\ell$  的平面，則

$$\varphi(\ell) = \{\varphi(Q) \mid Q \in \ell\} = \{PQ \cap E_2 \mid Q \in \ell\} = \{PQ \mid Q \in \ell\} \cap E_2 = G \cap E_2,$$

又兩平面的交集為直線，故  $\varphi(\ell)$  為一直線。 ■

**Theorem 0.3.3.**  $E_1, E_2$  爲兩平面， $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$  爲一透視變換，則對於  $E_1$  上共線四點  $P_1, P_2, P_3, P_4$ ， $(P_i) = (\varphi(P_i))$ 。

*Proof.* 令  $M$  爲  $\varphi$  的中心，則  $M, \ell, \varphi(\ell)$  共平面，所以有

$$(P_i) = M(P_i) = M(\varphi(P_i)) = (\varphi(P_i)). \quad \blacksquare$$

**Theorem 0.3.4.**  $E_1, E_2$  爲兩平面， $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$  爲一透視變換，則對於  $E_1$  上共點四線  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ ， $(\ell_i) = (\varphi(\ell_i))$ 。

*Proof.* 令  $M$  爲  $\varphi$  的中心，過  $M$  作任意一不過  $\bigcap \ell_i$  的平面  $E_3$ ，設  $R_i = \ell_i \cap E_3$ ，則

$$(\ell_i) = (R_i) = (\varphi(R_i)) = (\varphi(\ell_i)). \quad \blacksquare$$

**Proposition 0.3.5.** 令  $E$  爲一平面，對於任意圓錐曲線  $C \subset E$ ，存在一平面  $E_1$ 、一圓  $\odot(O) \subset E_1$  及一透視變換  $\varphi: E \rightarrow E_1$  使  $\varphi(C) = \odot(O)$ 。

爲了得到下面這個定理，我們得再承認一件事——五個點決定一個圓錐曲線、五條線決定了一個相切圓錐曲線。另外，在不與其他符號混淆的情況下，有時會用  $(P_1P_2P_3P_4P_5)$  代表過  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  的圓錐曲線， $(\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4\ell_5)$  代表切  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5$  的圓錐曲線。

**Theorem 0.3.6** (圓錐曲線基本定理/Fundamental Theorem on Conic Sections). 令  $P_1, P_2, P_3, P_4, A, A'$  爲平面上六點且任三點不共線，則  $P_1, P_2, P_3, P_4, A, A'$  共一圓錐曲線若且唯若  $A(P_i) = A'(P_i)$ 。

*Proof.* 令  $C = (P_1P_2P_3AA')$  且  $E$  爲  $C$  所在平面，則存在一平面  $E_1$ 、一圓  $\odot(O)$  在  $E_1$  上及一透視變換  $\varphi: E \rightarrow E_1$  使  $\varphi(C) = \odot(O)$ 。

( $\Rightarrow$ ) 由  $\varphi(P_4) \in \odot(O)$  知

$$A(P_i) = \varphi(A)(\varphi(P_i)) = \varphi(A')(\varphi(P_i)) = A'(P_i).$$

( $\Leftarrow$ ) 令  $P'_i = P_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $P'_4 = AP_4 \cap C \setminus \{A\}$ ，則由 ( $\Rightarrow$ ) 知

$$A'(P'_i) = A(P_i) = A'(P_i),$$

即  $P'_4 = A'P_4 \cap AP_4 = P_4$ ，故  $P_1, P_2, P_3, P_4, A, A'$  共圓錐曲線。 ■

那這個定理當然也有其對偶命題：

**Theorem 0.3.7.** 令  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, L, L'$  為平面上六線且任三線不共點，則  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, L, L'$  共切圓錐曲線若且唯若  $L(\ell_i) = L'(\ell_i)$ 。 ■

證明與點的版本類似。於是我們就可以好好的在圓錐曲線上（或切線）定義交比了。

**Definition 0.3.8.** 令  $C$  為一圓錐曲線，對於四點  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in C$ ，

$$(P_i)_C := (P_1, P_2; P_3, P_4)_C := A(P_i),$$

其中  $A \in C$ ，稱為  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  在  $C$  上的交比。

**Definition 0.3.9.** 令  $C$  為一圓錐曲線，對於四線  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \in TC$ ，

$$(\ell_i)_C := (\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4)_{TC} := L(\ell_i),$$

其中  $L \in TC$ ，稱為  $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$  在切  $C$  的交比。

那麼我們同時也可以把調和這個概念延伸到圓錐曲線上：

**Definition 0.3.10.** 給定任意圓錐曲線  $C$ ，四點  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in C$ ，則我們稱四邊形  $P_1P_3P_2P_4$  為  $C$  上的調和四邊形若  $(P_i)_C = -1$ 。

**Proposition 0.3.11.** 給定任意圓錐曲線  $C$ ，四點  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in C$ ，令  $P_1, P_2$  分別關於  $C$  的切線交於  $A$ ，則  $P_1P_3P_2P_4$  為  $C$  上的調和四邊形若且唯若  $A$  在  $P_3P_4$  上。

*Proof.* 由

$$(P_i)_C = -1 \iff P_1(P_1, P_2; P_3, P_4) = P_2(P_2, P_1; P_3, P_4),$$

及 (0.2.10) 可得  $P_1P_2P_3P_4$  為  $C$  上的調和四邊形若且唯若  $A \in P_3P_4$ 。 ■

## 0.4 一些定理

在有了圓錐曲線與交比的一些基礎下，就可以拿來證一些常見定理了。

**Theorem 0.4.1** (帕斯卡定理/Pascal's). 令  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  為任三點不共線的六點，則  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  共一圓錐曲線若且唯若

$$P_1P_2 \cap P_4P_5, P_2P_3 \cap P_5P_6, P_3P_4 \cap P_6P_1$$

共線。

*Proof.* 令  $Q_1 = P_1P_2 \cap P_4P_5, Q_2 = P_2P_3 \cap P_5P_6, Q_3 = P_3P_4 \cap P_6P_1$ ，則

$$P_1(P_2, P_3; P_4, P_6) = Q_1(P_1, P_3; P_4, Q_3),$$

$$P_5(P_2, P_3; P_4, P_6) = Q_1(P_1, P_3; P_4, Q_2),$$

因此  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  共一圓錐曲線若且唯若

$$\begin{aligned} P_1(P_2, P_3; P_4, P_6) &= P_5(P_2, P_3; P_4, P_6) \\ \iff Q_1(P_1, P_3; P_4, Q_3) &= Q_1(P_1, P_3; P_4, Q_2) \end{aligned}$$

即  $Q_1, Q_2, Q_3$  共線。 ■

其對偶命題為：

**Theorem 0.4.2** (布里昂雄定理/Brianchon's). 令  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6$  為任三線不共點的六線，則  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6$  切一圓錐曲線若且唯若

$$(\ell_1 \cap \ell_2)(\ell_4 \cap \ell_5), (\ell_2 \cap \ell_3)(\ell_5 \cap \ell_6), (\ell_3 \cap \ell_4)(\ell_6 \cap \ell_1)$$

共點。 ■

證明與帕斯卡定理類似。

**Remark.** 上面這兩個定理其實是可以允許兩點 (線) 重合的，只是兩點連線 (線交點) 就會變成切線 (點)，而反過來就是與該線相切 (切於該點)。

**Theorem 0.4.3** (卡諾圓錐曲線定理/Carnot's). 給定任意  $\triangle ABC$ , 點對們  $(D_1, D_2), (E_1, E_2), (F_1, F_2)$  分別位於  $BC, CA, AB$  上, 則  $D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$  共一圓錐曲線若且唯若  $AD_1, AD_2, BE_1, BE_2, CF_1, CF_2$  切一圓錐曲線若且唯若

$$\frac{BD_1}{D_1C} \cdot \frac{BD_2}{D_2C} \cdot \frac{CE_1}{E_1A} \cdot \frac{CE_2}{E_2A} \cdot \frac{AF_1}{F_1B} \cdot \frac{AF_2}{F_2B} = 1.$$

*Proof.* 只證  $D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$  共一圓錐曲線若且唯若

$$\frac{BD_1}{D_1C} \cdot \frac{BD_2}{D_2C} \cdot \frac{CE_1}{E_1A} \cdot \frac{CE_2}{E_2A} \cdot \frac{AF_1}{F_1B} \cdot \frac{AF_2}{F_2B} = 1,$$

另一個等價證明類似。令  $E_2F_1, F_2D_1, D_2E_1$  分別交  $BC, CA, AB$  於  $X, Y, Z$ , 則由孟氏定理可得

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CE_2}{E_2A} \cdot \frac{AF_1}{F_1B} = \frac{BD_1}{D_1C} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AF_2}{F_2B} = \frac{BD_2}{D_2C} \cdot \frac{CE_1}{E_1A} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -1.$$

由帕斯卡定理,  $D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$  共一圓錐曲線若且唯若  $X, Y, Z$  共線若且唯若

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -1 \iff \frac{BD_1}{D_1C} \cdot \frac{BD_2}{D_2C} \cdot \frac{CE_1}{E_1A} \cdot \frac{CE_2}{E_2A} \cdot \frac{AF_1}{F_1B} \cdot \frac{AF_2}{F_2B} = 1. \quad \blacksquare$$

**Definition 0.4.4.** 給定  $\triangle ABC$ , 對於任意圓錐曲線  $\mathcal{C}$

- (i) 我們說  $\mathcal{C}$  是  $\triangle ABC$  的外接圓錐曲線若  $A, B, C \in \mathcal{C}$ ,
- (ii) 我們說  $\mathcal{C}$  是  $\triangle ABC$  的內切圓錐曲線若  $BC, CA, AB \in \mathcal{C}$ 。

類似於外接圓, 我們有

**Definition 0.4.5.**

- (i) 給定  $\triangle ABC$  與一外接圓錐曲線  $\mathcal{C}$ , 對於任意一點  $P$ , 我們定義  $P$  關於  $\triangle ABC$  的  $\mathcal{C}$ -西瓦三角形為  $\triangle(AP \cap \mathcal{C})(BP \cap \mathcal{C})(CP \cap \mathcal{C})$ 。
- (ii) 給定  $\triangle ABC$  與一內切圓錐曲線  $\mathcal{C}$ , 對於任意一線  $\ell$ , 我們定義  $\ell$  關於  $\triangle ABC$  的  $\mathcal{C}$ -西瓦三角形為  $\triangle((BC \cap \ell)\mathcal{C})((CA \cap \ell)\mathcal{C})((AB \cap \ell)\mathcal{C})$ 。

下面這個定理算是  $n = 3$  的情況, 只是目前來講算是它最好用。

**Theorem 0.4.6** (龐色列閉合/Poncelet's Closure Theorem). 設  $\triangle A_1B_1C_1$  及  $\triangle A_2B_2C_2$  為平面上兩個三角形，則  $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$  共一外接圓錐曲線若且唯若  $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$  共切一內切圓錐曲線。

*Proof.* 注意到

$$A_1(B_1, C_1; B_2, C_2) = (B_2C_2)(A_1B_1, C_1A_1; A_2B_2, C_2A_2),$$

$$A_2(B_2, C_2; B_1, C_1) = (B_1C_1)(A_2B_2, C_2A_2; A_1B_1, C_1A_1),$$

因此  $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$  共一外接圓錐曲線若且唯若

$$A_1(B_1, C_1; B_2, C_2) = A_2(B_2, C_2; B_1, C_1)$$

$$\iff (B_2C_2)(A_1B_1, C_1A_1; A_2B_2, C_2A_2) = (B_1C_1)(A_1B_1, C_1A_1; A_2B_2, C_2A_2)$$

若且唯若  $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$  共切一內切圓錐曲線。 ■

讓我們回憶一下：一個完全四點形  $Q = (P_1, P_2, P_3, P_4)$  的西瓦三角形是由

$$P_2P_3 \cap P_1P_4, P_3P_1 \cap P_2P_4, P_1P_2 \cap P_3P_4$$

為頂點所作出的三角形，這同時也是  $P_4$  關於  $\triangle P_1P_2P_3$  的西瓦三角形的定義。類似地，一個完全四線形  $Q = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$  的西瓦三角形是由

$$P_2P_3 \cap P_1P_4, P_3P_1 \cap P_2P_4, P_1P_2 \cap P_3P_4$$

為頂點所作出的三角形，這同時也是  $P_4$  關於  $\triangle P_1P_2P_3$  的西瓦三角形的定義。

**Theorem 0.4.7** (九點圓錐曲線定理/Nine-Point Conic Theorem). 對於任意完全四點形  $Q = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ ，定義  $M_{ij}$  為  $\overline{P_iP_j}$  中點，則六點

$$M_{23}, M_{14}, M_{31}, M_{24}, M_{12}, M_{34}$$

共一圓錐曲線且該圓錐曲線為  $Q$  的西瓦三角形的外接圓錐曲線。

事實上他有一個推廣：

**Theorem 0.4.8.** 對於任意完全四點形  $Q = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ ，取一線  $\ell$ ，定義  $Q_{ij} = P_iP_j \cap \ell$ 。在  $P_iP_j$  上取  $R_{ij}$  使得

$$(P_i, P_j; Q_{ij}, R_{ij}) = -1$$

那麼  $R_{23}, R_{14}, R_{31}, R_{24}, R_{12}, R_{34}$  共一圓錐曲線且該圓錐曲線為  $Q$  的西瓦三角形的外接圓錐曲線。

*Proof.* 令  $P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2$  分別交  $P_1P_4, P_2P_4, P_3P_4$  於  $X, Y, Z$ ，由西瓦定理與孟氏定理可得

$$\frac{P_2X}{XP_3} \cdot \frac{P_3Y}{YP_1} \cdot \frac{P_1Z}{ZP_2} \cdot \frac{P_2R_{23}}{R_{23}P_3} \cdot \frac{P_3R_{31}}{R_{31}P_1} \cdot \frac{P_1R_{12}}{R_{12}P_2} = -\frac{P_2Q_{23}}{Q_{23}P_3} \cdot \frac{P_3Q_{31}}{Q_{31}P_1} \cdot \frac{P_1Q_{12}}{Q_{12}P_2} = 1,$$

因此由卡諾定理可得  $X, Y, Z, R_{23}, R_{31}, R_{12}$  共圓錐曲線，令其為  $C$ 。注意到對於所有兩兩相異  $i, j, k$ ， $Q_{jk}, R_{ij}, R_{ik}$  共線，因此

$$R_{31}(Y, Z; R_{23}, R_{14}) \stackrel{\ell}{=} Z(Q_{31}, R_{31}; Q_{12}, Q_{34}) = (Q_{31}, R_{31}; P_1, P_3) = -1$$

$$R_{12}(Y, Z; R_{23}, R_{14}) \stackrel{\ell}{=} Y(R_{12}, Q_{12}; Q_{31}, Q_{24}) = (R_{12}, Q_{12}; P_1, P_2) = -1$$

知  $R_{14} \in C$ ，同理有  $R_{24}, R_{34} \in C$ ，因此  $R_{23}, R_{14}, R_{31}, R_{24}, R_{12}, R_{34}$  共於  $C$  且為  $\triangle XYZ$  的外接圓錐曲線。 ■

其對偶命題為：

**Theorem 0.4.9.** 對於任意完全四線形  $Q = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ ，取一點  $P$ ，定義  $L_{ij} = (\ell_i \cap \ell_j)P$ 。在  $T(\ell_i \cap \ell_j)$  中取  $K_{ij}$  使得

$$(\ell_i, \ell_j; L_{ij}, K_{ij}) = -1$$

那麼  $K_{23}, K_{14}, K_{31}, K_{24}, K_{12}, K_{34}$  共切一圓錐曲線且該圓錐曲線為  $Q$  的對角三角形的內切圓錐曲線。

**Definition 0.4.10.** 給定任意完全四點形  $Q = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ ，對於一直線  $\ell$ ，我們稱 (0.4.8) 中的圓錐曲線  $C$  為  $\ell$  關於  $Q$  的九點圓錐曲線。當  $\ell = \mathcal{L}_\infty$  時，簡稱為九點圓錐曲線。

**Definition 0.4.11.** 給定任意完全四線形  $Q = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ ，對於一點  $P$ ，我們稱 (0.4.9) 中的圓錐曲線  $C$  為  $P$  關於  $Q$  的九線圓錐曲線。

### 0.4.1 牛頓三大定理

在競賽中，完全四線形是一個經常出現的圖形，與圓錐曲線最有關的就屬下面三個牛頓定理啦 (?)

**Theorem 0.4.12** (牛頓一號/Newton's Theorem I). 對於任意完全四線形  $Q$ ，其三個對角線段的中點共線。

*Proof.* 令  $Q = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ ， $P_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$ ， $\triangle M_1 M_2 M_3$  為  $\triangle P_{23} P_{31} P_{12}$  的中點三角形， $R_1, R_2, R_3$  分別為  $\overline{P_{23} P_{14}}, \overline{P_{31} P_{24}}, \overline{P_{12} P_{34}}$  的中點，則由孟氏定理知

$$\frac{M_2 R_1}{R_1 M_3} \cdot \frac{M_3 R_2}{R_2 M_1} \cdot \frac{M_1 R_3}{R_3 M_2} = \frac{P_{12} P_{14}}{P_{14} P_{31}} \cdot \frac{P_{23} P_{24}}{P_{24} P_{12}} \cdot \frac{P_{31} P_{34}}{P_{34} P_{23}} = -1,$$

所以  $R_1, R_2, R_3$  共線。 ■

**Definition 0.4.13** (QL-L1). 對於任意完全四線形  $Q$ ，我們稱  $Q$  的三個對角線段的中點連線為  $Q$  的牛頓線 (Newton Line)。

**Theorem 0.4.14** (牛頓二號/Newton's Theorem II). 對於完全四線形  $Q$ ，若圓錐曲線  $C$  與  $Q$  中的四線皆相切，則  $C$  的中心位於  $Q$  的牛頓線上。反之，若  $O$  為  $Q$  的牛頓線上一點，則存在一以  $O$  為中心的圓錐曲線  $C$  與  $Q$  相切。

*Proof.* 不妨假設  $\ell_1$  不平行於  $\ell_4$ 。令  $Q = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ ， $P_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$ ， $R_2, R_3$  分別為  $\overline{P_{31} P_{24}}, \overline{P_{12} P_{34}}$  的中點， $O$  為  $C$  的中心。作  $\ell_1, \ell_4$  關於  $O$  的對稱直線  $\ell'_1, \ell'_4$ ，那麼  $P'_{14} = \ell'_1 \cap \ell'_4$  為  $P_{14}$  關於  $O$  的對稱點。令  $Q_2, Q_3$  分別為  $P_{14}$  關於  $R_2, R_3$  的對稱點，因為  $Q$  與  $\ell'_1, \ell'_4$  共切  $C$ ，所以

$$\begin{aligned} \infty_{\ell_1}(Q_2, Q_3; P'_{14}, \infty_{\ell_4}) &= (P_{24}, P_{34}; \ell'_1 \cap \ell_4, \infty_{\ell_4}) = (P_{12}, P_{31}; \infty_{\ell_1}, \ell_1 \cap \ell'_4) \\ &= \infty_{\ell_4}(Q_3, Q_2; \infty_{\ell_1}, P'_{14}) = \infty_{\ell_4}(Q_2, Q_3; P'_{14}, \infty_{\ell_1}), \end{aligned}$$

由交比的性質 (0.2.9)，我們有  $Q_2, Q_3, P'_{14}$  共線，關於  $P_{14}$  位似 1/2 倍可得  $O \in R_2 R_3$ 。反敘述就把論證反過來就好了。 ■

好啦牛頓三號老實說跟四邊形比較有關。

**Theorem 0.4.15** (牛頓三號/Newton's Theorem III). 對於完全四線形  $Q = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ ，定義  $P_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$ ，若圓錐曲線  $C$  分別與  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$  切於  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ ，則  $Q_1 Q_3, Q_2 Q_4, P_{12} P_{34}, P_{23} P_{41}$  共點。

*Proof.* 考慮六切線組  $(\ell_1 \ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_3 \ell_4)$  與  $(\ell_1 \ell_2 \ell_2 \ell_3 \ell_4 \ell_4)$ ，由 (0.4.2) 知  $Q_1 Q_3, P_{12} P_{34}, P_{23} P_{41}$  與  $Q_2 Q_4, P_{12} P_{34}, P_{23} P_{41}$  分別共點，即四線  $Q_1 Q_3, Q_2 Q_4, P_{12} P_{34}, P_{23} P_{41}$  共



點。



## 習題

**Problem 1.** 令  $\triangle S_1S_2S_3$  為一個正三角形， $P$  為任意一點，令  $Q_1$  為  $\overline{PS_1}$  的中垂線與  $S_2S_3$  的交點，類似定義  $Q_2, Q_3$ 。證明： $Q_1, Q_2, Q_3$  共線。

**Problem 2.** 令  $\triangle S_1S_2S_3$  為一個正三角形， $P$  為任意一點。證明： $\triangle PS_2S_3, \triangle PS_3S_1, \triangle PS_1S_2$  的歐拉線共點。

**Problem 3.** 令  $I$  為  $\triangle ABC$  的內心， $D$  為  $I$  關於  $BC$  的垂足， $M$  為  $\overline{BC}$  的中點。證明： $IM$  平分  $\overline{AD}$ 。

**Problem 4.** 令  $O$  為  $\triangle ABC$  的外心， $P, Q$  分別為  $CA, AB$  上兩點滿足  $P, O, Q$  共線，設  $M, N$  分別為  $\overline{BP}, \overline{CQ}$  中點。證明： $\angle BAC = \angle MON$ 。

**Problem 5.** 令  $AB, AC$  為兩個不同的射線且  $\omega$  為一個以  $O$  為圓心的圓並分別與  $AC, AB$  切於  $E, F$ 。  $R$  為  $EF$  上一點，過  $O$  平行於  $EF$  的直線交  $AB$  於  $P$ 。令  $N$  為  $PR$  與  $AC$  的交點且  $M$  為  $AB$  與過  $R$  平行於  $AC$  的直線的交點。證明： $MN$  與  $\omega$  相切。

**Problem 6.** 設  $ABCD$  為一個圓內接四邊形且  $P$  為其對角線  $AC$  與  $BD$  的交點，令  $M_{AB}, \dots, M_{DA}$  分別為  $\widehat{AB}, \dots, \widehat{DA}$  中點， $I_{AB}, \dots, I_{DA}$  分別為  $\triangle PAB, \dots, \triangle PDA$  的內心。證明： $M_{AB}I_{AB}, \dots, M_{DA}I_{DA}$  四線共點。

**Problem 7.** 令  $H$  為  $\triangle ABC$  的垂心， $M$  為  $\overline{AH}$  的中點， $E, F$  分別為  $B, C$  關於  $CA, AB$  的垂足。在  $EM$  上取點  $R$  使得  $\angle RBC = 90^\circ$ ，在  $FM$  上取點  $S$  使得  $\angle BCS = 90^\circ$ 。證明： $A, R, S$  共線。

**Problem 8.** 令  $\triangle DEF$  為  $\triangle ABC$  的弧中點三角形、 $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$  為  $\triangle ABC$  和  $\triangle DEF$  的交點並且以  $D, Z_1, Z_2, E, X_1, X_2, F, Y_1, Y_2, D$  為順序，設  $P_{bc} = EY_1 \cap FZ_2, P_{cb} = FZ_1 \cap EY_2$ ，同樣定義  $P_{ca}, P_{ac}, P_{ab}, P_{ba}$ ，證明  $P_{bc}P_{cb}, P_{ca}P_{ac}, P_{ab}P_{ba}$  共點。

**Problem 9.** 令  $I$  為  $\triangle ABC$  的內心， $\ell$  為其內切圓  $\omega$  一條切線。設  $A', B', C'$  為共線三點滿足  $A' \in BC, B' \in CA, C' \in AB$ ， $A'$  關於  $\omega$  異於  $BC$  的切線交  $\ell$  於  $A^*$ ，類似定義  $B^*, C^*$ 。證明： $AA^*, BB^*, CC^*$  共點。

**Problem 10.** 令  $I$  為  $\triangle ABC$  的內心， $P$  為  $I$  關於  $\odot(ABC)$  的反演點， $P$  關於  $\triangle ABC$  的內切圓的其中一條切線交  $\odot(ABC)$  於  $X, Y$ 。證明： $\angle XIY = 120^\circ$ 。

**Problem 11.** 設  $\triangle ABC$  的內切圓  $\omega$  分別切  $BC, CA, AB$  於  $D, E, F$ ， $AD$  交  $\omega$  於  $K$ ，作  $K$  關於  $\omega$  的切線交  $FD, DE$  於  $Y, Z$ 。證明： $AD, BZ, CY$  共點。

**Problem 12.** 若平面上有八個點  $P_1, P_2, \dots, P_8$ ，任三點不共線， $Q_i := P_{i-2}P_{i-1} \cap P_{i+1}P_{i+2}$ 。證明： $P_1, P_2, \dots, P_8$  共圓錐曲線若且唯若  $Q_1, Q_2, \dots, Q_8$  共圓錐曲線。

---

# Chapter 1

## 配極

### 1.1 極

在圓上是擁有配極的，而且也有良好的射影定義，因為圓錐曲線又可以射影打成圓，所以在圓錐曲線上也同樣可以定義極點極線這些東西。

**Definition 1.1.1.** 給定圓錐曲線  $C$ ， $P$  為任意一點，過  $P$  作一動線交  $C$  於  $M_1, M_2$  兩點，取  $Q$  使得  $(P, Q; M_1, M_2) = -1$ ，則  $Q$  的軌跡為一直線或一線段  $\ell$ ，我們將  $\ell$  或其延長  $\mathbf{p}_C(P)$  定義為  $P$  關於  $C$  的極線。

至於為什麼是直線或線段可以把  $C$  打成圓看看，這邊就不證明了。透過我們在圓上的配極知識，以及相同的論證，我們可以把一些常見的性質推廣到圓錐曲線的情形 (從 (1.1.2) 到 (1.1.8))。

**Theorem 1.1.2** (極線互反定理). 令  $C$  為一圓錐曲線、 $P, Q$  為平面上兩點，則

$$P \in \mathbf{p}_C(Q) \iff Q \in \mathbf{p}_C(P).$$

**Definition 1.1.3.** 令  $C$  為一圓錐曲線，若兩點  $P, Q$  滿足  $P$  關於  $C$  的極線過  $Q$ ，則我們稱  $P, Q$  關於  $C$  共軛 (Conjugate)。

**Definition 1.1.4.** 令  $C$  為一圓錐曲線、 $K$  為平面上一線，在  $K$  上取動點  $Q$ ，則  $\mathbf{p}_C(Q)$  過定點  $\mathbf{p}_C(K)$ ，我們稱其為  $K$  關於  $C$  的極點 (Pole)。

**Proposition 1.1.5.** 令  $C$  爲一圓錐曲線、 $K, L$  爲平面上兩線，則

$$\mathfrak{p}_C(K) \in L \iff \mathfrak{p}_C(L) \in K.$$

**Definition 1.1.6.** 令  $C$  爲一圓錐曲線，若兩線  $K, L$  滿足  $\mathfrak{p}_C(K) \in L$  上，則我們稱  $K, L$  關於  $C$  共軛。

**Definition 1.1.7.** 令  $C$  爲一圓錐曲線，若  $\triangle ABC$  滿足  $A, B, C$  兩兩關於  $C$  共軛 (等價於  $BC, CA, AB$  兩兩關於  $C$  共軛)，則我們稱  $\triangle ABC$  爲關於  $C$  的自共軛三角形 (Self-Conjugate Triangle)。

**Proposition 1.1.8.** 令  $C$  爲一圓錐曲線、 $P_1, P_2, P_3, P_4$  爲  $C$  上四點，設

$$X = P_1P_2 \cap P_3P_4, Y = P_1P_3 \cap P_4P_2, Z = P_1P_4 \cap P_2P_3,$$

則  $\triangle XYZ$  爲關於  $C$  的自共軛三角形。

**Theorem 1.1.9.** 令  $C$  爲一圓錐曲線、令五線  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, L$  分別爲五點  $P_1, P_2, P_3, P_4, A$  關於  $C$  的極線，則

$$A(P_i) = L(\ell_i).$$

下面的推論則是結合前面的交比得到的結果。

**Corollary 1.1.10.** 給定圓錐曲線  $C$ ，任意六點  $P_1, P_2, P_3, P_4, A, B$  共一圓錐曲線若且唯若六線  $\mathfrak{p}_C(\{P_1, P_2, P_3, P_4, A, B\})$  切一圓錐曲線。

*Proof.* 由

$$A(P_i) = \mathfrak{p}_C(A)(\ell_i), B(P_i) = \mathfrak{p}_C(B)(\ell_i),$$

知  $P_1, P_2, P_3, P_4, A, B$  共一圓錐曲線若且唯若

$$\begin{aligned} A(P_i) &= B(P_i) \\ \iff \mathfrak{p}_C(A)(\ell_i) &= \mathfrak{p}_C(B)(\ell_i) \end{aligned}$$

若且唯若  $\mathfrak{p}_C(\{P_1, P_2, P_3, P_4, A, B\})$  切一圓錐曲線。 ■

**Definition 1.1.11.** 令  $C$  爲一圓錐曲線，我們稱兩圓錐曲線  $C_1, C_2$  關於  $C$  共軛，記爲  $C_2 = \mathbf{p}_C(C_1)$ ，若

$$\{\mathbf{p}_C(P) \mid P \in C_1\} = TC_2.$$

透過 (1.1.10)，可以保證對於任意  $C, C_1$ ，存在一個  $C_2$  使得  $C_1, C_2$  關於  $C$  共軛，並且有  $C_1, C_2$  關於  $C$  共軛等價於  $C_2, C_1$  關於  $C$  共軛。

**Proposition 1.1.12.** 令  $C$  爲一圓錐曲線， $O$  爲  $C$  的中心，則  $\mathbf{p}_C(O) = \mathcal{L}_\infty$ 。

*Proof.* 過  $O$  作兩條與  $C$  有交點的直線  $\ell_1, \ell_2$ ，設其分別交  $C$  於  $(P_1, Q_1), (P_2, Q_2)$ ，則  $\overline{P_1Q_1}, \overline{P_2Q_2}$  的中點們重合於  $O$ ，所以  $\infty_{P_1Q_1}, \infty_{P_2Q_2} \in \mathbf{p}_C(O)$ ，因此  $\mathbf{p}_C(O) = \mathcal{L}_\infty$ 。 ■

**Corollary 1.1.13** (平行弦定理). 令  $C$  爲一圓錐曲線、 $O$  爲  $C$  的中心， $P_1, P_2$  爲平面上兩點，則  $O, P_1, P_2$  共線若且唯若  $\mathbf{p}_C(P_1)$  平行於  $\mathbf{p}_C(P_2)$ 。

*Proof.* 注意到  $O, P_1, P_2$  共線若且唯若  $\mathbf{p}_C(O) = \mathcal{L}_\infty, \mathbf{p}_C(P_1), \mathbf{p}_C(P_2)$  共點，即  $\mathbf{p}_C(P_1)$  平行於  $\mathbf{p}_C(P_2)$ 。 ■

**Corollary 1.1.14.** 令  $C$  爲一圓錐曲線， $O$  爲  $C$  的中心， $\overline{AB}$  爲  $C$  上的弦，則  $O\mathbf{p}_C(AB)$  平分  $\overline{AB}$ 。

*Proof.* 令  $T = AB \cap O\mathbf{p}_C(AB)$ ， $U = \infty_{AB}$ ，則  $O\mathbf{p}_C(AB) = \mathbf{p}_C(U)$ ，因此由定義有  $(U, T; A, B) = -1$ ，故  $T$  爲  $\overline{AB}$  中點。 ■

**Theorem 1.1.15.** 給定  $\triangle ABC$ ，令  $P, Q$  爲兩點， $\triangle P_a P_b P_c, \triangle Q_a Q_b Q_c$  分別爲  $P, Q$  關於  $\triangle ABC$  的反西瓦三角形，那麼  $P, P_a, P_b, P_c, Q, Q_a, Q_b, Q_c$  八點共一圓錐曲線。

*Proof.* 令  $C$  爲經過  $P, P_a, P_b, P_c, Q$  的圓錐曲線，則  $\mathbf{p}_C(A), \mathbf{p}_C(B), \mathbf{p}_C(C)$  爲  $\triangle ABC$  的三邊，令  $AQ$  與  $C$  的另一個交點爲  $Q'_a$  則

$$(A, AQ \cap BC; Q, Q'_a) = -1 = (A, AQ \cap BC; Q, Q_a)$$

故  $Q_a = Q'_a$ ，因此  $Q_a \in C$ ，同理有  $Q_b, Q_c \in C$ 。 ■

其對偶命題為：

**Theorem 1.1.16.** 令  $K, L$  為兩條直線， $\triangle K_a K_b K_c, \triangle L_a L_b L_c$  分別為  $K, L$  關於  $\triangle ABC$  的反西瓦三角形，那麼  $K, K_a, K_b, K_c, L, L_a, L_b, L_c$  八線切一圓錐曲線。

**Proposition 1.1.17.** 給定  $\triangle ABC$ ，一點  $P$  及一線  $\ell$ 。令  $\mathcal{C}$  為  $\ell$  關於  $(A, B, C, P)$  的九點圓錐曲線。則  $\ell$  關於  $\triangle ABC$  的三線性極點、 $\mathbf{p}_{\mathcal{C}}(\ell)$ 、 $P$  共線。特別地，當  $\ell = \mathcal{L}_{\infty}$  時，重心  $G$ 、 $\mathcal{C}$  的中心  $O$ 、 $P$  共線且此時滿足

$$\frac{PO}{OG} = 3.$$

當  $P = H$  時，我們有：

**Corollary 1.1.18.** 令  $G, H, N$  分別為  $\triangle ABC$  的重心、垂心及九點圓圓心，則  $G, H, N$  共線且

$$\frac{HN}{NG} = 3.$$

我們將此線稱為  $\triangle ABC$  的歐拉線 (Euler Line)。

## 習題

**Problem 1.** 若  $\triangle ABC$  為關於圓  $\Gamma$  的自共軛三角形，證明： $\triangle ABC$  的垂心為  $\Gamma$  的圓心。

**Problem 2.** 設  $O$  為圓  $\Gamma$  的圓心。證明：對於任意圓  $\Omega$ ， $\mathbf{p}_{\Gamma}(\Omega)$  是一個以  $O$  為焦點的圓錐曲線。

**Problem 3.** 給定圓錐曲線  $\mathcal{C}$  與  $\triangle ABC$ 。證明： $\triangle \mathbf{p}_{\mathcal{C}}(BC) \mathbf{p}_{\mathcal{C}}(CA) \mathbf{p}_{\mathcal{C}}(AB)$  與  $\triangle ABC$  透視。

**Problem 4.** 給定任意  $\triangle ABC$ ， $P$  為任意一點。設  $\triangle P_a P_b P_c$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的佩多三角形，分別在  $PP_a, PP_b, PP_c$  上取點  $D, E, F$  使得

$$PP_a \cdot PD = PP_b \cdot PE = PP_c \cdot PF =: k.$$

證明：

- (i)  $\triangle ABC$  與  $\triangle P_a P_b P_c$  透視
- (ii) 當  $k$  變動時，透視中心的軌跡為經過  $A, B, C, P$  及  $\triangle ABC$  的垂心  $H$  的圓錐曲線。
- (iii) 當  $k$  變動時，透視軸的包絡線為與  $BC, CA, AB$  相切的拋物線。

**Problem 5** (牛頓二號的推廣). 設完全四線形  $Q = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$  與圓錐曲線  $C$  相切，令  $A_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$ 。若直線  $L$  與  $Q$  的對角線  $A_{ij}A_{kl}$  於  $P_{ij}$ ，在  $A_{ij}A_{kl}$  取  $Q_{ij}$  滿足  $(A_{ij}, A_{kl}; P_{ij}, Q_{ij}) = -1$ 。證明：

- (i)  $Q_{14}, Q_{24}, Q_{34}$  共線
- (ii)  $\mathfrak{p}_C(Q_{14}Q_{24}Q_{34}) \in L$ .

## 1.2 交比再現

我們現在知道一些可以定義交比的物體，比方說：直線、過某個點的直線集、圓錐曲線及切某個圓錐曲線的直線集等等，所以在這些東西之間就可以找出一些保持交比不變的變換。我們稱這些集合為可交比化的集合（這名字是我亂掰的）。

**Example 1.2.1.** 這邊有一些可交比化的集合

- 所有的角度，也就是  $S^1/\{\pm 1\}$
- 過兩個定點的圓所形成的集合
- 過四個定點的圓錐曲線所形成的集合
- 與四條定線相切的圓錐曲線所形成的集合

交比的定義方式就是最自然的那個（從某個點看切線，從某條線看切點）。

以下假設所有形如  $(X_i, ()_{X_i})$  的都是可交比化集，這邊先默認所有可交比化的集合都可以保交比地雙射到一個直線上。我們曾經定義過  $A(P_i) =$

$A(P_1, P_2; P_3, P_4) = (AP_1, AP_2; AP_3, AP_4) = (AP_i)$ ，更一般地，如果今天  $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$  是一個變換，那麼我們定義

$$\varphi(P_1, P_2; P_3, P_4)_{X_2} = \varphi(P_i)_{X_2} = (\varphi(P_i))_{X_2} = (\varphi(P_1), \varphi(P_2); \varphi(P_3), \varphi(P_4))_{X_2}.$$

**Definition 1.2.2.** 我們稱一個變換  $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$  為保交比變換若對於所有  $P_i \in X_1$ ， $(\varphi(P_i))_{X_2} = (P_i)_{X_1}$ 。

那麼顯然有  $\varphi$  是雙射的，爲了方便起見，我們把所有從  $X_1$  送至  $X_2$  的保交比變換收集起來，記作  $\text{Hom}(X_1, X_2)$ ，特別地， $\text{Aut}(X) := \text{Hom}(X, X)$ ，那麼我們有：

**Proposition 1.2.3.** 給定集合  $X_1, X_2, X_3$ ，若

$$\varphi \in \text{Hom}(X_1, X_2), \quad \psi \in \text{Hom}(X_2, X_3),$$

那麼  $\psi \circ \varphi \in \text{Hom}(X_1, X_3)$ 。

*Proof.* 令  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in X_1$ ，則

$$((\psi \circ \varphi)(P_i))_{X_3} = (\psi(\varphi(P_i)))_{X_3} = (\varphi(P_i))_{X_2} = (P_i)_{X_1}. \quad \blacksquare$$

**Proposition 1.2.4.** 給定集合  $X_1, X_2$  及  $\varphi \in \text{Hom}(X_1, X_2)$ ，則存在反函數  $\varphi^{-1} \in \text{Hom}(X_2, X_1)$ 。

*Proof.* 由於  $\varphi$  是雙射的，所以  $\varphi^{-1}$  存在，對於  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in X_2$ ，

$$(\varphi^{-1}(P_i))_{X_1} = (\varphi(\varphi^{-1}(P_i)))_{X_2} = (P_i)_{X_2},$$

故  $\varphi^{-1} \in \text{Hom}(X_2, X_1)$ 。 ■

**Proposition 1.2.5.** 給定直線  $\ell$  及  $\ell$  上任意相異三點  $P_1, P_2, P_3$ ，若

$$\varphi : \{P_1, P_2, P_3\} \rightarrow \ell$$

使得  $\varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3)$  兩兩相異，那麼存在唯一的一個函數  $\tilde{\varphi} \in \text{Aut}(\ell)$  使得  $\tilde{\varphi}(P_i) = \varphi(P_i)$ 。



*Proof.* 不妨將  $\ell$  想像為  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ ，使其上面有四則運算，若  $\varphi$  將  $P_i \mapsto Q_i$ ，定義  $\tilde{\varphi}: \ell \rightarrow \ell$  為

$$(Q_1, Q_2; Q_3, \tilde{\varphi}(P)) = (P_1, P_2; P_3, P) \implies \tilde{\varphi}(P) = \frac{aP + b}{cP + d},$$

其中  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  且  $ad \neq bc$ ，那麼顯然有  $\tilde{\varphi}(P_i) = \varphi(P_i)$ ，而  $(\tilde{\varphi}(Q_i)) = (Q_i)$  則交由讀者自行驗證。 ■

所以說其實

$$\text{Aut}(\ell) = \left\{ \left[ p \mapsto \frac{ap + b}{cp + d} \right] \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad \neq bc \right\} \cong \text{PGL}(2, \mathbb{R}).$$

**Proposition 1.2.6.** 給定集合  $X_1, X_2$ ，對於任意相異三點  $P_1, P_2, P_3 \in X_1$ ，若  $\varphi: \{P_1, P_2, P_3\} \rightarrow X_2$  滿足  $\varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3)$  兩兩相異，那麼存在唯一的一個函數  $\tilde{\varphi} \in \text{Hom}(X_1, X_2)$  使得  $\tilde{\varphi}(P_i) = \varphi(P_i)$ 。

*Proof.* 令  $\ell$  為一直線，取任意  $\psi_j \in \text{Hom}(X_j, \ell)$ ，由 (1.2.5) 知我們不妨假設  $\psi_1(P_i) = \psi_2(\varphi(P_i)) = i$ ，那麼  $\tilde{\varphi} := \psi_2^{-1} \circ \psi_1 \in \text{Hom}(X_1, X_2)$ ，並且顯然有  $\tilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$ 。

若存在  $\tilde{\varphi}' \in \text{Hom}(X_1, X_2)$  使得  $\tilde{\varphi}'(P_i) = \varphi(P_i)$ ，那麼  $\Phi := \tilde{\varphi}^{-1} \tilde{\varphi}' \in \text{Aut}(X_1)$ ，由

$$(P_1, P_2; P_3, \Phi(Q))_{X_1} = (\Phi(P_1), \Phi(P_2); \Phi(P_3), \Phi(Q))_{X_1} = (P_1, P_2; P_3, Q)_{X_1}$$

對於所有  $Q \in X_1$  知  $\Phi = \text{id}_{X_1}$ ，所以  $\tilde{\varphi}$  是唯一的。 ■

**Proposition 1.2.7.** 對於任意集合  $X, X'$ ， $\text{Aut}(X) \cong \text{Aut}(X')$ 。特別地，若  $X' = \ell$  為一直線，則  $\text{Aut}(X) \cong \text{Aut}(\ell) \cong \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ 。

*Proof.* 取任意  $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$ ，則  $\sigma: \text{Aut}(X_1) \rightarrow \text{Aut}(X_2) := [\psi \mapsto \varphi\psi\varphi^{-1}]$  是一個同構。 ■

為了方便，定義所有經過  $P$  的直線集為  $TP$ ，即  $TP = \{\ell \mid P \in \ell\}$ 。講了這麼多，我們來看看有那些基礎性質吧：

**Proposition 1.2.8.** 令  $E$  為一個平面，若雙射函數  $\varphi: E \rightarrow E$  保共線，即

$$P \in QR \iff \varphi(P) \in \varphi(Q)\varphi(R).$$

則  $\varphi$  保交比，即  $(\varphi(X_i)) = (X_i)$ ，對於所有共線四點  $X_1, X_2, X_3, X_4$ 。

*Proof.* 令  $P_1, P_2, P_3, P_4$  為共線四點,  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  為另一組共線四點且兩線相異, 設  $R_i = P_i Q_{i+1} \cap P_{i+1} Q_i$ , 那麼  $R_1, R_2, R_3$  共線若且唯若  $(P_i) = (Q_i)$ 。因為  $\varphi$  保共線, 所以  $(P_i) = (Q_i)$  若且唯若  $\varphi(R_1), \varphi(R_2), \varphi(R_3)$  共線, 而這又等價於  $\varphi(P_i) = \varphi(Q_i)$ 。故我們有個良好定義的雙射函數  $\bar{\varphi}: \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,

$$\bar{\varphi}((P_i)) := \varphi(P_i)$$

顯然地,  $0, 1, \infty$  為  $\bar{\varphi}$  的不動點。

給定任意兩個實數  $x, y$ , 在任一直線  $\ell$  上取五點  $P_1, P_2, P_3, P_4, P'_4$  滿足

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = x \quad \text{及} \quad (P_1, P_2; P_3, P'_4) = y,$$

那麼我們可以只用直線在  $\ell$  上找到兩點  $Q, R$  滿足

$$(P_1, P_2; P_3, Q) = xy \quad \text{及} \quad (P_1, P_2; P_3, R) = x + y.$$

例如: 取一點  $A$  及一線  $L$  使得  $AP_1 \parallel L$  並考慮變換  $P \mapsto AP \cap L$ , 那麼我們可以假設  $P_1 = \infty, P_2 = 0, P_3 = 1$ 。再由  $\varphi$  保共線,

$$\varphi(P_1, P_2; P_3, Q) = \varphi(P_1, P_2; P_3, P_4) \cdot \varphi(P_1, P_2; P_3, P'_4), \quad \text{及}$$

$$\varphi(P_1, P_2; P_3, R) = \varphi(P_1, P_2; P_3, P_4) + \varphi(P_1, P_2; P_3, P'_4)$$

故  $\bar{\varphi}(xy) = \bar{\varphi}(x)\bar{\varphi}(y)$ ,  $\bar{\varphi}(x+y) = \bar{\varphi}(x) + \bar{\varphi}(y)$ , 而滿足這樣的函數只有  $\bar{\varphi}(x) = x$ , 所以  $\varphi$  保交比。 ■

我們還可以推得以下性質:

**Proposition 1.2.9.** 如果  $A, B, C, D$  是任三點不共線的四點並且雙射函數  $\Phi: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  保共線, 使得  $A, B, C, D$  為不動點, 那麼  $\Phi = \text{id}$ 。

*Proof.* 由 (1.2.8), 對於所有共線四點  $X_1, X_2, X_3, X_4$ , 我們有  $(\Phi(X_i)) = (X_i)$ 。令  $O = AD \cap BC$ , 則

$$\Phi(O) = \Phi(AD \cap BC) = AD \cap BC = O,$$

所以對於  $AD$  上任意一點  $X$

$$\Phi(A, D; O, X) = (A, D; O, X) = (\Phi(A), \Phi(D); \Phi(O), X),$$

即  $\Phi(X) = X$ 。那麼對於任意一點  $Y$ ,

$$\Phi(BY) \cap AD = \Phi(BY \cap AD) = BY \cap AD$$

所以  $\Phi(BY) = BY$ , 同理有  $\Phi(CY) = CY, \Phi(AY) = AY$ , 所以

$$\Phi(Y) = \bigcap \Phi(AY) = \bigcap AY = Y,$$

故  $\Phi = \text{id}$ 。 ■

如同大保交比讓我們可以在許多命題上只需驗三個點，這個性質讓我們可以在許多命題上只需驗四個點。

**Remark.** 結合 (1.2.8) 及 (1.2.9), 我們可以證明一個變換  $\varphi$  是保共線變換等價於其解析式可以寫成

$$\varphi([x : y : z]) = [p_{11}x + p_{12}y + p_{13}z : p_{21}x + p_{22}y + p_{23}z : p_{31}x + p_{32}y + p_{33}z],$$

其中  $(p_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$  是一個可逆矩陣，這個定理被稱為射影幾何基本定理 (**Fundamental Theorem of Projective Geometry**)，這類的變換稱作射影變換 (**Projective Transformation**)。更進一步，對於任三點不共線的四點組們  $P_1, P_2, P_3, P_4$  與  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ , 存在恰一個射影變換  $\varphi$ , 使得  $\varphi(P_i) = Q_i$ 。

另外，如果我們把  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  改成  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , 那變換

$$\varphi([x : y : z]) := [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}]$$

保共線，但不保交比且解析式也不能寫成上面矩陣的形式，那證明會錯的原因是因為解了一個  $\mathbb{C}$  上不會對的函方。

**Definition 1.2.10.** 我們稱一個射影變換  $\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  是仿射變換若

$$\varphi(\mathcal{L}_{\infty}) = \mathcal{L}_{\infty}.$$

換句話說就是限制在  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  會打到  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ , 那這時候就會保平行，事實上他就會是旋似變換或位似變換。

**Proposition 1.2.11.** 給定兩點  $P, Q$ , 若  $\varphi \in \text{Hom}(TP, TQ)$ , 則  $\ell \cap \varphi(\ell)$  的軌跡為一圓錐曲線或直線 (我們姑且稱它為退化的圓錐曲線), 即存在一圓錐曲線  $\mathcal{C}$  使得  $\mathcal{C} = \{\ell \cap \varphi(\ell) \mid \ell \in TP\}$ 。

*Proof.* 令  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \in TP$ ,  $R_i = \ell_i \cap \varphi(\ell_i)$ , 則

$$P(R_i) = (\ell_i) = (\varphi(\ell_i)) = Q(R_i),$$

即  $R_4 \in (PQR_1R_2R_3)$ , 而這對於任意  $R_4$  都對, 所以  $\{\ell \cap \varphi(\ell) \mid \ell \in TP\} \subseteq \mathcal{C}$ , 而另一邊包含就反過來論述就好了。 ■

**Proposition 1.2.12.** 給定任意集合  $X$  與  $X$  上兩相異元素  $P_1, P_2$ , 對於任意實數  $k$ , 我們定義一個變換  $\varphi : X \rightarrow X$ ,  $Q \in X$  會送至使得  $(P_1, P_2; Q, R) = k$  的  $R$ , 則  $\varphi \in \text{Aut}(X)$ 。

*Proof.* 我們知道只要證明  $X$  為線的情形, 過  $P_1$  作一線  $\ell \neq X$ , 在  $X$  上取點  $R_1, R_2, R_3, R_4$ , 使得  $R_1 = P_1$  且  $(R_i) = k$ , 那麼對於任意  $Q$ ,  $R_2P_2, R_3Q, R_4\varphi(Q)$  共點。故  $\varphi = [S \mapsto SR_4 \cap X] \circ [Q \mapsto R_3Q \cap R_2P_2] \in \text{Aut}(X)$ 。 ■

**Proposition 1.2.13.** 給定圓錐曲線  $\mathcal{C}$ 、直線  $\ell$  及  $\mathcal{C}$  上一定點  $P$ , 過  $P$  作一動線  $L$  分別交  $\mathcal{C}, \ell$  於  $Q, R$ , 取  $A$  使得  $(P, Q; R, A)$  為定值  $k$ , 則  $A$  的軌跡為一圓錐曲線或直線。

*Proof.* 過  $P$  作一直線  $K$ , 並且  $K$  上取  $P_1, P_2, P_3, P_4$  使得  $P_1 = P, P_2 = K \cap \mathcal{C}, P_3 = K \cap \ell$  且  $(P_i) = k$ , 則  $P_2Q, P_3R, P_4A$  共點, 考慮變換

$$\varphi := [S \mapsto P_4S] \circ [Q \mapsto P_2Q \cap \ell] \circ [L \mapsto L \cap \mathcal{C}] \in \text{Hom}(TP, TP_4)$$

由 (1.2.11) 知  $A = L \cap \varphi(L)$  的軌跡為一圓錐曲線或直線。 ■

**Proposition 1.2.14.** 給定圓錐曲線  $\mathcal{C}$ ,  $\varphi \in \text{Aut}(\mathcal{C})$  若且唯若存在一線  $\ell$  使得對於所有  $P, Q \in \mathcal{C}$ ,  $P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q \in \ell$ 。

*Proof.* 固定  $\mathcal{C}$  上三點  $A, B, C$ , 考慮折線  $(A\varphi(B)C\varphi(A)B\varphi(C))$ , 由帕斯卡定理知  $B\varphi(C) \cap \varphi(B)C, C\varphi(A) \cap \varphi(C)A, A\varphi(B) \cap \varphi(A)B$  共線, 令其為  $\ell'$ 。考慮變換

$$\varphi' := [R \mapsto AR \cap \mathcal{C}] \circ [P \mapsto P\varphi(A) \cap \ell] \in \text{Aut}(\mathcal{C}),$$

則  $A, B, C$  為  $\varphi^{-1} \circ \varphi'$  的不動點。

( $\Rightarrow$ ) 由  $\varphi \in \text{Aut}(\mathcal{C})$  可得  $\varphi' = \varphi$ ，那麼對於任意  $P, Q \in \mathcal{C}$ ，我們考慮折線

$$(A\varphi(P)Q\varphi(A)P\varphi(Q)),$$

由帕斯卡定理知  $P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q$ ,  $Q\varphi(A) \cap \varphi(Q)A$ ,  $A\varphi(P) \cap \varphi(A)P$  共線，  
即  $P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q \in \ell$

( $\Leftarrow$ ) 若  $P\varphi(A) \cap \varphi(P)A \in \ell$ ，則  $\varphi'(P) = \varphi(P)$ ，因此  $\varphi \in \text{Aut}(\mathcal{C})$ 。 ■

**Proposition 1.2.15.** 給定圓錐曲線  $\mathcal{C}$ ，若  $\varphi \in \text{Aut}(\mathcal{C})$ ，則存在一圓錐曲線  $\mathcal{C}'$  使得對於所有  $P \in \mathcal{C}$ ， $P\varphi(P) \in TC'$ 。

*Proof.* 若  $\varphi = \text{id}$ ，則  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ 。若  $\varphi \neq \text{id}$ ，取一點  $A$  使得  $\varphi(A) \neq A$ ，由上個性質知存在  $\ell$  使得  $A\varphi(P) \cap \varphi(A)P \in \ell$ ,  $\forall P \in \mathcal{C}$ 。對於  $\mathcal{C}$  上任意一點  $P$ ，由牛頓三號定理知  $A\varphi(P) \cap P\varphi(A)$ ,  $AP \cap \varphi(A)\varphi(P)$ ,  $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(A\varphi(A))$ ,  $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P\varphi(P))$  共線，並且還有

$$(A\varphi(P) \cap P\varphi(A), AP \cap \varphi(A)\varphi(P); \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(A\varphi(A)), \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P\varphi(P))) = -1$$

注意到  $[AP \mapsto \varphi(A)\varphi(P)] \in \text{Hom}(TA, T\varphi(A))$ ，所以  $AP \cap \varphi(A)\varphi(P)$  的軌跡是某個圓錐曲線  $\mathcal{C}^*$ ，取  $P = A$  可得  $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(A\varphi(A)) \in \mathcal{C}^*$ 。由 (1.2.13) 知  $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P\varphi(P))$  的軌跡是一個圓錐曲線  $\mathcal{C}^*$ ，因此  $P\varphi(P) \in TC'$ ，其中  $\mathcal{C}' = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}^*)$ 。 ■

**Remark.** 值得注意的是並不是所有  $\mathcal{C}'$  都可以從某個  $\text{Aut}(\mathcal{C})$  裡的元素得到，不過  $\mathcal{C}'$  退化為一個點的情形則是下一節主要想討論的東西。

## 1.3 對合

**Definition 1.3.1.** 令  $X$  為一可交比化的集合，我們稱  $\varphi \in \text{Aut}(X)$  為一對合變換若  $\varphi^2 = \text{id}_X$  且  $\varphi \neq \text{id}_X$ 。

也就是所有在  $\text{Aut}(X)$  中階為 2 的元素。

**Example 1.3.2.** 若  $X$  為一直線，則關於  $X$  上一點  $P$  作對稱的變換是一個對合變換。

**Example 1.3.3.** 若  $X = TP$ ， $P \notin \mathcal{L}_{\infty}$  為任意一點，則關於  $P$  旋轉  $90^\circ$  的旋似變換是一個對合變換。

**Proposition 1.3.4.** 令  $X$  為一可交比化的集合， $\varphi \in \text{Aut}(X) \setminus \{\text{id}_X\}$  且存在一點  $A \in X$  使得  $\varphi(A) \neq A, \varphi(\varphi(A)) = A$ ，則  $\varphi$  為一對合變換。

*Proof.* 令  $P \in \mathcal{C}$ ，則

$$(A, \varphi(A); P, \varphi(P)) = (\varphi(A), A; \varphi(P), \varphi(\varphi(P))) = (A, \varphi(A); \varphi^2(P), \varphi(P)).$$

因此  $\varphi^2(P) = P$ ，故  $\varphi$  為一對合。

**Theorem 1.3.5** (迪沙格對合定理/Desargues' Involution Theorem). 給定任意完全四點形  $\mathcal{Q}(P_1, P_2, P_3, P_4)$  及任意一線

$$\ell \notin \{P_2P_3, P_1P_4, P_3P_1, P_2P_4, P_1P_2, P_3P_4\},$$

定義  $Q_{ij} = P_iP_j \cap \ell$ ，則

(i) 存在恰一射影對合變換  $\varphi: \ell \rightarrow \ell$  使得

$$(Q_{23}, Q_{14}), (Q_{31}, Q_{24}), (Q_{12}, Q_{34})$$

皆為  $\varphi$  的相互對。

(ii) 對於  $\ell$  上兩點  $A, B$ ， $P_1, P_2, P_3, P_4, A, B$  共一圓錐曲線 (含退化) 若且唯若  $(A, B)$  為  $\varphi$  的相互對。

*Proof.* 定義  $\varphi: \ell \rightarrow \ell$  為一射影變換使得  $Q_{23} \mapsto Q_{14}, Q_{14} \mapsto Q_{23}, Q_{12} \mapsto Q_{34}$ ，則

(i) 由交比性質知

$$\begin{aligned} (Q_{23}, Q_{14}; Q_{12}, Q_{31}) &= (Q_{23}, P_1P_4 \cap P_2P_3; P_2, P_3) \\ &= (Q_{23}, Q_{14}; Q_{24}, Q_{34}) \\ &= (Q_{14}, Q_{23}; Q_{34}, Q_{24}), \end{aligned}$$

因此  $\varphi(Q_{31}) = Q_{24}$  且  $\varphi$  為一對合變換，故  $(Q_{23}, Q_{14}), (Q_{31}, Q_{24}), (Q_{12}, Q_{34})$  皆為  $\varphi$  的相互對。

(ii) 只證過去，證回來由同一法即可。由交比性質知

$$P_1(A, B; P_2, P_3) = P_1(A, B; Q_{12}, Q_{31}), P_4(A, B; P_2, P_3) = P_4(A, B; Q_{24}, Q_{34})$$

因此由  $P_1, P_2, P_3, P_4, A, B$  共一圓錐曲線 (含退化) 有

$$P_1(A, B; Q_{12}, Q_{31}) = P_4(A, B; Q_{24}, Q_{34}) = P_4(B, A; Q_{34}, Q_{24})$$

定義  $\varphi' \in \text{Aut}(\ell)$  使得  $A \mapsto B, B \mapsto A, Q_{12} \mapsto Q_{34}$ , 則  $Q_{31} \mapsto Q_{24}$  且  $\varphi'$  爲一對合變換, 故  $\varphi' = \varphi$ , 所以  $(A, B)$  爲  $\varphi$  的相互對。 ■

**Example 1.3.6.** 若取  $\ell = (P_3P_1 \cap P_2P_4)(P_1P_2 \cap P_3P_4)$ , 那麼這個對合變換的不動點爲  $P_3P_1 \cap P_2P_4, P_1P_2 \cap P_3P_4$ , 所以我們就可以得到完全四線形的調和性質。

而其對偶命題當然也成立：

**Theorem 1.3.7.** 給定任意完全四線形  $Q(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$  及任意一點

$$P \notin \{\ell_2 \cap \ell_3, \ell_1 \cap \ell_4, \ell_3 \cap \ell_1, \ell_2 \cap \ell_4, \ell_1 \cap \ell_2, \ell_3 \cap \ell_4\},$$

定義  $L_{ij} = (\ell_i \cap \ell_j)P$ , 則

(i) 存在恰一對合變換  $\varphi \in \text{Aut}(TP)$  使得

$$(L_{23}, L_{14}), (L_{31}, L_{24}), (L_{12}, L_{34})$$

皆爲  $\varphi$  的相互對。

(ii) 對於過  $P$  兩線  $S, T$ ,  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ ,  $S, T$  切一圓錐曲線 (含退化) 若且唯若  $(S, T)$  爲  $\varphi$  的相互對。 ■

還記得九點 (線) 圓錐曲線嗎? 那事實上對合其實就是對九點 (線) 圓錐曲線配極 (?)

**Proposition 1.3.8.** 延續迪沙格定理 (1.3.5) 的標號, 令  $C$  爲  $\ell$  關於  $Q$  的九點圓錐曲線, 那麼  $(A, B)$  爲關於  $\varphi$  的相互對若且唯若  $A, B$  關於  $C$  共軛。

*Proof.* 令  $\varphi' = [A \mapsto \mathbf{p}_C(A) \cap \ell] \in \text{Aut}(\ell)$ , 取  $R_{ij}$  使得  $(P_i, P_j; Q_{ij}, R_{ij}) = -1$ 。那麼我們知道

$$Q_{23} = R_{12}R_{31} \cap R_{24}R_{34}, \quad Q_{14} = R_{12}R_{24} \cap R_{31}R_{34},$$

故  $Q_{23}, Q_{14}$  關於  $C$  共軛，也就是  $\varphi'(Q_{23}) = Q_{14}$ ,  $\varphi'(Q_{14}) = Q_{23}$ 。同理有  $\varphi'(Q_{31}) = Q_{24}$ ，所以  $\varphi = \varphi'$ ，因此  $(A, B)$  為關於  $\varphi$  的相互對若且唯若  $\varphi'(A) = B$  若且唯若  $A, B$  關於  $C$  共軛。 ■

**Proposition 1.3.9.** 延續迪沙格定理對偶版本 (1.3.7) 的標號，令  $C$  為  $P$  關於  $Q$  的九線圓錐曲線，那麼  $(S, T)$  為關於  $\varphi$  的相互對若且唯若  $S, T$  關於  $C$  共軛。 ■

這邊給個推論：

**Corollary 1.3.10.** 延續迪沙格定理的標號， $\varphi$  有不動點若且唯若  $C$  與  $\ell$  有交點。此時， $\varphi$  的不動點為  $C$  與  $\ell$  的交點。 ■

**Corollary 1.3.11.** 延續迪沙格定理對偶版本的標號， $\varphi$  有不動線若且唯若  $TP$  中有  $C$  的切線。此時， $\varphi$  的不動線為  $TP$  中  $C$  的切線。

那在確定某個變換為對合變換時就會有一些好用的性質，或者反過來證明某個變換為對合變換。

**Proposition 1.3.12.** 令  $\ell$  為一直線， $\varphi: \ell \rightarrow \ell$  為一變換，則  $\varphi$  為一對合變換若且唯若  $\varphi$  為反演變換（這邊視對稱變換為反演變換）。

*Proof.* 只證過去，證回來由同一法即可。令  $A = \varphi(\infty_\ell)$ ，這邊分兩個情形：

(i)  $A \neq \infty_\ell$ ，那麼對於  $\varphi$  的任兩對相互對  $(P, P'), (Q, Q')$ ，我們有

$$\begin{aligned} (A, \infty_\ell; P, Q) = (\infty_\ell, A; P', Q') &\implies \frac{AP}{AQ} = \frac{Q'A}{P'A} \\ &\implies \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'} = \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AQ'}, \end{aligned}$$

因此  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'}$  為定值，即  $\varphi$  為反演變換。

(ii)  $A = \infty_\ell$ ，由  $\varphi$  為射影對合變換知存在  $\varphi$  的一對相互對  $(P, P')$  使得  $P \neq P'$ ，那麼對於  $\varphi$  的任一對相互對  $(Q, Q')$ ，我們有

$$\begin{aligned} (\infty_\ell, P; Q, Q') = (\infty_\ell, P'; Q', Q) &\implies \frac{Q'P}{QP} = \frac{QP'}{Q'P'} \\ &\implies \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q'P'}, \end{aligned}$$



因此  $\overline{PP'}$  中點為定點，即  $\varphi$  為對稱變換。 ■

**Proposition 1.3.13.** 令  $C$  為一圓錐曲線、 $\varphi: C \rightarrow C$  為一變換，則  $\varphi$  為一對合變換若且唯若存在恰一點  $A \notin C$  使得  $\forall P \in C$ ， $A, P, \varphi(P)$  共線。

*Proof.* 只證過去，證回來由同一法即可。對於  $\varphi$  的兩對相互對  $(P, P'), (Q, Q')$ ，定義  $A = PP' \cap QQ'$ ，則對於任意一對相互對  $(R, R')$ ，我們有

$$P(P', R; Q, Q') = (P', R; Q, Q')_C = (P, R'; Q', Q)_C = P'(P, R'; Q', Q),$$

因此  $PR \cap P'R', PQ \cap P'Q', P'Q' \cap P'Q$  共線，即  $PR \cap P'R'$  在  $A$  關於  $C$  的極線上，所以  $A, R, R'$  共線。 ■

一個直接的推論是：

**Corollary 1.3.14.** 反演變換為保交比變換。 ■

其對偶命題為：

**Proposition 1.3.15.** 令  $C$  為一圓錐曲線，設  $\varphi: TC \rightarrow TC$  為一變換，則  $\varphi$  為一對合變換若且唯若存在恰一線  $K \notin TC$  使得  $\forall S \in TC$ ， $K, S, \varphi(S)$  共點。 ■

有時要證明在已知圓錐曲線上的六點（相切的六線）當中組出的三線（點）共點（線）時，那麼可以等價於證明其為對合相互對，所以就可以用保交比變換把要驗的點送到其他地方去驗。

**Proposition 1.3.16.** 延續 (1.3.5) 的標號。設  $F_1, F_2$  為  $\varphi$  的不動點，那麼對於任意過  $Q$  的圓錐曲線  $C$ ， $F_1, F_2$  關於  $C$  共軛。

*Proof.* 令  $F_1P_1, F_1P_2$  分別與  $C$  交另一點於  $X, Y$ ，定義  $X_{ij}, Y_{ij}$  分別為  $F_1P_1, F_1P_2$  與  $P_iP_j$  的交點， $A = P_1P_4 \cap P_2P_3, B = P_2P_4 \cap P_3P_1$ 。分別在  $F_1P_1, F_1P_2$  上取點  $X^*, Y^*$  與  $X_{ij}^*, Y_{ij}^*$  使得

$$(F_1, X^*; X, P_1) = (F_1, X_{ij}^*; X_{ij}, P_1) = -1,$$

$$(F_1, Y^*; Y, P_2) = (F_1, Y_{ij}^*; Y_{ij}, P_2) = -1.$$

由

$$A(F_1, X_{23}^*; X_{23}, P_1) = A(F_1, Y_{14}^*; P_2, Y_{14}) = A(F_1, F_2; Q_{24}, Q_{14}) = -1,$$

可得  $X_{23}^*, Y_{14}^*, F_2$  共線，同理有  $X_{24}^*, Y_{13}^*, F_2$  共線。

注意到由 (1.2.12) 可得

$$(X_{23}^*, X_{24}^*; F_1, X^*) = P_2(P_3, P_4; Y, X) = P_1(P_3, P_4; Y, X) = (Y_{13}^*, Y_{14}^*; Y^*, F_1),$$

因此  $F_2, X^*, Y^*$  共線，即  $F_1, F_2$  關於  $C$  共軛。 ■

**Remark.** 這裡提供一個利用射影變換的證明：首先，若  $C$  與  $\ell$  有交點，則結論顯然。若沒有交點，我們考慮一個射影變換  $\varphi$  將  $\ell$  送至無窮遠線  $\mathcal{L}_\infty$ 。這時，由於  $C \cap \ell = \emptyset$ ，所以  $\varphi(C)$  是一個橢圓，所以可以再結合一個仿射變換使得  $C$  變成一個圓且  $\ell$  依舊是無窮遠線，那麼可以發現不動點會是  $\angle P_2 P_1 P_3$  的兩條角平分線上的無窮遠點，所以他們關於  $C$  共軛。

**Example 1.3.17.** 若取  $\ell = (P_3 P_1 \cap P_2 P_4)(P_1 P_2 \cap P_3 P_4)$ ，那麼我們就可以得到配極的基礎性質。

**Proposition 1.3.18.** 延續 (1.3.7) 的標號。設  $F_1, F_2$  為  $\varphi$  的不動線，那麼對於任意切  $Q$  的圓錐曲線  $C$ ， $F_1, F_2$  關於  $C$  共軛。 ■

這兩個性質的應用會在下一節看到。

**Proposition 1.3.19.** 給定  $\triangle ABC$ ，一點  $P$  及一線  $L$ ，

(i) 對於任意一點  $Q$ ，在  $BC$  取點  $D$  使得

$$(B, C), (AP \cap BC, L \cap BC), (AQ \cap BC, D)$$

為某個對合的相互對，類似定義  $E, F$ ，則  $D, E, F$  共線。

(ii) 對於任意一線  $K$ ，在  $TA$  中取線  $d$  使得

$$(CA, AB), (A(L \cap BC), AP), (A(K \cap BC), d)$$

為某個對合的相互對，類似定義  $e, f$ ，則  $d, e, f$  共點。

**Definition 1.3.20.** 給定  $\triangle ABC$ ，一點  $P$  及一線  $L$ ，

- (i) 我們將上述性質中 (i) 所共的線稱為  $Q$  關於  $\triangle ABC$  的  $P, L$ -三線性極線，記為

$$t_{P,L}(Q) = t_{P,L}(\triangle ABC, Q)$$

- (ii) 我們將上述性質中 (ii) 所共的點稱為  $K$  關於  $\triangle ABC$  的  $P, L$ -三線性極點，記為

$$t_{P,L}(K) = t_{P,L}(\triangle ABC, K)$$

顯然地，

$$t_{P,L}(t_{P,L}(Q)) = Q.$$

當  $P = G, L = \mathcal{L}_\infty$  時，我們就有原始的三線性極線與三線性極點，這時候簡記為  $t(\cdot)$ 。

## 習題

**Problem 1.** 令  $ABCD$  是一個四邊形且  $\ell$  是一條直線， $\ell$  分別交  $AB, CD, BC, DA, AC, BD$  於  $X, X', Y, Y', Z, Z'$ 。證明：以  $\overline{XX'}, \overline{YY'}, \overline{ZZ'}$  為直徑的圓們共軸。

**Problem 2.** 試證明蝴蝶定理。

**Problem 3.** 給定  $\triangle ABC$  與三點  $P, Q, R$ ，設  $D, E, F$  分別為  $QR$  與  $BC, CA, AB$  的交點， $AP$  交  $QR$  於  $A_1$ ，取  $A_2$  使得

$$(Q, R; F, A_1) = (R, Q; E, A_2),$$

類似定義  $B_2, C_2$ 。證明： $AA_2, BB_2, CC_2$  共點。

**Problem 4.** 令  $H$  為  $\triangle ABC$  的垂心， $M_a$  為  $\overline{BC}$  中點， $X_a$  為  $AM_a$  與  $\odot(ABC)$  的另一個交點， $Y_a$  為  $\overrightarrow{M_a H}$  與  $\odot(ABC)$  的交點，同樣定義  $X_b, Y_b, X_c, Y_c$ ，證明  $X_a Y_a, X_b Y_b, X_c Y_c$  共點於  $\triangle ABC$  的歐拉線上。

**Problem 5.** 令  $\odot(I_a)$  為  $A$  關於  $\triangle ABC$  的切圓， $\odot(I_a)$  與  $\odot(ABC)$  的公切線交  $BC$  於  $X, Y$ ，證明  $AI_a$  為  $\angle XAY$  的角平分線。

**Problem 6.** 給定  $\triangle ABC$ ，令  $D$  為邊  $BC$  上任意一點， $I, I_1, I_2$  分別為  $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ADC$  的內心， $M, N$  分別為  $\odot(ABC)$  與  $\odot(IAI_1), \odot(IAI_2)$  的另兩個交點。證明： $MN$  定點。

**Problem 7.** 令  $B, C$  關於  $\triangle ABC$  的旁心分別為  $I_b, I_c$ ， $\odot(I)$  為  $\triangle ABC$  的內切圓， $D$  為  $\odot(I)$  與  $BC$  的切點， $DI_b, DI_c$  分別交  $\odot(I)$  另一點於  $X, Y$ ，證明  $AD, BX, CY$  共點。

**Problem 8.** 令  $\odot(O)$  為  $\triangle ABC$  的外接圓， $M$  為  $\widehat{BC}$  中點， $B', C'$  分別位於  $CA, AB$  上使得  $BB' \parallel CC' \parallel AM$ ， $MB', MC'$  分別交  $\odot(O)$  另一點於  $P, Q$ ， $S = PQ \cap BC$ ，證明  $AS$  為  $A$  關於  $\odot(O)$  的切線。

**Problem 9.** 令  $I_b, I_c$  分別為  $B, C$  關於銳角  $\triangle ABC$  的旁心， $\odot(O)$  為  $\triangle ABC$  的外接圓， $D$  在  $\odot(O)$  上使得  $AD \perp BC$ ， $DI_b, DI_c$  分別交  $\odot(O)$  另一點於  $Y, Z$ ， $X = YZ \cap BC$ ，證明由  $AX, AO, BC$  所圍成的三角形為等腰三角形。

## 1.4 等共軛變換

下面這兩個定義看起來滿長的，大家也可以先看完下一節再回來看比較抽象的情形。

**Definition 1.4.1.** 給定任意  $\triangle ABC$ ，若圓錐曲線族  $\mathcal{F}$  滿足以下性質：

- (i) 對於任意  $C \in \mathcal{F}$ ， $\triangle ABC$  為關於  $C$  的自共軛三角形。
- (ii) 給定任意一點  $P \notin BC \cup CA \cup AB$ ，存在恰一點  $P^* \notin BC \cup CA \cup AB$  使得對於任意  $C \in \mathcal{F}$ ， $P, P^*$  關於  $C$  共軛。
- (iii) 對於任意  $C \notin \mathcal{F}$ ， $C$  至少不滿足 (i) 與 (ii) 其中一個命題。

則我們稱變換  $\varphi(P) := P^*$  為  $\triangle ABC$  上的點等共軛變換 (Isoconjugation on Points)，所有  $C \in \mathcal{F}$  為  $\varphi$  的對角圓錐曲線 (Diagonal Conic)， $\mathcal{F}$  為  $\varphi$  的對角圓錐曲線族，而  $P^*$  為  $P$  在此點等共軛變換下的等共軛點 (Isoconjugate Point)。我們定義  $\varphi(G)$  為此點等共軛變換的極點 (Pole)，其中  $G$  為  $\triangle ABC$  的重心。

**Definition 1.4.2.** 給定任意  $\triangle ABC$ ，若圓錐曲線族  $\mathcal{F}$  滿足以下性質：

- (i) 對於任意  $C \in \mathcal{F}$ ， $\triangle ABC$  為關於  $C$  的自共軛三角形。
- (ii) 給定任意一線  $\ell \cap \{A, B, C\} = \emptyset$ ，存在恰一線  $\ell^* \cap \{A, B, C\} = \emptyset$  使得對於任意  $C \in \mathcal{F}$ ， $\ell, \ell^*$  關於  $C$  共軛。
- (iii) 對於任意  $C \notin \mathcal{F}$ ， $C$  至少不滿足 (i) 與 (ii) 其中一個命題。

則我們稱變換  $\varphi(\ell) := \ell^*$  為  $\triangle ABC$  上的線等共軛變換 (**Isoconjugation on Lines**)，所有  $C \in \mathcal{F}$  為  $\varphi$  的對角圓錐曲線， $\mathcal{F}$  為  $\varphi$  的對角圓錐曲線族，而  $\ell^*$  為  $\ell$  在此線等共軛變換下的等共軛線 (**Isoconjugate Line**)。我們定義  $\varphi(\mathcal{L}_\infty)$  為此點等共軛變換的極線 (**Polar**)，其中  $\mathcal{L}_\infty$  為無窮遠線。

**Remark.** 注意到上述定義中點和線是對偶的，因此以下皆只證明點的性質。另外，若以重心坐標的角度來看，我們會知道一個等共軛變換一定是如同

$$[x : y : z] \mapsto \left[ \frac{u}{x} : \frac{v}{y} : \frac{w}{z} \right]$$

的形式。我們稱  $P = [u : v : w] = \varphi(G)$  是這個點等共軛變換的極點 (**Pole**)，其中  $G$  為  $\triangle ABC$  的重心。

**Proposition 1.4.3** (等共軛變換基本定理). 給定  $\triangle ABC$ ，一圓錐曲線族  $\mathcal{F}$  由其中的兩個相異元素  $\mathcal{C}_0$  與  $\mathcal{C}_\infty$  決定。事實上，所有  $\mathcal{F}$  中的元素皆可寫成

$$\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_0 + t \cdot \mathcal{C}_\infty,$$

也就是說  $\mathcal{F}$  是一個圓錐曲線束 (**Pencil**)。

*Proof.* 我們只證明第一部分，也就是對於所有  $P \notin BC \cup CA \cup AB$ ， $\mathbf{p}_{\mathcal{C}_0}(P) \neq \mathbf{p}_{\mathcal{C}_\infty}(P)$ 。考慮變換  $\varphi(P) = \mathbf{p}_{\mathcal{C}_\infty}(\mathbf{p}_{\mathcal{C}_0}(P))$ ，並假設存在  $P_0 \notin BC \cup CA \cup AB$  使得  $\varphi(P_0) = P_0$ 。由 (1.2.9)，我們有  $\varphi = \text{id}$ 。因此對於所有  $P \in \mathcal{C}_0$ ，

$$P = \varphi(P) = \mathbf{p}_{\mathcal{C}_\infty}(\mathbf{p}_{\mathcal{C}_0}(P)) = \mathbf{p}_{\mathcal{C}_\infty}(T_P \mathcal{C}_0) \implies P \in T_P \mathcal{C}_0 = \mathbf{p}_{\mathcal{C}_\infty}(P),$$

所以  $P \in \mathcal{C}_\infty$ ，這與  $\mathcal{C}_0 \neq \mathcal{C}_\infty$  矛盾。 ■

那下面這個應該是後面最常用的性質之一。

**Proposition 1.4.4.** 給定任意  $\triangle ABC$ ，令  $\varphi$  為一點等共軛變換， $\ell$  為一直線

- (i) 若  $\ell \cap \{A, B, C\} = X$ ，那麼  $\varphi(\ell)$  為過  $X$  的直線。
- (ii) 若  $\ell \cap \{A, B, C\} = \emptyset$ ，那麼  $\varphi(\ell)$  為  $\triangle ABC$  的外接圓錐曲線。

*Proof.* 令  $\mathcal{F}$  為  $\varphi$  的對角圓錐曲線族，易知存在兩圓錐曲線  $C_1, C_2 \in \mathcal{F}$  使得  $\ell$  關於  $C_1, C_2$  的極點  $P_1, P_2$  不重合，令  $M \in \ell$  為一點。

- (i) 不妨假設  $\ell \cap \{A, B, C\} = A$ ，令  $\ell$  交  $BC$  於  $D$ ，由配極變換為保交比變換知

$$P_1(A, P_2; \varphi(\infty_\ell), \varphi(M)) = (D, A; \infty_\ell, M) = P_2(A, P_1; \varphi(\infty_\ell), \varphi(M))$$

因此  $A, \varphi(\infty_\ell), \varphi(M)$  共線，即  $\varphi(\ell) \subseteq A\varphi(M)$ ，同理可證明  $A\varphi(M) \subseteq \varphi(\ell)$ 。

- (ii) 令  $\ell$  分別交  $BC, CA, AB$  於  $D, E, F$ ， $\mathcal{C}$  為通過  $A, B, C, P_1, P_2$  的圓錐曲線，由配極變換為保交比變換知

$$P_1(A, B; C, \varphi(M)) = (D, E; F, M) = P_2(A, B; C, \varphi(M))$$

因此  $A, B, C, \varphi(M), P_1, P_2$  共圓錐曲線，即  $\varphi(\ell) \subseteq \mathcal{C}$ ，同理可證明  $\mathcal{C} \subseteq \varphi(\ell)$ 。 ■

**Proposition 1.4.5.** 給定任意  $\triangle ABC$ ，令  $\varphi$  為  $\triangle ABC$  上的點等共軛變換，則對於所有頂點  $X \in \{A, B, C\}$ ， $[XP \mapsto X\varphi(P)]$  是一對合變換。

*Proof.* 易知其階為 2，因此只要證明它保交比即可。令  $\mathcal{C}$  為  $\varphi$  的其中一個對角圓錐曲線， $O$  為其中心， $M$  為一無窮遠點，那麼由配極變換為保交比變換知

$$(A, B; C, \varphi(M))_{\varphi(\mathcal{L}_\infty)} = O(A, B; C, \varphi(M)) = (\infty_{BC}, \infty_{CA}; \infty_{AB}, M)$$

因此

$$[XP \mapsto X\varphi(P)] = [S \mapsto XS] \circ [R \mapsto \varphi(R)] \circ [XP \mapsto \infty_{XP}]$$

為一射影變換。 ■

**Corollary 1.4.6.** 給定任意  $\triangle ABC$ ，令  $\varphi$  為  $\triangle ABC$  上以  $G^*$  為極點的點等共軛變換， $\triangle G_a^* G_b^* G_c^*$  為  $G^*$  關於  $\triangle ABC$  的反西瓦三角形，則  $\varphi(\mathcal{L}_\infty)$  是分別切  $\triangle G_a^* G_b^* G_c^*$  三邊於  $A, B, C$  的圓錐曲線。

*Proof.* 由 (1.4.5) ,

$$(AP, T_A\varphi(\mathcal{L}_\infty); AB, AC) = A(G, \mathcal{L}_\infty \cap BC; C, B) = -1,$$

所以  $T_A\varphi(\mathcal{L}_\infty) = G_b^*G_c^*$  , 同理有  $T_B\varphi(\mathcal{L}_\infty) = G_c^*G_a^*$  ,  $T_C\varphi(\mathcal{L}_\infty) = G_a^*G_b^*$  。 ■

**Corollary 1.4.7.** 給定任意  $\triangle ABC$  , 令  $\varphi$  為  $\triangle ABC$  上的點等共軛變換 , 對於任兩點  $P, Q$  , 令  $R = PQ \cap \varphi(P)\varphi(Q)$  ,  $S = P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q$  , 則  $S = \varphi(R)$  。

*Proof.* 由上述推論知

$$\begin{aligned} A(P, Q; \varphi(P), S) &= P(A, R; \varphi(P), \varphi(Q)) \\ &= A(P, R; \varphi(P), \varphi(Q)) \\ &= A(P, Q; \varphi(P), \varphi(R)), \end{aligned}$$

故  $AS = A\varphi(R)$  , 同理有  $BS = B\varphi(R)$  ,  $CS = C\varphi(R)$  , 因此  $S = \varphi(R)$  。 ■

**Proposition 1.4.8.** 若一變換

$$\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus BC \cup CA \cup AB \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus BC \cup CA \cup AB$$

滿足：對於所有頂點  $X \in \{A, B, C\}$  ,

$$X, P_1, P_2 \text{ 共線} \implies X, \varphi(P_1), \varphi(P_2) \text{ 共線}$$

且  $[XP \mapsto X\varphi(P)]$  是一對合變換 , 則  $\varphi$  是點等共軛變換。

*Proof.* 顯然地 ,  $\varphi^2 = \text{id}$  。取任意一點  $P_0$  使得對於所有頂點  $X \in \{A, B, C\}$  ,  $XP_0 \neq X\varphi(P_0)$  , 那麼  $\varphi$  由  $P_0, \varphi(P_0)$  決定：

$$X(Y, Z; P_0, P) = X(Z, Y; \varphi(P_0), \varphi(P)), \quad \varphi(P) = B\varphi(P) \cap C\varphi(P).$$

其中  $Y, Z$  是剩下兩個頂點。由 (1.4.3) 我們只要找到兩個使得  $\triangle ABC$  為自共軛三角形的圓錐曲線  $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_\infty$  使得

$$\varphi(P) = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}_0}(P) \cap \mathfrak{p}_{\mathcal{C}_\infty}(P)$$

即可。因為  $[XP \mapsto X\varphi(P)]$  是保交比變換 , 所以只要滿足

$$\varphi(P_0) = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}_0}(P_0) \cap \mathfrak{p}_{\mathcal{C}_\infty}(P_0)$$

即可。取  $C_0$  爲過  $P_0$ ，與  $P_0\varphi(P_0)$  相切且使得  $\triangle ABC$  爲自共軛三角形的圓錐曲線 (1.1.8)。類似地，取  $C_\infty$  爲過  $\varphi(P_0)$ ，與  $P_0\varphi(P_0)$  相切且使得  $\triangle ABC$  爲自共軛三角形的圓錐曲線。因爲  $P_0 \neq \varphi(P_0)$ ，所以  $C_0 \neq C_\infty$  而

$$\mathfrak{p}_{C_0}(P_0) \cap \mathfrak{p}_{C_\infty}(P_0) = P_0\varphi(P_0) \cap \mathfrak{p}_{C_\infty}(P_0) \ni \varphi(P_0). \quad \blacksquare$$

那接下來就稍微介紹一些有不動點的等共軛變換的性質。

**Proposition 1.4.9.** 給定任意  $\triangle ABC$ ， $\varphi$  爲  $\triangle ABC$  上的點等共軛變換， $\mathcal{F}$  爲  $\varphi$  的對角圓錐曲線族，若  $P$  爲  $\varphi$  的不動點，則

$$P \in \bigcap_{C \in \mathcal{F}} C.$$

*Proof.* 對於任意  $C \in \mathcal{F}$ ，由  $P, P$  關於  $C$  共軛知  $P \in C$ 。 ■

**Proposition 1.4.10.** 給定任意  $\triangle ABC$ ， $\varphi$  爲  $\triangle ABC$  上的點等共軛變換，則  $\varphi$  的不動點數量至多爲 4。

*Proof.* 令  $\mathcal{F}$  爲  $\varphi$  的對角圓錐曲線族，若存在五個不動點  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ ，則知  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \in C, \forall C \in \mathcal{F}$ ，而  $|\mathcal{F}| > 1$ ，矛盾。 ■

**Proposition 1.4.11.** 給定任意  $\triangle ABC$ ，令  $P \notin BC \cup CA \cup AB$  爲任意一點， $\varphi$  爲一點等共軛變換， $\mathcal{F}$  爲  $\varphi$  的對角圓錐曲線族，令  $\triangle P_a P_b P_c$  爲  $P$  關於  $\triangle ABC$  的反西瓦三角形，若  $P$  爲  $\varphi$  的不動點，則  $P_a, P_b, P_c$  也爲  $\varphi$  的不動點。

*Proof.* 令  $Q_a = AP \cap BC, C \in \mathcal{F}$ ，則  $A, Q_a$  關於  $C$  共軛，因此由

$$(A, Q_a; P, P_a) = -1$$

及  $P \in C$  知  $P_a \in C$ ，故  $P_a, P_a$  關於  $C$  共軛，即  $P_a$  也爲  $\varphi$  的不動點，同理可知， $P_b, P_c$  也爲  $\varphi$  的不動點。 ■

上面這些性質以解析的角度來看是顯然，可惜我不太喜歡解析。

總算有個看起來比較有用的結論了 (O

**Proposition 1.4.12.** 給定任意  $\triangle ABC$  及一點  $P$ ，令  $\triangle P_a P_b P_c$  爲  $P$  關於  $\triangle ABC$  的反西瓦三角形， $\mathcal{F}$  爲所有經過  $P, P_a, P_b, P_c$  的圓錐曲線的集合，



對於任意一點  $M \notin \{A, B, C\}$ ，存在一點  $M^*$  滿足

$$\begin{aligned} -1 &= (AM, AM^*; PP_a, P_bP_c) \\ &= (BM, BM^*; PP_b, P_cP_a) \\ &= (CM, CM^*; PP_c, P_aP_b) \end{aligned}$$

且對於所有  $C \in \mathcal{F}$ ， $M, M^*$  關於  $C$  共軛。

*Proof.* 取點  $M^*$  滿足  $(BM, BM^*; PP_b, P_cP_a) = (CM, CM^*; PP_c, P_aP_b) = -1$ ，考慮完全四點形  $(P, P_a, P_b, P_c)$  與直線  $MM^*$ ，存在一射影對合變換  $\varphi \in \text{Aut}(MM^*)$  使得

$$(PP_a \cap MM^*, P_bP_c \cap MM^*)$$

及其輪換皆為  $\varphi$  的相互對，易知  $M, M^*$  為  $\varphi$  的不動點，因此

$$(AM, AM^*; PP_a, P_bP_c) = -1$$

且由 (1.3.16) 知  $M, M^*$  關於  $C$  共軛。 ■

結合 (1.4.9)，我們就可以得到：

**Corollary 1.4.13.** 給定任意  $\triangle ABC$ ，對於一點等共軛變換  $\varphi$ ，令  $P, P_a, P_b, P_c$  為  $\varphi$  的不動點，則  $\varphi$  的對角圓錐曲線族為  $\{C \mid P, P_a, P_b, P_c \in C\}$ 。另一方面，對於一點  $P$ ，若  $P$  關於  $\triangle ABC$  的反西瓦三角形為  $\triangle P_aP_bP_c$ ，那麼存在唯一一個使  $\{C \mid P, P_a, P_b, P_c \in C\}$  為對角圓錐曲線且  $P, P_a, P_b, P_c$  為不動點的點等共軛變換  $\varphi$ 。

**Proposition 1.4.14.** 給定任意  $\triangle ABC$ ，令  $\varphi$  為一點等共軛變換且  $P, P_a, P_b, P_c$  為  $\varphi$  的不動點，那麼對於任意直線  $\ell$ ， $\varphi(\ell)$  為  $\ell$  關於完全四點形  $(P, P_a, P_b, P_c)$  的九點圓錐曲線 (0.4.8)。

*Proof.* 令  $C$  為  $\ell$  關於完全四點形  $(P, P_a, P_b, P_c)$  的九點圓錐曲線， $PP_a, PP_b, PP_c, P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b$  分別與  $\ell$  交於  $Q_a, Q_b, Q_c, Q'_a, Q'_b, Q'_c$ ，取  $R_a$  使得

$$(P, P_a; Q_a, R_a) = -1.$$

類似定義  $R_b, R_c, R'_a, R'_b, R'_c$ ，則由  $PP_a$  為不動線及  $P, P_a$  為不動點知  $R_a = \varphi(Q_a) \in \varphi(\ell)$ ，同理有  $R_b, R_c, R'_a, R'_b, R'_c \in \varphi(\ell)$ ，故  $C = \varphi(\ell)$ 。 ■

應該說我們一開始也可以這樣定義九點圓錐曲線，這樣證明共圓錐曲線簡單多了。取  $\ell = \mathcal{L}_\infty$  結合 (1.4.6) 就可以得到  $(P, P_a, P_b, P_c)$  的九點圓錐曲線是  $\triangle G_a^* G_b^* G_c^*$  的內切圓錐曲線。這節就以一個等共軛變換的應用來當結尾。

**Theorem 1.4.15.** 對於任意完全四點形  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$ ，所有經過  $P_1, P_2, P_3, P_4$  的圓錐曲線的中心的軌跡為  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  的九點圓錐曲線。

那他的推廣是：

**Theorem 1.4.16.** 對於任意完全四點形  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  及一線  $\ell$ ， $\ell$  關於所有經過  $P_1, P_2, P_3, P_4$  的圓錐曲線的極點的軌跡為  $\ell$  關於  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  的九點圓錐曲線。

*Proof.* 令  $\triangle ABC$  為  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  的西瓦三角形， $\varphi$  為  $\triangle ABC$  上並且以  $P_1, P_2, P_3, P_4$  為不動點的點等共軛變換。

( $\Rightarrow$ ) 令  $\mathcal{C}$  為過  $P_1, P_2, P_3, P_4$  的圓錐曲線，那麼

$$\varphi(\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\ell)) \in \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\ell)) = \ell,$$

因此由 (1.4.14) 知  $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\ell)$  位於  $\ell$  關於  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  的九點圓錐曲線上。

( $\Leftarrow$ ) 令  $O$  為  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  的九點圓錐曲線上一點，取  $Q_i \in OP_i$  使得

$$(Q_i, OP_i \cap \ell; O, P_i) = -1,$$

$\mathcal{C}_i$  為過  $P_1, P_2, P_3, P_4, Q_i$  的圓錐曲線，那麼  $O$  為關於  $\mathcal{C}_i$  的極線經過  $\varphi(O)$  及  $OP_i \cap \ell$ 。若  $O$  皆不為  $\ell$  關於  $\mathcal{C}_i$  的極點就有  $\varphi(O) = OP_i \cap \ell$ ，則  $O, P_1, P_2, P_3, P_4$  共線，矛盾。 ■

上面的推論與性質都有對偶版本，那這邊就省略敘述及證明。

## 1.5 等角共軛點

等角共軛點是平面幾何非常重要的概念之一，也是數學競賽中經常用到的工具。相信讀到這裡的各位應該已經看過很多次了，不過還是正式的定義一下。

**Definition 1.5.1.** 給定兩線  $\ell_1, \ell_2$ ，滿足  $\ell_1 \cap \ell_2 \notin \mathcal{L}_\infty$ 。那麼我們說過  $P$  兩線  $K, L$  爲關於  $\angle(\ell_1, \ell_2)$  的等角線若

$$\angle(K, \ell_1) + \angle(L, \ell_2) = 0^\circ.$$

**Definition 1.5.2.** 給定任意完全  $n$  線形  $\mathcal{N}(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ ，定義  $A_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$ 。對於一個點  $P$ ，若存在一點  $Q$ ，使得對於所有  $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ， $A_{ij}P, A_{ij}Q$  爲關於  $\angle(\ell_i, \ell_j)$  的等角線，那麼我們稱  $Q$  爲  $P$  關於  $\mathcal{N}$  的等角共軛點 (Isogonal Conjugate)，或稱  $(P, Q)$  爲關於  $\mathcal{N}$  的一對等角共軛點對 (注意到  $P$  也爲  $Q$  關於  $\mathcal{N}$  的等角共軛點)。

**Example 1.5.3.** 給定  $\triangle ABC$ ，其外心及垂心爲關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點對，其內心及三個旁心則爲自己的等角共軛點。

**Example 1.5.4.** 設  $ABCD$  爲一圓上的調和四邊形，那麼  $\overline{AC}$  中點及  $\overline{BD}$  中點爲關於  $(AB, BC, CD, DA)$  的等角共軛點對。

**Proposition 1.5.5.** 給定任意  $\triangle ABC$ ，則對於任意一點  $P$ ，存在一點  $Q$  使得  $Q$  爲  $P$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點。

一般來說，這個性質的證明都是使用角元西瓦或正交三角形來證明，不過我個人還是比較喜歡用角度來證明命題。

*Proof.* 令  $\triangle P_a P_b P_c$  爲  $P$  關於  $\triangle ABC$  的圓西瓦三角形， $\triangle DEF$  爲  $P$  關於  $\triangle P_a P_b P_c$  的佩多三角形，則

$$\angle EDF = \angle EDP + \angle PDF = \angle P_a P_c C + \angle B P_b P_c = \angle BAC,$$

同理有  $\angle FED = \angle CBA, \angle DFE = \angle ACB$ ，所以  $\triangle ABC \triangleq \triangle DEF$ ，取  $Q$  使得  $\triangle ABC \cup Q \triangleq \triangle DEF \cup P$ ，則

$$\angle PAB + \angle QAC = \angle P_a AB + \angle PDF = \angle P_a P_b B + \angle P P_b F = 0^\circ.$$

同理有其他輪換式子，所以  $Q$  爲  $P$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點。 ■

**Proposition 1.5.6.** 給定任意  $\triangle ABC$ ，則對於任意一點  $P$ ，點  $Q$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點若且唯若

$$\angle CPA + \angle CQA = \angle CBA \quad \text{及} \quad \angle APB + \angle AQB = \angle ACB.$$

*Proof.*

( $\Rightarrow$ ) 簡單的算角度練習。

( $\Leftarrow$ ) 令  $Q'$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點。熟知滿足  $\angle CPA + \angle CQA = \angle CBA$  的  $Q$  的軌跡為  $\odot(CAQ') \setminus \{C, A\}$ ，同樣地，滿足  $\angle APB + \angle AQB = \angle ACB$  的  $Q$  的軌跡為  $\odot(ABQ') \setminus \{A, B\}$ 。因此

$$Q \in (\odot(CAQ') \setminus \{C, A\}) \cap (\odot(ABQ') \setminus \{A, B\}) = \{Q'\}$$

即  $Q = Q'$ 。 ■

**Proposition 1.5.7.** 對於任意完全  $n$  線形  $\mathcal{N}(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$  及兩點  $P$ ，定義  $P_i$  為  $P, Q$  關於  $\ell_i$  的垂足，則  $P$  存在關於  $\mathcal{N}$  的等角共軛點若且唯若  $P_1, P_2, \dots, P_n$  共圓 (佩多圓)。此時，若  $Q$  為  $P$  關於  $\mathcal{N}$  的等角共軛點，定義  $Q_i$  為  $Q$  關於  $\ell_i$  的垂足，則  $P_1, P_2, \dots, P_n, Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  共圓且其圓心為  $\overline{PQ}$  中點。

*Proof.* 令  $A_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$ 。

( $\Rightarrow$ ) 令  $Q$  為  $P$  關於  $\mathcal{N}$  的等角共軛點， $Q_i$  為  $Q$  關於  $\ell_i$  的垂足，則由  $A_{ij}PP_iP_j$  與  $A_{ij}QQ_jQ_i$  負向相似知  $P_i, P_j, Q_i, Q_j$  共圓。因為  $\ell_i, \ell_j, \ell_k$  不共點，所以  $P_i, P_j, P_k, Q_i, Q_j, Q_k$  共圓，故  $P_1, P_2, \dots, P_n, Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  共圓。易知其圓心位於  $\overline{P_iQ_i}$  的中垂線上，所以其圓心為  $\overline{PQ}$  中點，這證明了後半部分。

( $\Leftarrow$ ) 令  $Q_i$  為  $\odot(P_1P_2\dots P_n)$  與  $\ell_i$  的另一個交點，由 ( $\Rightarrow$ ) 及  $P$  存在關於  $\triangle A_{jk}A_{ki}A_{ij}$  的等角共軛點知  $Q_i, Q_j, Q_k$  分別關於  $\ell_i, \ell_j, \ell_k$  的垂線交於  $P$  關於  $\triangle A_{jk}A_{ki}A_{ij}$  的等角共軛點，故  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  分別關於  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  的垂線交於一點，設其為  $Q$ ，則  $Q$  為  $P$  關於關於  $\mathcal{N}$  的等角共軛點。 ■

**Example 1.5.8.** 取  $\mathcal{N} = \triangle ABC$ ， $P, Q$  分別取  $\triangle ABC$  的外心及垂心，那麼我們就有  $\triangle ABC$  的垂足三角形與中點三角形共外接圓 (九點圓)。

那等角共軛點跟圓錐曲線有很大的關連，主要原因是因為下面這個：

**Theorem 1.5.9.** 對於任意完全  $n$  線形  $\mathcal{N}(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$  及不在線上的兩點  $P, Q$ ，則  $(P, Q)$  為  $\mathcal{N}$  的一對等角共軛點對若且唯若存在以  $P, Q$  為焦點的圓錐曲線  $C$  使得  $C$  與  $\mathcal{N}$  相切。

*Proof.* 令  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  分別為  $Q$  關於  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  的對稱點。

( $\Rightarrow$ ) 則  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  共圓且圓心為  $P$ ，令  $T_i$  為  $PQ_i$  與  $\ell_i$  的交點，則  $\overline{PT_i} \pm \overline{QT_i} = \overline{PQ_i}$  為定值，因此存在以  $P, Q$  為焦點的圓錐曲線  $C$  過  $T_i$ ，由  $\ell_i$  為  $\angle PT_iQ$  的角平分線知  $C$  與  $\ell_i$  相切，即  $C$  與  $\mathcal{N}$  相切。

( $\Leftarrow$ ) 令  $T_i = T_{\ell_i}C$ ，則  $\overline{PQ_i} = \overline{PT_i} \pm \overline{QT_i}$  為定值，因此  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  共圓且圓心為  $P$ ，則由該圓在位似變換  $(Q, 1/2)$  下的像可得到  $(P, Q)$  為  $\mathcal{N}$  的一對等角共軛點對。 ■

**Corollary 1.5.10.** 對於任意完全  $n$  線形  $\mathcal{N}$ ，其中  $n \geq 5$ ，至多存在一對  $\mathcal{N}$  的等角共軛點對 (恰存在一對當  $n = 5$  時)。

關於四邊形的等角共軛點後面會用一整個章節來講解，這邊先提幾個特別重要的：

**Corollary 1.5.11.** 對於任意完全四線形  $Q$ ，其所有等角共軛點對的中點軌跡為  $Q$  的牛頓線。

*Proof.* 結合牛頓第二定理 (0.4.14)。 ■

**Proposition 1.5.12.** 給定任意完全四線形  $Q = (AB, BC, CD, DA)$ ，則對於任意一點  $P$ ， $P$  有關於  $Q$  的等角共軛點若且唯若

$$\angle APB + \angle CPD = 0^\circ.$$

*Proof.* 令  $P$  關於  $AB, BC, CD, DA$  的垂足分別為  $W, X, Y, Z$ ，則  $P$  有關於  $Q$  的等角共軛點若且唯若  $W, X, Y, Z$  共圓，等價於

$$\angle WXP + \angle PXY + \angle YZP + \angle PZW = 0^\circ \iff \angle APB + \angle CPD = 0^\circ \quad \blacksquare$$

**Theorem 1.5.13.** 給定任意完全四線形  $Q$ ，令  $M$  為  $Q$  的密克點， $\tau$  為  $Q$  的牛頓線，則  $(M, \infty_\tau)$  為關於  $Q$  的等角共軛點對。

*Proof.* 令  $Q = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ ， $M_i$  為  $M$  關於  $\ell_i$  的對稱點，則知  $M_1, M_2, M_3, M_4$  共於垂心線  $L$  且垂直於  $\tau$ ，因此以  $M$  為焦點， $L$  為準線的拋物線與  $\ell_i$  相切且另一個焦點為  $\infty_\tau$ ，故  $(M, \infty_\tau)$  為關於  $Q$  的等角共軛點對。 ■

回到三角形的情況，我們有：

**Proposition 1.5.14.** 給定任意  $\triangle ABC$ ，將一點  $P$  映射至其關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點  $Q$  的變換為一點等共軛變換 (稱為等角共軛變換)。

*Proof.* 令  $I, I_a, I_b, I_c$  為  $\triangle ABC$  的內心與  $A, B, C$  分別關於  $\triangle ABC$  的旁心，考慮所有經過  $I, I_a, I_b, I_c$  的圓錐曲線族定義的點等共軛變換  $\varphi$ ，則由

$$(AP, AQ; II_a, I_b I_c) = (BP, BQ; II_b, I_c I_a) = (CP, CQ; II_c, I_a I_b) = -1,$$

知  $Q = \varphi(P)$ ，因此  $\varphi$  即為將一點  $P$  映射至其等角共軛點  $Q$  的變換。 ■

所以說等角共軛變換是以  $\triangle ABC$  的類似重心  $K$  為極點的等共軛變換。在下一章，我們會看到以垂心  $H$  為極點的等共軛變換。這邊就拿 (1.4.14) 來得到一個直接推論：

**Corollary 1.5.15.** 給定任意  $\triangle ABC$ ，令  $\varphi$  為  $\triangle ABC$  上的等角共軛變換，則  $\varphi(\odot(ABC)) = \mathcal{L}_\infty$ 。 ■

這個算角度也是顯然的。

**Example 1.5.16.** 令  $S_P$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的西姆松線 (或施坦納線)(2.5.10)， $P^*$  為  $P$  關於  $\odot(ABC)$  的對徑點，則  $(P^*, \infty_{S_P})$  為關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點。

除此之外還有一些基本性質：

**Proposition 1.5.17.** 給定  $\triangle ABC$ ，令  $O$  為  $\triangle ABC$  的外心， $(P, Q)$  為關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點對， $Q^*$  為  $Q$  關於  $O$  的對稱點。令  $\triangle P_a P_b P_c$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的佩多三角形， $\triangle Q_a Q_b Q_c$  為  $Q$  關於  $\triangle ABC$  的反佩多三角形，那麼：

- (i)  $(Q, Q^*)$  為關於  $\triangle Q_a Q_b Q_c$  的等角共軛點對
- (ii)  $\triangle P_a P_b P_c \cup P \stackrel{+}{\sim} \triangle Q_a Q_b Q_c \cup Q^*$
- (iii) 令  $P^*$  為  $P$  關於  $\triangle P_a P_b P_c$  的等角共軛點對，那麼  $PP^* \parallel OQ$

*Proof.* 我們依序證明命題 (i), (ii), (iii)。

- (i) 注意到  $Q$  關於  $\triangle Q_a Q_b Q_c$  的佩多圓為  $\odot(ABC)$ ，所以  $Q$  關於  $\triangle Q_a Q_b Q_c$  的等角共軛點為  $Q$  關於  $\odot(ABC)$  的圓心的對稱點，即  $Q^*$ 。
- (ii) 顯然地， $Q_b Q_c \perp AQ \perp P_b P_c, Q_c Q^* \perp AB \perp P_c P, Q^* Q_b \perp CA \perp P P_b$ ，所以  $\triangle P P_b P_c \stackrel{+}{\sim} \triangle Q^* Q_b Q_c$ ，同理有

$$\triangle P P_c P_a \stackrel{+}{\sim} \triangle Q^* Q_c Q_a, \triangle P P_a P_b \stackrel{+}{\sim} \triangle Q^* Q_a Q_b,$$

從而  $\triangle P_a P_b P_c \cup P \stackrel{+}{\sim} \triangle Q_a Q_b Q_c \cup Q^*$ 。

- (iii) 因為  $\triangle P_a P_b P_c \cup P \cup P^* \stackrel{+}{\sim} \triangle Q_a Q_b Q_c \cup Q^* \cup Q$ ，所以  $PP^* \parallel Q^*Q = OQ$ 。 ■

## 習題

**Problem 1.** 令  $(P, Q)$  為關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點對， $D$  為  $BC$  上一點。證明： $\angle APB + \angle DPC = 0^\circ$  若且唯若  $\angle AQC + \angle DQB = 0^\circ$ 。

**Problem 2.** 令  $X, Y$  分別為  $\triangle ABC$  的外接圓與內切圓的內位似中心與外位似中心。證明： $X, Y$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點分別為  $\triangle ABC$  的熱爾岡點 (Gergonne Point)  $Ge$  及奈格爾點 (Nagel Point)  $Na$ 。

**Problem 3.** 令  $M$  為  $\triangle ABC$  中， $\overline{BC}$  的中點， $I_1, I_2$  分別為  $\triangle ABM, \triangle AMC$  的內心。證明： $\odot(AI_1 I_2)$  經過弧  $\widehat{BAC}$  的中點。

**Problem 4.** 設  $I$  為  $\triangle ABC$  的內心， $M$  為  $\overline{AI}$  中點， $E, F$  分別為  $BI, CI$  與  $\odot(ABC)$  的另一個交點。分別在  $AE, AF$  上取點  $X, Y$  滿足  $\angle XBC = \angle ABM$  及  $\angle YCB = \angle ACM$ 。證明： $I, X, Y$  共線。

**Problem 5.** 令  $\varphi$  為  $\triangle ABC$  的等角共軛變換，設直線  $\ell$  不通過  $A, B, C$  三點。證明： $A(\ell \cap BC)$  與  $T_A \varphi(\ell)$  為關於  $\angle BAC$  的等角線。

**Problem 6.** 令  $(P, Q)$  為關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點對， $AP, AQ$  分別交  $\odot(ABC)$  於  $U, V$ ， $AP$  與  $BC$  交於  $T$ 。證明：

$$\frac{PT}{TU} = \frac{AQ}{QV}.$$

**Problem 7.** 若  $(P, P^*), (Q, Q^*)$  為關於  $\triangle ABC$  的兩對等角共軛點對滿足  $PP^* \parallel QQ^*$ ，設  $M_P, M_Q$  分別為  $\overline{PP^*}, \overline{QQ^*}$  中點。證明： $I, I_a, I_b, I_c, M_P, M_Q$  共圓錐曲線。

**Problem 8.** 令  $\odot(I)$  為非等腰三角形  $ABC$  的內切圓並切邊  $BC$  於  $D$ ， $X$  在 (不含  $A$  的弧)  $\widehat{BC} \subset \odot(ABC)$  上使得若  $E, F$  為  $X$  關於  $BI, CI$  的垂足，則  $\overline{EF}$  中點位於  $\overline{BC}$  的中垂線上。證明  $\angle BAD = \angle XAC$ 。

**Problem 9.** 跟等角共軛點對偶的可以說是等截共軛線，它的定義如下：給定一個完全  $n$  點形  $\mathcal{N}(P_1, P_2, \dots, P_n)$ ，定義  $\ell_{ij} = P_i P_j$ 。對於一線  $K$ ，若存在一線  $L$ ，使得對於所有  $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ， $\ell_{i,j} \cap K, \ell_{i,j} \cap L$  關於  $\overline{P_i P_j}$  的中點對稱，那麼我們稱  $L$  為  $K$  關於  $\mathcal{N}$  的等截共軛線，或稱  $(K, L)$  為關於  $\mathcal{N}$  的一對等截共軛線對。



---

## Chapter 2

### 等軸雙曲線

#### 2.1 特殊圓錐曲線與龐色列點

人生幾何，人生中總是會碰到一些特殊的人，幾何中總是會碰到一些特殊的圓錐曲線。

**Proposition 2.1.1.** 令  $\mathcal{P}$  為一個以  $F$  為焦點、 $L$  為準線的拋物線，設  $\triangle ABC$  為與  $\mathcal{P}$  相切的三角形，則  $F \in \odot(ABC)$  且  $L$  經過  $\triangle ABC$  的垂心。

*Proof.* 令  $F$  關於  $BC, CA, AB$  的對稱點分別為  $F_a, F_b, F_c$ ， $\mathcal{P}$  分別與  $BC, CA, AB$  切於  $T_a, T_b, T_c$ ，那麼由拋物線的光學性質可得  $F_a, F_b, F_c$  分別為  $T_a, T_b, T_c$  關於  $L$  的垂足，因此由  $F_a, F_b, F_c$  共線於  $L$  及施坦納定理知  $F \in \odot(ABC)$  且  $L$  經過  $\triangle ABC$  的垂心。 ■

**Proposition 2.1.2.** 令  $\mathcal{P}$  為一個以  $F$  為焦點、 $L$  為準線的拋物線，設  $\triangle ABC$  為  $\mathcal{P}$  的自共軛三角形，則  $F$  位於  $\triangle ABC$  的九點圓上且  $L$  經過  $\triangle ABC$  的外心。

*Proof.* 令  $U$  為垂直於  $L$  方向上的無窮遠點，則  $U \in \mathcal{P}$  且  $U$  為  $O$  的中心，令  $M_a, M_b, M_c$  分別為  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  的中點， $AU$  分別交  $BC, M_bM_c$  於  $P, T$ ，則由  $(A, U; P, T) = -1$  知  $T \in \mathcal{P}$ ，由  $M_bM_c \parallel BC$  及平行弦定理知  $M_bM_c$  為  $T$  關於  $\mathcal{P}$  的極線，即  $M_bM_c$  與  $\mathcal{P}$  相切，同理有  $M_cM_a, M_aM_b$  與  $\mathcal{P}$  相切，再由上述性質就有  $F$  位於  $\triangle ABC$  的九點圓上且  $L$  經過  $\triangle ABC$  的外心。 ■

講完兩個大家該知道的性質之後我們回到標題。

**Definition 2.1.3.** 對於一個雙曲線  $\mathcal{H}$ ，我們稱其為一等軸雙曲線 (Rectangular Hyperbola) 若  $\mathcal{H}$  上的兩個無窮遠點方向垂直。

會叫等軸雙曲線是因為每個雙曲線都有所謂的貫軸與共軛軸，而等軸雙曲線就是當貫軸與共軛軸等長的時候。

**Proposition 2.1.4.** 給定任意非直角三角形  $\triangle ABC$ ，設其垂心為  $H$ ， $\mathcal{H}$  為  $\triangle ABC$  的外接圓錐曲線，則  $H \in \mathcal{H}$  若且唯若  $\mathcal{H}$  為等軸雙曲線。

*Proof.* 考慮  $\triangle ABC$  上的等角共軛變換  $\varphi$ ，令  $O$  為  $\triangle ABC$  的外心，則  $H \in \mathcal{H}$  若且唯若  $O \in \varphi(\mathcal{H})$ ，設  $\varphi(\mathcal{H})$  與  $\odot(ABC)$  交於  $X, Y$  兩點 (若無交點，則  $\mathcal{H}$  與  $\mathcal{L}_\infty$  不相交)，那麼  $O \in \varphi(\mathcal{H})$  若且唯若  $X, Y$  為關於  $\odot(ABC)$  的對徑點若且唯若  $\varphi(X), \varphi(Y)$  的方向垂直，即  $\mathcal{H}$  為等軸雙曲線。 ■

透過解析也是可以很快看出來，假設  $A = (a, a^{-1})$ ,  $B = (b, b^{-1})$ ,  $C = (c, c^{-1})$ ，那麼  $\triangle ABC$  的垂心  $H = (-(abc)^{-1}, -abc)$ 。再來這個可以想成是取極限後的版本。

**Proposition 2.1.5.** 給定任意直角三角形  $\triangle ABC$ ，設  $BC$  為其斜邊， $AD$  為高， $\mathcal{H}$  為  $\triangle ABC$  的外接圓錐曲線，則  $AD$  與  $\mathcal{H}$  相切若且唯若  $\mathcal{H}$  為等軸雙曲線。

*Proof.* 考慮  $\triangle ABC$  上的等角共軛變換  $\varphi$ ，令  $O$  為  $\triangle ABC$  的外心，則  $AD$  與  $\mathcal{H}$  相切若且唯若  $\varphi(\mathcal{H}), AO, BC$  共點若且唯若  $O \in \varphi(\mathcal{H})$ 。與上述的性質證明相同， $O \in \varphi(\mathcal{H})$  若且唯若  $\mathcal{H}$  為等軸雙曲線。 ■

**Proposition 2.1.6.** 令  $\mathcal{H}$  為以  $O$  為中心的等軸雙曲線，設  $A, B, C \in \mathcal{H}$ ，則  $O$  位於  $\triangle ABC$  的九點圓上。

*Proof.* 令  $H$  為  $\triangle ABC$  的垂心，則  $H \in \mathcal{H}$ ，因此由 (1.4.15) 知  $O$  位於完全四點形  $(A, B, C, H)$  的九點圓錐曲線上，即  $\triangle ABC$  的九點圓上。 ■

**Proposition 2.1.7.** 令  $\mathcal{H}$  為以  $O$  為中心的等軸雙曲線，則對於任意兩點  $P_1, P_2$ ，

$$\angle(\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P_1), \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P_2)) + \angle P_1 O P_2 = 0.$$

*Proof.* 令  $U_i = OP_i \cap \mathcal{L}_\infty, V_i = \ell_{\mathcal{H}}(P_i) \cap \mathcal{L}_\infty$ ，由平行弦定理知  $\mathbf{p}_{\mathcal{H}}(U_i) \parallel \mathbf{p}_{\mathcal{H}}(P_i)$ 。令  $W_1, W_2$  為  $\mathcal{H}$  與  $\mathcal{L}_\infty$  的兩個交點，由  $U_i, V_i$  關於  $\mathcal{H}$  共軛知

$$-1 = (U_i, V_i; W_1, W_2) \stackrel{O}{=} O(P_i, V_i; W_1, W_2).$$

而  $\angle W_1OW_2 = 90^\circ$ ，所以  $\angle P_iOV_i$  有分角線  $OW_1, OW_2$ ，故

$$\begin{aligned} \angle(\mathbf{p}_{\mathcal{H}}(P_1), \mathbf{p}_{\mathcal{H}}(P_2)) &= \angle V_1OV_2 = \angle V_1OW_1 + \angle W_2OV_2 \\ &= \angle W_1OP_1 + \angle P_2OW_2 = -\angle P_1OP_2. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Corollary 2.1.8.** 令  $\mathcal{H}$  為以  $O$  為中心的等軸雙曲線，設  $\triangle ABC$  為  $\mathcal{H}$  的自共軛三角形，則  $O \in \odot(ABC)$ 。

*Proof.* 由 (2.1.7) 可得  $\angle BOC = -\angle(CA, AB) = \angle BAC$ ，即  $O \in \odot(ABC)$ 。  $\blacksquare$

**Proposition 2.1.9.** 令  $\mathcal{H}$  為以  $O$  為中心的等軸雙曲線，設  $\triangle ABC$  為  $\mathcal{H}$  的自共軛三角形，則  $\triangle ABC$  的內心與三個旁心  $I, I_a, I_b, I_c \in \mathcal{H}$ 。

*Proof.* 令  $P \in \mathcal{H} \setminus \{I, I_a, I_b, I_c\}$ ，設  $\triangle P_aP_bP_c$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的反西瓦三角形，因為  $\triangle ABC$  為  $\mathcal{H}$  的自共軛三角形，所以  $P_a, P_b, P_c \in \mathcal{H}$ 。由  $\triangle I_aI_bI_c$  為  $I$  關於  $\triangle ABC$  及 (1.1.15) 知  $P, P_a, P_b, P_c, I, I_a, I_b, I_c$  共圓錐曲線，但經過  $P, P_a, P_b, P_c$  的等軸雙曲線是唯一的，所以  $I, I_a, I_b, I_c \in \mathcal{H}$ 。  $\blacksquare$

**Proposition 2.1.10.** 若  $\overline{BC}$  為一個等軸雙曲線  $\mathcal{H}$  上的直徑，那麼對於任意  $A \in \mathcal{H}$ ， $A$  關於  $\odot(ABC)$  的對徑點  $A^* \in \mathcal{H}$ ，且  $T_A\mathcal{H}$  為  $\triangle ABC$  的  $A$ -共軛中線。

*Proof.* 考慮關於  $\triangle ABC$  的等角共軛變換  $\varphi$ ，設  $L = \varphi(\mathcal{H}), L' = \varphi(T_A\mathcal{H})$ ，那麼  $\varphi(L \cap L') \in \mathcal{H} \cap T_A\mathcal{H} = A$ ，所以  $L \cap L' \in BC$ 。注意到  $\triangle ABC$  的垂心  $H \in \mathcal{H}$ ，故其關於  $\overline{BC}$  中點的對稱點位於  $\mathcal{H}$  上，即  $A^*$ 。所以由  $\infty_{\perp BC} = \varphi(A^*) \in L$  知  $L$  為  $BC$  中垂線，故  $T_A\mathcal{H}$  為  $L' = A(L \cap BC)$  關於  $\angle BAC$  的等角線，即  $\triangle ABC$  的  $A$ -共軛中線。  $\blacksquare$

**Definition 2.1.11.** 對於任意不構成垂心組的完全四點形  $\mathcal{Q} = (A, B, C, D)$ ，令  $\mathcal{H}$  為通過  $A, B, C, D$  的等軸雙曲線， $O$  為  $\mathcal{H}$  的中心，則我們稱  $O$  為  $\mathcal{Q}$  的龐色列點 (Poncelet Point)。

**Theorem 2.1.12.** 令  $T$  為完全四點形  $Q = (P_1, P_2, P_3, P_4)$  的龐色列點，則  $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$  的九點圓， $P_i$  關於  $\triangle P_{i+1}P_{i+2}P_{i+3}$  的佩多圓及  $Q$  的西瓦圓，這九個圓共點，且該點為  $T$ 。

*Proof.* 令  $\mathcal{H}$  為通過  $P_1, P_2, P_3, P_4$  的等軸雙曲線， $\triangle XYZ$  為  $Q$  的西瓦三角形，則  $\triangle XYZ$  為  $\mathcal{H}$  的自共軛三角形，因此由上述性質知  $T$  位於  $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$  的九點圓上且位於  $Q$  的西瓦圓上。令  $P_4$  關於  $\triangle P_1P_2P_3$  的佩多三角形為  $\triangle Q_1Q_2Q_3$ ， $M_{ij}$  為  $\overline{P_iP_j}$  的中點，由  $T$  位於  $\odot(M_{14}Q_2M_{31}), \odot(M_{14}Q_3M_{12})$  上可得

$$\begin{aligned}\angle Q_2TQ_3 &= \angle Q_2TM_{14} + \angle M_{14}TQ_3 = \angle Q_2M_{31}M_{14} + \angle M_{14}M_{12}Q_3 \\ &= \angle Q_2P_3P_4 + \angle P_4P_3Q_3 = \angle Q_2Q_1P_4 + \angle P_4Q_1Q_3 = \angle Q_2Q_1Q_3\end{aligned}$$

即  $T \in \odot(Q_1Q_2Q_3)$ ，同理有  $T$  位於其他  $P_i$  關於  $\triangle P_{i+1}P_{i+2}P_{i+3}$  的佩多圓上。 ■

**Definition 2.1.13.** 給定任意  $\triangle ABC$ ， $P$  為非  $\triangle ABC$  的垂心或其頂點的任意一點，我們稱  $P^*$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的 antigonal conjugate 若

$$\angle BPC + \angle BP^*C = \angle CPA + \angle CP^*A = \angle APB + \angle AP^*B = 0^\circ.$$

顯然  $P^*$  是唯一的。

**Proposition 2.1.14.** 給定任意  $\triangle ABC$ ，若  $P^*$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的 antigonal conjugate，則  $\overline{PP^*}$  中點  $T$  為完全四點形  $(A, B, C, P)$  的龐色列點。

關於 antigonal conjugate 的更多性質，見 (2.5)。

*Proof.* 令  $P$  關於  $BC, CA, AB$  的對稱點分別為  $P_A, P_B, P_C$ ，則  $B, C, P_A, P^*$  及其輪換分別共圓。注意到  $\odot(BCP_A)$  關於  $P$  位似  $1/2$  倍的像為  $\triangle BPC$  的九點圓  $\odot(N_a)$ ，所以  $T \in \odot(N_a)$ ，同理有  $T \in \odot(N_b), \odot(N_c)$ 。故  $T \in \bigcap \odot(N_a)$ ，由  $\left| \bigcap \odot(N_a) \right| = 1$  知  $T$  為完全四點形  $(A, B, C, D)$  的龐色列點。 ■

**Remark.** 證明中的  $\left| \bigcap \odot(N_a) \right| = 1$  其實偷偷用到了  $P$  不是  $\triangle ABC$  的垂心這個事實，讀者可以證明看看

$$\left| \bigcap \odot(N_a) \right| > 1 \implies P \text{ 是垂心.}$$

**Proposition 2.1.15.** 給定任意  $\triangle ABC$ ，令  $O$  為  $\triangle ABC$  的外心，對於  $\triangle ABC$  的任意一對等角共軛點對  $(P, Q)$ ，令  $T$  為  $(A, B, C, P)$  的龐色列點，則  $T$  關於  $\triangle ABC$  的中點三角形的施坦納線為  $OQ$ 。

*Proof.* 令  $\triangle M_a M_b M_c$  為  $\triangle ABC$  的中點三角形， $S$  為  $T$  關於  $\triangle M_a M_b M_c$  的施坦納線， $\mathcal{H}$  為經過  $A, B, C, P$  的等軸雙曲線， $H^*$  為  $H$  關於  $\mathcal{H}$  的對徑點，則  $H^* \in \odot(ABC)$ ，考慮  $\triangle ABC$  上的等角共軛變換  $\varphi$ ，我們有  $\varphi(H^*) = \infty_{OQ}$ ，因此由  $T$  關於  $\odot(M_a M_b M_c)$  的對徑點關於  $\triangle M_a M_b M_c$  的等角共軛點為  $\infty_S$  知  $S \parallel OQ$ ，又  $O$  為  $\triangle M_a M_b M_c$  的垂心，因此  $S = OQ$ 。 ■

**Proposition 2.1.16.** 給定任意  $\triangle ABC$ ，令  $O$  為  $\triangle ABC$  的外心，對於  $\triangle ABC$  的任意一對等角共軛點對  $(P, Q)$ ，令  $T$  為  $(A, B, C, P)$  的龐色列點，則  $T$  關於  $P$  關於  $\triangle ABC$  的佩多三角形的施坦納線平行於  $OQ$ 。

*Proof.* 令  $\triangle P_a P_b P_c$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的佩多三角形， $\triangle M_a M_b M_c$  為  $\triangle ABC$  的中點三角形，由上一個性質知原命題等價於證明  $P_a T$  關於  $\angle P_b P_a P_c$  的等角線平行於  $M_a T$  關於  $\angle M_b M_a M_c$  的等角線，即

$$\angle P_b P_a T - \angle M_b M_a T = \angle(M_c M_a, P_c P_a).$$

注意到  $\odot(P_a M_a T)$  為  $\triangle PBC$  的九點圓，所以

$$\begin{aligned} \angle P_b P_a T - \angle M_b M_a T &= \angle(P_a P_b, M_a M_b) + \angle M_a P T_a \\ &= \angle(\perp CQ, AB) + \angle PBC + \angle PCB \\ &= \angle(\perp CQ, AB) + \angle ABQ + \angle ACQ \\ &= \angle(CA, \perp BQ) = \angle(M_c M_a, P_c P_a). \end{aligned}$$

事實上，一個點的佩多圓與九點圓的夾角是可以直接算的。

**Theorem 2.1.17.** 給定任意  $\triangle ABC$  及一點  $P$ ，那麼  $P$  關於  $\triangle ABC$  的佩多圓與  $\triangle ABC$  的九點圓在  $(A, B, C, P)$  的龐色列點的夾角為

$$90^\circ + \angle(BC, AP) + \angle(CA, BP) + \angle(AB, CP).$$

*Proof.* 令  $\triangle P_a P_b P_c$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的佩多三角形， $\triangle M_a M_b M_c$  為  $\triangle ABC$  的中點三角形， $T$  為  $(A, B, C, P)$  的龐色列點，則  $T$  位於  $\triangle PCA$  與  $\triangle PAB$  的九點

圓上。設  $L_1, L_2$  分別為  $T$  關於  $\odot(P_aP_bP_c), \odot(M_aM_bM_c)$  的切線，則

$$\begin{aligned}
 \angle(L_1, L_2) &= \angle(L_1, TP_c) + \angle P_cTM_c + \angle(M_cT, L_2) \\
 &= \angle TP_bP_c + \angle M_cM_bT + \angle P_cTM_c \\
 &= \angle(M_bM_c, P_bP_c) + \angle P_bTM_b + \angle P_cTM_c \\
 &= \angle(BC, P_bP_c) + (\angle ACP + \angle CAP) + (\angle BAP + \angle ABP) \\
 &= (\angle AP_bP_c + \angle BAP) + \angle(BC, AP) + \angle(CA, BP) + \angle(AB, CP) \\
 &= 90^\circ + \angle(BC, AP) + \angle(CA, BP) + \angle(AB, CP). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

那他有個推廣，但又可以說是直接推論：

**Theorem 2.1.18.** 給定任意  $\triangle ABC$  與一外接等軸雙曲線  $\mathcal{H}$ ，令  $P, Q \in \mathcal{H}$ ，那麼  $P, Q$  關於  $\triangle ABC$  的佩多圓在  $\mathcal{H}$  的中心的夾角為

$$\angle QAP + \angle QBP + \angle QCP.$$

這邊提供另一個看起來沒那麼暴力的證明。

*Proof.* 令  $\triangle P_aP_bP_c, \triangle Q_aQ_bQ_c$  分別為  $P, Q$  關於  $\triangle ABC$  的佩多三角形， $O$  為  $\mathcal{H}$  的中心， $P^*, Q^*$  分別為  $P, Q$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點。設  $L_P = T_O\odot(P_aP_bP_c)$ ,  $L_Q = T_O\odot(Q_aQ_bQ_c)$ ，則

$$\begin{aligned}
 \angle(T_P, T_Q) &= \angle(T_P, OP_c) + \angle P_cOQ_c + \angle(OQ_c, T_Q) \\
 &= \angle OP_bP_c + \angle Q_cQ_bO + \angle P_cOQ_c \\
 &= \angle(P_bP_c, Q_bQ_c) + \angle P_bOQ_b + \angle P_cOQ_c \\
 &= \angle(P_bP_c, Q_bQ_c) + \angle(\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P_b), \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(Q_b)) + \angle(\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P_c), \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(Q_c)) \\
 &= \angle(P_bP_c, Q_bQ_c) + \angle(P_cP_a, Q_cQ_a) + \angle(P_aP_b, Q_aQ_b) \\
 &= \angle P^*AQ^* + \angle P^*BQ^* + \angle P^*CQ^* \\
 &= \angle QAP + \angle QBP + \angle QCP. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

### 2.1.1 封騰定理

跟牛頓定理一樣，封騰定理有三個，但是複雜多了。

**Theorem 2.1.19** (封騰一號/Fontené's Theorem I). 令  $\triangle M_a M_b M_c$  為  $\triangle ABC$  的中點三角形。對於任意一對等角共軛點對  $(P, Q)$ ，令  $T$  為  $(A, B, C, P)$  的龐色列點， $\triangle Q_a Q_b Q_c$  為  $Q$  關於  $\triangle ABC$  的佩多三角形， $R_a = Q_b Q_c \cap M_b M_c$ ，則  $T \in Q_a R_a$ 。

*Proof.* 令  $T', Q'_a$  分別為  $T, Q_a$  關於  $M_b M_c$  的對稱點，則  $T' \in \odot(\overline{AO})$  且  $T' \in OQ$ ，因此有  $\angle AT'Q = 90^\circ$ ，即  $T'$  為完全四線形  $(CA, AB, M_b M_c, Q_b Q_c)$  的密克點。由

$$\angle R_a T' Q_b = \angle R_a M_b A = \angle Q'_a A Q_b = \angle Q'_a T' Q_b,$$

$T' \in R_a Q'_a$ ，關於  $M_b M_c$  對稱後就有  $T \in Q_a R_a$ 。 ■

**Corollary 2.1.20.** 同樣定義  $R_b, R_c$ ，則  $\triangle R_a R_b R_c$  的垂心為  $\triangle Q_a Q_b Q_c$  的外心，即  $\overline{PQ}$  中點。

*Proof.* 注意到  $\triangle R_a R_b R_c$  為  $T$  關於  $\triangle Q_a Q_b Q_c$  的西瓦三角形，因此  $\triangle R_a R_b R_c$  為關於  $\odot(Q_a Q_b Q_c)$  的自共軛三角形，故  $\triangle R_a R_b R_c$  的垂心為  $\odot(Q_a Q_b Q_c)$  的圓心。 ■

**Theorem 2.1.21** (封騰二號/Fontené's Theorem II). 給定任意  $\triangle ABC$ ， $\ell$  為一個通過  $\triangle ABC$  的外心的直線， $Q$  為  $\ell$  上一動點，則  $Q$  關於  $\triangle ABC$  的佩多圓過一定點且該定點位於  $\triangle ABC$  的九點圓上 (該定點即為  $(A, B, C, P)$  的龐色列點，其中  $P$  為  $Q$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點)。

*Proof.* 令  $P$  為  $Q$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點，那麼  $Q$  關於  $\triangle ABC$  的佩多圓，即  $P$  關於  $\triangle ABC$  的佩多圓，經過  $(A, B, C, P)$  的龐色列點，而其即為  $OQ$  關於  $\triangle ABC$  的中點三角形的反施坦納點，故為定點。 ■

最後是封騰三號，很多在網路上的證明是錯的，希望下面的證明是對的 (?)

**Theorem 2.1.22** (封騰三號/Fontené's Theorem III). 給定任意  $\triangle ABC$ ， $(P, Q)$  為  $\triangle ABC$  的一對等角共軛點對，則  $P$  關於  $\triangle ABC$  的佩多圓與  $\triangle ABC$  的九點圓相切若且唯若  $PQ$  通過  $\triangle ABC$  的外心。

*Proof.* 令  $O, H, N$  分別為  $\triangle ABC$  的外心、垂心、九點圓圓心， $T_1$  為  $(A, B, C, P)$  的龐色列點， $T_2$  為  $(A, B, C, Q)$  的龐色列點。

( $\Rightarrow$ ) 若  $P$  關於  $\triangle ABC$  的佩多圓與  $\triangle ABC$  的九點圓相切，那麼切點為  $T_1$  也為  $T_2$ ，因此  $T_1 = T_2$ ，故  $P, Q$  位於同一個  $\triangle ABC$  的外接等軸雙曲線上，兩邊取等角共軛變換就有  $O \in PQ$ 。

( $\Leftarrow$ )  $O \in PQ$ ，同樣取等角共軛變換有  $T := T_1 = T_2$ ，而兩圓相切等價於  $M, N, T$  共線，其中  $M$  為  $\overline{PQ}$  中點。令  $H$  關於  $T$  的對稱點為  $T'$ ， $\mathcal{H}$  為經過  $A, B, C, P, Q$  的圓錐曲線，則  $H, T' \in \mathcal{H}$  且  $T$  為  $\mathcal{H}$  的中心。令  $T'$  關於  $\odot(ABC)$  的對徑點為  $T^*$ ， $S_X$  為  $X$  關於  $\triangle ABC$  的施坦納線，那麼  $S_{T^*} \parallel PQ$ ，所以

$$T'(A, B; C, O) = (A, B; C, T^*) = (S_A, S_B; S_C, S_{T^*}) = H(A, B; C, \infty_{PQ})$$

故  $D := H\infty_{PQ} \cap OT' \in \mathcal{H}$ 。由平行弦定理與其推論知  $\overline{HD}$  中點位於  $TM$  上，將直線  $OT'$  關於  $H$  位似  $1/2$  倍則可得  $N \in TM$ 。 ■

結合 (2.1.17)，我們可以得到下面這個滿強大的結論：

**Corollary 2.1.23.** 給定  $\triangle ABC$ ，則對於任意一點  $P$ ，下列敘述等價：

- (i)  $\sum \angle(AP, BC) = 90^\circ$
- (ii)  $P$  關於  $\triangle ABC$  的佩多圓與  $\triangle ABC$  的九點圓相切
- (iii) 若  $Q$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點， $PQ$  通過  $\triangle ABC$  的外心 ■

事實上這些  $P$  的軌跡是一條三次曲線，又稱作  $\triangle ABC$  的 McCay 三次曲線，未來會再對它有多一點的介紹。

## 2.2 費爾巴哈雙曲線

這個雙曲線可以說是最常遇到的，費爾巴哈這個名字來自於下面這個定理 (應該啦)：



**Theorem 2.2.1** (費爾巴哈定理/Feuerbach's). 給定任意  $\triangle ABC$ ，其九點圓與內切圓及三個旁切圓相切。

相信大家看過算角度或者是反演的證明 (這兩個其實是一樣的)，這邊就直接開上一節的定理來證：

*Proof.* 由 2.1.17 及  $\sum \angle(AI_X, BC) = 90^\circ$  就有九點圓與內切圓及三個旁切圓的夾角是  $0^\circ$ ，其中  $I_X$  為內心或旁心。 ■

費爾巴哈定理有個在三次曲線上的推廣，不過我還不會就是了。

**Definition 2.2.2.** 對於任意  $\triangle ABC$ ，我們稱其九點圓與內切圓的切點為  $\triangle ABC$  的費爾巴哈點 (Feuerbach Point)。同樣地，對於  $X \in \{A, B, C\}$ ，我們定義  $X$ -費爾巴哈點為其九點圓與  $X$ -旁切圓的切點。

**Remark.** 我們可以相信，在內心上會對的性質，在某旁心上也會對 (?)。所以同樣地，在費爾巴哈點上會對的性質，在某旁費爾巴哈點上也通常會對 (只要不要扯到什麼跟距離相關的不等式之類的)。因此之後看到的定理或性質就只考慮費爾巴哈點與內心它們兩點的情形。

先介紹一些費爾巴哈點的性質，以下假設  $I, G, O, H, N, Fe$  分別為  $\triangle ABC$  的內心、重心、外心、垂心、九點圓圓心及費爾巴哈點。當然， $\odot(I), \odot(O), \odot(N)$  就分別為內切圓、外接圓及九點圓。

**Proposition 2.2.3.** 點  $Fe$  為  $\odot(N), \odot(I)$  的外位似中心，因此有  $Fe, N, I$  共線。 ■

**Proposition 2.2.4.** 令  $X, Y$  分別為  $\odot(I)$  及  $\odot(O)$  的內位似中心、外位似中心，那麼  $X, G, Fe$  及  $Y, H, Fe$  分別共線。

*Proof.* 注意到  $G, H$  分別為  $\odot(N)$  及  $\odot(O)$  的內位似中心、外位似中心，因此由 Monge 定理知  $X, G, Fe$  及  $Y, H, Fe$  分別共線。 ■

**Proposition 2.2.5.** 令  $I^*$  為  $I$  關於  $\odot(O)$  的反演點， $\mathcal{E}$  為  $\triangle ABC$  的歐拉線，那麼  $I^*Fe \parallel \mathcal{E}$ 。

*Proof.* 令  $R, r$  分別為  $\odot(O), \odot(I)$  的半徑長，注意到

$$\frac{OI^*}{OI} = \frac{R^2}{OI^2} = \frac{R/2}{R/2 - r} = \frac{NFe}{NI}$$

所以  $I^*Fe \parallel ON = \mathcal{E}$ 。 ■

直接由龐色列點的定義，我們有：

**Proposition 2.2.6.** 點  $Fe$  為  $(A, B, C, I)$  的龐色列點。 ■

這樣就可以進到我們的主題了。

**Definition 2.2.7.** 我們稱通過  $A, B, C, I$  的等軸雙曲線為  $\triangle ABC$  的費爾巴哈雙曲線  $\mathcal{H}_{Fe}$ 。

注意到等角共軛變換為等共軛變換，因此有：

**Proposition 2.2.8.** 集合對  $(\mathcal{H}_{Fe}, OI)$  為一對等角共軛集合對。 ■

**Corollary 2.2.9.** 令  $Fe^*$  為  $H$  關於  $Fe$  的對稱點，則  $(Fe^*, \infty_{OI})$  為一對等角共軛點對。 ■

**Proposition 2.2.10.** 令  $F_I, F_O$  分別為  $I, O$  關於  $BC$  的垂足， $e = OI \cap BC$ ，若  $I_e, O_e$  分別為  $e$  關於  $AI, AO$  的垂足，那麼  $Fe = F_I I_e \cap F_O O_e$ 。

事實上，我們有以下推廣：

**Proposition 2.2.11.** 令  $P$  為任意一點， $Q$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點， $T$  為  $(A, B, C, Q)$  的龐色列點。設  $T_P, T_O$  分別為  $P, O$  關於  $BC$  的垂足， $e$  為  $OP$  與  $BC$  的交點。若  $P_e, O_e$  分別為  $e$  關於  $AP, AO$  的垂足，那麼

$$\triangle APO \simeq \triangle TT_P T_O$$

且  $T = T_P P_e \cap T_O O_e$ 。

*Proof.* 令  $T, T_P, T_O$  關於平行於  $BC$  的中位線的對稱點分別為  $T', T'_P, T'_O$ ，則由封騰一號的證明知  $T' \in OP$  且  $A, P, T', T'_P$  及  $A, O, T', T'_O$  分別共圓，故

$$\angle OPA = \angle T' T'_P A = \angle T_O T_P T, \angle AOP = \angle A T'_O T' = \angle T T_O T_P$$

因此  $\triangle APO \simeq \triangle TT_P T_O$ 。注意到  $P, T_P, e, P_e$  及  $O, T_O, e, O_e$  分別共圓，所以

$$\angle TT_P e = \angle APO = \angle P_e P e = \angle P_e T_P e$$

所以  $T \in T_P P_e$ ，同理有  $T \in T_O O_e$  ■

從上方的證明我們還可以看出以下的事實：

**Proposition 2.2.12.** 令  $OP$  分別交  $BC, CA, AB$  於  $D, E, F$ ，則

$$\angle ATD = \angle BTE = \angle CTF = 90^\circ.$$

*Proof.* 同樣令  $T$  關於平行於  $BC$  的中位線的對稱點為  $T'$ ，則  $T'$  為  $A$  關於  $OP$  的垂足，所以  $T' \in \odot(\overline{AD})$ ，由  $\overline{AD}$  中點位於平行於  $BC$  的中位線上知  $T \in \odot(\overline{AD})$ ，同理有  $T \in \odot(\overline{BE}), \odot(\overline{CF})$ 。 ■

**Definition 2.2.13.** 給定  $\triangle ABC$  與一點  $P \neq A, B, C$ ，分別在  $BC, CA, AB$  上取點  $D, E, F$  使得

$$\angle APD = \angle BPE = \angle CPF = 90^\circ,$$

則  $D, E, F$  共線，我們稱它是  $P$  關於  $\triangle ABC$  的正交截線 (Orthotransversal)。

關於正交截線的性質詳見<sup>[5]</sup>，我們會在 2.5 節討論他的推廣。所以說  $OP$  是  $T$  關於  $\triangle ABC$  的正交截線。換句話說，我們可以大致了解九點圓上的點的正交截線了。由 (2.2.12) 的證明，我們可以直接得到：

**Corollary 2.2.14.**  $HT$  為完全四線形  $\triangle ABC \cup OP$  的施坦納線 (垂心線)。 ■

我們回到內心的情形，由 1.1.16，我們可以得到以下推論：

**Corollary 2.2.15.** 令  $K$  為一條直線， $\triangle K_a K_b K_c$  為  $K$  關於  $\triangle ABC$  的反西瓦三角形，若  $M_a M_b M_c$  為  $\triangle ABC$  的中點三角形，則

$$K, K_a, K_b, K_c, M_b M_c, M_c M_a, M_a M_b$$

七線切一拋物線。 ■

證明就取其中一線為無窮遠線即可。直接套在  $K$  為  $\triangle ABC$  與  $\triangle DEF$  的透視軸就有：

**Corollary 2.2.16.** 令  $\triangle DEF$  為切點三角形， $X, Y, Z$  分別為

$$EF \cap BC, FD \cap CA, DE \cap AB,$$

則  $\triangle DEF \cup \overline{XYZ} \cup \triangle M_a M_b M_c$  共密克點且該點為  $F_e$ ，其垂心線為  $OI$ 。 ■

讓我們再回到費爾巴哈雙曲線，注意到  $X, Y$  (即  $\odot(O), \odot(I)$  的內位似中心與外位似中心) 關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點分別為  $\triangle ABC$  的熱爾岡點 (Gergonne Point)  $Ge$ 、奈格爾點 (Nagel Point)  $Na$ ，因此有：

**Proposition 2.2.17.** 上述兩點  $Ge, Na \in \mathcal{H}_{Fe}$ ，且

$$(H, I; Na, Ge)_{\mathcal{H}_{Fe}} = -1.$$

**Proposition 2.2.18.** 直線  $OI$  與  $\mathcal{H}_{Fe}$  相切。

這性質有個推廣：

**Proposition 2.2.19.** 令  $\varphi$  為  $\triangle ABC$  的點等共軛變換，且  $P$  為  $\varphi$  的不動點，那麼對於任意過  $A, B, C, P$  的 (非退化) 圓錐曲線  $\mathcal{C}$ ， $T_P \mathcal{C} = \varphi(\mathcal{C})$ 。

*Proof.* 假設  $\varphi(\mathcal{C})$  不與  $\mathcal{C}$  相切，則有另一個交點  $Q \neq P$ ，那麼

$$\varphi(Q) \in \varphi(\mathcal{C} \cap \varphi(\mathcal{C})) \subset \varphi(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C} = \{P, Q\}$$

但  $\varphi(P) = P$ ，所以  $\varphi(Q) = Q$ ，那麼我們有  $PQ$  過  $\triangle ABC$  的某個頂點，這與  $\mathcal{C}$  是非退化的矛盾。 ■

這個性質的對偶版本當然也是對的。結合兩個性質就有：

**Corollary 2.2.20.** 令  $L$  為  $H$  關於  $O$  的對稱點，即  $\triangle ABC$  的 de Longchamps Point，則  $I, Ge, L$  共線。

*Proof.* 注意到  $I, Na, G$  共線，所以有

$$I(H, O; G, L) = -1 = (H, I; Na, Ge)_{\mathcal{H}_{Fe}} = I(H, O; G, IGe \cap \mathcal{E}),$$

因此  $I, Ge, L$  共線。 ■

這個推論是第五章的梁-澤利克定理 (5.4.4) 的特例。

## 習題

**Problem 1.** 四個費爾巴哈點共圓。

**Problem 2.** 設  $X$  為  $\triangle ABC$  的  $A$ -偽內切圓與  $\odot(ABC)$  的切點， $Fe$  為  $\triangle ABC$  的費爾巴哈點。證明： $AX \perp BC$  若且唯若  $A, Fe, X$  共線。

**Problem 3.** 令  $\triangle DEF$  為切點三角形， $\triangle D_t E_t F_t$  為  $\triangle DEF$  在位似變換  $(I, t)$  下的像。證明： $AD_t, BE_t, CF_t$  共點，並且當  $t$  變動時，該點軌跡為  $\mathcal{H}_{Fe}$ 。

**Problem 4.** 給定兩點  $O_1, O_2$ ， $\Omega_1, \Omega_2$  分別為以  $O_1, O_2$  為圓心， $\overline{O_1 O_2}$  為半徑的圓。在  $\Omega_2$  外取一點  $A \in \Omega_1$ ，過  $A$  作關於  $\Omega_2$  的兩條切線  $AT_b, AT_c$  分別交  $\Omega_1$  於  $B, C$  兩點。設  $\triangle ABC$  的垂心為  $H$ ， $H$  關於  $BC$  的對稱點為  $D$ ， $OD$  交  $BC$  於  $E$ ，若  $M, F$  分別為  $\overline{BC}, \overline{AH}$  的中點，證明： $T_b T_c$  與  $\odot(DFM)$  相切。

**Problem 5.** 設三角形  $ABC$  的外接圓為  $\Gamma$ ，外心為  $O$ ， $A$ -旁心為  $I_a$ 。令  $\overline{OI_a}$  交  $\Gamma$  於  $K$ ， $K$  關於  $CA, AB$  的垂足分別為  $E, F$ 。證明： $EF$  與  $OI_a$  交於三角形  $ABC$  的  $A$ -旁切圓上。

**Problem 6.** 設三角形  $ABC$  的內心為  $I$ ，外心為  $O$ ，內切圓分別切  $BC, CA, AB$  於  $D, E, F$ ，令  $FD, DE$  分別交  $CA, AB$  於  $Y, Z$ ， $K$  為  $\triangle DYZ$  的外心，證明： $\angle AIO = \angle KID$ 。

**Problem 7** (2017 CMO). 令  $\odot(O), \odot(I)$  分別為銳角三角形  $ABC$  的外接圓與內切圓。 $B, C$  關於  $\odot(O)$  的切線交於  $L$ ， $\odot(I)$  與  $BC$  切於  $D$ 。 $Y$  為  $A$  關於  $BC$  的垂足， $AO$  與  $BC$  交於  $X$ ， $OI$  與  $\odot(O)$  交於  $P, Q$ 。證明： $P, Q, X, Y$  共圓若且唯若  $A, D, L$  共線。

**Problem 8.** 令  $\ell$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的正交截線， $\mathcal{H}$  為經過  $A, B, C, P$  的等軸雙曲線。證明： $T_P \mathcal{H} \perp \ell$ 。

## 2.3 Kiepert 雙曲線

在討論這個雙曲線之前，我們先看看下面這兩個點。另外在這章，我們都以同樣的記號表示相同的點，不再重複定義。

**Definition 2.3.1.** 給定  $\triangle ABC$ ，分別以  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$  為邊長向  $\triangle ABC$  外 (內) 側作正三角形  $\triangle A_{1(2)}BC$ ,  $\triangle B_{1(2)}CA$ ,  $\triangle C_{1(2)}AB$ ，則  $AA_{1(2)}$ ,  $BB_{1(2)}$ ,  $CC_{1(2)}$  共於一點  $F_1(F_2)$ ，稱為第一 (二) 等角點。

當  $\triangle ABC$  的內角都小於  $120^\circ$ ，第一等角點就是費馬點，這是由下面這個性質得到的。

**Proposition 2.3.2.** 我們有

$$(i) \angle BF_1C = \angle CF_1A = \angle AF_1B = 120^\circ :$$

$$(ii) \angle BF_2C = \angle CF_2A = \angle AF_2B = 60^\circ .$$

因此  $F_i \in \bigcap \odot(A_iBC)$ 。

*Proof.* 注意到  $\triangle BAB_i \stackrel{\pm}{\sim} \triangle C_iAC$ ，因此

$$\angle BF_iC = \angle(BB_i, CC_i) = \angle B_iAC = -i \cdot 60^\circ$$

而最後的命題則為顯然。 ■

**Corollary 2.3.3** (Kiepert's). 五點  $A, B, C, F_1, F_2$  共等軸雙曲線  $\mathcal{H}_K$ ，且  $\overline{F_1F_2}$  為  $\mathcal{H}_K$  的直徑。

*Proof.* 注意到  $\angle BF_1C + \angle BF_2C = 0^\circ$  及其輪換式，所以  $F_1, F_2$  為關於  $\triangle ABC$  的 antigonal conjugate，再由 (2.1.14) 知原命題成立。 ■

當然這個雙曲線就直接稱為 Kiepert 雙曲線了。在接下來的幾個性質中，我們令  $i \in \{1, 2\}$ 。

**Definition 2.3.4.** 費馬點  $F_i$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點，記作  $S_i$ ，稱為第  $i$  等力點。

**Proposition 2.3.5.** 等力點  $S_i$  關於  $\triangle ABC$  的佩多三角形為正三角形。

*Proof.* 令  $\triangle S_{ia}S_{ib}S_{ic}$  為  $S_i$  關於  $\triangle ABC$  的佩多三角形，則

$$\angle S_{ib}S_{ia}S_{ic} = \angle(\perp CF_i, \perp BF_i) = i \cdot 60^\circ$$

，同理有  $\angle S_{ic}S_{ib}S_{ia} = \angle S_{ia}S_{ic}S_{ib} = i \cdot 60^\circ$ ，因此  $\triangle S_{ia}S_{ib}S_{ic}$  為正三角形。 ■

**Proposition 2.3.6.** 等力點們  $S_1, S_2$  為  $A, B, C$ -阿波羅尼奧斯圓的兩個交點。

*Proof.* 令  $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$  分別為  $A, B, C$ -阿波羅尼奧斯圓， $\triangle S_{ia}S_{ib}S_{ic}$  為  $S_i$  關於  $\triangle ABC$  的佩多三角形，則

$$\overline{BS_i} : \overline{S_iC} = \frac{\overline{S_{ic}S_{ia}}}{\sin \angle CBA} : \frac{\overline{S_{ia}S_{ib}}}{\sin \angle ACB} = \sin \angle ACB : \sin \angle CBA = \overline{BA} : \overline{AC}$$

因此  $S_i \in \Gamma_A$ ，同理有  $S_i \in \Gamma_B, \Gamma_C$ ，故  $\{S_1, S_2\} = \bigcap \Gamma_A$ 。 ■

**Corollary 2.3.7.**  $S_1S_2 = OK$  且  $(S_1, S_2; O, K) = -1$ ，其中  $O, K$  分別為  $\triangle ABC$  的外心、共軛重心。

*Proof.* 令  $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$  分別為  $A, B, C$ -阿波羅尼奧斯圓，注意到  $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$  分別與  $\odot(ABC)$  正交，故

$$AK = p_{\Gamma_A}(O), BK = p_{\Gamma_B}(O), CK = p_{\Gamma_C}(O),$$

所以  $S_1S_2 = OK$  且  $(S_1, S_2; O, K) = -1$ 。 ■

**Corollary 2.3.8.** 兩點  $S_1, S_2$  為關於  $\odot(ABC)$  的反演點對。 ■

其中我們又稱  $OK$  為  $\triangle ABC$  的 Brocard 軸，這件事情告訴我們  $\mathcal{H}_K$  事實上為  $OK$  的等角共軛軌跡。

**Proposition 2.3.9.** 對於任意角度  $\theta$ ，分別取  $A_\theta, B_\theta, C_\theta$  滿足

$$\angle A_\theta BC = \angle BCA_\theta = \angle B_\theta CA = \angle CAB_\theta = \angle C_\theta AB = \angle ABC_\theta = \theta$$

那麼  $AA_\theta, BB_\theta, CC_\theta$  共點，且一點  $K \in \mathcal{H}_K$  若且唯若  $K = K_\theta = AA_\theta \cap BB_\theta \cap CC_\theta$  對於某個  $\theta$ 。

所以在 Kiepert 雙曲線上，我們其實可以把每個點都用一個角度  $(\theta)$  寫出來，其中  $G = K_{0^\circ}, H = K_{90^\circ}, F_1 = K_{60^\circ}, F_2 = K_{-60^\circ}$ ，而  $G, H$  分別為  $\triangle ABC$  的重心、垂心。

**Proposition 2.3.10.** 對於任意  $\theta$ ，我們有  $(K_\theta, K_{-\theta}; H, G)_{\mathcal{H}_K} = -1$ 。

*Proof.* 注意到  $A_0$  為  $\overline{BC}$  中點，所以是  $\overline{A_\theta A_{-\theta}}$  中點， $A_{90^\circ} = \infty_{\perp BC}$ ，所以

$$(K_\theta, K_{-\theta}; H, G)_{\mathcal{H}_K} \stackrel{A}{=} (A_\theta, A_{-\theta}; A_0, A_{90^\circ}) = -1 \quad \blacksquare$$

取  $\theta = 60^\circ$  會有  $F_1 H F_2 G$  為  $\mathcal{H}_K$  上的調和四邊形，此外：

**Corollary 2.3.11.**  $F_1 F_2$  平分  $\overline{GH}$ 。

*Proof.* 由於  $F_1 H F_2 G$  為  $\mathcal{H}_K$  上的調和四邊形，所以

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(GH) = T_G \mathcal{H}_K \cap T_H \mathcal{H}_K \in F_1 F_2$$

又  $F_1 F_2$  經過  $\mathcal{H}_K$  的中心，所以由 (1.1.14) 知  $F_1 F_2$  平分  $\overline{GH}$ 。  $\blacksquare$

再來的性質會用到梁-澤利克定理 (5.4.4)，是第五章的東西，可以等看完那邊再回來補這邊。以下令  $\mathcal{E}$  為  $\triangle ABC$  的歐拉線。

**Proposition 2.3.12.** 令  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2)$ ，我們有

$$t(A_\theta) = t(B_\theta) = t(C_\theta) = -\frac{1}{2 \cos 2\theta}.$$

*Proof.* 由對稱性知只需證明  $A_\theta$  的情況。令  $\triangle O_a O_b O_c$  為  $A_\theta$  關於  $\triangle ABC$  的卡諾三角形， $\triangle O_A O_B O_C$  為  $\triangle O_a O_b O_c$  關於  $A_\theta$  位似  $-2 \cos 2\theta$  下的像，那麼  $O_A$  為  $\triangle A_\theta B C$  的垂心。由  $O_A O_B \parallel O_a O_b \perp A_\theta C \perp O_A B$  知  $O_A \in B O_B$ ，同理有  $O_A \in C O_C$ ，所以  $A O_A, B O_B, C O_C$  共點於  $O_A$ ，因此

$$t(A_\theta) = -\frac{1}{2 \cos 2\theta}. \quad \blacksquare$$

令  $A_\theta^*, B_\theta^*, C_\theta^*, K_\theta^*$  分別為  $A_\theta, B_\theta, C_\theta, K_\theta$  的等角共軛點，顯然地，我們有  $A, A_\theta, K_\theta, A, B_\theta, C_\theta^*, A, B_\theta^*, C_\theta$  及  $A, A_\theta^*, K_\theta^*$  以及輪換的共 12 組共線，所以有：



**Theorem 2.3.13.** 同 (2.3.9) 中的標號，我們有

$$t(K_\theta) = -\frac{1}{2 \cos 2\theta}$$

*Proof.* 令  $t_0 = -(2 \cos 2\theta)^{-1}$ ,  $T \in \mathcal{E}$  滿足  $t(T) = t_0$ , 那麼我們有  $T \in B_\theta B_\theta^* \cap C_\theta C_\theta^*$ , 注意到  $\triangle BB_\theta^* C_\theta$  與  $\triangle CC_\theta^* B_\theta$  的透視軸為  $AA_\theta^* K_\theta^*$ , 所以由迪沙格定理知  $BC, B_\theta C_\theta, B_\theta^* C_\theta^*$  共點。因為  $B = K_\theta B_\theta \cap K_\theta^* B_\theta^*$ ,  $C = C_\theta K_\theta \cap C_\theta^* K_\theta^*$ , 所以由迪沙格定理及  $B_\theta C_\theta, B_\theta^* C_\theta^* \in BC$  知  $\triangle K_\theta B_\theta C_\theta$  與  $\triangle K_\theta^* B_\theta^* C_\theta^*$  透視, 即  $T \in K_\theta K_\theta^*$ , 因此

$$t(K_\theta) = -\frac{1}{2 \cos 2\theta} \quad \blacksquare$$

特別地,  $t(F_i) = 1$ 。

**Proposition 2.3.14.** 對於任意角度  $\alpha, \beta, \gamma$ ,  $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma^*$  共線若且唯若

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

*Proof.* 令  $AK_\alpha^*$  交  $\mathcal{H}_K$  於  $K_{\alpha_A}$ , 那麼  $\alpha_A + \alpha = \angle BAC$ 。同 (2.3.13) 的證明可得  $K_\alpha K_{\alpha_A} \cap K_\alpha^* K_{\alpha_A}^* = K_\alpha K_{\alpha_A} \cap OK \in BC$ 。我們類似定義  $\alpha_B, \alpha_C$ , 同樣有  $K_\alpha K_{\alpha_B} \cap OK \in CA, K_\alpha K_{\alpha_C} \cap OK \in AB$ , 令  $OK$  分別與  $BC, CA, AB$  交於  $D, E, F$ ,  $K_{\gamma'}^* = K_\alpha K_\beta \cap OK$ , 那麼

$$\begin{aligned} (D, E; F, K_{\gamma'}^*) &\stackrel{K_\alpha}{=} (K_{\alpha_A}, K_{\alpha_B}; K_{\alpha_C}, K_\beta) = (A_{\alpha_A}, A_{\alpha_B}; A_{\alpha_C}, A_\beta) \\ &= (A_{-\angle BAC}, A_{-\angle CBA}; A_{-\angle ACB}, A_{-\alpha-\beta}) = (D, E; F, K_{-\alpha-\beta}^*) \end{aligned}$$

所以  $\alpha + \beta + \gamma' = 0$ , 故  $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma^*$  共線若且唯若  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ 。  $\blacksquare$

**Corollary 2.3.15.**  $K_\theta K_{-2\theta}^*$  與  $\mathcal{H}_K$  相切。

*Proof.* 取  $\alpha = \beta = \theta, \gamma = -2\theta$ 。  $\blacksquare$

**Corollary 2.3.16.** 給定  $\theta$ ,  $K_{-2\theta}^* = \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(K_\theta K_{\theta+90^\circ})$ 。特別地,  $K$  為  $GH$  關於  $\mathcal{H}_K$  的極點。

換句話說, 我們可以知道  $OK$  上一點關於  $\mathcal{H}_K$  的極線。結合這些上面性質我們就可以證明下面這個定理了。

**Theorem 2.3.17** (Kiepert 雙曲線基本性質). 令  $N$  為  $\triangle ABC$  的九點圓圓心， $T_\theta = \mathcal{E} \cap K_\theta K_\theta^*$ ,  $P_\theta := K_\theta K_{-2\theta}^* \cap K_{-\theta} K_{2\theta}^*$ ，對於任意  $\theta$ ，我們有：

- (i)  $G = K_\theta K_{-\theta}^* \cap K_\theta^* K_{-\theta}$ ,
- (ii)  $K = K_\theta K_{-\theta} \cap K_\theta^* K_{-\theta}^*$ ,
- (iii)  $N \in K_\theta K_{\theta+90^\circ}$ ,
- (iv)  $T_\theta = K_\theta K_\theta^* \cap K_{-\theta} K_{-\theta}^*$ ,
- (v)  $P_\theta \in \mathcal{E}$ .

*Proof.* 我們依序證明命題 (i), (ii), (iii), (iv), (v)。

- (i) 在 (2.3.14) 中取  $\alpha = 0, \beta = \pm\theta$ ，那麼  $G \in K_\theta K_{-\theta}^* \cap K_\theta^* K_{-\theta}$ 。
- (ii) 在 (2.3.14) 中取  $\alpha = \pm\theta, \beta = \mp\theta$ ，那麼  $K \in K_\theta K_{-\theta} \cap K_\theta^* K_{-\theta}^*$ 。
- (iii) 因為  $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(K_\theta K_{\theta+90^\circ}) = K_{2\theta} \in OK$ ，所以  $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(OK) \in K_\theta K_{\theta+90^\circ}$ 。取  $\theta = 0$ ，我們有  $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(OK) \in \mathcal{E}$ ，而  $O \in \mathcal{E}$ ，所以

$$(G, H; O, \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(OK)) = -1$$

故  $N = \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(OK)$ 。

- (iv) 注意到

$$t(K_\theta) = -\frac{1}{2 \cos(2\theta)} = -\frac{1}{2 \cos(-2\theta)} = t(K_{-\theta})$$

所以  $T_\theta = \mathcal{E} \cap K_\theta K_\theta^* \in K_{-\theta} K_{-\theta}^*$ 。

- (v) 因為  $K_{\pm\theta} K_{\mp 2\theta}^* = T_{K_{\pm\theta}} \mathcal{H}_K$ ，且  $K_\theta H K_{-\theta} G$  為  $\mathcal{H}_K$  上的調和四邊形，所以  $P_\theta = \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(K_\theta K_{-\theta}) \in GH$ 。■

**Example 2.3.18** (等角等力基本性質). 取  $\theta = \pm 60^\circ$ ，結合前面的性質，我們有：

- (i)  $G = F_1 S_2 \cap F_2 S_1, K = F_1 F_2 \cap S_1 S_2, F_1 S_1 \parallel F_2 S_2 \parallel \mathcal{E}$
- (ii)  $F_1, F_2, O, N$  共圓 (Lester 圓)

(iii)  $GK$  為  $\triangle GF_1F_2$  的共軛中線

還可以得到直線  $F_iS_i$  與  $\mathcal{H}_K$  相切。

**Example 2.3.19.** 除了等力點與等角點外， $\mathcal{H}_K$  上重要的還有維田點 ( $V_1 = K_{45^\circ}$ ,  $V_2 = K_{-45^\circ}$ )，它甚至有出現在 ISL 裡面。我們有：

(i)  $O$  是  $V_1V_2$  關於  $\mathcal{H}_K$  的極點

(ii)  $V_1V_2 = NK$

(iii)  $H = V_1V_1^* \cap V_2V_2^*$

注意到  $[T_\theta \mapsto P_\theta] \in \text{Aut}(\mathcal{E})$ ，所以他的位置其實是可以算的 (?)，事實上我們有：

**Proposition 2.3.20.** 對於任意  $\theta$ ，

$$T_\theta G = 2 \cdot GP_\theta,$$

故

$$OP_\theta = 2 \cos 2\theta \cdot P_\theta N. \quad \blacksquare$$

如果定義  $Q_\theta = K_\theta K_{-\theta} \cap \mathcal{E}$ ，那麼同樣有  $[P_\theta \mapsto Q_\theta] \in \text{Aut}(\mathcal{E})$ ，所以：

**Proposition 2.3.21.** 對於任意  $\theta$ ，

$$3 \cdot NQ_\theta = 2 \cos 2\theta \cdot Q_\theta O. \quad \blacksquare$$

## 習題

**Problem 1** (Tau(?)). 在  $A, B, C, F_1, F_2$  五個點中任取三點，則該三點所形成的三角形的歐拉線過  $G$ 。

**Problem 2.** 令  $O_A, O_B, O_C$  分別為  $\triangle S_iBC, \triangle AS_iC, \triangle ABS_i$  的外心。證明： $AO_A, BO_B, CO_C$  共點於  $OK$  上。

**Problem 3.** 令  $N$  為  $\triangle ABC$  的九點圓圓心， $I_a, I_b, I_c$  為  $\triangle ABC$  的三個旁心。證明： $N$  及  $\overline{F_1S_1}, \overline{F_2S_2}$  的中點們位在另一個  $\triangle I_aI_bI_c$  的外接等軸雙曲線上。

**Problem 4.** 令  $\triangle H_aH_bH_c, \triangle M_aM_bM_c$  分別為  $\triangle ABC$  的垂足三角形及中點三角形。證明：對於任意一點  $P$ ， $P$  關於  $\triangle H_aH_bH_c$  的等角共軛點位於  $P$  關於  $\triangle M_aM_bM_c$  的等角共軛點與等截共軛點的連線上。

**Problem 5.** 令  $K_\theta$  為  $\triangle ABC$  的 Kiepert 雙曲線上一點 (對應的角度是  $\theta$ )， $\triangle XYZ$  為  $P$  關於  $P$  關於  $\triangle ABC$  的佩多三角形的圓西瓦三角形，那麼  $K_\theta$  位於  $\triangle XYZ$  的 Kiepert 雙曲線上，而且  $K_\theta$  這時候對應的角度是  $-\theta$ 。

## 2.4 Jerabek 雙曲線

我們都知道，如果給定  $\triangle ABC$  與一個點  $P$  我們可以定義一些  $P$  關於  $\triangle ABC$  的點、線、圓等等的曲線，我們之前已經定義過正交截線了，這邊再定義一個稍微比較有關聯的：

**Definition 2.4.1.** 給定  $\triangle ABC$  與一點  $P$ ，令  $\triangle DEF$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的西瓦三角形，設  $X = BC \cap EF, Y = CA \cap FD, Z = AB \cap DE$ ，則  $X, Y, Z$  共線，我們稱它是  $P$  關於  $\triangle ABC$  的三線性極線 (Trilinear Polar)。

**Example 2.4.2.**  $\triangle ABC$  的重心  $G$  關於  $\triangle ABC$  的三線性極線是無窮遠線  $\mathcal{L}_\infty$ 。

先來看看它有什麼性質吧。

**Proposition 2.4.3.** 給定  $\triangle ABC$  與一點  $P$ ，令  $\mathcal{O}_P, \mathcal{T}_P$  分別為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的正交截線與三線性極線， $\mathcal{S}_P$  則為  $P$  關於  $P$  關於  $\triangle ABC$  的佩多圓  $\omega_P$  的極線 (即  $\mathbf{p}_{\omega_P}(P)$ )，那麼  $\mathcal{O}_P, \mathcal{T}_P, \mathcal{S}_P$  共點。

*Proof.* 令  $\Omega$  為以  $P$  為圓心的任意圓，定義  $A^* = \mathbf{p}_\Omega(BC)$ ，類似定義  $B^*, C^*$ 。那麼由定義， $\mathbf{p}_\Omega(\mathcal{O}_P)$  為  $\triangle A^*B^*C^*$  的垂心， $\mathbf{p}_\Omega(\mathcal{T}_P)$  為  $\triangle A^*B^*C^*$  的重心。注意到  $\omega, \Omega, \odot(A^*B^*C^*)$  共軸，令  $O^*$  為  $\triangle A^*B^*C^*$  的外心，考慮  $OP$  分別與  $\omega, \Omega, \odot(A^*B^*C^*)$  的交點，並注意到反演保調和，所以  $\mathbf{p}_\Omega(\mathcal{S}_P)$  為  $\triangle A^*B^*C^*$  的外心。

由  $\mathbf{p}_\Omega(\mathcal{O}_P)$ ,  $\mathbf{p}_\Omega(\mathcal{T}_P)$ ,  $\mathbf{p}_\Omega(\mathcal{S}_P)$  共線知  $\mathcal{O}_P, \mathcal{T}_P, \mathcal{S}_P$  共點。 ■

當  $P$  位於  $\odot(ABC)$  上時,  $\mathcal{S}_P$  變為  $\triangle ABC$  的施坦納線, 這時有:

**Proposition 2.4.4.** 給定  $\triangle ABC$  與  $\odot(ABC)$  上一點  $P$ , 那麼  $P$  關於  $\triangle ABC$  的正交截線、三線性極線及施坦納線共點。

對以  $P$  為圓心的圓配極, 我們還會有一些很美好的性質:

**Proposition 2.4.5.** 給定  $\triangle ABC$  與  $\odot(ABC)$  上一點  $P$ ,  $\Omega$  是以  $P$  為圓心的圓, 令  $A^* = \mathbf{p}_\Omega(BC)$ , 類似定義  $B^*, C^*$ 。那麼

- (i)  $\triangle A^*B^*C^* \sim \triangle ABC$  且  $P \in \odot(A^*B^*C^*)$ 。
- (ii) 若  $(Q, R)$  為關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點對, 取  $Q^*$  使得  $\triangle A^*B^*C^* \cup Q^* \sim \triangle ABC \cup Q$ , 則  $Q^* \in \mathbf{p}_\Omega(R)$ 。

*Proof.* (i) 由簡單的角度計算可輕易得到。關於 (ii), 我們考慮一個對稱變換與相似變換的合成  $\varphi$  使得  $\varphi(A^*) = A, \varphi(B^*) = B, \varphi(C^*) = C$ 。令  $\mathcal{C}$  為以  $P$  為中心的等角共軛變換的對角圓錐曲線 (注意到  $P \in \odot(ABC)$ ),  $\Phi := \mathbf{p}_\mathcal{C} \circ \varphi \circ \mathbf{p}_\Omega$  為一個將點送至點的變換, 則  $A, B, C, P$  是  $\Phi$  的不動點, 並且  $\Phi$  是一個雙射的保共線變換。因此由 (1.2.9) 可得  $\Phi = \text{id}$ , 故

$$\varphi(\mathbf{p}_\Omega(R)) = \mathbf{p}_\mathcal{C}(R)$$

由等角共軛變換的性質知  $Q \in \mathbf{p}_\mathcal{C}(R)$ , 所以  $Q^* \in \varphi^{-1}(\mathbf{p}_\mathcal{C}(R)) = \mathbf{p}_\Omega(R)$ 。 ■

那麼由 (2.4.3) 的證明可以得到:

**Corollary 2.4.6.** 給定  $\triangle ABC$  與  $\odot(ABC)$  上一點  $P$ , 那麼  $P$  關於  $\triangle ABC$  的正交截線、三線性極線及施坦納線分別經過  $\triangle ABC$  的外心、共軛重心及垂心。

我們考慮所有這些共點的軌跡, 就有:

**Proposition 2.4.7.** 給定  $\triangle ABC$  與  $\odot(ABC)$  上一點  $P$ , 那麼  $P$  關於  $\triangle ABC$  的正交截線、三線性極線及施坦納線共的點  $Q$  所形成的軌跡是一個等軸雙曲線。更進一步地,  $PQ$  經過  $\odot(ABC)$  上的定點。

*Proof.* 令  $\triangle ABC$  的外心及垂心分別為  $O, H$ ，對於任意一點  $P \in \odot(ABC)$ ，在  $BC$  上取  $D$  使得  $\angle APD = 90^\circ$ ， $A, P$  關於  $BC$  的對稱點分別為  $A', P'$ ，那麼

$$O(A, B; C, D) = (AO \cap BC, B; C, D) = (A, B; C, P) = H(A', B; C, P')$$

所以  $Q = OD \cap HP' \in \mathcal{H}$ ，其中  $\mathcal{H}$  為經過  $A, B, C, O, H$  的圓錐曲線。令  $H^*$  為  $\mathcal{H}$  與  $\odot(ABC)$  異於  $A, B, C$  的交點，則

$$H^*(A, B; C, P) = H(A', B, C, P') = H(A, B, C, Q) = H^*(A', B, C, Q)$$

所以  $H^* \in PQ$ 。 ■

**Definition 2.4.8.** 我們稱 (2.4.7) 中的等軸雙曲線為  $\triangle ABC$  的 Jerabek 雙曲線。

我們馬上可以得到下面這個性質：

**Proposition 2.4.9.** 令  $\mathcal{H}_J$  為  $\triangle ABC$  的 Jerabek 雙曲線，那麼  $\mathcal{H}_J$  在等角共軛變換下的像為歐拉線。 ■

**Example 2.4.10.** 垂心  $H$  關於  $\triangle ABC$  的等截共軛點  $H' \in \mathcal{H}_J$ 。

## 習題

**Problem 1.** 給定  $\triangle ABC$  與一點  $P$ ，令  $\mathcal{O}_P, \mathcal{T}_P$  分別為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的正交截線與三線性極線， $\triangle Q_a Q_b Q_c$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點  $Q$  關於  $\triangle ABC$  的佩多三角形。若  $H', G'$  分別為  $\triangle Q_a Q_b Q_c$  的垂心、重心。證明：

(i)  $QH' \perp \mathcal{O}_P$ ,

(ii)  $QG' \perp \mathcal{T}_P$ .

**Problem 2.** 令  $P$  位於  $\triangle ABC$  的歐拉線上， $H$  為  $\triangle ABC$  的垂心，若  $Q$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點，證明： $HQ$  與經過  $A, B, C, H, P$  的圓錐曲線相切。

**Problem 3.** 令  $N$  為  $\triangle ABC$  的九點圓圓心， $K_o$  為  $N$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點 (Kosnita Point)。證明： $NK_o$  過  $\triangle ABC$  的歐拉線關於  $\triangle ABC$  的反施坦納點 (Euler Reflection Point)。

## 2.5 正交共軛點

**Proposition 2.5.1.** 給定  $\triangle ABC$ ，一點  $P \notin \{A, B, C\}$  與三角  $\alpha, \beta, \gamma$ ，滿足

$$(\alpha, \beta, \gamma) \neq (\angle(BC, AP), \angle(CA, BP), \angle(AB, CP)),$$

則存在一  $\triangle ABC$  的外接圓錐曲線  $\mathcal{C}_{P, \alpha, \beta, \gamma}^\sharp$  使得以下命題成立：

對於任意一點  $Q \notin \mathcal{L}_\infty$ ，分別在  $BC, CA, AB$  上取  $D, E, F$  使得

$$\angle(QD, AP) = \alpha, \angle(QE, BP) = \beta, \angle(QF, CP) = \gamma,$$

則  $Q \in \mathcal{C}_{P, \alpha, \beta, \gamma}^\sharp$  若且唯若  $D, E, F$  共於一線  $L$ 。

*Proof.* 取  $\triangle XYZ$  使得  $P$  為  $\triangle ABC$  關於  $\triangle XYZ$  的密克點且

$$\angle(YZ, AP) = \alpha, \angle(ZX, BP) = \beta, \angle(XY, CP) = \gamma.$$

取點  $U$  使得  $BXCU$  是平行四邊形。類似地定義  $V, W$ 。注意到

$$BW \cap CV, CU \cap AW, AV \cap BU \in \mathcal{L}_\infty.$$

由帕斯卡逆定理， $A, B, C, U, V, W$  共圓錐曲線。

**Claim.** 過  $A, B, C, U, V, W$  的圓錐曲線  $\mathcal{C}_{P, \alpha, \beta, \gamma}^\sharp$  滿足條件。

*Proof of Claim.* 令  $Q \in \mathcal{C}_{P, \alpha, \beta, \gamma}^\sharp$ ，分別在  $BC, CA, AB$  上取  $D, E, F$  使得

$$\angle(QD, AP) = \alpha, \angle(QE, BP) = \beta, \angle(QF, CP) = \gamma,$$

則  $QD \parallel YZ, QE \parallel ZX, QF \parallel XY$ 。在  $\mathcal{C}_{P, \alpha, \beta, \gamma}^\sharp$  上取  $D'$  使得  $Q, D, D'$  共線，類似地定義  $E', F'$ 。由帕斯卡定理 (0.4.1)， $E, F, BE' \cap CF'$  共線，類似地有另外兩共線，所以我們只需證明  $AD', BE', CF'$  共點。我們知道當  $Q = U, V, W$  時此命題  $\mathcal{P}$  成立（都共點於  $\mathcal{L}_\infty$ ），由於  $Q \mapsto D', E', F'$  是保交比變換 (1.3.13)， $\mathcal{P}$  是圓錐曲線  $\mathcal{C}_{P, \alpha, \beta, \gamma}^\sharp$  上的射影命題，故對於任意  $Q \in \mathcal{C}_{P, \alpha, \beta, \gamma}^\sharp$ ， $\mathcal{P}$  成立。

假設  $Q \notin \mathcal{C}_{P, \alpha, \beta, \gamma}^\sharp$ ，但  $D, E, F$  共線。對於任意一過  $Q$  的弦  $\overline{RS}$ ，其中  $R, S \in \mathcal{C}_{P, \alpha, \beta, \gamma}^\sharp$ ，我們有  $D, E, F, D_R, E_R, F_R, D_S, E_S, F_S$  分別共線。因此對於任意  $T \in RS$ ， $D_T, E_T, F_T$  共線。由於  $\overline{RS}$  是任意的，對於所有  $T$ ， $D_T, E_T, F_T$  共線，但這在  $A$  附近是錯的（當  $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (\angle(BC, AP), \angle(CA, BP), \angle(AB, CP))$  時， $D_T$  在一個小範圍內， $E_T F_T$  的斜率為任意）。 ■

**Definition 2.5.2.** 給定  $\triangle ABC$ ，一點  $P$  與三角  $\alpha, \beta, \gamma$  滿足 (2.5.1) 的條件。

- (i) 我們稱上述性質所定義的圓錐曲線  $C_{P,\alpha,\beta,\gamma}^\sharp$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的  $\alpha, \beta, \gamma$ -共軛圓錐曲線。
- (ii) 若  $Q \in C_{P,\alpha,\beta,\gamma}^\sharp$ ，我們稱上述性質所定義的直線  $L$ ，記為  $\mathcal{T}_Q(\triangle ABC, P, \alpha, \beta, \gamma)$ ，為  $Q$  關於  $\triangle ABC$  的  $(P, \alpha, \beta, \gamma)$ -截線。
- (iii) 若  $\alpha = \beta = \gamma$ ，我們簡記  $C_{P,\alpha,\alpha,\alpha}^\sharp$  為  $C_{P,\alpha}^\sharp$ ，為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的  $\alpha$ -共軛圓錐曲線。
- (iv) 當  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$  時，記  $\mathcal{T}_Q(\triangle ABC, P, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ)$  為  $\mathcal{O}_Q(\triangle ABC, P)$ ，為  $Q$  關於  $\triangle ABC$  的  $P$ -正交截線。
- (v) 當  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$  且  $P = Q$  時，記  $\mathcal{O}_P(\triangle ABC, P)$  為  $\mathcal{O}(\triangle ABC, P)$ ，為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的正交截線。

除此之外，我們還有反共軛曲線：

**Definition 2.5.3.** 給定  $\triangle ABC$ ，一點  $Q$  與三角  $\alpha, \beta, \gamma$ ，我們定義

$$C_{Q,\alpha,\beta,\gamma}^\flat := \{P \mid Q \in C_{P,\alpha,\beta,\gamma}^\sharp\}$$

為  $Q$  關於  $\triangle ABC$  的  $\alpha, \beta, \gamma$ -反共軛曲線。

但反共軛曲線不見得是圓錐曲線，不過我們還是有：

**Proposition 2.5.4.** 給定  $\triangle ABC$ ，一點  $Q \notin \{A, B, C\}$  與一角  $\alpha$ ，其中  $(Q, \alpha) \neq (H, 90^\circ)$ ， $H$  為  $\triangle ABC$  的垂心，則

$$C_{Q,\alpha}^\flat = C_{Q,\alpha,\alpha,\alpha}^\flat = C_{Q,-\alpha}^\sharp.$$

*Proof.* 取點  $U$  使得  $BQCU$  是平行四邊形。類似地定義  $V, W$ 。取點  $X$  使得

$$\angle UBX = \angle UCX = \alpha.$$

類似地定義  $Y, Z$ 。由  $C_{Q,-\alpha}^\sharp$  的構造， $A, B, C, X, Y, Z$  共於  $C_{Q,-\alpha}^\sharp$ 。

**Claim.** 過  $A, B, C, X, Y, Z$  的圓錐曲線  $C_{Q,\alpha}^\flat = C_{Q,-\alpha}^\sharp$  滿足條件。



*Proof of Claim.* 令  $P \in \mathcal{C}_{Q,\alpha}^b$ ，我們希望證明  $Q \in \mathcal{C}_{P,\alpha}^\sharp$ 。我們回憶一下  $\mathcal{C}_{P,\alpha}^\sharp$  的構造，取  $\triangle X'Y'Z'$  使得  $P$  為  $\triangle ABC$  關於  $\triangle X'Y'Z'$  的密克點且

$$\angle(Y'Z', AP) = \angle(Z'X', BP) = \angle(X'Y', CP) = \alpha.$$

取點  $U'$  使得  $BX'CU'$  是平行四邊形。類似地定義  $V', W'$ ，則  $\mathcal{C}_{P,\alpha}^\sharp$  是通過  $A, B, C, U', V', W'$  的圓錐曲線。注意到  $[BP \mapsto BX']$ ,  $[CP \mapsto CX']$  是保交比變換，所以  $X'$  在定圓錐曲線上移動，因此  $U'$  也在定圓錐曲線  $\mathcal{C}_U$  上移動。類似地定義  $\mathcal{C}_V, \mathcal{C}_W$ 。當  $P = X$  時， $U' = Q$ ，所以  $Q \in \mathcal{C}_U$ ，同理， $Q \in \mathcal{C}_V, Q \in \mathcal{C}_W$ 。由帕斯卡定理， $Q \in \mathcal{C}_{P,\alpha}^\sharp$  若且唯若

$$BW' \cap CV', CQ \cap AW', AV' \cap BQ$$

共線。我們知道當  $P = X, Y, Z$  時此命題  $\mathscr{P}$  成立。注意到  $BW' \cap CV' \in \mathcal{L}_\infty$ ，

$$[P \mapsto (CQ \cap AW')(AV' \cap BQ)]$$

是一個從  $\mathcal{C}_{Q,\alpha}^b$  至某個與  $BQ, CQ$  相切的圓錐曲線  $\mathcal{C}'$  的所有切線的保交比變換，取  $P = X$  可得  $\mathcal{C}'$  與  $\mathcal{L}_\infty$  相切，故對於任意  $P \in \mathcal{C}_{Q,\alpha}^b$ ， $\mathscr{P}$  成立。

假設  $P \notin \mathcal{C}_{Q,\alpha}^b$ ，但  $Q \in \mathcal{C}_{P,\alpha}^\sharp$ 。對於任意一過  $P$  的弦  $\overline{RS}$ ，其中  $R, S \in \mathcal{C}_{Q,\alpha}^b$ ，我們有  $Q \in \mathcal{C}_{P,\alpha}^\sharp \cap \mathcal{C}_{R,\alpha}^\sharp \cap \mathcal{C}_{S,\alpha}^\sharp$ 。因此對於任意  $T \in RS$ ， $Q \in \mathcal{C}_{T,\alpha}^\sharp$ 。由於  $\overline{RS}$  是任意的，對於所有  $T$ ， $Q \in \mathcal{C}_{T,\alpha}^\sharp$ 。分別取  $T \in BC, CA, AB$ ，我們可以得到

$$\angle(BC, AQ) = \angle(CA, BQ) = \angle(AB, CQ) = \alpha$$

但這只會在  $(Q, \alpha) = (H, 90^\circ)$  時發生。 ■

**Remark.** 從證明中可以看出，如果取  $X, Y, Z$  滿足

$$\angle VAY = \angle WAZ = \alpha, \angle WBZ = \angle UBX = \beta, \angle UCX = \angle VCY = \gamma,$$

且  $A, B, C, X, Y, Z$  共圓錐曲線 (等價於

$$BZ \cap CY, CX \cap AZ, AY \cap BX$$

共線)，則  $\mathcal{C}_{Q,\alpha,\beta,\gamma}^b$  也為圓錐曲線。但這時候我們並沒有與  $\mathcal{C}^\sharp$  之間的關係。

對於  $\mathcal{C}^\sharp$  及  $\mathcal{C}^b$  我們有如下的刻畫：

**Proposition 2.5.5.** 對於任意一點  $P \notin \{A, B, C, H\}$ ,

- (i) 對於任意一角  $\alpha$ ,  $\mathcal{C}_{P,\alpha}^\sharp = \mathcal{C}_{P,-\alpha}^\flat$ 。
- (ii) 若  $P^*$  是  $P$  關於  $\triangle ABC$  的 antigonal conjugate, 則

$$\{A, B, C, P^*\} = \left( \bigcap_{\alpha} \mathcal{C}_{P,\alpha}^\sharp \right) \cap \left( \bigcap_{\alpha} \mathcal{C}_{P,\alpha}^\flat \right).$$

- (iii)  $[\alpha \mapsto \mathcal{C}_{P,\alpha}^\sharp]$  是一個從所有的角度  $S^1/\{\pm 1\}$  至所有通過  $A, B, C, P^*$  的圓錐曲線集  $\mathcal{S}$  的保交比變換。

*Proof.* 對於 (ii) 和 (iii), 同 (2.5.1) 中  $\mathcal{C}_{P,\alpha}^\sharp$  的構造, 我們有以下的保交比變換

$$\alpha \leftrightarrow X \in \odot(BPC) \leftrightarrow Y \in \odot(CPA) \leftrightarrow Z \in \odot(APB)$$

對於任意  $\alpha$ ,  $P^* \in \mathcal{C}_{P,\alpha}^\sharp$  若且唯若

$$BW \cap CV, CP^* \cap AW, AV \cap BP^*$$

共線。當  $\alpha = \angle(BP^*, CP)$  時, 此命題  $\mathcal{S}$  成立 (三點都位於  $\mathcal{L}_\infty$  上)。由對稱性, 當  $\alpha = \angle(CP^*, AP), \angle(AP^*, BP)$  時,  $P^* \in \mathcal{C}_{P,\alpha}^\sharp$ , 因此此時  $\mathcal{S}$  也成立。注意到  $BW \cap CV \in \mathcal{L}_\infty$ ,

$$[\alpha \mapsto (CP^* \cap AW)(AV \cap BP^*)]$$

是一個從所有角度  $S^1/\{\pm 1\}$  至某個與  $BP^*, CP^*$  相切的拋物線  $\mathcal{P}$  (由  $\alpha = \angle(BP^*, CP)$ ) 的所有切線的保交比變換, 故對於任意角  $\alpha$ ,  $\mathcal{S}$  成立。這證明了 (ii) 和 (iii)。■

意外地得到了 Riem 的推廣：

**Corollary 2.5.6.** 令兩圓  $\Omega_1, \Omega_2$  交於  $A, B$ ,  $X_i, Y_i \in \Omega_i$ , 則  $A, B, X_1, Y_1, X_2, Y_2$  共圓錐曲線若且唯若  $X_1Y_1 \parallel X_2Y_2$ 。

**Proposition 2.5.7.** 給定  $\triangle ABC$  與一點  $P \notin \{A, B, C, H\}$ 。若  $P^*$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的 antigonal conjugate,  $Q^*$  為  $P^*$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點, 則以  $P^*, Q^*$  為焦點且與  $\triangle ABC$  相切圓錐曲線是  $\mathcal{T}_{P^*}(\triangle ABC, P, \alpha)$  的包絡線。

*Proof.* 令  $E, F$  分別為  $\mathcal{T}_{P^*}(\triangle ABC, P, \alpha)$  與  $CA, AB$  的交點，則

$$\angle EP^*F = \angle(P^*E, BP) + \angle BPC + \angle(CP, P^*F) = \angle CP^*B$$

所以存在  $P^*$  關於  $(BC, CE, EF, FA)$  的等角共軛點 (1.5.12)，因此以  $P^*, Q^*$  為焦點且與  $\triangle ABC$  相切圓錐曲線與  $EF$  相切。 ■

事實上，也可以透過這個證明來得到 (2.5.5) 的 (ii)。我們來看  $\mathcal{C}^\sharp$  與  $\mathcal{C}^\flat$  在特殊點或特殊角的時候有什麼性質。

(1)  $\alpha = 0^\circ$  :

**Proposition 2.5.8.** 對於任意一點  $P$ ， $\mathcal{C}_{P,0}^\sharp = \mathcal{C}_{P,0}^\flat$  是  $P$  關於  $\triangle ABC$  的九點圓錐曲線  $\mathcal{C}$  (0.4.7) 關於  $P$  位似 2 倍下的像。特別地，若  $\triangle P_AP_BP_C$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的西瓦三角形， $\triangle P'_AP'_BP'_C$  為  $\triangle P_AP_BP_C$  關於  $P$  位似 2 倍下的像，則  $P'_A, P'_B, P'_C \in \mathcal{C}_{P,0}^\sharp = \mathcal{C}_{P,0}^\flat$ 。

(2)  $P = H$  :

**Proposition 2.5.9.** 給定  $\triangle ABC$  及一角  $\alpha \neq 90^\circ$ ，令  $H$  為  $\triangle ABC$  的垂心，則  $\mathcal{C}_{H,\alpha}^\sharp = \odot(ABC)$ 。

**Corollary 2.5.10** (西姆松定理/Simson's). 給定  $\triangle ABC$ ，對於任意一點  $P$ ， $P \in \odot(ABC)$  若且唯若  $P$  關於  $\triangle ABC$  三邊的垂足共線，稱為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的西姆松線。

這些當然都只是簡單的算角度。

(3)  $\alpha = 90^\circ$  : 由等軸雙曲線的性質 (2.1.4) 與  $\mathcal{C}_{P,90^\circ}^\sharp$  的構造，我們可以得到：

**Proposition 2.5.11.** 對於任意一點  $P$ ， $\mathcal{C}_{P,90^\circ}^\sharp = \mathcal{C}_{P,90^\circ}^\flat$  是通過  $P$  的等軸雙曲線且對於任意  $Q \in \mathcal{C}_{P,90^\circ}^\sharp = \mathcal{C}_{P,90^\circ}^\flat$ ， $PQ \perp \mathcal{O}_Q(\triangle ABC, P)$ 。

*Proof.* 同 (2.5.1) 證明中的標號，我們有  $U, V, W$  分別為  $\triangle PBC, \triangle PCA, \triangle PAB$  的垂心，因此通過  $P$  的等軸雙曲線  $\mathcal{H}_P$  也通過  $U, V, W$ ，故  $\mathcal{C}_{P,90^\circ}^\sharp = \mathcal{H}_P$ 。這同時也得到  $\mathcal{C}_{P,90^\circ}^\flat = \mathcal{H}_P$ 。

令  $Q \in \mathcal{C}_{P,90^\circ}^\sharp$ ,  $H_B, H_C$  分別為  $\triangle BPQ, \triangle CPQ$  的垂心。由帕斯卡定理 (0.4.1),

$$H_BQ \cap CA, H_CQ \cap AB, BH_B \cap CH_C$$

共線, 又  $BH_B \parallel CH_C \perp PQ$ , 我們有  $\mathcal{O}_Q(\triangle ABC, P) = EF \perp PQ$ 。 ■

**Corollary 2.5.12.** 一點  $P$  關於  $\triangle ABC$  的正交截線垂直於  $P$  關於等軸雙曲線  $(ABCHP)$  的切線, 其中  $H$  是  $\triangle ABC$  的垂心。

在有了以上設定之後, 我們來看看正交共軛點, 它是等共軛變換的另一個例子。這是個好例子, 因為他不一定有不動點。

**Definition 2.5.13.** 給定  $\triangle ABC$  與一點  $P$ , 我們定義其正交共軛點  $P^\circ$  為  $\mathcal{O}_H(\triangle ABC, P)$  關於  $\triangle ABC$  的三線性極點, 其中  $H$  是  $\triangle ABC$  的垂心。

由於  $H$  會在  $\mathcal{C}_{P,90^\circ}^\sharp$  上 (2.5.11), 所以這個定義是好的。由 (2.5.11), 我們可以輕易得到:

**Proposition 2.5.14.** 對於任意一點  $P$ ,  $HP$  垂直  $P^\circ$  的三線性極線。 ■

**Proposition 2.5.15.** 變換  $P \mapsto P^\circ$  是以垂心  $H$  為極點的等共軛變換。

*Proof.* 由 (1.4.8) 及極點的定義, 我們需要證明  $P \mapsto P^\circ$  滿足:

- (i)  $H^\circ = G$ , 其中  $G$  是  $\triangle ABC$  的重心。
- (ii)  $P \notin BC \cup CA \cup AB \implies P^\circ \notin BC \cup CA \cup AB$ ,
- (iii) 對於所有頂點  $X \in \{A, B, C\}$ ,

$$X, P_1, P_2 \text{ 共線} \implies X, P_1^\circ, P_2^\circ \text{ 共線},$$

- (iv) 對於所有頂點  $X \in \{A, B, C\}$ ,  $[XP \mapsto XP^\circ]$  是一對合變換,

(i):  $\mathcal{O}_H(\triangle ABC, H) = \mathcal{L}_\infty$ , 而  $\mathcal{L}_\infty$  的三線性極點為  $G$ 。

(ii): 若  $P^\circ \in BC \cup CA \cup AB$ , 不妨假設  $P^\circ \in BC$ , 則  $P^\circ$  的三線性極線  $\mathcal{T}$  為  $BC$ 。但這代表  $BP \perp CH, CP \perp BH$ , 即  $P = A$ 。

(iii)：若  $A, P_1, P_2$  共線，則  $\mathcal{O}_H(\triangle ABC, P_1)$  與  $\mathcal{O}_H(\triangle ABC, P_2)$  交於  $D \in BC$  上，所以  $P_1^\circ, P_2^\circ$  滿足

$$A(P_1^\circ, D; B, C) = -1 = A(P_2^\circ, D; B, C),$$

即  $A, P_1^\circ, P_2^\circ$  共線。

(iv)：我們先觀察到此變換保交比：

$$(P_i) = X(P_i) = H(\mathcal{O}_H(\triangle ABC, P_i) \cap YZ) = (\mathcal{O}_H(\triangle ABC, P_i) \cap YZ) = X(P_i^\circ)$$

最後用到了關於  $YZ$  中點反演是一個保交比變換 (1.3.12)。再來要說明他對合，事實上，我們有  $XY \mapsto XZ, XZ \mapsto XY$ 。 ■

直接把等共軛變換的性質與推論套上去就有：

#### Corollary 2.5.16.

- (i) 變換  $P \mapsto P^\circ$  會將不過頂點的直線送至  $\triangle ABC$  的外接圓錐曲線。
- (ii) 因為  $G \leftrightarrow H$ ，所以歐拉線  $\mathcal{E}$  的像  $\mathcal{E}^\circ$  是  $\triangle ABC$  的 Kiepert 雙曲線 (2.3.3)。
- (iii) 令  $\triangle H_a H_b H_c$  為  $H$  關於  $\triangle ABC$  的反西瓦三角形，則  $\varphi(\mathcal{L}_\infty)$  為  $\triangle H_a H_b H_c$  的內切圓錐曲線。 ■

---

## Chapter 3

# 完美六邊形與等角共軛軌跡

### 3.1 完美六邊形

爲了透徹了解等角共軛軌跡在做什麼，我們先引入一個很好用的工具——完美六邊形<sup>[6]</sup>。完美六邊形是中國的幾何專家葉中豪與單墀發展出來的一套工具，並在最後寫了一首詩：

數學花園大，  
幾何算一家，  
春日興致好，  
請來看小花。

**Definition 3.1.1.** 在複數平面  $\mathbb{C}$  (或  $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ) 上，我們說六邊形  $ABCDEF$  爲一個完美六邊形若

$$\frac{a-b}{b-c} \cdot \frac{c-d}{d-e} \cdot \frac{e-f}{f-a} = -1$$

其中， $A = a, B = b, C = c, D = d, E = e, F = f$ 。

定義顯然等價於

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{DE}} \cdot \frac{\overrightarrow{EF}}{\overrightarrow{FA}} = 1 \quad \text{及} \quad \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \angle(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}) + \angle(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FA}) = 180^\circ,$$

且我們有完美六邊形的存在性及唯一性——給定五點  $B, C, D, E, F$ ，存在唯一一點  $A$  使得  $ABCDEF$  爲完美六邊形。

**Example 3.1.2.** 設完全四線形  $Q = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ ,  $P_{ij} := \ell_i \cap \ell_j$  為  $Q$  的頂點，那麼由孟氏定理，六邊形  $P_{12}P_{14}P_{31}P_{34}P_{23}P_{24}$  是一個完美六邊形。

**Theorem 3.1.3** (完美六邊形基本定理). 若六邊形  $ABCDEF$  為完美六邊形，則  $ACBDFE$ ,  $AECDBF$ ,  $ABFDEC$  也為完美六邊形。

*Proof.* 注意到

$$\frac{a-b}{b-c} \cdot \frac{c-d}{d-e} \cdot \frac{e-f}{f-a} = -1 \iff \det \begin{pmatrix} ad & a+d & 1 \\ be & b+e & 1 \\ cf & c+f & 1 \end{pmatrix} = 0$$

因此可以將  $\{A, D\}, \{B, E\}, \{C, F\}$  兩兩交換而不影響其完美性。 ■

所以我們也會以點對們  $(AD)(BE)(CF)$  來描述一個完美六邊形。在上面的例子 (3.1.2) 就是完全四線形的三對對頂點  $(P_{23}P_{14})(P_{31}P_{24})(P_{12}P_{34})$ 。

**Proposition 3.1.4.** 反演保完美六邊形，意即，若  $ABCDEF$  為完美六邊形，那麼對於任意一點  $O$ ， $ABCDEF$  關於  $O$  點反演下的像  $A^*B^*C^*D^*E^*F^*$  也是完美六邊形。

*Proof.* 假設反演變換將一點  $X$  送至  $X^*$ ，注意到

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{b-c} \cdot \frac{c-d}{d-e} \cdot \frac{e-f}{f-a} = -1 &\iff (A, C; B, D) \cdot (E, A; F, D) = 1, \\ \frac{a^*-b^*}{b^*-c^*} \cdot \frac{c^*-d^*}{d^*-e^*} \cdot \frac{e^*-f^*}{f^*-a^*} = -1 &\iff (A^*, C^*; B^*, D^*) \cdot (E^*, A^*; F^*, D^*) = 1. \end{aligned}$$

而我們有反演保交比 (要取個共軛)，所以

$$(A, C; B, D) \cdot (E, A; F, D) = \overline{(A^*, C^*; B^*, D^*) \cdot (E^*, A^*; F^*, D^*)},$$

故反演保完美六邊形。 ■

**Proposition 3.1.5.** 若六邊形  $ABCDEF$  為完美六邊形，則完全四線形們

$$(BC, CE, EF, FB), (CA, AF, FD, DC), (AB, BD, DE, EA)$$

有共同密克點  $M$ 。

*Proof.* 令  $M$  為  $(BC, CE, EF, FB)$  的密克點，那麼我們可以旋轉伸縮複數平面 (注意到這些變換保交比) 使得  $be = cf = 1$  且  $M = 0$ ，若取  $A^* = 1/d$ ，則由

$$\frac{1/d - 1/e}{1/e - 1/f} \cdot \frac{1/f - d}{d - e} \cdot \frac{e - f}{f - 1/d} = -1$$

可得  $A^*BCDEF$  為完美六邊形，故  $A^* = A$ 。注意到  $M$  為  $(CA^*, A^*F, FD, DC)$ ,  $(A^*B, BD, DE, EA^*)$  的共同密克點，從而命題成立。 ■

$M$  被稱為六邊形  $ABCDEF$  的密克點。所以我們可以把  $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow F$  看作是某種對合。事實上一定可以寫成

$$(i) \quad \Phi(z) = \frac{1}{z} \quad (M = 0)$$

$$(ii) \quad \Psi(z) = -z \quad (M = \infty)$$

的其中一種。這時候如果  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  都滿足同一個對合，我們會說

$$(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$$

是完美  $2n$  點組，且他們都在這個完美體系中。透過複數觀點，我們還可以得到：

**Proposition 3.1.6.** 六邊形  $ABCDEF$  為完美六邊形若且唯若存在兩點  $X_1, X_2$  使得  $AX_1DX_2, BX_1EX_2, CX_1FX_2$  皆為調和四邊形。

*Proof.*

( $\Rightarrow$ ) 旋轉伸縮複數平面使得  $ad = be = cf = 1$ ，取  $X_1 = 1, X_2 = -1$  有

$$(A, D; X_1, X_2) = (B, E; X_1, X_2) = (C, F; X_1, X_2) = -1$$

即  $AX_1DX_2, BX_1EX_2, CX_1FX_2$  皆為調和四邊形。

( $\Leftarrow$ ) 旋轉伸縮複數平面使得  $X_1 = 1, X_2 = -1$ ，則  $ad = be = cf = 1$  若且唯若

$$(A, D; X_1, X_2) = (B, E; X_1, X_2) = (C, F; X_1, X_2) = -1$$

即  $ABCDEF$  為完美六邊形。 ■

**Example 3.1.7.**  $ABCD$  為圓內接四邊形， $O$  是圓心， $P$  是對角線  $AC$  與  $BD$  的交點，則  $(AC)(BD)(OP)$  是完美六邊形。



**Example 3.1.8.**  $ABCDEF$  為圓內接六邊形，則  $ABCDEF$  是完美六邊形若且唯若  $AD, BE, CF$  共點。

**Proposition 3.1.9.** 若六邊形  $ABCDEF$  為完美六邊形且六點不共圓，則

$$\odot(ABC), \odot(CDE), \odot(EFA), \odot(BDF)$$

共點於一點  $P$  且

$$\odot(DEF), \odot(FAB), \odot(BCD), \odot(ACE)$$

共點於一點  $Q$ 。此時， $(P, Q)$  也在這個完美體系當中。

*Proof.* 設  $\odot(ABC)$  交  $\odot(CDE)$  另一點於  $P$ ，考慮以  $P$  為中心的反演變換將一點  $X$  送至  $X^*$ ，則  $A^*, B^*, C^*$  及  $C^*, D^*, E^*$  分別共線。令  $F' = A^*E^* \cap B^*D^*$ ，則  $A^*B^*C^*D^*E^*F'$  為完美六邊形，因此  $ABCDEF$  為完美六邊形若且唯若  $F' = F^*$  若且唯若  $\odot(EFA), \odot(BDF)$  也經過  $P$ 。

同理，我們有  $ABCDEF$  為完美六邊形若且唯若  $\odot(DEF), \odot(FAB), \odot(BCD), \odot(ACE)$  共點於  $Q$ 。設  $M$  為  $ABCDEF$  的密克點，因為

$$\Phi(\odot(ABC)) = \odot(DEF), \Phi(\odot(CDE)) = \odot(FAB),$$

所以  $\Phi(P) = Q$ ，也就是  $(P, Q)$  在這個完美體系當中。 ■

我們將這種完美八點組稱為共圓完美八點組。

**Example 3.1.10.** 令  $P_A, P_B, P_C$  分別為  $P$  關於  $BC, CA, AB$  的對稱點，則  $\odot(BP_AC), \odot(CP_BA), \odot(AP_CB), \odot(P_AP_BP_C)$  共點於  $P$  關於  $\triangle ABC$  的 antipodal conjugate (2.1.13)。

**Proposition 3.1.11.** 若  $(A, D), (B, E), (C, F), (P, Q)$  為共圓完美八點組，那麼  $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}, \overline{PQ}$  的中點們共圓。

*Proof.* 設  $M$  為  $ABCDEF$  的密克點， $M_1, M_2, M_3, M_4$  分別為  $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}, \overline{PQ}$

的中點，因為密克點的等角共軛點為牛頓線上的無窮遠點 (1.5.13)，所以

$$\begin{aligned}\angle M_2 M_1 M_3 &= \angle(M_2 M_1, BA) + \angle BAC + \angle(AC, M_1 M_3) \\ &= \angle EAM + \angle BAC + \angle MAF \\ &= \angle EAF + \angle BAC,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle M_2 M_4 M_3 &= \angle(M_2 M_4, BP) + \angle BPC + \angle(PC, M_4 M_3) \\ &= \angle EPM + \angle BPC + \angle MPF \\ &= \angle EPF + \angle BPC.\end{aligned}$$

再由  $A, P, B, C$  及  $A, P, E, F$  分別共圓可得  $M_1, M_2, M_3, M_4$  共圓。 ■

**Example 3.1.12.** 在 (3.1.10) 中，該圓圓心為  $N$ 。

**Proposition 3.1.13** (破鏡重圓). 令  $ABCDEF$  為一個六邊形，設  $A, C, E$  關於  $FB, BD, DF$  的對稱點分別為  $A', C', E'$ ，則  $\triangle ACE \sim \triangle A'C'E'$  若且唯若  $ABCDEF$  為完美六邊形。

*Proof.* 設  $C^*, E^*$  分別為  $C', E'$  關於  $BF$  的對稱點，則  $\triangle AC^*E^* \sim \triangle A'C'E'$ ，因此

$$\triangle ACE \sim \triangle A'C'E' \iff \triangle ACE \simeq \triangle AC^*E^* \iff \triangle ACC^* \simeq \triangle AEE^*$$

若且唯若

$$\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CC^*}) = \angle(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EE^*}) \quad \text{且} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CC^*}}{\overline{EE^*}}.$$

令  $B'$  為  $B$  關於  $DF$  的對稱點， $D'$  為  $D$  關於  $FB$  的對稱點，則

$$\triangle BCC^* \simeq \triangle BDD', \quad \triangle FEE^* \simeq \triangle FDD',$$

所以可以簡單的得到

$$\begin{aligned}\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CC^*}) &= \angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) + \angle(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DD'}), \\ \angle(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EE^*}) &= \angle(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EF}) + \angle(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DD'}).\end{aligned}$$

而

$$\frac{\overline{CC^*}}{\overline{EE^*}} = \frac{2 \cdot \overline{BC} \cdot |\sin \angle DBF|}{2 \cdot \overline{EF} \cdot |\sin \angle BFD|} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{FD}}{\overline{EF} \cdot \overline{DB}},$$

因此

$$\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CC^*}) = \angle(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EE^*}) \quad \text{且} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CC^*}}{\overline{EE^*}}$$

等價於

$$\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) + \angle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DF}) + \angle(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{EA}) = 180^\circ \quad \text{且} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}} \cdot \frac{\overline{FE}}{\overline{EA}} = 1$$

若且唯若  $ACBDFE$  是完美六邊形若且唯若  $ABCDEF$  是完美六邊形。 ■

**Proposition 3.1.14.** 若  $ABCDEF$  為完美六邊形，則存在一點  $P$  使得

$$\triangle PCE \simeq \triangle ABF, \triangle PEA \simeq \triangle CDB, \triangle PAC \simeq \triangle EFD.$$

*Proof.* 令  $M$  為  $ABCDEF$  的密克點，取  $P$  使得  $\triangle PCE \simeq \triangle ABF$ ，則

$$\triangle MAP \simeq \triangle MCD, \triangle MPE \simeq \triangle MBC,$$

所以  $\triangle PEA \cup M \simeq \triangle CDB \cup M$ ，同理有  $\triangle PAC \cup M \simeq \triangle EFD \cup M$ 。 ■

這個點  $P$  又被稱為  $\triangle ACE$  (關於  $ABCDEF$ ) 的內點，那當然我們也可以作出剩下七個三角形 (關於  $ABCDEF$ ) 的內點。

## 習題

**Problem 1.** 若  $A, B, C, D, E, F$  位於一個圓上，證明： $ABCDEF$  是完美六邊形若且唯若  $AD, BE, CF$  共點。

**Problem 2.** 設完美六邊形  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  的密克點為  $M$ ， $M$  關於  $A_iA_{i+1}$  的垂足為  $M_i$ 。證明： $M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6$  共點。

**Problem 3.** 令  $P$  為  $\triangle ACE$  關於完美六邊形  $ABCDEF$  的內點， $Q$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點， $A', C', E'$  分別為  $A, C, E$  關於  $FB, BD, DF$  的對稱點。證明： $\triangle ACE \cup Q \simeq \triangle A'C'E' \cup Q$ 。

## 3.2 等角共軛點是完美的

那麼我們為什麼要學完美六邊形呢？

**Proposition 3.2.1.** 若  $(P, Q)$  為關於完全四線形  $(AB, BD, DE, EA)$  的等角共軛點對，則  $ABPDEQ$  為完美六邊形。

*Proof.* 取  $Q^*$  使得  $ABPDEQ^*$  為完美六邊形， $M$  為其密克點，令  $C$  為  $AB$  與  $DE$  的交點， $F$  為  $BD$  與  $EA$  的交點，則  $ABCDEF$  為完美六邊形，因此  $(A, D), (B, E), (C, F), (P, Q^*)$  為完美八點組。因為  $P$  有關於  $(AB, BD, DE, EA)$  的等角共軛點  $Q$ ，所以有  $\angle APF + \angle DPC = \angle BPF + \angle EPC = 0^\circ$  (1.5.12)，由  $AQ^*FDPC$  及  $BQ^*FEPC$  皆為完美六邊形可得

$$\angle APF + \angle AQ^*F = \angle CPD + \angle PDF + \angle ACP = \angle ABF$$

$$\angle BPF + \angle BQ^*F = \angle CPE + \angle PEF + \angle BCP = \angle BAF$$

因此  $Q^*$  為  $P$  關於  $\triangle ABF$  的等角共軛點，所以  $Q^* = Q$ ，故  $ABPDEQ$  為完美六邊形。 ■

**Proposition 3.2.2.** 若  $(P, Q)$  為關於完全四線形  $Q$  的等角共軛點對，則  $\overline{PQ}$  中點位於該完全四線形的牛頓線上。

*Proof.* 令  $C$  為以  $P, Q$  為焦點且與  $Q$  中四線皆相切的圓錐曲線，則  $\overline{PQ}$  中點為  $C$  的中心。由牛頓第二定理 (0.4.14)， $C$  的中心位於  $Q$  的牛頓線上，即  $\overline{PQ}$  中點位於  $Q$  的牛頓線上。 ■

所以說如果  $(P, Q)$  是一對等角共軛點對，那他就會滿足上述兩個性質。事實上，當  $ABDE$  足夠一般的時候，這也是充分條件。

**Proposition 3.2.3.** 令  $ABDE$  為一個非平行四邊形，若  $ABPDEQ$  為完美六邊形，且  $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{PQ}$  的中點們共線，那麼  $(P, Q)$  為關於完全四線形  $(AB, BD, DE, EA)$  的等角共軛點對。

*Proof.* 假設  $(P, Q)$  不為關於  $Q = (AB, BD, DE, EA)$  的等角共軛點對。因為  $\overline{PQ}$  中點位於  $Q$  的牛頓線上，由 (1.5.11)，存在關於  $Q$  的等角共軛點對  $(P^*, Q^*)$  使得  $\overline{PQ}$  中點為  $\overline{P^*Q^*}$  中點。這時候我們有  $ABP^*DEQ^*$  為完美六邊形，因此

$$(A, D), (B, E), (P, Q), (P^*, Q^*)$$

為完美八點組。設  $M$  為  $Q$  的密克點，則  $M$  為完全四線形  $(PP^*, P^*Q, QQ^*, Q^*P)$  的密克點。但  $PP^*Q^*Q$  為平行四邊形，因此  $M$  為無窮遠點，從而得到  $AB \parallel DE$  及  $BD \parallel EA$ ，故  $ABDE$  為平行四邊形，矛盾。 ■

所以說  $Q$  的等角共軛軌跡  $\mathcal{K}$  完全由它的  $\Phi$  以及牛頓線決定，寫出來就是：

**Theorem 3.2.4 (QL-Cu1).** 令  $Q$  的牛頓線為  $\tau$ ，將對角線頂點送至對方的對合為  $\Phi$ ，則  $Q$  的等角共軛軌跡為

$$\mathcal{K} := \left\{ P \mid \frac{P + \Phi(P)}{2} \in \tau \right\}. \quad \blacksquare$$

**Proposition 3.2.5.**  $\mathcal{K}$  是一條三次曲線。 ■

顯然地， $\mathcal{K}$  通過  $Q$  的六個頂點、密克點以及牛頓線上的無窮遠點。這個「將對角線頂點送至對方的對合」又被稱為是  $Q$  的 Clawson-Schmidte 共軛變換，簡稱 C-S 共軛變換。如果遇到  $ABDE$  為平行四邊形時的情形，我們就會需要特判：

**Proposition 3.2.6.** 若  $ABDE$  為一個平行四邊形，則完全四線形  $(AB, BD, DE, EA)$  的等角共軛軌跡  $\mathcal{K}$  為經過  $A, B, D, E$  的等軸雙曲線  $\mathcal{H}$  與無窮遠線  $\mathcal{L}_\infty$  的聯集。

*Proof.* 顯然有  $\mathcal{L}_\infty \subseteq \mathcal{K}$ ，只要證明  $P \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}_\infty \iff P \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{L}_\infty$  即可，而

$$P \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}_\infty \iff \angle APB + \angle DPE = 0^\circ$$

取  $Q$  使得  $\triangle ABQ \simeq \triangle EDP$ ，則  $BQ \parallel DP$ ，而

$$\begin{aligned} \angle APB + \angle DPE = 0^\circ &\iff \angle APB + \angle BQA = 0^\circ \\ &\iff Q \in \odot(ABP) \\ &\iff \angle BDP = \angle PQB = \angle PAB. \end{aligned}$$

由 (2.1.10)，這等價於  $P$  位於以  $\overline{AD}$  中點為中心，經過  $A, B, D$  的圓錐曲線，即為  $\mathcal{H}$ 。 ■

**Definition 3.2.7.** 對於一個完全四線形  $Q$ ，我們定義  $\mathcal{K}(Q)$  為所有存在關於  $Q$  的等角共軛點的  $P$  的軌跡 (等角共軛軌跡)。類似地，我們定義  $\tau(Q)$  為  $Q$  的牛頓線， $\Phi_Q$  為  $Q$  的 C-S 共軛變換。

下面這個性質可以推論出許多等角共軛點的小引理。

**Proposition 3.2.8.** 若  $(P, Q), (R, S)$  為關於完全四線形  $Q$  的等角共軛點對，則  $\mathcal{K}(Q) = \mathcal{K}(PR, RQ, QS, SP)$ 。

*Proof.* 設  $ABDE$  為  $Q$  中的一個四邊形，則  $ABPDEQ$  及  $ABRDES$  皆為完美六邊形，所以  $(A, D), (B, E), (P, Q), (R, S)$  為完美八點組，因此  $(P, Q), (R, S)$  為兩組 C-S 共軛點對。注意到  $\overline{PQ}, \overline{RS}$  的中點們皆位於  $\tau(Q)$  上，所以由 (3.2.4)，我們有  $\mathcal{K}(Q) = \mathcal{K}(PR, RQ, QS, SP)$ 。 ■

**Corollary 3.2.9.** 令  $(P, Q), (R, S)$  為關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點對，若  $(U, V)$  為關於完全四線形  $(PR, RQ, QS, SP)$  的等角共軛點對，則  $(U, V)$  也為關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點對。

*Proof.* 因為  $(P, Q), (R, S)$  為關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點對，所以存在以  $P, Q$  為焦點的圓錐曲線  $\mathcal{C}_1$  及以  $R, S$  為焦點的圓錐曲線  $\mathcal{C}_2$  使得  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  皆與  $\triangle ABC$  相切。設  $\ell$  為  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  的第四條公切線，則  $(P, Q), (R, S)$  皆為完全四線形  $\triangle ABC \cup \ell$  的等角共軛點對，所以  $(U, V)$  為關於  $\triangle ABC \cup \ell$  的等角共軛點對。特別地， $(U, V)$  為關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點對。 ■

**Remark.** 證明當中的「取第四條公切線」是一個常用的技巧，因為一般來說題目都是一個三角形，所以需要這條線來輔助變成完全四線形。

**Corollary 3.2.10.** 令  $(P, Q), (R, S)$  為關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點對，則  $(PR \cap QS, RQ \cap SP)$  也為關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點對。

*Proof.* 在上述推論中取  $(U, V) = (PR \cap QS, RQ \cap SP)$  即得證。 ■

**Corollary 3.2.11.** 令  $(P, Q), (R, S)$  為關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點對，則完全四線形  $Q = (PR, RQ, QS, SP)$  的密克點  $M$  位於  $\odot(ABC)$  上，且其關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點為  $\infty_{\tau(Q)}$ 。

*Proof.* 在上述推論中取  $(U, V) = (M, \infty_{\tau(Q)})$  就有  $(M, \infty_{\tau(Q)})$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點對。因為  $\infty_{\tau(Q)} \in \mathcal{L}_\infty$ ，所以  $M \in \odot(ABC)$ 。 ■

**Corollary 3.2.12.** 令  $(P, Q)$  為關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點對， $I$  為  $\triangle ABC$  的內心或旁心，則存在一點  $M \in \odot(ABC)$  使得  $\triangle MPI \simeq \triangle MIQ$ 。若  $N$  為  $\overline{PQ}$  中點，則  $M$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點為  $\infty_{IN}$ 。

*Proof.* 在上述推論中取  $(R, S) = (I, I)$ ，設  $M$  為  $Q = (PI, IQ, QI, IP)$  的密克點，則  $\triangle MPI \simeq \triangle MIQ$ 。因為其牛頓線為  $IN$ ，故  $M$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點為  $\infty_{IN}$ 。 ■

還記得之前的共圓完美八點組嗎，把它套到等角共軛點上就有：

**Proposition 3.2.13.** 設  $(P, Q)$  為關於完全四線形  $(AB, BD, DE, EA)$  的等角共軛點對，設

$$\begin{aligned} R &= \odot(ABP) \cap \odot(PDE) \cap \odot(EQA) \cap \odot(BDQ), \\ S &= \odot(DEQ) \cap \odot(QAB) \cap \odot(BPD) \cap \odot(EAP), \end{aligned}$$

則  $(R, S)$  為關於  $(AB, BD, DE, EA)$  的等角共軛點對。

*Proof.* 由 (3.1.9)，我們有  $(A, D), (B, E), (P, Q), (R, S)$  為完美八點組，所以只要證明  $\overline{RS}$  中點位於  $(AB, BD, DE, EA)$  的牛頓線  $\tau$  上即可。注意到  $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{PQ}, \overline{RS}$  的中點們共圓，而  $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{PQ}$  的中點們共線於  $\tau$ ，所以  $\overline{RS}$  中點也在  $\tau$  上。 ■

透過這個性質，我們有：

**Proposition 3.2.14.** 令  $(P, Q)$  為完全四線形  $(AB, BD, DE, EA)$  的等角共軛點對， $O_1, O_2, O_3, O_4$  分別為

$$\triangle APB, \triangle BPD, \triangle DPE, \triangle EPF$$

的外心， $O'_1, O'_2, O'_3, O'_4$  分別為

$$\triangle AQB, \triangle BQD, \triangle DQE, \triangle EQF$$

的外心。則  $(O_1, O'_3), (O_2, O'_4), (O_3, O'_1), (O_4, O'_2)$  構成完美八點組，且四點組們  $O_i, O'_i, O_{i+1}, O'_{i+1}, O_1, O_2, O_3, O_4, O'_1, O'_2, O'_3, O'_4, O_1, O'_2, O_3, O'_4$  及  $O'_1, O_2, O'_3, O_4$  一共八組分別共圓。

*Proof.* 設  $\odot(O_1), \odot(O'_1), \odot(O_2), \odot(O'_2), \odot(O_3), \odot(O'_3), \odot(O_4), \odot(O'_4)$  共點於  $R$ ,  $\odot(O'_1), \odot(O_2), \odot(O'_3), \odot(O_4)$  共點於  $S$ , 則  $(R, S)$  為關於  $(AB, BD, DE, EA)$  的等角共軛點對。由  $O_1O'_1 \perp AB, O'_1O_2 \perp BS, O_2O'_2 \perp BD, O'_2O_1 \perp BR$ , 我們有

$$\angle O_1O'_1O_2 = \angle ABS = \angle RBC = \angle O_1O'_2O_2$$

即  $O_1, O'_1, O_2, O'_2$  共圓, 同理  $O_i, O'_i, O_{i+1}, O'_{i+1}$  共圓  $\forall i$ , 其中標號模四。由  $O_1O_2 \perp BP, O_2O_3 \perp DP, O_3O_4 \perp EP, O_4O_1 \perp AP$ , 我們有

$$\angle O_1O_2O_3 = \angle BPD = \angle APE = \angle O_1O_4O_3$$

即  $O_1, O_2, O_3, O_4$  共圓, 同理  $O'_1, O'_2, O'_3, O'_4, O_1, O'_1, O_2, O'_2, O_3, O'_3$  及  $O'_1, O_2, O'_3, O_4$  分別共圓。因此我們有  $O_1O_2O_3O'_3O'_4O'_1$  為完美六邊形, 而  $(O_4, O'_2)$  也在這個完美體系中。 ■

上面這個性質把圖畫出來其實還滿漂亮的(?)。接下來這個好像跟完美六邊形沒什麼關係, 不過就稍微提一下吧。

**Proposition 3.2.15.** 令  $(P, Q)$  為完全四線形  $(AB, BD, DE, EA)$  的等角共軛點對, 則  $\triangle APB, \triangle BQD, \triangle DPE, \triangle EQA$  的垂心們  $H_1, H_2, H_3, H_4$  共線且垂直於  $(AB, BD, DE, EA)$  的牛頓線  $\tau$ 。

*Proof.* 由對稱性, 我們只要證明  $H_1H_2$  垂直於  $\tau$  即可。將  $\triangle APB$  平移, 使得

$$A \mapsto Q, P \mapsto P^*, B \mapsto B^*,$$

過  $Q$  分別作垂直於  $QP^*, DQ$  的直線分別交  $\odot(QP^*B^*), \odot(BQD)$  於  $X_1, X_2$ , 則  $BH_1QX_1, BH_2QX_2$  皆為平行四邊形, 因此  $X_1X_2 \parallel H_1H_2$ 。由

$$\angle QX_1P^* = \angle QB^*P^* = \angle ABP = \angle QBD = \angle QX_2D$$

可得  $\triangle QX_1P^* \simeq \triangle QX_2D$ , 因此  $X_1X_2 \perp P^*D$ 。而  $\overline{AP^*}, \overline{AD}$  的中點們皆位於  $\tau$  上, 所以  $H_1H_2 \perp \tau$ 。 ■

這時候我們可以看另外四個三角形, 就會有另一組四點共線, 那這時候你可能好奇什麼時候這八點共線, 其實他有個等價條件:



**Proposition 3.2.16.** 令  $(P, Q)$  為完全四線形  $(AB, BD, DE, EA)$  的等角共軛點對，則

$$\triangle APB, \triangle AQB, \triangle BPD, \triangle BQD, \triangle DPE, \triangle DQE, \triangle EPA, \triangle EQA$$

的垂心們共於一線  $\ell$  若且唯若  $AD, BE, PQ$  共於一點  $X$ 。此時， $X \in \ell$ 。

我們先證明以下引理：

**Lemma 3.2.17.** 設  $(P, Q)$  為關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點對， $H_P, H_Q$  分別為  $\triangle BPC, \triangle BQC$  的垂心。以  $P, Q$  為焦點並與  $\triangle ABC$  相切的圓錐曲線分別切  $CA, AB$  於  $E, F$ ，則  $PQ, EF, H_P H_Q$  共點。

*Proof.* 令  $X$  為  $PQ$  與  $H_P H_Q$  的交點，由  $PH_P \parallel QH_Q$ ，

$$\frac{PX}{QX} = \frac{\overrightarrow{PH_P}}{\overrightarrow{QH_Q}} = \frac{\overline{BC} \cot \angle BPC}{\overline{BC} \cot \angle BQC} = \frac{\cot \angle APF}{\cot \angle AQF}.$$

注意到  $A$  為完全四線形  $(PE, QE, PF, QF)$  的切圓  $\omega$  的圓心。設  $S, T$  分別為  $\omega$  與  $PE, QF$  的切點， $U$  為  $PE$  與  $QF$  的交點。由牛頓第三定理 (0.4.15)， $PQ, EF, ST$  共點，最後，由

$$\frac{PX}{XQ} \cdot \frac{QT}{TU} \cdot \frac{US}{SP} = -\frac{\cot \angle APF}{\cot \angle AQF} \cdot \frac{\overline{QT}}{\overline{PS}} = -1$$

及孟氏定理知  $X, T, S$  共線。 ■

回到原命題：

*Proof.* 由 (3.2.15)，那八個垂心們共線若且唯若  $\triangle APB$  的垂心  $H_P$  與  $\triangle AQB$  的垂心  $H_Q$  連線  $\ell$  垂直於牛頓線。因此，當我們固定  $A, B, P, Q$  時（這時候  $DE$  構成以  $P, Q$  為焦點並與  $AB$  相切的圓錐曲線的包絡線）， $D, E$  是被唯一決定的（除非  $ABDE$  是平行四邊形，但這時結論顯然）。所以我們只需證明  $(\Leftarrow)$  與

(♠)  $A, B, P, Q$  時，存在  $D, E$  使得  $(P, Q)$  為完全四線形  $(AB, BD, DE, EA)$  的等角共軛點對且  $AD, BE, PQ$  共點。

我們先構造 (♠)，令  $C$  是以  $P, Q$  為焦點並與  $AB$  相切的圓錐曲線，分別作  $A, B$  關於  $C$  的另一條切線  $T_A, T_B$  並分別切  $C$  於  $U, V$ 。設  $X = PQ \cap UV$ ， $D = BX \cap T_A$ ， $E = AX \cap T_B$ 。由牛頓第三定理 (0.4.15)， $DE$  與  $C$  相切，故  $(P, Q)$  為關於  $(AB, BD, DE, EA)$  的等角共軛點對。

( $\Leftarrow$ ) 我們證明  $H_P, H_Q, X$  共線，剩下的則同理。同樣地，由牛頓第三定理 (0.4.15)，若  $U, V$  分別為  $AE, BD$  與  $C$  的切點，則  $AD, BE, PQ, UV$  共點於  $X$ 。由 (3.2.17)， $PQ, UV, H_P H_Q$  共點，證畢。 ■

### 3.2.1 馴服巨龍

讓我們回來看看等角共軛軌跡  $\mathcal{K}$ ，因為我們知道只要是  $\mathcal{K}$  裡面任兩對等角共軛點所圍成的完全四線形會有同一個等角共軛軌跡，所以乾脆就先把完全四線形  $Q$  拋掉 (?)，那這樣當然也還是可以定義牛頓線、等角共軛變換 (分別記為  $\tau(\mathcal{K}), \Phi_{\mathcal{K}}$ )、密克點、等角共軛點等等。跟著對岸的用詞 (我沒有被洗腦) 我們定義：

**Definition 3.2.18.** 一個三次曲線  $\mathcal{K}$  被稱為巨龍若存在一個完全四線形  $Q$  使得  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Q)$ 。

那我們關心的第一件事情是可以對它上面的點反演：

**Proposition 3.2.19.** 令  $A$  為巨龍  $\mathcal{K}$  上一點，則  $\mathcal{K}$  關於以  $A$  為中心的反演變換下的像  $\mathcal{K}^*$  也是巨龍。更進一步地，如果  $(P, Q)$  為關於  $\mathcal{K}$  的等角共軛點對，則  $(P, Q)$  關於以  $A$  為中心的反演變換下的像  $(P^*, Q^*)$  也為關於  $\mathcal{K}^*$  的等角共軛點對。

*Proof.* 令  $(B, E)$  為任一對關於  $\mathcal{K}$  的等角共軛點對， $D$  為  $A$  關於  $\mathcal{K}$  的等角共軛點， $C$  為  $AB$  與  $DE$  的交點， $F$  為  $BD$  與  $EA$  的交點，則  $(C, F)$  為關於  $\mathcal{K}$  的等角共軛點對。而

$$P \in \mathcal{K} \iff \angle BPC + \angle EPF = \angle BPA + \angle APC + \angle EPA + \angle APF = 0^\circ.$$

設以  $A$  為中心的反演變換將一點  $X$  送至  $X^*$ ，則

$$\begin{aligned} P^* \in \mathcal{K}^* &\iff \angle AB^*P^* + \angle P^*C^*A + \angle AE^*P^* + \angle P^*F^*A = 0^\circ \\ &\iff \angle C^*P^*B^* + \angle F^*P^*E^* = 0^\circ, \end{aligned}$$

這等價於  $P^*$  有關於完全四線形  $(B^*C^*, C^*E^*, E^*F^*, F^*B^*)$  的等角共軛點，故  $\mathcal{K}^*$  為  $\mathcal{Q} := (B^*C^*, C^*E^*, E^*F^*, F^*B^*)$  的等角共軛軌跡。

令  $Q$  為  $P$  關於  $\mathcal{K}$  的等角共軛點，我們有

$$\angle APE + \angle AQE = \angle ACE \implies \angle P^*E^*A + \angle Q^*E^*A = \angle C^*E^*A,$$

即  $E^*P^*, E^*Q^*$  為關於  $\angle C^*E^*A^*$  的等角線，同理有  $B^*P^*, B^*Q^*$  為關於  $\angle A^*B^*F^*$  的等角線，因此  $Q^*$  為  $P^*$  關於  $Q^*$  的等角共軛點。 ■

還有一件我們沒有用過的事情就是  $\mathcal{K}$  是一個三次曲線，所以我們有一個常用的定理——Cayley-Bacharach 定理，直接套上去就有：

**Proposition 3.2.20.** 對於完全四線形  $Q = (AB, BD, DE, EA)$ ，令  $C$  為  $AB$  與  $DE$  的交點， $F$  為  $BD$  與  $EA$  的交點。若  $P, Q, R \in \mathcal{K}(Q)$  且  $D, E, F, P, Q, R$  共圓錐曲線，則  $D, B, C, P, Q, R, A, E, C, P, Q, R$  及  $A, B, F, P, Q, R$  分別共圓錐曲線，且  $\mathcal{K}(Q)$  在關於  $\triangle PQR$  的等角共軛變換下的像仍然為  $\mathcal{K}(Q)$ 。

這東西其實不用開那個定理，所以就證一下吧。

*Proof.* 令  $P', Q', R'$  分別為  $P, Q, R$  關於  $Q$  的等角共軛點，則由  $D, E, F, P, Q, R$  共圓錐曲線知  $P', Q', R'$  共線（考慮關於  $\triangle DEF$  的等角共軛變換），因此  $D, B, C, P, Q, R, A, E, C, P, Q, R$  及  $A, B, F, P, Q, R$  分別共圓錐曲線。由於  $PQ \cap P'Q' \in \mathcal{K}$ ， $P, Q, R'$  共線，而  $R$  為  $PQ \cap P'Q'$  關於  $Q$  的等角共軛點，所以  $PQ' \cap P'Q = R$ ，因此  $\mathcal{K}$  為完全四線形  $(PQ, QP', P'Q', Q'P)$  的等角共軛軌跡，故  $\mathcal{K}(Q)$  在關於  $\triangle PQR$  的等角共軛變換下的像仍然為  $\mathcal{K}(Q)$ 。 ■

其實三次曲線上也是可以配極的，只是有極圓錐曲線跟極線兩種，見第五章。主要是有一天閒閒沒事作密克點關於巨龍的極圓錐曲線，然後就發現了這個：

**Proposition 3.2.21.** 令  $M$  為巨龍  $\mathcal{K}$  的密克點，過  $M$  作動線  $\ell$  並交  $\mathcal{K}$  於  $R, S$  兩點，取  $M'$  使得  $(R, S; M, M') = -1$ ，則  $M'$  的軌跡為一圓。

*Proof.* 令  $R^*, S^*$  分別為  $R, S$  關於  $\mathcal{K}$  的等角共軛點。則  $\Phi_{\mathcal{K}}(M')$  為  $\overline{R^*S^*}$  中點，由於  $RS$  交  $R^*S^*$  於  $M$ ，因此  $RS^*$  交  $R^*S$  於  $\infty_{\tau(\mathcal{K})}$ ，即  $RS^* \parallel R^*S \parallel \tau = \tau(\mathcal{K})$ 。而  $\overline{RR^*}, \overline{SS^*}$  的中點們皆位於  $\tau$  上，所以  $\overline{R^*S^*}$  中點位於  $\tau$  上，因此  $M'$  的軌跡為  $\Phi_{\mathcal{K}}(\tau)$ 。 ■

事實上， $\infty_\tau$  的極圓錐曲線是個等軸雙曲線，但這邊不打算證明。有了上面這個性質就可以證明下面這個：

**Theorem 3.2.22** (Telv Cohl/老封的猜想). 令  $M$  為巨龍  $\mathcal{K}$  的密克點，過  $M$  作動線  $\ell$  並交  $\mathcal{K}$  於  $R, S$  兩點，則以  $\overline{RS}$  為直徑的圓們共軸。

*Proof.* 延續上個性質的標號，在上個性質中，我們證明了  $\overline{RS}$  的中點皆位於  $\tau$  上，所以只須證明存在一點非無窮遠的點為它們的根心。當  $M \in \tau$  時，其實全部的圓都以  $M$  為圓心，所以根軸就是無窮遠線。當  $M \notin \tau$  時，令  $O$  為  $\Phi_{\mathcal{K}}(\tau)$  的圓心，由  $M, M' \in \Phi_{\mathcal{K}}(\tau)$  知  $\Phi_{\mathcal{K}}(\tau)$  與  $\odot(\overline{RS})$  正交，因此  $O$  關於  $\odot(\overline{RS})$  的幂為  $\Phi_{\mathcal{K}}(\tau)$  的半徑，而其為定值，所以過  $O$  垂直  $\tau$  的直線為它們的根軸。 ■

我們在這邊就把那個軸稱為  $\mathcal{K}$  的老封軸。這時候如果所有這些圓都交老封軸在兩個點的話（當然不是所有完全四線形都有，好像在等角共軛軌跡分成兩部分的時候才會有），那這兩個點有個想像得到的性質：

**Proposition 3.2.23.** 延續 (3.2.22) 的標號，令  $U, V$  為所有  $\odot(\overline{RS})$  的共同交點，則  $U, V \in \mathcal{K}(Q)$  且  $(U, V)$  為關於  $Q$  的等角共軛點對。

*Proof.* 令  $R^*, S^*$  分別為  $R, S$  關於  $\mathcal{K}$  的等角共軛點，則

$$\angle RUS + \angle R^*US^* = 90^\circ + 90^\circ = 0^\circ,$$

因此  $U \in \mathcal{K}$ ，同理  $V \in \mathcal{K}$ 。由

$$\begin{aligned}\angle RUS + \angle RVS &= 90^\circ + 90^\circ = 0^\circ = \angle R\infty_\tau S, \\ \angle R^*US^* + \angle R^*VS^* &= 90^\circ + 90^\circ = 0^\circ = \angle R^*\infty_\tau S^*,\end{aligned}$$

可得  $(U, V)$  為關於  $Q$  的等角共軛點對。 ■

**Proposition 3.2.24.** 令  $M, \mathcal{I}$  分別為巨龍  $\mathcal{K}$  的密克點、老封軸，則  $M$  關於  $\mathcal{I}$  的垂足  $T$  位於  $\mathcal{K}$  上。

*Proof.* 設  $M\infty_{\tau(\mathcal{K})}$  交  $\mathcal{K}$  另一點於  $T'$ ，則以  $\overline{T'\infty_{\tau(\mathcal{K})}}$  為直徑的圓也跟其它  $\odot(\overline{RS})$  共軸，但  $\odot(\overline{T'\infty_{\tau(\mathcal{K})}})$  就是過  $T'$  垂直  $\tau(\mathcal{K})$  的直線，又  $\mathcal{I} \perp \tau$ ， $T = T' \in \mathcal{K}$ 。 ■

我們稱上個性質所定義出來的  $T$  為  $\mathcal{K}$  的影消點。

**Proposition 3.2.25.** 令  $T$  為巨龍  $\mathcal{K}$  的影消點， $Y$  為  $T$  關於  $\mathcal{K}$  的牛頓線  $\tau$  的垂足，則對於任意  $P, Q \in \mathcal{K}$ ， $(P, Q)$  為關於  $\mathcal{K}$  的等角共軛點對若且唯若  $\triangle PTY$ ， $\triangle QTY$  的垂心關於  $\tau$  對稱。

## 習題

**Problem 1.** 設三角形  $ABC$  的內心為  $I$ ， $D$  為  $A$  關於  $BC$  的垂線， $A^*$  為  $A$  關於  $\odot(ABC)$  的對徑點。證明： $\angle BID = \angle A^*IC$ 。

**Problem 2.** 設三角形  $ABC$  的內心為  $I$ ， $\ell$  為線段  $\overline{AI}$  的中垂線。令  $P$  為  $\triangle ABC$  的外接圓上一點， $Q$  為  $AP$  與  $\ell$  的交點， $R$  位於  $\ell$  上使得  $\angle IPR = 90^\circ$ 。設  $IQ$  與  $\triangle ABC$  的中位線（平行於  $BC$ ）交於  $M$ 。證明： $\angle AMR = 90^\circ$ 。

**Problem 3.** 設三角形  $ABC$  的內心為  $I$ ， $A$ -旁心為  $J$ 。令  $\overline{AA'}$  為  $\triangle ABC$  的外接圓的直徑， $H_1, H_2$  分別為  $\triangle BIA', \triangle CJA'$  的垂心。證明： $H_1H_2$  平行於  $BC$ 。

**Problem 4 (Tau).** 設  $I, O, N$  分別為三角形  $ABC$  的內心、外心及九點圓圓心。證明：若  $IN \parallel BC$ ，則  $\angle AIO = 135^\circ$ 。

**Problem 5.** 令  $\odot(I)$  為  $\triangle ABC$  的內切圓， $P$  位於  $\odot(I)$  上使其關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點  $Q$  位於  $\odot(I)$  外，令  $\triangle QEF$  為  $Q$  關於  $\odot(I)$  的兩條切線與  $P$  關於  $\odot(I)$  的切線所圍成的三角形並假設  $\odot(I)$  為其內切圓，證明： $\triangle QEF$  的  $Q$ -偽內切圓切點  $S \in \odot(ABC)$ 。

## 3.3 當不動點遇上牛頓線

當一個完全四線形有內切圓（或旁切圓）的時候，通常會有一些美好的性質，放在完美六邊形內也不例外，來看看有什麼優秀的東西吧。

**Proposition 3.3.1.** 設完全四線形  $\mathcal{Q}$  有切圓  $\odot(I)$ ，關於  $\mathcal{Q}$  的 C-S 共軛變換為  $\Phi$ ，則  $I$  為  $\Phi$  的不動點。

*Proof.* 顯然地， $(I, I)$  為關於  $Q$  的等角共軛點對，因此  $\Phi(I) = I$ 。 ■

也就是說  $Q$  的牛頓線  $\tau$  上有不動點  $I$ 。

**Proposition 3.3.2.** 令  $M$  為有切圓  $\odot(I)$  的完全四線形  $(AB, BD, DE, EA)$  的密克點， $J$  為  $I$  關於  $M$  的對稱點，則  $IAJD, IBJE$  為調和四邊形。

*Proof.* C-S 共軛變換  $\Phi$  的不動點為  $I, J$ ，因此  $IAJD, IBJE$  為調和四邊形。 ■

**Proposition 3.3.3.** 設完全四線形  $Q$  有切圓  $\odot(I)$ ，則其等角共軛軌跡  $K$  在關於  $\odot(I)$  的反演變換下的像  $K^*$  為一個等軸雙曲線  $\mathcal{H}$  (聯集無窮遠線  $\mathcal{L}_\infty$ )。

*Proof.* 設  $ABDE$  為  $Q$  中的一個四邊形。令關於  $\odot(I)$  的反演變換將一點  $X$  送至  $X^*$ ，由  $I$  有關於  $Q$  的等角共軛點知

$$\begin{aligned} P \in K &\iff \angle APB + \angle DPE = 0 \\ &\iff \angle IA^*P^* + \angle P^*B^*I + \angle ID^*P^* + \angle P^*E^*I = 0 \\ &\iff \angle B^*P^*A^* + \angle E^*P^*D^* = 0 \end{aligned}$$

即等價於  $P^*$  位於完全四線形  $(A^*B^*, B^*D^*, D^*E^*, E^*A^*)$  的等角共軛軌跡上，注意到  $A^*B^*D^*E^*$  為平行四邊形，因此  $K^*$  為經過  $A^*, B^*, D^*, E^*$  的等軸雙曲線 (聯集無窮遠線)。 ■

這時候  $K$  被稱為一個斜環索線，切圓圓心  $I$  則被稱為  $K$  的內心。

**Corollary 3.3.4.** 令  $(P, Q)$  為關於  $\triangle ABC$  的一組等角共軛點對， $\odot(I)$  為  $\triangle ABC$  的內切圓。令關於  $\odot(I)$  的反演變換將一點  $X$  送至  $X^*$ ，則六點

$$A^*, B^*, C^*, P^*, Q^*, I$$

共等軸雙曲線。

*Proof.* 令  $C$  為以  $P, Q$  為焦點且與  $\triangle ABC$  相切的圓錐曲線， $\ell$  為  $C$  與  $\odot(I)$  的第四條切線，則  $(P, Q), (I, I)$  為關於  $Q = \triangle ABC \cup \ell$  的等角共軛點對，因此  $K(Q)$  關於  $\odot(I)$  的反演下的像為一個等軸雙曲線  $\mathcal{H}$ ，而  $A^*, B^*, C^*, P^*, Q^*, I$  共於  $\mathcal{H}$ 。 ■

**Corollary 3.3.5.** 令  $M$  為  $\mathcal{K}$  的密克點，過  $M$  作一條直線  $\ell$  交  $\mathcal{K}$  於  $R, S$  兩點，則  $\angle RIS = 90^\circ$ 。

*Proof.* 顯然地， $R^*, S^*$  為  $\mathcal{H}$  上兩點滿足  $I, M^*, R^*, S^*$  共圓，而  $I, M$  為  $\mathcal{H}$  的一組對徑點，故  $\overline{R^*S^*}$  為  $\odot(IM^*R^*S^*)$  的直徑，即  $\angle RIS = 90^\circ$ 。 ■

還記得老封的猜想嗎，那這時候其實就是  $(U, V) = (I, I)$  的情形，也就是：

**Proposition 3.3.6.** 令  $M, \tau$  分別為斜環索線  $\mathcal{K}$  的密克點、牛頓線，過  $M$  作動線  $\ell$  並交  $\mathcal{K}$  於  $R, S$  兩點，則以  $\overline{RS}$  為直徑的圓們共軸於  $I$  關於  $\tau$  的垂線，且其為  $I$  關於  $\odot(\overline{RS})$  的切線。

*Proof.* 由 (3.2.22) 知只須證明該垂線與  $\odot(\overline{RS})$  相切，而  $\overline{RS}$  中點  $N$  位於  $\tau$  上，所以  $NI \parallel \tau$ ，因此該垂線與  $\odot(\overline{RS})$  相切。 ■

**Proposition 3.3.7.** 延續 (3.3.3) 的標號，對於任意  $\mathcal{K}$  的等角共軛點對  $(P, Q)$ ， $P, Q$  在關於  $\mathcal{K}$  的內心  $I$  的反演變換下的像  $P^*, Q^*$  為  $\mathcal{H}$  的一組對徑點。

*Proof.* 令  $M$  為  $\mathcal{K}$  的密克點，固定  $\mathcal{K}$  上兩對等角共軛點對  $(A, D), (B, E)$ ， $J$  為  $I$  關於  $M$  的對稱點，則  $IAJD, IBJE, IPJQ$  為調和四邊形，所以  $J^*$  為線段們  $\overline{A^*D^*}, \overline{B^*E^*}, \overline{P^*Q^*}$  的共同中點，即  $J^*$  為  $\mathcal{C}$  的中心，並且  $P^*, Q^*$  為  $\mathcal{C}$  的一組對徑點。 ■

**Corollary 3.3.8.** 若  $PQ$  交  $\mathcal{K}$  於  $T$ ，則  $IT \perp PQ$ 。

*Proof.* 顯然地， $P^*, Q^*$  為  $\mathcal{H}$  上兩點滿足  $I, P^*, Q^*, T^*$  共圓，而  $P^*, Q^*$  為  $\mathcal{H}$  的一組對徑點，故  $\overline{T^*T^*}$  為  $\odot(IP^*Q^*T^*)$  的直徑，即  $IT \perp PQ$ 。 ■

那巨龍反演是巨龍，所以斜環索線反演當然也是斜環索線 (?)

**Proposition 3.3.9.** 令  $A$  為斜環索線  $\mathcal{K}$  上非內心的一點，則  $\mathcal{K}$  關於以  $A$  為中心的反演變換下的像仍然為斜環索線。

*Proof.* 令  $I$  為  $\mathcal{K}$  的內心， $\mathcal{K}^*, I^*$  分別為  $\mathcal{K}, I$  關於以  $A$  為中心的反演變換下的像，則  $\mathcal{K}^*$  關於以  $I^*$  為中心的反演下的像是  $\mathcal{K}$  關於以  $I$  為中心的反演變換合成一個

對稱變換下的像，即等軸雙曲線，所以  $\mathcal{K}^*$  為斜環索線。 ■

其實還可以發現有以下操作：

**Proposition 3.3.10.** 令斜環索線  $\mathcal{K}$  的內心為  $I$ ， $(P, Q)$  為  $\mathcal{K}$  上的等角共軛點對，令  $\Gamma$  為某個以  $I$  為圓心的圓使得  $P, Q$  位於  $\Gamma$  外，作  $P$  關於  $\Gamma$  的兩條切線  $K_1, K_2$ ， $Q$  關於  $\Gamma$  的兩條切線  $L_1, L_2$ ，則  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(K_1, K_2, L_1, L_2)$ 。

*Proof.* 由對稱性，只要證明  $K_1 \cap L_1 \in \mathcal{K}$  即可。設  $K_1, L_1, K_1 \cap L_1$  在關於  $\Gamma$  的反演變換下的像為  $K_1^*, L_1^*, U$ ，且  $K_1^*, L_1^*$  分別切  $\Gamma$  於  $S, T$ ，則易知  $S, T, U$  共線。由

$$\angle UP^*I = \angle USI = \angle ITU = \angle IQ^*U,$$

$U$  位於過  $P^*, Q^*, I$  且以  $\overline{P^*Q^*}$  中點為中心的等軸雙曲線上，故  $K_1 \cap L_1 \in \mathcal{K}$ 。 ■

## 習題

**Problem 1.** 設點  $M$  為  $\triangle ABC$  的外接圓上一動點。自  $M$  點引對  $\triangle ABC$  的內切圓相切的兩條直線，分別交  $BC$  於  $X_1, X_2$  兩點。證明： $\odot(MX_1X_2)$  過定點。

**Problem 2.** 令斜環索線  $\mathcal{K}$  的內心為  $I$ ，若  $P \in \mathcal{K}(Q)$ ，令過  $P$  且垂直  $PI$  的直線為  $\ell_P$ 。證明： $\ell_P$  的包絡線是一個圓錐曲線。

**Problem 3.** 設四邊形  $ABCD$  有內切圓  $\odot(I)$ ， $AB$  交  $CD$  於  $E$ ， $AD$  交  $BC$  於  $F$ ， $AC$  交  $BD$  於  $T$ 。設  $\odot(ATB)$  與  $\odot(CTD)$  再交於  $P$ ， $\odot(ATD)$  與  $\odot(BTC)$  再交於  $Q$ 。證明：若  $E, F, P, Q$  共圓，則  $I$  也在這個圓上。



---

# Chapter 4

## 完全四線形的心

第四章當然就是要講完全四線形啊。

### 4.1 基礎的心

給定一個完全四線形  $Q = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ ，定義

- 六個頂點： $A_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$
- 四個三角形： $\triangle_i := \triangle \ell_{i+1} \ell_{i+2} \ell_{i+3}$
- 三個對角線段與對頂點： $\overline{A_{ij} A_{kl}}$  與  $(A_{ij}, A_{kl})$
- 三個四邊形： $A_{ij} A_{jk} A_{kl} A_{li}$ ，其中有凸四邊形、凹四邊形以及折四邊形 (就圖形上來看)
- 對角線三角形 (西瓦三角形)： $\delta$ ，由三個對角線段延長所圍成的三角形

那有些「心」我相信大家已經聽過，或者在之前的章節有出現過，比方說：

**Proposition 4.1.1** (QL-P1, 密克點). 四個三角形  $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \triangle_4$  的外接圓們共於一點  $M$ 。

**Proposition 4.1.2** (QL-L1, 牛頓線). 三條對角線  $\overline{A_{23} A_{14}}, \overline{A_{31} A_{24}}, \overline{A_{12} A_{34}}$  的中點們共於一直線  $\tau(Q)$ 。

**Proposition 4.1.3** (QL-Ci3, 密克圓). 五點  $M, O_1, O_2, O_3, O_4$  共於一圓，其中  $O_i$  為  $\triangle_i$  的外心。

**Proposition 4.1.4** (QL-L2, 垂心線, 施坦納線). 令  $H_i$  為  $\triangle_i$  的垂心，則四點  $H_1, H_2, H_3, H_4$  共於一線  $S$ 。

**Proposition 4.1.5** (Gauss-Bodenmiller 定理). 三圓  $\odot(\overline{A_{23}A_{14}}), \odot(\overline{A_{31}A_{24}}), \odot(\overline{A_{12}A_{34}})$  共軸且  $S$  為他們的根軸。

**Proposition 4.1.6** (QL-Co1). 令  $\mathcal{P}$  是以密克點  $M$  為焦點、垂心線  $S$  為準線的拋物線，則  $\mathcal{P}$  與  $\mathcal{Q}$  中的四線相切。

**Proposition 4.1.7** (QL-Tf1, Clawson-Schmidt Conjugate). 存在唯一一個由反演與對稱合成的變換  $\Phi_{\mathcal{Q}}$  使得  $A_{23} \leftrightarrow A_{14}, A_{31} \leftrightarrow A_{24}, A_{12} \leftrightarrow A_{34}$ 。

不要懷疑，一個變換也可以稱作是心。

**Theorem 4.1.8** (QL-Cu1). 完全四線形  $\mathcal{Q}$  的等角共軛軌跡為

$$\mathcal{K} := \left\{ P \mid \frac{P + \Phi_{\mathcal{Q}}(P)}{2} \in \tau(\mathcal{Q}) \right\}$$

## 4.2 三尖瓣線

爲了能夠透徹的理解某些心在做什麼，這邊引進這個常用工具：

**Definition 4.2.1.** 三尖瓣線 (Deltoid) 是一個圓繞著直徑爲其三倍的圓內側純滾動時，圓上一點產生的軌跡。

爲了讓讀者有點概念等等要幹嘛，這邊先提一個重要結論，一個三角形的所有西姆松線 (2.5.10) 的包絡線是三尖瓣線。

**Proposition 4.2.2.** 令  $\triangle ABC$  爲一個正三角形， $\odot(I)$  爲其內切圓，則  $\odot(I)$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛軌跡爲以  $A, B, C$  爲頂點的三尖瓣線。

*Proof.* 令  $P$  爲  $\odot(I)$  上一點， $P$  關於  $I$  位似  $-2/3, -4/3, -2$  倍的點分別爲

$P_1, P_2, P_3, A, B, C$  關於  $I$  位似  $2/3$  倍的點分別為  $A', B', C'$ 。設  $S$  為  $P_2$  關於  $\triangle A'B'C'$  的西姆松線。

**Claim.**  $P_3$  關於  $S$  的垂足  $Q$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點。

*Proof of Claim.* 令  $P$  關於  $AI$  的對稱點為  $T$ ，則由對稱性只須證明  $A, T, Q$  共線。設  $M, N$  分別為  $\overline{BC}, \overline{AI}$  中點， $P_2$  關於  $B'C'$  的對稱點為  $U$ ， $P_3$  關於  $BC$  的對稱點為  $V$ ，則  $I, U, V$  共線且其為  $P_2$  關於  $\triangle A'B'C'$  的施坦納線。令  $X, Y$  分別為  $P_2U, P_3V$  與  $S$  的交點， $Z$  為  $P_3$  關於  $AI$  的對稱點，則  $I$  為  $\triangle AVZ$  的重心，因此  $T$  為  $\overline{AV}$  中點。顯然有  $\triangle P_3QY$  與  $\triangle MTN$  位似，因此由

$$P_3Y : YV = 2P_2X : XU = 2 : 1 = MN : NA$$

可得  $VQ \parallel AT$ ，即  $A, T, Q$  共線。 □

回到原命題， $Q$  位於  $\odot(\overline{P_1P_3})$  上 (其半徑為  $\odot(I)$  的半徑的  $1/3$ )。設  $I'$  為  $I$  關於  $BC$  的對稱點，則

$$\angle P_3P_1Q = \angle P_3IA + \angle I'IV = 3\angle P_3I'A$$

因此  $Q$  位於以  $A, B, C$  為頂點的三尖瓣線上。 ■

當然還要證明以  $A, B, C$  為頂點的三尖瓣線上的每個點的等角共軛點在內切圓上，不過其實用上面的證明就可以簡單作論證了。

**Proposition 4.2.3.** 令  $\triangle ABC$  為一個正三角形， $\odot(I)$  為其內切圓， $P$  為  $\odot(I)$  上一點， $Q$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點。若  $A, B, C$  關於  $I$  位似  $2/3$  倍的點分別為  $A', B', C'$ ， $P$  關於  $I$  位似  $-4/3$  倍的點為  $P'$ ，則  $P'$  關於  $\triangle A'B'C'$  的西姆松線為  $Q$  關於以  $A, B, C$  為頂點的三尖瓣線的切線。

*Proof.* 由上個性質的證明， $Q$  位於  $P'$  關於  $\triangle A'B'C'$  的西姆松線  $S$  上，因此只要證明  $S$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛軌跡與  $\odot(I)$  於  $P$  點相切即可。令  $P$  關於  $I$  位似  $2$  倍的點為  $P^*$ ，則  $P^*$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點位於  $S$  上，因此  $S$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛軌跡為經過  $A, B, C, P, P^*$  的圓錐曲線  $C$ 。令  $AP, P^*P$  分別交  $\odot(ABC)$  另一點於  $U, V$ ， $P$  關於  $\odot(I)$  的切線交  $BC$  於  $W$ ， $M$  為  $\overline{BC}$  中點， $I'$  為  $I$  關於  $BC$  的對稱點，則由

$$\angle P^*WP = \angle PWI = \angle PMI = \angle P^*I'A = \angle P^*UP$$

知  $P, P^*, U, W$  共圓，因此

$$\angle VUW = \angle VUP^* + \angle P^*UW = 180^\circ$$

即  $U, V, W$  共線。設  $AP$  交  $BC$  於  $X$ ，則由

$$P(A, B; C, W) = (X, B; C, W) = U(A, B; C, V) = P^*(A, B; C, P)$$

可得  $PW$  為  $P$  關於  $C$  的切線。 ■

**Corollary 4.2.4.** 令  $\omega$  為一圓，對於  $\omega$  上任意一點  $P$ ，作一線  $\ell_P \in TP$ ，使得

$$\angle(\ell_{P_1}, \ell_{P_2}) = -\angle P_1AP_2, \forall A, P_1, P_2 \in \omega$$

則  $\{\ell_P \mid P \in \omega\}$  的包絡線為一個三尖瓣線。

*Proof.* 令  $\Omega$  為  $\omega$  關於  $\omega$  的圓心  $O$  位似 2 倍的像，在  $\omega$  上取一點  $A$  使得  $\ell_A = OA$ ， $A'$  為  $O$  關於  $A$  的對稱點，並取  $B', C' \in \Omega$  使得  $\triangle A'B'C'$  是正三角形。對於  $\Omega$  上任意一點  $P'$ ，令  $S'_P$  為  $P'$  關於  $\triangle A'B'C'$  的西姆松線，則  $S'_P$  經過  $\overline{OP'}$  中點  $P$ ，注意到  $OA$  為  $A'$  關於  $\triangle A'B'C'$  的西姆松線，所以

$$\angle(S'_P, \ell_P) = \angle(S'_P, S_A) + \angle(\ell'_A, \ell_P) = \angle A'B'P' + \angle PBA = 0^\circ$$

其中  $B$  為  $\overline{OB'}$  中點。即  $S'_P = \ell_P$ ，因此由 (4.2.3) 知  $\{\ell_P \mid P \in \omega\}$  的包絡線為一個三尖瓣線。 ■

有了這些性質之後，這個定理就變得很簡單了。

**Theorem 4.2.5** (施坦納三尖瓣線定理). 給定任意  $\triangle ABC$ ，對於任意一點  $P \in \odot(ABC)$ ，令  $S_P$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的西姆松線，則  $\{S_P \mid P \in \odot(ABC)\}$  的包絡線為一個三尖瓣線。

*Proof.* 令  $H$  為  $\triangle ABC$  的垂心， $\odot(N)$  為  $\triangle ABC$  的九點圓，對於任意兩點  $P_1, P_2 \in \odot(N)$ ，令  $P'_i$  為  $H$  關於  $P_i$  的對稱點，則  $P_i \in S_{P'_i}$  且

$$\angle(S_{P'_1}, S_{P'_2}) = \angle P'_2AP'_1 = -\angle P_1XP_2$$

其中  $X \in \odot(N)$ 。所以由 (4.2.4) 可得  $\{S_P \mid P \in \odot(ABC)\}$  的包絡線為一個三尖瓣線。 ■

**Definition 4.2.6.** 同上述定理的標號，我們稱該三尖瓣線  $\mathcal{D}$  為  $\triangle ABC$  的施坦納三尖瓣線 (Steiner Deltoid)， $\mathcal{D}$  中三個頂點的外接圓稱為  $\triangle ABC$  的施坦納圓 (Steiner Circle)。

藉由上面的證明，我們可以歸納出以下結果

**Proposition 4.2.7.** 給定任意  $\triangle ABC$ ， $H, \odot(N), \mathcal{D}$  分別為  $\triangle ABC$  的垂心、九點圓及施坦納三尖瓣線。令  $P$  為  $\odot(ABC)$  上一點， $M$  為  $\overline{HP}$  中點， $P$  關於  $\triangle ABC$  的西姆松線  $S$  與  $\odot(N)$  交於  $Q \neq M$ ，則  $S$  與  $\mathcal{D}$  於  $Q$  關於  $M$  的對稱點相切。

*The proof is trivial and left as an exercise to the reader.* ■

### 4.2.1 轉一下

我們上面證明西姆松線的包絡線是一個三尖瓣線，那事實上我們可以定義  $\alpha$ -西姆松線 (我亂取的)：

**Definition 4.2.8.** 給定任意  $\triangle ABC$  與一角  $\alpha$ ，對於任意一點  $P \in \odot(ABC)$ ，分別在  $BC, CA, AB$  上取點  $D, E, F$  使得

$$\angle(PD, BC) = \angle(PE, CA) = \angle(PF, AB) = \alpha.$$

則  $D, E, F$  共線 (2.5.9)，並稱其為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的  $\alpha$ -西姆松線，記為  $\mathcal{S}_{P,\alpha}$ 。

顯然地，當固定  $P$  時， $\mathcal{S}_{P,\alpha}$  的包絡線是以  $P$  為焦點的拋物線，而  $\alpha = 0^\circ$  時， $\mathcal{S}_{P,\alpha}$  為無窮遠線。類似於原本的西姆松線，我們有以下角度關係：

**Proposition 4.2.9.** 給定任意  $\triangle ABC$  與兩角  $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ ，則對於任意兩點  $P_1, P_2 \in \odot(ABC)$ ，

$$\angle(\mathcal{S}_{P_1,\alpha_1}, \mathcal{S}_{P_2,\alpha_2}) = \alpha_1 - \alpha_2 - \angle P_1 A P_2.$$

*Proof.* 簡單的算角度。事實上，

$$\angle(\mathcal{S}_{P_1,\alpha_1}, \mathcal{S}_{P_2,\alpha_2}) = \angle(\mathcal{S}_{P_1,\alpha_1}, \mathcal{S}_{P_1,\alpha_2}) + \angle(\mathcal{S}_{P_1,\alpha_2}, \mathcal{S}_{P_2,\alpha_2}) = (\alpha_1 - \alpha_2) - \angle P_1 A P_2. \quad \blacksquare$$

看一下這節的標題，你就會想所有的  $\alpha$ -西姆松線的包絡線是不是也是三尖瓣線。當然，當  $\alpha = 0^\circ$  時，所有的  $\alpha$ -西姆松線都重合於無窮遠線，所以我們不考慮這個情形。

**Theorem 4.2.10.** 給定任意  $\triangle ABC$  與一角  $\alpha \neq 0^\circ$ ，則  $\{\mathcal{S}_{P,\alpha} \mid P \in \odot(ABC)\}$  的包絡線為一個三尖瓣線。

不過很可惜的是，我們不能直接套 (4.2.4)，因為我們沒有施坦納定理。所以我們需要以下推廣：

**Proposition 4.2.11.** 給定任意  $\triangle ABC$  與一角  $\alpha \neq 0$ ，令  $H$  為  $\triangle ABC$  的垂心，則存在一圓  $\odot(N')$  與一以  $H$  為中心的旋似變換  $\varphi$  使得  $\varphi(\odot(ABC)) = \odot(N')$  且對於任意一點  $P \in \odot(ABC)$ ， $\varphi(P)$  在  $P$  關於  $\triangle ABC$  的  $\alpha$ -西姆松線上。

*Proof.* 令  $O$  為  $\triangle ABC$  的外心。分別在  $BC, CA, AB$  上取點  $R_A, R_B, R_C$  使得

$$\angle(OR_A, BC) = \angle(OR_B, CA) = \angle(OR_C, AB) = \alpha.$$

易得  $\triangle R_A R_B R_C \cup O \stackrel{\pm}{\sim} \triangle ABC \cup H$ 。令  $\odot(N') = \odot(R_A R_B R_C)$ ，對於任意一點  $P$ ，我們定義  $\varphi(P)$  為使  $\triangle HPQ \stackrel{\pm}{\sim} \triangle HON'$  的  $Q$ ，以下證明這會滿足我們的要求。

令  $O_A, O_B, O_C$  分別為  $O$  關於  $BC, CA, AB$  的對稱點。注意到  $H$  為  $\triangle O_A O_B O_C$  的外心且

$$\triangle OO_A R_A \stackrel{\pm}{\sim} \triangle OO_B R_B \stackrel{\pm}{\sim} \triangle OO_C R_C \stackrel{\pm}{\sim} \triangle OHN',$$

所以  $\triangle O_A O_B O_C \cup H \stackrel{\pm}{\sim} \triangle R_A R_B R_C \cup N'$ ，且  $N'$  位於  $\overline{OH}$  的中垂線上。對於任意一點  $P \in \odot(ABC)$ ，令  $Q = \varphi(P)$ ，由  $\triangle HPQ \stackrel{\pm}{\sim} \triangle HON'$ ，我們有

$$\frac{\overline{N'Q}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{HN'}}{\overline{HO}} = \frac{\overline{ON'}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{N'R_A}}{\overline{HO_A}}.$$

而  $\odot(ABC)$  與  $\odot(O_A O_B O_C)$  等大，所以  $\overline{N'Q} = \overline{N'R_A}$ ，即  $Q \in \odot(N')$ 。因此我們有  $\varphi(\odot(ABC)) = \odot(N')$ 。

令  $\mathcal{S}_{P,\alpha}$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的  $\alpha$ -西姆松線， $D, E, F$  分別為  $\mathcal{S}_{P,\alpha}$  與  $BC, CA, AB$  的交點， $P_A, P_B, P_C$  分別為  $P$  關於  $BC, CA, AB$  的對稱點。則由施坦納定理知  $P_A, P_B, P_C$  共線且過  $H$ ，由

$$\triangle PDP_A \stackrel{\pm}{\sim} \triangle PEP_B \stackrel{\pm}{\sim} \triangle PFP_C \stackrel{\pm}{\sim} \triangle OR_A O_A \stackrel{\pm}{\sim} \triangle ON'H \stackrel{\pm}{\sim} \triangle PQH,$$

我們有  $P_AP_BP_CH \stackrel{\perp}{\sim} DEFQ$ ，所以  $Q \in \mathcal{S}_{P,\alpha}$ 。 ■

在有了這個性質之後，(4.2.10) 就跟原定理 (4.2.5) 的證明一樣了。那麼我們類似地定義：

**Definition 4.2.12.** 同上述定理的標號，我們稱該三尖瓣線  $\mathcal{D}_\alpha$  為  $\triangle ABC$  的  $\alpha$ -施坦納三尖瓣線。

顯然地，所有與  $\triangle ABC$  相切的所有三尖瓣線一定是某個  $\alpha$ -施坦納三尖瓣線，那現在的問題就是如果我們有一個三尖瓣線上的任三條切線，要怎麼得到  $\alpha$ 。為了解決這個問題，我們得再更深入 (4.2.11) 的證明。

**Proposition 4.2.13.** 同 (4.2.11) 的證明的標號，令  $S$  為  $\infty_{\mathcal{S}_{P,\alpha}}$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點，則

$$\triangle ABC \cup S \stackrel{\perp}{\sim} \triangle R_AR_BR_C \cup \varphi(P),$$

且旋似角為  $90^\circ + \alpha$ 。

*Proof.* 簡單的算角度。事實上，令  $A^* = \varphi^{-1}(R_A)$ ,  $B^* = \varphi^{-1}(R_B)$ ，則

$$\angle R_BR_A\varphi(P) = \angle B^*A^*P = -\angle(\mathcal{S}_{B^*,\alpha}, \mathcal{S}_{P,\alpha}) = \angle(\mathcal{S}_{P,\alpha}, CA) = \angle BAS,$$

且

$$\angle(R_BR_C, BC) = \angle(\perp OR_A, BC) = 90^\circ + \alpha. \quad \blacksquare$$

最後，我們證明本小節最重要的定理：

**Theorem 4.2.14.** 給定  $\triangle ABC$  與一角  $\alpha \neq 0$ ，設  $\mathcal{D}_\alpha$  為  $\triangle ABC$  的  $\alpha$ -施坦納三尖瓣線。令  $P_1, P_2, P_3$  為  $\odot(ABC)$  上三點， $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_{P_i,\alpha}$ 。若

$$\beta = \angle(AP_1, BC) + \angle(BP_2, CA) + \angle(CP_3, AB) - 2\alpha,$$

(i) 當  $\beta = 0^\circ$  時， $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$  共點。

(ii) 當  $\beta \neq 0^\circ$  時， $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$  不共點，且  $\mathcal{D}_\alpha$  是由  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$  所圍成的三角形的  $\beta$ -施坦納三尖瓣線。

*Proof.* 同 (4.2.11) 的證明的標號，並令  $S_i$  爲  $\infty_{S_i}$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點， $T_i$  爲  $S_{i-1}$  與  $S_{i+1}$  的交點， $H'$  爲  $\varphi(\triangle P_1 P_2 P_3)$  的垂心。我們有

$$\begin{aligned}\beta &= \sum \angle(AP_1, BC) - 2\alpha = \sum \angle(\mathcal{S}_{A,\alpha}, \mathcal{S}_{P_1,\alpha}) - 2\alpha \\ &= \sum \angle(BC, \mathcal{S}_{P_1,\alpha}) + \alpha = \sum \angle Q_1 Q_2 R_A + \alpha \\ &= \angle Q_1 Q_2 R_A + \angle(Q_2 Q_3, R_B R_C) + \alpha \\ &= \angle S_1 S_2 A + \angle(Q_2 Q_3, BC) + 90^\circ \\ &= \angle(BC, \mathcal{S}_1) + \angle(\perp Q_2 Q_3, BC) = \angle(\perp Q_2 Q_3, \mathcal{S}_1).\end{aligned}$$

注意到

$$\angle P_{i-1} T_i P_{i+1} = \angle(\mathcal{S}_{i-1}, \mathcal{S}_{i+1}) = -\angle P_{i-1} P_i P_{i+1},$$

所以  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$  共點若且唯若  $T_1 = T_2 = T_3 = H'$  若且唯若  $H' \in \mathcal{S}_1$ ，這又等價於

$$\beta = \angle(\perp Q_2 Q_3, \mathcal{S}_1) = 0,$$

這證明了 (i)，以下證明 (ii)。已經有  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$  不共點。設  $\mathcal{D}_\alpha$  爲  $\triangle T_1 T_2 T_3$  的  $\beta'$ -施坦納三尖瓣線，那麼由 (4.2.11) 的證明， $H'$  爲  $\triangle T_1 T_2 T_3$  的外心，且  $\beta' = \angle(H' Q_1, \mathcal{S}_1)$ 。所以

$$\beta' = \angle(\perp Q_2 Q_3, \mathcal{S}_1) = \beta. \quad \blacksquare$$

取  $\alpha = 90^\circ$  就有這個常見的小推論：

**Corollary 4.2.15.** 給定任意  $\triangle ABC$ ， $P_1, P_2, P_3$  爲  $\odot(ABC)$  上三點， $\mathcal{S}_i$  爲  $P_i$  關於  $\triangle ABC$  的西姆松線，則  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$  共點若且唯若

$$\angle ABP_1 + \angle BCP_2 + \angle CAP_3 = 0^\circ.$$

這邊給個比較初等的證明：

*Proof.* 令  $O$  爲  $\triangle ABC$  的外心， $H$  爲  $\triangle ABC$  的垂心， $S'_i$  爲  $S_i$  關於  $H$  位似 2 倍的線，則  $P_i \in S'_i \forall i \in \{1, 2, 3\}$  且  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$  共點若且唯若  $S'_1, S'_2, S'_3$  共點。

( $\Leftarrow$ ) 令  $P_1^*$  爲  $P_1$  關於  $O$  的對稱點，則  $P_1^*$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點  $Q = \infty_{S'_1}$ ，



因此

$$\begin{aligned}\angle(\mathcal{S}'_1, P_1P_2) &= \angle QBA + \angle ABP_1 + \angle BP_1P_2 \\ &= \angle CBP_1^* - \angle CAP_3 \\ &= \angle CP_1O - \angle CP_1P_3 = \angle P_3P_1O,\end{aligned}$$

即  $\mathcal{S}'_1, P_1O$  爲關於  $\angle P_2P_1P_3$  的等角線，同理  $\mathcal{S}'_2, P_2O$  及  $\mathcal{S}'_3, P_3O$  分別爲關於  $\angle P_3P_2P_1, \angle P_1P_3P_2$  的等角線，因此  $\mathcal{S}'_1, \mathcal{S}'_2, \mathcal{S}'_3$  共點於  $O$  關於  $\triangle P_1P_2P_3$  的等角共軛點。

( $\Rightarrow$ ) 設  $\mathcal{S}'_1, \mathcal{S}'_2, \mathcal{S}'_3$  共點於  $U$ ， $V$  爲  $U$  關於  $\triangle P_1P_2P_3$  的等角共軛點。取  $P'_1$  滿足

$$\angle ABP'_1 + \angle BCP_2 + \angle CAP_3 = 0^\circ,$$

則由 ( $\Leftarrow$ ) 知  $U$  關於  $\triangle P'_1P_2P_3$  的等角共軛點爲  $O$ ，由  $P'_1 \in \odot(P_1P_2P_3)$  可得  $V \in \odot(OP_2P_3)$ 。同理有  $V \in \odot(OP_3P_1), V \in \odot(OP_1P_2)$ ，所以  $V = O$ 。注意到  $P_1P_2, P_2P_3$  爲關於  $\angle UP_2O$  的等角線，所以  $P_1P_2 = P'_1P_2$ ，即  $P_1 = P'_1$ ，故原命題成立。 ■

## 習題

**Problem 1.** 試用角元西瓦定理證明 (4.2.15)。

**Problem 2.** 設  $\triangle ABC$  的施坦納三尖瓣線分別切  $BC, CA, AB$  於  $D, E, F$ ，則  $AD, BE, CF$  交於  $\triangle ABC$  的垂心關於  $\triangle ABC$  的等截共軛點。

**Problem 3.** 令  $S_1, S_2, S_3$  爲  $\triangle ABC$  的施坦納三尖瓣線的頂點。證明：

$$3 \cdot \angle(S_1S_2, BC) = \angle ABC + \angle ACB$$

## 4.3 Hervey 的心

都看完施坦納的三尖瓣了，還不把一個完全四線形塞進去 (?)

**Proposition 4.3.1.** 令完全四線形  $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$  的四個外心爲  $O_1, O_2, O_3, O_4$ ， $H'_i$  爲  $\triangle O_{i+1}O_{i+2}O_{i+3}$  的垂心，則  $O_i, H'_i$  們共圓錐曲線且  $H'_i \in \ell_i$ 。

*Proof.* 令  $Q$  的密克點為  $M$ ，注意到  $\ell_i$  為  $M$  關於  $\triangle O_{i+1}O_{i+2}O_{i+3}$  的施坦納線，因此  $H'_i \in \ell_i$ 。而  $O_i, H'_i$  們位於經過  $O_1, O_2, O_3, O_4$  的等軸雙曲線上。 ■

**Corollary 4.3.2** (QL-P5, Clawson 中心). 線段  $\overline{O_i H'_i}$  的中點們重合。

*Proof.* 即重合於  $O_1 O_2 O_3 O_4$  的龐色列點  $T$ 。 ■

**Corollary 4.3.3** (QL-Ci4, Hervey 圓). 四點  $H'_1, H'_2, H'_3, H'_4$  共於一圓。

*Proof.* 將密克圓  $\odot(O_1 O_2 O_3 O_4)$  關於  $O_1 O_2 O_3 O_4$  的龐色列點對稱，則  $H'_1, H'_2, H'_3, H'_4$  皆位於該圓上。 ■

**Theorem 4.3.4** (QL-Qu2, Kantor-Hervey 三尖瓣線). 存在一個三尖瓣線  $\Delta$  與  $Q$  中四線相切。

當然，這可以由  $\alpha$ -施坦納三尖瓣線得到，不過這邊給個直接構造的證明：

*Proof.* 考慮一變換  $\varphi$ ，為關於  $T$  的對稱變換合成  $Q$  的 C-S 共軛變換，對於一點  $P \in \odot(H'_1 H'_2 H'_3 H'_4)$ ，定義  $L_P$  為  $P$  關於  $M\varphi(P)$  的垂線，則由簡單的角度計算及 (4.2.4) 知  $L_P$  的包絡線為一個三尖瓣線  $\Delta$ 。注意到  $\ell_i = L_{H'_i}$ ，因此  $\Delta$  與  $Q$  中四線相切。 ■

那顯然這個三尖瓣線是唯一的。

**Lemma 4.3.5.** 給定  $\triangle ABC$ ，若兩點  $X, Y$  滿足

$$\triangle ABX \sim \triangle ACY \quad \text{且} \quad \angle AXB = \angle AYC = 90^\circ,$$

則  $\overline{BC}$  中點  $M$  位於  $\overline{XY}$  的中垂線上且  $\odot(MXY)$  經過  $A$  關於  $BC$  的垂足。

**Proposition 4.3.6** (QL-P3, Kantor-Hervey 點). 令  $\Delta$  的中心為  $\ominus$ ，則  $\ominus$  位於  $Q$  中三角形的歐拉線段 (外心與垂心的連線段) 的中垂線上。

*Proof.* 只需證  $\ominus$  位於  $\overline{O_4 H_4}$  的中垂線上。取一線  $\ell$  使得  $\Delta$  為由  $\ell, \ell_2, \ell_3$  所圍成的三角形  $\triangle LL_2 L_3$  (點的標號對應邊) 的施坦納三尖瓣線，則  $Q$  的 Hervey 圓為  $\triangle LL_2 L_3$  的九點圓，且由  $\Delta$  的構造知  $H'_2, H'_3$  分別為  $\overline{L_3 L}, \overline{L L_2}$  的中點 (因為是對

徑點的西姆松線)。由

$$\angle LH'_2O_4 = \angle(\ell_2, \perp O_3O_1) = \angle(\ell_3, \perp O_1O_2) = \angle LH'_3O_4,$$

知  $O_4 \in \odot(LH'_2H'_3) = \odot(LO')$ ，其中  $O', H'$  分別為  $\triangle LL_2L_3$  的外心及垂心。故  $\triangle LH'H_4 \simeq \triangle LO'O_4$  且  $\angle LH_4H' = \angle LO_4O'$ ，由 (4.3.5) 知  $\overline{O'H'}$  中點  $\ominus$  位於  $\overline{O_4H_4}$  的中垂線上。 ■

**Proposition 4.3.7** (QL-P2, 莫利點). 令  $M'$  為  $\ominus$  關於垂心線  $\mathcal{S}$  的垂足， $Q$  中四個三角形的九點圓圓心分別為  $N_1, N_2, N_3, N_4$ ，則過  $N_i$  且垂直  $\ell_i$  的直線經過  $M'$ 。

*Proof.* 延續上個性質證明用的標號，注意到  $\ominus N_4 \perp O_4H_4$ ，所以有  $\ominus, H_4, N_4, M'$  共圓，由 (4.3.5) 知  $L$  關於  $O'H'$  的垂足  $H_L$  位於  $\odot(\ominus O_4H_4)$  及  $\odot(AO')$  上，所以

$$\begin{aligned} \angle N_4M'\ominus &= \angle N_4H_4\ominus = \angle O_4H_L\ominus = \angle O_4LO' = \angle(\ell, \ell_1) \\ &= \angle(O_2O_3, \ell_1) = \angle(\perp M(\ell_1 \cap \ell_4), \ell_1) = \angle(\perp \ell_4, \tau) \end{aligned}$$

其中  $\tau = \tau(Q)$  為  $Q$  的牛頓線，所以  $N_4M' \perp \ell_4$ 。 ■

當然這些東西還是可以避開三尖瓣線來證明。

## 習題

**Problem 1.** 證明 (4.3.5)。

**Problem 2** (QL-L4, 莫利線). 令  $O_M$  為完全四線形  $Q$  的密克圓的圓心 (QL-P4)，證明： $O_M$  位於  $Q$  的莫利點與 Kantor-Hervey 點的連線上。

**Problem 3.** 令  $\ell$  為一個完全四線形  $Q$  的牛頓線關於其密克點的對稱線。證明： $\ell$  與  $Q$  的 Kantor-Hervey 三尖瓣線相切。

## 4.4 莫利與他的心臟線

是說講了這麼久的三尖瓣了，大家總該對心臟有點興趣了吧。

**Definition 4.4.1.** 一顆心臟線 (Cardoid)  $\mathbb{K}$  是一個圓  $\Gamma'$  沿著另一個半徑相同的圓  $\Gamma$  純滾動時，圓上一點產生的軌跡。我們稱  $\Gamma$  的圓心為它的中心， $\mathbb{K}$  唯一的尖點為  $\mathbb{K}$  的尖點。

看著這個定義應該是不能做一些太有用的事，所以可能要先用這個性質轉掉命題

**Proposition 4.4.2.** 一顆心臟線關於其尖點反演下的像為一個拋物線，並且尖點是它的焦點。

*Proof.* 設  $\mathbb{K}$  為一圓  $\Gamma'$  繞著  $\Gamma$  純滾動時，圓上一點產生的軌跡，若  $Y$  為其尖點，則不難發現  $\mathbb{K}$  上的每個點與  $Y$  的中垂線為  $\Gamma$  的切線，反之  $Y$  關於  $\Gamma$  的一條切線的對稱點位於  $\mathbb{K}$  上，將這個性質關於  $O$  反演後可得  $\mathbb{K}^*$  上每個點是過  $Y$  與一直線  $\Gamma^*$  相切的某個圓的圓心，因此  $\mathbb{K}^*$  為以  $Y$  為焦點， $L$  為準線的拋物線。 ■

**Proposition 4.4.3.** 若以  $Y$  為尖點的心臟線  $\mathbb{K}$  為一圓  $\Gamma'$  繞著  $\Gamma$  純滾動時，圓上一點產生的軌跡，設  $P \in \mathbb{K}$  且  $\overline{YP}$  的中垂線與  $\Gamma$  切於  $T$ ，則  $P$  關於  $\mathbb{K}$  的切線為過  $P$  並垂直於  $PT$  的直線。

來看一個大家熟悉的莫利角三分線定理：

**Theorem 4.4.4** (Morley's). 對於任意  $\triangle ABC$  (以逆時針旋轉標號)，過  $A$  作角三分線  $\ell_A^{Bi}$ ,  $i = -1, 0, 1$ ，滿足  $\ell_A^{B0}$  位於  $\angle BAC$  內且

$$\angle(\ell_A^{Bi}, CA) = 2\angle(AB, \ell_A^{Bi}), \angle(\ell_A^{Bi}, \ell_A^{Bj}) = (j - i) \cdot 60^\circ$$

$\ell_A^{Ci}$  定為  $\ell_A^{Bi}$  關於  $\angle BAC$  的等角線，類似定義  $\ell_B^{Ci}, \ell_B^{Ai}, \ell_C^{Bi}, \ell_C^{Ai}$ ，定義  $a_{ij} = \ell_B^{Ci} \cap \ell_C^{Bj}$ ，類似定義  $b_{ij}, c_{ij}$ 。那麼對於所有  $(i, j, k) \in \{-1, 0, 1\}^3$  滿足  $3 \nmid 1 + i + j + k$ ， $\triangle a_{jk}b_{ki}c_{ij}$  是一個正三角形，且

$$\angle(b_{ki}c_{ij}, BC) = \angle a_{jk}BC + \angle a_{jk}CB$$

剩下的則輪換。 ■

回憶一下之前的施坦納三尖瓣線，直接算角度會有  $\triangle a_{jk}b_{ki}c_{ij}$  與施坦納三尖瓣線的頂點位似，另一個很簡單的觀察如下：

**Proposition 4.4.5.** 同 (4.4.4) 的標號，對於所有  $(i, j) \in \{-1, 0, 1\}^2$ ， $\triangle a_{ij}a_{(i+1)(j-1)}a_{(i-1)(j+1)}$  爲正三角形且  $B, C \in \odot(a_{ij}a_{(i+1)(j-1)}a_{(i-1)(j+1)})$ 。 ■

我們把 (4.4.4) 中的 18 個正三角形與上述性質的 9 個三角形稱作  $\triangle ABC$  的莫利三角形 (Morley Triangle)，那事實上我們只要找其中三個就好了，因爲

**Proposition 4.4.6.** 同 (4.4.4) 的標號，我們有對於所有滿足

$$3 \mid 1 + i + j + k$$

的點對  $(i, j, k) \in \{-1, 0, 1\}^3$ ，六點

$$a_{(j+1)(k-1)}, a_{(j-1)(k+1)}, b_{(k+1)(i-1)}, b_{(k-1)(i+1)}, c_{(i+1)(j-1)}, c_{(i-1)(j+1)}$$

共線。 ■

所以說這些正三角形的邊其實都是由  $\triangle_i := \triangle a_{ii}b_{ii}c_{ii}$  們的邊所構成，我們定義

$$\Lambda^{\triangle ABC} = \bigcup (b_{ii}c_{ii} \cup c_{ii}a_{ii} \cup a_{ii}b_{ii})$$

爲所有邊的聯集，而

$$\lambda_A^{\triangle ABC} = \{a_{ij} \mid (i, j) \in \{-1, 0, 1\}^2\}$$

則爲頂點們，類似定義  $\lambda_B^{\triangle ABC}, \lambda_C^{\triangle ABC}$ ， $\lambda := \bigcup \lambda_A$  爲所有頂點。

**Theorem 4.4.7.** 給定完全四線形  $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ ， $\mathcal{Q}$  中的四個三角形爲  $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \triangle_4$ ，設  $\Lambda_i = \Lambda^{\triangle_i}$ ， $A_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$ ，若  $L_i \subset \Lambda_i, L_j \subset \Lambda_j$  爲兩條直線滿足  $L_i \cap \lambda_{A_{jk}}^{\triangle_i} = \{P_i, Q_i\}$  與  $L_j \cap \lambda_{A_{ki}}^{\triangle_j} = \{P_j, Q_j\}$  關於  $A_{kl}$  透視，則

$$L_i \cap L_j \in (A_{jl}P_i \cap A_{il}P_j)(A_{jl}Q_i \cap A_{il}Q_j) \cap (A_{jk}P_i \cap A_{ik}P_j)(A_{jk}Q_i \cap A_{ik}Q_j)$$

，其中  $i, j, k, l$  兩兩相異。特別地， $L_i \cap L_j \in \bigcap \Lambda_m$ 。

*Proof.* 我們有

$$(A_{jl}P_i \cap A_{il}P_j)(A_{jl}Q_i \cap A_{il}Q_j) \subset \Lambda_k,$$

因爲三角形們  $\triangle A_{jl}P_iQ_i$  與  $\triangle A_{il}P_jQ_j$  關於  $A_{kl}$  透視，由迪沙格定理，

$$L_i \cap L_j \in (A_{jl}P_i \cap A_{il}P_j)(A_{jl}Q_i \cap A_{il}Q_j) \subset \Lambda_k,$$

同理有

$$L_i \cap L_j \in (A_{jk}P_i \cap A_{ik}P_j)(A_{jk}Q_i \cap A_{ik}Q_j) \subset \Lambda_l,$$

所以  $L_i \cap L_j \in \bigcap \Lambda_m$ 。

**Corollary 4.4.8.** 延續 (4.4.7) 的標號， $|\bigcap \Lambda_i| \geq 27$  (重根重複計算)。

*Proof.* 我們知道滿足  $\{P_i, Q_i\}$  與  $\{P_j, Q_j\}$  關於  $A_{kl}$  透視的  $(L_i, L_j)$  的組合共有 27 種 (在給定  $i, j, k, l$  的情況下)，所以  $|\bigcap \Lambda_i| \geq 27$ 。

介紹完這兩個看似沒關聯的東西之後就是要把他們合在一起 (?)

**Proposition 4.4.9.** 若  $\triangle ABC$  的三邊與一顆心臟線  $\mathbb{K}$  相切，且  $\mathbb{K}$  與  $BC$  切於兩點，則  $\mathbb{K}$  的中心  $P \in \lambda_A$ 。反之，若  $P \in \lambda_A$ ，則存在唯一一顆以  $P$  為中心的心臟線  $\mathbb{K}$  與  $\triangle ABC$  的三邊相切，且  $\mathbb{K}$  與  $BC$  切於兩點。

*Proof.* 設  $\mathbb{K}$  與  $BC$  切於  $T_1, T_2$  兩點，與  $AB$  切於  $T$ ，則存在一點  $S$  位於以  $P$  為圓心並經過  $\mathbb{K}$  的尖點  $Y$  的圓  $\Gamma$  上，且  $\triangle PT_1T_2$  是以  $Y$  為中心正三角形，作  $P$  關於  $S$  位似  $-2$  倍的點  $P'$ ，則  $P'T = AB$ ，令  $\overline{PP'}$  的中垂線交  $P'T$  於  $B'$ ，若  $M, M', N$  分別為  $\overline{T_1T_2}, \overline{PP'}, \overline{SP'}$  的中點，注意到

$$\angle MPB' = \angle YPS + \angle P'PB' = \angle SNT + \angle TP'S = \angle B'PP'$$

所以  $\triangle B'PM \sim \triangle B'PM'$ ，故  $\angle B'MP = 90^\circ$ ，因此  $B' = B$  且

$$3 \cdot \angle CBP = \angle CBP + \angle PBM' + \angle M'BP' = \angle CBA$$

同理有  $3 \cdot \angle PCB = \angle ACB$ ，所以  $P \in \lambda_A$ 。

若  $P \in \lambda_A$ ，取  $BC$  上兩點  $T_1, T_2$  使得  $\triangle PT_1T_2$  是正三角形，再把上面著證明反過來寫就可以了，唯一性則是因為  $P$  與尖點  $Y$  是唯一的。

接下來的這個定理我目前沒有找到什麼很簡短的證明，希望大家能夠找到一個更短的給我 (?)，雖然證明看起來很長，但事實上想法並不難。

**Theorem 4.4.10.** 若  $\triangle ABC$  與一顆心臟線  $\mathbb{K}$  相切，則  $\mathbb{K}$  的中心位於  $\Lambda^{\triangle ABC}$  上。反之，若  $P$  位於  $\Lambda^{\triangle ABC}$  上，則存在唯一一顆以  $P$  為中心的心臟線與  $\triangle ABC$  的三邊相切。

*Proof.* 令  $L$  為  $\mathbb{K}$  的切線並且切  $\mathbb{K}$  於兩點， $D, E, F$  分別為  $L$  與  $BC, CA, AB$  的交點，則由 (4.4.9) 知  $P \in \lambda_A^{\triangle AEF} \cap \lambda_B^{\triangle BFD} \cap \lambda_C^{\triangle CDE}$ ，分別在兩圓  $\odot(PFD), \odot(PDE)$  上取點  $U, V$  使得  $\angle UDP = \angle VDP = 60^\circ$ ，那麼  $PU \subset \Lambda^{\triangle BFD}, PV \subset \Lambda^{\triangle CDE}$  且  $D, U, V$  共線，所以由 (4.4.7) 知  $P \in \Lambda^{\triangle ABC}$ 。

相反地，若  $P \in \Lambda^{\triangle ABC}$ ，假設  $P \in \ell \subset \Lambda^{\triangle ABC}$ ，令

$$\{U_1, U_2\} = \ell \cap \lambda_B^{\triangle ABC}, \{V_1, V_2\} = \ell \cap \lambda_C^{\triangle ABC},$$

使得  $(AU_i, AV_i)$  為關於  $\angle BAC$  的角三分線。分別在  $AU_1, AV_1$  上取兩點  $S_1, T_1$  使得  $\triangle PS_1T_1$  為正三角形且  $\angle PS_1T_1 = \angle U_1AU_2$ ，令

$$S_2 = PT_1 \cap AU_2, T_2 = PS_1 \cap AV_2,$$

那麼顯然有  $S_2, T_2 \in \odot(AS_1T_1)$ ，故  $\triangle PS_2T_2$  也為正三角形。令

$$E = CA \cap S_1S_2, F = AB \cap T_1T_2,$$

易知  $\odot(AS_1T_1)$  分別與  $CA, AB$  的另一個交點  $G, H$  分別是  $P$  關於  $S_1S_2, T_1T_2$  的對稱點，因此  $ES_1, FT_1$  分別為  $\angle AEP, \angle PFA$  的角平分線，所以  $\triangle PS_1T_1$  是  $\triangle AEF$  的莫利三角形，同理， $\triangle PS_2T_2$  也是  $\triangle AEF$  的莫利三角形。設  $D$  為  $EF$  與  $BC$  的交點， $W = PS_1 \cap AS_2, X = PT_1 \cap AT_2$ ，注意到  $P \in \Lambda^{\triangle ABC} \cap \Lambda^{\triangle AEF}$  且

$$P = U_1U_2 \cap S_1W = V_1V_2 \cap T_1X, A = U_1S_1 \cap U_2W = V_1T_1 \cap V_2X$$

由 (4.4.7) 知  $P \in \lambda_B^{\triangle BFD} \cap \lambda_C^{\triangle CDE}$ ，再由 (4.4.9) 知存在以  $P$  為中心的心臟線們  $\mathbb{K}_A, \mathbb{K}_B, \mathbb{K}_C$  使得  $\mathbb{K}_A$  與  $\triangle AEF$  三邊相切並且與  $EF$  切於兩點， $\mathbb{K}_B, \mathbb{K}_C$  則輪換，由於  $D, E, F$  共線，所以  $\mathbb{K}_A = \mathbb{K}_B = \mathbb{K}_C$ ，並且其與  $\triangle ABC$  三邊相切。

最後，若存在兩個以  $P$  為中心並且與  $\triangle ABC$  的三邊相切的心臟線  $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$ ，令  $L_i$  為  $\mathbb{K}_i$  的切線並且切  $\mathbb{K}_i$  於兩點， $E_i, F_i$  分別為  $L_i$  與  $CA, AB$  的交點，那麼

$$P \in \lambda_A^{\triangle AE_1F_1} \cap \lambda_A^{\triangle AE_2F_2}.$$

分別在  $AU_1, AV_1$  取  $Y_i, Z_i$  使得  $\triangle AY_iZ_i$  是  $\triangle AE_iF_i$  的莫利三角形，注意到

$$\triangle PY_1Z_1 \stackrel{\pm}{\sim} \triangle PY_2Z_2,$$

所以  $\triangle PY_1Z_1 = \triangle PY_2Z_2$ ，故  $E_1 = E_2, F_1 = F_2$ 。因此  $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_2$ ，這證明了唯一性。 ■

所以說我們有與三邊相切的心臟線跟  $\Lambda$  的一一對應。

**Proposition 4.4.11** (QL-27Qu1, 莫利多重心臟線). 存在 (至少) 27 個心臟線與  $Q$  中四線相切 (重根重複計算)。

*Proof.* 由 (4.4.8) 知  $|\bigcap \Lambda_i| \geq 27$  (重根重複計算), 令  $P \in \bigcap \Lambda_i$ , 則由 (4.4.10) 可得存在以  $P$  為中心的心臟線  $\mathbb{K}_i$  與  $\Delta_i$  相切。對於任意相異  $i, j$ , 由 (4.4.10) 證明的最後一部份可以得到  $\mathbb{K}_i = \mathbb{K}_j$ , 所以存在唯一一個以  $P$  為中心的心臟線  $\mathbb{K}$  與  $Q$  中四線相切。 ■

## 習題

**Problem 1.** 令  $\mathbb{K}$  為一個心臟線並且有尖點  $Y$ , 設  $L$  為一過  $Y$  的動線並交  $\mathbb{K}$  於  $A, B$ 。證明： $\overline{AB}$  中點的軌跡是一個圓。

**Problem 2.** 同 (4.4.4) 的標號, 證明：對於所有  $(i, j, k) \in \{-1, 0, 1\}^3$  滿足  $3 \nmid 1 + i + j + k$ ,

(i)  $\Delta_{a_{jk}b_{ki}c_{ij}}$  與  $\Delta_{a_{(j-1)(k-1)}b_{(k-1)(i-1)}c_{(i-1)(j-1)}}$  透視於一點  $P_{ijk}$  (注意到不是所有的正三角形都是正向相似)

(ii)  $P_{ijk}$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點為  $\Delta_{a_{jk}b_{ki}c_{ij}}$  與  $\triangle ABC$  的透視中心。

**Problem 3** (Bobson(?)). 同 (4.4.4) 的標號, 證明：

(i) 對於所有  $i \in \{-1, 0, 1\}$ ,  $A \in \odot(a_{ii}a_{(i+1)(i+2)}a_{(i+2)(i+1)})$ ,

(ii)  $\odot(a_{11}a_{23}a_{32}), \odot(a_{22}a_{31}a_{13}), \odot(a_{33}a_{12}a_{21})$  共軸。

**Problem 4** (QL-Qu1, 莫利單心臟線). 令完全四線形  $Q$  的密克點為  $M$ , 密克圓為  $\mathbb{M}$ 。考慮所有經過  $M$  且圓心位於  $\mathbb{M}$  上的圓, 證明：這些圓的包絡線為一顆心臟線  $\mathbb{K}$ 。

**Problem 5** (QL-Cu2). 令完全四線形  $Q$  的四個三角形為  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ , 證明：由 (4.4.7) 所定義出來的  $\Lambda_i$  的 27 個共同交點位於同一個三次曲線上。



**Problem 6.** 證明  $\triangle ABC$  的莫利三角形與其施坦納三尖瓣線的頂點位似。

---

## Chapter 5

# 基礎三次曲線與梁-澤利克定理

在講這章之前先定義一下三次曲線：

**Definition 5.0.1.** 在平面上  $(\mathbb{P}^2\mathbb{R})$  一個齊次三次方程  $F(x, y, z)$  的根  $[x : y : z]$  所定義出來的曲線  $\mathcal{K}$  被稱為是一個三次曲線， $\mathcal{K}$  是非退化的若  $F(x, y, z)$  是不可約的 (也就是說， $\mathcal{K}$  不是三條直線或一條直線與一條圓錐曲線的聯集)。

那因為是三次曲線嘛，所以內容有一部分是靠解析的，在這邊就省略證明了。

### 5.1 非奇異三次曲線的群運算

為了講群運算，必須用個講到三次曲線就不可不提的定理：

**Theorem 5.1.1** (Cayley -Bacharach). 若兩個三次曲線  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$  (含退化) 交於  $P_1, \dots, P_9$ ，那麼對於所有經過  $P_1, \dots, P_8$  的三次曲線  $\mathcal{K}_3$  (含退化)， $P_9 \in \mathcal{K}_3$ 。

那他有個推廣：

**Theorem 5.1.2.** 若  $m$  次曲線  $X_1$  與  $n$  次曲線  $X_2$  交於  $P_1, \dots, P_{mn}$ ，那麼對於所有經過  $P_1, \dots, P_{mn-1}$  的  $m+n-3$  次曲線  $X_3$ ， $P_{mn} \in X_3$ 。

所以可以由一條三次曲線上已知的點構造出其他點，經常使用到的一件事是三條直線是三次曲線。這還有以下推論：

**Theorem 5.1.3** (三圓錐曲線定理/Three Conics Theorem). 設三個非退化的圓錐曲線  $C_1, C_2, C_3$  交於兩點  $P, Q$ ，若  $C_i, C_j$  交於另外兩點  $A_{ij}, B_{ij}$ ，那麼  $A_{23}B_{23}, A_{31}B_{31}, A_{12}B_{12}$  共點。

*Proof.* 設  $R = A_{31}B_{31} \cap A_{12}B_{12}$ ，則注意到  $C_2 \cup A_{31}B_{31}$  與  $C_3 \cup A_{12}B_{12}$  都經過  $A_{23}, A_{31}, A_{12}, B_{23}, B_{31}, B_{12}, P, Q, R$  九點，而  $C_1 \cup A_{23}B_{23}$  經過那九個點中扣掉  $R$  的八個點，所以  $R \in C_1 \cup A_{23}B_{23}$ 。若  $R \in C_1$ ，那麼  $R \in \{A_{31}, B_{31}\} \cap \{A_{12}, B_{12}\}$ ，無論如何都有  $C_1, C_2, C_3$  交於除了  $P, Q$  以外的另一點  $R$ ，所以  $R \in A_{23}B_{23}$ 。 ■

當然這個命題可以單純用交比證明。我們回到群運算。

**Definition 5.1.4.** 給定一個非奇異三次曲線  $K$  與其上一點  $O$ ，我們定義  $K$  上的點的加法如下：對於任兩點  $P, Q \in K$ ，令  $X$  為  $PQ$  與  $K$  的第三個交點，我們將  $P + Q$  定為  $OX$  與  $K$  的第三個交點（這之中若有重合則直線改為切線，且交點數為重根數）。

這個加法的單位元是  $O$  並且顯然有交換律。令  $T$  為  $O$  關於  $K$  的切線與  $K$  的第三個交點（注意到因為是切線，所以  $O$  要算兩次），那麼一點  $P \in K$  的加法反元素就是  $PT$  與  $K$  異於  $P, T$  的交點。

我們現在來證明結合律：令  $P, Q, R \in K$ ， $X, Y, Z$  分別為  $PQ, QR, (P+Q)R$  與  $K$  的第三個交點，那麼  $O, X, P+Q, O, Y, Q+R$  及  $O, Z, (P+Q)+R$  分別共線。考慮  $PQ \cup OY \cup (P+Q)R$  與  $K$  的九個交點，分別為

$$P, Q, X, O, Y, Q+R, (P+Q), R, Z,$$

注意到  $QR \cup OX \cup (Q+R)P$  經過了除了  $Z$  以外的八個點，所以由 Cayley-Bacharach 定理，它也經過了第九個。換句話說， $Z$  是  $(Q+R)P$  與  $K$  的第三個交點，故  $P + (Q+R)$  是  $OZ$  與  $K$  的第三個交點，即  $(P+Q) + R$ 。

另外，這邊需要假設  $K$  是非奇異的，這樣才能保證切線的存在性與唯一性。

## 習題

**Problem 1.** 試用 Cayley-Bacharach 定理證明帕斯卡定理。

**Problem 2** (Four Conics Theorem). 設  $C_1, C_2, C_3$  為三個圓錐曲線，令  $A_{ij}, B_{ij}, P_{ij}, Q_{ij}$  為  $C_i, C_j$  的交點，若  $P_{23}, P_{31}, P_{12}, Q_{23}, Q_{31}, Q_{12}$  共圓錐曲線，證明： $A_{23}A_{23}, A_{31}A_{31}, A_{12}A_{12}$  共點。

**Problem 3.** 令  $K$  為一個三次曲線， $A \in K$  對  $K$  做兩條切線分別切  $K$  於  $B, C$ ， $S$  為  $BC$  與  $K$  的另一個交點。證明： $A, S$  分別關於  $K$  的切線交於  $K$  上。

## 5.2 配極之路

還記得我們在圓錐曲線上是怎麼配極的嗎？在這邊想要把那個定義從二次曲線推廣至三次曲線，那之前是調和嘛，所以滿足

$$\frac{2}{PQ} = \frac{1}{PM_1} + \frac{1}{PM_2} \iff \frac{2}{PQ} = \frac{1}{M_1Q} + \frac{1}{M_2Q}.$$

如果想推廣到三次會遇到一個困難，就是

$$\frac{3}{PQ} = \frac{1}{PM_1} + \frac{1}{PM_2} + \frac{1}{PM_3} \not\iff \frac{3}{PQ} = \frac{1}{M_1Q} + \frac{1}{M_2Q} + \frac{1}{M_3Q},$$

所以就沒有極線互反了（甚至我們還不知道是不是直線）。為了解決這個問題，我們就乾脆定義兩種配極，那兩個就會直接互反。

**Definition 5.2.1.** 給定一個三次曲線  $K$ ， $P$  為任意一點，過  $P$  作一動線交  $K$  於  $M_1, M_2, M_3$ ，取  $Q, R_1, R_2$  使得

$$\frac{3}{PQ} = \frac{1}{PM_1} + \frac{1}{PM_2} + \frac{1}{PM_3}, \quad \frac{3}{PR_i} = \frac{1}{M_1R_i} + \frac{1}{M_2R_i} + \frac{1}{M_3R_i},$$

那麼  $Q$  的軌跡是一條直線（或線段）， $R_1, R_2$  的軌跡聯集是一條圓錐曲線（或其片段），我們稱  $Q$  的軌跡或其延長為  $P$  關於  $K$  的極線，記為  $p_K^1(P)$ ， $R_1, R_2$  的軌跡聯集或其延長為  $P$  關於  $K$  的極圓錐曲線（Polar Conic），記為  $p_K^2(P)$ 。

至於為什麼是直線跟圓錐曲線呢，解析仔可以告訴你。之前證明老封軸也是透過觀察極圓錐曲線，所以其實滿有用的（?）。注意到

$$\begin{aligned} \frac{3}{PQ} = \frac{1}{PM_1} + \frac{1}{PM_2} + \frac{1}{PM_3} &\iff (P, Q; M_1, M_2) + (P, Q; M_1, M_3) = -1, \\ \frac{3}{PR_i} = \frac{1}{M_1R_i} + \frac{1}{M_2R_i} + \frac{1}{M_3R_i} &\iff (R_i, P; M_1, M_2) + (R_i, P; M_1, M_3) = -1, \end{aligned}$$

所以我們知道：

**Proposition 5.2.2.** 給定一個三次曲線  $\mathcal{K}$  及一個射影變換  $\varphi$ ，我們有  $\varphi(\mathcal{K})$  也是三次曲線，且對於任意一點  $P$ ，

$$\varphi(\mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^1(P)) = \mathfrak{p}_{\varphi(\mathcal{K})}^1(\varphi(P)), \quad \varphi(\mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^2(P)) = \mathfrak{p}_{\varphi(\mathcal{K})}^2(\varphi(P))$$

或者說  $\varphi \circ \mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^1 = \mathfrak{p}_{\varphi(\mathcal{K})}^1 \circ \varphi$ ,  $\varphi \circ \mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^2 = \mathfrak{p}_{\varphi(\mathcal{K})}^2 \circ \varphi$ 。

*Proof.* 我們可以把  $\varphi$  寫成一個可逆矩陣，所以  $\varphi(\mathcal{K})$  也是三次曲線，後面的部分則由上面兩條式子即可得證。 ■

那由定義，我們一樣會有互反定理：

**Theorem 5.2.3.** 給定一個三次曲線  $\mathcal{K}$ ， $P, Q$  為任意兩點，則

$$P \in \mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^1(Q) \iff Q \in \mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^2(P)$$

除了這個以外，因為有圓錐曲線的關係，所以我們甚至有：

**Proposition 5.2.4.** 給定一個三次曲線  $\mathcal{K}$ ，則對於任意一點  $P$ ，

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^2(P)}^2(P) = \mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^1(P)$$

*Proof.* 過  $P$  作一直線  $\ell$  交  $\mathcal{K}$  於  $M_1, M_2, M_3$  三點，令  $Q = \mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^1(P) \cap \ell$ ， $\{R_1, R_2\} = \mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^2(P) \cap \ell$ ，那麼由定義，

$$\frac{3}{PQ} = \frac{1}{PM_1} + \frac{1}{PM_2} + \frac{1}{PM_3}, \quad \frac{3}{PR_i} = \frac{1}{M_1R_i} + \frac{1}{M_2R_i} + \frac{1}{M_3R_i}$$

所以由韋達定理，

$$\frac{1}{PR_1} + \frac{1}{PR_2} = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{PM_1} + \frac{1}{PM_2} + \frac{1}{PM_3} \right) = \frac{2}{PQ}$$

因此  $Q \in \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^2(P)}^2(P)$ ，所以動  $\ell$  就有  $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^2(P)}^2(P) = \mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^1(P)$ 。 ■

跟圓錐曲線的情況一樣，我們現在會想要定義類似極點的東西，於是：

**Definition 5.2.5.** 給定一個三次曲線  $\mathcal{K}$ ， $K$  為任意一線，在  $\ell$  上取動點  $Q$ ，則  $\mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^2(Q)$  過四個定點  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (可能是複數)，記為  $\mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^0(K)$ ，稱為  $K$  關於  $\mathcal{K}$  的極點。

那麼顯然有：

**Proposition 5.2.6.** 給定一個三次曲線  $\mathcal{K}$ ，那麼對於任意一線  $K$  及一點  $P$ ，

$$P \in \mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^0(K) \iff K = \mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^1(P)$$

**Definition 5.2.7.** 給定一個三次曲線  $\mathcal{K}$ ， $K$  為任意一線，在  $K$  上取動點  $Q$ ，則  $\mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^1(Q)$  的包絡線是一個圓錐曲線，記為  $\mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^2(K)$ ，稱為  $K$  關於  $\mathcal{K}$  的極圓錐曲線 (Poloconic)。

記得這邊是線的極圓錐曲線，不要跟點的搞混。

**Proposition 5.2.8.** 給定一個三次曲線  $\mathcal{K}$ ， $K$  為任意一線，那麼存在  $\triangle ABC$  及其上的某個等共軛變換  $\varphi$  使得  $\{\mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^2(P) \mid P \in K\}$  為  $\varphi$  的對角圓錐曲線族，且  $\mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^2(K) = \varphi(K)$ 。

**Proposition 5.2.9.** 給定一個三次曲線  $\mathcal{K}$ ， $K$  為任意一線，那麼  $\mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^2(K)$  為  $K$  關於  $\mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^0(K)$  的九點圓錐曲線。

## 習題

**Problem 1.** 令  $\tau$  為完全四線形  $\mathcal{Q}$  的牛頓線，證明： $\mathfrak{p}_{\mathcal{K}(\mathcal{Q})}^2(\infty_{\tau})$  是一個等軸雙曲線。

## 5.3 等三次曲線

我們曾經在完美六邊形中看過一個完全四線形的等角共軛軌跡 (巨龍)，它是一個三次曲線。在三角形中，當然也有一些很重要的三次曲線，我們這邊來定義幾個：

**Definition 5.3.1.** 給定一個等共軛變換  $\varphi$ ，我們稱一個三次曲線  $\mathcal{K}$  是一個  $\varphi$  不變的等三次曲線 (Isocubic) 若  $\varphi(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ 。

所以這個時候我們可能會想知道他的解析式長怎樣，假設

$$\varphi[x:y:z] = \left[ \frac{p}{x} : \frac{q}{y} : \frac{r}{z} \right],$$

大家可以驗證  $\mathcal{K}$  有下列兩種形式：

$$ux(ry^2 - qz^2) + vy(pz^2 - rx^2) + wz(qx^2 - py^2) = 0 \quad (p\mathcal{K}),$$

$$ux(ry^2 + qz^2) + vy(pz^2 + rx^2) + wz(qx^2 + py^2) + kxyz = 0 \quad (n\mathcal{K}).$$

其中  $k$  是一個常數。我們先來定義第一種 ( $p\mathcal{K}$ )：

**Definition 5.3.2.** 給定  $\triangle ABC$  與一個等共軛變換  $\varphi$ ，那麼對於任一點  $P$ ，那麼我們定義以  $P$  為中心 (**Pivot**) 的等三次曲線  $\mathcal{K}_\varphi^p(P) = \{Q \mid P, Q, \varphi(Q) \text{ 共線} \}$ ，這時  $\mathcal{K}_\varphi^p(P)$  被稱為可中心化的 (**Pivotal**)。

這個時候  $P = [u:v:w]$ 。顯然地，我們有：

**Proposition 5.3.3.** 對於任意一點  $P$ ， $A, B, C, P, \varphi(P), F_x \in \mathcal{K}_\varphi^p(P)$ ，其中  $F, F_a, F_b, F_c$  為  $\varphi$  的不動點 (如果有的話)。 ■

**Definition 5.3.4.** 令  $\varphi$  為  $\triangle ABC$  的等角共軛變換， $\mathcal{E}$  為  $\triangle ABC$  的歐拉線， $G, O, N, L \in \mathcal{E}$  分別為  $\triangle ABC$  的重心、外心、九點圓圓心及 de Longchamps 點。我們定義

$$\mathcal{K}_\varphi^p(\infty_{\mathcal{E}}), \mathcal{K}_\varphi^p(G), \mathcal{K}_\varphi^p(O), \mathcal{K}_\varphi^p(N), \mathcal{K}_\varphi^p(L)$$

分別為  $\triangle ABC$  的 Neuberg, Thomson, McCay, Napoleon-Feurerbach, Darboux 三次曲線。

所以我們之前在封騰三號的那個等價其實就是 McCay 三次曲線。我們來看第二種 ( $n\mathcal{K}$ )，注意到我們可以把解析式寫成

$$\left( \frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} \right) \left( \frac{p}{ux} + \frac{q}{vy} + \frac{r}{wz} \right) = \frac{p}{u^2} + \frac{q}{v^2} + \frac{r}{w^2} - \frac{k}{uvw},$$

並且  $x/u + y/v + z/w = 0$  是  $P = [u:v:w]$  關於  $\triangle ABC$  的三線性極線，所以我們有：

**Proposition 5.3.5.** 令  $P$  關於  $\triangle ABC$  的三線性極線分別交  $BC, CA, AB$  於  $D, E, F$ ，那麼  $D, E, F \in n\mathcal{K}$ 。 ■

我們把這個  $P$  稱為這個等三次曲線的根 (儘管  $P$  有極高機率不在上面)。

**Theorem 5.3.6.** 給定  $\triangle ABC$  與一個等共軛變換  $\varphi$ ，那麼對於任意  $n\mathcal{K}$ ，存在一個圓錐曲線  $\mathcal{C}$  使得  $P \in n\mathcal{K}$  若且唯若滿足  $P, \varphi(P)$  關於  $\mathcal{C}$  共軛。 ■

那可以發現這個  $\mathcal{C}$  不是唯一的，甚至我們可以直接取  $\mathcal{C}$  是一個圓  $\Gamma$  (有可能是廣義圓或虛圓)，或者等價於所有  $\odot(\overline{Q\varphi(Q)})$  共根心於  $\Gamma$  的中心，這時我們把  $n\mathcal{K}$  記為  $\mathcal{K}_\varphi^n(\Gamma)$ 。不過  $\Gamma$  也不一定是唯一的，比方說  $\odot(\overline{Q\varphi(Q)})$  們根本共軸。那事實上，

**Proposition 5.3.7.** 延續上述標號， $p_c(A), p_c(B), p_c(C)$  分別與  $BC, CA, AB$  交於  $D, E, F$ 。 ■

那這當然是因為  $A, B, C \in n\mathcal{K}$ 。注意到  $n\mathcal{K}$  的解析式中有個常數  $k$ ，可以想像  $k$  在動的時候會產出一整坨經過  $A, B, C, D, E, F$  的等三次曲線。

關於  $n\mathcal{K}$  有個很好想像的例子是  $\mathcal{K}(\triangle ABC \cup \ell)$  (即巨龍)，注意到它沒有中心，可是關於等角共軛變換不變。這時， $D, E, F$  共線於  $\ell$ ，我們發現對於所有等角共軛點對  $(P, Q)$ ， $\odot(\overline{PQ})$  們的圓心都在牛頓線  $\tau$  上，所以根心就是  $\infty_{\perp\tau}$ ，而  $\Gamma = \tau$ 。那跟巨龍一樣，我們有：

**Proposition 5.3.8.** 給定  $\triangle ABC$ 、一個等共軛變換  $\varphi$  及一圓  $\Gamma$ ，若  $P, Q$  為  $\mathcal{K}_\varphi^n(\Gamma)$  上兩點，則  $R = PQ \cap \varphi(P)\varphi(Q) \in \mathcal{K}_\varphi^n(\Gamma)$ 。

*Proof.* 由 (1.4.7) 知  $\varphi(R) = P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q$ ，因此我們有三圓  $\omega_P := \odot(\overline{P\varphi(P)})$ ， $\omega_Q := \odot(\overline{Q\varphi(Q)})$ ， $\omega_R := \odot(\overline{R\varphi(R)})$  共軸於其垂心線，而  $\Gamma$  的中心位於  $\omega_P, \omega_Q$  的根軸上，所以也位於  $\omega_P, \omega_R$  的根軸上，故  $R \in \mathcal{K}_\varphi^n(\Gamma)$ 。 ■

當  $\varphi$  是等角共軛變換時，事情還會再更美好，我們先來看一個定理：

**Theorem 5.3.9.** 給定  $\triangle ABC$ ， $(P, P^*), (Q, Q^*)$  為關於  $\triangle ABC$  的兩對等角共軛點對，令  $\omega_P = \odot(\overline{PP^*})$ ， $\omega_Q = \odot(\overline{QQ^*})$ ， $\Omega_P, \Omega_Q$  分別是  $P, Q$  關於  $\triangle ABC$  的佩多圓。那麼  $\omega_P, \omega_Q$  的根軸為  $\Omega_P, \Omega_Q$  的根軸關於  $\triangle ABC$  的垂心位似 2 倍下的像。

**Corollary 5.3.10.** 給定  $\triangle ABC$ ， $(P, P^*), (Q, Q^*)$  為關於  $\triangle ABC$  的兩對等角共



軌點對，令  $R = PQ \cap P^*Q^*$ ，則  $P, Q, R$  分別關於  $\triangle ABC$  的佩多圓們共軸。 ■

那麼我們可以把  $nK$  換成以下定義：

**Proposition 5.3.11.** 給定  $\triangle ABC$  與一圓  $\Gamma \not\subseteq \mathcal{L}_\infty$ ，令  $\varphi$  為  $\triangle ABC$  的等角共軛變換， $\Gamma'$  為  $\Gamma$  關於  $\triangle ABC$  的垂心位似  $1/2$  倍的像，那麼  $P \in \mathcal{K}_\varphi^n(\Gamma)$  若且唯若  $P$  關於  $\triangle ABC$  的佩多圓與  $\Gamma'$  正交。 ■

那我們之前有算過一個點的佩多圓跟九點圓的夾角嘛，所以我們有

**Corollary 5.3.12.** 對於任意  $\triangle ABC$ ，令  $\varphi$  為  $\triangle ABC$  的等角共軛變換，則對於任意一點  $P$ ，下列敘述等價：

- (i)  $P \in \mathcal{K}_\varphi^n(\odot(ABC))$
- (ii)  $P$  關於  $\triangle ABC$  的佩多圓與  $\triangle ABC$  的九點圓正交
- (iii)  $\sum \angle(AP, BC) = 0^\circ$  ■

$\mathcal{K}_\varphi^n(\odot(ABC))$  被稱為  $K_{jp}$  三次曲線。滿足  $\sum \angle(AP, BC) = 90^\circ$  的軌跡是 McCay 三次曲線，事實上，滿足  $\sum \angle(AP, BC) = \theta$  的軌跡也是一個三次曲線  $\mathcal{K}_\theta$ ，並且顯然有  $\varphi(\mathcal{K}_\theta) = \mathcal{K}_{-\theta}$ 。

## 習題

**Problem 1.** 給定  $\triangle ABC$  及一角  $\theta$ 。證明：滿足  $\sum \angle BAP = \theta$  的軌跡是一條三次曲線。

## 5.4 梁-澤利克定理

所以這個定理真的有助於理解星際旅行嗎？詳見<sup>[1]</sup>。另外因為有證明的關係，所以我也不打算再證一次。那這節最重要的就是  $t$  值。

**Definition 5.4.1.** 給定  $\triangle ABC$ ， $O, H$  為  $\triangle ABC$  的外心、垂心。對於任意一點

$P$ ，令  $Q$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點，我們定義

$$t(P) = t(P, \triangle ABC) = \frac{TO}{TH},$$

其中  $T = PQ \cap OH$ 。

所以可以看出有些點是不能定義  $t$  值的，大概就是  $A, B, C, I_x, O, H$  這些點，其中  $I_x$  是  $\triangle ABC$  的內心或旁心。顯然我們直接有：

**Proposition 5.4.2.** 令  $Q$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點，那麼  $t(P) = t(Q)$ 。

若  $\varphi$  為  $\triangle ABC$  的等角共軛變換，那對於任意一個  $t = t_0$ ，我們知道滿足  $t(P) = t_0$  的點的軌跡是  $K_\varphi^p(T)$ ，其中  $T$  在  $\triangle ABC$  的歐拉線  $OH$  上並滿足  $t(T) = t_0$ 。

**Definition 5.4.3** (廣義歐拉線). 給定  $\triangle ABC$ 、一點  $P$  及一個常數  $x$ ，我們定義  $\triangle ABC$  的  $(x, P)$ -歐拉線為  $\triangle ABC$  的垂心  $H$  與  $\triangle ABC$  的外心  $O$  在關於  $P$  位似  $1/x$  倍下的像  $O'$  的連線 ( $O'H$ )。

**Theorem 5.4.4** (Liang-Zelich). 給定  $\triangle ABC$  及一常數  $t_0 \neq 0, \infty$ ， $P$  為任意一點，令  $P_a, P_b, P_c$  分別為  $P$  關於  $BC, CA, AB$  的對稱點， $O_a, O_b, O_c$  分別為  $\triangle BPC, \triangle CPA, \triangle APB$  的外心，那麼下列敘述等價

- (i)  $t(P) = t_0$ 。
- (ii)  $\triangle P_a P_b P_c$  在關於  $P$  位似  $t_0$  倍的像與  $\triangle ABC$  透視。
- (iii)  $\triangle O_a O_b O_c$  (又稱為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的卡諾三角形 (Carnot Triangle)) 在關於  $P$  位似  $1/t_0$  倍的像與  $\triangle ABC$  透視。
- (iv)  $\triangle ABC, \triangle BPC, \triangle CPA, \triangle APB$  的  $(t_0, P)$  歐拉線共點。

當  $t_0 = 0$  時，(i), (iii), (iv) 等價。當  $t_0 = \infty$  時，(i), (ii) 等價。

這定理可以推論出以下這些事：

**Proposition 5.4.5.** 給定  $\triangle ABC$  與一點  $P$ ，那麼對於下列三角形  $XYZ$ ， $t(P, \triangle XYZ) = t(P, \triangle ABC)$ ：

- (i)  $P$  關於  $\triangle ABC$  的卡諾三角形
- (ii)  $P$  關於  $\triangle ABC$  的佩多三角形
- (iii)  $P$  關於  $\triangle ABC$  的反佩多三角形
- (iv)  $P$  關於  $\triangle ABC$  的圓西瓦三角形

*Proof.* 我們依序證明命題 (i), (ii), (iii), (iv)。

- (i) 令  $t_0 = t(P, \triangle ABC)$ ,  $\triangle O_a O_b O_c$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的卡諾三角形。注意到  $\triangle O_a O_b O_c$  關於  $P$  位似  $1/t_0$  倍的像與  $\triangle ABC$  透視，所以  $P$  關於  $\triangle O_a O_b O_c$  三邊對稱所形成的三角形  $\triangle ABC$  關於  $P$  位似  $t_0$  倍的像與  $\triangle O_a O_b O_c$  透視，故  $t(P, \triangle O_a O_b O_c) = t_0$ 。

- (ii) 令  $Q$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點， $\triangle O'_a O'_b O'_c$  為  $Q$  關於  $\triangle ABC$  的卡諾三角形， $\triangle P_a P_b P_c$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的佩多三角形。因為  $\triangle P_a P_b P_c \cup P \simeq \triangle O'_a O'_b O'_c \cup O$ ，其中  $O$  為  $\triangle ABC$  的外心，所以由 (i)，

$$\begin{aligned} t(P, \triangle P_a P_b P_c) &= t(O, \triangle O'_a O'_b O'_c) = t(Q, \triangle O'_a O'_b O'_c) \\ &= t(Q, \triangle ABC) = t(P, \triangle ABC) \end{aligned}$$

- (iii) 令  $\triangle P_A P_B P_C$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的佩多三角形，那麼由 (ii)，

$$t(P, \triangle P_A P_B P_C) = t(P, \triangle ABC)$$

- (iv) 令  $\triangle DEF$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的圓西瓦三角形， $\triangle Q_a Q_b Q_c$  為  $Q$  關於  $\triangle ABC$  的佩多三角形， $Q^*$  為  $Q$  關於  $\triangle Q_a Q_b Q_c$  的等角共軛點，那麼算角度有  $\triangle DEF \cup P \simeq \triangle Q_a Q_b Q_c \cup Q^*$ ，所以由 (ii)，

$$\begin{aligned} t(P, \triangle DEF) &= t(Q^*, \triangle Q_a Q_b Q_c) = t(Q, \triangle Q_a Q_b Q_c) \\ &= t(Q, \triangle ABC) = t(P, \triangle ABC) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Remark.** 一般來說好像會把 (ii) 稱作梁-澤利克定理，不過我這邊把他當推論。此外，取圓西瓦三角形可以視為反演，也就是說對  $P$  反演保  $t$  值。

講完基本定理了，那在證明這個定理的過程中有一些有趣的定理被使用了，我們來看一個比較重要的：

**Theorem 5.4.6** (Strong Sondat's Theorem). 給定一線  $L$ ，對於任意兩個透視軸不為  $L$  的三角形  $\triangle A_1B_1C_1$ ,  $\triangle A_2B_2C_2$ ，滿足  $A_2(L \cap A_1P)$ ,  $B_2(L \cap B_1P)$ ,  $C_2(L \cap C_1P)$  共點的  $P$  的軌跡是某個  $\triangle A_1B_1C_1$  的外接圓錐曲線與  $L$  的聯集。

*Proof.* 令  $X_1 = B_1(A_2B_2 \cap L) \cap C_1(A_2C_2 \cap L)$ ，類似地定義  $Y_1, Z_1$ 。注意到

$$B_1Y_1 \cap C_1Z_1, C_1X_1 \cap A_1Z_1, A_1Y_1 \cap B_1X_1 \in L,$$

所以由逆帕斯卡定理 (0.4.1)，我們知道  $A_1, B_1, C_1, X_1, Y_1, Z_1$  共一個圓錐曲線  $C_1$ 。我們類似地定義  $C_2, X_2, Y_2, Z_2$ 。

對  $A_1A_1C_1X_1B_1Z_1$  開帕斯卡定理，我們可以得到如果

$$A_1^* = T_{A_1}C_1 \cap B_1X_1, C_1^* = A_1C_1 \cap B_1Z_1,$$

則  $\triangle A_1^*B_1C_1^*$  與  $\triangle A_2B_2C_2$  的透視軸為  $L$ 。我們考慮透視變換  $\varphi$  使得

$$A_1^* \mapsto A_2, B_1 \mapsto B_2, C_1^* \mapsto C_2.$$

由  $A_1C_1^* \cap X_2C_2, A_1B_1 \cap X_2B_2 \in L$ ，我們知道

$$\varphi(A_1) = X_2,$$

所以

$$\varphi(T_{A_1}C_1) = \varphi(A_1A_1^*) = A_2X_2$$

取  $P$  為  $C_1$  上一點，令  $Q_A = A_1P \cap L$ ，類似地定義  $Q_B, Q_C$ ，那麼

$$A_1(P, X_1; Y_1, Z_1) = A_2(Q_A, A_2; B_2, C_2).$$

故

$$A_2(Q_A, A_2; B_2, C_2) = B_2(Q_B, A_2; B_2, C_2) = C_2(Q_C, A_2; B_2, C_2).$$

所以  $A_2Q_A, B_2Q_B, C_2Q_C$  共點於  $Q \in C_2$ 。

我們現在來證明所有滿足條件的  $P$  一定在  $C_1 \cup L$  上。考慮一點  $P' \in AP$ ，類似地定義  $Q'_A, Q'_B, Q'_C$ ，那麼  $B_2Q'_B \mapsto C_2Q'_C$  是一個保交比變換。由於  $\triangle A_1B_1C_1$

與  $\triangle A_2B_2C_2$  不會透視於  $L$ ， $B_2Q'_B \cap C_2Q'_C$  是一個非退化圓錐曲線並交  $A_2Q'_A = A_2Q_A$  於兩個點，也就是當  $A_2Q'_A, B_2Q'_B, C_2Q'_C$  共點時。當  $P' = Q_A$  時，顯然  $A_2Q'_A, B_2Q'_B, C_2Q'_C$  共點於  $Q_A$ 。所以當  $P' \neq Q_A$  時，我們必有  $P' = P$ 。 ■

一般而言會取  $L$  是無窮遠線  $\mathcal{L}_\infty$ ，也就是：

**Corollary 5.4.7.** 對於任意兩個不位似的三角形  $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$ ，滿足過  $A_2$  平行  $A_1P$  的直線，過  $B_2$  平行  $B_1P$  的直線，過  $C_2$  平行  $C_1P$  的直線共點的  $P$  的軌跡是某個  $\triangle A_1B_1C_1$  的外接圓錐曲線與  $\mathcal{L}_\infty$  的聯集。

那直接推論有：

**Corollary 5.4.8** (Sondat's Theorem). 若  $\triangle A_1B_1C_1$  與  $\triangle A_2B_2C_2$  正交且透視，那麼它們的透視中心位於兩個正交中心的連線上。

*Proof.* 若  $\triangle A_1B_1C_1$  與  $\triangle A_2B_2C_2$  位似，則命題顯然，後面假設  $\triangle A_1B_1C_1$  與  $\triangle A_2B_2C_2$  不位似。令  $Q$  為  $\triangle A_1B_1C_1$  與  $\triangle A_2B_2C_2$  的透視中心， $P_i$  為  $\triangle A_iB_iC_i$  關於  $\triangle A_{3-i}B_{3-i}C_{3-i}$  的正交中心 ( $A_iP_i \perp B_{3-i}C_{3-i}$ ，及其輪換)。令  $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{L}_\infty$  為滿足  $A_{3-i} \infty_{A_iP}, B_{3-i} \infty_{B_iP}, C_{3-i} \infty_{C_iP}$  共點的  $P$  的軌跡，那麼  $Q \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ ，由強 Sondat 定理的構造證明中可以看到  $D := B_1 \infty_{A_2B_2} \cap C_1 \infty_{C_2A_2} \in \mathcal{C}_1$ ，並且  $D$  為  $\triangle P_1B_1C_1$  的垂心。所以由  $A_1D \parallel T_{A_2}C_2$  知

$$Q(A_1, B_1; C_1, P_1) = D(A_1, B_1; C_1, P_1) = A_2(A_2, B_2; C_2, P_2) = Q(A_2, B_2; C_2, P_2)$$

因此  $QP_1 = QP_2$ ，或  $Q \in P_1P_2$ 。 ■

**Corollary 5.4.9.** 延續上述推論的標號，若  $P_1, P_2$  為兩個透視中心，則  $P_1P_2$  垂直於  $\triangle A_1B_1C_1$  與  $\triangle A_2B_2C_2$  的透視軸。

我們回來看看有哪些點落在  $\mathcal{K}_{t_0} := \mathcal{K}_\varphi(T)$  上。由 (5.3.3) 我們知道  $T, \varphi(T)$ 、內心及三個旁心在上面。除此之外，由梁-澤利克定理與性質，可以得到：

**Proposition 5.4.10.** 給定  $\triangle ABC$  及一常數  $t_0$ ，令  $\triangle DEF$  為  $\triangle ABC$  的垂足三角形，在  $AD$  上取一點  $H_a$  使得  $AH_a/DH_a = 2t_0$ ，類似定義  $H_b, H_c$ ，那麼  $H_a, H_b, H_c \in \mathcal{K}_{t_0}$ 。

*Proof.* 令  $H_a$  關於  $BC, CA, AB$  的對稱點分別為  $H_{aa}, H_{ab}, H_{ac}$ ，那麼我們知道  $H_{aa}$  關於  $H_a$  位似  $t_0$  倍下的像為  $A$ ，所以  $\triangle H_{aa}H_{ab}H_{ac}$  關於  $H_a$  位似  $t_0$  倍下的像與  $\triangle ABC$  透視，由梁-澤利克定理的 (ii)， $H_a \in \mathcal{K}_{t_0}$ 。同理有  $H_b, H_c \in \mathcal{K}_{t_0}$ 。 ■

如果能把上面這個證明類似地應用在梁-澤利克定理的 (iii)，會發現其中一個點是  $T$ ，而另外兩個點則不一定存在。

**Proposition 5.4.11.** 令  $\mathcal{K}_\varphi^p(L)$  為  $\triangle ABC$  的 Darboux 三次曲線，則  $\mathcal{K}_\varphi^p(L)$  關於  $\triangle ABC$  的外心  $O$  對稱。

*Proof.* 注意到  $t(L) = 1/2$ ，所以由 (5.4.4) 中 (i) 與 (ii) 的等價性，一點  $P \in \mathcal{K}_\varphi^p(L)$  若且唯若  $P$  關於  $\triangle ABC$  的佩多三角形與  $\triangle ABC$  透視。令  $P \in \mathcal{K}_\varphi^p(L)$ ， $P'$  為  $P$  關於  $O$  的對稱點，設  $\triangle P_aP_bP_c, \triangle P'_aP'_bP'_c$  分別為  $P, P'$  關於  $\triangle ABC$  的佩多三角形，那麼他們的對應頂點關於三邊中點對稱，因此  $\triangle P'_aP'_bP'_c$  與  $\triangle ABC$  透視於  $\triangle P_aP_bP_c$  與  $\triangle ABC$  的透視中心關於  $\triangle ABC$  的等截共軛點 (以重心  $G$  為極點的點等共軛變換)，所以  $P' \in \mathcal{K}_\varphi^p(L)$ 。 ■

## 習題

**Problem 1.** 給定  $\triangle ABC$ ，令  $A_1$  為  $A$  關於  $BC$  的對稱點，類似定義  $B_1, C_1$ ，設  $A_2 = BC_1 \cap CB_1$ 。證明： $A_1A_2$  平行於  $\triangle ABC$  的歐拉線。

**Problem 2.** 給定任意三角形  $\triangle ABC$ ，令  $B^*, C^*$  分別為  $B, C$  關於  $CA, AB$  的對稱點， $I_b, I_c$  分別為  $B, C$  關於  $\triangle ABC$  的旁心， $P = I_bC^* \cap I_cB^*$ ， $A', B', C'$  分別為  $P$  關於  $BC, CA, AB$  的對稱點。證明： $AA', BB', CC'$  共點。

**Problem 3** (Térv Cohl). 平面上有一個三角形  $ABC$ ，其外接圓為  $\Gamma$ ，設點  $A'$  是點  $A$  在  $\Gamma$  上的對徑點。作正三角形  $BCD$ ，使得  $A, D$  兩點位於  $BC$  的異側。設過  $A'$  且與  $A'D$  垂直的直線分別與直線  $CA, AB$  交於  $E, F$  兩點。以  $EF$  為底，作底角為  $30^\circ$  的等腰三角形  $ETF$ ，並使  $A, T$  兩點位於  $EF$  的異側。證明： $AT$  經過三角形  $ABC$  的九點圓圓心  $N$ 。

**Problem 4.** 令銳角  $\triangle ABC$  是非等腰的且  $P$  為其內部一點。 $A_1, B_1, C_1$  分別為

$P$  關於  $BC, CA, AB$  的垂足。試找出所有點  $P$  使得  $AA_1, BB_1, CC_1$  共點且

$$\angle PAB + \angle PBC + \angle PCA = 90^\circ.$$

## 參考資料

- [1] Ivan Zelich and Xuming Liang (2015). *Generalisations of the Properties of the Neuberg Cubic to the Euler Pencil of Isopivotal Cubics*.  
<https://ijgeometry.com/wp-content/uploads/2015/10/1.pdf>
- [2] *Desargues' Involution Theorem*.  
<https://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/63.pdf>
- [3] Chris van Tienhoven. *Encyclopedia of Quadri-Figures*.  
<https://chrisvantienhoven.nl/>
- [4] Jean-Pierre Ehrmann and Bernard Gibert (2015). *Special Isocubics in the Triangle Plane*  
<http://bernard.gibert.pagesperso-orange.fr/files/Resources/SITP.pdf>
- [5] 張志煥。正交截線
- [6] dqzy800. 完美六邊形研究綜述  
<https://bbs.cnool.net/5443327.html>
- [7] 鄭容濤。等角共軛點與完美六邊形初論