平面幾何

Li4

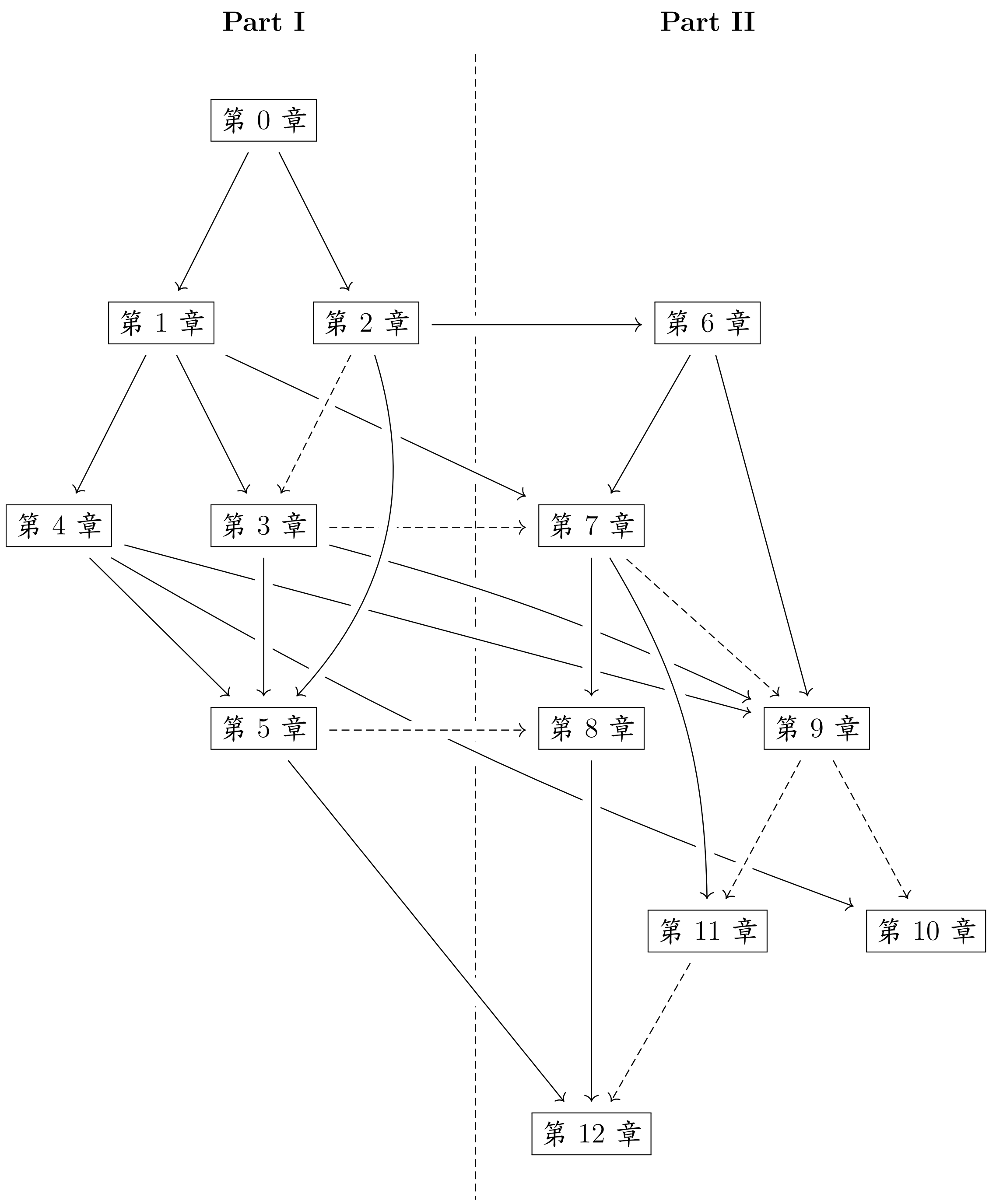
March 14, 2024

ver. 4.X.0

目錄

前言

這份講義大部分都是自己打爽的。另外，如果你有發現 typo 或錯誤的地方，請寄信到 chjh21005@gmail.com 告訴我。下一頁的圖代表著各章之間的獨立性，其中實線代表一定要先讀過，虛線則代表先讀過不虧。


Part I
Part II
第 0 章
第 1 章
第 2 章
第 6 章
第 4 章
第 3 章
第 7 章
第 5 章
第 8 章
第 9 章
第 11 章
第 10 章
第 12 章

Part I

基礎幾何

Chapter 0

長度與角度

兩個點會給出一段「長度」，而兩條直線會夾出一個「角度」。在這邊我們假設長度與角度是平移與旋轉下的不變量，而長度與無向角度是對稱下的不變量。

0.1 有向角

♠：在這節中，我們假設所有的直線都不是無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$。

一個幾何敘述其實每個人畫出來的圖可能都不一樣，有時候一個點會在夾角內，有時候在夾角外。舉例來說：

Example 0.1.1. 設 $\angle BAC = 20^\circ, \angle BAD = 40^\circ$，請問 $\angle CAD$ 為幾度？

你會發現答案可以是 20°，也可以是 60°，因為這取決於 C 是不是落在 $\angle BAD$ 內。那這時候如果我們可以找一個方法使得所有角度關係都不用看內外就再好不過了，這也是為什麼我們經常使用有向角：

Definition 0.1.2 (有向角)**.** 對於任意兩條有向直線 $\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_2$，令 ℓ_1, ℓ_2 分別為 $\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_2$ 所代表的無向直線。我們定義 $\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_2$ 之間的**有向角** (**directed angle**) $\measuredangle(\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_2)$ 為

(i) $\overrightarrow{\ell}_1$ 以 $\ell_1 \cap \ell_2$ [1]為中心逆時針旋轉至與 $\overrightarrow{\ell}_2$ 重合之旋轉量，若 $\ell_1 \cap \ell_2 \notin \mathcal{L}_\infty$ 且 $\overrightarrow{\ell}_1 \neq \overrightarrow{\ell}_2$；

(ii) 0° (180°)，若 $\ell_1 \cap \ell_2 \cap \mathcal{L}_\infty \neq \varnothing$ 且 $\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_2$ 同 (反) 向。

對於兩個向量 $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$，我們則定義 $\measuredangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ 為 $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ 所延伸出的有向直線 $\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_2$ 之間的夾角 $\measuredangle(\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_2)$。

可以從定義看出有向角在表示上是要模 $360^\circ = 2\pi$ 的，換句話說值會落在 $\mathbb{R}^\circ / 360^\circ$ 中。那麼對於一般的直線，也就是無向直線，我們可以隨意的選擇一個方向，並將夾角模 $180^\circ = \pi$，也就是說，

$$\measuredangle(\ell_1, \ell_2) \equiv \measuredangle(\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_2) \pmod{180^\circ}.$$

Definition 0.1.3. 令 ℓ_1, ℓ_2 為兩條直線。

(i) 若 $\measuredangle(\ell_1, \ell_2) = 0^\circ$，則我們稱 ℓ_1, ℓ_2 **平行** (**parallel**)，記作 $\ell_1 \parallel \ell_2$。

(ii) 若 $\measuredangle(\ell_1, \ell_2) = 90^\circ$，則我們稱 ℓ_1, ℓ_2 **垂直** (**perpendicular**)，記作 $\ell_1 \perp \ell_2$。

Proposition 0.1.4. 對於任意三條有向直線 $\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_2, \overrightarrow{\ell}_3$，我們有

$$\measuredangle(\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_2) + \measuredangle(\overrightarrow{\ell}_2, \overrightarrow{\ell}_3) = \measuredangle(\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_3).$$

Proof. 我們先考慮平行的情形，也就是 $\ell_1 \parallel \ell_2$，由旋轉量為平移下是不變量，我們有

$$\measuredangle(\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_3) = \begin{cases} \measuredangle(\overrightarrow{\ell}_2, \overrightarrow{\ell}_3) = \measuredangle(\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_2) + \measuredangle(\overrightarrow{\ell}_2, \overrightarrow{\ell}_3), & \text{if } \overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_2 \text{ 同向，} \\ \measuredangle(\overrightarrow{\ell}_2, \overrightarrow{\ell}_3) + 180^\circ = \measuredangle(\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_2) + \measuredangle(\overrightarrow{\ell}_2, \overrightarrow{\ell}_3), & \text{if } \overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_2 \text{ 反向。} \end{cases}$$

對於任意情形，令 $O = \ell_1 \cap \ell_3$。若 $O \in \mathcal{L}_\infty$，則由平行的情形，

$$\measuredangle(\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_2) = \begin{cases} \measuredangle(\overrightarrow{\ell}_3, \overrightarrow{\ell}_2) = -\measuredangle(\overrightarrow{\ell}_2, \overrightarrow{\ell}_3), & \text{if } \overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_3 \text{ 同向，} \\ \measuredangle(\overrightarrow{\ell}_3, \overrightarrow{\ell}_2) + 180^\circ = -\measuredangle(\overrightarrow{\ell}_2, \overrightarrow{\ell}_3) + 180^\circ, & \text{if } \overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_3 \text{ 反向。} \end{cases}$$

[1]我們這邊以 $\ell_1 \cap \ell_2$ 表示 ℓ_1 與 ℓ_2 的交點，之後會經常使用這個記號來表示交點。

因此無論是同向還是反向我們都得到 $\measuredangle(\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_2) + \measuredangle(\overrightarrow{\ell}_2, \overrightarrow{\ell}_3) = \measuredangle(\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_3)$。

若 $O \notin \mathcal{L}_\infty$，我們考慮過 O 且平行於 $\overrightarrow{\ell}_2$ 的有向直線 $\overrightarrow{\ell}_4$，則同樣由平行的情形，

$$\measuredangle(\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_2) + \measuredangle(\overrightarrow{\ell}_2, \overrightarrow{\ell}_3) = \measuredangle(\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_4) + \measuredangle(\overrightarrow{\ell}_4, \overrightarrow{\ell}_3) = \measuredangle(\overrightarrow{\ell}_1, \overrightarrow{\ell}_3),$$

其中最後一個等號是由定義得到的。 ■

Definition 0.1.5. 對於任意三點 A, B, O，我們定義

$$\measuredangle AOB = \measuredangle\big(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\big).$$

除非特別說明，不然都是當 $\measuredangle AOB \pmod{180^\circ}$ 來看。

我們回到一開始的例子，如果把問題寫成

Example 0.1.6. 設 $\measuredangle BAC = 20^\circ, \measuredangle BAD = 40^\circ$，請問 $\measuredangle CAD$ 為幾度？

這時候我們就可以直接回答

$$\measuredangle CAD = \measuredangle BAD - \measuredangle BAC = 20^\circ.$$

接下來就讓我們確認以前學的那些角度關係在有向角下的表示方式。

Proposition 0.1.7. 令 P 為任意一點，則對於三點 A, B, C 滿足 $A \neq P$ 且 $A \notin \mathcal{L}_\infty$，$A, B, C$ 共線若且唯若 $\measuredangle PAB = \measuredangle PAC$。

Proof. 我們知道 A, B, C 共線若且唯若 $AB \parallel AC$，而後者等價於

$$\measuredangle BAC = \measuredangle PAC - \measuredangle PAB = 0^\circ.$$ ■

Proposition 0.1.8. 若三點 A, B, C 滿足 $\overline{CA} = \overline{AB}$，則

$$\measuredangle CBA = \measuredangle ACB \pmod{360^\circ}$$

且 A 位於 $\overline{BC}$ 的中垂線上。

Proof. 令 ℓ 為 $\angle BAC$ 的內角平分線，也就是滿足過 A 且 $\measuredangle\big(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{\ell}\big)=\measuredangle\big(\overrightarrow{\ell},\overrightarrow{AC}\big)$ 的直線 ℓ（注意到這樣的有向直線會有兩條，但恰好方向相反，所以 ℓ 是唯一的），則由 $\overline{CA}=\overline{AB}$ 知 B 關於 ℓ 的對稱點為 C。因此我們有

$$\begin{aligned}\measuredangle CBA&=\overrightarrow{BC}\text{ 以 }B\text{ 為中心，逆時針旋轉至與 }\overrightarrow{BA}\text{ 重合之旋轉量}\\&=\overrightarrow{CB}\text{ 以 }C\text{ 為中心，順時針旋轉至與 }\overrightarrow{CA}\text{ 重合之旋轉量}\\&=\overrightarrow{CA}\text{ 以 }C\text{ 為中心，逆時針旋轉至與 }\overrightarrow{CB}\text{ 重合之旋轉量}\\&=\measuredangle ACB\pmod{360^\circ}.\end{aligned}$$

接下來我們證明 ℓ 就是 $\overline{BC}$ 的中垂線。由 $\measuredangle\big(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{\ell}\big)=\measuredangle\big(\overrightarrow{\ell},\overrightarrow{AC}\big)$ 及上式，我們有

$$\begin{aligned}2\cdot\measuredangle(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{\ell})&=2\cdot\measuredangle CBA+2\cdot\measuredangle(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{\ell})\\&=\measuredangle CBA+\measuredangle ACB+\measuredangle(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{\ell})+\measuredangle(\overrightarrow{\ell},\overrightarrow{CA})\\&=\measuredangle(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB})+\measuredangle(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BA})+\measuredangle(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA})=180^\circ\pmod{360^\circ}.\end{aligned}$$

故 $\measuredangle(BC,\ell)=90^\circ$。令 M 為 BC 與 ℓ 的交點，則 $M\notin\mathcal{L}_\infty$ 且由對稱知 $\overline{MB}=\overline{MC}$，故 ℓ 為 $\overline{BC}$ 的中垂線。 ■

這個性質的（某個）逆敘述

若 A 位於 $\overline{BC}$ 的中垂線上，則 $\overline{CA}=\overline{AB}$ 且

$$\measuredangle CBA=\measuredangle ACB\pmod{360^\circ}.$$

是顯然的：注意到 A,B,C 關於 $\overline{BC}$ 的中垂線的對稱點為 A,C,B。因此由對稱保長、保角即得所求。但 $\measuredangle CBA=\measuredangle ACB$ 並不會推得剩下兩個，因為這時候有可能是 $\measuredangle CBA=\measuredangle ACB=0^\circ$，即 A,B,C 共線。所以正確的敘述應該是

若 $\measuredangle CBA=\measuredangle ACB\neq0^\circ\pmod{180^\circ}$，則 A 位於 $\overline{BC}$ 的中垂線上且 $\overline{CA}=\overline{AB}$。

證明基本上只要假設 A' 為 BA 與 $\overline{BC}$ 中垂線的交點，並使用同一法即可。

Example 0.1.9. 給定 $\triangle ABC$，我們考慮三邊 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 的中垂線們 ℓ_A,ℓ_B,ℓ_C，則這三條直線當中任兩條不平行。令 O 為 ℓ_B 與 ℓ_C 的交點，則 $\overline{OC}=\overline{OA}$

且 $\overline{OA}=\overline{OB}$，所以由 $\overline{OB}=\overline{OC}$ 及 (0.1.8)，我們有 $O\in\ell_A$。故 ℓ_A,ℓ_B,ℓ_C 共於一點 O，我們把這個點稱作 $\triangle ABC$ 的**外心** (**circumcenter**)。以 O 為圓心，$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 為半徑長，我們可以作一圓 Ω 過 A, B, C 三點，我們把這個圓稱作 $\triangle ABC$ 的**外接圓** (**circumcircle**)，一般記做 $\odot(ABC)$。注意到通過 A, B, C 三點的圓，其圓心一定要在 ℓ_A,ℓ_B,ℓ_C 上，因此外接圓 Ω 與外心 O 是唯一的。

Proposition 0.1.10. 令 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，則

$$\measuredangle BAC+\measuredangle CBO=90^\circ.$$

Proof. 由 (0.1.8)，我們有

$$\begin{aligned}2\cdot\measuredangle BAC&=\measuredangle BAC+\measuredangle BAO+\measuredangle OAC\\&=\measuredangle BAC+\measuredangle OBA+\measuredangle ACO\\&=\measuredangle OBC+\measuredangle BCO+180^\circ=2\cdot\measuredangle OBC+180^\circ\pmod{360^\circ}.\end{aligned}$$

因此

$$\measuredangle BAC=\measuredangle OBC+90^\circ\pmod{180^\circ},$$

即 $\measuredangle BAC+\measuredangle CBO=90^\circ$。 ■

從上面的證明，我們也可以看出

$$2\cdot\measuredangle BAC=\measuredangle OBC+\measuredangle BCO+180^\circ=\measuredangle BOC\pmod{360^\circ},$$

也就是我們熟悉的圓心角為圓周角的兩倍。

Example 0.1.11. 令 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，ℓ 為過 A 且垂直於 BC 的直線 $A\infty_{\perp BC}$。則

$$\begin{aligned}\measuredangle(AB+AC,AO+\ell)&=\measuredangle BAO+\measuredangle(AC,\ell)\\&=(90^\circ-\measuredangle ACB)+(90^\circ+\measuredangle ACB)=0^\circ.\end{aligned}$$

這時候我們說 AO,ℓ 是關於 $\angle BAC$ 的**等角線** (**isogonal lines**)，是一個很常用的角度關係。

Proposition 0.1.12. 對於任意相異四點 A, B, P, Q，A, B, P, Q 共廣義圓[2]若且唯若 $\measuredangle APB = \measuredangle AQB$。

Proof. 若 A, B, P, Q 中有三點共線，則命題顯然成立，因此我們假設 A, B, P, Q 中任三點不共線。令 O_P, O_Q 分別為 $\triangle PAB, \triangle QAB$ 的外心，則 A, B, P, Q 共圓若且唯若 $O_P = O_Q$。由於 O_P, O_Q 皆位於 $\overline{AB}$ 的中垂線上，因此 $O_P = O_Q$ 若且唯若 $\measuredangle BAO_P = \measuredangle BAO_Q$。由 (0.1.10)，

$$\measuredangle APB + \measuredangle BAO_P = 90^\circ = \measuredangle AQB + \measuredangle BAO_Q,$$

故 $\measuredangle BAO_P = \measuredangle BAO_Q$ 若且唯若 $\measuredangle APB = \measuredangle AQB$。 ■

這個性質告訴我們給定 A, B 與一角 θ 時，滿足 $\measuredangle APB = \theta$ 的軌跡是某個過 A, B 的廣義圓 Γ（扣掉 A, B 兩點），即

$$\{P \mid \measuredangle APB = \theta\} = \Gamma \setminus \{A, B\}.$$

當 $\theta = 90^\circ$ 時，Γ 的圓心 O 滿足

$$\measuredangle BAO = 90^\circ - \measuredangle APB = 0^\circ,$$

因此 O 為 $\overline{AB}$ 中點。這時候我們稱 Γ 是以 $\overline{AB}$ 為**直徑** (**diameter**) 的圓，記作 $\odot(\overline{AB})$。

在計算共圓之間的夾角時，我們經常使用到逆平行這個概念：

Definition 0.1.13. 我們說直線對 (L_1, L_2) 關於 (ℓ_1, ℓ_2) **逆平行** (**antiparallel**) 若

$$\measuredangle(L_1, \ell_1) + \measuredangle(L_2, \ell_2) = 0^\circ.$$

我們可以輕易地看出 ℓ_1 與 ℓ_2、L_1 與 L_2 之間可以交換（也就是說我們可以假設直線對 (L_1, L_2) 與 (ℓ_1, ℓ_2) 是無序的），以及逆平行是個**等價關係** (**equivalence relation**)：

(i) $\measuredangle(\ell_1, \ell_1) + \measuredangle(\ell_2, \ell_2) = 0^\circ \implies (\ell_1, \ell_2)$ 關於 (ℓ_1, ℓ_2) 逆平行；

[2]即圓或直線，我們會在第 6.A 節看到這等價於過兩個無窮虛圓點的圓錐曲線。

(ii) (L_1, L_2) 關於 (ℓ_1, ℓ_2) 逆平行等價於

$$\measuredangle(L_1, \ell_1) + \measuredangle(L_2, \ell_2) = 0^\circ = -\big(\measuredangle(\ell_1, L_1) + \measuredangle(\ell_2, L_2)\big)$$

等價於 (ℓ_1, ℓ_2) 關於 (L_1, L_2) 逆平行；

(iii) 若 (K_1, K_2) 關於 (L_1, L_2) 逆平行且 (L_1, L_2) 關於 (ℓ_1, ℓ_2) 逆平行，則

$$\begin{aligned}\measuredangle(K_1, \ell_1) + \measuredangle(K_2, \ell_2) &= \measuredangle(K_1, L_1) + \measuredangle(L_1, \ell_1) + \measuredangle(K_2, L_2) + \measuredangle(L_2, \ell_2) \\ &= 0^\circ,\end{aligned}$$

即 (K_1, K_2) 關於 (ℓ_1, ℓ_2) 逆平行。

而 (0.1.12) 告訴我們四點 A, B, P, Q 共圓就等價於 (AP, BQ) 關於 (AQ, BP) 逆平行。

Example 0.1.14 (Reim's). 令 A_1, A_2, B_1, B_2 為共圓四點，C_1 為 A_1B_1 上一點。證明：$\odot(B_1B_2C_1)$，A_2B_2，跟過 C_1 平行於 A_1A_2 的直線共點。

Solution. 設 A_2B_2 與過 C_1 平行於 A_1A_2 的直線交於 C_2。由於 A_1, A_2, B_1, B_2 共圓，(A_1A_2, B_1B_2) 關於 (A_1B_1, A_2B_2) 逆平行。所以由 $A_1A_2 \parallel C_1C_2$ 我們可以得到 (C_1C_2, B_1B_2) 關於 (B_1C_1, B_2C_2) 逆平行，故 B_1, B_2, C_1, C_2 共圓，證畢。

Example 0.1.15. 令 Γ 為銳角三角形 $\triangle ABC$ 的外接圓。由 $\angle ABC$ 做角平分線，該線與線段 AC 相交於點 B_1，該線與弧 AC 相交於點 P。過 B_1 且垂直於線段 BC 的直線和弧 BC 相交於點 K。過 B 且垂直於線段 AK 的直線和線段 AC 相交於點 L。試證：K, L 與 P 三點共線。

Solution. K, L, P 共線等價於 $\measuredangle AKL = \measuredangle AKP$，而我們知道

$$\measuredangle AKP = \measuredangle ABP = \measuredangle PBC = \measuredangle B_1BC = 90^\circ - \measuredangle KB_1B$$

且 $\measuredangle AKL = 90^\circ - \measuredangle KLB$，因此我們只需證明 $\measuredangle KLB = \measuredangle KB_1B$，即 B, K, L, B_1 共圓。

而 B, K, L, B_1 共圓等價於 $\measuredangle KB_1L = \measuredangle KBL$，那我們就來算算看兩邊是否相等。

$$\measuredangle KB_1L = 90^\circ - \measuredangle ACB = 90^\circ - \measuredangle AKB = \measuredangle KBL,$$

所以它們真的一樣，也就是說原命題成立。

後面這段也可以用逆平行來看：A, B, C, K 共圓告訴我們 (AK, BC) 關於 (BK, AC) 逆平行，而 $AK \perp BL$, $BC \perp B_1K$ 告訴我們 (BL, B_1K) 關於 (AK, BC) 逆平行，因此 (BL, B_1K) 關於 $(BK, AC = B_1L)$ 逆平行，即 B, K, L, B_1 共圓。

Theorem 0.1.16 (三圓定理)**.** 給定 $\triangle ABC$，設 E, F 分別位於 CA, AB 上，D 為一點。證明：D 在 BC 上若且唯若 $\odot(EAF)$, $\odot(FBD)$, $\odot(DCE)$ 共點。這時候三圓所共的點稱為 $\triangle DEF$ 關於 $\triangle ABC$ 的**密克點** (**Miquel point**)。

Proof. 設 P 為 $\odot(FBD)$ 與 $\odot(DCE)$ 異於 D 的交點，我們想證明 P 位於 $\odot(EAF)$ 上等價於 D 位於 BC 上，而這兩件事都可以用有向角敘述，即

$$\measuredangle EAF = \measuredangle EPF \iff \measuredangle BDC = 0^\circ.$$

那這時候我們就直接計算

$$\measuredangle BDC = \measuredangle BDP + \measuredangle PDC = \measuredangle BFP + \measuredangle PEC = \measuredangle FAE + \measuredangle EPF,$$

因此

$$\measuredangle EAF = \measuredangle EPF \iff \measuredangle BDC = \measuredangle FAE + \measuredangle EPF = 0^\circ. \qquad \blacksquare$$

Example 0.1.17. 令 $\triangle M_aM_bM_c$ 為 $\triangle ABC$ 的中點三角形，意即，M_a, M_b, M_c 分別為 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 的中點。則 $\triangle M_aM_bM_c$ 關於 $\triangle ABC$ 的密克點為 $\triangle ABC$ 的外心 O (注意到 $\odot(ADE)$ 是以 $\overline{AO}$ 為直徑的圓)。

一般而言要求任意一個三角形 DEF 關於 $\triangle ABC$ 的密克點 M 是相對困難的，比方說，我們很難從 $\triangle DEF$ 與 $\triangle ABC$ 的一些角度關係去計算 $\measuredangle BAM$。

在三圓定理 (0.1.16) 中如果我們假設 D, E, F 共線，除了 $\odot(EAF)$, $\odot(FBD)$, $\odot(DCE)$ 共點以外，我們再對 D, B, C 分別位在 $\triangle AEF$ 上這件事開三圓定理，就可以得到 $\odot(BAC)$, $\odot(CED)$, $\odot(DFB)$ 共點。結合這兩件事就得到：

Theorem 0.1.18 (密克定理/Miquel's). 令 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ 為任三線不共點的四條直線，則其所圍出的四個三角形的外接圓們共點。

這個點被稱為 $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ 的密克點，是完全四線形大部分性質的基礎，我們會在第 4 章中看到。為了下一節的需要，我們在這裡用有向角來定義相似：

Definition 0.1.19. 對於兩個三角形 $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$

(i) 我們說 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ **正 (反) 向相似** (**directly (inversely) similar**)，若

$$\begin{aligned}\measuredangle B_1A_1C_1 &= (-)\measuredangle B_2A_2C_2,\\ \measuredangle A_1C_1B_1 &= (-)\measuredangle A_2C_2B_2,\\ \measuredangle C_1B_1A_1 &= (-)\measuredangle C_2B_2A_2,\end{aligned}$$

記為 $\triangle A_1B_1C_1 \overset{+}{\sim} (\overset{-}{\sim})\, \triangle A_2B_2C_2$。

(ii) 我們說 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ **正 (反) 向全等** (**directly (inversely) congruent**)，若 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 正 (反) 向相似且

$$\overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2}, \quad \overline{C_1A_1} = \overline{C_2A_2}, \quad \overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2},$$

記為 $\triangle A_1B_1C_1 \overset{+}{\cong} (\overset{-}{\cong})\, \triangle A_2B_2C_2$。

(iii) 我們說 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ **相似** (**全等**)，若 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 正向相似 (全等) 或反向相似 (全等)，記為 $\triangle A_1B_1C_1 \sim (\cong)\, \triangle A_2B_2C_2$。

Proposition 0.1.20. 若 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 相似，則

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{\overline{C_1A_1}}{\overline{C_2A_2}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}}.$$

我們先證明一個常用引理：

Lemma 0.1.21. 若 A_1, B_1, C_1 及 A_2, B_2, C_2 分別共於兩相異直線 ℓ_1, ℓ_2，且滿足 $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$，則

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$

這邊我們允許把三線平行這個條件的某線換成兩點重合，例如：$A_1 = A_2$ 且 $B_1B_2 \parallel C_1C_2$ 等等。

Proof. 因為

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2} \iff \frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \frac{A_2C_2}{C_2B_2},$$

所以我們總是可以交換 A, B, C 的順序使得 $B_1 \neq B_2$。

由於 $A_1A_2 \parallel B_1B_2$（或 $A_1 = A_2$），

$$[\triangle A_1B_1B_2] = [\triangle A_2B_1B_2],$$

其中 $[\triangle XYZ]$ 表示 $\triangle XYZ$ 的有向面積。同理，我們有

$$[\triangle C_1B_1B_2] = [\triangle C_2B_1B_2].$$

故

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{[\triangle A_1B_1B_2]}{[\triangle B_1C_1B_2]} = \frac{[\triangle A_2B_1B_2]}{[\triangle B_1C_2B_2]} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$

■

Proof of (0.1.20). 若 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 反向相似，我們可以考慮 $\triangle A_2B_2C_2$ 關於 B_2C_2 的對稱 $\triangle A_2'B_2C_2$，這時候我們有 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2'B_2C_2$ 正向相似，因此我們總是可以假設 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 正向相似。

考慮將 A_2 送至 A_1 的平移，將 $\triangle A_2B_2C_2$ 送至 $\triangle A_1B_2'C_2'$，我們不妨假設 $A_1 = A_2 = A$。考慮固定 A 的旋轉，將 AB_2 旋轉至 AB_1。這時，由 $\measuredangle B_1AC_1 = \measuredangle B_2AC_2$，我們知道 AC_2 會旋轉至 AC_1。因此我們可以假設 A, B_1, B_2 與 A, C_1, C_2 分別共線。

由

$$\measuredangle(B_1C_1, B_2C_2) = \measuredangle C_1B_1A - \measuredangle C_2B_2A = 0°,$$

我們知道 $B_1C_1 \parallel B_2C_2$。因此由 (0.1.21)，

$$\frac{C_1A}{C_2A} = \frac{B_1A}{B_2A} = \frac{AB_1}{AB_2}.$$

同理有剩下的比例關係。 ■

0.1.1 形式和

當我們在計算角度時，總是在考慮（有向）直線之間夾角，但一般來說我們不會算的角度其實都是指我們不知道怎麼換掉的直線。所以其實我們應該想辦法把直線換掉而不是把角度換掉。

那形式和做的事情很簡單，就是把 $\measuredangle(\ell_1, \ell_2)$ 寫成

$$\ell_2 - \ell_1.$$

這樣子 $\measuredangle(\ell_1, \ell_2) + \measuredangle(\ell_2, \ell_3) = \measuredangle(\ell_1, \ell_3)$ 就會變成

$$(\ell_2 - \ell_1) + (\ell_3 - \ell_2) = \ell_3 - \ell_1,$$

這在我們熟知的加減法世界當然是對的，也就是說，形式和這個記號是良好定義的。

注意到兩直線 ℓ_1 與 ℓ_2 平行若且唯若 $\ell_2 - \ell_1 = \measuredangle(\ell_1, \ell_2) = 0^\circ$，因此，在形式和的記號中，

$$\ell_1 \parallel \ell_2 \quad \iff \quad \ell_1 = \ell_2.$$

而兩直線對 (L_1, L_2) 與 (ℓ_1, ℓ_2) 逆平行實際上就是

$$(\ell_1 + \ell_2) - (L_1 + L_2) = \measuredangle(L_1, \ell_1) + \measuredangle(L_2, \ell_2) = 0,$$

即 $L_1 + L_2 = \ell_1 + \ell_2$。所以我們從形式和的角度來看，逆平行當然是個等價關係。另外，透過這個例子，我們應該要，並且能夠擴充有向角 $\measuredangle(L, \ell)$ 的定義到

$$\begin{aligned}\measuredangle(L_1 + \cdots + L_n, \ell_1 + \cdots + \ell_n) &:= (\ell_1 + \cdots + \ell_n) - (L_1 + \cdots + L_n)\\ &= \measuredangle(L_1, \ell_1) + \cdots + \measuredangle(L_n, \ell_n),\end{aligned}$$

而且我們知道交換 ℓ_i, ℓ_j 或 L_i, L_j 的順序並不會改變結果。

形式和的主要優勢在於計算共圓或得到圓上的角度關係。我們知道 A, B, P, Q 共圓若且唯若 $\measuredangle APB = \measuredangle AQB$，這在形式和的記號中讀作

$$PB - PA = QB - QA,$$

也就是

$$AP + BQ = AQ + BP.$$

（這件事情我們也可以從逆平行看出。）當然，一旦交換 B, P 的角色，我們會得到另一個關係：

$$AP + BQ = AB + PQ.$$

這告訴我們在共圓的時候，圓上四個點 A, B, P, Q 可以隨便拆成兩對，而它們的和

$$AB + PQ = AP + BQ = AQ + BP$$

都是相等的。反過來說，在 $AB + PQ, AP + BQ, AQ + BP$ 中如果有兩者是相等的，那代表 A, B, P, Q 共圓，且第三個和也會跟它們相等。因此，在一個固定的圓 Γ 上，我們可以將

$$AB + PQ = AP + BQ = AQ + BP$$

寫作 $A + B + P + Q \quad (\Gamma)$ 或 $(A + B + P + Q)_\Gamma$。

作為一個與有向角的比較，我們把三圓定理的證明改寫成形式和的證明：想要證明 D 在 BC 上若且唯若 $\odot(EAF), \odot(FBD), \odot(DCE)$ 共點，其中 E, F 分別位於 CA, AB 上。設 P 為 $\odot(FBD)$ 與 $\odot(DCE)$ 異於 D 的交點，則

$$PE = PD + CE - CD = PD + AE - CD,$$
$$PF = PD + BF - BD = PD + AF - BD.$$

因此 D 在 BC 上若且唯若 $BD = CD$ 若且唯若

$$PE - PF = AE - AF,$$

即 A, P, E, F 共圓。

Example 0.1.22. 令 O_1 與 O_2 分別為兩圓 c_1 與 c_2 之圓心，且 c_1 與 c_2 相交於 A, B 兩點。另外，O_2 在圓 c_1 之外部且 O_1 在圓 c_2 之外部。直線 O_1A 與 c_2 交於 $P_2 \neq A$，直線 O_2A 與 c_1 交於 $P_1 \neq A$。試證：O_1, O_2, P_1, P_2 與 B 五點共圓。

Solution. 我們透過形式和來寫解答。因為 $\triangle O_1AP_1, \triangle O_2AP_2$ 分別是以 O_1, O_2 為頂角的等腰三角形，所以

$$O_1P_1 + O_2P_2 = (2AP_1 - O_1A) + (2AP_2 - O_2A) = O_1P_2 + O_2P_1,$$

即 O_1, O_2, P_1, P_2 共圓。由 (0.1.10)，

$$\begin{aligned} BP_1 - BP_2 &= \perp (AB + AP_1 - AO_1) - \perp (AB + AP_2 - AO_2) \\ &= (2AP_1 - AO_1) - O_1P_2 = O_1P_1 - O_1P_2, \end{aligned}$$

即 O_1, B, P_1, P_2 共圓。

另一個好的形式和算角度例子是施坦納定理 (1.4.2) 的證明。

這小節剩下的內容就是好好的定義形式和（比方說那個等號是什麼意思）。考慮加法群

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\ell} \mathbb{Z}\ell := \left\{ \sum_{i=1}^{k} n_i\ell_i \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ n_i \in \mathbb{Z},\ \ell_i \text{為直線} \right\},$$

裡面的加法當然就是

$$\sum_{i=1}^{k} n_i\ell_i + \sum_{i=1}^{k} m_i\ell_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i + m_i)\ell_i.$$

給定一直線 ℓ_0，考慮映射

$$\begin{aligned} \varepsilon: \quad \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \sum_{i=1}^{k} n_i\ell_i &\longmapsto \sum_{i=1}^{k} n_i. \end{aligned}$$

那麼其核 $\mathcal{K} = \ker\varepsilon = \{\sum n_i\ell_i \mid \sum n_i = 0\}$ 是由 $\ell - \ell_0$ 生成，即

$$\sum n_i\ell_i = \sum n_i(\ell_i - \ell_0) \in \mathcal{K} = \bigoplus_{\ell \neq \ell_0} \mathbb{Z}(\ell - \ell_0).$$

我們有如下映射

$$\begin{aligned} \measuredangle: \quad \mathcal{K} &\longrightarrow \mathbb{R}^\circ / 180^\circ \\ \sum_{i=1}^{k} n_i(\ell_i - \ell_0) &\longmapsto \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \measuredangle(\ell_0, \ell_i). \end{aligned}$$

由 (0.1.4) 我們知道

$$\measuredangle(\ell_2 - \ell_1) = \measuredangle(\ell_2 - \ell_0) - \measuredangle(\ell_1 - \ell_0) = \measuredangle(\ell_0, \ell_2) - \measuredangle(\ell_0, \ell_1) = \measuredangle(\ell_1, \ell_2),$$

同時也得到 $\measuredangle$ 與 ℓ_0 的選取無關。因此透過 $\measuredangle\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}^\circ/180^\circ$，我們就可以定義

$$\begin{aligned}\measuredangle(\ell_1 + \cdots + \ell_k, L_1 + \cdots + L_k) &= \measuredangle((L_1 + \cdots + L_k) - (\ell_1 + \cdots + \ell_k)) \\ &= \measuredangle(\ell_1, L_1) + \cdots + \measuredangle(\ell_k, L_k).\end{aligned}$$

顯然地，交換 $\ell_i, \vec{\ell}_j$ 或 $\vec{L}_i, \vec{L}_j$ 的順序不會改變結果。所以在這個記號下，我們就可以寫下「等式」：

$$L_1 + \cdots + L_k = \ell_1 + \cdots + \ell_k + \measuredangle(\ell_1 + \cdots + \ell_k, L_1 + \cdots + L_k).$$

換句話說，我們是在透過 $\measuredangle$ 映射至 $\mathbb{R}^\circ/180^\circ$ 後再看等號。如果 $\measuredangle(\ell_1 + \cdots + \ell_k, L_1 + \cdots + L_k) = 0^\circ$，那麼我們就得到等式：

$$L_1 + \cdots + L_k = \ell_1 + \cdots + \ell_k.$$

上面寫的這些東西改成有向直線版本也是對的（這邊以無向直線版本為主是因為這是我們比較常用的），只差在角度原本落在的 $\mathbb{R}^\circ/180^\circ$ 要改成 $\mathbb{R}^\circ/360^\circ$。

習題

Problem 1 (垂心). 請用有向角或形式和證明下列敘述。令 $\triangle DEF$ 為 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，即 D 為 A 關於 BC 的垂足，E 為 B 關於 CA 的垂足，F 為 C 關於 AB 的垂足（一點 P 關於一直線 ℓ 的垂足就是過 P 且垂直於 ℓ 的直線 $P\infty_\ell$ 與 ℓ 的交點）。

(i) 證明：B, C, E, F 共圓。同理我們有 C, A, F, D 及 A, B, D, E 分別共圓。

(ii) 令 H 為 $\triangle DEF$ 關於 $\triangle ABC$ 的密克點。證明：A, H, D 共線。同理我們有 B, H, E 及 C, H, F 分別共線。

也就是說三個垂線 AD, BE, CF 共於一點 H。我們把 H 稱作 $\triangle ABC$ 的**垂心** (**orthocenter**)。注意到 A, B, C 也分別是 $\triangle HBC, \triangle CHA, \triangle ABH$ 的垂心，所以我們也會稱四點組 (A, B, C, H) 為一組**垂心組** (**orthocentric system**)。

(iii) 證明 $\measuredangle BHC = 180^\circ - \measuredangle BAC$ 並得到 H 關於 BC 的對稱點 H_A 位於 $\odot(ABC)$ 上。

Problem 2. 令 A, B, C, D 為共圓四點，A', C' 分別為 A, C 關於 BD 的垂足，B', D' 分別為 B, D 關於 AC 的垂足。證明：A', B', C', D' 共圓。

Problem 3 (五圓定理). 令 $ABCDE$ 為一個凸五邊形，$A' = BC \cap DE$，類似地定義 B', C', D', E'。令 A'' 為 $\odot(EAC')$ 與 $\odot(ABD')$ 異於 A 的交點，類似地定義 B'', C'', D'', E''。證明：A'', B'', C'', D'', E'' 共圓。

Problem 4. 設 E, F 為凸四邊形 $ABCD$ 的 BC 邊上兩點（E 位於 B, F 之間，F 位於 E, C 之間）。已知 $\angle BAE = \angle FDC$, $\angle EAF = \angle EDF$。證明：$\angle FAC = \angle BDE$。

Problem 5 (2010 APMO P1). 令 ABC 是一三角形，其中 $\angle BAC \neq 90^\circ$。令 O 是三角形 ABC 外接圓之圓心且令 Γ 是三角形 BOC 之外接圓。假設 Γ 與線段 AB 相交於異於 B 的一點 P，且與線段 AC 相交於異於 C 的一點 Q。令 ON 是圓 Γ 之直徑。試證四邊形 $APNQ$ 是一平行四邊形。

Problem 6 (2007 ISL G2). 給定一個等腰三角形 ABC，其中 $AB = AC$。設 M 為邊 BC 的中點，今作三角形 AMB 的外接圓，並在此圓的劣弧 MA 上任取一動點 X。令 T 為 $\angle BMA$ 所圍成的區域內的一點，且使得 $\angle TMX = 90^\circ$ 及 $TX = BX$。證明：$\angle MTB - \angle CTM$ 的大小與 X 的選取無關。

Problem 7. 設 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，其中 $AB < AC$。令 D, E 分別為 $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 邊的中點。設 P 為 $\odot(ADE)$ 與 $\odot(BCD)$ 的另一交點，而 Q 為 $\odot(ADE)$ 與 $\odot(BCE)$ 的另一交點。

證明：$\overline{AP} = \overline{AQ}$。

Problem 8. 令 ABC 為一銳角三角形且 O 為其外接圓 ω 的圓心。令 D 在線

段 $\overline{BC}$ 上滿足 $\angle BAD = \angle OAC$。令 ω 與直線 AD 相交於另一點 E。若 M, N, P 分別為線段 $\overline{BE}, \overline{OD}, \overline{AC}$ 的中點，試證：M, N, P 共線。

0.2 三角函數與積

Definition 0.2.1. 給定一角 θ。若 $\theta \in (0, 90^\circ)$，考慮 $\triangle ABC$ 滿足 $\measuredangle BAC = \theta \pmod{360^\circ}$ 且 $AB \perp BC$，我們定義

$$\sin\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} \quad \text{and} \quad \cos\theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}.$$

注意到這個定義與 $\triangle ABC$ 的選取無關（由 (0.1.20)）。我們藉由以下關係將此定義延伸至整個旋轉量 $(\operatorname{mod} 360^\circ)$：

$$\begin{aligned}
\cos 0^\circ &= \sin 90^\circ = 1, \\
\sin\theta &= \sin(180^\circ - \theta) = -\sin(-\theta), \\
\cos\theta &= -\cos(180^\circ - \theta) = \cos(-\theta),
\end{aligned}$$

並定義

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

注意到在這個定義下，$|\sin\theta|$ 對於一個無向角是良好定義的，$\tan\theta$ 在 $\operatorname{mod} 180^\circ$ 的有向角下也是良好定義的。另外，我們也可以從定義看出

$$\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta).$$

對於 $\cos\theta$，我們取三點 O, A, B 使得 $\measuredangle AOB = \theta \pmod{360^\circ}$ 且 $\overline{OA} = \overline{OB}$，令 C 為 B 關於 OA 的垂足，則

$$\cos\theta = \frac{OC}{OA}.$$

Proposition 0.2.2 (正弦定理)**.** 設 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 R，則

$$\frac{\overline{BC}}{|\sin\angle BAC|} = \frac{\overline{CA}}{|\sin\angle CBA|} = \frac{\overline{AB}}{|\sin\angle ACB|} = 2R.$$

Proof. 令 B^* 為 B 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點，則 $\overline{BB^*} = 2R$，因此

$$2R \cdot |\sin\angle BAC| = 2R \cdot |\sin\angle BB^*C| = \overline{BC}. \qquad \blacksquare$$

Proposition 0.2.3 (餘弦定理)**.** 對於任意相異三點 A, B, C，令 $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$，則

$$\cos \measuredangle BAC = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Proof. 令 $\triangle DEF$ 為 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，即 D, E, F 分別為 A, B, C 關於 BC, CA, AB 的垂足，$\alpha = \measuredangle BAC$, $\beta = \measuredangle CBA$, $\gamma = \measuredangle ACB \pmod{360^\circ}$。則

$$a = |BD + DC| = c \cos \beta + b \cos \gamma,$$

因此

$$a^2 = ca \cos \beta + ab \cos \gamma.$$

同理有

$$b^2 = ab \cos \gamma + bc \cos \alpha, \quad c^2 = bc \cos \alpha + ca \cos \beta.$$

故

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos \alpha.$$ ■

取 $\measuredangle BAC = 90^\circ$，我們有

Corollary 0.2.4 (畢氏)**.** 若 $\triangle ABC$ 滿足 $\measuredangle BAC = 90^\circ$，則

$$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2.$$

我們也同時得到恆等式

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1.$$

此外，我們還有

Corollary 0.2.5 (三角不等式)**.** 對於任意 $\triangle ABC$，

$$\overline{BC} < \overline{CA} + \overline{AB}.$$

Proof. 令 $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$, $\alpha = \measuredangle BAC$。由

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha < 1$$

及餘弦定理，

$$-1 < \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \implies -2bc < b^2+c^2-a^2 \implies a^2 < (b+c)^2,$$

兩邊開根號得 $\overline{BC} = a < b+c = \overline{CA} + \overline{AB}$。 ■

由於 $\cos\colon (0^\circ, 180^\circ) \to \mathbb{R}$ 是單射（見習題 2），我們結合餘弦定理就得到 (0.1.20) 的反敘述：若

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{\overline{C_1A_1}}{\overline{C_2A_2}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}},$$

則 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 相似。藉此再與正弦定理 (0.2.2)、餘弦定理 (0.2.3) 得到一系列我們國中學過的相似 (AA, SAS, RHS)，而其中 AA, SAS 更可以推廣到有向版本。

Proposition 0.2.6. 以 O 為圓心的圓 Γ 上有一點 P，則過 P 的一直線 L 與 Γ 相切若且唯若 $L \perp OP$。

Proof. 設 L 為過 P 且垂直於 OP 的直線，則對於任意一點 $Q \in L$，由畢氏定理，

$$\overline{OQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PQ}^2 \geq \overline{OP}^2 \implies \overline{OQ} \geq \overline{OP},$$

且等號成立若且唯若 $P = Q$。故 L 與 Γ 相切。 ■

有了這個我們便可以輕鬆得到弦切角與圓周角的關係。

Proposition 0.2.7. 給定 $\triangle ABC$，一過 A 的直線 L 與 $\odot(ABC)$ 相切若且唯若

$$\measuredangle(L, CA) = \measuredangle ABC.$$

Proof. 令 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，則由 (0.2.6) 知 L 與 $\odot(ABC)$ 相切若且唯若 $OA \perp L$。由 (0.1.10)，

$$\measuredangle OAC = \measuredangle ABC + 90^\circ,$$

故 $OA \perp L$ 若且唯若 $\measuredangle(L, CA) = \measuredangle ABC$。 ■

這也給了逆平行的極限情形：(過 A 的直線) L 與 $\odot(ABC)$ 相切於 A 若且唯若 (L, BC) 關於 (CA, AB) 逆平行。用形式和我們也可以想成是

$$L + BC = \text{“}AA\text{”} + BC = AB + AC.$$

我們來看一點應用。

Example 0.2.8 (2011 Argetina P3)**.** 設 $ABCD$ 為一個梯形滿足 $BC \parallel AD$, $AD > BC$。M 為 AC, BD 交點、S 為 AB, CD 交點。ω_1 為過 M 且切 AD 於 A 的圓、ω_2 為過 M 且切 AD 於 D 的圓。X 為 AS 與 ω_1 交點、Y 為 DS 與 ω_2 交點。O 為 ASD 外心。證明：$SO \perp XY$。

Solution. 由 $BC \parallel AD$，

$$\measuredangle MXB = \measuredangle MXA = \measuredangle MAD = \measuredangle MCB,$$

所以我們知道 X 位於 $\odot(BCM)$ 上，同理有 Y 位於 $\odot(BCM)$ 上，因此 (BC, XY) 關於 (SA, SD) 逆平行。由 (0.1.11)，$(SO, S\infty_{\perp AD})$ 關於 (SA, SD) 逆平行，所以 (BC, XY) 關於 $(SO, S\infty_{\perp AD})$ 逆平行。因此再由 $BC \parallel AD$，

$$\measuredangle(SO, XY) = \measuredangle(BC, \infty_{\perp AD}) = 90^\circ.$$

Definition 0.2.9. 對於兩個向量 $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$，我們定義兩者的**內積** (**inner product**) 為

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos \measuredangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2),$$

兩者的**外積** (**cross product**) 為

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \sin \measuredangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2).$$

這邊所定義的外積就是空間中所定義的外積的第三個分量 (因為前兩個分量都為 0，所以這邊將其省略)。藉由定義我們可以看出內積與外積滿足：

$$\vec{v}_1 \cdot (a\vec{v}_2) = (a\vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 = a(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2),$$
$$\vec{v}_1 \times (a\vec{v}_2) = (a\vec{v}_1) \times \vec{v}_2 = a(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2).$$

而內積有交換律

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1,$$

外積具有反交換律

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \times \vec{v}_1.$$

由 $\cos 90^\circ = \sin 0^\circ = 0$，我們可以看出 $v_1 \perp v_2$ 若且唯若 $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$，以及 $v_1 \parallel v_2$ 若且唯若 $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 0$，算是內積與外積最常用的地方。

Proposition 0.2.10. 內積與外積具有分配律，意即，對於任意向量 $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$，

$$\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3,$$
$$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_3.$$

Proof. 不妨設 $\vec{v}_i = \overrightarrow{OP_i}$，$\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \overrightarrow{OQ}$，那麼 OP_2QP_3 為平行四邊形。這時原命題等價於

$$|OP_2| \cdot \sin \measuredangle P_1OP_2 + |OP_3| \cdot \sin \measuredangle P_1OP_3 = |OQ| \cdot \sin \measuredangle P_1OQ \tag{1}$$

及

$$|OP_2| \cdot \cos \measuredangle P_1OP_2 + |OP_3| \cdot \cos \measuredangle P_1OP_3 = |OQ| \cdot \cos \measuredangle P_1OQ. \tag{2}$$

令 $\vec{\ell}$ 為過 O 的有向直線滿足 $\measuredangle(\overrightarrow{OP_1}, \vec{\ell}) = 90^\circ$，則 (2) 式等價於

$$|OP_2| \cdot \sin\big(\vec{\ell}, \overrightarrow{OP_2}\big) + |OP_3| \cdot \sin \measuredangle\big(\vec{\ell}, \overrightarrow{OP_3}\big) = |OQ| \cdot \sin \measuredangle\big(\vec{\ell}, \overrightarrow{OQ}\big),$$

換句話說我們其實也只需要證明 (1) 式。令 M 為 $\overline{P_2P_3}$ 中點，U_2, U_3, V, N 分別為 P_2, P_3, Q, M 關於 OP_1 的垂足，則 M 為 $\overline{OQ}$ 中點且 (1) 式等價於

$$\overrightarrow{OU_2} + \overrightarrow{OU_3} = \overrightarrow{OV}.$$

由於 N 同時為 $\overline{U_2U_3}, \overline{OV}$ 的中點，所以

$$\overrightarrow{OU_2} + \overrightarrow{OU_3} = \big(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NU_2}\big) + \big(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NU_3}\big) = 2 \cdot \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OV}. \qquad \blacksquare$$

內積經常被用來判斷兩直線是否垂直，底下是其中一個應用：

Proposition 0.2.11 (定差冪線)**.** 對於四點 A, B, C, D，$AB \perp CD$ 若且唯若

$$\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2.$$

Proof. 注意到

$$\begin{aligned}\left(\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2\right) - \left(\overline{BC}^2 - \overline{BD}^2\right) &= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right) \\ &\quad - \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}\right) \\ &= -\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}\right) \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= -2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD},\end{aligned}$$

又 $AB \perp CD$ 若且唯若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$，因此兩者等價。 ■

換句話說，滿足

$$\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2$$

為定值的 P 的軌跡為一條垂直於 AB 的直線。反之，所有垂直於 AB 的直線也都可以用這種方式寫出來。最後，我們用外積給一個面積公式：

Proposition 0.2.12. 對於任意 $\triangle ABC$，其有向面積

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} \cdot \sin \measuredangle BAC.$$

Proof. 令 D 為 B 關於 CA 的垂足，則

$$[\triangle ABC] = [\triangle ABD] + [\triangle DBC] = [\triangle DAB] + [\triangle DBC]$$

且

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DC} \\ &= \left(\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DC}\right) \\ &= \overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DC},\end{aligned}$$

最後一個等號是因為 $\measuredangle BDA, \measuredangle ADC = 0 \pmod{180^\circ}$。所以我們只需要證明 $\triangle ABC$ 為直角三角形（A 為直角）的情形。取 A' 使得 $ABA'C$ 為長方形，則 $\sin \measuredangle BAC = \pm 1$（視旋轉方向的順逆而定），因此

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2} \cdot [ABA'C] = \frac{1}{2} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} \cdot \sin \measuredangle BAC = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}.$$ ■

事實上，我們也可以把這個當作有向面積 $[\triangle ABC]$ 的定義。藉由簡單的計算，我們得到

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB},$$

所以 $[\triangle ABC] = [\triangle BCA] = [\triangle CAB]$ 是良好定義的。

Corollary 0.2.13 (海龍公式/Heron's formula)**.** 對於任意 $\triangle ABC$，令 $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ 為三邊長，$s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$ 為半周長。則其面積

$$|[\triangle ABC]| = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Proof. 由 (0.2.12)，畢氏定理 (0.2.4) 及餘弦定理 (0.2.3)，

$$\begin{aligned}|[\triangle ABC]| &= \frac{bc}{2} \cdot |\sin \measuredangle BAC| = \frac{bc}{2}\sqrt{1-\cos^2 \measuredangle BAC} = \frac{bc}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\big((b+c)^2-a^2\big)\big(a^2-(b-c)^2\big)} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.\end{aligned}$$

■

習題

Problem 1 (和角公式)**.** 對於任意兩角 θ_1, θ_2，證明：

(i) $\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2$；

(ii) $\sin(\theta_1-\theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2$；

(iii) $\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$；

(iv) $\cos(\theta_1-\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2$。

特別地，取 $\theta = \theta_1 = \theta_2$，我們得到

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta.$$

透過重複迭代，我們就能得到所有 $\sin(n\theta)$ 及 $\cos(n\theta)$ 的值了。

Problem 2. 用前一題的 (iii) 或 (iv) 證明 $\cos\colon [0^\circ, 90^\circ] \to [0,1]$ 是個嚴格遞減的函數，並藉此證明 $\cos\colon [0^\circ, 180^\circ] \to \mathbb{R}$ 是單射。

Problem 3 (和差化積、積化和差). 對於任意兩角 θ_1, θ_2，證明：

(i) $\sin\theta_1 \pm \sin\theta_2 = 2\sin\left(\frac{\theta_1}{2} \pm \frac{\theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1}{2} \mp \frac{\theta_2}{2}\right)$（注意到後者與 $\frac{\theta_1}{2}, \frac{\theta_2}{2}$ 的選取無關）；

(ii) $\cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 2\cos\left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_2}{2}\right)$；

(iii) $\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = -2\sin\left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_2}{2}\right)$；

(iv) $\sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 = \frac{1}{2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_1 + \theta_2))$；

(v) $\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 = \frac{1}{2}(\sin(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2))$；

(vi) $\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 = \frac{1}{2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2))$。

Problem 4. 設 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心。證明：$\triangle ABC, \triangle BHC, \triangle CHA, \triangle AHB$ 有著一樣大的外接圓半徑。

Problem 5 (19 Austria Federal Part2 P5). 在 $\triangle ABC$ 中，D, E 分別為 BC, CA 邊上高的垂足。設 F, G 分別在 AD, BE 上滿足 $\dfrac{AF}{FD} = \dfrac{BG}{GE}$，$CF$ 交 BE 於 H，CG 交 AD 於 I。證明：F, G, H, I 共圓。

0.3 一些算長度公式

算長度是一個強大的工具（相較於算角度），很多題目到最後都只剩算長度。所以有哪些咚咚是可以用的呢？

Theorem 0.3.1 (孟氏/Menelaus). 給定任意 $\triangle ABC$，點 D, E, F 分別位於 BC, CA, AB 上，則 D, E, F 共線若且唯若

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1.$$

Proof. 設 D' 為 EF 與 BC 的交點，X 為過 A 且平行於 EF 的直線與 BC 的交點，則

$$\frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{CD'}{D'X} \cdot \frac{XD'}{D'B} = \frac{CD'}{BD'}.$$

因此 $D=D'$ 若且唯若

$$\frac{BD}{DC}=\frac{BD'}{D'C} \iff \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=-1. \qquad \blacksquare$$

Theorem 0.3.2 (西瓦/Ceva)**.** 給定任意 $\triangle ABC$，點 D, E, F 分別位於 BC, CA, AB 上，則 AD, BE, CF 共點若且唯若

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

Proof. 令 P 為 BE 與 CF 的交點，D' 為 AP 與 BC 的交點，由 (0.3.1)，

$$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\left(-\frac{CB}{BD'}\cdot\frac{D'P}{PA}\right)\cdot\left(-\frac{AP}{PD'}\cdot\frac{D'C}{CB}\right)=\frac{D'C}{BD'}.$$

因此 $D=D'$ 若且唯若

$$\frac{BD}{DC}=\frac{BD'}{D'C} \iff \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1. \qquad \blacksquare$$

Example 0.3.3. 令 $\triangle M_aM_bM_c$ 為 $\triangle ABC$ 的中點三角形。因爲

$$\frac{BM_a}{M_aC}\cdot\frac{CM_b}{M_bA}\cdot\frac{AM_b}{M_bB}=1\cdot 1\cdot 1=1,$$

所以 AM_a, BM_b, CM_c 共點，我們把這個點稱為 $\triangle ABC$ 的**重心** (**centroid**)。

Proposition 0.3.4. 給定任意 $\triangle ABC$，在 BC 上取一點 D，則

$$\frac{BD}{DC}=\frac{\overline{AB}\cdot\sin\measuredangle BAD}{\overline{CA}\cdot\sin\measuredangle DAC}.$$

Proof. 由 (0.2.12)，我們有

$$\frac{BD}{DC}=\frac{[\triangle ABD]}{[\triangle ADC]}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{DA}\cdot\overline{AB}\cdot\sin\measuredangle BAD}{\frac{1}{2}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\measuredangle DAC}=\frac{\overline{AB}\cdot\sin\measuredangle BAD}{\overline{CA}\cdot\sin\measuredangle DAC}. \qquad \blacksquare$$

注意到比值

$$\frac{\sin\measuredangle BAD}{\sin\measuredangle DAC}$$

與 AD 的方向選取無關。因此我們可以將這個比值寫為

$$\frac{\sin\measuredangle\big(\overrightarrow{AB},AD\big)}{\sin\measuredangle\big(AD,\overrightarrow{AC}\big)}.$$

藉由上述性質，我們便可輕易得到「角元」版本的孟氏定理與西瓦定理。

Theorem 0.3.5 (角元孟氏). 給定任意 $\triangle ABC$，直線 d, e, f 分別過 A, B, C。

(i) $D = BC \cap d,\ E = CA \cap e,\ F = AB \cap f$ 共線若且唯若

$$\frac{\sin\measuredangle\big(\overrightarrow{AB}, d\big)}{\sin\measuredangle\big(d, \overrightarrow{AC}\big)} \cdot \frac{\sin\measuredangle\big(\overrightarrow{BC}, e\big)}{\sin\measuredangle\big(e, \overrightarrow{BA}\big)} \cdot \frac{\sin\measuredangle\big(\overrightarrow{CA}, f\big)}{\sin\measuredangle\big(f, \overrightarrow{CB}\big)} = -1.$$

(ii) 若 $P \notin BC \cup CA \cup AB$，則 D, E, F 共線若且唯若

$$\frac{\sin\measuredangle BPD}{\sin\measuredangle DPC} \cdot \frac{\sin\measuredangle CPE}{\sin\measuredangle EPA} \cdot \frac{\sin\measuredangle APF}{\sin\measuredangle FPB} = -1.$$

Proof. 這些等價可以透過 (0.3.1) 與下列這些等式得出：

$$\prod_{\text{cyc}} \frac{BD}{DC} = \prod_{\text{cyc}} \frac{\overline{AB} \cdot \sin\measuredangle\big(\overrightarrow{AB}, d\big)}{\overline{CA} \cdot \sin\measuredangle\big(d, \overrightarrow{AC}\big)} = \prod_{\text{cyc}} \frac{\sin\measuredangle\big(\overrightarrow{AB}, d\big)}{\sin\measuredangle\big(d, \overrightarrow{AC}\big)},$$

而對於任意一點 $P \notin BC \cup CA \cup AB$，我們有

$$\prod_{\text{cyc}} \frac{BD}{DC} = \prod_{\text{cyc}} \frac{\overline{PB} \cdot \sin\measuredangle BPD}{\overline{CP} \cdot \sin\measuredangle DPC} = \prod_{\text{cyc}} \frac{\sin\measuredangle BPD}{\sin\measuredangle DPC}.$$ ∎

注意到 (i) 的式子中的分母分子分別有 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{BA}$，所以其實我們知道整個式子與 AB 的方向選取無關，也就是說我們可以把它寫成

$$\frac{\sin\measuredangle\big(AB, d\big)}{\sin\measuredangle\big(d, CA\big)} \cdot \frac{\sin\measuredangle\big(BC, e\big)}{\sin\measuredangle\big(e, AB\big)} \cdot \frac{\sin\measuredangle\big(CA, f\big)}{\sin\measuredangle\big(f, BC\big)} = 1.$$

Example 0.3.6. 給定三角形 ABC，分別過 A, B, C 作其們關於 $\odot(ABC)$ 的切線們，又分別交 BC, CA, AB 於 X, Y, Z。證明：X, Y, Z 共線。

Solution. 由角元孟氏，我們只需要證明

$$\frac{\sin\measuredangle\big(\overrightarrow{AB}, AX\big)}{\sin\measuredangle\big(AX, \overrightarrow{AC}\big)} \cdot \frac{\sin\measuredangle\big(\overrightarrow{BC}, BY\big)}{\sin\measuredangle\big(BY, \overrightarrow{BA}\big)} \cdot \frac{\sin\measuredangle\big(\overrightarrow{CA}, CZ\big)}{\sin\measuredangle\big(CZ, \overrightarrow{CB}\big)} = -1.$$

那我們首先觀察到

$$\frac{\sin\measuredangle\big(\overrightarrow{AB}, AX\big)}{\sin\measuredangle\big(AX, \overrightarrow{AC}\big)}$$

一定是負的 (因為無論我們怎麼選 AX 的方向，分子分母總會有一個是正的一個是負的)，所以

$$\frac{\sin\measuredangle\big(\overrightarrow{AB}, AX\big)}{\sin\measuredangle\big(AX, \overrightarrow{AC}\big)} = -\left|\frac{\sin\measuredangle BAX}{\sin\measuredangle XAC}\right| = -\left|\frac{\sin\measuredangle BCA}{\sin\measuredangle ABC}\right|.$$

故

$$\prod \frac{\sin\measuredangle\left(\overrightarrow{AB}, AX\right)}{\sin\measuredangle\left(AX, \overrightarrow{AC}\right)} = \prod\left(-\left|\frac{\sin\measuredangle BCA}{\sin\measuredangle ABC}\right|\right) = -1.$$

類似地，我們有：

Theorem 0.3.7 (角元西瓦)**.** 給定任意 $\triangle ABC$，直線 d, e, f 分別過 A, B, C。

(i) d, e, f 共點若且唯若

$$\frac{\sin\measuredangle\left(\overrightarrow{AB}, d\right)}{\sin\measuredangle\left(d, \overrightarrow{AC}\right)} \cdot \frac{\sin\measuredangle\left(\overrightarrow{BC}, e\right)}{\sin\measuredangle\left(e, \overrightarrow{BA}\right)} \cdot \frac{\sin\measuredangle\left(\overrightarrow{CA}, f\right)}{\sin\measuredangle\left(f, \overrightarrow{CB}\right)} = 1.$$

(ii) 若 $P \notin BC \cup CA \cup AB$，$D = BC \cap d$, $E = CA \cap e$, $F = AB \cap f$，則 d, e, f 共點若且唯若

$$\frac{\sin\measuredangle BPD}{\sin\measuredangle DPC} \cdot \frac{\sin\measuredangle CPE}{\sin\measuredangle EPA} \cdot \frac{\sin\measuredangle APF}{\sin\measuredangle FPB} = 1.$$

Remark. 從證明中我們可以看出事實上只要選 P, Q, R，滿足

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = 1,$$

那麼 D, E, F 共線（AD, BE, CF 共點）若且唯若

$$\frac{\sin\measuredangle BPD}{\sin\measuredangle DPC} \cdot \frac{\sin\measuredangle CQE}{\sin\measuredangle EQA} \cdot \frac{\sin\measuredangle ARF}{\sin\measuredangle FRB} = -1 \ (1).$$

Example 0.3.8. 設 A, F, B, D, C, E 為圓上六點（依此順序排列），證明：AD, BE, CF 共點若且唯若

$$\overline{AF} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CE} = \overline{EA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{DC}.$$

Solution. 由角元西瓦，AD, BE, CF 共點等價於

$$\frac{\sin\measuredangle\left(\overrightarrow{AB}, AD\right)}{\sin\measuredangle\left(AD, \overrightarrow{AC}\right)} \cdot \frac{\sin\measuredangle\left(\overrightarrow{BC}, BE\right)}{\sin\measuredangle\left(BE, \overrightarrow{BA}\right)} \cdot \frac{\sin\measuredangle\left(\overrightarrow{CA}, CF\right)}{\sin\measuredangle\left(CF, \overrightarrow{CB}\right)} = 1.$$

由於這六點在圓上的順序我們知道每一項都是正的，所以由正弦定理可得

$$\frac{\sin\measuredangle\left(\overrightarrow{AB}, AD\right)}{\sin\measuredangle\left(AD, \overrightarrow{AC}\right)} = \left|\frac{\sin\measuredangle BAD}{\sin\measuredangle DAC}\right| = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}.$$

因此 AD, BE, CF 共點等價於

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1,$$

即

$$\overline{AF} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CE} = \overline{EA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{DC}.$$

這個例子跟完美六邊形有一些關係，我們會在未來再次看到（見第 9 章）。

Example 0.3.9 (內心及旁心)**.** 令 ℓ_A^+, ℓ_A^- 分別為 $\angle BAC$ 的內角平分線及外角平分線，即滿足

$$\measuredangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\ell_A^+}) = \measuredangle(\overrightarrow{\ell_A^+}, \overrightarrow{AC}), \quad \measuredangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\ell_A^-}) = \measuredangle(\overrightarrow{\ell_A^-}, \overrightarrow{AC}) + 180^\circ \pmod{360^\circ}$$

的兩條直線。則

$$\frac{\sin\measuredangle(\overrightarrow{AB}, \ell_A^+)}{\sin\measuredangle(\ell_A^+, \overrightarrow{AC})} = 1, \quad \frac{\sin\measuredangle(\overrightarrow{AB}, \ell_A^-)}{\sin\measuredangle(\ell_A^-, \overrightarrow{AC})} = -1.$$

類似地定義 $\ell_B^+, \ell_B^-, \ell_C^+, \ell_C^-$ 分別為 $\angle CBA, \angle ACB$ 的內角平分線及外角平分線。因為

$$\frac{\sin\measuredangle(\overrightarrow{AB}, \ell_A^+)}{\sin\measuredangle(\ell_A^+, \overrightarrow{AC})} \cdot \frac{\sin\measuredangle(\overrightarrow{BC}, \ell_B^+)}{\sin\measuredangle(\ell_B^+, \overrightarrow{BA})} \cdot \frac{\sin\measuredangle(\overrightarrow{CA}, \ell_C^+)}{\sin\measuredangle(\ell_C^+, \overrightarrow{CB})} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1,$$

所以 $\ell_A^+, \ell_B^+, \ell_C^+$ 共於一點 I，我們把 I 稱作 $\triangle ABC$ 的**內心** (**incenter**)。類似地我們可以得到 $\ell_A^+, \ell_B^-, \ell_C^-$、$\ell_A^-, \ell_B^+, \ell_C^-$、$\ell_A^-, \ell_B^-, \ell_C^+$ 分別共於三點 I^a, I^b, I^c，我們把這三個點分別稱作 $\triangle ABC$ 的***A*-旁心**、***B*-旁心**、***C*-旁心** (***A*-excenter, *B*-excenter, *C*-excenter**)。

如果令 D, E, F 為內心 I 關於三邊 BC, CA, AB 的垂足，則 A, I, E, F 共圓，因此由

$$\measuredangle IFE = \measuredangle IAE = \measuredangle FAI = \measuredangle FEI$$
$$\measuredangle AFE = \measuredangle AIE = 90^\circ - \measuredangle EAI = 90^\circ - \measuredangle IAF = \measuredangle FIA = \measuredangle FEA,$$

知 $\overline{IE} = \overline{IF}$ 及 $\overline{AE} = \overline{AF}$。同理，我們得到 $\overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF}$、$\overline{BF} = \overline{BD}$ 及 $\overline{CD} = \overline{CE}$，因此 $\omega = \odot(DEF)$ 的圓心為 I。由 $ID \perp BC$ 及 (0.2.6) 知 ω 與 BC 相切於 D，同理有 ω 與 CA, AB 分別相切於 E, F，因此我們稱 ω 為 $\triangle ABC$ 的**內切圓** (**incircle**)，$\triangle DEF$ 稱為 $\triangle ABC$ 的**切點三角形** (**contact triangle**)。

由長度關係（注意到 $\angle IBC = \frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle BCI = \frac{1}{2}\angle BCA < 90^\circ$ 告訴我們 D 位於 BC 線段上）

$$\begin{cases} \overline{AE} = \overline{AF}, \\ \overline{BF} = \overline{BD}, \\ \overline{CD} = \overline{CE}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{BD} + \overline{DC} = a := \overline{BC}, \\ \overline{CE} + \overline{EA} = b := \overline{CA}, \\ \overline{AF} + \overline{FB} = c := \overline{AB}, \end{cases}$$

我們還可以得到

$$\overline{AE} = \overline{AF} = \frac{b+c-a}{2}, \quad \overline{BF} = \overline{BD} = \frac{c+a-b}{2}, \quad \overline{CD} = \overline{CE} = \frac{a+b-c}{2}.$$

同理，如果令 D^a, E^a, F^a 為 A-旁心 I^a 關於三邊 BC, CA, AB 的垂足，則 $\omega^a = \odot(D^aE^aF^a)$ 的圓心為 I^a，我們稱 ω^a 為 $\triangle ABC$ 的 ***A*-旁切圓** (***A*-excircle**)。一樣從長度關係我們可以得到

$$\overline{AE^a} = \overline{AF^a} = \frac{a+b+c}{2}, \quad \overline{BF^a} = \overline{BD^a} = \frac{a+b-c}{2}, \quad \overline{CD^a} = \overline{CE^a} = \frac{c+a-b}{2}.$$

這邊我們可以注意到 $\overline{BD} = \overline{D^aC}$, $\overline{BD^a} = \overline{DC}$，因此 D, D^a 關於 $\overline{BC}$ 中點 M_a 對稱。

同樣地，我們可以定義 $\triangle ABC$ 的 B-旁切圓 $\omega^b = \odot(D^bE^bF^b)$ 及 C-旁切圓 $\omega^c = \odot(D^cE^cF^c)$，並且得到類似的長度關係。我們會發現 D^b, D^c 也關於 M_a 對稱。

介紹完了內心與旁心，那麼我們就來看看一個有關的例題：

Example 0.3.10 (19 Czech-Slovak MO P4)**.** 設 ABC 為銳角三角形，P 在直線 BC 上滿足 $\overline{AB} = \overline{BP}$ 且 B 在 P, C 之間。Q 在直線 BC 上滿足 $\overline{AC} = \overline{CQ}$ 且 C 在 Q, B 之間。若 A-旁切圓 $\odot(J)$ 分別切 AB, AC 於 D, E，DP 交 EQ 於 F，證明：$AF \perp FJ$。

Solution. 換句話說我們要證明 F 在直徑圓 $\odot(\overline{AJ})$ 上，即 $\odot(ADJE)$ 上。令 D' 為 A-旁切圓與 BC 的切點，則 $\overline{BD'} = \overline{BD}$, $\overline{CD'} = \overline{CE}$，這告訴我們

$\triangle ABD' \stackrel{-}{\sim} \triangle PBD$, $\triangle ACD' \stackrel{-}{\sim} \triangle QCE$。所以

$$\begin{aligned}\measuredangle DFE &= \measuredangle PDB + \measuredangle DAE + \measuredangle CEQ \\ &= \measuredangle BD'A + \measuredangle DAE + \measuredangle AD'C = \measuredangle DAE,\end{aligned}$$

即 $F \in \odot(ADE) = \odot\big(\overline{AJ}\big)$，因此有 $AF \perp FJ$。

接下來的兩個定理就是在暴力炸長度的時候可能會用到的工具。

Theorem 0.3.11 (斯特瓦特定理/Stewart's)**.** 對於共線三點 A, B, C 及任一點 P，有

$$\overline{PA}^2 \cdot \overrightarrow{BC} + \overline{PB}^2 \cdot \overrightarrow{CA} + \overline{PC}^2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Proof. 不妨假設 $\measuredangle BAC = 0^\circ \pmod{360^\circ}$。由餘弦定理 (0.2.3)，

$$\frac{\overline{PA}^2 + \overline{CA}^2 - \overline{PC}^2}{2 \cdot \overline{PA} \cdot \overline{CA}} + \frac{\overline{PA}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{PB}^2}{2 \cdot \overline{PA} \cdot \overline{AB}} = \cos\measuredangle PAC + \cos\measuredangle PAB = 0,$$

因此整理得

$$\big(\overline{PA}^2 - \overline{CA} \cdot \overline{AB}\big)\big(\overline{AB} - \overline{CA}\big) + \overline{PB}^2 \cdot \overline{CA} - \overline{PC}^2 \cdot \overline{AB} = 0.$$

藉由假設 $\measuredangle BAC = 0^\circ \pmod{360^\circ}$ 所得到的方向性即可得到

$$\overline{PA}^2 \cdot \overrightarrow{BC} + \overline{PB}^2 \cdot \overrightarrow{CA} + \overline{PC}^2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \qquad \blacksquare$$

Example 0.3.12 (中線定理)**.** 設 M 為 $\triangle ABC$ 中邊 $\overline{BC}$ 的中點，則

$$\overline{AM}^2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}^2 + \frac{1}{2} \cdot \overline{AC}^2 - \frac{1}{4} \cdot \overline{BC}^2.$$

Solution. 由 B, M, C 共線及斯特瓦特定理，我們有

$$\overline{AM}^2 \cdot \overrightarrow{BC} + \overline{AB}^2 \cdot \overrightarrow{CM} + \overline{AC}^2 \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

將 $\overrightarrow{BC}$ 除掉就有

$$\overline{AM}^2 - \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}^2 - \frac{1}{2} \cdot \overline{AC}^2 + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

而我們知道 $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{4} \cdot \overline{BC}^2$，因此原式成立。

同樣的方法也可以用來計算角平分線長：若 AD 為 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的內角平分線段，則

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} - \overline{BD} \cdot \overline{DC}.$$

Theorem 0.3.13 (張角定理)**.** 對於三點 A, B, C 及任一點 $P \notin \{A, B, C\}$，A, B, C 共線若且唯若

$$\frac{\sin \measuredangle BPC}{\overline{PA}} + \frac{\sin \measuredangle CPA}{\overline{PB}} + \frac{\sin \measuredangle APB}{\overline{PC}} = 0.$$

Proof. 由 (0.2.12)，我們有

$$[\triangle PBC] + [\triangle PCA] + [\triangle PAB] = \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{2} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{PC} \cdot \sin \measuredangle BPC.$$

注意到 A, B, C 共線若且唯若

$$[\triangle ABC] = [\triangle PBC] + [\triangle PCA] + [\triangle PAB] = 0,$$

因此整理後即可得到這等價於

$$\frac{\sin \measuredangle BPC}{\overline{PA}} + \frac{\sin \measuredangle CPA}{\overline{PB}} + \frac{\sin \measuredangle APB}{\overline{PC}} = 0.$$ ■

習題

Problem 1 (12 Albania MO P5)**.** 設 $\triangle ABC$ 滿足 $BC \neq AC$。令 P 是 C 對 AB 邊的垂足，V, O 分別是 $\triangle ABC$ 垂心與外心，D 為 OC 與 AB 的交點，E 為 $\overline{CD}$ 的中點。證明：EP 平分線段 OV。

Problem 2 (雞爪定理)**.** 令 I, I^a 為 $\triangle ABC$ 的內心與 A-旁心，N_a 為 AI 與 $\odot(ABC)$ 異於 A 的交點。證明：$\overline{N_aB} = \overline{N_aI} = \overline{N_aC} = \overline{N_aI^a}$。

會叫雞爪定理的原因是因為四個線段 $\overline{N_aB}$, $\overline{N_aI}$, $\overline{N_aC}$, $\overline{N_aI^a}$ 所形成的圖形有點像雞爪。

Problem 3. 設 $ABCD$ 為一圓內接四邊形。令 I_D, I_A 分別為 $\triangle ABC$, $\triangle BCD$ 的內心，J_B 為 $\triangle CDA$ 的 A-旁心，J_C 為 $\triangle DAB$ 的 D-旁心。證明：I_A, J_B, J_C, I_D 共線。

Problem 4. 設 $\triangle ABC$ 的內切圓分別切三邊 BC, CA, AB 於 D, E, F。證明：AD, BE, CF 共點。這個點被稱為 $\triangle ABC$ 的**熱爾岡點** (**Gergonne point**)。

Problem 5. 設 $\triangle ABC$ 的 A-旁切圓, B-旁切圓, C-旁切圓分別切三邊 BC, CA, AB 於 D, E, F。證明：AD, BE, CF 共點。這個點被稱為 $\triangle ABC$ 的**奈格爾點** (**Nagel point**)。

Problem 6 (2015 全國賽 P3)**.** 設三角形 ABC 的內心為 I，內切圓分別切 BC, CA, AB 於 D, E, F。分別在射線 $\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{IF}$ 上取點 X, Y, Z 使得 $\overline{IX} = \overline{IY} = \overline{IZ}$。證明：$AX, BY, CZ$ 共點。

Problem 7. 設 $\triangle DEF$ 為 $\triangle ABC$ 的切點三角形，X, Y, Z 位於 $\triangle ABC$ 的內切圓 $\odot(DEF)$ 上。證明：AX, BY, CZ 共點若且唯若 DX, EY, FZ 共點或 $DX \cap EF, EY \cap FD, FZ \cap DE$ 共線。

Problem 8. 設 $\odot(I)$ 為三角形 ABC 的內切圓，而 D, E, F 分別是三邊 BC, CA, AB 的中點。過 D, E, F 分別作 $\odot(I)$ 異於三邊的切線，且此三條切線依序與 EF, FD, DE 交於 X, Y, Z。試證：X, Y, Z 三點共線。

Problem 9. 在 $\triangle ABC$ 中，AD 為 $\angle BAC$ 之角平分線，$\angle ADC = 60^\circ$，點 E 在 $\overline{AD}$ 上且滿足 $\overline{DE} = \overline{DB}$，射線 $\overrightarrow{CE}$ 交 AB 於點 F。試證：

$$\overline{AF} \times \overline{AB} + \overline{CD} \times \overline{CB} = \overline{AC}^2.$$

Problem 10 (2021 TMO P4)**.** 設 I 為三角形 ABC 的內心，D 為 I 關於邊 BC 的垂足。設 D' 為 D 關於 I 的對稱點並且滿足 $\overline{AD'} = \overline{ID'}$。以 D' 為圓心，作圓 Γ 過 A, I 並交 AB, AC 於 X, Y。設 Z 為 Γ 上一點滿足 AZ 垂直 BC。證明：$AD, D'Z, XY$ 共點。

0.4 圓冪

我們現在來看看圓的情況。

Definition 0.4.1. 給定一圓 Γ 與一點 P，我們定義 P 關於 Γ 的**冪** (**power**) 為

$$\mathbf{Pow}_\Gamma(P) := \overline{OP}^2 - R^2,$$

其中 O 為 Γ 的圓心，R 為 Γ 的半徑。

Proposition 0.4.2. 過一點 P 作一直線與一圓 Γ 交於 A, B 兩點，則

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \mathbf{Pow}_\Gamma(P).$$

Proof. 令 O 為 Γ 的圓心，M 為 $\overline{AB}$ 中點，則 $OM \perp AB$。所以由定差冪線性質 (0.2.11)，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= \left(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB}\right) = \overline{PM}^2 - \overline{MA}^2 \\ &= \overline{PO}^2 - \overline{OA}^2 = \mathbf{Pow}_\Gamma(P).\end{aligned}$$ ■

Corollary 0.4.3. 過一點 P 作兩條直線 ℓ_1, ℓ_2，在 ℓ_i 分別取兩點 $A_i, B_i \neq P$。則 A_1, B_1, A_2, B_2 共圓若且唯若

$$\overrightarrow{PA_1} \cdot \overrightarrow{PB_1} = \overrightarrow{PA_2} \cdot \overrightarrow{PB_2}.$$

Proof. 令 Γ 為 $\triangle A_1B_1A_2$ 的外接圓，B_2' 為 PA_2 與 Γ 異於 A_2 的交點，則

$$\overrightarrow{PA_1} \cdot \overrightarrow{PB_1} = \mathbf{Pow}_\Gamma(P) = \overrightarrow{PA_2} \cdot \overrightarrow{PB_2'}.$$

A_1, B_1, A_2, B_2 共圓若且唯若 $B_2 = B_2'$，而後者等價於

$$\overrightarrow{PA_2} \cdot \overrightarrow{PB_2} = \overrightarrow{PA_2} \cdot \overrightarrow{PB_2'} = \overrightarrow{PA_1} \cdot \overrightarrow{PB_1}.$$ ■

Example 0.4.4 (17 Azerbaijan TST Day2 P1)**.** 給定三角形 ABC，E, F 分別在 CA, AB 上滿足

$$\overline{BC}^2 = BA \cdot BF + CE \cdot CA.$$

證明：對於所有 E, F，三角形 AEF 的外接圓過定點。

Solution. 令 M 為 $\overline{BC}$ 中點，我們計算 M 關於 $\odot(AEF)$ 的冪：令 O, r 分別為 $\odot(AEF)$ 的圓心及半徑長，則由中線定理，

$$\begin{aligned}\mathbf{Pow}_{\odot(AEF)}(M) &= \overline{OM}^2 - r^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\overline{OB}^2 - r^2 + \overline{OC}^2 - r^2\right) - \frac{1}{4}\cdot\overline{BC}^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\mathbf{Pow}_{\odot(AEF)}(B) + \mathbf{Pow}_{\odot(AEF)}(C)\right) - \frac{1}{4}\cdot\overline{BC}^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot(BA\cdot BF + CE\cdot CA) - \frac{1}{4}\cdot\overline{BC}^2 \\ &= \frac{1}{4}\cdot\overline{BC}^2\end{aligned}$$

為定值。因此只要取 X 在 MA 上滿足

$$MA\cdot MX = \frac{1}{4}\cdot\overline{BC}^2 = \mathbf{Pow}_{\odot(AEF)}(M),$$

則 $\odot(AEF)$ 過定點 X。

Proposition 0.4.5. 過一點 P 作一直線與一圓 Γ 切於一點 T，則

$$\overline{PT}^2 = \mathbf{Pow}_\Gamma(P).$$

Proof. 由 (0.2.6)，$OT\perp PT$。因此由畢氏定理 (0.2.4)，

$$\overline{PT}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{OT}^2 = \mathbf{Pow}_\Gamma(P). \qquad \blacksquare$$

Corollary 0.4.6. 過一點 P 作兩條直線 ℓ_1, ℓ_2，在 ℓ_1 上取兩點 A, B，ℓ_2 上取一點 T。則 ℓ_2 與 $\triangle ABT$ 的外接圓相切 (於 T) 若且唯若

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = \overline{PT}^2.$$

Example 0.4.7 (19 China Western P5). 在 $\triangle ABC$ 中，O, H 分別為外心、垂心。過 H 作平行於 AB 的線交 AC 於 M，作平行於 AC 的線交 AB 於 N。令 L 為 H 關於 MN 的對稱點，K 為 AH 與 OL 的交點。證明：K, L, M, N 共圓。

Solution. 事實上，對於這裡的 M, N，有個很重要的引理：$\overline{OM} = \overline{ON}$。要證明這個引理只需證明 $\mathbf{Pow}_{\odot(O)}(M) = \mathbf{Pow}_{\odot(O)}(N)$，其中 $\odot(O)$ 為 $\triangle ABC$ 的外

接圓。由

$$\measuredangle MCH = 90^\circ - \measuredangle BAC = \measuredangle HBN, \quad \measuredangle HMC = \measuredangle BAC = \measuredangle BNH,$$

我們有 $\triangle CMH \overset{-}{\sim} \triangle BNH$，因此

$$\begin{aligned}\mathbf{Pow}_{\odot(O)}(M) &= MA \cdot MC = HN \cdot MC \\ &= HM \cdot NB = NA \cdot NB = \mathbf{Pow}_{\odot(O)}(N).\end{aligned}$$

由 $ALMN$ 為等腰梯形，我們知道 A, L, M, N 共圓，結合前面的引理，還有 $\triangle OAM \overset{+}{\cong} \triangle OLN$。注意到 (AO, AH) 關於 (AM, AN) 逆平行，所以

$$\measuredangle NAK = \measuredangle OAM = \measuredangle NLK,$$

即 A, K, L, N 共圓，故 K, L, M, N 共圓。

Definition 0.4.8. 對於任意兩圓 Γ_1, Γ_2，我們稱

$$\{P \mid \mathbf{Pow}_{\Gamma_1}(P) = \mathbf{Pow}_{\Gamma_2}(P)\}$$

為 Γ_1, Γ_2 的**根軸 (radical axis)**。

Proposition 0.4.9. 對於任意兩（不同心）圓 Γ_1, Γ_2，Γ_1, Γ_2 的根軸為一垂直於連心線的直線。

Proof. 令 O_i, r_i 分別為 Γ_i 的半徑，則對於任意一點 P，P 位於 Γ_1, Γ_2 的根軸若且唯若

$$\overline{O_1P}^2 - r_1^2 = \overline{O_2P}^2 - r_2^2 \iff \overline{O_1P}^2 - \overline{O_2P}^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

由定差冪線性質 (0.2.11)，Γ_1, Γ_2 的根軸為一垂直於 O_1O_2 的直線。 ■

當然，從證明中我們還可以看出所有垂直於 O_1, O_2 的直線都長得像

$$\{P \mid \mathbf{Pow}_{\Gamma_1}(P) - \mathbf{Pow}_{\Gamma_2}(P) = k\},$$

其中 k 為任意實數。

Proposition 0.4.10. 設兩圓 Γ_1, Γ_2 交於 A, B 兩點，則 AB 為 Γ_1, Γ_2 的根軸。

Proof. 注意到 $A, B \in \Gamma_i$，所以

$$\mathbf{Pow}_{\Gamma_1}(A) = 0 = \mathbf{Pow}_{\Gamma_2}(A), \quad \mathbf{Pow}_{\Gamma_1}(B) = 0 = \mathbf{Pow}_{\Gamma_2}(B),$$

故 AB 為 Γ_1, Γ_2 的根軸。 ■

Theorem 0.4.11 (根心定理). 對於任意三個圓 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$，令 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 分別為 (ω_2, ω_3), (ω_3, ω_1), (ω_1, ω_2) 三對圓的根軸，則 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 重合或共點。

Proof. 對於任意一點 $P \in \ell_2 \cap \ell_3 \setminus \mathcal{L}_\infty$，

$$\mathbf{Pow}_{\omega_2}(P) = \mathbf{Pow}_{\omega_1}(P) = \mathbf{Pow}_{\omega_3}(P),$$

因此 $P \in \ell_1$。若 $\ell_2 = \ell_3$，則 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 重合。

若 $\ell_2 \neq \ell_3$，令 $P = \ell_2 \cap \ell_3$，則 $P \in \ell_1$ 或 $P \in \mathcal{L}_\infty$。如果 $P \notin \ell_1$，則 $P = \infty_{\ell_2} = \infty_{\ell_3}$。這時假設 $Q = \ell_3 \cap \ell_1$，我們同樣有 $Q = \infty_{\ell_3} = \infty_{\ell_1}$，但這樣會得到 $P = Q$，矛盾。因此 $P \in \ell_1$，即 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 共點。 ■

Definition 0.4.12. 對於任意三個圓 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$，令 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 分別為 (ω_2, ω_3), (ω_3, ω_1), (ω_1, ω_2) 三對圓的根軸，則我們稱

(i) $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ **共軸 (coaxial)**，若 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 重合。

(ii) $R \coloneqq \ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3$ 為 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 的**根心 (radical center)**，若 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 不重合。

Example 0.4.13. 設 $\triangle DEF$ 為 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，則 B, C, E, F 共於一圓 Ω_A，類似地定義 Ω_B, Ω_C。那麼 $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$ 的根心為 AD, BE, CF 的交點，即 $\triangle ABC$ 的垂心。

Example 0.4.14 (2009 ISL G3). 令 $\triangle ABC$ 為一三角形。$\triangle ABC$ 的內切圓分別與邊 CA 與 AB 相切於點 Y 與 Z。令 G 為直線 BY 與 CZ 之交點，且令點 R 與 S 分別使得四邊形 $BCYR$ 與 $BCSZ$ 為平行四邊形。試證：$\overline{GR} = \overline{GS}$。

Solution. 令 X', Y' 分別為 $\triangle ABC$ 的 A-旁切圓 ω_A 與 BC, CA 的切點，則

$$\mathbf{Pow}_{\omega_A}(B) = \overline{BX'}^2 = \overline{CY}^2 = \overline{BR}^2 = \mathbf{Pow}_R(B),$$
$$\mathbf{Pow}_{\omega_A}(Y) = \overline{YY'}^2 = \overline{BC}^2 = \overline{RY}^2 = \mathbf{Pow}_R(Y).$$

因此 BY 為 ω_A 與點圓 R 的根軸。同理有 CZ 為 ω_A 與點圓 S 的根軸。故 $G = BY \cap CZ$ 位於點圓 R 與點圓 S 的根軸上，故

$$\overline{GR}^2 = \mathbf{Pow}_R(G) = \mathbf{Pow}_S(G) = \overline{GS}^2,$$

即 $\overline{GR} = \overline{GS}$。

事實上，根心的逆否命題也給了我們一個判斷六點共圓的方式：

Corollary 0.4.15. 給定（非退化）$\triangle ABC$。設 D_1, D_2 位於 BC 上，E_1, E_2 位於 CA 上，F_1, F_2 位於 AB 上，並且滿足 E_1, E_2, F_1, F_2、F_1, F_2, D_1, D_2、D_1, D_2, E_1, E_2 分別共圓。則 $D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$ 共圓。

Proof. 令 $\Gamma_A = \odot(E_1E_2F_1F_2)$, $\Gamma_B = \odot(F_1F_2D_1D_2)$, $\Gamma_C = \odot(D_1D_2E_1E_2)$。若 $D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$ 不共圓，則 $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ 的圓心兩兩相異。而我們知道 $D_1D_2 = BC$, $E_1E_2 = CA$, $F_1F_2 = AB$ 分別為 (Γ_B, Γ_C), (Γ_C, Γ_A), (Γ_A, Γ_B) 三對圓的根軸。由根心定理，BC, CA, AB 重合或共點，矛盾。因此 $D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$ 共圓。 ■

Proposition 0.4.16. 對於三個圓 $\odot(O_1), \odot(O_2), \odot(O_3)$，若 $\odot(O_1), \odot(O_2), \odot(O_3)$ 共軸，則 O_1, O_2, O_3 共線且該線垂直於根軸。

Proof. 令 ℓ 為 $\odot(O_1), \odot(O_2), \odot(O_3)$ 的根軸，則 $O_3O_1 \perp \ell \perp O_1O_2$，即 O_1, O_2, O_3 共線且 $O_1O_2O_3$ 垂直於 ℓ。 ■

Example 0.4.17. 令 $\overline{AB}$ 為 $\odot(O)$ 上的一弦，M 為劣弧 AB 的弧中點。過一個 $\odot(O)$ 外的點 C 作兩條切線分別切 $\odot(O)$ 於 S, T。設 MS, MT 分別交 AB 於 E, F。過 E, F 分別畫條垂直 AB 的直線分別交 OS, OT 於 X, Y。再畫一條過 C 的直線並交 $\odot(O)$ 於 P, Q，令 R 為 MP 跟 AB 的交點。最後再令 Z 是 $\triangle PQR$ 的圓心。證明：X, Y, Z 共線。

Solution. 由 $EX \perp AB \perp MO$, $FY \perp AB \perp MO$，我們知道

$$\triangle ESX \overset{+}{\sim} \triangle MSO, \quad \triangle FTY \overset{+}{\sim} \triangle MTO,$$

故 $\overline{XE} = \overline{XS}$, $\overline{YF} = \overline{YT}$。分別以 X, Y 為中心，$\overline{XE}, \overline{YF}$ 為半徑長作圓 ω_X, ω_Y，則 ω_X, ω_Y 分別與 $\odot(O)$ 切於 S, T，分別與 AB 切於 E, F。

由 $\measuredangle MSA = \measuredangle MBA = \measuredangle EAM$，$MA$ 與 $\odot(AES)$ 相切，故

$$\overline{MA}^2 = ME \cdot MS,$$

同理有 $\overline{MA}^2 = MF \cdot MT = MP \cdot MR$，因此

$$\mathbf{Pow}_{\omega_X}(M) = \mathbf{Pow}_{\omega_Y}(M) = \mathbf{Pow}_{\omega_Z}(M) = \overline{MA}^2,$$

其中 $\omega_Z = \odot(PQR)$。我們也有

$$\mathbf{Pow}_{\omega_X}(C) = \overline{CS}^2, \quad \mathbf{Pow}_{\omega_Y}(C) = \overline{CT}^2, \quad \mathbf{Pow}_{\omega_Z}(C) = CP \cdot CQ$$

相等，故 CM 是 $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ 的根軸。所以 $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ 的中心，即 X, Y, Z 共線。

對於需要證明共圓的命題，我們經常使用下列定理：

Theorem 0.4.18 (托勒密不等式/Ptolemy's)**.** 對於四點 A, B, C, D，

$$\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} \geq 2 \cdot \max\{\overline{BC} \cdot \overline{AD}, \overline{CA} \cdot \overline{BD}, \overline{AB} \cdot \overline{CD}\}$$

且等號成立若且唯若 A, B, C, D 共圓或共線。

一個比較常見的表示式是：

$$\overline{CA} \cdot \overline{BD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} \geq \overline{BC} \cdot \overline{AD}.$$

那證明之前我們需要一個常用的引理，這個引理算是第 1.2 節的基礎。

Lemma 0.4.19 (旋似)**.** 若 $\triangle ABC \overset{+}{\sim} \triangle AB'C'$，則 $\triangle ABB' \overset{+}{\sim} \triangle ACC'$。

Proof. 事實上，$\triangle ABC \overset{+}{\sim} \triangle AB'C'$ 等價於

$$\measuredangle BAC = \measuredangle B'AC' \pmod{360^\circ}, \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}},$$

而這等價於

$$\measuredangle BAB' = \measuredangle CAC' \pmod{360^\circ}, \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}},$$

所以 $\triangle ABB' \overset{+}{\sim} \triangle ACC'$。 ■

Proof of 0.4.18. 不妨假設 $\overline{BC} \cdot \overline{AD}$ 是最大的。取一點 E 滿足 $\triangle DEB \overset{+}{\sim} \triangle DCA$，則 $\triangle DCE \overset{+}{\sim} \triangle DAB$。由相似的長度比例我們得到

$$\overline{CA} \cdot \overline{BD} = \overline{BE} \cdot \overline{AD}, \quad \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{EC} \cdot \overline{AD},$$

所以

$$\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AD} = (\overline{BE} + \overline{EC} - \overline{BC}) \cdot \overline{AD} \geq 0.$$

最後一個等號是因為三角不等式 (0.2.5)，其等號成立於 E 位於 $\overline{BC}$ 上，這等價於

$$0^\circ = \measuredangle BEC = \measuredangle BED + \measuredangle DEC = \measuredangle ACD + \measuredangle DBA,$$

即 A, B, C, D 共圓。 ■

事實上，我們有一個很棒的推廣。

Theorem 0.4.20 (開氏)**.** 對於四個圓 $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C, \Gamma_D$，令 d_{IJ}^+ 為 Γ_I 與 Γ_J 的外公切線長，d_{IJ}^- 為 Γ_I 與 Γ_J 的內公切線長。存在一圓 Ω 與四圓 $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C, \Gamma_D$ 相切若且唯若

$$d_{BC}d_{AD} \pm d_{CA}d_{BD} \pm d_{AB}d_{CD} = 0,$$

其中

$$d_{IJ} = \begin{cases} d_{IJ}^+, & \text{若 } \Gamma_I, \Gamma_J \text{ 與 } \Omega \text{ 皆外切或皆內切，} \\ d_{IJ}^-, & \text{若 } \Gamma_I, \Gamma_J \text{ 與 } \Omega \text{ 一外切一內切。} \end{cases}$$

Proof. 我們只證明其中一邊，另一邊比較困難我們留到後面（見第 3.3 節）再來證明。現在假設 Ω 與 $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C, \Gamma_D$ 相切，O, R 分別為 Ω 的圓心及半徑

長，O_I, r_I 分別為 Γ_I 的圓心及半徑長。我們先證明下列等式

$$d_{IJ} = \frac{\overline{IJ}}{R}\sqrt{(R \pm r_I)(R \pm r_J)},$$

其中 $R \pm r_I$ 取正 (負) 若 Ω 與 Γ_I 外 (內) 切，$R \pm r_J$ 則同理。事實上，由餘弦定理我們有

$$\frac{(R \pm r_I)^2 + (R \pm r_J)^2 - \overline{O_I O_J}^2}{2(R \pm r_I)(R \pm r_J)} = \cos \measuredangle IOJ = \frac{R^2 + R^2 - \overline{IJ}^2}{2R^2},$$

因此

$$\begin{aligned} d_{IJ}^2 &= \overline{O_I O_J}^2 - (r_I \pm r_J)^2 \\ &= (R \pm r_I)^2 + (R \pm r_J)^2 - 2(R \pm r_I)(R \pm r_J)\left(1 - \frac{\overline{IJ}^2}{2R^2}\right) - (r_I \pm r_J)^2 \\ &= \frac{\overline{IJ}^2}{R^2}(R \pm r_I)(R \pm r_J). \end{aligned}$$

兩邊開根號就得到我們想要的式子。現在我們由托勒密有

$$\begin{aligned} &d_{BC}d_{AD} \pm d_{CA}d_{BD} \pm d_{AB}d_{CD} \\ =&\frac{\sqrt{(R \pm r_A)(R \pm r_B)(R \pm r_C)(R \pm r_D)}}{R^2}(\overline{BC} \cdot \overline{AD} \pm \overline{CA} \cdot \overline{BD} \pm \overline{AB} \cdot \overline{CD}) \\ =&0. \end{aligned}$$

■

那有時候長度我們不見得都會算，但如果從某個點看其他三個點之間的角度我們曉得的話就可以用：

Corollary 0.4.21 (三弦定理)**.** 四點 A, B, C, D 共（廣義）圓若且唯若

$$\overline{DA} \cdot \sin \measuredangle BDC + \overline{DB} \cdot \sin \measuredangle CDA + \overline{DC} \cdot \sin \measuredangle ADB = 0.$$

Proof. 與 (0.4.18) 的證明類似。取一點 E 滿足 $\triangle DEB \overset{+}{\sim} \triangle DCA$，則 $\triangle DCE \overset{+}{\sim} \triangle DAB$。那麼 A, B, C, D 共圓若且唯若 B, E, C 共線。我們有

$$\begin{aligned} &\overline{DA} \cdot \sin \measuredangle BDC + \overline{DB} \cdot \sin \measuredangle CDA + \overline{DC} \cdot \sin \measuredangle ADB \\ &= \frac{\overline{DB} \cdot \overline{DC}}{\overline{DE}} \cdot \sin \measuredangle BDC + \overline{DB} \cdot \sin \measuredangle EDB + \overline{DC} \cdot \sin \measuredangle CDE \\ &= \frac{1}{\overline{DE}}(2 \cdot [\triangle DBC] + 2 \cdot [\triangle DEB] + 2 \cdot [\triangle DCE]) = \frac{2}{\overline{DA}} \cdot [\triangle EBC]. \end{aligned}$$

而上式等於 0 也等價於 B, E, C 共線。 ■

Example 0.4.22 (2015 ISL G4)**.** 設 ABC 是一個銳角三角形，M 是 BC 中點。圓 ω 經過 A, M 且分別交 CA, AB 於 P, Q。取 T 使得 $APTQ$ 為平行四邊形，並假設 T 在 $\odot(ABC)$ 上。求 $\overline{AT}/\overline{AM}$ 的所有可能值。

Solution. 由三弦定理，A, P, M, Q 共圓會告訴我們

$$\overline{AP}\cdot\sin\angle BAM+\overline{AQ}\cdot\sin\angle MAC=\overline{AM}\cdot\sin\angle BAC,$$

而 A, B, T, C 共圓會告訴我們

$$\overline{AB}\cdot\sin\angle TAP+\overline{AC}\cdot\sin\angle QAT=\overline{AT}\cdot\sin\angle QAP.$$

由面積公式或 (0.3.4) 我們知道

$$\sin\angle BAM:\sin\angle MAC:\sin\angle BAC=\overline{AC}:\overline{AB}:2\overline{AM}$$
$$\sin\angle TAP:\sin\angle QAT:\sin\angle QAP=\overline{AQ}:\overline{AP}:\overline{AT},$$

所以我們剛剛算的兩條式子就可以寫成

$$\overline{AP}\cdot\overline{AC}+\overline{AQ}\cdot\overline{AB}=\overline{AM}\cdot(2\overline{AM})$$
$$\overline{AB}\cdot\overline{AQ}+\overline{AC}\cdot\overline{AP}=\overline{AT}\cdot\overline{AT}.$$

這樣一來我們就可以得到 $\overline{AT}^2=2\overline{AM}^2$，故 $\overline{AT}/\overline{AM}=\sqrt{2}$。

Example 0.4.23 (2017 APMO P2)**.** 設 ABC 為三角形，其中 $AB<AC$。令 D 為角 BAC 的內角平分線與 ABC 的外接圓的另一個交點，又令 Z 為 AC 的中垂線與角 BAC 的外角平分線的交點。證明：AB 線段的中點，會落在三角形 ADZ 的外接圓上。

Solution. 令 M 為 $\overline{AB}$ 中點。由三弦定理，我們只需證明

$$\overline{AM}\cdot\sin\angle DAZ+\overline{AZ}\cdot\sin\angle MAD=\overline{AD}\cdot\sin\angle MAZ.$$

令 $a=\overline{BC}$, $b=\overline{CA}$, $c=\overline{AB}$, $\alpha=\angle BAC$, $\beta=\angle CBA$, $\gamma=ACB$，則上式的左式為

$$\frac{c}{2}+\frac{b}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{b+c}{2};$$

右式（由正弦定理及積化和差）為

$$\begin{aligned}&\left(\frac{b}{\sin\beta}\cdot\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\right)\cdot\sin\left(90^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\\&=\frac{b}{\sin\beta}\cdot\frac{1}{2}\left(\cos(90^\circ-\beta)-\cos(90^\circ+\alpha+\beta)\right)=\frac{b+c}{2},\end{aligned}$$

最後一個等號是因為

$$\frac{b}{\sin\beta}\cdot\cos(90^\circ+\alpha+\beta)=\frac{c}{\sin\gamma}\cdot(-\sin\gamma)=-c.$$

得證。

習題

Problem 1 (歐拉定理). 設 O, I 分別為 $\triangle ABC$ 的外心與內心，R, r 分別為外接圓半徑長與內切圓半徑長。

(i) 令 F 為 I 關於 AB 的垂足，N_a 為 AI 與 $\odot(ABC)$ 的交點，N_a^* 為 N_a 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點。證明 $\triangle AFI \overset{+}{\sim} \triangle N_a^*BN_a$ 並藉此得到 $\overline{AI}\cdot\overline{BN_a}=2Rr$。

(ii) 藉由雞爪定理（見第 0.3 節的習題 2 ）證明 $\overline{OI}^2=R^2-2Rr$。

類似地，如果令 I^a, I^b, I^c 分別為 $\triangle ABC$ 的 A, B, C-旁心，r^a, r^b, r^c 分別為 A, B, C-旁切圓的半徑長，那麼有

$$\overline{OI^a}^2=R^2+2Rr^a,\quad \overline{OI^b}^2=R^2+2Rr^b,\quad \overline{OI^c}^2=R^2+2Rr^c.$$

Problem 2 (2021 IMOC). 設 $\triangle ABC$ 中平行於 BC 的中位線交 $\triangle ABC$ 的外接圓 Γ 於兩點 P, Q，A 關於 Γ 的切線交 BC 於 T。證明：$\measuredangle BTQ=\measuredangle PTA$。

Problem 3. 令三角形 ABC 的重心為 G，外接圓為 Γ。設直線 AG, BG, CG 分別交 Γ 於點 A', B', C'。證明：

$$\frac{AG}{GA'}+\frac{BG}{GB'}+\frac{CG}{GC'}=3.$$

Problem 4 (2021 IMOC). 設 $\overline{BE}$ 和 $\overline{CF}$ 是三角形 ABC 的高，D 是 A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點，DE 和 DF 和 $\odot(ABC)$ 分別再交於 Y 和 Z。證明：YZ、EF 和 BC 共點。

Problem 5 (2011 Iran TST P1). 設 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，其中 $\angle B \neq \angle C$。設 M 為 BC 邊中點，E、F 分別為過 B、C 點的高的垂足。令 K、L 分別為線段 ME、MF 中點。在直線 KL 上取一點 T 使得 $AT \parallel BC$。

證明：$TA = TM$。

Problem 6. 設兩圓 $\odot(O_1)$, $\odot(O_2)$ 交於 X, Y 兩點，過 O_1 作一直線 ℓ_1 交 $\odot(O_2)$ 於 P, Q 兩點，過 O_2 作一直線 ℓ_2 交 $\odot(O_1)$ 於 R, S 兩點。證明：若 P, Q, R, S 共圓，則其圓心位於 XY 上。

Problem 7. 設 I, O 分別為 $\triangle ABC$ 的內心與外心。分別在射線 $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA}$ 上取點 X, Y 使得 $\overline{CX} = \overline{BC} = \overline{YB}$。證明：$XY$ 垂直於 OI。

Problem 8 (19 Estonia TST Day1 P2). 設 $\triangle ABC$ 垂心為 H，K 為 A 關於 BC 的垂足。任做一圓過 A, K 交 AB, AC 於 M, N，並令 ℓ 為過 A 平行 BC 的直線。令 X, Y 分別為 $\odot(AHM)$, $\odot(AHN)$ 與 ℓ 的另一個交點。證明：$\overline{XY} = \overline{BC}$。

Problem 9 (2017 ISL G4). 令 ω 為 $\triangle ABC$ 的 A-旁切圓，D, E, F 分別為 ω 與 BC, CA, AB 的切點。$\odot(AEF)$ 分別交 BC 於 P 與 Q。令 M 為 $\overline{AD}$ 中點。證明：$\odot(MPQ)$ 與 ω 相切。

Problem 10 (16 Canada MO P5). 設 $\triangle ABC$ 滿足兩條高 AD, BE 交於垂心 H。M 為 $\overline{AB}$ 的中點，三角形 DEM 外接圓與三角形 ABH 外接圓交於 P, Q，其中 P 跟 A 在 CH 的同側。證明：ED, PH, MQ 三線共點，且該點在三角形 ABC 的外接圓上。

Problem 11 (2015 2J I1-2). 設三角形 ABC 的內切圓為 ω，ω 切 BC 邊於 D 點。設 AD 與 ω 的另一個交點為 L。令三角形 ABC 在角 A 內的旁心為 K。設 M 為 BC 的中點，而 N 為 KM 的中點。證明：B, C, N, L 共圓。

Chapter 1

幾何變換與常見定理

1.1 位似

Theorem 1.1.1 (迪沙格定理/Desargues'). 對於兩個三角形 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$，$B_1C_1 \cap B_2C_2$, $C_1A_1 \cap C_2A_2$, $A_1B_1 \cap A_2B_2$ 共線若且唯若 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 共點。

Proof. 令 $X = B_1C_1 \cap B_2C_2$, $Y = C_1A_1 \cap C_2A_2$, $Z = A_1B_1 \cap A_2B_2$。假設 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 共點於 P，由孟氏定理，

$$\frac{B_1X}{XC_1} \cdot \frac{C_1C_2}{C_2P} \cdot \frac{PB_2}{B_2B_1} = -1,$$
$$\frac{PC_2}{C_2C_1} \cdot \frac{C_1Y}{YA_1} \cdot \frac{A_1A_2}{A_2P} = -1,$$
$$\frac{B_1B_2}{B_2P} \cdot \frac{PA_2}{A_2A_1} \cdot \frac{A_1Z}{ZB_1} = -1.$$

將三式相乘得

$$\frac{B_1X}{XC_1} \cdot \frac{C_1Y}{YA_1} \cdot \frac{A_1Z}{ZB_1} = -1,$$

即 X, Y, Z 共線。

若 X, Y, Z 共線，則考慮兩三角形 $\triangle B_1B_2Z$, $\triangle C_1C_2Y$，我們有 B_1C_1, B_2C_2, YZ 共點於 X。由前段討論知 $A_2 = B_2Z \cap C_2Y$, $A_1 = ZB_1 \cap YC_1$, $B_1B_2 \cap C_1C_2$ 共線，即 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 共點。 ■

這時候我們說 $\triangle_1 := \triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle_2 := \triangle A_2B_2C_2$ **透視** (**perspective**)，並把 $B_1C_1 \cap B_2C_2$, $C_1A_1 \cap C_2A_2$, $A_1B_1 \cap A_2B_2$ 所共的線稱為 $\triangle_1$ 與 $\triangle_2$ 的**透視軸** (**perspective axis**)，A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 所共的點稱為 $\triangle_1$ 與 $\triangle_2$ 的**透視中心** (**perspective center**)。

Example 1.1.2 (2021 2J I1-G)**.** 設 $ABCD$ 為凸四邊形，其中任兩邊皆不等長，且 $AC \perp BD$。設 O_1, O_2 分別為三角形 ABD 與 CBD 的外心。證明：直線 AO_2、CO_1 以及三角形 ABC 的歐拉線、三角形 ADC 的歐拉線四線共點。

Solution. 由對稱性，我們只需證明 AO_2、CO_1 以及三角形 ABC 的歐拉線共點即可。令 O, H 分別為 $\triangle ABC$ 的外心及垂心，那麼由迪沙格定理 (1.1.1)，我們要證的命題，即 $\triangle CAH$ 與 $\triangle O_1O_2O$ 透視等價於 $AH \cap O_2O$, $HC \cap OO_1$, $CA \cap O_1O_2$ 共線。注意到 $AH \perp BC \perp O_2O$, $HC \perp AB \perp OO_1$, $CA \perp BD \perp O_1O_2$，因此 $AH \cap O_2O$, $HC \cap OO_1$, $CA \cap O_1O_2$ 皆位於無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 上，故原命題成立。

如果兩個三角形 $\triangle_1 = \triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle_2 = \triangle A_2B_2C_2$ 滿足 $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, $C_1A_1 \parallel C_2A_2$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$，那麼 $B_1C_1 \cap B_2C_2$, $C_1A_1 \cap C_2A_2$, $A_1B_1 \cap A_2B_2$ 共於無窮遠線上，所以兩個三角形透視，我們把這個情況稱為**位似** (**homothetic**)，並且把透視中心稱為**位似中心** (**homothetic center**)。設 O 為位似中心，那麼由 $\triangle_1$ 與 $\triangle_2$ 三邊平行我們發現

$$\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{OB_2}{OB_1} = \frac{OC_2}{OC_1}. \tag{$\spadesuit$}$$

我們把這個值 k 稱為 $\triangle_1$ 與 $\triangle_2$ 的位似比。反過來說，如果給定 $\triangle_1, O, k$ 且假設 O 不在無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 上，那麼就可以用 ($\spadesuit$) 來定義 $\triangle_2$。更一般地，只要有 O 跟 k，就可以定義一個變換：

Definition 1.1.3. 我們定義平面上關於 $O \notin \mathcal{L}_\infty$ 的 $k \neq 0$ 倍**位似變換** (**homothety**) $\mathfrak{h}_{O,k}$ 為將 $P \notin \mathcal{L}_\infty$ 送至 OP 上一點 Q 滿足

$$\frac{OQ}{OP} = k.$$

若 P 位於無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 上，則 P 依然送至 P。對於一個這樣的位似變換

$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{O,k}$，我們把 O 稱為其**位似中心** (**homothetic center**)，k 稱為其**位似比** (**homothetic ratio**)。

我們也把平移一個向量 $\vec{v}$ 的**平移變換** (**translation**) $P \mapsto P + \vec{v}$ 想成是一個位似變換 $\mathfrak{h}_{\vec{v}}$，使得位似中心位於無窮遠線上的三角形們也是來自一個位似變換，這時候我們把 $\mathfrak{h}_{\vec{v}}$ 的位似中心定為 $\infty_{\vec{v}}$（如果 $\vec{v} \neq 0$），位似比定為 1。

可以從定義中看出一個位似變換 $\mathfrak{h}$ 會把直線會送至直線，且

$$\overline{\mathfrak{h}(A)\mathfrak{h}(B)} = |k| \cdot \overline{AB},$$

所以也會把圓送至半徑變為 $|k|$ 倍的圓（可以直接定出圓心與半徑）。

當 $k = -1$ 時，$\mathfrak{h}_{O,-1}(P)$ 是 P 關於 O 的對稱點，所以我們稱 $\mathfrak{s}_O := \mathfrak{h}_{O,-1}$ 是以 O 為中心的**對稱變換**。

Example 1.1.4 (歐拉線)**.** 令 $\triangle M_aM_bM_c$ 為 $\triangle ABC$ 的中點三角形，也就是 M_a, M_b, M_c 分別為 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 的中點。我們知道

$$M_bM_c \parallel BC, \quad M_cM_a \parallel CA, \quad M_aM_b \parallel AB.$$

因此 $\triangle M_aM_bM_c$ 與 $\triangle ABC$ 位似，位似中心為 $\triangle ABC$ 的重心 $G = AM_a \cap BM_b \cap CM_c$，位似比為

$$\frac{GM_a}{GA} = -\frac{1}{2}.$$

因為我們知道 $\triangle ABC$ 的外心 O 是 $\triangle M_aM_bM_c$ 的垂心（由 $M_aO \perp BC \parallel M_bM_c$ 等垂直關係），所以如果 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，則 O, G, H 共線且

$$\frac{GO}{GH} = -\frac{1}{2}.$$

我們把這條線稱為 $\triangle ABC$ 的**歐拉線** (**Euler line**)。

：當 $\triangle ABC$ 為正三角形時，O, G, H 重合，因此我們並不能定義 $\triangle ABC$ 的歐拉線。

Example 1.1.5 (九點圓)**.** 令 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，$\triangle M_aM_bM_c$, $\triangle H_aH_bH_c$ 分別為 $\triangle ABC$ 的中點三角形及垂足三角形，E_a, E_b, E_c 分別為 $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH}$

的中點，則 M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, E_a, E_b, E_b 九點共圓。我們稱這個圓為 $\triangle ABC$ 的**九點圓** (**nine-point circle**)。

Solution. 我們證明這九個點都位在外接圓 $\odot(ABC)$ 在位似變換 $\mathfrak{h}_{H,1/2}$ 下的像。反過來說，我們要證明在位似變換 $\mathfrak{h}_{H,2}$ 下，這九個點的像都在 $\odot(ABC)$ 上。因為 E_a 是 $\overline{AH}$ 中點，因此 $\mathfrak{h}_{H,2}(E_a) = A$，同理有 $\mathfrak{h}_{H,2}(E_b) = B, \mathfrak{h}_{H,2}(E_c) = C$。因為 H 關於三邊 BC, CA, AB 的對稱點 H_A, H_B, H_C 位於 $\odot(ABC)$ 上，所以 $\mathfrak{h}_{H,2}(H_a) = H_A, \mathfrak{h}_{H,2}(H_b) = H_B, \mathfrak{h}_{H,2}(H_c) = H_C$。

由對稱性，我們只剩證明 $\mathfrak{h}_{H,2}(M_a) \in \odot(ABC)$。令 A^* 為 A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點，則 $BH \perp CA \perp A^*C$, $HC \perp AB \perp BA^*$，因此 $BHCA^*$ 是一個平行四邊形。這告訴我們 $\overline{BC}$ 中點 M_a 也是 $\overline{HA^*}$ 中點，故 $\mathfrak{h}_{H,2}(M_a) = A^* \in \odot(ABC)$。

藉由這個證明，我們還可以得到九點圓的圓心（一般記為 N）是 $\mathfrak{h}_{H,1/2}(O)$，其中 O 是 $\triangle ABC$ 的外心。換句話說，N 是 $\overline{OH}$ 中點，因此位於 $\triangle ABC$ 的歐拉線上。注意到 $M_a = \mathfrak{h}_{G,-1/2}(A)$, $M_b = \mathfrak{h}_{G,-1/2}(B)$, $M_c = \mathfrak{h}_{G,-1/2}(C)$，其中 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，所以我們有九點圓

$$\odot(N) = \odot(M_aM_bM_c) = \mathfrak{h}_{G,-1/2}(\odot(ABC)).$$

給定 $\triangle ABC$，我們定義 $\triangle ABC$ 的**補變換**為 $(-)^{\complement} = \mathfrak{h}_{G,-1/2}$，其中 G 為 $\triangle ABC$ 的重心。對於任意一點 P，我們稱 $\mathfrak{h}_{G,-1/2}(P)$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的**補點**，記為 $P^{\complement,\triangle ABC}$ 或 $P^{\complement}$。

顯然地，$G = G^{\complement}$, $M_a = A^{\complement}$，其中 M_a 為 $\overline{BC}$ 中點。以上面的例子來說，我們得到 $O = H^{\complement}$, $\odot(N) = \odot(ABC)^{\complement}$。

反之，我們有 $\triangle ABC$ 的**反補變換** $(-)^{\mathsf{C}^{-1}} = \mathfrak{h}_{G,-2}$。對於任意一點 P，我們稱 $\mathfrak{h}_{G,-2}(P)$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的**反補點**，記為 $P^{\mathsf{C}^{-1},\triangle ABC}$ 或 $P^{\mathsf{C}^{-1}}$。所以我們有 $G = G^{\mathsf{C}^{-1}}$, $A = M_a^{\mathsf{C}^{-1}}$, $H = O^{\mathsf{C}^{-1}}$, $\odot(ABC) = \odot(N)^{\mathsf{C}^{-1}}$。我們定義 $\triangle ABC$ 的**反補三角形**為 $(\triangle ABC)^{\mathsf{C}^{-1}} = \triangle A^{\mathsf{C}^{-1}}B^{\mathsf{C}^{-1}}C^{\mathsf{C}^{-1}}$，這時候 $\triangle ABC$ 為 $(\triangle ABC)^{\mathsf{C}^{-1}}$ 的中點三角形。

Example 1.1.6 (18 Hong Kong P6)**.** 設 $\triangle ABC$ 垂心為 H、外心為 O，$\triangle HBC$, $\triangle HCA$, $\triangle HAB$ 外接圓圓心分別為 O_a, O_b, O_c。證明：AO_a, BO_b, CO_c, OH 四

線共點。

Solution. 令 $\triangle H_aH_bH_c$ 為 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，則我們知道 $\triangle H_aH_bH_c$ 也是 $\triangle HBC$, $\triangle HCA$, $\triangle HAB$ 的垂足三角形，因此 $\odot(H_aH_bH_c)$ 是 $\triangle ABC$, $\triangle HBC$, $\triangle HCA$, $\triangle HAB$ 的九點圓。故 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心 N 也是 $\triangle HBC$, $\triangle HCA$, $\triangle HAB$ 的九點圓圓心。由於 A, B, C 分別是 $\triangle HBC$, $\triangle HCA$, $\triangle HAB$ 的垂心，所以 N 分別是 $\overline{AO_a}$, $\overline{BO_b}$, $\overline{CO_c}$ 的中點，因此 AO_a, BO_b, CO_c, OH 共點。

Proposition 1.1.7. 兩個位似變換 $\mathfrak{h}_1$ 與 $\mathfrak{h}_2$ 的合成 $\mathfrak{h}_2 \circ \mathfrak{h}_1$ 也是位似變換，且 $\mathfrak{h}_2 \circ \mathfrak{h}_1$ 的位似比為 $\mathfrak{h}_1$ 與 $\mathfrak{h}_2$ 的位似比的積。

Proof. 如果有其中一個 $\mathfrak{h}_i$ 是恆等函數（也就是 $\mathfrak{h}_i(P) = P$），那麼結論顯然，所以假設它們都不是。設 $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_{O_1,k_1}$ 或 $\mathfrak{h}_{\vec{v}_1}$，$\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_{O_2,k_2}$ 或 $\mathfrak{h}_{\vec{v}_2}$，則 $k_1, k_2 \neq 1$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \neq 0$。我們分四個情形：

Case 1. $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_{O_1,k_1}$, $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_{O_2,k_2}$: 在 O_1O_2 上取一點 O 使得

$$\frac{O_1O}{OO_2} = \frac{k_2 - 1}{k_2(k_1 - 1)}.$$

對於一點 P，令 $P_1 = \mathfrak{h}_1(P)$, $P_2 = \mathfrak{h}_2(P_1)$，我們有

$$\frac{O_1P}{PP_1} \cdot \frac{P_1P_2}{P_2O_2} \cdot \frac{O_2O}{OO_1} = \frac{1}{k_1 - 1} \cdot \frac{1 - k_2}{k_2} \cdot \frac{k_2(k_1 - 1)}{k_2 - 1} = -1,$$

因此由孟氏定理得到 O, P, P_2 共線。再由孟氏定理，我們有

$$\frac{OP_2}{OP} = \frac{P_2O_2}{O_2P_1} \cdot \frac{P_1O_1}{O_1P} = \frac{-k_2}{1} \cdot \frac{-k_1}{1} = k_1k_2$$

為定值。若 $O \notin \mathcal{L}_\infty$，則 $\mathfrak{h}_2 \circ \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_{O,k}$，其中 $k = k_1k_2$。若 $O = \infty_{O_1O_2} \in \mathcal{L}_\infty$，則 $PP_2 \parallel O_1O_2$ 且

$$\overrightarrow{PP_2} = \frac{P_1P}{P_1O_1} \cdot \overrightarrow{O_1O_2} = \frac{k_1 - 1}{k_1} \cdot \overrightarrow{O_1O_2}.$$

所以 $\mathfrak{h}_2 \circ \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_{\vec{v}}$，其中 $\vec{v} = (1 - k_1^{-1}) \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$。

Case 2. $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_{O_1,k_1}$, $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_{\vec{v}_2}$: 取 O 使得 $OO_1 = \dfrac{\vec{v}_2}{k_1 - 1}$。對於一點 P，令 $P_1 = \mathfrak{h}_1(P)$, $P_2 = \mathfrak{h}_2(P_1)$，則

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1P_1} + \overrightarrow{P_1P_2} &= \frac{\vec{v}_2}{k_1 - 1} + k_1 \cdot \overrightarrow{O_1P} + \vec{v}_2 \\ &= \frac{k_1 \cdot \vec{v}_2}{k_1 - 1} - k_1 \cdot \overrightarrow{OO_1} + k_1 \cdot \overrightarrow{OP} = k_1 \cdot \overrightarrow{OP},\end{aligned}$$

所以 $\mathfrak{h}_2 \circ \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_{O,k_1}$。

Case 3. $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_{\vec{v}_1}$, $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_{O_2,k_2}$: 取 O 使得 $OO_2 = \dfrac{\vec{v}_1}{k_2-1}$。對於一點 P，令 $P_1 = \mathfrak{h}_1(P)$, $P_2 = \mathfrak{h}_2(P_1)$，則

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_2} &= \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2P_2} = \frac{\vec{v}_1}{k_2-1} + k_2 \cdot \overrightarrow{O_2P_1} \\ &= \frac{\vec{v}_1}{k_2-1} + k_2 \cdot \left(\overrightarrow{O_2O} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP_1}\right) = \frac{\vec{v}_1}{k_2-1} + k_2 \cdot \left(\overrightarrow{O_2O} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP_1}\right),\end{aligned}$$

所以 $\mathfrak{h}_2 \circ \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_{O,k_1}$。

Case 4. $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_{\vec{v}_1}, \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_{\vec{v}_2}$: 我們顯然有 $\mathfrak{h}_2 \circ \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_{\vec{v}}$，其中 $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$。 ■

那我們現在來看看兩個圓的位似中心。

Proposition 1.1.8. 對於兩個圓 Γ_1, Γ_2，存在恰兩個位似變換 $\mathfrak{h}_+, \mathfrak{h}_-$ 把 Γ_1 送到 Γ_2，其中 $\mathfrak{h}_+, \mathfrak{h}_-$ 的位似比分別一正一負。

Proof. 令 O_i, r_i 分別為 Γ_i 的外心與半徑長。我們分兩種情形：

Case 1. 如果 $O_1 \neq O_2$，在 O_1O_2 上取 O_+, O_- 滿足

$$\frac{O_+O_2}{O_+O_1} = \frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{O_-O_2}{O_-O_1} = -\frac{r_2}{r_1}.$$

我們定義

$$\mathfrak{h}_+ = \begin{cases} \mathfrak{h}_{O_+, r_2/r_1}, & \text{若 } r_1 \neq r_2, \\ \mathfrak{h}_{\overrightarrow{O_1O_2}}, & \text{若 } r_1 = r_2, \end{cases} \qquad \mathfrak{h}_- = \mathfrak{h}_{O_-, -r_2/r_1},$$

則顯然 $\mathfrak{h}_\pm$ 都把 Γ_1 送至 Γ_2。

如果 $\mathfrak{h}$ 也把 Γ_1 送至 Γ_2，那麼 $\mathfrak{h}(O_1) = O_2$ 且 $\mathfrak{h}$ 的位似比為 $\pm\dfrac{r_2}{r_1}$。所以 $\mathfrak{h}$ 的位似中心 O 滿足

$$\frac{OO_2}{OO_1} = \pm\frac{r_2}{r_1},$$

因此 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_+$ 或 $\mathfrak{h}_-$。

Case 2. 如果 $O_1 = O_2 = O$，也就是 Γ_1, Γ_2 是同心圓，那麼就取 $\mathfrak{h}_+ = \mathfrak{h}_{O,r_2/r_1}$, $\mathfrak{h}_- = \mathfrak{h}_{O,-r_2/r_1}$，則顯然 $\mathfrak{h}_\pm$ 都把 Γ_1 送至 Γ_2。

如果 $\mathfrak{h}$ 也把 Γ_1 送至 Γ_2，那麼 $\mathfrak{h}(O_1) = O_2$ 且 $\mathfrak{h}$ 的位似比為 $\pm\dfrac{r_2}{r_1}$。所以 $\mathfrak{h}$ 的位似中心為 O，因此 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_+$ 或 $\mathfrak{h}_-$。 ■

我們把 $\mathfrak{h}_+$ 的位似中心 O_+ 稱為 Γ_1, Γ_2 的**外位似中心** (**external homothetic center**)，$\mathfrak{h}_-$ 的位似中心 O_- 稱為 Γ_1, Γ_2 的**內位似中心** (**internal homothetic center**)。藉由上面的證明我們知道外位似中心與內位似中心的定義關於 O_1, O_2 是對稱的。

Example 1.1.9. 設 ε 為 $\triangle ABC$ 的九點圓，則 $\varepsilon, \odot(ABC)$ 的外位似中心及內位似中心分別為 $\triangle ABC$ 的垂心 H 及重心 G，且位似比分別為 $\pm 1/2$。

Proposition 1.1.10. 若兩圓 Γ_1, Γ_2 有兩條外公切線 K_+, L_+，那麼 $K_+ \cap L_+$ 就是 Γ_1, Γ_2 的外位似中心；若 Γ_1, Γ_2 有兩條內公切線 K_-, L_-，那麼 $K_- \cap L_-$ 就是 Γ_1, Γ_2 的內位似中心。

Proof. 我們只證明前面的敘述，後面的同理。假設 Γ_1, Γ_2 有兩條外公切線 K_+, L_+。令 $O_+ = K_+ \cap L_+$，$P_{+,1}$, $P_{+,2}$ 為 K_+ 與 Γ_1, Γ_2 的切點，$Q_{+,1}$, $Q_{+,2}$ 為 L_+ 與 Γ_1, Γ_2 的切點。注意到 Γ_1, Γ_2 的圓心 O_1, O_2 都落在 K_+, L_+ 的（兩條）角平分線上。由於 K_+, L_+ 都是外公切線，O_1, O_2 落在同一條角平分線 ℓ 上。由 $P_{+,1}, Q_{+,1} \in \odot\big(\overline{O_+O_1}\big)$ 及 $P_{+,2}, Q_{+,2} \in \odot\big(\overline{O_+O_2}\big)$，

$$\measuredangle O_+P_{1,+}Q_{1,+} = \measuredangle O_+O_1Q_{1,+} = 90^\circ - \measuredangle(L_+, \ell) = \measuredangle O_+O_2Q_{2,+} = \measuredangle O_+P_{2,+}Q_{2,+},$$

同理有 $\measuredangle P_{1,+}Q_{1,+}O_+ = \measuredangle P_{2,+}Q_{2,+}O_+$。因此 $\triangle O_+P_{1,+}Q_{1,+}$ 與 $\triangle O_+P_{2,+}Q_{2,+}$ 關於 O_+ 位似，設該位似變換為 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{O_+,k}$。因為 O_1, O_2 分別為 O_+ 關於 $\odot(O_+P_{1,+}Q_{1,+}), \odot(O_+P_{2,+}Q_{2,+})$ 的對徑點，所以 $\mathfrak{h}(O_1) = O_2$。同時我們有

$$\overline{O_2P_{2,+}} = k \cdot \overline{O_1P_{1,+}},$$

故 $\mathfrak{h}(\Gamma_1) = \Gamma_2$。因為 O_1, O_2 位於 K_+ 的同一側且 $O_+ \in K_+$，我們發現 $O_+ \notin \overline{O_1O_2}$，所以 O_+ 為外位似中心。 ■

這件事情讓我們可以證明下面這個常用引理。

Example 1.1.11. 令 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，D' 為 $\triangle ABC$ 的 A-旁切圓與 BC 的切點，M 為 $\overline{BC}$ 中點。證明：AD' 平行於 IM。

Solution. 注意到 CA, AB 是內切圓 ω 與 A-旁切圓的外公切線，所以 A 是 ω, ω_a 的外位似中心。考慮以 A 為中心的位似變換 $\mathfrak{h}$ 把 ω_a 送到 ω。那我們知道 $\mathfrak{h}(BC)$ 與 ω 相切且與 BC 平行，故 $\mathcal{H}(BC)$ 為 D 關於 ω 的對徑點 D^* 關於 ω 的切線 $\mathbf{T}_{D^*}\omega$。所以 D^* 作為 $\mathfrak{h}(BC)$ 與 $\omega = \mathfrak{h}(\omega_a)$ 的切點，就是 BC 與 ω_a 的切點 D' 在 $\mathfrak{h}$ 下的像，故 A, D^*, D' 共線。由於 I, M 分別為 $\overline{D^*D}$, $\overline{DD'}$ 的中點，$IM \parallel D^*D' = AD'$。

Theorem 1.1.12 (Monge). 對於三圓 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$，令 $O_{ij,+}$, $O_{ij,-}$ 分別為 Γ_i 與 Γ_j 的外、內位似中心，則當正號的數量為奇數時，$O_{23,\pm}$, $O_{31,\pm}$, $O_{12,\pm}$ 共線。

Proof. 令 O_i, r_i 分別為 Γ_i 的圓心及半徑長，則 $O_{ij,\pm} \in O_iO_j$ 且

$$\frac{O_iO_{ij,\pm}}{O_{ij,\pm}O_j} = \mp\frac{r_i}{r_j}.$$

當正號的數量為奇數時，

$$\frac{O_2O_{23,\pm}}{O_{23,\pm}O_3} \cdot \frac{O_3O_{31,\pm}}{O_{31,\pm}O_1} \cdot \frac{O_1O_{12,\pm}}{O_{12,\pm}O_2} = \left(\mp\frac{r_2}{r_3}\right) \cdot \left(\mp\frac{r_3}{r_1}\right) \cdot \left(\mp\frac{r_1}{r_2}\right) = -1,$$

因此由孟氏定理得到 $O_{23,\pm}$, $O_{31,\pm}$, $O_{12,\pm}$ 共線。 ■

Remark. 類似地，由西瓦定理我們有當正號的數量為偶數時，$O_1O_{23,\pm}$, $O_2O_{31,\pm}$, $O_3O_{12,\pm}$ 共點，只是這個就沒那麼好用就是了。

事實上，Monge 定理是下面這個定理的推論（讀者可以想想看為什麼）：

Theorem 1.1.13. 令 $\triangle_1 = \triangle A_1B_1C_1$, $\triangle_2 = \triangle A_2B_2C_2$, $\triangle_3 = \triangle A_3B_3C_3$ 為三個三角形並假設 $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ 之間兩兩透視。設 P_{ij}, ℓ_{ij} 分別為 $\triangle_i$ 與 $\triangle_j$ 的透視中心與透視軸。

(i) 若 $\ell_{23} = \ell_{31} = \ell_{12}$，則 P_{23}, P_{31}, P_{12} 共線。

(ii) 若 $P_{23} = P_{31} = P_{12}$，則 ℓ_{23}, ℓ_{31}, ℓ_{12} 共點。

Proof. (i) 考慮兩個三角形 $\triangle_B = \triangle B_1B_2B_3$, $\triangle_C = \triangle C_1C_2C_3$。由假設 $\ell_{23} = \ell_{31} = \ell_{12}$，$B_1C_1$, B_2C_2, B_3C_3 共點，因此 $\triangle_B$ 與 $\triangle_C$ 透視。故 $P_{23} = B_2B_3 \cap C_2C_3$, $P_{31} = B_3B_1 \cap C_3C_1$, $P_{12} = B_1B_2 \cap C_1C_2$ 共線。

(ii) 對偶於 (i)，考慮兩個三角形 $\triangle_b = \triangle(C_1A_1)(C_2A_2)(C_3A_3)$ 是由 C_1A_1, C_2A_2, C_3A_3 所圍成的三角形，$\triangle_c = \triangle(A_1B_1)(A_2B_2)(A_3B_3)$。由假設 $P_{23} = P_{31} = P_{12}$，A_1, A_2, A_3 共線，所以 $\triangle_b$ 與 $\triangle_c$ 透視。令 $b_i = C_iA_i, c_i = A_iB_i$，我們有 $\ell_{23} = (b_2 \cap b_3)(c_2 \cap c_3), \ell_{31} = (b_3 \cap b_1)(c_3 \cap c_1), \ell_{12} = (b_1 \cap b_2)(c_1 \cap c_2)$ 共點。 ■

習題

Problem 1. 設 $ABCD$ 為一個四邊形，M, N 分別為邊 AB, BC 的中點。設 P, Q 分別為 CD, DA 上兩點，滿足 $PQ \parallel MN$。證明：PN, DB, QM 共點或平行。

Problem 2. 給定 $\triangle ABC$。對於任意一點 P，令 $\triangle DEF$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形[1]，$X = EF \cap BC, Y = FD \cap CA, Z = DE \cap AB$。證明：$X, Y, Z$ 共線。這條線被稱為 P 關於 $\triangle ABC$ 的**三線性極線** (**trilinear polar**)。

Problem 3. 給定 $\triangle ABC$。設 D, E, F 分別位於 BC, CA, AB 上使得 $\triangle DEF$ 與 $\triangle ABC$ 透視，X, Y, Z 分別位於 EF, FD, DE 上使得 $\triangle XYZ$ 與 $\triangle ABC$ 透視。證明：$\triangle XYZ$ 與 $\triangle DEF$ 也透視。若 P 為 $\triangle DEF$ 與 $\triangle ABC$ 的透視中心，Q 為 $\triangle XYZ$ 與 $\triangle ABC$ 的透視中心，那麼我們稱 $\triangle XYZ$ 與 $\triangle DEF$ 的透視中心為 P 與 Q 關於 $\triangle ABC$ 的**交叉點** (**crosspoint**)，記為 $P \pitchfork Q$。

事實上，我們還可以證明 P 與 Q 關於 $\triangle ABC$ 的交叉點也是 Q 與 P 關於 $\triangle ABC$ 的交叉點，也就是說這個定義關於 P, Q 是對稱的。

Problem 4. 令 $\triangle M_aM_bM_c$ 為 $\triangle ABC$ 的中點三角形。作一直線 ℓ 分別交 BC, CA, AB 於 D, E, F。令 D_* 為 D 關於 M_a 的對稱點，並類似地定義 E_*, F_*。證明：

(i) D_*, E_*, F_* 共於一線 ℓ_*；

(ii) $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 的中點們共於 $\tau_\ell = (\ell_*)^{\complement}$，即 ℓ_* 在反補變換下的像。

我們稱 τ_ℓ 為 $\triangle ABC \cup \ell$ 的**牛頓線** (**Newton line**)，更多資訊見第 4.1 節。

[1] 即 $D = AP \cap BC, E = BP \cap CA, F = CP \cap AB$

Problem 5. 設 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，P 為該三角形外接圓上的一點，E 是 B 關於 CA 的垂足。取點 Q, R 使得四邊形 $PAQB, PARC$ 都是平行四邊形。設 AQ 與 HR 交於 X。求證：$EX \parallel AP$。

Problem 6 (12 Brazil MO Day1 P2)**.** 給定 $\triangle ABC$，令 T_a, T_b, T_c 分別為 BC, CA, AB 上的內切圓切點，I_a, I_b, I_c 分別為 A, B, C-旁心。證明：T_aI_a, T_bI_b, T_cI_c 共點，且該點與 $\triangle ABC$ 之外心、內心三點共線。

Problem 7. 對於任意三角形 $\triangle ABC$，證明其切點三角形 $\triangle DEF$ 的歐拉線為內心 I 與外心 O 的連線。

Problem 8 (2015 1J I2-2)**.** 給定任意三角形 $\triangle ABC$，令其外接圓為 O_1，九點圓為 O_2；並令以 $\triangle ABC$ 的垂心 H 與重心 G 為直徑的圓為 O_3。證明 O_1, O_2, O_3 共軸。

Problem 9. 令 I 為三角形 ABC 的內心，D 為邊 BC 上一點，ω_B, ω_C 分別為 $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ 的內切圓。設 ω_B, ω_C 分別和 BC 切於 E, F。令 P 為 AD 與 ω_B 及 ω_C 的連心線的交點，X 為 BI 和 CP 的交點，Y 為 CI 和 BP 的交點。證明 EX 和 FY 交在 $\triangle ABC$ 的內切圓上。

1.2 旋似

我們定義以 O 為中心，θ 為旋轉角的**旋轉變換** **(rotation)** $\mathfrak{r}_{O,\theta}$ 是將一點 P 送至一點 Q 滿足

$$\overline{OP} = \overline{OQ}, \quad \measuredangle POQ = \theta \pmod{360^\circ}.$$

顯然地，我們有

$$\mathfrak{r}_{O,\theta_1} \circ \mathfrak{r}_{O,\theta_2} = \mathfrak{r}_{O,\theta_2} \circ \mathfrak{r}_{O,\theta_1} = \mathfrak{r}_{O,\theta_1+\theta_2}.$$

事實上，兩個旋轉變換的合成還是旋轉變換（中心可不同），不過我們等等會直接證明更一般的結果。可以從定義中看出一個旋轉變換 $\mathfrak{r}$ 會保持長度及角

度，即

$$\overline{\mathfrak{r}(A)\mathfrak{r}(B)} = \overline{AB}, \quad \measuredangle \mathfrak{r}(A)\mathfrak{r}(B)\mathfrak{r}(C) = \measuredangle ABC \pmod{360^\circ}.$$

所以對於任意 $\triangle ABC$，$\mathfrak{r}(\triangle ABC) := \triangle \mathfrak{r}(A)\mathfrak{r}(B)\mathfrak{r}(C) \overset{+}{\cong} \triangle ABC$。

當 $\theta = 180^\circ \pmod{360^\circ}$ 時，$\mathfrak{r}_{O,180^\circ}(P)$ 為 P 關於 O 的對稱點，所以 $\mathfrak{r}_{O,180^\circ} = \mathfrak{s}_O = \mathfrak{h}_{O,-1}$ 是以 O 為中心的對稱變換。

現在我們把一個位似變換 $\mathfrak{h}_{O,k}$ 再合成上一個旋轉變換 $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{O,\theta}$，得到一個以 O 為中心，k 為旋似比，θ 為旋似角的**旋似變換** (**spiral similarity**) $\mathfrak{S}_{O,k,\theta} = \mathfrak{r}_{O,\theta} \circ \mathfrak{h}_{O,k}$。顯然地，$\mathfrak{S}_{O,k,\theta}$ 也等於 $\mathfrak{h}_{O,k} \circ \mathfrak{r}_{O,\theta}$，且我們有

(i) $\mathfrak{S}_{O,k_1,\theta_1} \circ \mathfrak{S}_{O,k_2,\theta_2} = \mathfrak{S}_{O,k_2,\theta_2} \circ \mathfrak{S}_{O,k_1,\theta_1} = \mathfrak{S}_{O,k_1k_2,\theta_1+\theta_2}$;

(ii) $\mathfrak{S}_{O,k,\theta}^{-1} = \mathfrak{S}_{O,k^{-1},-\theta}$;

(iii) $\mathfrak{S}_{O,-k,\theta} = \mathfrak{S}_{O,k,\theta+180^\circ}$.

透過 (iii)，我們總是可以假設旋似比 k 是正的，這樣一來，對於任意一點 P，$Q = \mathfrak{S}_{O,k,\theta}(P)$ 滿足

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = k, \quad \measuredangle POQ = \theta \pmod{360^\circ}.$$

為了保持完備性，我們也把平移變換 $\mathfrak{h}_{\vec{v}}$ 當作是一種旋似變換 $\mathfrak{S}_{\vec{v}}$，其中旋似中心定為「∞」，旋似比定為 1，旋似角定為 0°。

關於 ∞ 這個「點」：之前我們的平面一直都是我們熟悉的 $\mathbb{R}^2$ 加入一條無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$，那在這裡我們必須把 $\mathcal{L}_\infty$ 上的點都想成是同一個點，記為 ∞。

我們之前定義過四條線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ 的密克點（見 (0.1.18)），也就是 $\bigcap \odot(\ell_i\ell_{i+1}\ell_{i+2})$，現在把這個定義延伸到任意四邊形。

Definition 1.2.1. 對於四點 A_1, A_2, B_1, B_2 滿足 $A_1 \neq A_2, B_1 \neq B_2, A_1 \neq B_1, A_2 \neq B_1$（換句話說我們允許 $A_1 = B_2$ 或 $A_2 = B_1$），我們定義四邊形 $A_1B_1B_2A_2$ 的密克點為 $(A_1B_1, B_1B_2, B_2A_2, A_2A_1)$ 的密克點 M。這邊在取這四線圍出的三角形時可能會出現一些退化情形：

- 三點共線：比方說 A_1, B_1, B_2 共線（其他情形同理），那麼「退化三角形」$\triangle(A_1B_1)(B_1B_2)(B_2A_2)$ 的外接圓就會定義成是過 B_1, B_2 且與 B_2A_2 相切的圓。

- 兩線平行：比方說 $A_1B_1 \parallel B_2A_2$（其他情形同理），那麼這時候我們就直接取 $\triangle(A_1B_1)(B_1B_2)(B_2A_2)$ 的外接圓為直線 B_1B_2。
- 四點共線：我們就直接把密克點定為直線 $A_1A_2B_1B_2$ 上一點 M，滿足
$$\frac{MB_1}{MA_1} = \frac{MB_2}{MA_2}.$$

可以輕易地證明在退化時這樣的點 M 還是存在的。

這邊我們經常把四邊形 $A_1B_1B_2A_2$ 寫成 $(A_1B_2)(B_1A_2)$，主要是為了讓四邊 $A_1B_1, B_1B_2, B_2A_2, A_2A_1$ 擁有對稱性。那麼在這邊定義四邊形的密克點其實是為了下面這個性質：

Proposition 1.2.2. 若以 O 為中心的旋似變換 $\mathfrak{S}$ 將兩相異點 A_1, A_2 分別送至 B_1, B_2，則 O 是四邊形 $(A_1B_2)(B_1A_2)$ 的密克點。

Proof. 我們只證明任三點不共線、任兩線不平行的情形，剩下的證明類似或者更簡單。由於任兩線不平行，O 不是無窮遠點 ∞，所以 $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{O,k,\theta}$，其中 k 是一個正實數，θ 是一個角度。因為 O 為 $\mathfrak{S}$ 的中心，我們有
$$k = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}}, \quad \theta = \measuredangle A_1OB_1 = \measuredangle A_2OB_2 \pmod{360^\circ},$$
即 $\triangle OA_1B_1 \overset{+}{\sim} \triangle OA_2B_2$。由 (0.4.19)，$\triangle OA_1A_2 \overset{+}{\sim} \triangle OB_1B_2$。如果令 $C = A_1B_1 \cap B_2A_2$, $D = B_1B_2 \cap A_2A_1$，我們有
$$\begin{aligned}
\measuredangle A_1CA_2 &= \measuredangle A_1B_1O + \measuredangle B_1OB_2 + \measuredangle OB_2A_2 \\
&= (\measuredangle A_1B_1O - \measuredangle A_2B_2O) + \measuredangle A_1OA_2 = \measuredangle A_1OA_2, \\
\measuredangle A_1DB_1 &= \measuredangle A_1A_2O + \measuredangle A_2OB_2 + \measuredangle OB_2B_1 \\
&= (\measuredangle A_1A_2O - \measuredangle B_1B_2O) + \measuredangle A_1OB_1 = \measuredangle A_1OB_1,
\end{aligned}$$
即 $O \in \odot(A_1A_2C), \odot(A_1B_1D)$。同理有 $O \in \odot(B_1B_2C), \odot(A_2B_2D)$，所以 O 是 $(A_1B_2)(B_1A_2)$ 的密克點。 ■

Proposition 1.2.3. 對於任意四點 A_1, A_2, B_1, B_2 滿足 $A_1 \neq A_2, B_1 \neq B_2$，存在恰一個旋似變換 $\mathfrak{S}$ 使得 $\mathfrak{S}(A_1) = B_1, \mathfrak{S}(A_2) = B_2$。

Proof. 我們分兩種情形：

Case 1. 若 $A_1 \neq B_1$, $A_2 \neq B_2$，則令 O 為 $(A_1B_2)(B_1A_2)$ 的密克點。藉由四邊形的退化情形，我們得再分三種情形：

Subcase 1.1. 若 $O \neq \infty$ 且 A_1, A_2, B_1, B_2 四點不共線，令 $C = A_1B_1 \cap B_2A_2$，則

$$\begin{cases} \measuredangle OA_1B_1 = \measuredangle OA_1C = \measuredangle OA_2C = \measuredangle OA_2B_2, \\ \measuredangle OB_1A_1 = \measuredangle OB_1C = \measuredangle OB_2C = \measuredangle OB_2A_2. \end{cases} \implies \triangle OA_1B_1 \overset{+}{\sim} \triangle OA_2B_2.$$

所以如果取

$$k = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}}, \quad \theta = \measuredangle A_1OB_1 = \measuredangle A_2OB_2 \pmod{360^\circ},$$

就有 $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{O,k,\theta}$ 滿足 $\mathfrak{S}(A_1) = B_1$, $\mathfrak{S}(A_2) = B_2$。

Subcase 1.2. 若 $O \neq \infty$ 且 A_1, A_2, B_1, B_2 共線，則取

$$k = \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_2}{OA_2}, \quad \theta = 0^\circ.$$

我們顯然有 $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{O,k,\theta}$ 滿足條件。

Subcase 1.3. 若 $O = \infty$，則 $(A_1B_2)(B_1A_2)$ 是個平行四邊形，所以取 $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{\overrightarrow{A_1B_1}} = \mathfrak{S}_{\overrightarrow{A_2B_2}}$ 即可。

Case 2. 若 $A_1 = B_1$ 或 $A_2 = B_2$，不妨假設 $A_1 = B_1$，那麼我們就直接取

$$O = A_1 = B_1, \quad k = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}}, \quad \theta = \measuredangle A_2OB_2,$$

就有 $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{O,k,\theta}$ 滿足 $\mathfrak{S}(A_1) = B_1$, $\mathfrak{S}(A_2) = B_2$。 ■

跟位似變換一樣，我們有：

Proposition 1.2.4. 兩個旋似變換 $\mathfrak{S}_1$ 與 $\mathfrak{S}_2$ 的合成 $\mathfrak{S}_2 \circ \mathfrak{S}_1$ 也是旋似變換，且 $\mathfrak{S}_2 \circ \mathfrak{S}_1$ 的旋似比為 $\mathfrak{S}_1$ 與 $\mathfrak{S}_2$ 的旋似比的積，$\mathfrak{S}_2 \circ \mathfrak{S}_1$ 的旋似角為 $\mathfrak{S}_1$ 與 $\mathfrak{S}_2$ 的旋似角的和。

Proof. 設 $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_{O_1,k_1,\theta_1}$, $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_{O_2,k_2,\theta_2}$（我們把 $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_{\vec{v}_1}$ 或 $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_{\vec{v}_2}$ 的情形留給讀者），其中我們假設 $k_1, k_2 > 0$。若 $O := O_1 = O_2$，則 $\mathfrak{S}_2 \circ \mathfrak{S}_1 =$

$\mathfrak{S}_{O,k_1k_2,\theta_1+\theta_2}$。故以下假設 $O_1 \neq O_2$。令 $S_1 = \mathfrak{S}_2(O_1)$, $S_2 = \mathfrak{S}_1^{-1}(O_2)$，$O$ 為 $O_1S_1O_2S_2$ 的密克點。我們分兩種情形：

Case 1. 若 $O \notin \mathcal{L}_\infty$，我們證明 $\mathfrak{S} := \mathfrak{S}_{O,k_1k_2,\theta_1+\theta_2} = \mathfrak{S}_2 \circ \mathfrak{S}_1$。

對於任意一點 P，令 $P_1 = \mathfrak{S}_1(P)$, $P_2 = \mathfrak{S}_2(P_1)$，我們有

$$\begin{aligned}\measuredangle OO_1P &= \measuredangle OO_1S_2 + \measuredangle S_2O_1P = \measuredangle OS_1O_2 + \measuredangle O_2O_1P_1\\ &= \measuredangle OS_1O_2 + \measuredangle O_2S_1P_2 = \measuredangle OS_1P_2 \pmod{360^\circ}\end{aligned}$$

以及

$$\frac{\overline{OO_1}}{\overline{O_1P}} = \frac{\overline{OO_1}}{\overline{O_1S_2}} \cdot \frac{\overline{S_2O_1}}{\overline{O_1P}} = \frac{\overline{OS_1}}{\overline{S_1O_2}} \cdot \frac{\overline{O_2O_1}}{\overline{O_1P_1}} = \frac{\overline{OS_1}}{\overline{S_1O_2}} \cdot \frac{\overline{O_2S_1}}{\overline{S_1P_2}} = \frac{\overline{OS_1}}{\overline{S_1P_2}}.$$

因此 $\triangle OO_1P \overset{+}{\sim} \triangle OS_1P_2$。由 (0.4.19)，$\triangle OPP_2 \overset{+}{\sim} \triangle OO_1S_1 \overset{+}{\sim} \triangle OS_2O_2$，換句話說我們只需要證明 $\mathfrak{S}(O_1) = S_1$ 就好了。由 $\triangle OO_1S_2 \overset{+}{\sim} OS_1O_2$，我們得到

$$\frac{\overline{OS_1}}{\overline{OO_1}} = \frac{\overline{S_1O_2}}{\overline{O_1S_2}} = \frac{\overline{S_1O_2}}{\overline{O_1O_2}} \cdot \frac{\overline{O_1O_2}}{\overline{O_1S_2}} = k_1k_2$$

及

$$\begin{aligned}\measuredangle O_1OS_1 &= \measuredangle O_1OS_1 + (\measuredangle S_2O_1O - \measuredangle O_2S_1O) = \measuredangle\big(\overrightarrow{O_1S_2}, \overrightarrow{S_1O_2}\big)\\ &= \measuredangle S_2O_1O_2 + \measuredangle O_1O_2S_1 = \theta_1 + \theta_2 \pmod{360^\circ},\end{aligned}$$

即 $\mathfrak{S}(O_1) = S_1$（因為 $k_1k_2 > 0$）。

Case 2. 若 $O \in \mathcal{L}_\infty$，$(O_1O_2)(S_1S_2)$ 為平行四邊形。我們證明 $\mathfrak{S} := \mathfrak{S}_{\overrightarrow{O_1S_1}} = \mathfrak{S}_{\overrightarrow{S_2O_2}} = \mathfrak{S}_2 \circ \mathfrak{S}_1$。由 $\triangle O_1O_2S_1 \overset{+}{\cong} \triangle O_2O_1S_2$，

$$\begin{aligned}k_1k_2 &= \frac{\overline{O_1O_2}}{\overline{O_1S_1}} \cdot \frac{\overline{O_2S_1}}{\overline{O_2O_1}} = 1,\\ \theta_1 + \theta_2 &= \measuredangle O_2O_1S_2 + \measuredangle S_1O_2O_1 = 0^\circ \pmod{360^\circ}.\end{aligned}$$

對於任意一點 P，令 $P_1 = \mathfrak{S}_1(P)$, $P_2 = \mathfrak{S}_2(P_1)$，我們有

$$\begin{aligned}\measuredangle\big(\overrightarrow{O_1P}, \overrightarrow{S_1O_2}\big) &= \measuredangle PO_1S_2 + \measuredangle O_2S_1P_2\\ &= \measuredangle P_1O_1O_2 + \measuredangle O_2O_1P_1 = 0^\circ \pmod{360^\circ}\end{aligned}$$

及

$$\frac{\overline{O_1P}}{\overline{S_1O_2}} = \frac{\overline{PO_1}}{\overline{O_1S_2}} \cdot \frac{\overline{O_2S_1}}{\overline{S_1P_2}} = \frac{\overline{P_1O_1}}{\overline{O_1O_2}} \cdot \frac{\overline{O_2O_1}}{\overline{O_1P_1}} = 1.$$

因此 $(O_1P_2)(S_1P)$ 為平行四邊形，即 $\mathfrak{S}(P) = P_2$。 ■

習題

Problem 1. 設圓 P 與圓 Q 相交於相異兩點。過任一交點作一對垂直線，設其中一直線與連心線 PQ，圓 P 與圓 Q 分別交於相異點 A, B 與 C，另一直線與連心線 PQ, 圓 P, 圓 Q 分別交於相異點 D, E 與 F。試證 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{DF}$。

Problem 2. 給定任意三角形 ABC。設 D_1, D_2 位於 BC 上，E_1, E_2 位於 CA 上，F_1, F_2 位於 AB 上。令 M_1, M_2 分別為 $\triangle D_1E_1F_1, \triangle D_2E_2F_2$ 關於 $\triangle ABC$ 的密克點。證明：$\triangle D_1E_1F_1 \overset{+}{\sim} \triangle D_2E_2F_2$ 若且唯若 $M_1 = M_2$。

Problem 3 (2014 ISL G4)**.** 給定一圓 Γ 以及 Γ 上三個定點 A, B, C，同時給定一實數 $\lambda, 0 < \lambda < 1$。設 P 為 Γ 上不等於 A, B, C 的一個動點，並讓 M 是 CP 線段上滿足 $CM = \lambda \cdot CP$ 的點。令 Q 為三角形 AMP 與三角形 BMC 的兩外接圓的第二個交點。證明：當 P 變動時，Q 會落在一定圓上。

1.3 等角共軛點

等角共軛點是平面幾何非常重要的概念之一，也是數學競賽中經常用到的工具。

Definition 1.3.1. 給定兩線 ℓ_1, ℓ_2，滿足 $P = \ell_1 \cap \ell_2 \notin \mathcal{L}_\infty$。那麼我們說過 P 兩線 L_1, L_2 為關於 $\angle(\ell_1, \ell_2)$ 的**等角線** (**isogonal lines**) 若 (L_1, L_2) 關於 (ℓ_1, ℓ_2) 逆平行。

Proposition 1.3.2. 給定 $\triangle ABC$。若 D, D^* 為 BC 上兩點使得 AD, AD^* 為關於 $\angle BAC$ 的等角線，則

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{BD^*}{D^*C} = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}\right)^2.$$

Proof. 由 (0.3.4)，

$$\frac{BD/DC}{\overline{AB}/\overline{CA}} \cdot \frac{BD^*/D^*C}{\overline{AB}/\overline{CA}} = \frac{\sin\measuredangle(\overrightarrow{AB}, AD)}{\sin\measuredangle(AD, \overrightarrow{AC})} \cdot \frac{\sin\measuredangle(\overrightarrow{AB}, AD^*)}{\sin\measuredangle(AD^*, \overrightarrow{AC})} = 1.$$ ■

我們這邊需要一個幾何物件——**完全 n 線形**，一個完全 n 線形

$$\mathcal{N} = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$$

就是 n 條直線 $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ 結合這 n 條直線所交出的 $\binom{n}{2}$ 個點，其中任三線 ℓ_i, ℓ_j, ℓ_k 不共點。

Definition 1.3.3. 給定任意完全 n 線形 $\mathcal{N} = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$，定義 $A_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$。對於一個點 P，若存在一點 P^*，使得：

對於所有相異 i, j，$A_{ij}P, A_{ij}P^*$ 為關於 $\angle(\ell_i, \ell_j)$ 的等角線，

那麼我們稱 P^* 為 P 關於 $\mathcal{N}$ 的**等角共軛點** (**isogonal conjugate**)，或稱 (P, P^*) 為關於 $\mathcal{N}$ 的一對等角共軛點對（注意到 P 也為 P^* 關於 $\mathcal{N}$ 的等角共軛點）。

Example 1.3.4. 給定 $\triangle ABC$，其外心 O 及垂心 H 為關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對（因為 $AO, A\infty_{\perp BC}$ 是關於 $\angle BAC$ 的等角線），其內心 I 及三個旁心 I^a, I^b, I^c 則為自己的等角共軛點。

Proposition 1.3.5. 給定任意 $\triangle ABC$，則對於任意一點 $P \neq A, B, C$，存在一點 P^* 使得 P^* 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。

Proof. 一個作法直接是用角元西瓦：

$$\prod \frac{\sin\measuredangle\big(\overrightarrow{AB}, A\infty_{AB+AC-AP}\big)}{\sin\measuredangle\big(A\infty_{AB+AC-AP}, \overrightarrow{AC}\big)} = \prod \frac{\sin\measuredangle\big(AP, \overrightarrow{AC}\big)}{\sin\measuredangle\big(\overrightarrow{AB}, AP\big)} = 1.$$

這邊給個比較能看到本質的作法：若 $P \notin \odot(ABC) \cup \mathcal{L}_\infty$，令 $\triangle P_aP_bP_c$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形，即 P_a, P_b, P_c 分別為 AP, BP, CP 與 $\odot(ABC)$ 的另一個交點。令 D, E, F 分別為 P 關於三邊 P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b 的垂足。則

$$\measuredangle EDF = \measuredangle EDP + \measuredangle PDF = \measuredangle P_aP_cC + \measuredangle BP_bP_c = \measuredangle BAC,$$

同理有 $\measuredangle FED = \measuredangle CBA, \measuredangle DFE = \measuredangle ACB$，所以 $\triangle ABC \overset{+}{\sim} \triangle DEF$。取 P^* 使得 $\triangle ABC \cup P^* \overset{+}{\sim} \triangle DEF \cup P$，則

$$\measuredangle(AP + AP^*, AB + AC) = \measuredangle P_aAB + \measuredangle PDF = \measuredangle P_aP_bB + \measuredangle PP_bF = 0^\circ.$$

同理，BP, BP^* 是關於 $\angle CBA$ 的等角線，CP, CP^* 是關於 $\angle ACB$ 的等角線，所以 P^* 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。

至於 $P \in \odot(ABC) \cup \mathcal{L}_\infty$，我們令 ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C 分別為 AP, BP, CP 關於 $\angle BAC, \angle CBA, \angle ACB$ 的等角線，則

$$\begin{aligned}\measuredangle(\ell_B, \ell_C) &= \measuredangle(\ell_B, BC) + \measuredangle(BC, \ell_C) = \measuredangle ABP + \measuredangle PCA \\ &= \begin{cases} 0^\circ, & \text{若 } P \in \odot(ABC)\text{；} \\ \measuredangle BAC, & \text{若 } P \in \mathcal{L}_\infty\text{。} \end{cases}\end{aligned}$$

所以如果 $P \in \odot(ABC)$ 會告訴我們 $\ell_B \parallel \ell_C$。同理，我們可以得到 $\ell_A \parallel \ell_B \parallel \ell_C$。因此 ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C 共於一點 $P^* \in \mathcal{L}_\infty$。

如果 $P \in \mathcal{L}_\infty$ 會告訴我們 $\ell_B \cap \ell_C \in \odot(ABC)$。同理，我們可以得到 $\ell_C \cap \ell_B$, $\ell_A \cap \ell_B \in \odot(ABC)$。因此 ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C 共於一點 $P^* \in \odot(ABC)$。 ■

所以從這個證明我們也得到了「等角共軛變換」$[P \mapsto P^*]$ 會把外接圓送到無窮遠線，反之，也把無窮遠線送回來外接圓。事實上，藉由簡單的計算我們得到一點 $P \in \odot(ABC)$ 的等角共軛點 P^* 的方向為（形式和）

$$\ell_A = AB + AC - AP = A + B + C - P \quad (\Omega).$$

Proposition 1.3.6. 給定任意 $\triangle ABC$，則對於任意一點 P，點 Q 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點若且唯若

$$\measuredangle CPA + \measuredangle CQA = \measuredangle CBA \quad \text{及} \quad \measuredangle APB + \measuredangle AQB = \measuredangle ACB.$$

Proof. $(\Rightarrow)$ 直接算角度就有

$$\begin{aligned}\measuredangle CPA + \measuredangle CQA &= \measuredangle PCB + \measuredangle CBA + \measuredangle BAP + \measuredangle CQA \\ &= \measuredangle ACQ + \measuredangle CBA + \measuredangle QAC + \measuredangle CQA = \measuredangle CBA,\end{aligned}$$

類似地，我們可以得到 $\measuredangle APB + \measuredangle AQB = \measuredangle ACB$。

$(\Leftarrow)$ 令 P^* 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。由 $(\Rightarrow)$，

$$\measuredangle CQA = \measuredangle CBA - \measuredangle CPA = \measuredangle CP^*A,$$

即 $Q \in \odot(CAP^*)$。同理有 $Q \in \odot(ABP^*)$。故

$$Q \in \odot(CAP^*) \cap \odot(ABP^*) = \{A, P^*\},$$

因為 $Q \neq A$，所以 $Q = P^*$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。 ■

Example 1.3.7. 設圓 Γ 分別交 $\triangle ABC$ 的三邊 BC, CA, AB 於 D_1, D_2、E_1, E_2、F_1, F_2。令 P_1 為 $\odot(F_1BD_1)$ 與 $\odot(D_1CE_1)$ 的第二個交點，P_2 為 $\odot(F_2BD_2)$ 與 $\odot(D_2CE_2)$ 的第二個交點。證明：$\measuredangle BAP_1 = \measuredangle P_2AC$。

Solution. 由三圓定理，$P_1 \in \odot(E_1AF_1)$, $P_2 \in \odot(E_2AF_2)$。因此

$$\begin{aligned}
\measuredangle BP_1C + \measuredangle BP_2C &= \measuredangle BP_1D_1 + \measuredangle D_1P_1C + \measuredangle BP_2D_2 + \measuredangle D_2P_2C \\
&= \measuredangle AF_1D_1 + \measuredangle D_1E_1A + \measuredangle F_1F_2D_2 + \measuredangle D_2E_2E_1 \\
&= \measuredangle BAC + \measuredangle E_1D_1F_1 + \measuredangle F_1D_1D_2 + \measuredangle D_2D_1E_1 \\
&= \measuredangle BAC.
\end{aligned}$$

同理有另外兩條輪換的式子，因此由 (1.3.6) 知 P_1, P_2 為關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對。故 $\measuredangle BAP_1 = \measuredangle P_2AC$。

透過 $\triangle AE_1F_1 \cup P_1 \overset{-}{\sim} \triangle AF_2E_2 \cup P_2$，我們其實還可以得到

$$\begin{aligned}
&\measuredangle(P_1D_1, BC) = \measuredangle(P_1E_1, CA) = \measuredangle(P_1F_1, AB) \\
=\ &-\measuredangle(P_2D_2, BC) = -\measuredangle(P_2E_2, CA) = -\measuredangle(P_2F_2, AB).
\end{aligned}$$

那麼這個例子其實有個推廣：

Proposition 1.3.8. 對於任意完全 n 線形 $\mathcal{N}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$、一點 P 及一角 $\alpha \neq 0^\circ$，分別在 ℓ_i 上取點 P_i 使得 $\measuredangle(\ell_i, PP_i) = \alpha$。則 P 存在關於 $\mathcal{N}$ 的等角共軛點若且唯若 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 共於一圓 Γ_α。

此時，若 P^* 為 P 關於 $\mathcal{N}$ 的等角共軛點，分別在 ℓ_i 上取點 P_i^* 使得 $\measuredangle(\ell_i, P^*P_i^*) = -\alpha$。則 $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_1^*, P_2^*, \ldots, P_n^*$ 共於 Γ_α 且其圓心 O_α 位於 $\overline{PP^*}$ 的中垂線上且滿足 $\angle O_\alpha PP^* = 90^\circ - \alpha$。

Proof. 令 $A_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$。

(⇒) 假設 P^* 為 P 關於 $\mathcal{N}$ 的等角共軛點，分別在 ℓ_i 上取點 P_i^* 使得 $\measuredangle(\ell_i, P^*P_i^*) = -\alpha$。則由 $\triangle A_{ij}P_iP_j \cup P \overset{-}{\sim} \triangle A_{ij}P_j^*P_i^* \cup P^*$ 知 P_i, P_j, P_i^*, P_j^* 共圓。因為 ℓ_i, ℓ_j, ℓ_k 不共點，所以由 (0.4.15) 知 $P_i, P_j, P_k, P_i^*, P_j^*, P_k^*$ 共圓，故 $P_1, P_2, \dots, P_n, P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*$ 共圓。

當 $\alpha = 90^\circ$ 時，易知圓心 O_{90° 位於所有 $\overline{P_iP_i^*}$ 的中垂線上，所以 O_{90° 為 $\overline{PP^*}$ 中點。對於一般 α，考慮以 P 為中心的旋似變換 $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{P,(\sin\alpha)^{-1},\alpha-90^\circ}$，我們得到 $\Gamma_\alpha = \mathfrak{S}(\Gamma_{90^\circ})$，因此 $O_\alpha = \mathfrak{S}(O_{90^\circ})$ 位於 $\overline{PP^*}$ 的中垂線上且滿足 $\measuredangle O_\alpha PP^* = \measuredangle O_\alpha PO_{90^\circ} = 90^\circ - \alpha$，這證明了後半部分。

(⇐) 令 P_i^* 為 $\odot(P_1P_2\dots P_n)$ 與 ℓ_i 的另一個交點，由 (⇒) 及 P 存在關於 $\triangle A_{jk}A_{ki}A_{ij}$ 的等角共軛點知過 P_i^*, P_j^*, P_k^* 且滿足

$$\measuredangle(\ell_i, L_i^*) = \measuredangle(\ell_j, L_j^*) = \measuredangle(\ell_k, L_k^*) = -\alpha$$

的直線 L_i^*, L_j^*, L_k^* 交於 P 關於 $\triangle A_{jk}A_{ki}A_{ij}$ 的等角共軛點。故 $L_1^*, L_2^*, \dots, L_n^*$ 交於一點，設其為 P^*，則 P^* 為 P 關於 $\mathcal{N}$ 的等角共軛點。 ■

所以說類似於三角形的情形，我們可以說 P 是 $(P_1, \dots, P_n)$ 關於 $\mathcal{N} = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ 的密克點。

取 $\alpha = 90^\circ$，我們得到：

Proposition 1.3.9. 對於任意完全 n 線形 $\mathcal{N}(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ 及一點 P，定義 P_i 為 P 關於 ℓ_i 的垂足，則 P 存在關於 $\mathcal{N}$ 的等角共軛點若且唯若 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 共圓。

此時，若 P^* 為 P 關於 $\mathcal{N}$ 的等角共軛點，定義 P_i^* 為 P^* 關於 ℓ_i 的垂足，則 $P_1, P_2, \dots, P_n, P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*$ 共圓且其圓心為 $\overline{PP^*}$ 中點。

取 $\mathcal{N} = \triangle ABC$，$P$ 關於 BC, CA, AB 的垂足為 P_a, P_b, P_c，我們稱 $\triangle P_aP_bP_c$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的**佩多三角形** (**pedal triangle**)，$\odot(P_aP_bP_c)$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的**佩多圓** (**pedal circle**)。這個性質告訴我們 P 的佩多圓與 P^* 的佩多圓重合。

Example 1.3.10. $\triangle ABC$ 的內心 I 的佩多三角形就是 $\triangle ABC$ 的切點三角形，

因此 I 的佩多圓就是 $\triangle ABC$ 的內切圓 ω。ω 與三邊 BC, CA, AB 相切（故 ω 與三邊的另一個交點依舊是切點三角形的頂點），因此 I 的等角共軛點還是 I。

Example 1.3.11. 我們知道 $\triangle ABC$ 的外心 O 及垂心 H 是一對等角共軛點，因此 $\triangle ABC$ 的垂足三角形與中點三角形共外接圓（即九點圓）。

Proposition 1.3.12. 令 $\triangle P_aP_bP_c$ 為一點 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，$\triangle P_AP_BP_C$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形。則 $\triangle P_aP_bP_c \overset{+}{\sim} \triangle P_AP_BP_C$。

Proof. 這只是簡單的算角度：

$$\begin{aligned}\measuredangle P_bP_aP_c &= \measuredangle P_bP_aP + \measuredangle PP_aP_c = \measuredangle ACP + \measuredangle PBA \\ &= \measuredangle AP_AP_C + \measuredangle P_BP_AA = \measuredangle P_BP_AP_C,\end{aligned}$$

類似地我們有 $\measuredangle P_cP_bP_a = \measuredangle P_CP_BP_A, \measuredangle P_aP_cP_b = \measuredangle P_AP_CP_B$。 ■

Proposition 1.3.13. 令 $\triangle P_aP_bP_c$ 為一點 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形。則面積

$$[\triangle P_aP_bP_c] = -\frac{\mathbf{Pow}_{\odot(ABC)}(P)}{4R^2} \cdot [\triangle ABC],$$

其中 R 為 $\odot(ABC)$ 的半徑長。

Proof. 我們只證明兩邊取絕對值後相等（因為正負號需要分情形討論）。由面積公式 (0.2.12)，

$$\begin{aligned}[\triangle P_aP_bP_c] &= \frac{1}{2} \cdot \overline{P_cP_a} \cdot \overline{P_aP_b} \cdot \sin \measuredangle P_bP_aP_c \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{BP} \cdot |\sin \measuredangle CBA|\right) \cdot \left(\overline{CP} \cdot |\sin \measuredangle ACB|\right) \cdot \sin \measuredangle P_BP_AP_C,\end{aligned}$$

其中 $\triangle P_AP_BP_C$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形。由正弦定理 (0.2.2)，

$$\begin{aligned}\overline{CP} \cdot \sin \measuredangle P_BP_AP_C &= \pm\overline{CP} \cdot \sin \measuredangle P_BCP \\ &= \pm\overline{PP_B} \cdot \sin \measuredangle BP_BC = \pm\overline{PP_B} \cdot \sin \measuredangle BAC,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}[\triangle P_aP_bP_c] &= \pm\frac{1}{2}\cdot(\overline{BP}\cdot\overline{PP_B})\cdot\sin\measuredangle BAC\cdot\sin\measuredangle CBA\cdot\sin\measuredangle ACB\\ &= -\frac{1}{2}\cdot\mathbf{Pow}_{\odot(ABC)}(P)\cdot\frac{[\triangle ABC]}{2R^2}.\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

在 (1.3.9) 中取 $\mathcal{N}=\mathcal{Q}$ 為一個完全四線形，我們有：

Proposition 1.3.14. 給定任意四邊形 $(AC)(BD)$，則對於任意一點 P，P 有關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點若且唯若 (PA,PC) 關於 (PB,PD) 逆平行。

Proof. 令 P 關於 AB, BC, CD, DA 的垂足分別為 W, X, Y, Z，則 P 有關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點若且唯若 W, X, Y, Z 共圓，而後者等價於

$$\begin{aligned}\measuredangle WXY+\measuredangle YZW=0^\circ &\iff \measuredangle WXP+\measuredangle PXY+\measuredangle YZP+\measuredangle PZW=0^\circ\\ &\iff \measuredangle ABP+\measuredangle PCD+\measuredangle CDP+\measuredangle PAB=0^\circ\\ &\iff \measuredangle APB+\measuredangle CPD=0^\circ.\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

這個性質告訴我們一個完全四線形上可以定義等角共軛點的軌跡是一個特殊的曲線，而這也是第 9.2 節主要想討論的東西。

為了研究更深入的性質，我們再講另一個證明等角共軛點存在的方法：

Definition 1.3.15. 對於兩個三角形 ABC 與 DEF，我們說 $\triangle ABC$ 關於 $\triangle DEF$ **正交**，如果 A 關於 EF 的垂線 $A\infty_{\perp EF}$，B 關於 FD 的垂線 $B\infty_{\perp FD}$，C 關於 DE 的垂線 $C\infty_{\perp DE}$ 共於一點 P。這時候我們說 P 是 $\triangle ABC$ 關於 $\triangle DEF$ 的**正交中心**。

這時候如果 A, B, C, D, E, F 都不在無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 上，我們發現

$$\begin{aligned}\overline{AE}^2-\overline{AF}^2&=\overline{PE}^2-\overline{PF}^2,\\ \overline{BF}^2-\overline{BD}^2&=\overline{PF}^2-\overline{PD}^2,\\ \overline{CD}^2-\overline{CE}^2&=\overline{PD}^2-\overline{PE}^2.\end{aligned}$$

三式相加得

$$\overline{AE}^2-\overline{AF}^2+\overline{BF}^2-\overline{BD}^2+\overline{CD}^2-\overline{CE}^2=0.$$

注意到這條式子關於 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是對稱的，因此 $\triangle DEF$ 關於 $\triangle ABC$ 正交，所以這時候我們就說 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 正交（也就是無視了兩者的順序）。

對於任意一點 $P \notin \mathcal{L}_\infty$，注意到 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形 $\triangle P_aP_bP_c$ 關於 $\triangle ABC$ 正交，所以 $\triangle ABC$ 關於 $\triangle P_aP_bP_c$ 正交。因此 $A\infty_{\perp P_bP_c}$, $B\infty_{\perp P_cP_a}$, $C\infty_{\perp P_aP_b}$ 共於一點 Q。因為 P 為 A 關於 $\odot(AP_bP_c)$ 的對徑點，所以 $AQ = A\infty_{\perp BC}$ 為 AP 關於 $\angle P_bAP_c = \angle CAB$ 的等角線。同理，BQ, CQ 分別為 BP, CP 關於 $\angle CBA, \angle ACB$ 的等角線。故 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點存在。

最後，藉由這個正交性質，我們來給一些等角共軛點對的性質：

Proposition 1.3.16. 給定 $\triangle ABC$，令 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，(P, P^*) 為關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，$P^{*\prime}$ 為 P^* 關於 O 的對稱點。令 $\triangle P_aP_bP_c$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，$\triangle P_a^*P_b^*P_c^*$ 為 P^* 關於 $\triangle ABC$ 的反佩多三角形[2]，那麼：

(i) $(P^*, P^{*\prime})$ 為關於 $\triangle P_a^*P_b^*P_c^*$ 的等角共軛點對；

(ii) $\triangle P_aP_bP_c \cup P \overset{+}{\sim} \triangle P_a^*P_b^*P_c^* \cup P^{*\prime}$；

(iii) 令 Q 為 P 關於 $\triangle P_aP_bP_c$ 的等角共軛點，那麼 $PQ \parallel OP^*$。

Proof. 我們依序證明命題 (i), (ii), (iii)。

(i) 注意到 P^* 關於 $\triangle P_a^*P_b^*P_c^*$ 的佩多圓為 $\odot(ABC)$，所以 P^* 關於 $\triangle P_a^*P_b^*P_c^*$ 的等角共軛點為 P^* 關於 $\odot(ABC)$ 的圓心的對稱點，即 $P^{*\prime}$。

(ii) 顯然地，$P_b^*P_c^* \perp AP^* \perp P_bP_c$, $P_c^*P^{*\prime} \perp AB \perp P_cP$, $P^{*\prime}P_b^* \perp CA \perp PP_b$，所以 $\triangle PP_bP_c \overset{+}{\sim} \triangle P^{*\prime}P_b^*P_c^*$，同理有

$$\triangle PP_cP_a \overset{+}{\sim} \triangle P^{*\prime}P_c^*P_a^*,\ \triangle PP_aP_b \overset{+}{\sim} \triangle P^{*\prime}P_a^*P_b^*,$$

從而 $\triangle P_aP_bP_c \cup P \overset{+}{\sim} \triangle P_a^*P_b^*P_c^* \cup P^{*\prime}$。

[2]使得 $\triangle ABC$ 為 P^* 關於其的佩多三角形的三角形，即 $P_a^* = B\infty_{\perp BP} \cap C\infty_{\perp CP}$，$P_b^*, P_c^*$ 則類似定義。

(iii) 因為

$$\triangle P_aP_bP_c \cup P \cup Q \overset{+}{\sim} \triangle P_a^*P_b^*P_c^* \cup P^{*\prime} \cup P^*,$$

所以 $PQ \parallel P^{*\prime}P^* = OP^*$。 ■

習題

Problem 1. 給定銳角三角形 ABC。分別以 AB, AC 為對稱軸將直線 BC 作反射，令所得的兩直線交於 K 點。證明 AK 通過 $\triangle ABC$ 的外心。

Problem 2. 令 M 為 $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}$ 的中點，I_1, I_2 分別為 $\triangle ABM, \triangle AMC$ 的內心。證明：$\odot(AI_1I_2)$ 經過弧 $\widehat{BAC}$ 的中點。

Problem 3. $\triangle ABC$ 非等邊三角形，Γ 為其外接圓，點 P 不在圓 Γ 上。設 PA, PB, PC 或其延線分別再交圓 O 於 A_1, B_1, C_1。證明：使得 $\triangle A_1B_1C_1$ 為正三角形的點 P 只有兩個，且它們與 $\triangle ABC$ 的外心共線。

Problem 4. 令 (P, P^*) 為關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，AP, AP^* 分別交 $\odot(ABC)$ 於 U, V，AP 與 BC 交於 T。證明：

$$\frac{PT}{TU} = \frac{AP^*}{P^*V}.$$

Problem 5. 設 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，M 為 $\overline{AI}$ 中點，E, F 分別為 BI, CI 與 $\odot(ABC)$ 的另一個交點。分別在 AE, AF 上取點 X, Y 滿足 $\measuredangle XBC = \measuredangle ABM$ 及 $\measuredangle YCB = \measuredangle ACM$。證明：$I, X, Y$ 共線。

Problem 6. 令 (P, Q) 為關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，D 為 BC 上一點。證明：$\measuredangle APB + \measuredangle DPC = 180^\circ$ 若且唯若 $\measuredangle AQC + \measuredangle DQB = 180^\circ$。

Problem 7 (2007 ISL G2)**.** 已知梯形 $ABCD$ 中 BC 與 AD 平行且其倆對角線相交於 P。設點 Q 落在直線 BC 與 AD 之間使得 $\angle AQD = \angle CQB$，且 P 與 Q 在直線 CD 的異側。試證 $\angle BQP = \angle DAQ$。

Problem 8. 設 N 為三角形 ABC 的九點圓圓心，B', C' 分別為 B, C 關於 CA, AB 的對稱點。證明：$B'C'$ 垂直於 AN 關於 $\angle BAC$ 的等角線。(提示：見 0.4 的習題 7 。)

Problem 9 (2010 APMO P4). 令 ABC 是銳角三角形，滿足 $AB > BC$ 且 $AC > BC$。分別記 O 與 H 為三角形 ABC 的外心與垂心。設三角形 AHC 的外接圓交直線 AB 於異於 A 的一點 M；且三角形 AHB 的外接圓交直線 AC 於異於 A 的一點 N。證明三角形 MNH 的外接圓圓心在直線 OH 上。

Problem 10. 給定 $\triangle ABC$。對於任意一線 ℓ，令 D, E, F 分別為 A, B, C 關於 ℓ 的垂足。證明 D 關於 BC 的垂線，E 關於 CA 的垂線，F 關於 AB 的垂線共於一點。這個點被稱為 ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的**垂極點**。

Problem 11 (2015 APMOC P5). 三角形 ABC 中，點 L, M, N 分別位在 BC, CA, AB 邊上。已知 $\triangle ANM$, $\triangle BLN$, $\triangle CML$ 都是銳角三角形，且它們的垂心分別是 H_A, H_B, H_C。設 AH_A, BH_B, CH_C 三線共點。試證：LH_A, MH_B, NH_C 三線亦共點。

Problem 12 (2021 3J M6). 設 $ABCD$ 為菱形，其中心為點 O。設點 P 落在 AB 邊上。令點 I, J, L 分別為三角形 PCD, PAD, PBC 的內心。設點 H 與 K 分別是三角形 PLB 與 PJA 的垂心。證明直線 OI 與 HK 互相垂直。

Problem 13 (2022 IRN×TWN P3 改). 令 I 為不等邊三角形 ABC 的內心。內切圓分別切 BC, CA, AB 於 D, E, F。令 Y, Z 分別為 DF, DE 的中點，S 為 YZ 與 BC 的交點。令 J 為 I 關於三角形 AYZ 的等角共軛點。證明 IJ 垂直於 AS。

1.4 西姆松線與施坦納線

我們在上一節講了等角共軛點與佩多圓的關係 (1.3.9)。那我們知道等角共軛變換會把外接圓送到無窮遠線，但無窮遠點似乎不太好定義佩多三角形

及佩多圓，所以我們就會想問在這種情況下外接圓上的點的佩多圓會發生什麼事。那其實會跟我們想像上的差不多，就是：

Theorem 1.4.1 (西姆松定理). 令 P_a, P_b, P_c 分別為點 P 關於 $\triangle ABC$ 的邊 BC, CA, AB 的垂足，則 P 位於 $\odot(ABC)$ 上若且唯若 P_a, P_b, P_c 共線。

換句話說，$P \in \odot(ABC)$ 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形退化成了一條直線。

Proof. 由三圓定理，$P_a \in P_bP_c$ 若且唯若 $\odot(BAC), \odot(CP_bP_a), \odot(P_aP_cB)$ 共點。我們已經知道 $\odot(CP_bP_a)$ 與 $\odot(P_aP_cB)$ 交於 P 了，所以 P 位於 $\odot(ABC)$ 上若且唯若 P_a, P_b, P_c 共線。 ■

我們把 P_a, P_b, P_c 所共的直線稱為 P 關於 $\triangle ABC$ 的**西姆松線** (**Simson line**)，或 P-西姆松線。如果令 P_A, P_B, P_C 分別為 P 關於 BC, CA, AB 的對稱點，則 P_A, P_B, P_C 分別為 P_a, P_b, P_c 在位似變換 $\mathfrak{h}_{P,2}$ 下的像。這告訴我們 P_A, P_B, P_C 也共線，稱為 P 關於 $\triangle ABC$ 的**施坦納線** (**Steiner line**)，或 P-施坦納線。

Theorem 1.4.2 (施坦納定理). 令 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，則對於任意一點 $P \in \odot(ABC)$，P 關於 $\triangle ABC$ 的施坦納線 $\mathcal{S}_P$ 過 H。

Proof. 令 P_B, P_C 分別為 P 關於 CA, AB 的對稱點，H_B, H_C 分別為 H 關於 CA, AB 的對稱點。由第 0.1 節的習題 1，$H_B, H_C \in \odot(ABC)$，所以

$$\begin{aligned}
HP_B - HP_C &= (2CA - H_BP) - (2AB - H_CP) \\
&= 2C - H_B - 2B + H_C && (\odot(ABC)) \\
&= 2C - \perp(C + A - B) - 2B + \perp(A + B - C) && (\odot(ABC)) \\
&= 0^\circ,
\end{aligned}$$

即 $H \in P_BP_C = \mathcal{S}_P$。 ■

由 P-西姆松線為 P-施坦納線 $\mathcal{S}_P$ 在位似變換 $\mathfrak{h}_{P,2}$ 下的像，我們得到：

Corollary 1.4.3. 令 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，則對於任意一點 $P \in \odot(ABC)$，P 關於 $\triangle ABC$ 的西姆松線平分 $\overline{HP}$。

Example 1.4.4 (2009 ISL G8)**.** 令四邊形 $ABCD$ 有一內切圓。令 g 是通過 A 點的直線與線段 BC 交於 M 且與直線 CD 交於 N。令 I_1, I_2, I_3 分別為 $\triangle ABM$, $\triangle MNC$, $\triangle NDA$ 的內心。試證：$\triangle I_1I_2I_3$ 的垂心落在 g 上。

Solution. 要證明 g 過 $\triangle I_1I_2I_3$ 的垂心，我們只需要證明 g 是某個 $P \in \odot(I_1I_2I_3)$ 的施坦納線就好了。也就是我們希望 g 關於三邊 I_2I_3, I_3I_1, I_1I_2 對稱後的線交於 $P \in \odot(I_1I_2I_3)$。我們發現 g 關於 I_2I_3 的對稱線為 CD, g 關於 I_1I_2 的對稱線為 BC，所以說只剩下證明 g 關於 I_3I_1 的對稱線 g' 過 C（這樣由西姆松定理逆定理會自動得到 $C \in \odot(I_1I_2I_3)$）。

因為 g 是兩個內切圓 $\odot(I_3)$, $\odot(I_1)$ 的其中一條內公切線，所以 g' 是另一條內公切線。如果令 T_3, T_1 分別為 $\odot(I_3)$, $\odot(I_1)$ 與 g 的切點，那只要證明 C 關於 $\odot(I_3)$ 的切線長與 C 關於 $\odot(I_1)$ 的切線長的差是 $\overline{T_1T_3}$。而切線長差為

$$(\overline{T_1M} + \overline{MC}) - (\overline{T_3N} - \overline{CN}) = \overline{MC} + \overline{CN} - \overline{T_1T_2} - \overline{NM}.$$

另一方面，

$$\begin{aligned} 2 \cdot \overline{T_3T_1} = 2 \cdot \overline{AT_1} - 2 \cdot \overline{AT_3} &= (\overline{MA} + \overline{AB} - \overline{BM}) - (\overline{DA} + \overline{AN} - \overline{ND}) \\ &= (\overline{AB} - \overline{DA}) - \overline{NM} + \overline{ND} - \overline{BM} \\ &= (\overline{BC} - \overline{CD}) - \overline{NM} + \overline{ND} - \overline{BM} \qquad (\text{這是由 } (AC)(BD) \text{ 有內切圓}) \\ &= \overline{CM} + \overline{NC} - \overline{NM}, \end{aligned}$$

我們得到切線長差為 $\overline{T_1T_2}$，從而原命題成立。

Proposition 1.4.5. 給定 $\triangle ABC$ 與外接圓 $\odot(ABC)$ 上一點 P，令 $\mathcal{S}_P$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的西姆松線（或施坦納線）。則 $\mathcal{S}_P$ 上的無窮遠點 $\infty_{\mathcal{S}_P}$ 的等角共軛點為 P 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點 P^*。

Proof. 因為 $\infty_{\mathcal{S}_P}$ 位於無窮遠線上，其等角共軛點位於外接圓 $\odot(ABC)$ 上，所以我們只需證明 $A\infty_{\mathcal{S}_P}$, AP^* 為關於 $\angle BAC$ 的等角線。令 P_b, P_c 為 P 關於 CA, AB 的垂足，則 $A\infty_{\mathcal{S}_P} \parallel P_bP_c$。因此我們只要證明 (P_bP_c, AP^*) 關於 (CA, AB) 逆平行。考慮 $\triangle AP_bP_c$，我們知道 AP, $A\infty_{\perp P_bP_c}$ 為關於 $\angle P_bAP_c$ 的等角線，因此由 $P_bP_c \perp A\infty_{\perp P_bP_c}$, $AP^* \perp AP$，我們得到 (P_bP_c, AP^*) 關於 $(CA = P_bA, AB = AP_c)$ 逆平行。從而原命題成立。 ■

當然我們也可以直接用施坦納定理來算角度：因為 $\mathcal{S}_P = HP_A$，其中 P_A 為 P 關於 BC 的對稱點，所以

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_P + AP &= 2BC - H_aP + AP \\ &= 2BC - H_aA + (AB + AC - BC) \\ &= AB + AC + 90^\circ,\end{aligned}$$

即 $(\mathcal{S}_P, AP^*)$ 關於 (AB, AC) 逆平行。

如果現在有兩點 $P, Q \in \odot(ABC)$，則 $A\infty_{\mathcal{S}_P}, AP^*$ 及 $A\infty_{\mathcal{S}_Q}, AQ^*$ 為關於 $\angle BAC$ 的兩組等角線。因此由 $AP \perp AP^*, AQ \perp AQ^*$ 可得：

Corollary 1.4.6. 給定 $\triangle ABC$，對於 $\odot(ABC)$ 上兩點 P, Q，其施坦納線（或西姆松線，因為它們平行）$\mathcal{S}_P, \mathcal{S}_Q$ 的夾角為

$$\measuredangle(\mathcal{S}_P, \mathcal{S}_Q) = \measuredangle QAP.$$

換句話說，當 P 在 $\odot(ABC)$ 上動時，$\mathcal{S}_P + AP$ 為定值。

Example 1.4.7. 設 P, Q 為 $\triangle ABC$ 的外接圓上兩點，使得 PQ 通過 $\triangle ABC$ 的外心。令 P_b, Q_b 分別為 P, Q 關於 CA 的垂足，P_c, Q_c 分別為 P, Q 關於 AB 的垂足。證明：P_bP_c 與 Q_bQ_c 交於 $\triangle ABC$ 的九點圓上。

Solution. 由定義，P_bP_c, Q_bQ_c 為 P, Q 關於 $\triangle ABC$ 的西姆松線 $\mathcal{S}_P, \mathcal{S}_Q$。令 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，M_P, M_Q 分別為 $\overline{HP}. \overline{HQ}$ 的中點。由九點圓 $\odot(N)$ 為外接圓 $\odot(ABC)$ 在位似變換 $\mathfrak{h}_{H,1/2}$ 下的像，我們有 M_P, M_Q 位於 $\odot(N)$ 上，而由 (1.4.3) 我們知道 $M_P \in \mathcal{S}_P, M_Q \in \mathcal{S}_Q$。

因為 PQ 過 $\triangle ABC$ 的外心，因此 $\overline{M_PM_Q}$ 為 $\odot(N)$ 的直徑，所以再由 (1.4.6) 得到的

$$\measuredangle(\mathcal{S}_P, \mathcal{S}_Q) = 90^\circ$$

知 $\mathcal{S}_P, \mathcal{S}_Q$ 交於 $\odot(N)$ 上。

習題

Problem 1. 設三角形 ABC 滿足 $\overline{AB} < \overline{AC}$。令 H 為三角形 $\triangle ABC$ 的垂心，M 為 $\overline{BC}$ 中點，N 為外接圓上的弧 $\widehat{BAC}$ 的中點。若 D 為邊 CA 上一點滿足 MD 平分線段 $\overline{HN}$，證明：$\overline{CD} = \overline{DA} + \overline{AB}$。

Problem 2 (2007 ISL G4)**.** 考慮五點 A, B, C, D 及 E 使得 $ABCD$ 為平行四邊形且 $BCED$ 為圓內接四邊形。令 ℓ 為過 A 一直線，並設 ℓ 交線段 CD 於 F，ℓ 交直線 BC 於 G。假設 $\overline{EF} = \overline{EG} = \overline{EC}$。證明：$\ell$ 是 $\angle DAB$ 的角平分線。

Problem 3. 給定任意 $\triangle ABC$，令 P_1, P_2, P_3 為 $\odot(ABC)$ 上三點，$\mathcal{S}_i$ 為 P_i 關於 $\triangle ABC$ 的西姆松線。證明：$\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ 共點若且唯若

$$\measuredangle ABP_1 + \measuredangle BCP_2 + \measuredangle CAP_3 = 0^\circ.$$

Problem 4. 設 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，P 為 $\triangle ABC$ 的外接圓上一點。作 $\overline{HP}$ 的中垂線並分別交 CA, AB 於 Q, R。證明：A, P, Q, R 共圓。

Problem 5 (2020 3J P5)**.** 設 O, H 分別為銳角三角形 ABC 的外心及垂心。分別在邊 AB, AC 上取兩點 D, E 滿足 A, D, O, E 共圓。令 P 為三角形 ABC 的外接圓上一點，過 P 作平行於 OD, OE 的直線並分別交 AB, AC 於 X, Y。設 $\overline{HP}$ 的中垂線與 XY 不重合並交於 Q，且 A, Q 位於 DE 異側。證明：$\angle EQD = \angle BAC$。

1.5 等截共軛與三線性極線

我們來定義等角共軛點的對偶——等截共軛線。

Definition 1.5.1. 給定兩點 P_1, P_2，滿足 $P_1, P_2 \notin \mathcal{L}_\infty$。那麼我們說 P_1P_2 上兩點 A_1, A_2 為關於 $\overline{P_1P_2}$ 的**等截點** (**isotomic points**) 若 $\overline{A_1A_2}$ 中點與 $\overline{P_1P_2}$ 中點重合。

對偶地，我們這邊需要**完全 n 點形**，一個完全 n 點形

$$\boldsymbol{n} = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

就是 n 個點 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 結合這 n 個點所連出的 $\binom{n}{2}$ 條直線，其中任三點 P_i, P_j, P_k 不共線。

Definition 1.5.2. 給定任意完全 n 點形 $\boldsymbol{n} = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$，定義 $L_{ij} = P_iP_j$。對於一直線 ℓ，若存在一線 ℓ_*，使得：

對於所有相異 i, j，$L_{ij} \cap \ell, L_{ij} \cap \ell_*$ 為關於 $\overline{P_iP_j}$ 的等截點，

那麼我們稱 ℓ_* 為 ℓ 關於 $\boldsymbol{n}$ 的**等截共軛線** (**isotomic conjugate**)，或稱 (ℓ, ℓ_*) 為關於 $\boldsymbol{n}$ 的一對等截共軛線對 (注意到 ℓ 也為 ℓ_* 關於 $\boldsymbol{n}$ 的等截共軛線)。

Example 1.5.3. 對於任意 $\triangle ABC$，其中點三角形 $\triangle M_aM_bM_c$ 的邊 M_bM_c, M_cM_a, M_aM_b 都是自己關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛線，無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 也是自己關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛線。

由第 1.1 節的習題 4 (i)，我們知道：

Proposition 1.5.4. 給定任意 $\triangle ABC$，則對於任意一線 $\ell \neq BC, CA, AB$，存在 ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛線 ℓ_*。

而習題 4 (ii) 告訴我們 ℓ_* 是 $\triangle ABC \cup \ell$ 的牛頓線關於 $\triangle ABC$ 的補變換下的像。類似於完全四線形上的等角共軛點有充要條件 (1.3.14)，我們對於完全四點形上的等截共軛線也有刻畫：

Proposition 1.5.5. 給定完全四點形 $\boldsymbol{q} = (A, B, C, D)$。對於任意一線 $\ell \neq \mathcal{L}_\infty$，令 $P_{XY} = XY \cap \ell$。則 ℓ 有關於 $\boldsymbol{q}$ 的等截共軛線若且唯若 $\overline{P_{CA}P_{BD}}$ 的中點與 $\overline{P_{AB}P_{CD}}$ 的中點重合。

Proof. 令 P_{XY*} 為 P_{XY} 關於 $\overline{XY}$ 的等截點，M_{XY} 為 $\overline{XY}$ 的中點，那麼

$$\overrightarrow{P_{CA*}P_{AB*}} = 2 \cdot \overrightarrow{M_{CA}M_{AB}} - \overrightarrow{P_{CA}P_{AB}},$$
$$\overrightarrow{P_{BD*}P_{CD*}} = 2 \cdot \overrightarrow{M_{BD}M_{CD}} - \overrightarrow{P_{BD}P_{CD}}.$$

由於 $(M_{CA}M_{BD})(M_{AB}M_{CD})$ 是平行四邊形，$\overrightarrow{M_{CA}M_{AB}} = -\overrightarrow{M_{BD}M_{CD}}$，所以將兩式相加得

$$\overrightarrow{P_{CA*}P_{AB*}} + \overrightarrow{P_{BD*}P_{CD*}} = -\big(\overrightarrow{P_{CA}P_{AB}} + \overrightarrow{P_{BD}P_{CD}}\big). \qquad (\text{☺})$$

如果 $\overline{P_{CA}P_{BD}}$ 的中點與 $\overline{P_{AB}P_{CD}}$ 的中點重合，那麼上式的右側為 0 向量，因此 $P_{CA*}P_{AB*}$ 與 $P_{BD*}P_{CD*}$ 平行。注意到 $P_{BC*}, P_{CA*}, P_{AB*}$ 及 $P_{BC*}, P_{BD*}, P_{CD*}$ 分別共線，$P_{BC*}P_{CA*}P_{AB*}$ 與 $P_{BC*}P_{BD*}P_{CD*}$ 平行告訴我們這兩條直線重合。透過 $P_{CA*}, P_{AD*}, P_{DC*}$ 共線，我們得到 P_{AD} 也在這條直線上，故 ℓ 有關於 q 的等截共軛線。

如果 ℓ 有關於 q 的等截共軛線 ℓ_*，即 $P_{BC*}P_{CA*}P_{AB*}P_{AD*}P_{BD*}P_{CD*}$，那麼 (☺) 會告訴我們

$$\overrightarrow{P_{CA}P_{AB}} + \overrightarrow{P_{BD}P_{CD}} = 0 \quad \text{或} \quad \ell \text{ 平行於 } \ell_*.$$

前者會得到 $\overline{P_{CA}P_{BD}}$ 的中點與 $\overline{P_{AB}P_{CD}}$ 的中點重合。後者會得到對於 q 中任意一個三角形 $\triangle$，ℓ, ℓ_* 會平行於 $\triangle$ 的其中一邊，這樣 ℓ, ℓ_* 會平行於 q 的其中一組對邊。在這個情形下，$\overline{P_{CA}P_{BD}}$ 的中點顯然與 $\overline{P_{AB}P_{CD}}$ 的中點重合。 ■

接下來，我們要把等截共軛這個概念從線換成點，最自然的方式就是藉由三線性極線（見第 1.1 節的習題 2）。我們在這邊正式定義一下：

Definition 1.5.6. 給定任意 $\triangle ABC$。

(i) 對於一點 $P \neq A, B, C$，令 $\triangle P_aP_bP_c$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形。我們定義 P 關於 $\triangle ABC$ 的**三線性極線** (**trilinear polar**) 為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle P_aP_bP_c$ 的透視軸 $\mathrm{t}(P)$。

(ii) 對於一線 $\ell \neq BC, CA, AB$，令 $\triangle \ell_a\ell_b\ell_c$ 為 ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形（即 $\ell_a = A(BC\cap\ell), \ell_b = B(CA\cap\ell), \ell_C = C(AB\cap\ell)$ 所圍成的三角形）。我

們定義 ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的**三線性極點** (**trilinear pole**) 為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle \ell_a\ell_b\ell_c$ 的透視中心 $\mathfrak{t}(\ell)$。

關於透視軸及透視中心的定義，見 (1.1.1)。

顯然地，三線性極線與三線性極點互為反映射，即一點 P 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線的三線性極點 $\mathfrak{t}(\mathfrak{t}(P))$ 是 P，一線 ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極點的三線性極線 $\mathfrak{t}(\mathfrak{t}(ell))$ 是 ℓ。

Example 1.5.7. 無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形為

$$\triangle(A\infty_{BC})(B\infty_{CA})(C\infty_{AB}),$$

即 $\triangle ABC$ 的反補三角形 $\triangle A^{\sqsupset}B^{\sqsupset}C^{\sqsupset}$。因此 $\mathcal{L}_\infty$ 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極點 $\mathfrak{t}(\mathcal{L}_\infty)$ 為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A^{\sqsupset}B^{\sqsupset}C^{\sqsupset}$ 的透視中心，即 $\triangle ABC$ 的重心 G。

Example 1.5.8. 令 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，則 H 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線為 $\triangle ABC$ 的外接圓 Ω 與九點圓 $\odot(N)$ 的根軸：令 $\triangle H_aH_bH_c$ 為 H 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形，$X = BC \cap H_bH_c$。由 B, C, H_b, H_c 共圓，我們得到

$$\mathbf{Pow}_{\odot(N)}(X) = XH_b \cdot XH_c = XB \cdot XC = \mathbf{Pow}_\Omega(X),$$

即 X 位於 Ω 與 $\odot(N)$ 的根軸上。同理，$CA \cap H_cH_a$, $AB \cap H_aH_b$ 也位於 Ω 與 $\odot(N)$ 的根軸上。

Definition 1.5.9. 給定任意 $\triangle ABC$，對於任意一點 $P \neq A, B, C$，我們定義 P 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點 P' 為 P 的三線性極線 $\mathfrak{t}(P)$ 的等截共軛線 $\mathfrak{t}(P)_*$ 的三線性極點 $\mathfrak{t}(\mathfrak{t}(P)_*)$。

Proposition 1.5.10. 給定任意 $\triangle ABC$。對於任意一點 $P \neq A, B, C$，令 P' 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點。那麼 $AP \cap BC$, $AP' \cap BC$ 為關於 $\overline{BC}$ 的等截點。類似地，$BP \cap CA$, $BP' \cap CA$ 為關於 $\overline{CA}$ 的等截點；$CP \cap AB$, $CP' \cap AB$ 為關於 $\overline{AB}$ 的等截點。

Proof. 令 ℓ, ℓ' 分別為 P, P' 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線，$\triangle P_aP_bP_c, \triangle P'_aP'_bP'_c$ 分別為 P, P' 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形，則 BC, ℓ, P_bP_c 共於一點 Q_a 且 BC, ℓ', $P'_bP'_c$ 也共於一點 Q'_a。由孟氏定理及西瓦定理（或由完全四線形的調和性質，見 (2.2.8)），

$$\frac{BP_a}{P_aC} = \frac{BP_c}{P_cA} \cdot \frac{AP_b}{P_bC} = -\frac{BQ_a}{Q_aC} = -\frac{CQ'_a}{Q'_aB} = \frac{CP'_b}{P'_bA} \cdot \frac{AP'_c}{P'_cB} = \frac{CP'_a}{P'_aB},$$

因此 $P_a = AP \cap BC$, $P'_a = AP' \cap BC$ 為關於 $\overline{BC}$ 的等截點。 ■

所以我們也可以用上面這個性質來定義等截共軛點。

Example 1.5.11. 由 (1.5.3) 及 (1.5.7)，我們得到：對於任意 $\triangle ABC$，其反補三角形 $\triangle A^{\mho}B^{\mho}C^{\mho}$ 的頂點都是自己關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點，重心 G 也是自己關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點。

由內切圓切點及旁切圓切點的長度關係 (0.3.9)

$$\overline{BD} = \overline{D_aC}, \quad \overline{CE} = \overline{E_bA}, \quad \overline{AF} = \overline{F_cB},$$

我們得到熱爾岡點 $Ge = AD \cap BE \cap CF$ 與奈格爾點 $Na = AD_a \cap BE_b \cap CF_c$（見第 0.3 節的習題 4, 5）為關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點對。

Remark. 我們知道等角共軛變換 $[P \mapsto P^*]$ 會把無窮遠線送到外接圓，而等截共軛變換 $[P \mapsto P']$ 其實會把無窮遠線送到一個橢圓，稱作（$\triangle ABC$ 的）**施坦納橢圓** (**Steiner ellipse**)。詳見第 7.3 及 7.4 節。

這邊講一個等截共軛點的應用。

Proposition 1.5.12. 給定任意 $\triangle ABC$ 及任意一點 $P \neq A, B, C$。令 $\triangle P_aP_bP_c$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形，Q_a, Q_b, Q_c 分別為 $\odot(P_aP_bP_c)$ 與三邊 BC, CA, AB 的第二個交點，則 AQ_a, BQ_b, CQ_c 共於一點 Q。這時候我們說 Q 是 P 關於 $\triangle ABC$ 的**西瓦圓共軛點** (**cyclocevian conjugate**)，或 (P, Q) 是關於 $\triangle ABC$ 的一對西瓦圓共軛點對。

Proof. 這是卡諾圓錐曲線定理 (6.3.3) 的直接推論，這邊給一個基礎證明：由西瓦定理，

$$\frac{BP_a}{P_aC}\cdot\frac{CP_b}{P_bA}\cdot\frac{AP_c}{P_cB}=1. \tag{Υ}$$

由圓冪定理，

$$AP_c\cdot AQ_c=AP_b\cdot AQ_b,\quad BP_a\cdot BQ_a=BP_c\cdot BQ_c,\quad CP_b\cdot CQ_b=CP_a\cdot AQ_a,$$

因此

$$\begin{aligned}&\left(\frac{BP_a}{P_aC}\cdot\frac{CP_b}{P_bA}\cdot\frac{AP_c}{P_cB}\right)\cdot\left(\frac{BQ_a}{Q_aC}\cdot\frac{CQ_b}{Q_bA}\cdot\frac{AQ_c}{Q_cB}\right)\\ =&\frac{BP_a\cdot BQ_a}{P_aC\cdot Q_aC}\cdot\frac{CP_b\cdot CQ_b}{P_bA\cdot Q_bA}\cdot\frac{AP_c\cdot AQ_c}{P_cB\cdot Q_cB}=1.\end{aligned}$$

結合 (Υ)，我們得到

$$\frac{BQ_a}{Q_aC}\cdot\frac{CQ_b}{Q_bA}\cdot\frac{AQ_c}{Q_cB}=1,$$

即 AQ_a, BQ_b, CQ_c 共線。 ■

而等截共軛點，結合等角共軛點以及補變換，給了我們西瓦圓共軛點的另一種刻畫：

Theorem 1.5.13 (Grinberg). 令 (P,Q) 為關於 $\triangle ABC$ 的一對西瓦圓共軛點對。令 P', Q' 分別為 P, Q 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。則 P', Q' 關於 $\triangle ABC$ 的補點

$$(P')^{\complement}, (Q')^{\complement}$$

為等角共軛點對。也就是說，西瓦圓共軛變換是下列合成：

$$\varphi^G\circ(-)^{\complement^{-1}}\circ\varphi^K\circ(-)^{\complement}\circ\varphi^G,$$

其中 φ^G, φ^K 分別為 $\triangle ABC$ 的等截共軛變換及等角共軛變換。

Lemma 1.5.14. 兩點 P 與 $(P')^{\complement}$ 的交叉點 $P \pitchfork (P')^{\complement}$（見第 1.1 節的習題 3）為 P 的西瓦三角形 $\triangle P_aP_bP_c$ 的重心 G_P，意即，G_P 關於 $\triangle P_aP_bP_c$ 的西瓦三角形（即 $\triangle P_aP_bP_c$ 的中點三角形）與 $\triangle ABC$ 的透視中心為 $(P')^{\complement}$。

Proof. 我們希望證明 $A(P')^{\complement}$ 平分 $\overline{P_bP_c}$。令 $\triangle M_aM_bM_c$ 為 $\triangle ABC$ 的中點三角形，M_{P_b}, M_{P_c} 分別為 $\overline{BP_b}, \overline{CP_c}$ 的中點。則 $M_bM_{P_b} \parallel BP'$ 告訴我們 $M_bM_{P_b} = (BP')^{\complement}$，故 $(P')^{\complement} \in M_bM_{P_b}$。同理有 $(P')^{\complement} \in M_cM_{P_c}$。令 $\triangle N_aN_{P_b}N_{P_c}$ 為 $\triangle AP_bP_c$ 的中點三角形，則 $N_a = M_{P_b}N_{P_c} \cap M_{P_c}N_{P_b}$。由迪沙格定理 (1.1.1)，$A, N_a, (P')^{\complement}$ 共線若且唯若 $M_{P_b}M_{P_c}, M_bM_c, N_{P_c}N_{P_b}$ 共點，後者（由孟氏定理）又等價於

$$\frac{M_bN_{P_c}}{N_{P_c}A} \cdot \frac{AN_{P_b}}{N_{P_b}M_c} = \frac{M_bM_{P_c}}{M_{P_c}M_a} \cdot \frac{M_aM_{P_b}}{M_{P_b}M_c}.$$

而上述等式的兩邊都等於

$$\frac{CP_b}{P_bA} \cdot \frac{AP_c}{P_cB},$$

所以原命題成立。 ■

在有了這個引理之後，證明就變得很簡單。

Proof of (1.5.13). 令 $\triangle P_aP_bP_c, \triangle Q_aQ_bQ_c$ 分別為 P, Q 的西瓦三角形，M_P, M_Q 分別為 $\overline{P_bP_c}, \overline{Q_bQ_c}$ 中點。由 $\triangle AP_bP_c \mathrel{\bar{\sim}} \triangle AQ_cQ_b$，我們得到 $\triangle AP_bP_c \cup M_P \mathrel{\bar{\sim}} \triangle AQ_cQ_b \cup M_Q$。因此由 (1.5.14)，

$$A(P')^{\complement} + A(Q')^{\complement} = AM_P + AM_Q = AP_c + AQ_b = AB + AC,$$

即 $A(P')^{\complement}, A(Q')^{\complement}$ 為關於 $\angle BAC$ 的等角線。同理有 $B(P')^{\complement}, B(Q')^{\complement}$ 為關於 $\angle CBA$ 的等角線；$C(P')^{\complement}, C(Q')^{\complement}$ 為關於 $\angle ACB$ 的等角線。故 $(P')^{\complement}, (Q')^{\complement}$ 為關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對。 ■

Example 1.5.15. 對於任意 $\triangle ABC$，我們知道 H, G 為關於 $\triangle ABC$ 的西瓦圓共軛點對（因為這時候西瓦圓都是九點圓）。所以 H, G 的等截共軛點 H', $G' = G$ 的補點 $(H')^{\complement}, G^{\complement} = G$ 為等角共軛點對。也就是說，H 的等截共軛點 H' 為 G 的等角共軛點 G^*（即共軛重心 K，見 (2.2.16)）的反補點。

習題

Problem 1. 設 $\triangle ABC$ 的垂心為 H。令 P 為 $\triangle ABC$ 的外接圓上一點，$\mathcal{S}$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的西姆松線。證明 $\mathcal{S}$ 存在關於完全四點形 $\triangle ABC \cup H$ 的等截共軛線。

Problem 2. 設 (P, P') 為 $\triangle ABC$ 的一對等截共軛點對。令 Q 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的反補點 $P^{\complement}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點 $(P^{\complement})'$。證明：P, P', Q 共線。

1.6 莫利三角形

考慮三角形 $\triangle ABC$（以逆時針旋轉標號），過 A 作角三分線 ℓ_A^{Bi}, $i = -1, 0, 1$，滿足 ℓ_A^{B0} 位於 $\angle BAC$ 內且

$$\measuredangle(\ell_A^{Bi}, CA) = 2 \cdot \measuredangle(AB, \ell_A^{Bi}), \quad \measuredangle(\ell_A^{Bi}, \ell_A^{Bj}) = (j - i) \cdot 60^\circ$$

ℓ_A^{Ci} 定為 ℓ_A^{Bi} 關於 $\angle BAC$ 的等角線，類似定義 $\ell_B^{Ci}, \ell_B^{Ai}, \ell_C^{Ai}, \ell_C^{Bi}$。定義

$$a_{ij} = \ell_B^{Ci} \cap \ell_C^{Bj},$$

並類似地定義 b_{ij}, c_{ij}。

Theorem 1.6.1 (莫利角三分線定理/Morley's)**.** 對於所有 $(i, j, k) \in \{-1, 0, 1\}^3$ 滿足 $3 \nmid 1 + i + j + k$，$\triangle a_{jk} b_{ki} c_{ij}$ 是一個正三角形，且

$$\begin{aligned} b_{ki}c_{ij} + BC &= a_{jk}B + a_{jk}C, \\ c_{ij}a_{jk} + CA &= b_{ki}C + b_{ki}A, \\ a_{jk}b_{ki} + AB &= c_{ij}A + c_{ij}B. \end{aligned}$$

Proof. 我們直接從正三角形 $\triangle a_{jk} b_{ki} c_{ij}$ 反過來構造 $\triangle ABC$。令 $\alpha = \measuredangle(\ell_A^{B_i}, \ell_A^{C_i})$ 並類似地定義 β, γ，則

$$\begin{aligned} \theta := \alpha + \beta + \gamma &= (i + j + k) \cdot 60^\circ + \sum_{\text{cyc}} \measuredangle(\ell_A^{B_0}, \ell_A^{C_0}) \\ &= (1 + i + j + k) \cdot 60^\circ = \pm 60^\circ, \end{aligned}$$

這邊我們就直接取 $\theta = \pm 60^\circ \pmod{360^\circ}$（而不是取 $\mp 120^\circ$）。

令 $\triangle abc$ 為一個正三角形滿足 $\measuredangle bac = \measuredangle cba = \measuredangle acb = \theta$，取 A_0 滿足

$$\measuredangle cA_0b = \alpha, \quad \measuredangle bcA_0 = \theta + \beta, \quad \measuredangle A_0bc = \theta + \gamma,$$

並類似地定義 B_0, C_0，注意到我們可以這樣定義是因為

$$\alpha + (\theta + \beta) + (\theta + \gamma) = 3\theta = 180^\circ.$$

令 b', c' 分別為 b, c 關於 C_0a, B_0a 的對稱點，則由 $\overline{ab'} = \overline{ab} = \overline{ac} = \overline{ac'}$ 知 $\triangle ab'c'$ 為等腰三角形。注意到 $2\measuredangle C_0ab$, $2\measuredangle caB_0$ 在 mod 360° 下是良好定義的，所以我們有

$$\begin{aligned}\measuredangle c'ab' &= 360^\circ - 2\measuredangle C_0ab - \measuredangle bac - 2\measuredangle caB_0\\ &= -2(\theta+\beta) - \theta - 2(\theta+\gamma) = 2\alpha - \theta \pmod{360^\circ}.\end{aligned}$$

結合 $\triangle ab'c'$ 為等腰三角形及 $3\theta/2 = 90^\circ \pmod{180^\circ}$ 就有

$$\measuredangle b'c'a = 90^\circ - \frac{1}{2}(2\alpha - \theta) = -(\theta+\alpha) = -\measuredangle B_0ca = \measuredangle B_0c'a \pmod{180^\circ},$$

即 B_0, b', c' 共線，同理有 C_0, b', c' 共線。這樣我們就有

$$\measuredangle C_0B_0a = \measuredangle c'B_0a = \measuredangle aB_0c = \beta, \quad \measuredangle B_0C_0a = \measuredangle b'C_0a = \measuredangle aC_0b = \gamma$$

及一些輪換的式子。因此我們得到 $\triangle A_0B_0C_0 \cup \triangle abc \overset{+}{\sim} \triangle ABC \cup \triangle a_{jk}b_{ki}c_{ij}$，故 $\triangle a_{jk}b_{ki}c_{ij} \cong \triangle abc$ 為正三角形。

從上面的一些角度關係，我們可以得到

$$\begin{aligned}b_{ki}c_{ij} &= a_{jk}C + \measuredangle Ca_{jk}b_{ki} + \measuredangle a_{jk}b_{ki}c_{ij}\\ &= a_{jk}C + (\theta+\beta) - \theta\\ &= a_{jk}C + \measuredangle CBa_{jk} = a_{jk}B + a_{jk}C - BC,\end{aligned}$$

剩下兩條式子則同理。 ■

另一個很簡單的觀察如下：

Proposition 1.6.2. 同 (1.6.1) 的標號，對於所有 $(i,j) \in \{-1,0,1\}^2$，

$$\triangle a_{ij}a_{(i+1)(j-1)}a_{(i-1)(j+1)}$$

為正三角形，$B, C \in \odot(a_{ij}a_{(i+1)(j-1)}a_{(i-1)(j+1)})$ 且

$$a_{(i+1)(j-1)}a_{(i-1)(j+1)} + BC = a_{jk}B + a_{jk}C.$$

Proof. 為了縮短公式長度，記 $i^\pm = i \pm 1$，$j^\pm, k^\pm$ 則同理。我們直接算

$$\measuredangle Ba_{ij}C = \ell_C^{Bj} - \ell_B^{Ci} = (\ell_C^{B0} - \ell_B^{C0}) + (i+j)\cdot 60^\circ.$$

而這個值只與 $i+j$ 有關，也就是說把 (i,j) 換成 (i^+,j^-), (i^-,j^+) 是不變的，因此 $B,C\in\odot(a_{ij}a_{i^+j^-}a_{i^-j^+})$。所以

$$\measuredangle a_{i^+j^-}a_{ij}a_{i^-j^+}=\measuredangle a_{i^+j^-}Ca_{i^-j^+}=\measuredangle(\ell_C^{Bi^+},\ell_C^{Bi^-})=60^\circ,$$

同理有另外兩個角為 60°，所以 $\triangle a_{ij}a_{i^+j^-}a_{i^-j^+}$ 為正三角形。

再用一次 $B,C\in\odot(a_{ij}a_{i^+j^-}a_{i^-j^+})$，我們得到

$$a_{i^+j^-}a_{i^-j^+}=a_{i^+j^-}B+a_{i^-j^+}C-BC=a_{ij}B+a_{ij}C-BC. \qquad\blacksquare$$

我們把 (1.6.1) 中的 18 個正三角形與上述性質的 9 個三角形稱作 $\triangle ABC$ 的**莫利三角形** (**Morley triangle**)，那事實上我們只要找其中三個就好了，因為

Proposition 1.6.3. 對於所有 $(i,j,k)\in\{-1,0,1\}^3$ 滿足 $3\mid 1+i+j+k$，六點 $a_{(j+1)(k-1)}$, $a_{(j-1)(k+1)}$, $b_{(k+1)(i-1)}$, $b_{(k-1)(i+1)}$, $c_{(i+1)(j-1)}$, $c_{(i-1)(j+1)}$ 共線。

Proof. 為了縮短公式長度，記 $i^\pm=i\pm1$，$j^\pm$, $k^\pm$ 則同理。由 (1.6.1) 及 (1.6.2)，

$$\triangle a_{j^-k^+}b_{k^+i^-}c_{i^-j^-},\quad \triangle a_{jk}a_{j^+k^-}a_{j^-k^+}$$

都是正三角形而且

$$b_{k^+i^-}c_{i^-j^-}+BC=a_{j^-k^+}B+a_{j^-k^+}C,\quad a_{j^+k^-}a_{j^-k^+}+BC=a_{jk}B+a_{jk}C.$$

因此

$$\begin{aligned}\measuredangle a_{j^+k^-}a_{j^-k^+}b_{k^+i^-}&=\measuredangle c_{i^-j^-}b_{k^+i^-}a_{j^-k^+}+(a_{jk}B+a_{jk}C)-(a_{j^-k^+}B+a_{j^-k^+}C)\\&=(1+i^-+j^-+k^+)\cdot60^\circ+\measuredangle a_{jk}Ba_{j^-k^+}+\measuredangle a_{jk}Ca_{j^-k^+}\\&=-60^\circ+(j^--j)\cdot60^\circ+(k-k^+)\cdot60^\circ=0^\circ.\end{aligned}$$

所以 $a_{j^+k^-}$, $a_{j^-k^+}$, $b_{k^+i^-}$ 共線，同理有剩下的共線，因此該六點共線。 $\blacksquare$

我們分別把 $\triangle a_{00}b_{00}c_{00}$, $\triangle a_{11}b_{11}c_{11}$, $\triangle a_{(-1)(-1)}b_{(-1)(-1)}c_{(-1)(-1)}$ 稱作 $\triangle ABC$ 的第一、二、三莫利三角形。這些東西我們會在未來談到心臟線的時候用到（見第 10.4 節）。

Chapter 2

交比

我們在前一章定義了長度與角度，透過下面一些簡單的計算，我們會發現實際上更好操作的是一個叫做交比的東西。

2.1 定義

Definition 2.1.1. 對於共線四點 P_1, P_2, P_3, P_4，

$$(P_\bullet) := (P_1, P_2; P_3, P_4) := \frac{P_1P_3/P_3P_2}{P_1P_4/P_4P_2},$$

稱為點列 P_1, P_2, P_3, P_4 的**交比 (cross ratio)**。

這邊定義事實上有點問題，因為我們並沒有排除 $P_i \in \mathcal{L}_\infty$ 上的情形，不過對於任意兩點 $A, B \notin \mathcal{L}_\infty$，我們可以定義

$$\frac{A\infty_{AB}}{\infty_{AB}B} = -1.$$

在這樣的定義下，我們就只剩 P_1, P_2, P_3, P_4 都在無窮遠線上的情形了，我們晚點再回來定義它。先看看這個交比最重要的基礎定理：

Theorem 2.1.2. 給定共點四線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$，若非無窮遠線的直線 $L \not\ni \bigcap \ell_i$ 分別交 ℓ_i 於 P_i，則 $(P_\bullet)$ 為定值（與 L 的選取無關）。當 $\bigcap \ell_i \notin \mathcal{L}_\infty$ 時，

$$(P_\bullet) = \frac{\sin\measuredangle(\ell_1, \ell_3)/\sin\measuredangle(\ell_3, \ell_2)}{\sin\measuredangle(\ell_1, \ell_4)/\sin\measuredangle(\ell_4, \ell_2)}.$$

（注意到線的方向選取並不會影響其值。）

Proof. 令 $L' \not\ni \bigcap \ell_i$ 為另外一線且分別交 ℓ_i 於 P'_i，若 $\bigcap \ell_i \in \mathcal{L}_\infty$，則顯然有

$$\frac{P_1P_3}{P_3P_2} = \frac{P'_1P'_3}{P'_3P'_2}, \; \frac{P_1P_4}{P_4P_2} = \frac{P'_1P'_4}{P'_4P'_2} \implies (P_\bullet) = (P'_\bullet).$$

若 $A := \bigcap \ell_i \notin \mathcal{L}_\infty$，並且不失一般性假設 $P_1, P_2, P_3 \notin \mathcal{L}_\infty$，則由 (0.3.4) 知

$$\frac{\sin \measuredangle P_1AP_3}{\sin \measuredangle P_3AP_2} = \frac{P_1P_3/P_3P_2}{\overline{AP_1}/\overline{AP_2}}, \quad \frac{\sin \measuredangle P_1AP_4}{\sin \measuredangle P_4AP_2} = \frac{P_1P_4/P_4P_2}{\overline{AP_1}/\overline{AP_2}},$$

（注意到若 $P_4 \in \mathcal{L}_\infty$ 上式仍然成立）。所以結合兩式就有

$$(P_\bullet) = \frac{\sin \measuredangle P_1AP_3 / \sin \measuredangle P_3AP_2}{\sin \measuredangle P_1AP_4 / \sin \measuredangle P_4AP_2}.$$

同理有

$$(P'_\bullet) = \frac{\sin \measuredangle P_1AP_3 / \sin \measuredangle P_3AP_2}{\sin \measuredangle P_1AP_4 / \sin \measuredangle P_4AP_2} = (P_\bullet),$$

故 $(P_\bullet)$ 的值與 L 的選取無關。 ■

所以我們就可以定義線束的交比：

Definition 2.1.3. 對於共點四線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$，

$$(\ell_\bullet) := (L \cap \ell_\bullet),$$

其中 $L \not\ni \bigcap \ell_i$ 為非無窮遠線的直線，稱為線束 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ 的交比。

還有所有點都位於無窮遠線上的點交比：

Definition 2.1.4. 對於共線四點 $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{L}_\infty$，

$$(P_\bullet) := \frac{\sin \measuredangle P_1AP_3 / \sin \measuredangle P_3AP_2}{\sin \measuredangle P_1AP_4 / \sin \measuredangle P_4AP_2},$$

其中 $A \notin \mathcal{L}_\infty$ 為任意一點。

由這個定義，(2.1.2) 仍然成立於 $L = \mathcal{L}_\infty$ 時。

Example 2.1.5. 設四線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ 交直線 K 於 A_1, A_2, A_3, A_4，交直線 L 於 B_1, B_2, B_3, B_4。假設

$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = 1, \quad B_1B_2 = 2, \quad B_2B_3 = 3.$$

試計算 B_3B_4。

Solution. 設 $B_3B_4 = x$。由交比性質 $(A_\bullet) = (B_\bullet)$，我們有

$$\frac{2/(-1)}{3/(-2)} = \frac{5/(-3)}{(5+x)/(-3-x)}.$$

所以我們只要解一次式

$$5(3+x) = 4(5+x),$$

得到 $x = 5$。

可以看出這樣子算十分的簡單，如果不用交比的話可能就得用孟氏硬炸。

而交比本身在這樣的定義下我們顯然有任何旋似變換或位似變換 φ 保交比，即 $(\varphi(P_\bullet)) = (P_\bullet)$。在完整的定義完交比後，可以得到你不可不知的交比小性質：

Proposition 2.1.6. 對於共線四點 P_1, P_2, P_3, P_4，若 $(P_\bullet) = \lambda$，則

(i) $(P_2, P_1; P_3, P_4) = (P_1, P_2; P_4, P_3) = \lambda^{-1}$

(ii) $(P_1, P_3; P_2, P_4) = 1 - \lambda$。

證明是簡單的：

$$\lambda^{-1} = \left(\frac{P_1P_3/P_3P_2}{P_1P_4/P_4P_2}\right)^{-1} = \begin{cases} \dfrac{P_2P_3/P_3P_1}{P_2P_4/P_4P_1} = (P_2, P_1; P_3, P_4), \\ \dfrac{P_1P_4/P_4P_2}{P_1P_3/P_3P_2} = (P_1, P_2; P_4, P_3), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lambda + (P_1, P_3; P_2, P_4) &= \frac{P_1P_3/P_3P_2}{P_1P_4/P_4P_2} + \frac{P_1P_2/P_2P_3}{P_1P_4/P_4P_3} \\ &= \frac{P_3P_1 \cdot P_4P_2 + P_1P_2 \cdot P_4P_3}{P_2P_3 \cdot P_1P_4} = 1, \end{aligned}$$

其中最後一個等號是托勒密定理 (0.4.18) 的直線特例。(需要推廣成有向版本的，即等式

$$a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0.\ )$$

當然，把點改成線這一樣是對的。那事實上由這個性質就可以把所有 $(P_{\sigma(\bullet)})$ 都用 $(P_\bullet)$ 為變數的一些分式來表示了，其中 $\sigma \in S_4$ 代表任意 $\{1,2,3,4\}$ 的排列。換句話說，我們有 $(P_{\sigma(\bullet)}) = \rho(\sigma)(P_\bullet)$，其中 $\rho\colon S_4 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{R}(\lambda)$ 定義為

$$(1\ 2),(3\ 4) \mapsto [\lambda \mapsto \lambda^{-1}], \quad (2\ 3) \mapsto [\lambda \mapsto 1-\lambda].$$

再來這個是交比界中最重要的性質，沒有它你什麼都做不到 (?

Proposition 2.1.7 (同一法)**.**

(i) 對於共線五點 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_\heartsuit$，$P_\heartsuit = P_k$ 若且唯若 $(P_\bullet) = (P_{\bullet'})$,

(ii) 對於共點五線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_\heartsuit$，$\ell_\heartsuit = \ell_k$ 若且唯若 $(\ell_\bullet) = (\ell_{\bullet'})$,

其中

$$i' = \begin{cases} i, & \text{if } i \neq k \\ \heartsuit, & \text{if } i = k. \end{cases}$$

注意到 (ii) 可以由 (i) 推得，而 (i) 的證明就是將線段長炸開，我們做 $k=4$：

$$(P_\bullet) = (P_{\bullet'}) \iff \frac{P_1P_3/P_3P_2}{P_1P_4/P_4P_2} = \frac{P_1P_3/P_3P_2}{P_1P_\heartsuit/P_\heartsuit P_2} \iff \frac{P_1P_4}{P_4P_2} = \frac{P_1P_\heartsuit}{P_\heartsuit P_2} \iff P_4 = P_\heartsuit.$$

我們現在定義一些方便的記號：

Definition 2.1.8.

(i) 對於任意五點 P_1, P_2, P_3, P_4, A，

$$A(P_\bullet) := A(P_1, P_2; P_3, P_4) := (AP_1, AP_2; AP_3, AP_4).$$

(ii) 對於任意五線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, L$，

$$L(\ell_\bullet) := L(\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4) := (L \cap \ell_1, L \cap \ell_2; L \cap \ell_3, L \cap \ell_4).$$

如此一來，我們可以用這些記號簡化下面這些證明共線的好方法。

Proposition 2.1.9. 對於共線三點 $P_1, P_2, P_3 \in \ell$ 及 ℓ 外兩點 A, B，若點 P_4 滿足 $P_4 \notin AB$，則 $A(P_\bullet) = B(P_\bullet)$ 若且唯若 $P_4 \in \ell$。

Proof. 證回來不難，留給讀者。令 $P'_\bullet = P_\bullet, i = 1, 2, 3$，$P'_4 = AP_4 \cap \ell$，則

$$B(P'_\bullet) = (P'_\bullet) = A(P'_\bullet) = A(P_\bullet) = B(P_\bullet),$$

因此 $P'_4 \in BP_4$，所以 $P'_4 = AP_4 \cap BP_4 = P_4$，即 $P_4 \in \ell$。 ∎

Proposition 2.1.10. 對於三點 P_1, P_2, P_3 及兩點 $A, B \notin \bigcup P_iP_j$，

$$A(P_1, P_2; P_3, B) = B(P_1, P_2; P_3, A)$$

若且唯若 P_1, P_2, P_3 共線。

Proof. 證回來一樣不難，留給讀者。令 $P_4 = AB \cap P_2P_3$，則 P_2, P_3, P_4 共線且

$$A(P_1, P_2; P_3, P_4) = A(P_1, P_2; P_3, B) = B(P_1, P_2; P_3, A) = B(P_1, P_2; P_3, P_4),$$

因此 $P_1 \in P_2P_3$。 ∎

有了共線之後當然也會有共點的：

Proposition 2.1.11. 對於共點三線 $\ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3 = P$ 及點外兩線 K, L，若線 ℓ_4 滿足 $K \cap L \notin \ell_4$，則 $K(\ell_\bullet) = L(\ell_\bullet)$ 若且唯若 $P \in \ell_4$。

Proposition 2.1.12. 對於三線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 及兩線 $K, L \cap \left(\bigcup \ell_i \cap \ell_j\right) = \varnothing$，

$$K(\ell_1, \ell_2; \ell_3, L) = L(\ell_1, \ell_2; \ell_3, K)$$

若且唯若 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 共點。

上面的證明都跟共線的證明類似。接下來我們想要在圓上定義交比，所以我們先觀察到如下的事實：

Proposition 2.1.13. 給定共圓四點 $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \Omega$，若 A 為 Ω 上異於 P_i 的點，則 $A(P_\bullet)$ 為定值（與 A 的選取無關）。

Proof. 令 A' 為 Ω 上異於 P_i 的點，由圓周角性質知 $\measuredangle P_iAP_j = \measuredangle P_iA'P_j$。因此由 (2.1.2) 知 $A(P_\bullet) = A'(P_\bullet)$，故 $A(P_\bullet)$ 為定值。 ■

Remark. 在上述性質中，若對於某個 i，$A = P_i$，則我們將 $A(P_\bullet) = (AP_\bullet)$ 中的 AA 視為 A 關於 Ω 的切線 $\mathbf{T}_A\Omega$，那麼此時命題依舊成立，而這個記號將一直沿用至圓錐曲線的情形。

所以就可以直接定義交比了：

Definition 2.1.14. 對於共圓四點 $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \Omega$，

$$(P_\bullet) := (P_1, P_2; P_3, P_4) := A(P_\bullet),$$

其中 $A \in \Omega$。

Remark. 如果把平面擴張成 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 而不是 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 的話，那這時候圓及直線上的交比就會跟「直線」$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 的交比

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) := \frac{(z_3 - z_1)/(z_2 - z_3)}{(z_4 - z_1)/(z_2 - z_4)}$$

一樣了，而且四個點的交比是實數若且唯若它們共圓或共直線。

Example 2.1.15. 設兩直線 BC, EF 互相平行，D 為在 BC 線段上且與 B, C 相異的一點。直線 BF, CE 交於 I 點。將 $\triangle CDE$, $\triangle BDF$ 的外接圓分別記為 K, L。圓 K, L 分別與 EF 切於 E, F 點。令 A 為圓 K, L 異於 D 的另一交點。設直線 DF 與圓 K 再交於 Q 點，直線 DE 與圓 L 再交於 R 點。令直線 EQ 與 FR 交於 M 點。證明：I, A, M 三點共線。

Solution. 由 (2.1.10)，我們只需證明

$$E(I, A; M, F) = F(I, A; M, E).$$

注意到

$$E(I,A;M,F)=(C,A;Q,E)=D(C,A;Q,E)\overset{EF}{=}(\infty_{EF},AD\cap EF;F,E).$$

如果令 $P=AD\cap EF$，我們有 P 位於 K,L 的根軸上，所以

$$\overline{PE}^2=\mathbf{Pow}_K(P)=\mathbf{Pow}_L(P)=\overline{PF}^2,$$

故 P 是 $\overline{EF}$ 中點。這告訴我們

$$E(I,A;M,F)=(\infty_{EF},P;F,E)=-1.$$

同理，我們有 $F(I,A;M,E)=-1$，因此 I, A, M 共線。

那我們除了在圓上定義交比以外，也想要對圓的所有切線這個集合定義交比。我們先規定一些記號：若 Γ 為一圓，則

(i) $\mathbf{T}\Gamma$ 為 Γ 的所有切線所形成的集合；

(ii) $\mathbf{T}_P\Gamma$ 為 P 關於 Γ 的切線，其中 $P\in\Gamma$；

(iii) $\mathbf{T}_\ell\Gamma$ 為 ℓ 關於 Γ 的切點，其中 $\ell\in\mathbf{T}\Gamma$；

(iv) 當 Γ 退化為一點 P 時，$\mathbf{T}P$ 為所有經過 P 的直線。

所以我們現在想要 $\mathbf{T}\Gamma$ 這個集合上定義交比，故需要：

Proposition 2.1.16. 給定四線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, $\ell_4\in\mathbf{T}\Gamma$，若 $L\in\mathbf{T}\Gamma$ 為異於 ℓ_i 的直線，則 $L(\ell_\bullet)$ 為定值（與 L 的選取無關）。

Proof. 令 O 為 Γ 的中心，由 $O(L\cap\ell_i)\perp(\mathbf{T}_L\Gamma)(\mathbf{T}_{\ell_i}\Gamma)$ 可得

$$L(\ell_\bullet)=\mathbf{T}_L\Gamma(\mathbf{T}_{\ell_\bullet}\Gamma)=(\mathbf{T}_{\ell_\bullet}\Gamma),$$

而這與 L 無關，故 $L(\ell_\bullet)$ 為定值。 ■

於是我們有：

Definition 2.1.17. 對於四線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, $\ell_4\in\mathbf{T}\Gamma$，

$$(\ell_\bullet):=(\ell_1,\ell_2;\ell_3,\ell_4):=L(\ell_\bullet),$$

其中 L 為切 Γ 的直線。

Remark. 跟點的情況一樣，若對於某個 i，$L=\ell_i$，則我們將 $L(\ell_\bullet)=(L\cap\ell_\bullet)$ 中的 $L\cap L$ 視為 $\mathbf{T}_L\Gamma$，那麼此時 (2.1.16) 依舊成立，而這個記號也將一直沿用至圓錐曲線的情形。

作為一個圓交比的應用，我們來證明：

Theorem 2.1.18 (蝴蝶定理)**.** 設 $\overline{AB}$ 為圓 Γ 上的弦，M 為 $\overline{AB}$ 中點，過 M 作兩弦 $\overline{P_1P_2}, \overline{Q_1Q_2}$，其中 $P_1, P_2, Q_1, Q_2\in\Gamma$。令 R_1, R_2 分別為 P_1Q_1, P_2Q_2 與 AB 的交點。則 M 為 $\overline{R_1R_2}$ 中點。

Proof. 我們有

$$(A,B;M,R_1)\overset{P_1}{=}(A,B;P_2,Q_1)\overset{Q_2}{=}(A,B;R_2,M)$$

由定義，我們得到

$$\frac{AM/MB}{AR_1/R_1B}=\frac{AR_2/R_2B}{AM/MB}\implies\frac{AR_1}{R_1B}=\frac{BR_2}{R_2A}\implies\frac{AB}{R_1B}=\frac{BA}{R_2A},$$

故 $\overrightarrow{R_1B}=\overrightarrow{AR_2}$。結合 M 是 $\overline{AB}$ 中點我們就得到 M 也是 $\overline{R_1R_2}$ 中點。 ■

蝴蝶定理其實還有一系列常用的推廣，最廣義的基本上就是對合（見第 7.2 節）。我們來看蝴蝶定理的其中一個相關例題：

Example 2.1.19. 令 I, O 分別為 $\triangle ABC$ 的內心及外心。過 I 作垂直於 OI 的直線分別交 $\angle BAC$ 的外角平分線及 BC 於 P, Q。證明：$\overline{IP}=2\overline{QI}$。

Solution. 令過 I 且垂直於 OI 的直線交 $\odot(ABC)$ 於 U, V，則 I 為弦 $\overline{PQ}$ 的中點。令 N_b, N_c 分別為 BI, CI 與外接圓 $\odot(ABC)$ 的另一個交點，則蝴蝶定理告訴我們 N_bN_c 與 UV 的交點 R 為 Q 關於 I 的對稱點。

由雞爪定理，N_b, N_c 皆位於 $\overline{AI}$ 的中垂線上，因此 N_bN_c 為 $\overline{AI}$ 的中垂線。注意到 $\angle BAC$ 的外角平分線是 $\overline{AI}$ 的中垂線關於 I 位似 2 倍下的像，因此 P 為 R 關於 I 位似 2 倍下的像。故 $\overrightarrow{IP}=2\cdot\overrightarrow{IR}=2\cdot\overrightarrow{QI}$。

習題

Problem 1. 設 $\triangle ABC$ 是一個以 A 為頂點的等腰三角形。兩點 P, Q 滿足

$$\measuredangle ABP = \measuredangle BCQ \quad \text{及} \quad \measuredangle PCA = \measuredangle QBC.$$

證明：A, P, Q 共線。

Problem 2. 令 P 為 $\triangle ABC$ 內任意一點，BP, CP 分別交 CA, AB 於 E, F，EF 交 $\odot(ABC)$ 於 B', C'，$B'P, C'P$ 分別交 BC 於 C'', B''，證明 $B'B'', C'C''$, $\odot(ABC)$ 共點。

Problem 3. 令 $\triangle ABC$ 為一銳角三角形，AH_1 與 BH_2 是三角形 ABC 的高，且 AL_1 與 BL_2 是三角形 ABC 的角平分線。若 O 是三角形 ABC 的外心，且 I 是三角形 ABC 的內心，試證明 O 落在直線 L_1L_2 上的充要條件為 I 落在直線 H_1H_2 上。

Problem 4. 令 P_1, P_2, P_3, P_4 為共線四點，Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 為另一組共線四點且兩線相異，設 $R_i = P_iQ_{i+1} \cap P_{i+1}Q_i$。證明：$R_1, R_2, R_3$ 共線若且唯若 $(P_\bullet) = (Q_\bullet)$。

Problem 5. 給定直線 ℓ 上五點 P_1, P_2, P_3, P_4, P_4'。證明：可以只用直線在 ℓ 上找到兩點 $Q = (P_4 + P_4')_{(P_1,P_2;P_3,-)}$, $R = (P_4 \cdot P_4')_{(P_1,P_2;P_3,-)}$ 滿足

$$\begin{aligned}(P_1, P_2; P_3, Q) &= (P_1, P_2; P_3, P_4) + (P_1, P_2; P_3, P_4')\\(P_1, P_2; P_3, R) &= (P_1, P_2; P_3, P_4) \cdot (P_1, P_2; P_3, P_4').\end{aligned}$$

Problem 6. 證明習題 3 的推廣：設 $(P, P^*), (Q, Q^*)$ 為 $\triangle ABC$ 的兩對等角共軛點，$\triangle P_aP_bP_c$ 及 $\triangle Q_aQ_bQ_c$ 分別為 P, Q 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形。證明：P^* 位於 Q_bQ_c 上若且唯若 Q^* 位於 P_bP_c 上。

Problem 7 (2014 2J I2-1)**.** 設 $\triangle ABC$ 的內心與外心分別為 I 與 O。作直線 L 使其與 BC 邊平行，並與 $\triangle ABC$ 的內切圓相切。設 L 與 IO 交於 X 點，另

取 L 上的一點 Y 使得 YI 垂直於 IO。證明 A, X, O, Y 四點共圓。

Problem 8 (1996 ISL G3)**.** 令 O 及 H 分別為銳角三角形 ABC 的外心及垂心。令 F 為三角形 ABC 的高 CH 的垂足。過 F 與 OF 垂直的直線交直線 AC 於 P。證明 $\angle FHP = \angle BAC$。

Problem 9 (2021 2J P3)**.** 設 O, H 分別為不等邊三角形 ABC 的外心與垂心，P 為三角形 AHO 內一點滿足 $\angle AHP = \angle POA$，M 為 $\overline{OP}$ 中點。設 BM, CM 分別與三角形 ABC 的外接圓交於 X, Y 兩點。

證明：XY 經過三角形 APO 的外心。

2.2 調和

Definition 2.2.1. 我們說共線四點 P_1, P_2, Q_1, Q_2 調和若

$$(P_1, P_2; Q_1, Q_2) = -1;$$

共點四線 K_1, K_2, L_1, L_2 調和若

$$(K_1, K_2; L_1, L_2) = -1.$$

由 (2.1.6)，將 P_1, P_2 交換，Q_1, Q_2 交換，或 P, Q 整組交換也都是調和的，因此調和的四點或四線可以分成兩組。所以我們有時會說 $\{P_1, P_2\}$ 調和分割 $\{Q_1, Q_2\}$，那這等價於 $\{Q_1, Q_2\}$ 調和分割 $\{P_1, P_2\}$。線的情況則同理。至於為什麼會叫做調和是因為

$$\begin{aligned}(P_1, P_2; Q_1, Q_2) = -1 &\iff \frac{P_1Q_1}{Q_1P_2} + \frac{P_1Q_2}{Q_2P_2} = 0 \\ &\iff \frac{P_1P_2}{Q_1P_2} + \frac{P_1P_2}{Q_2P_2} = 2 \\ &\iff \frac{1}{P_2Q_1} + \frac{1}{P_2Q_2} = \frac{2}{P_2P_1},\end{aligned}$$

也就是說，以 P_2 的視角來看，P_1 位在 Q_1, Q_2 的調和平均。

Example 2.2.2. 以下是一些常見的調和例子。

- 若 M 為線段 $\overline{AB}$ 中點，則 A, B, M, ∞_{AB} 為調和點列：
$$(A,B;M,\infty) = \frac{AM/MB}{A\infty/\infty B} = \frac{1}{-1} = -1,$$
因此有時就記 $\overline{AB}$ 中點為 $\infty_{AB}^{\vee}$；
- 若 $\angle BAC$ 的內、外角平分線分別交 BC 於 D, D'，則 D, D' 調和分割 B, C：
$$(B,C;D,D') = \frac{BD/DC}{BD'/D'C} = \frac{\overline{AB}/\overline{AC}}{-\overline{AB}/\overline{AC}} = -1;$$
- 一個三角形的外心 O、九點圓圓心 N、重心 G、垂心 H 為調和點列：
$$(H,G;N,O) = \frac{HN/NG}{HO/OG} = \frac{3}{-3} = -1.$$

Example 2.2.3. 令 G 與 O 分別為 $\triangle ABC$ 之重心與外心。GA, GB 與 GC 的中垂線相交於 A_1, B_1, C_1。試證 O 是三角形 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心。

Solution. 由對稱性，我們只需證明 A_1O 平分 B_1C_1，也就是
$$O(A_1, \infty_{B_1C_1}; B_1, C_1) = (OA_1 \cap B_1C_1, \infty_{B_1C_1}; B_1, C_1) = -1.$$

注意到 A_1, B_1, C_1 分別為 $\triangle GBC$, $\triangle GCA$, $\triangle GAB$ 的外心，因此 $OA_1 \perp BC$, $OB_1 \perp CA$, $OC_1 \perp AB$，所以由 $B_1C_1 \perp AG$，
$$\begin{aligned} O(A_1, \infty_{B_1C_1}; B_1, C_1) &= (\infty_{OA_1}, \infty_{B_1C_1}; \infty_{OB_1}, \infty_{OC_1}) \\ &= (\infty_{BC}, \infty_{AG}; \infty_{CA}, \infty_{AB}) \\ &= A(\infty_{BC}, G; C, B) = -1, \end{aligned}$$

因為 AG 平分 BC。這邊的
$$(\infty_{OA_1}, \infty_{B_1C_1}; \infty_{OB_1}, \infty_{OC_1}) = (\infty_{BC}, \infty_{AG}; \infty_{CA}, \infty_{AB})$$
就是在無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 上轉 90°，是一個很常見的保交比變換。

Proposition 2.2.4. 給定線上（相異）四點 P_1, P_2, Q_1, Q_2 及線外一點 A，則以下任兩個命題皆可推得剩餘兩個：

(i) P_1, P_2, Q_1, Q_2 為調和點列；

(ii) $\measuredangle P_1AP_2 = 90°$；

(iii) AP_1 平分 $\angle Q_1AQ_2$；

(iv) AP_2 平分 $\angle Q_1AQ_2$。

Proof. 我們顯然有 (iii), (iv) 推 (ii)、(iv), (ii) 推 (iii)、(ii), (iii) 推 (iv)，而 (iii), (iv) 推 (i) 則是上述的角平分線例子。

(i), (iii) 推 (iv) 及 (i), (iv) 推 (iii)（進而推到 (ii)）就是上述的例子結合同一法：取 P_2' 使得 AP_2' 為 $\angle Q_1AQ_2$ 異於 AP_1 的角平分線，則

$$(P_1, P_2'; Q_1, Q_2) = -1 = (P_1, P_2; Q_1, Q_2),$$

因此 $AP_2 = AP_2'$ 平分 $\angle Q_1AQ_2$，(i), (iv) 推 (iii) 則同理。

(i), (ii) $\Longrightarrow$ (iii) 及 (iv)：取 Q_2' 使得 AP_1 平分 $\angle Q_1AQ_2$，由 (ii) 可得 AP_2 也平分 $\angle Q_1AQ_2$，因此（也是同一法）

$$(P_1, P_2; Q_1, Q_2') = -1 = (P_1, P_2; Q_1, Q_2),$$

故 AP_1, AP_2 平分 $\angle Q_1AQ_2' = \angle Q_1AQ_2$。 ■

Proposition 2.2.5. 給定直線上相異四點 P_1, P_2, Q_1, Q_2，設 M 為 $\overline{P_1P_2}$ 中點。下列敘述等價：

(i) P_1, P_2, Q_1, Q_2 為調和點列；

(ii) $MQ_1 \cdot MQ_2 = \overline{MP_1}^2 = \overline{MP_2}^2$；

(iii) $P_1P_2 \cdot Q_1Q_2 = 2 \cdot P_1Q_1 \cdot P_2Q_2$；

(iv) $P_1P_2 \cdot Q_2Q_1 = 2 \cdot P_1Q_2 \cdot P_2Q_1$；

(v) $Q_1M \cdot Q_1Q_2 = Q_1P_1 \cdot Q_1P_2$；

(vi) $Q_2M \cdot Q_2Q_1 = Q_2P_1 \cdot Q_2P_2$。

Proof. 其實這些敘述都是可以直接炸開證明的（令 $P_1=-1$, $P_2=1$, $Q_1=s$, $Q_2=t$），但我們也是可以炸的有道理一點，比方說如果我們有 (i) $\Longrightarrow$ (ii), (v), (vi)，那麼由同一法就可以得到另一邊。以下提供比較純幾的炸法。

我們先證明 (i) $\Longleftrightarrow$ (iii), (iv)：由 (2.1.6)，

$$1-(P_1,P_2;Q_1,Q_2)^{-1}=1-(P_1,P_2;Q_2,Q_1)=(P_1,Q_2;P_2,Q_1)=\frac{P_1P_2/P_2Q_2}{P_1Q_1/Q_1Q_2}$$
$$1-(P_1,P_2;Q_1,Q_2)=(P_1,Q_1;P_2,Q_2)=\frac{P_1P_2/P_2Q_1}{P_1Q_2/Q_2Q_1}$$

因此 $(P_1,P_2;Q_1,Q_2)=-1$ 等價於

$$\frac{P_1P_2/P_2Q_2}{P_1Q_1/Q_1Q_2}=2 \iff P_1P_2\cdot Q_1Q_2=2\cdot P_1Q_1\cdot P_2Q_2,$$

即 (iii)，也等價於

$$\frac{P_1P_2/P_2Q_1}{P_1Q_2/Q_2Q_1}=2 \iff P_1P_2\cdot Q_2Q_1=2\cdot P_1Q_2\cdot P_2Q_1,$$

即 (iv)。

我們證明 (i) $\Longrightarrow$ (ii), (v), (vi)：由 P_1Q_1/Q_1P_2, P_1Q_2/Q_2P_2 一正一負知 Q_1, Q_2 其中一個落在線段 $\overline{P_1P_2}$ 上，不妨假設 $Q_1\in\overline{P_1P_2}$，過 Q_1 作垂直於 P_1P_2 的直線交直徑圓 $\omega=\odot(\overline{P_1P_2})$ 於 A, B。由 (2.2.4)，AP_1, AP_2 平分 $\angle Q_1AQ_2$，因此

$$\measuredangle P_2AQ_2=\measuredangle Q_1AP_2=90^\circ-\measuredangle AP_2Q=\measuredangle P_2P_1A,$$

即 AQ_2 與 ω 相切於 A。所以 MA 與 $\odot(AQ_1Q_2)$ 相切，AQ_2 與 $\odot(MAQ_1)$ 也相切：

$$\measuredangle(MA+Q_1Q_2,AQ_1+AQ_2)=90^\circ+90^\circ=0^\circ,$$
$$\measuredangle(AQ_2+Q_1Q_2,MA+AQ_1)=90^\circ+90^\circ=0^\circ,$$

故

$$MQ_1\cdot MQ_2=\overline{MA}^2=\overline{MP_1}^2=\overline{MP_2}^2,\quad Q_2M\cdot Q_2Q_1=\overline{Q_2A}^2=Q_2P_1\cdot Q_2P_2.$$

最後，我們會作出 B 不是沒有原因的，由於 $\measuredangle MAQ_2=\measuredangle MBQ_2=90^\circ$，$M$, Q_2, A, B 共圓，所以 $Q_1M\cdot Q_1Q_2=Q_1A\cdot Q_1B=Q_1P_1\cdot Q_1P_2$。 ■

Example 2.2.6 (19 Finland MO P3)**.** 圓內接四邊形 $ABCD$ 滿足 $\overline{AB}$ 是直徑。設 AC 交 BD 於 E，AD 交 BC 於 F，EF 線段交 $ABCD$ 外接圓於 G，其延長線交 AB 於 H。若 $FG = GH$，試證明 $GE = EH$。

Solution. 考慮 G 關於 AB 的對稱點 G'，則 G' 也在 $\overline{AB}$ 直徑圓上，因此

$$HE \cdot HF = -HA \cdot HB = -HG \cdot HG' = \overline{HG}^2 = \overline{HG'}^2,$$

即 E, F, G, G' 調和。故

$$FG = GH \implies 3 \cdot FG = FG' \implies 3 \cdot GE = EG' \implies GE = EH.$$

Example 2.2.7 (2016 Bulgaria P5)**.** 等腰 $\triangle ABC$ 滿足 $\overline{AC} = \overline{BC}$，$D$ 在 AC 射線上滿足 C 在 A, D 之間且 $\overline{AC} > \overline{CD}$。設 $\angle BCD$ 的內角平分線交 $\overline{BD}$ 於 N，$\overline{BD}$ 中點為 M。過 M 作 $\odot(AMD)$ 的切線交 BC 於 P。證明：A, P, M, N 共圓。

Solution. 考慮 D 關於 $\overline{AB}$ 中垂線的對稱點 D'，我們有 B, C, D' 共線且 A, B, D, D' 共圓，因此

$$\measuredangle AD'P = \measuredangle ADM = \measuredangle AMP,$$

即 A, D', M, P 共圓。所以我們只需證明 A, D', M, N 共圓。令 E 為 AD' 與 BD 的交點，則 E 也位在 $\overline{AB}$ 的中垂線上，即 $\angle BCD$ 的外角平分線上，因此 B, D, N, E 為調和點列。所以由上述性質，

$$EN \cdot EM = EB \cdot ED = EA \cdot ED',$$

即 A, D', M, N，從而原命題成立。

Proposition 2.2.8. 一個完全四線形 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ 的其中一個對角線 $A_{ij}A_{kl}$ 與另外兩個對角線 $A_{ik}A_{lj}$, $A_{il}A_{jk}$ 的交點調和分割該對角線段的端點 $\{A_{ij}, A_{kl}\}$，其中 $A_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$。

Proof. 令 $P = A_{ij}A_{kl} \cap A_{ik}A_{lj}$, $Q = A_{ij}A_{kl} \cap A_{il}A_{jk}$。由 P, A_{lj}, A_{ik} 共線，孟氏定理告訴我們

$$\frac{A_{ij}P}{PA_{kl}} \cdot \frac{A_{kl}A_{lj}}{A_{lj}A_{il}} \cdot \frac{A_{il}A_{ik}}{A_{ik}A_{ij}} = -1. \tag{$\spadesuit$}$$

由 $A_{il}Q$, $A_{kl}A_{lj}$, $A_{kl}A_{ik}$ 共點（於 A_{jk}），西瓦定理告訴我們

$$\frac{A_{ij}Q}{QA_{kl}} \cdot \frac{A_{kl}A_{lj}}{A_{lj}A_{il}} \cdot \frac{A_{il}A_{ik}}{A_{ik}A_{ij}} = 1. \tag{$\clubsuit$}$$

比較 ($\spadesuit$) 及 ($\clubsuit$) 可得

$$(A_{ij}, A_{kl}; P, Q) = \frac{A_{ij}P/PA_{kl}}{A_{ij}Q/QA_{kl}} = -1,$$

即 $\{P, Q\}$ 調和分割 $\{A_{ij}, A_{kl}\}$。 ■

Example 2.2.9. 設 AH_a 為 $\triangle ABC$ 的高，P 為 AH_a 上一點。令 E 為 BP 與 CA 的交點，F 為 CP 與 AB 的交點，D 為 EF 與 AP 的交點。過 D 作一直線 ℓ 分別交 PE, AF 於 X, Y。證明：AH_a 為 $\angle XAY$ 的角平分線。

Solution. 因為 $AH_a \perp BC$，由 (2.2.4) 我們發現 AH_a 為 $\angle XAY$ 的角平分線等價於

$$(X, Y; D, \ell \cap BC) = -1.$$

所以我們就真的來算算看：

$$(X, Y; D, \ell \cap BC) \overset{B}{=} (E, F; D, EF \cap BC),$$

而我們知道完全四線形 (CA, AB, BE, CF) 的對角線段為 $\overline{EF}$, $\overline{BC}$, $\overline{AP}$，因此

$$(E, F; D, EF \cap BC) = (E, F; EF \cap AP, EF \cap BC) = -1.$$

Definition 2.2.10. 我們說共圓四點 P_1, P_2, Q_1, Q_2 調和若

$$(P_1, P_2; Q_1, Q_2) = -1.$$

這時候四邊形 $(P_1P_2)(Q_1Q_2)$ 被稱為一個調和四邊形。

調和四邊形最常使用的性質就是下面這個：

Proposition 2.2.11. 內接於圓 Γ 的四邊形 $(P_1P_2)(Q_1Q_2)$ 是調和四邊形若且唯若 P_1, P_2 關於 Γ 的切線 $\mathbf{T}_{P_1}\Gamma$, $\mathbf{T}_{P_2}\Gamma$ 交於 Q_1Q_2 上。

Proof. 令 $A = P_1P_2 \cap Q_1Q_2$, $B_1 = \mathbf{T}_{P_1}\Gamma \cap Q_1Q_2$, $B_2 = \mathbf{T}_{P_2}\Gamma \cap Q_1Q_2$，則

$$(Q_1, Q_2; A, B_1) = P_1(Q_1, Q_2; P_2, P_1) = (Q_1, Q_2; P_2, P_1),$$
$$(Q_1, Q_2; A, B_2) = P_2(Q_1, Q_2; P_1, P_2) = (Q_1, Q_2; P_1, P_2).$$

因此 $\mathbf{T}_{P_1}\Gamma$, $\mathbf{T}_{P_2}\Gamma$ 交於 Q_1Q_2 若且唯若 $B_1 = B_2$ 若且唯若

$$(Q_1, Q_2; P_2, P_1) = (Q_1, Q_2; P_1, P_2) = (Q_1, Q_2; P_2, P_1)^{-1}.$$

由 $(Q_1, Q_2; P_2, P_1) \neq 1$（因為 $P_1 \neq P_2$, $Q_1 \neq Q_2$）知上式等價於

$$(Q_1, Q_2; P_2, P_1) = -1,$$

即 $(P_1P_2)(Q_1Q_2)$ 是調和四邊形。 ■

Example 2.2.12 (2018 Bosnia and Herzegovina MO Grade 9 P5)**.** 設 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，H 關於 $\angle BAC$ 內角平分線垂足為 D、關於其外角平分線垂足為 E，$\overline{BC}$ 中點為 M。證明：M, D, E 共線。

Proof. 考慮直徑圓 $\odot(\overline{AH})$，交 CA, AB 另一點於垂足 H_b, H_c，則 M 為 $\odot(BCH_bH_c)$ 的圓心。我們有

$$\measuredangle MH_bA = \measuredangle MH_bC = \measuredangle ACB = \measuredangle H_bHA,$$

即 MH_b 與 $\odot(\overline{AH})$ 相切，同理有 MH_c 與 $\odot(\overline{AH})$ 相切。由 AD, AE 分別為 $\angle BAC$ 的角平分線，

$$-1 = (AB, AC; AD, AE) = (H_c, H_b; D, E),$$

所以由上述的性質知 DE 過 H_bM 與 H_cM 的交點 M。 ■

Example 2.2.13 (2013 APMO P5)**.** 設四邊形 $ABCD$ 內接於圓 ω，點 P 位於直線 AC 上，且直線 PB, PD 皆與 ω 相切。已知過 C 點的圓的切線與直線 PD, AD 分別交於 Q, R 兩點。令 E 點是直線 AQ 與 ω 的第二個交點。試證：B, E, R 三點共線。

Solution. 由條件 PB, PD 與 ω 相切，我們知道 $ABCD$ 是調和四邊形。由 E 的構造方式，我們也知道 $ADCE$ 是調和四邊形。因為 $(A,C;B,D)=-1$ 且 E 位於 ω 上，我們只需要證明 $E(A,C;R,D)=-1$，而

$$E(A,C;R,D)=(Q,C;R,DE\cap CQ)=D(Q,C;R,E)=(D,C;A,E)=-1,$$

從而原命題成立。

另一個也算常用的性質是：

Proposition 2.2.14. 設 $(P_1P_2)(Q_1Q_2)$ 是一個調和四邊形，M 是 $\overline{Q_1Q_2}$ 的中點，則 P_1M, P_1P_2 是關於 $\measuredangle Q_1P_1Q_2$ 的等角線。

Proof. 令 P_1' 為 P_1 關於 $\overline{Q_1Q_2}$ 的中垂線的對稱點，使得 $P_1Q_1Q_2P_1'$ 為等腰梯形，則

$$-1=(P_1,P_2;Q_1,Q_2)=P_1'(P_1,P_2;Q_1,Q_2)=(\infty_{Q_1Q_2},P_1'P_2\cap Q_1Q_2;Q_1,Q_2),$$

即 $P_1'P_2$ 過 $\overline{Q_1Q_2}$ 中點 M。因此

$$\begin{aligned}\measuredangle(P_1M+P_1P_2,P_1Q_1+P_1Q_2)&=\measuredangle MP_1Q_1+\measuredangle P_2P_1'Q_2\\&=\measuredangle MP_1Q_1+\measuredangle MP_1'Q_2=0^\circ,\end{aligned}$$

故 P_1M, P_1P_2 為關於 $\measuredangle Q_1P_1Q_2$ 的等角線。 ■

Example 2.2.15. 設 $ABCD$ 為一圓上的調和四邊形，那麼 $\overline{AC}$ 中點及 $\overline{BD}$ 中點為關於 $(AC)(BD)$ 的等角共軛點對。

Example 2.2.16. 令 Ω 為 $\triangle ABC$ 的外接圓，T_A, T_B, T_C 分別為 A, B, C 關於 Ω 的切線，D, E, F 分別為切線交點 $T_B\cap T_C$, $T_C\cap T_A$, $T_A\cap T_B$。如果令 X 為 AD 與 Ω 的另一個交點，則 $(AX)(BC)$ 是調和四邊形，因此 $AD=AX$ 為 AM_a 關於 $\angle BAC$ 的等角線，其中 M_a 為 $\overline{BC}$ 中點。同理 BE, CF 為 BM_b, CM_c 關於 $\angle CBA$, $\angle ACB$ 的等角線，其中 M_b, M_c 分別為 $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 中點。因此 AD, BE, CF 交於 $\triangle ABC$ 的重心 $G=AM_a\cap BM_b\cap CM_c$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 K，我們把 K 稱作 $\triangle ABC$ 的**共軛重心**。

Example 2.2.17. 在銳角三角形 ABC 中，M 是 $\overline{BC}$ 的中點，P 是 $\triangle ABC$ 內一點，滿足 $\angle BAM = \angle PAC$。設 $\triangle ABC$, $\triangle ABP$, $\triangle APC$ 的外心分別為 O, O_1, O_2。證明：直線 AO 平分 $\overline{O_1O_2}$。

Solution. 令 D 為 AP 與 $\odot(ABC)$ 的交點，則 $ABDC$ 是一個調和四邊形。由 O_1O_2, O_2O, OO_1 分別垂直於 $AP = AD$, CA, AB，我們得到

$$\begin{aligned} O(A, \infty_{O_1O_2}; O_1, O_2) &= (\infty_{AO}, \infty_{O_1O_2}; \infty_{OO_1}, \infty_{O_2O}) \\ &= (\infty_{\perp AO}, \infty_{AD}; \infty_{AB}, \infty_{AC}) \\ &= A(A, D; B, C) = -1, \end{aligned}$$

其中第二個等號是在無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 上轉 90°。故 OA 平分 $\overline{O_1O_2}$。

習題

Problem 1 (09 Costa Rica Final round P6)**.** 令 ω 為 $\triangle ABC$ 的內切圓，D, E, F 分別為 BC, CA, AB 上的內切圓切點，P 為 AD 與內切圓的第二個交點。證明：BC, EF 與過 P 且與內切圓相切的直線三線共點。

Problem 2. 令 $\triangle ABC$ 的內切圓 ω 分別切 CA, AB 於 E, F，$P = BC \cap EF$，平行於 BC 且與 ω 相切的直線分別交 CA, AB 於 Y, Z，證明 P 關於 ω 異於 BC 的另一條切線平分 $\overline{YZ}$。

Problem 3. 設三角形 ABC 的外接圓為 Ω，共軛重心為 K。證明：對於 Ω 上任意一點 X，其三線性極線 $\mathfrak{t}(X)$ 過 K。

Problem 4. 令 Ω 為三角形 ABC 的 A-旁切圓，並設其分別切 BC, CA, AB 於 D, E, F。在 Ω 上取兩點 P, Q 使得 EP 與 FQ 皆平行於 D 與 $\overline{EF}$ 中點 M 的連線。設 X 為 BP 與 CQ 的交點。證明：直線 AM 是 $\angle XAD$ 的內角平分線。

Problem 5 (2018 全國賽 P6)**.** 設 P 為 $\triangle ABC$ 內部一點，滿足 $\angle BAC +$

$\angle BPC = 180^\circ$ 且 $\frac{AB}{AC} = \frac{PB}{PC}$。試證：

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

Problem 6 (2015 1J I3-2). 三角形 ABC 中，A', B', C' 分別是 BC, CA, AB 邊的中點。B^*, C^* 分別在 CA, AB 上，使得 BB^*, CC^* 是三角形 ABC 的高。再令 $B^\sharp$, $C^\sharp$ 分別為 BB^*, CC^* 的中點。設 $B'B^\sharp$ 與 $C'C^\sharp$ 交於 K 點，AK 交 BC 於 L 點。證明：$\angle BAL = \angle A'AC$。

Problem 7 (2019 全國賽 P4). 設 Γ 為一圓，取圓外一點 A 作 Γ 的兩點切線切 Γ 於 B, C 兩點。在 Γ 上取另一點 D 使得 $\overline{BC} = \overline{BD}$，連接 AD 交 Γ 另一點於 E。試證：$\overline{DE} = 2 \cdot \overline{CE}$。

Problem 8. 設 $\triangle ABC$ 的內切圓 ω 分別切 BC, CA, AB 於點 D, E, F，X 是 ω 上任意一點，且 MB, MC 分別交 ω 於點 Y, Z。證明：DX, EY, FZ 交於一點。

Problem 9 (2011 APMOC P1). 已知銳角三角形 $\triangle ABC$ 的內切圓與三邊 BC, CA, AB 分別切於點 P, Q, R。點 O, I 分別為 $\triangle ABC$ 的外心與內心；且 $\triangle ABC$ 的垂心 H 在線段 QR 上。又令 N 為 A-旁切圓與 BC 的切點。

(i) 證明：$PH \perp QR$。

(ii) 證明：I, O, N 三點共線。

Problem 10. 設 $\triangle ABC$ 的外接圓為 Γ，$\angle A = 90^\circ$。過 A 作 Γ 的切線與 BC 交於 D；又 E 是 A 關於 BC 的對稱點。A 在 BE 上的投影為 X，且 Y 是 $\overline{AX}$ 的中點，BY 與 Γ 的第二個交點為 Z。證明：BD 與 $\triangle ADZ$ 的外接圓相切。

Problem 11 (2015 2J P4). 設三角形 ABC 的內切圓為 ω，內心為 I，外接圓為 Γ。令 D 為 ω 在 BC 邊的切點，並令 M 是 $\overline{ID}$ 的中點。設 A 為 A 在 Γ 上的對徑點。設 X 為直線 $A\ M$ 與圓 Γ 的另一個交點。

證明：三角形 AXD 的外接圓與直線 BC 相切。

Problem 12 (2014 ISL G6-改)**.** 固定一個銳角三角形 ABC。設 E, F 點分別落在 CA, AB 邊上，並設 M 點是 EF 線段的中點。令 EF 的中垂線與直線 BC 交於 K 點，而 MK 的中垂線分別交 CA, AB 直線於 S, T 點。若四邊形 $KSAT$ 共圓，證明：$\angle KEF = \angle KFE = \angle A$。

2.3 一些射影定理

第一個是我們已經看過的迪沙格定理 (1.1.1)：

Theorem 2.3.1. 對於兩個三角形 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$，$B_1C_1 \cap B_2C_2, C_1A_1 \cap C_2A_2, A_1B_1 \cap A_2B_2$ 共線若且唯若 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 共點。

這邊給一個只用交比的簡短證明：

Proof. 令 $X = B_1B_2 \cap C_1C_2, P = B_1C_1 \cap B_2C_2, Q = C_1A_1 \cap C_2A_2, R = A_1B_1 \cap A_2B_2$，$A_1A_2$ 分別交 B_iC_i 於 Z_i。注意到 $X \in A_1A_2$ 等價於 $X \in Z_1Z_2$，即

$$(P, C_1; B_1, Z_1) \overset{X}{=} (P, C_2; B_2, Z_2).$$

而 P, Q, R 共線則由 (2.1.10) 等價於 (注意到 $A_i \notin QR \cup RP \cup PQ$)

$$A_1(P, Q; R, A_2) = A_2(P, Q; R, A_1).$$

因此由

$$A_1(P, Q; R, A_2) = (P, C_1; B_1, Z_1), \quad A_2(P, Q; R, A_1) = (P, C_2; B_2, Z_2)$$

知兩者等價。 ■

Theorem 2.3.2 (帕普斯定理/Pappus')**.** 若 P_1, P_2, P_3 及 Q_1, Q_2, Q_3 分別共於兩線 K, L，則

$$P_2Q_3 \cap P_3Q_2,\ P_3Q_1 \cap P_1Q_3,\ P_1Q_2 \cap P_2Q_1$$

共線。

Proof. 令 $R_i = P_{i+1}Q_{i-1} \cap P_{i-1}Q_{i+1}$, $U = P_1R_1 \cap K$, $V = Q_1R_1 \cap L$，則

$$\begin{aligned} P_1(R_1, R_2; R_3, Q_1) &= (U, Q_3; Q_2, Q_1) \overset{V}{=} (P_1, P_2; P_3, V) \\ &= (V, P_3; P_2, P_1) = Q_1(R_1, R_2; R_3, P_1). \end{aligned}$$

因此由 (2.1.10) 知 R_1, R_2, R_3 共線。 ■

Theorem 2.3.3 (帕斯卡定理/Pascal's)**.** 令 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 為共圓六點，則

$$P_1P_2 \cap P_4P_5, \quad P_2P_3 \cap P_5P_6, \quad P_3P_4 \cap P_6P_1$$

共線。

Proof. 令 $Q_1 = P_1P_2 \cap P_4P_5$, $Q_2 = P_2P_3 \cap P_5P_6$, $Q_3 = P_3P_4 \cap P_6P_1$，則

$$\begin{aligned} Q_1(P_1, P_3; P_4, Q_3) &= (P_1Q_1 \cap P_3P_4, P_3; P_4, Q_3) \\ &= P_1(P_2, P_3; P_4, P_6) = P_5(P_2, P_3; P_4, P_6) \\ &= (P_2, P_3; P_4Q_1 \cap P_2P_3, Q_2) \\ &= Q_1(P_1, P_3; P_4, Q_2). \end{aligned}$$

因此 Q_1, Q_2, Q_3 共線。 ■

Example 2.3.4 (19 Belarus TST Test6 P1)**.** 兩個圓 Ω, ω 內切於 A，BC 為 Ω 的一條弦，切 ω 於 L。設 AB, AC 分別交 ω 於 M, N，M, N 分別關於 AL 作對稱得 M_1, N_1，M, N 分別關於 BC 作對稱得 M_2, N_2。令 K 為 M_1M_2 與 N_1N_2 的交點。

證明：$AK \perp BC$。

Solution. 令 $\ell = \mathbf{T}_A\Omega = \mathbf{T}_A\omega$ 為 Ω 及 ω 的公切線，則

$$\measuredangle BAL = \measuredangle(BA, \ell) + \measuredangle(\ell, AL) = \measuredangle BCA + \measuredangle ALB = \measuredangle LAC,$$

即 AL 為 $\angle BAC$ 的角平分線。因此 M_1, N_1 分別位於 CA, AB 上，且 L 為 ω 上 $\widehat{MN}$（不包含 A）的弧中點。注意到 M, N, M_1, N_1 四點共於一圓 Γ，且圓心為 $\overline{MN}$ 中垂線與 $\overline{MM_1}$ 中垂線 AL 的交點，即 L。所以由

$$\overline{LM_2} = \overline{LM} = \overline{LN} = \overline{LN_2}$$

我們發現 M_2, N_2 也在 Γ 上。考慮六折線 $MN_1N_2NM_1M_2$，由帕斯卡定理 (2.3.3)，A, K, $\infty_{\perp BC} = N_2N \cap M_2M$ 共線，即 $AK \perp BC$。

帕斯卡定理的對偶命題為：

Theorem 2.3.5 (布里昂雄定理/Brianchon's). 令 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6$ 為共切一圓的六線，則

$$(\ell_1 \cap \ell_2)(\ell_4 \cap \ell_5),\ (\ell_2 \cap \ell_3)(\ell_5 \cap \ell_6),\ (\ell_3 \cap \ell_4)(\ell_6 \cap \ell_1)$$

共點。

Proof. 證明與 (2.3.3) 類似。令 $L_1 = (\ell_1 \cap \ell_2)(\ell_4 \cap \ell_5)$, $L_2 = (\ell_2 \cap \ell_3)(\ell_5 \cap \ell_6)$, $L_3 = (\ell_3 \cap \ell_4)(\ell_6 \cap \ell_1)$，則

$$\begin{aligned} L_1(\ell_1, \ell_3; \ell_4, L_3) &= ((\ell_1 \cap L_1)(\ell_3 \cap \ell_4), \ell_3; \ell_4, L_3) \\ &= \ell_1(\ell_2, \ell_3; \ell_4, \ell_6) = \ell_5(\ell_2, \ell_3; \ell_4, \ell_6) \\ &= (\ell_2, \ell_3; (\ell_4 \cap L_1)(\ell_2 \cap \ell_3), L_2) \\ &= L_1(\ell_1, \ell_3; \ell_4, L_2). \end{aligned}$$

因此 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 共線。 ■

Remark. 上面這兩個定理其實是可以允許兩點（線）重合的，只是兩點連線（線交點）就會變成切線（點），而反過來就是與該線相切（切於該點）。

Example 2.3.6 (2016 APMO P3). 設 AB 與 AC 是不在同一條直線上的兩條射線，並設圓 ω 的圓心為 O 且與射線 AC 切於點 E 與射線 AB 切於點 F。設 R 為線段 EF 上的一點。設過 O 點和 EF 平行的直線，交直線 AB 於點 P。令點 N 為直線 PR 及 AC 的交點，並令點 M 為直線 AB 及過 R 且平行於 AC 的直線的交點。

證明：直線 MN 與圓 ω 相切。

Solution. 令 U 為 AC 上的無窮遠點。過 M 作關於 ω 異於 AB 的切線 L 並交 AC 於 N'。考慮切 ω 的六折線 $UEN'MFP$（注意到 PU 與 ω 相切），由布

里昂雄定理 (2.3.5)，$UM, EF, N'P$ 共點。因爲 $R = MU \cap EF$，因此 N', R, P 共線，故 $N = N'$，即 MN 與 ω 相切。

習題

Problem 1. 令 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，P, Q 分別為 CA, AB 上兩點滿足 P, O, Q 共線，設 M, N 分別為 $\overline{BP}, \overline{CQ}$ 中點。證明：$\measuredangle BAC = \measuredangle MON$。

Problem 2. 設 $\triangle ABC$ 的內切圓 ω 分別切 BC, CA, AB 於 D, E, F，AD 交 ω 的第二個交點為 K。作 K 關於 ω 的切線並分別交 FD, DE 於 Y, Z。證明：AD, BZ, CY 共點。

Problem 3. 令 ω 為 $\triangle ABC$ 的內切圓，ℓ 為 ω 的其中一條切線。設 A', B', C' 為共線三點滿足 $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$。A' 關於 ω 異於 BC 的切線交 ℓ 於 A^*，類似地定義 B^*, C^*。證明：AA^*, BB^*, CC^* 共點。

Chapter 3

反演與配極

3.1 基礎反演

之前看過位似變換了，我們來看一個不太會保持形狀的變換。跟在旋似（第 1.2 節）時一樣，在反演的時候我們必須把 $\mathcal{L}_\infty$ 上的點都想成是同一個點，記為 ∞。那麼所有的直線其實都經過 ∞ 這個點。

Definition 3.1.1. 給定一點 O 及一實數 $k \neq 0$，我們定義以 O 為中心，k 為反演冪的反演變換 $\mathfrak{I}_{O,k}$ 為如下：對於一個點 $P \neq O, \infty$，在 OP 上取點 $P^{\mathfrak{I}}$ 使得

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP^{\mathfrak{I}}} = k.$$

我們把 P 送至 $P^{\mathfrak{I}}$。而 O, ∞ 則送至對方。

若圓 Γ 的圓心為 O，半徑長為 r，則我們定義關於 Γ 的反演變換 $\mathfrak{I}_\Gamma$ 為以 O 為中心，r^2 為反演冪的反演變換。顯然地，我們有 $\mathfrak{I}_\Gamma(\Gamma) = \Gamma$。

在這節中，如果沒有特別假設，我們都將一點 P 反演下的像記為 $P^{\mathfrak{I}}$，一條直線 ℓ 反演下的像記為 $\ell^{\mathfrak{I}} = \{P^{\mathfrak{I}} \mid P \in \ell\}$。由定義 $(P^{\mathfrak{I}})^{\mathfrak{I}} = P$，也就是說反演變換是一個對合變換。另外，對於任意兩點 P, Q，

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP^{\mathfrak{I}}} = k = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OQ^{\mathfrak{I}}},$$

因此 $P, Q, P^{\mathfrak{I}}, Q^{\mathfrak{I}}$ 共圓。

Proposition 3.1.2. 對於任意兩點 $P, Q \neq O, \infty$，

$$\measuredangle OP^{\Im}Q^{\Im} = \measuredangle PQO, \quad \overline{P^{\Im}Q^{\Im}} = \frac{|k|}{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}} \cdot \overline{PQ}.$$

前者用形式和來寫角度關係就是 $P^{\Im}Q^{\Im} = OP + OQ - PQ$。

Proof. 由 $P, Q, P^{\Im}, Q^{\Im}$ 共圓，我們有

$$\measuredangle OP^{\Im}Q^{\Im} = \measuredangle PP^{\Im}Q^{\Im} = \measuredangle PQQ^{\Im} = \measuredangle PQO.$$

這告訴我們 $\triangle OPQ \mathrel{\bar{\sim}} \triangle OQ^{\Im}P^{\Im}$，因此

$$\overline{P^{\Im}Q^{\Im}} = \frac{\overline{OQ^{\Im}}}{\overline{OP}} \cdot \overline{PQ} = \frac{|k|}{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}} \cdot \overline{PQ}. \qquad \blacksquare$$

注意到 $\Im_{O,k_1} = \mathfrak{h}_{O,k_1/k_2} \circ \Im_{O,k_2}$，所以如果我們沒有要把反演之後的圖與原圖疊在一起看的話，其實我們可以隨便取一個反演冪（當然這樣我們長度的部分就都只能算比例）。所以在沒有需要的情況下，通常會省略反演冪 k。

Proposition 3.1.3. 給定一個以 O 為中心的反演變換，我們有：

(i) 若 ℓ 為一個過 O 的直線，則 $\ell^{\Im} = \ell$；

(ii) 若 ℓ 為一個不過 O 的直線，則 $\ell^{\Im}$ 為一個過 O 的圓；

(iii) 若 Ω 為一個過 O 的圓，則 $\Omega^{\Im}$ 為一個過 O 的直線；

(iv) 若 Ω 為一個不過 O 的圓，則 $\Omega^{\Im}$ 為一個不過 O 的圓。

Proof. (i) 是顯然的，因為 $O, P, P^{\Im}$ 共線。(ii): 對於任意兩點 P, Q，我們有

$$\measuredangle OQ^{\Im}P^{\Im} = \measuredangle QPO = \measuredangle(\ell, OP)$$

是一個與 Q 無關的定值，所以 $\ell^{\Im} \subseteq \odot(OP^{\Im}Q^{\Im})$，我們還需要證明另一邊包含，對於 $R \in \odot(OP^{\Im}Q^{\Im})$，

$$\measuredangle PQR^{\Im} = \measuredangle PQO + \measuredangle OQR^{\Im} = \measuredangle OP^{\Im}Q^{\Im} + \measuredangle Q^{\Im}RO = 0^\circ,$$

即 $R^{\Im} \in PQ = \ell$，因此 $\odot(OPQ)^{\Im} \subseteq \ell$。這個證明把 $\odot(OPQ)$ 換成 Ω 就可以拿來證明 (iii) 了。

(iv): 取任意三點 $P, Q, R \in \Omega$，我們有

$$\measuredangle Q^{\mathfrak{I}}P^{\mathfrak{I}}R^{\mathfrak{I}} = \measuredangle Q^{\mathfrak{I}}P^{\mathfrak{I}}O + \measuredangle OP^{\mathfrak{I}}R^{\mathfrak{I}} = \measuredangle OQP + \measuredangle PRO = \measuredangle QOR + \measuredangle RPQ$$

是一個與 P 無關的定值，所以 $\Omega^{\mathfrak{I}} \subseteq \odot(P^{\mathfrak{I}}Q^{\mathfrak{I}}R^{\mathfrak{I}})$，且 $\infty \notin \Omega \implies O \notin \Omega^{\mathfrak{I}}$。把上面的證明應用在 $\odot(P^{\mathfrak{I}}Q^{\mathfrak{I}}R^{\mathfrak{I}})$ 就得到

$$\Omega = (\Omega^{\mathfrak{I}})^{\mathfrak{I}} \subseteq \odot(P^{\mathfrak{I}}Q^{\mathfrak{I}}R^{\mathfrak{I}})^{\mathfrak{I}} \subseteq \odot(PQR),$$

因此 $\Omega^{\mathfrak{I}} = (\odot(P^{\mathfrak{I}}Q^{\mathfrak{I}}R^{\mathfrak{I}})^{\mathfrak{I}})^{\mathfrak{I}} = \odot(P^{\mathfrak{I}}Q^{\mathfrak{I}}R^{\mathfrak{I}})$ 是一個不過 O 的圓。 ■

給定 $\triangle ABC$。考慮以 A 為中心，反演冪為 $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ 的反演變換 $\mathfrak{I}_A$，以及關於 $\angle BAC$ 的內角平分線 ℓ 的對稱變換 $\mathfrak{s}$，我們知道它們的合成 $\mathfrak{C}_A = \mathfrak{I}_A \circ \mathfrak{s} = \mathfrak{s} \circ \mathfrak{I}_A$ 會把 B, C 送至對方且 $\mathfrak{C}_A \circ \mathfrak{C}_A = \mathrm{id}$。一般來說在給定 $\triangle ABC$ 下，「對 A 反演」指的就是這個變換 $\mathfrak{C}_A$。我們來看一點實際應用的例子。

Example 3.1.4 (10 Croatia MO P7). 給定三角形 ABC，令 B' 為 B 關於 AC 之對稱點，C' 為 C 關於 AB 之對稱點。設三角形 ABB' 的外接圓與三角形 ACC' 的外接圓交於 P。證明：AP 通過 $\triangle ABC$ 之外心。

Solution. 我們把命題「對 A 反演」：先把所有物件的像寫下來，即

$$AB \leftrightarrow AC, \quad B' \leftrightarrow C', \quad \odot(ABB') \mapsto CC',$$
$$\odot(ACC') \mapsto BB', \quad P \mapsto P^{\mathfrak{I}} := BB' \cap CC'.$$

注意到 AP 通過 $\triangle ABC$ 的外心等價於 AP 通過 A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點 A^*。由 $\odot(ABC) \mapsto BC$ 知對徑點 A^* 的像 $(A^*)^{\mathfrak{I}}$ 為 A 關於 BC 的垂足 H_a（因為 $\measuredangle A(A^*)^{\mathfrak{I}}C = \measuredangle A^*CA = 90^\circ$），也就是說，我們想證明 $AP^{\mathfrak{I}} \perp BC$。但我們發現 $P^{\mathfrak{I}} = BB' \cap CC'$ 為 $\triangle ABC$ 的垂心，因此原命題成立。

Proposition 3.1.5. 給定 $\triangle ABC$ 並考慮上述定義的反演變換 $\mathfrak{C}_A$。對於任意一對關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對 P, Q，我們有 $\mathfrak{C}_A(P), \mathfrak{C}_A(Q)$ 也是一對關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對。

Proof. 由 $\triangle ABP \overset{+}{\sim} \triangle A\mathfrak{I}_A(P)C$, $\triangle ABQ \overset{+}{\sim} \triangle A\mathfrak{I}_A(Q)C$，我們有

$$\measuredangle(C\mathfrak{I}_A(P)+C\mathfrak{I}_A(Q), CA+CB) = \measuredangle BPA + \measuredangle BQA + \measuredangle ACB = 0^\circ,$$

其中最後一個等號是由 (1.3.6) 得到。因此 $C\mathfrak{I}_A(P)$, $C\mathfrak{I}_A(Q)$ 是關於 $\angle ACB$ 的一對等角線。同理，$B\mathfrak{I}_A(P)$, $B\mathfrak{I}_A(Q)$ 也是關於 $\angle CBA$ 的一對等角線，故 $\mathfrak{I}_A(P)$, $\mathfrak{I}_A(Q)$ 是一對關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對。 ■

Example 3.1.6. 給定三角形 ABC。設 I^a 為 A 對應的旁心，J 是 I^a 關於 BC 的對稱點，H 是三角形 BI^aC 的垂心，O 是三角形 BI^aC 的外心。證明：$AJ \parallel OH$。

Solution. 因為

$$BA + BJ = (2BI^a - BC) + (2BC - BI^a) = BI^a + BC,$$
$$CA + CJ = (2CI^a - BC) + (2BC - CI^a) = CI^a + BC,$$

所以 A, J 為關於 $\triangle BI^aC$ 的等角共軛點。注意到（關於 $\triangle BI^aC$ 的）反演變換 $\mathfrak{I}_{I^a}$ 將 O 送至 J，因此由 (O, H) 為關於 $\triangle BI^aC$ 的等角共軛點對知 $\mathfrak{I}_{I^a}$ 將 H 送至 A。因此

$$\measuredangle I^aAJ = -\measuredangle HOI^a = \measuredangle I^aOH,$$

即 $AJ \parallel OH$。

但其實 $\mathfrak{I}_{I^a}$ 將 H 送至 A 是可以直接算角度得到的，只不過知道這個性質還是多多少少能夠幫助我們觀察到這件事。

反演變換一個很重要的性質就是保角，但在證明之前我們要先定義兩個曲線在某個點的夾角。

Definition 3.1.7. 令 γ_1, γ_2 為兩個平滑 $(\mathscr{C}^1)$ 曲線（這邊如果不知道定義的話就先當作是直線或圓，因為我們最主要會用到的情況就是這兩個），P 為 γ_1 與 γ_2 的其中一個交點。我們定義 γ_1, γ_2 在 P 的夾角為 P 關於 γ_1 的切線 $\mathbf{T}_P\gamma_1$ 與 P 關於 γ_2 的切線 $\mathbf{T}_P\gamma_2$ 的夾角 $\measuredangle(\mathbf{T}_P\gamma_1, \mathbf{T}_P\gamma_2)$，記為 $\measuredangle_P(\gamma_1, \gamma_2)$。

若 γ_1, γ_2 在 P 的夾角為 $90°$，則我們稱 γ_1 與 γ_2 在 P 正交，或正交於 P。(因為 $90° = -90°$，所以這個定義關於 γ_1, γ_2 是對稱的。)

Proposition 3.1.8. 令 γ_1, γ_2 為兩個平滑曲線，P 為 γ_1, γ_2 的其中一個交點。則 γ_1, γ_2 在 P 的夾角與 $\gamma_2^{\mathfrak{I}}, \gamma_1^{\mathfrak{I}}$ 在 $P^{\mathfrak{I}}$ 的夾角相等。

Proof. 我們可以把 γ_1, γ_2 換成它們在 P 的切線 ℓ_1, ℓ_2，因為 $\gamma_i^{\mathfrak{I}}$ 與 $\ell_i^{\mathfrak{I}}$ 在 $P^{\mathfrak{I}}$ 相切。由 (3.1.3)，$\ell_1^{\mathfrak{I}}, \ell_2^{\mathfrak{I}}$ 都是過反演中心 O 的圓或直線，所以 $\ell_1^{\mathfrak{I}}$ 與 $\ell_2^{\mathfrak{I}}$ 都關於 $\overline{OP^{\mathfrak{I}}}$ 的中垂線自對稱，因此

$$\measuredangle_{P^{\mathfrak{I}}}(\ell_2^{\mathfrak{I}}, \ell_1^{\mathfrak{I}}) = \measuredangle_O(\ell_1^{\mathfrak{I}}, \ell_2^{\mathfrak{I}}).$$

令 L_i 為 O 關於 $\ell_i^{\mathfrak{I}}$ 的切線，則由 (3.1.3) 知 $L_i^{\mathfrak{I}} = L_i$。由於 $O \in \ell_i^{\mathfrak{I}} \cap L_i$，$\infty \in \ell_i \cap L_i^{\mathfrak{I}} = \ell_i \cap L_i$，即 $\ell_i \parallel L_i$。故

$$\measuredangle_{P^{\mathfrak{I}}}(\gamma_2^{\mathfrak{I}}, \gamma_1^{\mathfrak{I}}) = \measuredangle_O(\ell_1^{\mathfrak{I}}, \ell_2^{\mathfrak{I}}) - \measuredangle(L_1, L_2) = \measuredangle(\ell_1, \ell_2) = \measuredangle_P(\gamma_1, \gamma_2). \qquad \blacksquare$$

Example 3.1.9 (2015 IMO P3, 左派 ver.). 設 ABC 為銳角三角形，其中 $\overline{AB} < \overline{AC}$，$\Gamma$ 是它的外接圓，H 是它的垂心，而 F 是過 A 的高的垂足。另 M 為 BC 邊的中點。設 Q 為 Γ 上的一點，滿足 $\angle HQA = 90°$；而 K 為 Γ 上的另一點，滿足 $\angle HKQ = 90°$。已知 A, Q, K, B, C 這些點皆不相同，且依此順序落在 Γ 上。

證明：三角形 KQH 的外接圓與三角形 FKM 的外接圓相切。

Solution. 考慮以 H 為中心，反演冪為 $HA \cdot HF$ 的反演變換 $\mathfrak{I}$。由於 A, B, C 分別被送至對邊垂足，我們知道 $\Gamma^{\mathfrak{I}}$ 為垂足三角形的外接圓，即 $\triangle ABC$ 的九點圓 ε。故 $Q^{\mathfrak{I}}$ 位於 ε 上滿足 $\measuredangle Q^{\mathfrak{I}}FH = 90°$，即 $Q^{\mathfrak{I}} \in \varepsilon \cap BC \setminus \{F\}$ 為 $\overline{BC}$ 中點 M。

注意到 $K^{\mathfrak{I}} \in \varepsilon$ 滿足 $\measuredangle K^{\mathfrak{I}}MH = 90°$，而 $\odot(KQH)$ 與 $\odot(FKM)$ 相切(透過 $\mathfrak{I}$)等價於 $K^{\mathfrak{I}}M$ 與 $\odot(AK^{\mathfrak{I}}Q)$ 相切。令 M_A, M_Q 分別為 $\overline{HA}, \overline{HQ}$ 的中點，則 $M_A, M_Q \in \varepsilon$。注意到 $\overline{MM_A}$ 為 ε 的直徑，結合

$$M_AM_Q = AQ = \perp QM = MK^{\mathfrak{I}} \quad \Longrightarrow \quad (M_Q - K^{\mathfrak{I}})_\Gamma = (M - M_A)_\Gamma,$$

我們得到 $\overline{K^{\Im}M_Q}$ 也為 ε 的直徑。

因為 $K^{\Im}M_A \perp M_AM_Q \parallel AQ$ 且 M_A，作為直角三角形 QHA 的斜邊中點，位於 $\overline{AQ}$ 的中垂線上，故 $K^{\Im}$ 也位於 $\overline{AQ}$ 的中垂線上。因此

$$\measuredangle QK^{\Im}M = 90^\circ - \measuredangle MQK^{\Im} = \measuredangle K^{\Im}QA = \measuredangle QAK^{\Im},$$

即 $K^{\Im}M$ 與 $\odot(AK^{\Im}Q)$ 相切 (於 $K^{\Im}$)。

注意到如果兩圓 Γ_1, Γ_2 交於兩點 P, Q，那

$$\measuredangle_P(\Gamma_1, \Gamma_2) = -\measuredangle_Q(\Gamma_1, \Gamma_2).$$

所以如果 Γ_1 與 Γ_2 在 P 正交，那它們也會在 Q 正交，這時候我們就直接簡稱兩圓 Γ_1 與 Γ_2 正交。而 (3.1.8) 告訴我們兩圓的正交性在反演下是不變的。

Proposition 3.1.10. 令 Γ_1, Γ_2 分別是以 O_1, O_2 為圓心，r_1, r_2 為半徑長的兩個圓，則以下敘述等價：

(i) Γ_1 與 Γ_2 正交；

(ii) $\overline{O_1O_2}^2 = r_1^2 + r_2^2$；

(iii) $\mathbf{Pow}_{\Gamma_2}(O_1) = r_1^2$。

Proof. 因為 $\mathbf{Pow}_{\Gamma_2}(O_1) = \overline{O_1O_2}^2 - r_1^2$，(ii) 與 (iii) 顯然是等價的。以下證明 (i) 與 (ii) 等價：若 Γ_1 與 Γ_2 在 P 正交，則

$$\measuredangle O_1PO_2 = \measuredangle(O_1P, \mathbf{T}_P\Gamma_1) + \measuredangle_P(\Gamma_1, \Gamma_2) + \measuredangle(\mathbf{T}_P\Gamma_2, O_2P) = \measuredangle_P(\Gamma_1, \Gamma_2) = 90^\circ,$$

所以由畢氏定理有 $\overline{O_1O_2}^2 = r_1^2 + r_2^2$。

若 $\overline{O_1O_2}^2 = r_1^2 + r_2^2$，則

$$r_1 + r_2 > \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \overline{O_1O_2}$$

告訴我們 Γ_1 與 Γ_2 有交點。設 P 是其中一個交點，則畢氏定理告訴我們 $\measuredangle O_1PO_2 = 90^\circ$。類似上面的計算，我們得到

$$\measuredangle_P(\Gamma_1, \Gamma_2) = \measuredangle(\mathbf{T}_P\Gamma_1, \mathbf{T}_P\Gamma_2) = \measuredangle O_1PO_2 = 90^\circ,$$

即 Γ_1, Γ_2 正交。 ■

Corollary 3.1.11. 若 $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_\Gamma$，則對於任意一點 P 及一圓 $\Omega \ni P$，Ω 與 Γ 正交若且唯若 $P^{\mathfrak{I}} \in \Omega$。

Proof. 令 O 為 Γ 的圓心，Q 為 OP 與 Ω 的另一個交點。因為

$$\mathbf{Pow}_\Omega(O) = OP \cdot OQ,$$

所以由 (3.1.10) 知 Ω 與 Γ 正交若且唯若 $OP \cdot OQ = r^2$，即 $Q = P^{\mathfrak{I}}$。 ■

當 $\mathfrak{I}$ 的反演冪為負時，我們就沒有一個真正的圓可以讓我們有交點算角度，但我們透過 (3.1.10) 還是可以定義正交這個概念。我們可以抽象地考慮一個以 O 為圓心，$\sqrt{k}$ 為「半徑長」的圓 Ξ。這時候我們記 $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_\Xi$。

(i) 當 $k > 0$ 時，Ξ 就是我們熟悉的圓，稱為實圓；

(ii) 當 $k = 0$ 時，Ξ 就是一個點 O，稱為點圓；

(iii) 當 $k < 0$ 時，Ξ 被稱為虛圓。

為了避免與實圓搞混，當我們考慮這種圓的時候都以 Ξ 或 Ξ_i 作為命名。我們定義任意一點 P 關於 Ξ 的冪為

$$\mathbf{Pow}_\Xi(P) = \overline{OP}^2 - k.$$

我們有以下常用等式：

$$\mathbf{Pow}_\Xi(P) = OP \cdot OP - OP^* \cdot OP = PP^* \cdot PO.$$

Definition 3.1.12. 令 Ξ_1, Ξ_2 分別是以 O_1, O_2 為圓心，$\sqrt{k_1}, \sqrt{k_2}$ 為半徑長的圓。我們說 Ξ_1, Ξ_2 正交若

$$\overline{O_1O_2}^2 = k_1 + k_2.$$

在這樣的設定底下，就可以把 (3.1.11) 中的 Γ 換成 Ξ：

Proposition 3.1.13. 若 $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_\Xi$，則對於任意一點 P 及一圓 $\Omega \ni P$，Ω 與 Ξ 正交若且唯若 $P^* \in \Omega$。

除了正交以外，我們還可以像以前一樣定義兩個圓的根軸。

Definition 3.1.14. 令 Ξ_1, Ξ_2 分別是以 O_1, O_2 為圓心，$\sqrt{k_1}, \sqrt{k_2}$ 為半徑長的圓。我們定義 Ξ_1, Ξ_2 的根軸為

$$\{P \mid \mathbf{Pow}_{\Xi_1}(P) = \mathbf{Pow}_{\Xi_2}(P)\}.$$

類似於之前的證明 (見 (0.4.9))，我們一樣會有 Ξ_1, Ξ_2 的根軸是垂直於 O_1O_2 的直線，一樣有根心定理。那麼我們有下面這個定理將根軸與正交結合在一起。

Proposition 3.1.15. 給定兩圓 Ξ_1, Ξ_2。對於任意一圓 Ξ，若 Ξ 與 Ξ_1, Ξ_2 都正交，則 Ξ 的圓心 O 位於 Ξ_1 與 Ξ_2 的根軸 ℓ 上。反之，對於任意一點 $O \in \ell$，存在恰一圓 Ξ 與 Ξ_1, Ξ_2 都正交。

Proof. 令 O_1, O_2 分別為 Ξ_1, Ξ_2 的圓心，$\sqrt{k_1}, \sqrt{k_2}$ 分別為 Ξ_1, Ξ_2 的半徑長。

假設 Ξ 與 Ξ_1, Ξ_2 都正交，並設 $\sqrt{k}$ 分別為 Ξ 的圓心與半徑長，則由正交的定義知

$$\mathbf{Pow}_{\Xi_1}(O) - \mathbf{Pow}_{\Xi_2}(O) = k - k = 0,$$

即 $O \in \ell$。

若 O 為 ℓ 上任意一點，取 $k = \mathbf{Pow}_{\Xi_1}(O) = \mathbf{Pow}_{\Xi_2}(O)$，則以 O 為圓心，$\sqrt{k}$ 為半徑長的圓 Ξ 與 Ξ_i 正交：

$$\overline{OO_i}^2 = \mathbf{Pow}_{\Xi_i}(O) + k_i = k + k_i.$$

而且我們知道這個 k 一定是唯一的。 ■

Proposition 3.1.16. 若兩個反演變換 $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ 的中心不重合，則它們的合成 $\mathfrak{I}_2 \circ \mathfrak{I}_1$ 是一個反演變換 $\mathfrak{I}$ 與一個對稱變換 $\mathfrak{s}$ 的合成 $\mathfrak{s} \circ \mathfrak{I}$。事實上，如果令 $\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_{\Xi_1} = \mathfrak{I}_{O_1,k_1}, \mathfrak{I}_2 = \mathfrak{I}_{\Xi_2} = \mathfrak{I}_{O_2,k_2}$，則 $O = O_2^{\mathfrak{I}_1}$ 是 $\mathfrak{I}$ 的中心，$\mathfrak{s}$ 是關於 Ξ_1 與 Ξ_2 的根軸 ℓ 的對稱變換。

Proof. 我們證明 $\mathfrak{I} := \mathfrak{s} \circ \mathfrak{I}_2 \circ \mathfrak{I}_1$ 是一個以 O 為中心的反演變換。對於任意一點 P，令 $P_1 = P^{\mathfrak{I}_1}, P_2 = P_1^{\mathfrak{I}_2}, P_3 = \mathfrak{s}(P_2)$。由 (3.1.13)，$\odot(PP_1P_2)$ 與 Ξ_1, Ξ_2 正交，因此其圓心位於 ℓ 上。所以 P_2 關於 ℓ 的對稱點 $P_2' = \mathfrak{s}(P_2)$ 也在 $\odot(PP_1P_2)$ 上。

由 $P_2P_2' \perp \ell \perp O_1O_2$ 及 P, P_1, O, O_2 共圓(因為 $P_1 = \mathfrak{I}_1(P), O = \mathfrak{I}_1(O_2)$),我們有

$$\measuredangle P_1PO = \measuredangle P_1O_2O = \measuredangle P_1P_2P_2' = \measuredangle P_1PP_2',$$

即 O, P, P_2' 共線。(事實上就是 Reim 定理 (0.1.14)。)

我們還必須證明 $OP \cdot OP_2'$ 是定值。事實上,如果令 $O_2' = \mathfrak{s}(O_2)$,我們有

$$\measuredangle O_1PP_2' = \measuredangle P_1PO = \measuredangle P_1O_2O = \measuredangle P_2O_2O_2' = \measuredangle O_2O_2'P_2' = \measuredangle O_1O_2'P_2',$$

即 O_1, O_2', P, P_2' 共圓。所以 $OP \cdot OP_2' = OO_1 \cdot OO_2'$ 為定值。 ■

當然我們也可以把 $\mathfrak{s} \circ \mathfrak{I}$ 寫成 $\mathfrak{I}' \circ \mathfrak{s}$,其中 $\mathfrak{I}' = \mathfrak{I}_{O',k}$,$O' = \mathfrak{s}(O)$,$k$ 為 $\mathfrak{I}$ 的反演冪。

Proposition 3.1.17. 給定一個以 O 為中心的反演變換 $\mathfrak{I}$,對於任意不過 O 的圓 Ω,$\Omega^{\mathfrak{I}}$ 的圓心為 $\mathfrak{I}_{\Omega^{\mathfrak{I}}}(O)$。

Proof. 令 O_Ω 為 Ω 的圓心,$O_{\Omega^{\mathfrak{I}}}$ 為 $\Omega^{\mathfrak{I}}$ 的圓心,A, B 為 OO_Ω 與 Ω 的交點,則由 AB 與 Ω 正交知 $A^{\mathfrak{I}}B^{\mathfrak{I}}$ 也與 $\Omega^{\mathfrak{I}}$ 正交,因此 $\Omega^{\mathfrak{I}} = \odot\big(\overline{A^{\mathfrak{I}}B^{\mathfrak{I}}}\big)$。由

$$\frac{OA^{\mathfrak{I}}}{OB^{\mathfrak{I}}} = \frac{OB}{OA}$$

可得 $\Omega^{\mathfrak{I}}, \Omega$ 關於 O 位似且位似比為 $\dfrac{OA^{\mathfrak{I}}}{OB}$。所以

$$O\mathfrak{I}_{\Omega^{\mathfrak{I}}}(O) \cdot OO_{\Omega^{\mathfrak{I}}} = \mathbf{Pow}_{\Omega^{\mathfrak{I}}}(O) = OA^{\mathfrak{I}} \cdot OB^{\mathfrak{I}} = k \cdot \frac{OA^{\mathfrak{I}}}{OB} = k \cdot \frac{OO_{\Omega^{\mathfrak{I}}}}{OO_\Omega},$$

故 $O\mathfrak{I}_{\Omega^{\mathfrak{I}}}(O) \cdot OO_\Omega = k$,即 $\mathfrak{I}_{\Omega^{\mathfrak{I}}}(O) = \mathfrak{I}(O_\Omega)$。 ■

Proposition 3.1.18. 給定一個以 O 為中心,k 為反演冪的反演變換 $\mathfrak{I}$,對於任意不過 O 的圓 Ω,Ω^* 的半徑長為

$$\left|\frac{rk}{\mathbf{Pow}_\Omega(O)}\right|,$$

其中 r 為 Ω 的半徑長。

Proof. 令 A, B 為 OO_Ω 與 Ω 的交點，則 Ω^* 的半徑長為

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\overline{A^{\mathfrak{I}}B^{\mathfrak{I}}} = \frac{1}{2}\cdot\left|OB^{\mathfrak{I}} - OA^{\mathfrak{I}}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{k}{OB} - \frac{k}{OA}\right| \\ = \frac{|k|}{2}\cdot\left|\frac{OA - OB}{OA\cdot OB}\right| = \left|\frac{rk}{\mathbf{Pow}_\Omega(O)}\right|.\end{aligned}$$

■

習題

Problem 1. 直角三角形 ABC 中，$\angle BAC$ 為直角。D 為邊 AB 上任一點。兩圓與直線 BC 分別相切於 B, C，且這兩圓交於 D 和 E 點。證明 $\angle CBA = \angle DEA$。

Problem 2 (2015 3J I3-2)**.** 令不等邊三角形 $\triangle ABC$ 的內切圓圓心為 I，且該內切圓分別切 CA, AB 邊於點 E, F。$\triangle AEF$ 的外接圓在 E 和 F 的兩條切線交於點 S。直線 EF 與 BC 交於點 T。試證：以 ST 為直徑的圓垂直於 $\triangle BIC$ 的九點圓。

Problem 3 (2019 1J M6)**.** 設三角形 ABC 的內心為 I，垂心為 H。平面上有一點 K 滿足

$$AH + AK = BH + BK = CH + CK.$$

證明：H, I, K 共線。

3.2 基礎配極

配極是一個把點變成線，線變成點的特殊變換。

Definition 3.2.1. 給定一圓 Ξ，設 O 為 Ξ 圓心。

- 對於任意一點 $P \neq O, P \notin \mathcal{L}_\infty$，我們定義 P 關於 Ξ 的**極線** (polar line) 為 $\odot(\overline{OP})$ 在反演變換 $\mathfrak{I}_\Xi$ 下的像 $\mathfrak{I}_\Xi(\odot(\overline{OP}))$。$O$ 關於 Ξ 的極線我們定為無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$。
- 對於任意一點 $P \in \mathcal{L}_\infty$，我們定義 P 關於 Ξ 的極線為過 O 垂直於 P 方向的直線 $O\infty_{\perp P}$。

我們把任意一點 P 關於 Ξ 的極線記為 $\mathfrak{p}_{\Xi}(P)$。

從定義中我們可以看出 $\mathfrak{p}_{\Xi}(P)$ 就是過 $\mathfrak{I}_{\Xi}(P)$ 且垂直於 OP 的直線（當 $P \neq O$ 時），也就是 $\mathfrak{I}_{\Xi}\big(\odot(\overline{OP})\big)$。當 Ξ 為一實圓且 P 位於 Ξ 外時，P 關於 Ξ 的極線就是 P 向 Ξ 引的兩條切線與 Ξ 的兩個切點的連線。

令 M 為 P 與 $P^{\mathfrak{I}_{\Xi}}$ 的中點。若 $P \notin \mathcal{L}_\infty$，則

$$\begin{aligned}\mathbf{Pow}_{\Xi}(M) &= \overline{OM}^2 - OP \cdot OP^{\mathfrak{I}_{\Xi}} \\ &= (\overline{OP}^2 + 2 \cdot OP \cdot PM + \overline{PM}^2) - OP \cdot OP^{\mathfrak{I}_{\Xi}} = \overline{PM}^2 = \mathbf{Pow}_P(M),\end{aligned}$$

即 M 位於 Ξ 與點圓 P 的根軸上。因此我們得到：

Proposition 3.2.2. 一點 $P \notin \mathcal{L}_\infty$ 關於一圓 Ξ 的極線為 Ξ 與點圓 P 的根軸關於 P 位似兩倍下的像。

若 Ξ 的半徑長為 $\sqrt{k}$，則當 $P \neq O$ 且 $P \notin \mathcal{L}_\infty$ 時，

$$\mathfrak{p}_{\Xi}(P) = \{Q \mid OP \cdot OQ = k\} \cup \{\infty_{\perp OP}\}.$$

從這個公式我們就（幾乎）可以得到：

Proposition 3.2.3 (極線互反, La Hire)**.** 對於任意圓 Ξ 及任意兩點 P, Q，

$$P \in \mathfrak{p}_{\Xi}(Q) \iff Q \in \mathfrak{p}_{\Xi}(P).$$

Proof. 若 $P, Q \neq O$ 且 $P, Q \notin \mathcal{L}_\infty$，則

$$P \in \mathfrak{p}_{\Xi}(Q) \iff OP \cdot OQ = k \iff Q \in \mathfrak{p}_{\Xi}(P).$$

若 $P = O$，則

$$P \in \mathfrak{p}_{\Xi}(Q) \iff Q \in \mathcal{L}_\infty = \mathfrak{p}_{\Xi}(O).$$

$Q = O$ 則同理。若 $P \in \mathcal{L}_\infty$，則

$$P \in \mathfrak{p}_{\Xi}(Q) \iff Q = O \text{ 或 } OQ \perp OP \iff Q \in \mathfrak{p}_{\Xi}(P).$$

$Q \in \mathcal{L}_\infty$ 則同理。 ■

Definition 3.2.4. 令 Ξ 為一圓，若兩點 P, Q 滿足 P 關於 Ξ 的極線過 Q，則我們稱 P, Q 關於 Ξ **共軛** (**conjugate**)。

注意到這個定義關於 P, Q 是對稱的。如果三點 P_1, P_2, P_3 共線，那麼 $\mathfrak{p}_\Xi(P_2)$ 與 $\mathfrak{p}_\Xi(P_3)$ 的交點 Q 滿足 Q 關於 Ξ 的極線 $\mathfrak{p}_\Xi(Q) = P_2P_3 \ni P_1$，所以 $Q \in \mathfrak{p}_\Xi(P_1)$。這告訴我們對於一條線 K 上的動點 P，$\mathfrak{p}_\Xi(P)$ 過定點。

Definition 3.2.5. 令 Ξ 為一圓，K 為平面上一線，在 K 上取動點 P，則 $\mathfrak{p}_\Xi(P)$ 過一定點，記為 $\mathfrak{p}_\Xi(K)$，我們稱其為 K 關於 Ξ 的**極點** (**pole**)。

由定義，我們得到了一些很常用的公式：

$$\mathfrak{p}_\Xi(P) \cap \mathfrak{p}_\Xi(Q) = \mathfrak{p}_\Xi(PQ), \quad \mathfrak{p}_\Xi(K)\mathfrak{p}_\Xi(L) = \mathfrak{p}_\Xi(K \cap L).$$

因為 $\mathfrak{p}_\Xi(\mathfrak{p}_\Xi(K)) = K$，我們從 (3.2.3) 還可以得到：

Proposition 3.2.6. 令 Ξ 為一圓，K, L 為平面上兩線，則

$$\mathfrak{p}_\Xi(K) \in L \iff \mathfrak{p}_\Xi(L) \in K.$$

Definition 3.2.7. 令 Ξ 為一圓，若兩線 K, L 滿足 $\mathfrak{p}_\Xi(K) \in L$ 上，則我們稱 K, L 關於 Ξ 共軛。

Example 3.2.8. 設不等邊三角形 ABC 的內切圓為 ω，ω 分別切 BC, CA, AB 於 D, E, F。令 X 為 EF 與 BC 的交點，P 為 AD 與 ω 的另一個交點。證明：XP 與 ω 相切。

Solution. 注意到 $X = EF \cap BC = \mathfrak{p}_\omega(A) \cap \mathfrak{p}_\omega(D)$，因此

$$P \in AD = \mathfrak{p}_\omega(X) \implies X \in \mathfrak{p}_\omega(P)$$

因為 P 位於 ω 上，所以 $P \in \mathfrak{p}_\omega(P)$ 且 $\mathfrak{p}_\omega(P)$ 是 P 關於 ω 的切線，故 XP 與 ω 相切。

Example 3.2.9 (2014 1J P3). 設 $\triangle ABC$ 的內切圓圓心為 I，且該內切圓分別與 CA, AB 邊切於點 E, F。令點 E, F 對 I 的對稱點分別為 G, H。設點 Q 為 GH 與 BC 的交點，並設點 M 為 BC 的中點。證明：IQ 與 IM 垂直。

Solution. 令 A' 為 A 關於 I 的對稱點，則由 AE, AF 與內切圓 ω 相切知 $A'G, A'H$ 與 ω 相切，即 GH 為 A 關於 ω 的極線 $\mathfrak{p}_\omega(A')$。如果令 D 為 ω 與 BC 的切點，那麼 $BC = \mathfrak{p}_\omega(D)$，因此 $Q = \mathfrak{p}_\omega(A') \cap \mathfrak{p}_\omega(D) = \mathfrak{p}_\omega(A'D)$。所以說 $IQ \perp A'D$，故原命題等價於 $A'D \parallel IM$。

如果令 D^* 為 D 關於 ω 的對徑點，D' 為 D 關於 M 的對稱點（即 A-旁切圓與 BC 的切點），則 $A'D \parallel AD^*$ 且 $IM \parallel D^*D'$（因為 I, M 分別為 $\overline{DD^*}$, $\overline{DD'}$ 中點）。因此我們只剩下證明 A, D^*, D' 共線，而這是一個很常見的引理，證明如下：

考慮以 A 為位似中心將 A-旁切圓 ω^a 送至 ω 的位似變換 $\mathfrak{h}$。令 E^a, F^a 分別為 ω^a 與 CA, AB 的切點，我們會發現 $\mathfrak{h}(E^a) = E, \mathfrak{h}(F^a) = F$。因此由

$$\measuredangle AE^aD' = \measuredangle ACI^a = \measuredangle AED^*, \quad \measuredangle D'F^aA = \measuredangle I^aBA = \measuredangle D^*FA,$$

$\mathfrak{h}(D') = D^*$，故 A, D^*, D' 共線。

Proposition 3.2.10. 給定一圓 Ξ。兩點 P, Q 關於 Ξ 共軛若且唯若直徑圓 $\odot(\overline{PQ})$ 與 Ξ 正交。

Proof. 由 (3.1.13)，$\odot(\overline{PQ})$ 與 Ξ 正交若且唯若 $P^{\mathfrak{I}_\Xi} \in \odot(\overline{PQ})$，而這等價於 $P^{\mathfrak{I}_\Xi}Q \perp OP$，即 $Q \in \mathfrak{I}_\Xi(P)$。 ■

Proposition 3.2.11. 令 Γ 為一圓，P 為一點。設 $\overline{AB}$ 為 Γ 上過 P 的一弦且 Q 為 AB 上一點，則 P, Q 關於 Γ 共軛若且唯若

$$(P, Q; A, B) = -1.$$

Proof. 若 P, Q 關於 Γ 共軛，則令 M 為 $\overline{AB}$ 中點，則由 $\measuredangle OMQ = 90^\circ = \measuredangle OP^{\mathfrak{I}_\Gamma}Q$ 知 $O, P^{\mathfrak{I}_\Gamma}, Q, M$ 共圓。因此

$$PA \cdot PB = \mathbf{Pow}_\Gamma(P) = PP^{\mathfrak{I}_\Gamma} \cdot PO = PQ \cdot PM,$$

故 $(P,Q;A,B)=-1$。另一邊的證明則是簡單的同一法。 ■

Definition 3.2.12. 令 Ξ 為一圓，若 $\triangle ABC$ 滿足 A, B, C 兩兩關於 Ξ 共軛（等價於 BC, CA, AB 兩兩關於 Ξ 共軛），則我們稱 $\triangle ABC$ 為關於 Ξ 的**自共軛三角形** (**self-conjugate triangle**)。

若 Ξ 的圓心為 O，則 $OA\perp BC$, $OB\perp CA$, $OC\perp AB$，因此 O 就是 $\triangle ABC$ 的垂心且 Ξ 的半徑長 $\sqrt{k}$ 滿足

$$OA\cdot OD=OB\cdot OE=OC\cdot OF=k,$$

其中 $\triangle DEF$ 為 $\triangle ABC$ 的垂足三角形。換句話說，對於任意 $\triangle ABC$，存在恰一圓 Ξ 讓 $\triangle ABC$ 為關於 Ξ 的自共軛三角形。除了垂心組以外，我們還可以用下面這個方法製造自共軛三角形。

Proposition 3.2.13. 令 Ξ 為一圓，P_1, P_2, P_3, P_4 為 Ξ 上四點，設

$$X=P_2P_3\cap P_1P_4,\quad Y=P_3P_1\cap P_2P_4,\quad Z=P_1P_2\cap P_3P_4,$$

則 $\triangle XYZ$ 為關於 Ξ 的自共軛三角形。

Proof. 我們證明 YZ 為 X 關於 Ξ 的極線。設 YZ 分別交 P_2P_3, P_1P_4 於 R, S，則由完全四線形的調和性質 (2.2.8) 知

$$(X,R;P_2,P_3)=(X,S;P_1,P_4)=-1.$$

因此再由 (3.2.11) 知 $R, S\in\mathfrak{p}_\Xi(X)$，所以 $\mathfrak{p}_\Xi(X)=RS=YZ$。 ■

因此一個直接推論就是：$\triangle XYZ$ 的垂心為 Ξ 的中心 O。

Example 3.2.14. 設四邊形 $ABCD$ 內接於圓 ω，對角線 AC, BD 交於 E，AB 交 CD 於 F，AD 交 BC 於 G。令 M 為 $\overline{FG}$ 中點，線段 EM 交 ω 於 T。證明：$\odot(FGT)$ 與 ω 相切。

Solution. 我們發現到如果 AC 與 EM 重合的話就會很好證明：這時候，不

妨假設 $T=C$，由 M 為 $\overline{FG}$ 中點及 (2.2.8) 或孟氏定理知 $BD \parallel FG$，因此由

$$\begin{aligned}\measuredangle(\mathbf{T}_C\odot(FGC),\mathbf{T}_C\omega) &= \measuredangle(\mathbf{T}_C\odot(FGC),CG)+\measuredangle(BC,\mathbf{T}_C\omega)\\ &= \measuredangle CFG+\measuredangle CDB = 0^\circ\end{aligned}$$

知 $\odot(FGT)$ 與 ω 相切。

所以問題就變成我們能不能重新在 ω 上取 A, B, C, D，使得 E, F, G 不動且滿足上面的性質。由 (3.2.13)，$\triangle EFG$ 是關於 ω 的自共軛三角形。令 $A'=T$，B', D' 分別為 FA', GA' 與 ω 的另一個交點，C' 為 FD' 與 ω 的另一個交點。由 (3.2.13)，我們發現 $E' := A'C' \cap B'D'$, $G' := A'D' \cap B'C'$ 皆位於 F 關於 ω 的極線 $\mathfrak{p}_\omega(F) = GE$ 上。這告訴我們

$$G' = A'D' \cap B'C' = GA' \cap B'C' \cap \mathfrak{p}_\omega(F) = GA' \cap GE = G.$$

所以再由 (3.2.13)，E' 位於 G 關於 ω 的極線 $\mathfrak{p}_\omega(G) = EF$ 上，我們得到 $E' = GE \cap EF = E$。

現在我們新作出來的 A', B', C', D' 滿足：$A'C' \cap B'D' = E, A'B' \cap C'D' = F$, $A'D' \cap B'C' = G$ 且 $A'C'$ 與 EM 重合，從而原命題成立。

Example 3.2.15 (2009 China TST Day1 P1). 令 ABC 為一三角形。在線段 BC 上取 D 點，使得 $\angle CAD = \angle ABC$。過 B, D 的圓 $\odot(O)$ 分別交 AB, AD 於 E, F。令 G 為 BF 和 DE 的交點，並令 M 為 AG 中點。試證：CM 垂直於 AO。

Solution. 由條件 $\angle CAD = \angle ABC$，CA 與 $\odot(ABD)$ 相切，故 C 位於 $\odot(O)$ 與點圓 A 的根軸上。透過 (3.2.13)，我們知道 G 位於 A 關於 $\odot(O)$ 的極線上。結合 (3.2.2)，$\overline{AG}$ 中點 M 位於 $\odot(O)$ 與點圓 A 的根軸上，因此 CM，作為 $\odot(O)$ 與點圓 A 的根軸，與 AO 垂直。

習題

Problem 1 (2014 ISL G3). 設 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，$AB > BC$，Ω 與 O 分別是 $\triangle ABC$ 的外接圓與外心。$\angle ABC$ 的角平分線再交 Ω 於 M 點。令 Γ 是以

BM 為直徑的圓。$\angle AOB$ 與 $\angle BOC$ 的角平分線分別交 Γ 於 P, Q 兩點。設 R 點落在直線 PQ 上，並滿足 $BR = MR$。證明：$BR \parallel AC$。

3.3 反演與配極下的交比

以下這個定理說明了配極變換為保交比變換，是一個經常使用的技巧。

Theorem 3.3.1. 令 Ξ 為一圓，五線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, L$ 分別為五點 P_1, P_2, P_3, P_4, A 關於 Ξ 的極線，則

$$A(P_\bullet) = L(\ell_\bullet).$$

Proof. 令 O 為 Ξ 的中心，$Q_i = L \cap \ell_i$，$K_i = AP_i$，則 $K_i = \mathfrak{p}_\Xi(Q_i)$，我們要證明 $(Q_\bullet) = (K_\bullet)$。我們分兩個情形：

Case 1. 若 $O \notin L$，則 $OQ_i \perp K_i$，因此

$$\measuredangle Q_iOQ_j = \measuredangle(OQ_i, OQ_j) = \measuredangle(K_i, K_j).$$

所以由交比的角度定義得

$$(Q_\bullet) = O(Q_\bullet) = (K_\bullet).$$

Case 2. 若 $O \in L$，作任意不過 O 的一線 ℓ，並令 Q_i' 為 Q_i 關於 ℓ 的垂足，K_i' 為 Q_i' 關於 Ξ 的極線。設 $R_i = K_i \cap K_i'$，則 R_1, R_2, R_3, R_4 共於一線 $O\infty_\ell$。所以有

$$(Q_\bullet) = (Q_\bullet') = (K_\bullet') = (R_\bullet) = (K_\bullet). \qquad \blacksquare$$

那麼我們其實就可以用上面這個定理來證明反演也保交比。

Proposition 3.3.2. 對於任意共線或共圓四點 P_1, P_2, P_3, P_4，

$$(P_\bullet^{\mathfrak{I}}) = (P_1^{\mathfrak{I}}, P_2^{\mathfrak{I}}; P_3^{\mathfrak{I}}, P_4^{\mathfrak{I}}) = (P_\bullet).$$

注意到因為 P_1, P_2, P_3, P_4 共線或共圓（共廣義圓），所以 $P_1^{\mathfrak{I}}, P_2^{\mathfrak{I}}, P_3^{\mathfrak{I}}, P_4^{\mathfrak{I}}$ 也共線或共圓，我們才可以定義交比。

Proof. 設反演中心為 O。我們分四種情形：

Case 1. 若 P_1, P_2, P_3, P_4 共於一線 ℓ 且 $O \in \ell$，則由 (3.3.1) 得

$$(P_\bullet) = (\mathfrak{p}_\Xi(P_\bullet)) = \ell(\mathfrak{p}_\Xi(P_\bullet)) = (P_\bullet^{\mathfrak{I}}).$$

Case 2. 若 P_1, P_2, P_3, P_4 共於一線 ℓ 且 $O \notin \ell$，則 $O, P_1^{\mathfrak{I}}, P_2^{\mathfrak{I}}, P_3^{\mathfrak{I}}, P_4^{\mathfrak{I}}$ 共圓，所以

$$(P_\bullet^{\mathfrak{I}}) = (OP_\bullet^{\mathfrak{I}}) = (OP_\bullet) = (P_\bullet).$$

Case 3. 若 P_1, P_2, P_3, P_4 共於一圓 Γ 且 $O \in \Gamma$，則 $P_1^{\mathfrak{I}}, P_2^{\mathfrak{I}}, P_3^{\mathfrak{I}}, P_4^{\mathfrak{I}}$ 共線且不過 O，所以由 *Case 1.* 得到 $(P_\bullet) = (P_\bullet^{\mathfrak{I}})$。

Case 4. 若 P_1, P_2, P_3, P_4 共於一圓 Γ 且 $O \notin \Gamma$，則由於交比在位似下不變，因此我們不妨取 $\mathbf{Pow}_\Gamma(O) \neq 0$ 作為反演冪，這樣就有 $P_i^{\mathfrak{I}} \in \Gamma$。令 $Q_{ij} = P_iP_j^{\mathfrak{I}} \cap P_i^{\mathfrak{I}}P_j$，由 (3.2.13)，$Q_{ij}$ 位於 O 關於 Γ 的極線 $\mathfrak{p}_\Gamma(O)$ 上。所以由 Q_{14}, Q_{24}, Q_{34} 共線我們有

$$(P_\bullet) = P_4^{\mathfrak{I}}(P_\bullet) = P_1(P_\bullet^{\mathfrak{I}}) = (P_\bullet^{\mathfrak{I}}). \qquad \blacksquare$$

作為一個反演保交比的應用，我們現在來證明之前欠的開氏定理 (0.4.20) 逆定理：對於四個圓 $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C, \Gamma_D$，令 d_{IJ}^+ 為 Γ_I 與 Γ_J 的外公切線長，d_{IJ}^- 為 Γ_I 與 Γ_J 的內公切線長。存在一圓 Ω 與四圓 $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C, \Gamma_D$ 相切若

$$d_{BC}d_{AD} \pm d_{CA}d_{BD} \pm d_{AB}d_{CD} = 0,$$

其中

$$d_{IJ} = \begin{cases} d_{IJ}^+, & \text{若 } \Gamma_I, \Gamma_J \text{ 與 } \Omega \text{ 皆外切或皆內切，} \\ d_{IJ}^-, & \text{若 } \Gamma_I, \Gamma_J \text{ 與 } \Omega \text{ 一外切一內切。} \end{cases}$$

我們先證明以下引理：

Lemma 3.3.3. 令 r_I, r_J 分別為 Γ_I, Γ_J 的半徑長，則比例

$$\frac{(d_{IJ}^\pm)^2}{r_Ir_J}$$

為反演下的不變量。

Proof. 令 O_I, O_J 分別為 Γ_I, Γ_J 的圓心，P_I, Q_I 為連心線 O_IO_J 與 Γ_I 的交點，P_J, Q_J 為連心線 O_IO_J 與 Γ_J 的交點，則

$$\begin{aligned}\frac{(d_{IJ}^{\pm})^2}{r_Ir_J} &= \frac{\overline{O_IO_J}^2 - (r_I \pm r_J)^2}{r_Ir_J} \\ &= 4 \cdot \frac{(\overline{O_IO_J} + r_I \pm r_J)(\overline{O_IO_J} - r_I \mp r_J)}{(2r_I)(2r_J)} \\ &= 4 \cdot \frac{\overline{P_IP_J} \cdot \overline{Q_IQ_J}}{\overline{P_IQ_I} \cdot \overline{P_JQ_J}} \quad \text{or} \quad 4 \cdot \frac{\overline{P_IQ_J} \cdot \overline{Q_IP_J}}{\overline{P_IQ_I} \cdot \overline{P_JQ_J}} \\ &= 4 \cdot |(P_I, Q_J; P_J, Q_I)| \quad \text{or} \quad 4 \cdot |(P_I, P_J; Q_J, Q_I)|. \end{aligned} \tag{$\spadesuit$}$$

設圓 ω 與 Γ_I, Γ_J 正交且 ω 與 Γ_I 交於 R_I, S_I，ω 與 Γ_J 交於 R_J, S_J。則 ω 的圓心位於 Γ_I 與 Γ_J 的根軸 L 上。設 L 與 ω 交於其中一點 A，則存在以 A 為中心且保持 Γ_I, Γ_J 的反演，將 ω 送至一直線 ℓ。因為 ω 與 Γ_I, Γ_J 正交，所以 ℓ 也與 Γ_I, Γ_J 正交，即 $\ell = O_IO_J$。由於反演保交比，

$$\{(P_I, Q_J; P_J, Q_I), (P_I, P_J; Q_J, Q_I)\} = \{(R_I, S_J; R_J, S_I), (R_I, R_J; S_J, S_I)\} \tag{$\clubsuit$}$$

若 Γ_I', Γ_J' 為 Γ_I, Γ_J 關於某點 X 反演下的像，類似地定義 $r_I', r_J', d_{IJ}^{\pm'}$。我們知道 O_IO_J 會反演至與 Γ_I', Γ_J' 正交的圓 ω'，所以 ω' 與 Γ_I' 交於 P_I, Q_I 關於 X 反演下的像 P_I', Q_I'，ω' 與 Γ_J' 交於 P_J, Q_J 關於 X 反演下的像 P_J', Q_J'。由 ($\spadesuit$), ($\clubsuit$) 及反演保交比 (3.3.2)，

$$\begin{aligned}\left\{\frac{(d_{IJ}^{+})^2}{r_Ir_J}, \frac{(d_{IJ}^{-})^2}{r_Ir_J}\right\} &= \{4 \cdot |(P_I, Q_J; P_J, Q_I)|, 4 \cdot |(P_I, P_J; Q_J, Q_I)|\} \\ &= \{4 \cdot |(P_I', Q_J'; P_J', Q_I')|, 4 \cdot |(P_I', P_J'; Q_J', Q_I')|\} \\ &= \left\{\frac{(d_{IJ}^{+'})^2}{r_I'r_J'}, \frac{(d_{IJ}^{-'})^2}{r_I'r_J'}\right\}.\end{aligned}$$

因為 $d_{IJ}^{+} > d_{IJ}^{-}, d_{IJ}^{+'} > d_{IJ}^{-'}$，所以

$$\frac{(d_{IJ}^{+})^2}{r_Ir_J} = \frac{(d_{IJ}^{+'})^2}{r_I'r_J'}, \quad \frac{(d_{IJ}^{-})^2}{r_Ir_J} = \frac{(d_{IJ}^{-'})^2}{r_I'r_J'}$$

為反演下的不變量。 ■

我們現在來證明逆定理：

Proof. 不妨假設 Γ_D 的半徑長 r_D 最小。我們先同時將 Γ_I 的半徑伸縮 r_D（以我們想要的方向），這會保持 Ω 的存在性（也將 Ω 的半徑伸縮 r_D），這樣我

們就可以假設 Γ_D 為一點 D。將原命題對 D 反演，我們希望找到一直線與反演後的圓 $\Gamma'_A, \Gamma'_B, \Gamma'_C$ 相切。設 ρ^2 為反演冪，這時候

$$\begin{aligned}0 &= d_{BC}d_{AD} \pm d_{CA}d_{BD} \pm d_{AB}d_{CD} \\ &= \left(d'_{BC}\sqrt{\frac{r_Br_C}{r'_Br'_C}}\right)d_{AD} \pm \left(d'_{CA}\sqrt{\frac{r_Cr_A}{r'_Cr'_A}}\right)d_{BD} \pm \left(d'_{AB}\sqrt{\frac{r_Ar_B}{r'_Ar'_B}}\right)d_{CD} \\ &= \sqrt{\frac{r_Ar_Br_C}{r'_Ar'_Br'_C}}\left(d'_{BC}d_{AD}\sqrt{\frac{r'_A}{r_A}} \pm d'_{CA}d_{BD}\sqrt{\frac{r'_B}{r_B}} \pm d'_{AB}d_{CD}\sqrt{\frac{r'_C}{r_C}}\right).\end{aligned}$$

其中，若 $r_I = 0$，我們取 r'_I/r_I 為 ρ^2/d_{ID}^2 使得上式仍然成立。由 (3.1.18)，我們有 $r'_I = \dfrac{\rho^2 r_I}{d_{ID}^2}$，故 $d_{ID} = \rho\sqrt{\dfrac{r_I}{r'_I}}$。因此

$$0 = d'_{BC}d_{AD}\sqrt{\frac{r'_A}{r_A}} \pm d'_{CA}d_{BD}\sqrt{\frac{r'_B}{r_B}} \pm d'_{AB}d_{CD}\sqrt{\frac{r'_C}{r_C}} = \rho\left(d'_{BC} \pm d'_{CA} \pm d'_{AB}\right).$$

跟之前一樣我們再將 $\Gamma'_A, \Gamma'_B, \Gamma'_C$ 其中一圓縮為點，假設 Γ'_A 縮為 A'。取 Γ'_B 與 Γ'_C 的公切線段 $\overline{QR}$ 使得 $Q \in \Gamma'_B$, $R \in \Gamma'_C$, $\overline{QR} = d'_{BC}$，在 QR 上取點 P 使得 $\overline{RP} = d'_{CA}$, $\overline{PQ} = d'_{AB}$。我們知道滿足 $\mathbf{Pow}_{\Gamma'_B}(S) = d'_{AB}$ 的 S 的軌跡是一個以 O'_B 為圓心且過 A, R 的圓，同樣地，滿足 $\mathbf{Pow}_{\Gamma'_C}(S) = d'_{CA}$ 的 S 的軌跡是一個以 O'_C 為圓心且過 A, R 的圓。由於圓心相異因此這兩個圓至多交於兩點，即 R 與 R 關於 $O'_BO'_C$ 的對稱點 R'。所以 $A = R$ 或 R'，因此 A 位於 Γ'_B 與 Γ'_C 的公切線上。 ■

Example 3.3.4 (費爾巴哈定理)**.** 對於任意 $\triangle ABC$，其九點圓 ε 與內切圓 ω 內切，與三個旁切圓 $\omega^a, \omega^b, \omega^c$ 外切。ε 與 ω 的切點被稱為 $\triangle ABC$ 的**費爾巴哈點** (**Feuerbach point**)，ε 與 $\omega^a, \omega^b, \omega^c$ 的切點被稱為 $\triangle ABC$ 的***A*-, *B*-, *C*-費爾巴哈點**。

：當 $\triangle ABC$ 為正三角形時，ε 與 ω 重合，因此我們並不能定義 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈點，但還是可以定義它的 A-, B-, C-費爾巴哈點。

Solution. 我們只證明 ε 與 ω 相切。令 $\triangle M_aM_bM_c, \triangle DEF$ 分別為 $\triangle ABC$ 的中點三角形及切點三角形，我們希望存在一圓過 M_a, M_b, M_c 且與 $\odot(DEF)$ 相切。所以由開氏定理逆定理我們只需要證明（由於 M_aD, M_bE, M_cF 是 $\odot(DEF)$ 的切線）

$$\overline{M_bM_c} \cdot \overline{M_aD} \pm \overline{M_cM_a} \cdot \overline{M_bE} \pm \overline{M_cM_a} \cdot \overline{M_cF} = 0.$$

令 $a=\overline{BC}, b=\overline{CA}, c=\overline{AB}$，不妨假設 $a\geq b\geq c$，則

$$\begin{aligned}&\overline{M_bM_c}\cdot\overline{M_aD}\pm\overline{M_cM_a}\cdot\overline{M_bE}\pm\overline{M_cM_a}\cdot\overline{M_cF}\\&=\frac{a}{2}\cdot\frac{b-c}{2}\pm\frac{b}{2}\cdot\frac{a-c}{2}\pm\frac{c}{2}\cdot\frac{a-b}{2}=0.\end{aligned}$$

因此 ε 與 ω 相切。

費爾巴哈點的存在性有比較直接的構造，而且其實還滿重要的，所以這邊就順便給出方法與證明：令 I, I^a 分別為 $\triangle ABC$ 的內心與 A-旁心，X 為 D 關於 AI 的對稱點，Fe 為 M_aX 與內切圓 ω 的另一個交點，我們證明 Fe 就是 ε 與 ω 的切點。

令 $T=AI\cap BC$，則 TX 與 ω 相切。考慮以 M_a 為中心 $\overline{M_aD}^2$ 為冪的反演變換 $\mathfrak{I}$，則 $\mathfrak{I}(\omega)=\omega$，因此由反演保相切我們只需證明 $\mathfrak{I}(TX)=\varepsilon$。

令 D' 為 D 關於 M_a 的對稱點（即 A-旁切圓與 BC 切點），H_a 為 A 關於 BC 的垂足。則

$$(H_a,T;D,D')\overset{\infty_{\perp BC}}{=}(A,T;I,I^a)=B(A,C;I,I^a)=-1.$$

所以我們有 $M_aH_a\cdot M_aT=\overline{M_aD}^2$，這告訴我們 $\mathfrak{I}(T)=H_a$，故 $\mathfrak{I}(TX)$ 是個過 H_a, M_a 的圓且其在 M_a 的切線平行於 TX。所以我們只需證明 ε 在 M_a 的切線平行於 TX 就好。

$$\measuredangle(H_aM_a,TX)=2\cdot\measuredangle H_aTA=2\cdot(\measuredangle H_aAI+90^\circ)=\measuredangle H_aAI+\measuredangle IAO=\measuredangle H_aAO,$$

其中 O 是 $\triangle ABC$ 的外心（這邊我們用到了 AH_a, AO 為關於 $\angle BAC$ 的等角線）。令 E_a 為 AH_a 與 ε 的另一個交點，即 A 與 $\triangle ABC$ 的垂心 H 的中點，我們有 $E_aM_a\parallel AO$，故

$$\measuredangle(H_aM_a,TX)=\measuredangle H_aAO=\measuredangle H_aE_aM_a,$$

因此 TX 與 $\odot(H_aM_aE_a)=\varepsilon$ 相切。

更多關於費爾巴哈點的介紹，見第 8.2 節。

3.4 阿波羅尼奧斯圓

Proposition 3.4.1. 對於任意兩點 A, B 及一個正實數 r，集合

$$\Gamma_r^{A,B} = \{P \mid \overline{PA} = r \cdot \overline{PB}\}$$

為一廣義圓，且 A, B 為關於 $\Gamma_r^{A,B}$ 的反演點對。我們稱 $\Gamma_r^{A,B}$ 為 (A, B) 的 ***r*-阿波羅尼奧斯圓** (**Apollonian circle**)。

Proof. 若 $r = 1$，則 Γ_r 為 $\overline{AB}$ 的中垂線，此時命題顯然成立。若 $r \neq 1$，在 AB 上取兩點 P_+, P_- 滿足

$$\frac{AP_+}{P_+B} = r, \quad \frac{AP_-}{P_-B} = -r,$$

則 $(A, B; P_+, P_-) = -1$ 且 P_+, P_- 為 Γ_r 與 AB 的兩個交點。我們知道 $P \in \Gamma_r^{A,B} \setminus AB$ 若且唯若 PP_+ 為 $\angle APB$ 的角平分線，由 (2.2.4)，這又等價於 $\measuredangle P_-PP_+$ 為直角。因此 $\Gamma_r^{A,B}$ 是以 $\overline{P_+P_-}$ 為直徑的圓。

因為 $(A, B; P_+, P_-) = 1$，由反演或配極的調和性質 (3.2.11)，我們得到 A, B 為關於 $\Gamma_r^{A,B} = \odot(\overline{P_+P_-})$ 的反演點對。 ■

顯然地，我們有

- $\Gamma_r^{A,B} = \Gamma_{r^{-1}}^{B,A}$；
- $\Gamma_r^{A,B}$ 與 AB 正交；
- 任何使 A, B 為反演點對的（實）圓一定是某個 (A, B) 的阿波羅尼奧斯圓。

藉由一點計算，我們可以得到：

Proposition 3.4.2. 對於任意兩點 A, B 及一個正實數 r，(A, B) 的 r-阿波羅尼奧斯圓 $\Gamma_r^{A,B}$ 的圓心 O_r 及半徑長 ρ_r 滿足

$$\frac{O_rA}{O_rB} = r^2, \quad \rho_r = \frac{r}{|r^2 - 1|} \cdot \overline{AB}.$$

Proof. 在 $\Gamma_r^{A,B}$ 上取一點 P，則 A, B 為關於 $\Gamma_r^{A,B}$ 的反演點對告訴我們 $\triangle O_rAP \overset{-}{\sim} \triangle O_rPB$。因此由 O_r 位於線段 $\overline{AB}$ 外，

$$\frac{O_rA}{O_rB} = \frac{\overline{O_rA}}{\overline{O_rB}} = \frac{\overline{O_rA}}{\overline{O_rP}} \cdot \frac{\overline{O_rP}}{\overline{O_rB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = r^2.$$

結合

$$AO_r \cdot AB = \mathrm{Pow}_{\Gamma_r}(A) = \overline{O_rA}^2 - \rho_r^2, \quad \overline{O_rA} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \overline{O_rP} = r \cdot \rho_r,$$

我們得到

$$\overline{AB} = \frac{|r^2 - 1|}{r} \cdot \rho_r,$$

即為所求。 ■

由於 A, B 為關於 $\Gamma_r^{B,C}$ 的反演點對，(3.1.11) 告訴我們對於任意過 A, B 兩點的圓 Ω，$\Gamma_r^{A,B}$ 與 Ω 正交。特別地，我們有：

Proposition 3.4.3. 給定任意兩點 A, B 及一個正實數 r。令 P 為 (A, B) 的 r-阿波羅尼奧斯圓 $\Gamma_r^{A,B}$ 上的一點，則 $\Gamma_r^{A,B}$ 與 $\odot(PAB)$ 正交。

Proposition 3.4.4. 令 O 為 $\triangle ABC$ 的外心。對於正實數 r, s, t，O 關於三個阿波羅尼奧斯圓 $\Gamma_r^{B,C}, \Gamma_s^{C,A}, \Gamma_t^{A,B}$ 等冪，且 $\Gamma_r^{B,C}, \Gamma_s^{C,A}, \Gamma_t^{A,B}$ 共軸若且唯若 $rst = 1$。

Proof. 令 O_r, O_s, O_t 分別為 $\Gamma_r^{B,C}, \Gamma_s^{C,A}, \Gamma_t^{A,B}$ 的圓心，Ω 為 $\triangle ABC$ 的外接圓。由 (3.4.3)，Ω 與 $\Gamma_r^{B,C}$ 正交，因此正交的等價敘述 (3.1.10) 告訴我們 $\mathbf{Pow}_{\Gamma_r^{B,C}}(O) = R^2$，其中 R 為 Ω 的半徑長。同理有

$$\mathbf{Pow}_{\Gamma_s^{C,A}}(O) = \mathbf{Pow}_{\Gamma_t^{A,B}} = R^2,$$

故 O 關於 $\Gamma_r^{B,C}, \Gamma_s^{C,A}, \Gamma_t^{A,B}$ 等冪。

由於 O 不在無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 上，$\Gamma_r^{B,C}, \Gamma_s^{C,A}, \Gamma_t^{A,B}$ 共軸若且唯若圓心 O_r, O_s, O_t 共線。由孟氏定理及 (3.4.2)，這又等價於

$$-1 = \frac{BO_r}{O_rC} \cdot \frac{CO_s}{O_sA} \cdot \frac{AO_t}{O_tB} = (-r^2) \cdot (-s^2) \cdot (-t^2) = -(rst)^2,$$

即 $rst = 1$。 ■

Remark. 當 A, B, C 共線時，$\Gamma_r^{B,C}, \Gamma_s^{C,A}, \Gamma_t^{A,B}$ 共軸若且唯若 $rst = 1$ 依舊是對的，只是就不能用上面的論證（因為外心 O 位於無窮遠線上，而且退化三角形也不能開孟氏）。

Definition 3.4.5. 給定兩點 A, B 及一點 P，我們定義 (A, B) 的 ***P*-阿波羅尼奥斯圓** $\Gamma_P^{A,B}$ 為（唯一）過 P 的 (A, B)-阿波羅尼奥斯圓 $\Gamma_r^{A,B}$，其中 $r = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$。顯然地，這個定義關於 A, B 是對稱的，意即，$\Gamma_P^{A,B} = \Gamma_P^{B,A}$。

給定兩點 A, B。對於兩點 P, Q，我們知道

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} \iff \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}}.$$

因此 $\Gamma_P^{A,B} = \Gamma_Q^{A,B}$ 若且唯若 $\Gamma_A^{P,Q} = \Gamma_B^{P,Q}$。由 (3.4.3)，我們知道 $\Gamma_P^{A,B}$ 與 $\odot(PAB)$ 正交。

Proposition 3.4.6. 給定 $\triangle ABC$。令 $\mathfrak{I}$ 為對 A 反演的變換（使得 $\mathfrak{I}(B) = C$）。則

(i) $\mathfrak{I}(\Gamma_A^{B,C})$ 是 $\overline{BC}$ 的中垂線；

(ii) $\mathfrak{I}(\Gamma_B^{C,A})$ 是以 B 為圓心且過 C 的圓；

(iii) $\mathfrak{I}(\Gamma_C^{A,B})$ 是以 C 為圓心且過 B 的圓。

Proof. 因為 $\Gamma_A^{B,C}$ 同時與 BC, $\odot(ABC)$ 正交（由 (3.4.3)）且 $\Gamma_A^{B,C}$ 經過 A，$\ell_A = \mathfrak{I}(\Gamma_A^{B,C})$ 是一條與 $\mathfrak{I}(BC) = \odot(ABC)$, $\mathfrak{I}(\odot(ABC)) = BC$ 正交的直線，故 ℓ_A 是經過 $\triangle ABC$ 的外心 O 且垂直於 BC 的直線，即 $\overline{BC}$ 的中垂線。

因為 $\Gamma_B^{C,A}$ 同時與 CA, $\odot(ABC)$ 正交且 $\Gamma_B^{C,A}$ 經過 B，$\mathfrak{I}(\Gamma_B^{C,A})$ 是一個與 $\mathfrak{I}(CA) = CA$, $\mathfrak{I}(\odot(ABC)) = BC$ 正交，且經過 $\mathfrak{I}(B) = C$ 的圓，即以 B 為圓心且過 C 的圓。同理，$\mathfrak{I}(\Gamma_C^{A,B})$ 是以 C 為圓心且過 B 的圓。 ■

Corollary 3.4.7. 對於 $\triangle ABC$，三個阿波羅尼奥斯圓 $\Gamma_A^{B,C}, \Gamma_B^{C,A}, \Gamma_C^{A,B}$ 共於兩點 S_1, S_2，且 S_1, S_2 為關於 $\odot(ABC)$ 的反演點對。

Proof. 令 $\mathfrak{I}$ 為對 A 反演的變換。取 T_1, T_2 使得 $\triangle T_1BC, \triangle T_2BC$ 為正三角形。

由 (3.4.6)，我們發現 $\mathfrak{C}(\Gamma_A^{B,C}), \mathfrak{C}(\Gamma_B^{C,A}), \mathfrak{C}(\Gamma_C^{A,B})$ 共於 T_1, T_2，故 $\Gamma_A^{B,C}, \Gamma_B^{C,A}, \Gamma_C^{A,B}$ 共於 $S_1 = \mathfrak{C}(T_1), S_2 = \mathfrak{C}(T_2)$。

由 (3.4.4)，O 關於 $\Gamma_A^{B,C}, \Gamma_B^{C,A}, \Gamma_C^{A,B}$ 等冪，且冪為 R^2，其中 R 為 $\odot(ABC)$ 的半徑長。因此 O, S_1, S_2 共線且

$$OS_1 \cdot OS_2 = \mathbf{Pow}_{\Gamma_A^{B,C}}(O) = R^2,$$

即 S_1, S_2 為關於 $\odot(ABC)$ 的反演點對。 ■

因為我們知道 $S_1 \neq S_2$，所以 S_1, S_2 一個落在 $\odot(ABC)$ 內，另一個落在 $\odot(ABC)$ 外。不妨假設 S_1 落在 $\odot(ABC)$ 內。

Definition 3.4.8. 給定 $\triangle ABC$。令 S_1, S_2 為三個阿波羅尼奧斯圓 $\Gamma_A^{B,C}, \Gamma_B^{C,A}, \Gamma_C^{A,B}$ 的兩個交點，其中 S_1 位於 $\odot(ABC)$ 內，S_2 位於 $\odot(ABC)$ 外。我們稱 S_1 為 $\triangle ABC$ 的**第一等力點** (**first isodynamic point**)，S_2 為 $\triangle ABC$ 的**第二等力點** (**second isodynamic point**)。

Proposition 3.4.9. 給定 $\triangle ABC$，分別以 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 為邊長向 $\triangle ABC$ 外（內）側作正三角形 $\triangle A_{1(2)}BC, \triangle B_{1(2)}CA, \triangle C_{1(2)}AB$。令 S_1, S_2 為 $\triangle ABC$ 的第一等力點及第二等力點，則 $AA_{1(2)}, BB_{1(2)}, CC_{1(2)}$ 共於 $S_1(S_2)$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 $F_1(F_2)$。

Proof. 因為 S_1 落在 $\odot(ABC)$ 內，其對 A 反演下的像 $T_1 = \mathfrak{C}(S_1)$ 會與 A 在 BC 的異側（令 O 為 $\triangle ABC$ 的外心。由反演的長度計算 (3.1.2)，我們有

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{A\mathfrak{C}(O)} \cdot \overline{AT_1}} \cdot \overline{\mathfrak{C}(O)T_1} = \overline{OS_1} < \overline{OA} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{A\mathfrak{C}(O)}} \implies \overline{\mathfrak{C}(O)T_1} < \overline{AT_1},$$

且注意到 $\mathfrak{C}(O)$ 為 A 關於 BC 的對稱點），而 S_2 對 A 反演下的像 $T_2 = \mathfrak{C}(S_2)$ 則會與 A 在 BC 的同側。因此由 (3.4.7) 的證明，$T_1 = A_1, T_2 = A_2$。這告訴我們 $AS_{1(2)}, AA_{1(2)}$ 為關於 $\angle BAC$ 的等角線，即 $A, F_{1(2)}, A_{1(2)}$ 共線。同理，我們有 $B, F_{1(2)}, B_{1(2)}$、$C, F_{1(2)}, C_{1(2)}$ 共線。故 $AA_{1(2)}, BB_{1(2)}, CC_{1(2)}$ 共於 $F_1(F_2)$。 ■

由

$$\measuredangle BAB_1 = \measuredangle BAC + 60^\circ = \measuredangle C_1AC \pmod{360^\circ}, \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{B_1A}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{CA}},$$

$\triangle ABB_1 \overset{+}{\sim} \triangle AC_1C$。因此

$$\measuredangle BF_1C = \measuredangle(BB_1, C_1C) = \measuredangle(AB, AC_1) = 120°.$$

同理有 $\measuredangle CF_1A = \measuredangle AF_1B = 120°$。類似地，$\measuredangle BF_2C = \measuredangle CF_2A = \measuredangle AF_2B = 60°$。所以我們定義：

Definition 3.4.10. 給定 $\triangle ABC$（以逆時針標號）。取兩點 F_1, F_2 使得

$$\measuredangle BF_iC = \measuredangle CF_iA = \measuredangle AF_iB = -i \cdot 60°.$$

我們稱 F_1 為 $\triangle ABC$ 的**第一等角點** (**first isogonic center**)，F_2 為 $\triangle ABC$ 的**第二等角點** (**second isogonic center**)。

而 (3.4.9) 告訴我們等力點與等角點為等角共軛點對。

Proposition 3.4.11. 給定 $\triangle ABC$ 與 $i \in \{1, 2\}$。我們有 $\triangle ABC$ 的第 i 等力點 S_i 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形為正三角形。

Proof. 令 $\triangle S_{ia}S_{ib}S_{ic}$ 為 S_i 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，則

$$\measuredangle S_{ib}S_{ia}S_{ic} = \measuredangle(\perp CF_i, \perp BF_i) = i \cdot 60°,$$

同理有 $\measuredangle S_{ic}S_{ib}S_{ia} = \measuredangle S_{ia}S_{ic}S_{ib} = i \cdot 60°$，因此 $\triangle S_{ia}S_{ib}S_{ic}$ 為正三角形。 ■

3.5 阿波羅尼奧斯問題

這個問題要探討的是如何在給定三圓 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 的情況下，作出所有與這三圓相切的圓。

假設 Ω 與 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 相切，我們先來看看 Ω 有哪些性質。

Proposition 3.5.1. 令 R 為 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 的根心，T_i 為 Ω 與 Γ_i 的切點，P_i 為 RT_i 關於 Γ_i 的極點。則 P_1, P_2, P_3 共線。事實上，如果令 $\mathfrak{I}$ 是以 R 為中心，$k = \mathbf{Pow}_{\Gamma_i}(R)$ 為冪的反演變換，那麼 P_1, P_2, P_3 共於 $\Omega, \Omega^{\mathfrak{I}}$ 的根軸 ℓ 上。

Proof. 由於 $\Gamma_1^{\mathfrak{I}} = \Gamma_1, \Gamma_2^{\mathfrak{I}} = \Gamma_2, \Gamma_3^{\mathfrak{I}} = \Gamma_3$，$\Omega^{\mathfrak{I}}$ 也是一個與 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 皆相切的圓。注意到 $\Omega^{\mathfrak{I}}$ 與 $\Gamma_i^{\mathfrak{I}}$ 的切點為 $T_i^{\mathfrak{I}}$。由於 P_iT_i 為 Ω 與 Γ_i 的根軸且 $P_iT_i^{\mathfrak{I}}$ 為 $\Omega^{\mathfrak{I}}$ 與 Γ_i 的根軸，P_i 為 $\Omega, \Omega^{\mathfrak{I}}, \Gamma_i$ 的根心，因此 P_i 位於 $\Omega, \Omega^{\mathfrak{I}}$ 的根軸 ℓ 上。 ■

透過上面這個性質，我們知道 ℓ 關於 Γ_i 的極點 Q_i 位於 RT_i 上。

Proposition 3.5.2. 延續 (3.5.1) 的標號。令 $T_i^{\mathfrak{I}}$ 為 $\Omega^{\mathfrak{I}}$ 與 Γ_i 的切點，則 T_iT_j 與 $T_i^{\mathfrak{I}}T_j^{\mathfrak{I}}$ 交於 Γ_i 與 Γ_j 的其中一個位似中心 U_{ij}，且 U_{ij} 位於 Ω 與 $\Omega^{\mathfrak{I}}$ 的根軸 ℓ 上。

Proof. 因為 T_i 為 Ω 與 Γ_i 的其中一個位似中心，T_j 為 Ω 與 Γ_j 的其中一個位似中心，所以由 Monge 定理 (1.1.12)，T_iT_j 過 Γ_i 與 Γ_j 的其中一個位似中心。同理，$T_i^{\mathfrak{I}}T_j^{\mathfrak{I}}$ 過 Γ_i 與 Γ_j 的其中一個位似中心。以下證明這兩個位似中心是同一個：這等價於證明 $O_iO_j, T_iT_j, T_i^{\mathfrak{I}}T_j^{\mathfrak{I}}$ 共點。令 O_i 為 Γ_i 的圓心，$O, O^{\mathfrak{I}}$ 分別為 $\Omega, \Omega^{\mathfrak{I}}$ 的圓心。注意到 $\triangle OT_iT_j$ 與 $\triangle O^{\mathfrak{I}}T_i^{\mathfrak{I}}T_j^{\mathfrak{I}}$ 有透視中心 R。由迪沙格定理 (1.1.1)，

$$T_iT_j \cap T_i^{\mathfrak{I}}T_j^{\mathfrak{I}}, \quad O_j = T_jO \cap T_j^{\mathfrak{I}}O^{\mathfrak{I}}, \quad O_i = OT_i \cap O^{\mathfrak{I}}T_i^{\mathfrak{I}}$$

共線，即 $O_iO_j, T_iT_j, T_i^{\mathfrak{I}}T_j^{\mathfrak{I}}$ 共點。

由於 T_iT_j 為 Ω 與 $\odot(T_iT_jT_i^{\mathfrak{I}}T_j^{\mathfrak{I}})$ 的根軸且 $T_i^{\mathfrak{I}}T_j^{\mathfrak{I}}$ 為 $\Omega^{\mathfrak{I}}$ 與 $\odot(T_iT_jT_i^{\mathfrak{I}}T_j^{\mathfrak{I}})$ 的根軸，U_{ij} 為 $\Omega, \Omega^{\mathfrak{I}}, \odot(T_iT_jT_i^{\mathfrak{I}}T_j^{\mathfrak{I}})$ 的根心，因此 U_{ij} 也位於 Ω 與 $\Omega^{\mathfrak{I}}$ 的根軸 ℓ 上。 ■

由 Monge 定理 (1.1.12)，$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 兩兩之間的位似中心 $O_{ij,\pm}$ 構成完全四線形 $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ 的六個頂點，其中

$$\ell_1 = O_{23,+}O_{31,-}O_{12,-}, \quad \ell_2 = O_{23,-}O_{31,+}O_{12,-},$$
$$\ell_3 = O_{23,-}O_{31,-}O_{12,+}, \quad \ell_4 = O_{23,+}O_{31,+}O_{12,+}.$$

所以由 (3.5.2)，Ω 與 $\Omega^{\mathfrak{I}}$ 的根軸 ℓ 一定是 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ 中的其中一條。

我們現在已經知道 Ω 的大部分資訊了，所以現在要從位似中心構成的直線 $\ell = \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ 來反推 Ω：令 R 為 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 的根心，Q_i 為 ℓ 關於 Γ_i 的極點。如果 RQ_i 與 Γ_i 沒有交點，那麼我們是無法造出 Ω 的，所以假設對

於任意 i，RQ_i 與 Γ_i 都有交點 $T_i, T_i^{\mathfrak{I}}$。現在，我們希望可以分出 $T_i, T_i^{\mathfrak{I}}$ 使得 $\odot(T_1T_2T_3)$, $\odot(T_1^{\mathfrak{I}}T_2^{\mathfrak{I}}T_3^{\mathfrak{I}})$ 都與三圓 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 相切。為此，我們需要：

Proposition 3.5.3. 令 R 為兩圓 Γ_1 與 Γ_2 的根軸上一點，U 為 Γ_1 與 Γ_2 的其中一個位似中心。令 ℓ 為過 U 一線，Q_i 為 ℓ 關於 Γ_i 的極點。若 T_1 為 RQ_1 與 Γ_1 的（其中一個）交點，那麼 UT_1, RQ_2, Γ_2 共點。

Proof. 考慮以 U 為中心的位似變換 $\mathfrak{h}$ 使得 $\mathfrak{h}(\Gamma_1) = \Gamma_2$，我們有

$$\mathfrak{h}(Q_1) = \mathfrak{h}(\mathfrak{p}_{\Gamma_1}(\ell)) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{h}(\Gamma_1)}(\mathfrak{h}(\ell)) = \mathfrak{p}_{\Gamma_2}(\ell) = Q_2.$$

令 $S = \mathfrak{h}(T_1)$，T_2 為 ST_1 與 Γ_2 的另一個交點，S', T_2' 分別為 SQ_2, T_2Q_2 與 Γ_2 的另一個交點。由完全四點形的極線性質 (3.2.13)，$ST_2 \cap S'T_2'$ 位於 $Q_2 = SS' \cap T_2T_2'$ 的極線上，即 $U \in S'T_2'$。由 Reim 定理 (0.1.14) 及 S, T_2, S', T_2' 共圓，我們有 T_1, T_2, T_1', T_2 共圓，其中 $T_1' = \mathfrak{h}^{-1}(S')$。由於 T_1T_1' 為 $\odot(T_1T_2T_1'T_2')$ 與 Γ_1 的根軸且 T_2T_2' 為 $\odot(T_1T_2T_1'T_2')$ 與 Γ_2 的根軸，$T_1T_1' = T_1Q_1$ 與 $T_2T_2' = T_2Q_2$ 交於 Γ_1 與 Γ_2 的根軸上，即 R, T_2, Q_2 共線。 ■

令 O_i 為 Γ_i 的圓心，$U_{ij} = O_iO_j \cap \ell$ 為 Γ_i 與 Γ_j 的其中一個位似中心。現在任意地分 $T_1, T_1^{\mathfrak{I}}$，我們可以取 $T_2, T_2^{\mathfrak{I}}$ 使得 T_1T_2, $T_1^{\mathfrak{I}}T_2^{\mathfrak{I}}$ 皆過 U_{12}。同樣地，我們可以取 $T_3, T_3^{\mathfrak{I}}$ 使得 T_3T_1, $T_3^{\mathfrak{I}}T_1^{\mathfrak{I}}$ 皆過 U_{31}（所以我們實際上只有用到 RQ_1 與 Γ_1 有交點，$i = 2, 3$ 自然會跟著對）。注意到 $\triangle T_1T_2T_3$ 與 $\triangle O_1O_2O_3$ 有透視中心 R。由迪沙格定理 (1.1.1)，

$$T_2T_3 \cap O_2O_3, \quad T_3T_1 \cap O_3O_1 = U_{31}, \quad T_1T_2 \cap O_1O_2 = U_{12}$$

共線，因此我們有 T_2T_3 過 U_{23}。同理，$T_2^{\mathfrak{I}}T_3^{\mathfrak{I}}$ 也過 U_{23}。所以我們只剩下證明 $\odot(T_1T_2T_3)$, $\odot(T_1^{\mathfrak{I}}T_2^{\mathfrak{I}}T_3^{\mathfrak{I}})$ 都與三圓 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 相切。

Proposition 3.5.4. 設 T_1, T_2, T_3 分別位於三圓 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 上，滿足 T_iT_j 過 Γ_i 與 Γ_j 的其中一個位似中心 U_{ij}，且 U_{23}, U_{31}, U_{12} 共線。則 $\triangle T_1T_2T_3$ 的外接圓 Ω 與 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 相切。

Proof. 同之前的標號，令 R 為 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 的根心，Q_i 為直線 $U_{23}U_{31}U_{12}$ 關於 Γ_i 的極點。令 S_{ij} 為 T_iT_j 與 Γ_j 的第二個交點，$\mathfrak{h}_{ij}$ 是以 U_{ij} 為中心的位似變換使

得 $\mathfrak{h}_{ij}(\Gamma_i)=\Gamma_j$，那麼 $S_{ij}=\mathfrak{h}_{ij}(T_i)$。由於 $S_{ij}(Q_i)=Q_j$，我們有 $S_{ij}Q_j \parallel Q_iR$，因此 $\triangle RT_iT_j \overset{+}{\sim} \triangle Q_jS_{ij}T_j$。結合 $\triangle RT_2T_1 \overset{+}{\sim} \triangle Q_1S_{21}T_1$ 與 $\triangle RT_3T_1 \overset{+}{\sim} \triangle Q_1S_{31}T_1$，我們得到 $\triangle T_1T_2T_3 \overset{+}{\sim} \triangle T_1S_{21}S_{31}$，故 $\Omega=\odot(T_1T_2T_3)$ 與 $\Gamma_1=\odot(T_1S_{21}S_{31})$ 相切。同理有 Ω 與 Γ_2, Γ_3 相切。 ■

由於 Ω 與 Γ_i 皆相切，O_1T_1, O_2T_2, O_3T_3 共於 $\triangle T_1T_2T_3$ 的外心 O。而這時候 $\triangle O_1O_2O_3$ 與 $\triangle T_1T_2T_3$ 的透視軸為 $U_{23}U_{31}U_{12}$。所以上面這個性質其實也可以用孟氏定理來證明：如果令 O 為 $\triangle O_1O_2O_3$ 與 $\triangle T_1T_2T_3$ 的透視中心（由迪沙格定理存在），我們有

$$\frac{O_1T_1}{T_1O}\cdot\frac{OT_2}{T_2O_2}=-\frac{O_1U_{12}}{U_{12}O_2}=\pm\frac{r_1}{r_2},$$

其中 r_i 為 Γ_i 的半徑。因此由 $\overline{O_iT_i}=r_i$，我們得到 $\overline{OT_1}=\overline{OT_2}$。同理，有 $\overline{OT_3}=\overline{OT_1}$，故 O 為 $\triangle T_1T_2T_3$ 的外心。

到這邊，我們就已經可以完全刻畫出所有與 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 相切的圓了。但其實我們還有一些退化情形是還沒處理的，也就是當 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 中的圓有些退化為直線或點的情形（圓 Ω 與一點 P 相切的意思就是 P 位於 Ω 上）。當 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 中有一個為非退化圓的時候，證明都與 (3.5.4) 類似，所以以下只列出這些情形中點的退化情形，證明就留給讀者。

(i) $\Gamma_1=L_1$ 為一直線，Γ_2, Γ_3 為圓。這時候根心 R 為 Γ_2, Γ_3 的根軸與 L_1 的交點，位似中心 $O_{12,\pm}$ 為過圓心 O_2 且垂直於 L_1 的直線與 Γ_2 的兩個交點，位似中心 $O_{31,\pm}$ 為過圓心 O_3 且垂直於 L_1 的直線與 Γ_3 的兩個交點。這時候對於完全四線形 $(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$ 中任意一線 $U_{23}U_{31}U_{12}$，如果 RQ_2 與 Γ_2 有交點 T_2，那麼我們依然可以作出 T_3 及 $T_1=U_{12}T_2\cap L_1$。

(ii) Γ_1 為圓，$\Gamma_2=L_2, \Gamma_3=L_3$ 為直線。這時候根心 R 為 L_2 與 L_3 的交點，位似中心 $O_{12,\pm}, O_{31,\pm}$ 的定義同 (i)，位似中心 $O_{23,\pm}$ 為 L_2 與 L_3 的兩個角平分線上的無窮遠點。這時候對於完全四線形 $(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$ 中任意一線 $U_{23}U_{31}U_{12}$，如果 RQ_1 與 Γ_1 有交點 T_1，那麼我們依然可以作出 $T_2=U_{12}T_1\cap L_2, T_3=U_{31}T_1\cap L_3$。

(iii) $\Gamma_1=L_1, \Gamma_2=L_2, \Gamma_3=L_3$ 皆為直線。那麼 Ω 即為由 L_1, L_2, L_3 所圍出的三角形 $\triangle L_1L_2L_3$ 的內切圓或旁切圓。

(iv) $\Gamma_1 = P_1$ 為一點，Γ_2, Γ_3 為圓。根心 R 依舊可以定義，位似中心 $O_{31,\pm}$, $O_{12,\pm}$ 重合於 P_1。這時候完全四線形 $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ 退化為兩線 $P_1O_{23,+}$, $P_1O_{23,-}$。那對於這之中任意一線 $U_{23}P_1$，如果 RQ_2 與 Γ_2 有交點 T_2，那麼我們依然可以作出 T_3。這時候我們取 $T_1 = P_1$。

(v) Γ_1 為圓，$\Gamma_2 = P_2$, $\Gamma_3 = P_3$ 為兩點。根心 R 依舊可以定義，位似中心 $O_{12,\pm}$, $O_{23,\pm}$ 重合於 P_2，$O_{23,\pm}$, $O_{31,\pm}$ 重合於 P_3。這時候完全四線形 $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ 退化為一線 P_2P_3。如果 RQ_1 與 Γ_1 有交點 T_1，那麼這時候我們取 $T_2 = P_2, T_3 = P_3$。

(vi) $\Gamma_1 = P_1, \Gamma_2 = P_2, \Gamma_3 = P_3$ 為三點。那麼 Ω 即為 $\triangle P_1P_2P_3$ 的外接圓。

(vii) Γ_1 為圓，$\Gamma_2 = L_2$ 為直線，$\Gamma_3 = P_3$ 為點。這時候根心 R 為 Γ_1 與點圓 P_3 的根軸與 L_2 的交點，位似中心 $O_{12,\pm}$ 的定義同 (i)，位似中心 $O_{23,\pm}$, $O_{31,\pm}$ 重合於 P_3。如果 RQ_1 與 Γ_1 有交點 T_1，那麼我們可以作出 $T_2 = U_{12}T_1 \cap L_2$。這時候我們取 $T_3 = P_3$。

(viii) $\Gamma_1 = L_1$ 為直線，$\Gamma_2 = P_2, \Gamma_3 = P_3$ 為點。這時候令 $U = L_1 \cap P_2P_3$。若 L_1 上有一點 T_1 使得 $\overline{UT_1}^2 = UP_2 \cdot UP_3$ (即以 U 為圓心的 (P_2, P_3) 阿波羅尼奧斯圓與 L_1 的交點)，那麼 $\Omega = \odot(T_1P_2P_3)$。

(ix) $\Gamma_1 = P_1$ 為點，$\Gamma_2 = L_2, \Gamma_3 = L_3$ 為直線。過 P_1 作平行於 L_2 與 L_3 的 (其中一條) 角平分線的直線 ℓ，並交 L_2, L_3 於 U_2, U_3。令 P_1' 為 P_1 關於 $\overline{U_2U_3}$ 的等截點 (見第 1.5 節)，那麼與 P_1, P_1', L_2 相切的圓也會與 L_3 相切，因此就可以用 (viii) 的構造。

Chapter 4

完全四線形

完全四線形說穿了就只是四條不共點的直線與它們所交出的六點構成的幾何物件。光是一個三角形我們就有許多定理，例如：歐拉線定理、九點圓定理、費爾巴哈定理等等，所以完全四線形也一樣，甚至這些定理與性質可以拿來幫我們更認識三角形中的許多性質。

4.1 基礎的心

這節我們就先從一些完全四線形常見的心開始（事實上這些心也可以對一個四邊形 $(AC)(BD)$ 定義，但為了簡單描述我們只敘述及證明完全四線形的情形）。給定一個完全四線形 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$，定義

- 六個頂點：$A_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$；
- 四個三角形：$\triangle_i := \triangle \ell_{i+1}\ell_{i+2}\ell_{i+3}$；
- 三個對角線段與對頂點：$\overline{A_{ij}A_{kl}}$ 與 (A_{ij}, A_{kl})；
- 三個四邊形：$A_{ij}A_{jk}A_{kl}A_{li}$，其中有凸四邊形、凹四邊形以及折四邊形（就圖形上來看）；
- 對角線三角形（西瓦三角形）：δ，由三個對角線段延長所圍成的三角形。

Proposition 4.1.1 (QL-P1, 密克點)**.** 四個三角形 $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \triangle_4$ 的外接圓們共於一點 M。

我們曾經證明過密克定理 (0.1.18)，這邊給個快速證明。

Proof. 令 M 為 $\odot(\triangle_2)$ 與 $\odot(\triangle_3)$ 異於 A_{14} 的交點。我們證明 M 位於 $\odot(\triangle_1)$ 上：

$$\begin{aligned}\measuredangle A_{24}MA_{34} &= \measuredangle A_{24}MA_{14} + \measuredangle A_{14}MA_{34} \\ &= \measuredangle A_{24}A_{12}A_{14} + \measuredangle A_{14}A_{31}A_{34} \\ &= \measuredangle(\ell_2, \ell_3) = \measuredangle A_{24}A_{23}A_{34}.\end{aligned}$$ ■

Example 4.1.2 (2015 APMO P1)**.** 令 ABC 為三角形，且令 D 為 BC 邊上的一點。通過 D 點的直線與 AB 邊交於 X，並與射線 AC 交於 Y。三角形 BXD 的外接圓與三角形 ABC 的外接圓 ω 交於點 $Z \neq B$。直線 ZD 與 ZY 分別與 ω 交於 V 與 W。試證 $AB = VW$。

Solution. 注意到 Z 為完全四線形 $\triangle ABC \cup XY = (BC, CA, AB, XY)$ 的密克點，因此

$$\measuredangle VZW = \measuredangle DZY = \measuredangle DCY = \measuredangle BCA.$$

由正弦定理，我們得到

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{VW}} = \left|\frac{\sin \measuredangle VZW}{\sin \measuredangle BCA}\right| = 1 \implies \overline{AB} = \overline{VW}.$$

其實密克點還有另一個用途，就是拿來猜切點，我們以下面這個例子作為舉例。

Example 4.1.3 (2020 ISL G6)**.** 設 ABC 為銳角三角形，I 及 I_A 分別為其內心及角 A 內的旁心，且 $AB < AC$。設內切圓切 BC 於 D 點。直線 AD 分別與 BI_A 及 CI_A 交於點 E 及 F。證明三角形 AID 的外接圓與三角形 I_AEF 的外接圓相切。

Solution. 我們發現到如果今天 $\odot(AID)$ 與 $\odot(I_AEF)$ 的切點剛好是完全四線形 $\triangle BI_AC \cup AD$ 的密克點 M 的話，那角度就會很好算，所以直接猜切點是 M。

我們先證明 M 位於 $\odot(AID)$ 上 (注意到 M 已經在 $\odot(I_AEF)$ 上了)：由於 $M \in \odot(BI_AC)$，

$$\measuredangle DMI = \measuredangle DMB + \measuredangle BMI = \measuredangle DEB + \measuredangle BI_AI = \measuredangle DAI,$$

即 $M \in \odot(AID)$。接下來我們證明 $\odot(AID)$ 與 $\odot(I_AEF)$ 相切於 M：

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_M\odot(AID) &= MI + MD - ID = MI_A + \measuredangle(BC, MD)\\ &= MI_A + \measuredangle BEM = MI_A + ME - I_AE = \mathbf{T}_M\odot(I_AEF).\end{aligned}$$

證畢。

雖然猜密克點可以說是瞎猜的，但反過來想如果不是密克點的話我們基本上就束手無策了，所以看到有相切的題目就先猜切點是某個完全四線形的密克點不虧。

Proposition 4.1.4 (QL-L1, 牛頓線)**.** 三條對角線 $\overline{A_{23}A_{14}}, \overline{A_{31}A_{24}}, \overline{A_{12}A_{34}}$ 的中點們共於一直線 τ。

Proof. 令 M_1, M_2, M_3 分別為 $\overline{A_{23}A_{14}}, \overline{A_{31}A_{24}}, \overline{A_{12}A_{34}}$ 的中點，$\triangle N_1N_2N_3$ 為 $\triangle A_{23}A_{31}A_{12}$ 的中點三角形，則 M_1, M_2, M_3 分別位於 N_2N_3, N_3N_1, N_1N_2 上。注意到

$$\frac{N_2M_1}{M_1N_3} \cdot \frac{N_3M_2}{M_2N_1} \cdot \frac{N_1M_3}{M_3N_2} = \frac{A_{12}A_{14}}{A_{14}A_{31}} \cdot \frac{A_{23}A_{24}}{A_{24}A_{12}} \cdot \frac{A_{31}A_{34}}{A_{34}A_{23}} = -1,$$

由孟氏定理，所以再由孟氏定理，M_1, M_2, M_3 共線。 ■

Proposition 4.1.5 (QL-Ci3, 密克圓)**.** 五點 M, O_1, O_2, O_3, O_4 共於一圓，其中 O_i 為 $\triangle_i$ 的外心。

Proof. 我們證明 $M \in \odot(O_1O_2O_3)$：M 關於 O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 的對稱點分別為 A_{14}, A_{24}, A_{34}。這三點共於 ℓ_4，所以由西姆松逆定理 (1.4.1)，M 位於 $\odot(O_1O_2O_3)$ 上。 ■

結合施坦納定理 (1.4.2)，我們還能從證明中看出 $\triangle O_iO_jO_k$ 的垂心 H_l' 位於 ℓ_l 上。

Proposition 4.1.6 (QL-L2, 垂心線, 施坦納線)**.** 令 H_i 為 $\triangle_i$ 的垂心，則四點 H_1, H_2, H_3, H_4 共於一線 $\mathcal{S}$。

Proof. 令 M_i' 為 M 關於 ℓ_i 的對稱點。由施坦納定理，H_i, M_j', M_k', M_l' 共線，因此我們可以得到 $H_1, H_2, H_3, H_4, M_1', M_2', M_3', M_4'$ 共線。 ■

Remark. 對於 $n \geq 5$，我們說一個完全 n 線形 $\mathcal{N} = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ 有密克點 M 若對於所有 $\{i, j, k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$，$M$ 位於 $\triangle \ell_i\ell_j\ell_k$ 的外接圓上。這時候同樣的證明可以得到 $\mathcal{N}$ 也有垂心線。也就是說 $\triangle \ell_i\ell_j\ell_k$ 的垂心都在同一條直線上。

Proposition 4.1.7 (Gauss-Bodenmiller)**.** 三直徑圓

$$\odot(\overline{A_{23}A_{14}}), \quad \odot(\overline{A_{31}A_{24}}), \quad \odot(\overline{A_{12}A_{34}})$$

共軸且垂心線 $\mathcal{S}$ 為它們的根軸。

Proof. 我們證明 H_1 關於這三個圓的冪相等：令 $\triangle DEF$ 為 $\triangle A_{23}A_{31}A_{12}$ 的垂足三角形，則

$$\begin{cases} \mathbf{Pow}_{\odot(\overline{A_{23}A_{14}})}(H_1) & = H_1A_{23} \cdot H_1D, \\ \mathbf{Pow}_{\odot(\overline{A_{31}A_{24}})}(H_1) & = H_1A_{31} \cdot H_1E, \\ \mathbf{Pow}_{\odot(\overline{A_{12}A_{34}})}(H_1) & = H_1A_{12} \cdot H_1F. \end{cases}$$

由 A_{31}, A_{12}, E, F 共圓知 $H_1A_{31} \cdot H_1E = H_1A_{12} \cdot H_1F$，同理可得

$$H_1A_{23} \cdot H_1D = H_1A_{31} \cdot H_1E = H_1A_{12} \cdot H_1F.$$

因此 H_1 位於根軸上。同理有 $H_2, H_3, H_4 \in \mathcal{S}$ 皆位於根軸上（而我們知道 H_1, H_2, H_3, H_4 不會都重合於一點）。 ■

因為根軸會垂直連心線 (0.4.9)，所以我們得到：

Corollary 4.1.8. 牛頓線 τ 與垂心線 $\mathcal{S}$ 垂直。

所以其實我們也可以用根軸來證明牛頓線的存在性（即三對對頂點中點 M_1, M_2, M_3 共線）。

Example 4.1.9. 設三角形 ABC 的內心為 I、垂心為 H，令 E, E' 分別為內切圓、B-旁切圓與 CA 的切點，F, F' 分別為內切圓、C-旁切圓與 AB 的切點。若 I' 為 I 關於 EF 的對稱點，證明：$HI' \perp E'F'$。

Solution. 注意到 I' 其實是 $\triangle AEF$ 的垂心，所以 HI' 就是完全四線形 $\triangle ABC \cup EF = (BC, CA, AB, EF)$ 的垂心線，那麼我們要證明 $HI' \perp E'F'$ 就只需要證明 $E'F'$ 平行於 $\triangle ABC \cup EF$ 的牛頓線。而這就只是第 1.1 節的習題 4 ，下面給出一個比較完整的證明。

令 X, Y, Z 分別為 $\overline{EF}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 中點，則

$$\overline{ZX} = \frac{\overline{CE}}{2} = \frac{\overline{E'A}}{2}, \quad \overline{XY} = \frac{\overline{FB}}{2} = \frac{\overline{AF'}}{2}$$

且 $\overrightarrow{ZX} \parallel \overrightarrow{E'A}$, $\overrightarrow{XY} \parallel \overrightarrow{AF'}$。因此我們得到 $\triangle XYZ \overset{+}{\sim} \triangle AF'E'$。故 YZ，即 $\triangle ABC \cup EF$ 的牛頓線，平行於 $E'F'$。證畢。

另一個推論是：

Corollary 4.1.10. 給定 $\triangle ABC$ 與一點 P。分別在 BC, CA, AB 上取點 D, E, F 使得

$$\measuredangle APD = \measuredangle BPE = \measuredangle CPF = 90^\circ,$$

則 D, E, F 共線。我們將這條直線稱作 P 關於 $\triangle ABC$ 的**正交截線** (**ortho-transversal**)。

Proof. 令 D' 為 EF 與 BC 的交點，$\mathcal{Q} = \triangle ABC \cup EF$，則 $\mathcal{Q}$ 的三個對角線段直徑圓 $\odot(\overline{AD'}), \odot(\overline{BE}), \odot(\overline{CF})$ 共軸。注意到 P 是 $\odot(\overline{BE})$ 與 $\odot(\overline{CF})$ 的其中一個交點，因此 P 也位於 $\odot(\overline{AD'})$ 上，故 $D = D'$。 ■

我們會在第 12.1 節討論正交截線的推廣。最後，我們得到了一個超級無敵常用的定理。

Theorem 4.1.11. 一個完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的密克點 M 與牛頓線上的無窮遠點 ∞_τ 是關於 $\mathcal{Q}$ 的一對等角共軛點對。

Proof. 由 (1.4.5)，M 關於 $\triangle_1$ 的外接圓的對徑點 M_1^* 關於 $\triangle_1$ 的等角共軛點是 $\infty_{\mathcal{S}}$，因此 M 關於 $\triangle_1$ 的等角共軛點是 $\infty_{\perp\mathcal{S}} = \infty_\tau$（因為 (4.1.8) 告訴我們 $\mathcal{S} \perp \tau$）。同理，M 關於 $\triangle_2, \triangle_3, \triangle_4$ 的等角共軛點也是 ∞_τ。故 M 關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點是 ∞_τ。 ■

這個定理透過形式和的一個常用寫法是：

$$\tau = A_{jk}A_{ki} + A_{jk}A_{ij} - A_{jk}M.$$

因此我們可以透過牛頓線來了解密克點的位置，或反過來透過密克點來了解牛頓線的角度。所以也常常結合第 1.1 節的習題 4（牛頓線與等截共軛線平行）及 (4.1.8) 來做使用。

Example 4.1.12. 設 I^b, I^c 分別為 $\triangle ABC$ 的 B, C-旁心，I^b, I^c 關於 BC 的垂線分別交 CA, AB 於 E, F。證明：$\triangle ABC$ 的外心位於 $\odot(ABE)$ 與 $\odot(ACF)$ 的根軸上。

Solution. 令 M 為 (CA, AB, BE, CF) 的密克點，則 $\odot(ABE)$ 與 $\odot(ACF)$ 的根軸為 AM。要證明 AM 過 $\triangle ABC$ 的外心就只要證明 AM 關於 $\angle BAC$ 的等角線垂直於 BC 即可。我們知道 AM 關於 $\angle BAC$ 的等角線為 $A\infty_\tau$，其中 τ 為 (CA, AB, BE, CF) 的牛頓線，因此我們只需要證明 $\tau \perp BC$ 即可。因為 τ 是 $\overline{BC}$ 中點與 $\overline{EF}$ 中點的連線，所以我們可以換成要證明 $\overline{EF}$ 中點位於 BC 的中垂線上。又 $I^bE, I^cF \perp BC$，所以又等價於證明 $\overline{I^bI^c}$ 中點位於 $\overline{BC}$ 的中垂線上。但熟知 $\overline{I^bI^c}$ 中點為 $\widehat{BAC}$ 的中點，因此原命題成立。

Example 4.1.13 (2009 IMO P2)**.** 令 O 為三角形 ABC 的外接圓心，且點 P 與 Q 分別是線段 CA 與 AB 的內點。令 K, L 與 M 分別為線段 BP, CQ 與 PQ 的中點，且圓 Γ 通過 K, L 與 M 三點。假設直線 PQ 與圓 Γ 相切，試證明：$|OP| = |OQ|$。

Solution. 令 N 為完全四線形 $\mathcal{Q} = \triangle ABC \cup PQ$ 的密克點。因為 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線為 KL，所以

$$AB + AC - AN = KL = MK + ML - PQ = AB + AC - PQ,$$

即 $AN \parallel PQ$。由於 A, N, P, Q 共圓，$AN \parallel PQ$ 告訴我們 PQ 的中垂線與 AN 的中垂線重合，故通過 O，因此 $\overline{OP} = \overline{OQ}$。

習題

Problem 1. 證明一個完全四線形的密克點位於其對角線三角形的九點圓上。

Problem 2 (2011 IMO P6)**.** 設銳角三角形 ABC 的外接圓為 Γ，令 ℓ 是圓 Γ 的一條切線。將 ℓ 分別對直線 BC, CA 與 AB 做鏡射，得直線 ℓ_a, ℓ_b 與 ℓ_c。證明：由直線 ℓ_a, ℓ_b 與 ℓ_c 所構成的三角形，其外接圓與圓 Γ 相切。

Problem 3 (2014 APMO P5)**.** 圓 Ω 與圓 ω 交於 A, B 兩點。設圓 ω 上的 AB 弧之中點為 M（M 位於 Ω 內部）。圓 ω 上的一弦 MP 與圓 Ω 交於 Q 點（Q 位於 ω 內部）。令 ℓ_P 為圓 ω 在 P 點的切線，而 ℓ_Q 為圓 Ω 在 Q 點的切線。證明：由 ℓ_P, ℓ_Q 與 AB 三條直線所形成三角形的外接圓與圓 Ω 相切。

Problem 4. 設 $\triangle ABC$ 的內心為 I，外心為 O，內切圓分別切 BC, CA, AB 於 D, E, F。令 FD, DE 分別交 CA, AB 於 Y, Z，K 為 $\triangle DYZ$ 的外心。證明：$\measuredangle AIO = \measuredangle KID$。

Problem 5 (2014 Iran TST3 P6)**.** 設 $\odot(I)$ 為不等邊三角形 ABC 的內切圓並切 BC 於 D，X 在（不含 A 的）弧 BC 上使得若 E, F 分別為 X 關於 BI, CI 的垂足，則 $\overline{EF}$ 中點 M 滿足 $\overline{MB} = \overline{MC}$。證明：$\angle BAD = \angle XAC$。

Problem 6. 給定銳角三角形 $\triangle ABC$，令 O 為其外心，再令 Γ 為 $\triangle OBC$ 的外接圓，G 是 Γ 上一點。令 $\triangle ABG, \triangle ACG$ 的外接圓分別與 CA, AB 交另一點於 E, F，K 為 BE 與 CF 的交點。證明：AK, BC, OG 共點。

4.2 共圓四線形

這節我們主要來談完全四線形中的六個點其中有四點共圓的情形。這是一個非常常見的題型，經常出現的架構為：四邊形 $BCEF$ 內接於圓 $\odot(O)$，A 為 FB, CE 的交點，D 為 BC, EF 的交點，我們在這節就都使用這組標號。

令 $\mathcal{Q}$ 為完全四線形 (BC, CE, EF, FB)，結合前一章的一些結果，我們有密克點 $M = M_{\mathcal{Q}}$，牛頓線 $\tau = \tau_{\mathcal{Q}}$，垂心線 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{Q}}$。

Proposition 4.2.1. 密克點 M 位於直線 AD 上。

Proof. 因為 $\odot(FBC), \odot(CDM), \odot(MAE)$ 共於一點 E，所以由三圓定理，M 位於直線 AD 上。 ■

Proposition 4.2.2. 我們有 B, O, E, M 及 C, O, F, M 分別共圓。

Proof. 因為 A, D, M 共線，所以直接算角度得到

$$\measuredangle BOE = \measuredangle BCE + \measuredangle BFE = \measuredangle BMD + \measuredangle AME = \measuredangle BME,$$

即 B, O, E, M 共圓，同理有 C, O, F, M 共圓。 ■

所以也可以把 M 想成是 $\odot(BOE)$ 與 $\odot(COF)$ 異於 O 的交點。令 P 為四邊形 $BCEF$ 的對角線 BE, CF 的交點，考慮關於 $\odot(O)$ 的反演就得到：

Corollary 4.2.3. 三點 O, P, M 共線且 P, M 為關於 $\odot(O)$ 的反演點對。

Proof. 因為 $B, C, E, F \in \odot(O)$，所以 $B^* = B, C^* = C, E^* = E, F^* = F$，因此 $\odot(BOE)^* = BE, \odot(COF)^* = CF$。由反演性質 (3.1.3)，

$$M^* = (\odot(BOE) \cap \odot(COF) \setminus \{O\})^* = BE \cap CF = P. \qquad ■$$

由 (3.2.13)，$\triangle ADP$ 為關於 $\odot(O)$ 的自配極三角形，因此 $OP \perp AD$，結合上述推論就得到：

Proposition 4.2.4. 直線 OM 垂直於 AD。

這個性質也可以直接算長度證明：

Proof. 因為 A 位於 $\odot(O)$, $\odot(BDF)$ 的根軸 FB 上，我們知道

$$\mathbf{Pow}_{\odot(O)}(A) = \mathbf{Pow}_{\odot(BDF)}(A) = AM \cdot AD = \overline{AM}^2 - MA \cdot MD,$$

同理有 $\mathbf{Pow}_{\odot(O)}(D) = \overline{DM}^2 - MA \cdot MD$。因此

$$\begin{aligned}\overline{OA}^2 - \overline{OD}^2 &= \mathbf{Pow}_{\odot(O)}(A) - \mathbf{Pow}_{\odot(O)}(D) \\ &= \left(\overline{AM}^2 - MA \cdot MD\right) - \left(\overline{DM}^2 - MA \cdot MD\right) \\ &= \overline{AM}^2 - \overline{DM}^2,\end{aligned}$$

由定差冪線定理 (0.2.11) 有 $OM \perp AD$。 ■

Proposition 4.2.5. 點 P 位於垂心線 $\mathcal{S}$ 上。

Proof. 我們知道 $\mathcal{S}$ 是三個直徑圓 $\odot(\overline{AD})$, $\odot(\overline{BE})$, $\odot(\overline{CF})$ 的根軸，而

$$\mathbf{Pow}_{\odot(\overline{BE})}(P) = PB \cdot PE = PC \cdot PF = \mathbf{Pow}_{\odot(\overline{CF})}(P),$$

所以 $P \in \mathcal{S}$。 ■

Example 4.2.6 (2009 ISL G4). 給定一圓內接四邊形 $ABCD$，令對角線 AC 與 BD 相交於 E 點且直線 AD 與 BC 相交於 F 點。點 G 與 H 分別為線段 AB 與 CD 之中點。試證 EF 與過點 E, G, H 之圓相切於 E 點。

Solution. 令 M 為 $\overline{EF}$ 中點，則 M, G, H 共於 $(AC)(BD)$ 的牛頓線。令 X 為 AB 與 CD 的交點，則 EF 為 X 關於 $\odot(ABCD)$ 的極線，因此 EF 為 $\odot(\overline{OX})$ 與 $\odot(ABCD)$ 的根軸。由於 E, F 關於 $\odot(ABCD)$ 共軛，$\odot(\overline{EF})$ 與 $\odot(ABCD)$ 正交。因為 M 為 $\overline{EF}$ 中點，即 $\odot(\overline{EF})$ 圓心，所以

$$\overline{ME}^2 = \mathbf{Pow}_{\odot(ABCD)}(M) = \mathbf{Pow}_{\odot(\overline{OX})}(M) = MG \cdot MH,$$

故 $\odot(EGH)$ 與 $ME = EF$ 相切。

4.3 有切圓的完全四線形

在這節，我們一樣令 $A_{ij}=\ell_i\cap\ell_j$，並且假設 $A_{42}A_{23}A_{31}A_{14}$ 是凸四邊形，$A_{41}A_{12}A_{23}A_{34}$ 是凹四邊形，$A_{43}A_{31}A_{12}A_{24}$ 是折四邊形。

Proposition 4.3.1. 對於完全四線形 $\mathcal{Q}=(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$，下列敘述等價：

(i) $\mathcal{Q}$ 有內切圓；

(ii) $\overline{A_{42}A_{23}}+\overline{A_{31}A_{14}}=\overline{A_{23}A_{31}}+\overline{A_{14}A_{42}}$；

(iii) $\overline{A_{41}A_{12}}+\overline{A_{23}A_{34}}=\overline{A_{12}A_{23}}+\overline{A_{34}A_{41}}$；

(iv) $\overline{A_{43}A_{31}}+\overline{A_{12}A_{24}}=\overline{A_{31}A_{12}}+\overline{A_{24}A_{43}}$。

Proof. 若 $\mathcal{Q}$ 有內切圓 ω，令 T_i 為 ω 與 ℓ_i 的切點。對於所有 1, 2, 3, 4 的排列 i,j,k,l，我們有

$$\begin{aligned}\overline{A_{ij}A_{jk}}+\overline{A_{kl}A_{li}}&=\overline{A_{ij}T_j}+\overline{T_jA_{jk}}+\overline{A_{kl}T_l}+\overline{T_lA_{li}}\\&=\overline{A_{ij}T_i}+\overline{T_kA_{jk}}+\overline{A_{kl}T_k}+\overline{T_iA_{li}}=\overline{A_{jk}A_{kl}}+\overline{A_{li}A_{ij}},\end{aligned}$$

即 (ii), (iii), (iv)。

若假設 (ii) 成立，要證明 $\mathcal{Q}$ 有內切圓就只需證明 $\triangle A_{23}A_{31}A_{12}$ 的內切圓 ω_4 與 $\triangle A_{24}A_{41}A_{12}$ 的 A_{12}-旁切圓 $\omega_{3,12}$ 重合。令 T_1,T_2 分別為 ω_4 與 ℓ_1,ℓ_2 的切點，T_1',T_2' 分別為 $\omega_{3,12}$ 與 ℓ_1,ℓ_2 的切點。則

$$\begin{aligned}\overline{A_{12}T_1}=\overline{A_{12}T_2}&=\frac{1}{2}\big(\overline{A_{31}A_{12}}+\overline{A_{12}A_{23}}-\overline{A_{23}A_{31}}\big)\\&=\frac{1}{2}\big((\overline{A_{31}A_{14}}+\overline{A_{14}A_{12}})+(\overline{A_{12}A_{24}}+\overline{A_{24}A_{23}})-\overline{A_{23}A_{31}}\big)\\&=\frac{1}{2}\big(\overline{A_{14}A_{12}}+\overline{A_{12}A_{24}}+\overline{A_{24}A_{41}}\big)=\overline{A_{12}T_1'}=\overline{A_{12}T_2'},\end{aligned}$$

故 $\mathcal{Q}$ 有內切圓 $\omega_4=\omega_{3,12}$。

類似地，我們可以證明 (iii) 與 (iv) 皆會推得 $\mathcal{Q}$ 有內切圓，詳細證明就留給讀者。 ■

關於 $\mathcal{Q}$ 是否有旁切圓，我們有類似的等價敘述：

Proposition 4.3.2. 對於完全四線形 $\mathcal{Q}=(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$，下列敘述等價：

(i) $\mathcal{Q}$ 有旁切圓；

(ii) $\overline{A_{42}A_{23}}-\overline{A_{31}A_{14}}=\overline{A_{23}A_{31}}-\overline{A_{14}A_{42}}$；

(iii) $\overline{A_{41}A_{12}}-\overline{A_{23}A_{34}}=-\overline{A_{12}A_{23}}+\overline{A_{34}A_{41}}$；

(iv) $\overline{A_{43}A_{31}}-\overline{A_{12}A_{24}}=\overline{A_{31}A_{12}}-\overline{A_{24}A_{43}}$。

證明與 (4.3.1) 的類似，故在此省略。

Example 4.3.3. 設 $ABCD$ 為一個凸四邊形，P, Q, R, S 分別為邊 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ 上四點，X 為 PR 與 QS 的交點。假設四邊形們 $SAPX$, $PBQX$, $QCRX$, $RDSX$ 都有內切圓，證明 $ABCD$ 也有內切圓。

Solution. 令 ω_A, ω_B, ω_C, ω_D 分別為 $SAPX$, $PBQX$, $QCRX$, $RDSX$ 的內切圓，T_A^{SA}, T_A^{AP}, T_A^{PX}, T_A^{XS} 分別為 ω_A 與 SA, AP, PX, XS 的切點。類似地，我們可以定義其他切點。

透過 (4.3.1)，我們希望可以證明 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DA}$。因為

$$\begin{aligned}
\overline{AB}+\overline{CD}&=\left(\overline{AT_A^{AP}}+\overline{T_A^{AP}T_B^{PB}}+\overline{T_B^{PB}B}\right)+\left(\overline{CT_C^{CR}}+\overline{T_C^{CR}T_D^{RD}}+\overline{T_D^{RD}D}\right)\\
&=\left(\overline{AT_A^{SA}}+\overline{T_A^{XS}T_B^{QX}}+\overline{T_B^{BQ}B}\right)+\left(\overline{CT_C^{QC}}+\overline{T_C^{XQ}T_D^{SX}}+\overline{T_D^{SX}D}\right),\\
\overline{BC}+\overline{DA}&=\left(\overline{T_B^{BQ}B}+\overline{T_C^{QC}T_B^{BQ}}+\overline{CT_C^{QC}}\right)+\left(\overline{T_D^{SX}D}+\overline{T_A^{SA}T_D^{SX}}+\overline{AT_A^{SA}}\right),
\end{aligned}$$

所以我們只需要證明 $\overline{T_A^{XS}T_B^{QX}}+\overline{T_C^{XQ}T_D^{SX}}$ 與 $\overline{T_C^{QC}T_B^{BQ}}+\overline{T_A^{SA}T_D^{SX}}$ 相等。而事實上

$$\begin{aligned}
\overline{T_A^{XS}T_B^{QX}}+\overline{T_C^{XQ}T_D^{SX}}&=\left(\overline{T_A^{XS}X}+\overline{XT_B^{QX}}\right)+\left(\overline{T_C^{XQ}X}+\overline{XT_D^{SX}}\right)\\
&=\overline{T_A^{PX}X}+\overline{XT_B^{XP}}+\overline{T_C^{RX}X}+\overline{XT_D^{XR}}\\
&=\overline{T_C^{RX}T_B^{XP}}+\overline{T_A^{PX}T_D^{XR}}=\overline{T_C^{QC}T_B^{BQ}}+\overline{T_A^{SA}T_D^{SX}}.
\end{aligned}$$

從而原命題成立。

以下假設完全四線形 $\mathcal{Q}=(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$ 有切圓 ω，且 ω 的圓心為 I。

Proposition 4.3.4. 圓心 I 位於 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線 τ 上。

Proof. 事實上，這是牛頓定理 (6.3.13) 在圓的特例。這邊給一個初等證明：令 T_i 為 ω 與 ℓ_i 的切點，M_2, M_3 分別為 $\overline{A_{31}A_{24}}, \overline{A_{12}A_{34}}$ 的中點，則

$$\begin{aligned}[\triangle IM_2M_3] &= \frac{1}{4}\big([\triangle IA_{31}A_{12}] + [\triangle IA_{24}A_{12}] + [\triangle IA_{31}A_{34}] + [\triangle IA_{24}A_{34}]\big) \\ &= \frac{1}{4}\big([\triangle IA_{31}T_1] + [\triangle IT_1A_{12}] + [\triangle IA_{24}T_2] + [\triangle IT_2A_{12}] \\ &\qquad + [\triangle IA_{31}T_3] + [\triangle IT_3A_{34}] + [\triangle IA_{24}T_4] + [\triangle IT_4A_{34}]\big) = 0,\end{aligned}$$

其中最後一個等號是因為

$$\begin{aligned}&[\triangle IA_{31}T_1] = [\triangle IT_3A_{31}], \quad [\triangle IT_1A_{12}] = [\triangle IA_{12}T_2], \\ &[\triangle IA_{24}T_2] = [\triangle IT_4A_{24}], \quad [\triangle IT_3A_{34}] = [\triangle IA_{34}T_4].\end{aligned}$$

故 $I \in \tau = M_2M_3$。 ■

Proposition 4.3.5. 令 M 為 $\mathcal{Q}$ 的密克點，則 MI 為 $\angle A_{23}MA_{14}, \angle A_{31}MA_{24}, \angle A_{12}MA_{34}$ 的共同 (內) 角平分線。更進一步地，如果令 J 為 I 關於 M 的對稱點，則 $(IJ)(A_{23}A_{14}), (IJ)(A_{31}A_{24}), (IJ)(A_{12}A_{34})$ 皆構成調和四邊形。

Proof. 令 T_i 為 ω 與 ℓ_i 的切點。考慮關於 ω 的反演變換 $\mathfrak{I}$。我們有 $A_{ij}^* := \mathfrak{I}(A_{ij})$ 為 $\overline{T_iT_j}$ 的中點，

$$M^* := \mathfrak{I}(M) = \bigcap \odot(A_{jk}^*A_{ki}^*A_{ij}^*).$$

令 G 為 (T_1, T_2, T_3, T_4) 的重心，則 G 也是 $\overline{A_{23}^*A_{14}^*}, \overline{A_{31}^*A_{24}^*}, \overline{A_{12}^*A_{34}^*}$ 的共同中點。考慮以 G 為中心的對稱變換 $\mathfrak{s}$，我們有 $\mathfrak{s}(A_{ij}^*) = A_{kl}^*$，所以

$$\mathfrak{s}(M^*) = \bigcap \mathfrak{s}(\odot(A_{jk}^*A_{ki}^*A_{ij}^*)) = \bigcap \odot(A_{il}^*A_{jl}^*A_{kl}^*) = I.$$

因此 $(IM^*)(A_{23}A_{14})$ 是一個平行四邊形，故

$$\measuredangle A_{23}MI - \measuredangle IMA_{14} = \measuredangle IA_{23}^*M^* - \measuredangle M^*A_{14}^*I = 0^\circ,$$

即 MI 平分 $\angle A_{23}MA_{14}$。同理，MI 也平分 $\angle A_{31}MA_{24}, \angle A_{12}MA_{34}$。

因為 J 是 I 關於 M 的對稱點，所以 $J^* := \mathfrak{I}(J)$ 就是 $\overline{IM}$ 中點，即 G。由 $J^* = G$ 為 $\overline{A_{23}^*A_{14}^*}, \overline{A_{31}^*A_{24}^*}, \overline{A_{12}^*A_{34}^*}$ 的共同中點，我們得到 $(IJ)(A_{23}A_{14})$, $(IJ)(A_{31}A_{24}), (IJ)(A_{12}A_{34})$ 皆構成調和四邊形。 ■

Remark. 事實上，M^* 為 (T_1, T_2, T_3, T_4) 的龐色列點（見第 8.1 節），所以他還落在 (T_1, T_2, T_3, T_4) 的西瓦圓以及 T_l 關於 $\triangle T_iT_jT_k$ 的佩多圓（即西姆松線 L_l）上。將這個命題關於 ω 反演，我們就會得到 M 落在 I 關於 $\triangle(A_{23}A_{14})(A_{31}A_{24})(A_{12}A_{34})$ 的佩多圓以及圓 $\mathfrak{I}(L_l)$ 上。

Example 4.3.6 (2014 3J P3 改)**.** 設點 M 為三角形 ABC 的外接圓上一點。自 M 點引對三角形 ABC 的內切圓相切的兩條直線，分別交 BC 於點 X_1, X_2。證明三角形 MX_1X_2 的外接圓與 ABC 的外接圓的第二個交點為定點。

註：原題是證明該定點就是 ABC 的外接圓與角 A 內的偽內切圓的切點。

Solution. 令 Y_1, Y_2 分別為 MX_1, MX_2 與 $\triangle ABC$ 的外接圓 Ω 的第二個交點。由龐色列閉合，Y_1Y_2 與 $\triangle ABC$ 的內切圓 ω 相切，故 $\mathcal{Q} = \triangle MY_1Y_2 \cup BC$ 是有內切圓 ω 的完全四線形且所求 $\odot(MX_1X_2)$ 與 $\odot(ABC)$ 的第二個交點是 $\mathcal{Q}$ 的密克點 $M_\mathcal{Q}$。

由 (4.3.5)，$\overline{IM^*_\mathcal{Q}}, \overline{X^*_1Y^*_2}, \overline{X^*_2Y^*_1}, \overline{M^*N^*}$ 有共同的中點 G，其中 $(-)^*$ 是關於 ω 的反演變換，N 為 Y_1Y_2 與 BC 的交點。這告訴我們

$$\mathfrak{s}(\Omega^*) = \mathfrak{s}(\odot(Y^*_1Y^*_2M^*)) = \odot(X^*_2X^*_1N^*) = (BC)^* = \odot\big(\overline{ID}\big),$$

其中 $\mathfrak{s}$ 是以 G 為中心的對稱變換，D 為 ω 與 BC 的切點。這代表 G 是一個與 M 的選取無關的點（即 Ω^* 與 $\odot\big(\overline{ID}\big)$ 的內位似中心），所以 $M^*_\mathcal{Q}$，作為 I 關於 G 的對稱點，也與 M 的選取無關，從而 $M_\mathcal{Q}$ 也是。

如果讀者熟悉偽內切圓的性質的話，這邊提供 $M_\mathcal{Q}$ 為 A-偽內切圓切點的證明作為參考：令 M_A 為 AI 與 Ω 的第二個交點，那麼 $M_\mathcal{Q}$ 是 A-偽內切圓切點若且唯若 $\measuredangle IM_\mathcal{Q}M_A = 90°$。這個命題（透過關於 ω 的反演）等價於

$$\measuredangle M^*_\mathcal{Q}M^*_AA^* = \measuredangle M^*_\mathcal{Q}M^*_AI = 90°,$$

即 $\overline{A^*M^*_\mathcal{Q}}$ 為 Ω^* 的直徑。令 $\triangle DEF$ 為 $\triangle ABC$ 的切點三角形，那麼 Ω^* 為 $\triangle DEF$ 的九點圓 $\odot(N_\omega)$，A^* 為 $\overline{EF}$ 中點，$M^*_\mathcal{Q}$ 為 $\triangle DEF$ 的外心 $O_\omega = I$ 關於 N_ω 與 $\overline{DO_\omega}$ 中點的中點的對稱點。由於 N_ω 為歐拉線段 $\overline{O_\omega H_\omega}$ 的中點 (1.1.5)，$M^*_\mathcal{Q}$ 為 $\overline{DH_\omega}$ 中點，其中 H_ω 為 $\triangle DEF$ 的垂心。故 $\overline{A^*M^*_\mathcal{Q}}$ 為 $\odot(N_\omega)$ 的直徑。

Chapter 5

淺談 X_n

在這章，我們假設

- $\triangle ABC$ 為參考三角形，$a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ 分別為其三邊長；
- I, I^a, I^b, I^c 分別為內心及 A-, B-, C-旁心；
- ω, ω^a, ω^b, ω^c 分別為內切圓及 A-, B-, C-旁切圓，r, r^a, r^b, r^c 分別為其半徑長；
- $\triangle DEF$, $\triangle D^aE^aF^a$, $\triangle D^bE^bF^b$, $\triangle D^cE^cF^c$ 分別為切點三角形及三個 A-, B-, C-旁切點三角形。特別地，$\triangle D'E'F' := \triangle D^aE^bF^c$ 為旁切點三角形；
- $\triangle M_aM_bM_c = \triangle A^{\complement}B^{\complement}C^{\complement}$ 為中點三角形；
- Ω 為外接圓，R 為其半徑長，A^*, B^*, C^* 分別為 A, B, C 關於 Ω 的對徑點；
- ε 為九點圓；
- $\triangle H_aH_bH_c$ 為垂足三角形；
- $\triangle N_aN_bN_c$ 為 I 的圓西瓦三角形（即弧中點三角形），N_a^*, N_b^*, N_c^* 分別為 N_a, N_b, N_c 關於 Ω 的對徑點。

5.1 X_1

- X_1 為內心（見 (0.3.9)），定義為三條內角平分線的交點，一般的常見記號為 I。對稱的定義還有三個旁心（但它們不是心）。

Proposition 5.1.1. 令 D^* 為 D 關於 ω 的對徑點。那麼 A, D^*, D' 共線。

Proof. 考慮以 A 為中心的位似變換 $\mathfrak{h}$ 將 ω 送至 ω^a。那麼 $\mathfrak{h}^{-1}(D')$ 位於 ω 上滿足 $\overrightarrow{\mathfrak{h}^{-1}(D')} \parallel \overrightarrow{I^aD'} \parallel \overrightarrow{DI}$，即 $D^* = \mathfrak{h}^{-1}(D')$。因此 A, D^*, D' 共線。 ■

同理，我們有 D^a, D^b, D^c 關於 $\omega^a, \omega^b, \omega^c$ 的對徑點 $(D^a)^*, (D^b)^*, (D^c)^*$ 分別位於 AD, AD^c, AD^b 上。注意到 $\overline{DD'}$ 中點也為 $\overline{BC}$ 中點 M_a，因此將上述性質關於 D 位似便有：

Corollary 5.1.2. 直線 IM_a 過 $\overline{AD}$ 中點且平行於 AD'。

Proposition 5.1.3. 在 BC 上取 $D^\vee$ 滿足 $(B, C; D, D^\vee) = -1$。那麼 $D^\vee, E, F$ 共線。

Proof. 由於

$$(B, C; D, D^\vee) = \frac{BD/DC}{BD^\vee/D^\vee C} = -1,$$

因此

$$\frac{BD^\vee}{D^\vee C} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -\frac{\overline{BD} \cdot \overline{CE} \cdot \overline{AF}}{\overline{DC} \cdot \overline{EA} \cdot \overline{FB}} = -1$$

結合孟氏定理告訴我們 $D^\vee, E, F$ 共線。 ■

Proposition 5.1.4. 設外接圓 Ω 與 $\odot(AEF) = \odot(\overline{AI})$ 第二個交點為 S（即 A^*I 與 Ω 的第二個交點，其中 A^* 為 A 關於 Ω 的對徑點），N_a 為 AI 與 Ω 的第二個交點（即不包含 A 的 $\widehat{BC}$ 的弧中點）。則 D, S, N_a 共線。

Proof. 令 N_a^* 為 N_a 關於外接圓的對徑點，X 為 EF 和 BC 的交點。因為 S 是 $\triangle ABC \cup EF$ 的密克點，所以 S, X, F, B 共圓。由

$$SX = SB + FX - FB = \big((S + B) + (A + N_a^*) - (A + B)\big)_\Omega = SN_a^*,$$

我們有 S, X, N_a^* 共線。因此由 (5.1.3)，

$$(N_a, N_a^*; B, C) = -1 = (D, X; B, C) \overset{S}{=} (SD \cap \Omega, N_a^*; B, C),$$

即 S, D, N_a 共線。 ■

Proposition 5.1.5. 標號同 (5.1.4)，我們有 IS 與 EF 交於 D 關於 EF 的垂足 H_d。

Proof. 令 H_d' 為 IS 與 EF 的交點。由於 $\measuredangle FSI = \measuredangle FAI = \measuredangle BSN_a$，$\triangle SBC \cup N_a \overset{+}{\sim} \triangle SFE \cup I$。結合 (5.1.4)，我們得到 $\triangle SBC \cup D \overset{+}{\sim} \triangle SFE \cup H_d'$，即 $\triangle SBF \overset{+}{\sim} \triangle SDH_d'$。故

$$\measuredangle SN_aA = \measuredangle SBA = \measuredangle SBF = \measuredangle SDH_d' \quad \Longrightarrow \quad DH_d' \parallel N_aA \perp EF$$

告訴我們 $H_d' = H_d$。 ■

Proposition 5.1.6. 令 O^{I^a} 為 I^bF_b 與 I^cE_c 的交點，即 $\triangle II^bI^c$ 外心。那麼 A, N_a^*, F_b, E_c, O^{I^a} 共圓。

Proof. 因為 N_a^* 為 $\overline{I^bI^c}$ 中點，所以

$$\measuredangle AF_bO^{I^a} = \measuredangle AE_bO^{I^a} = \measuredangle AN_a^*O^{I^a} = 90^\circ.$$ ■

Proposition 5.1.7. 標號同 (5.1.4)，我們有 AS 平行於 F_bE_c。

Proof. 由 (5.1.6)，

$$F_bE_c + 90^\circ = AF_b + AE_c - AO^{I^a} + 90^\circ = 2 \cdot I^bI^c - AO^{I^a} = AO^I,$$

其中 O^I 為 $\triangle I^aI^bI^c$ 的外心，也同時是 O^{I^a} 關於 I^bI^c 的對稱點。由 (5.2.4)，O^I 是 I 關於 O 的對稱點，因此 AO^I 平行於 $A^*I = AS + 90^\circ$，故 AS 平行於 F_bE_c。 ■

Proposition 5.1.8. 我們有 AM_a, ID, EF 共點。

Proof 1. 令 $T = ID \cap EF$。過 T 作平行於 BC 的直線 $T\infty_{BC}$ 分別交 CA, AB 於 C_T, B_T，則 I 分別關於 B_TC_T, C_TA, AB_T 的垂足 T, E, F 共線。由西姆松

定理 (1.4.1)，I 位於 $\odot(AB_TC_T)$ 上。因此由 $\triangle AB_TC_T \cup I$ 與 $\triangle ABC \cup N_a$（關於 A）位似就有 $A, \overline{B_TC_T}$ 中點 $T, \overline{BC}$ 中點 M_a 共線。 ■

Proof 2. 同樣地，令 $T = ID \cap EF$。過 A 作平行於 BC 的直線 $A\infty_{BC}$ 並交 EF 於 S，則 S, T 皆位於 A 關於 ω 的極線 $\mathfrak{p}_\omega(A)$ 上。由於 $IT \perp AS$，所以 $\mathfrak{p}_\omega(T) = AS$，故

$$A(B, C; T, \infty_{BC}) \overset{\mathfrak{p}_\omega}{=} (F, E; T, S) = -1,$$

即 AT 平分 $\overline{BC}$。 ■

Proposition 5.1.9. 設 BI, CI 分別與 CA, AB 交於 Y, Z，YZ 與 $\odot(ABC)$ 交於 P, Q 兩點，則 I, I^b, I^c, P, Q 共圓。

Proof. 由 Y 位於 $\odot(ACPQ)$ 及 $\odot(ACII^b)$ 的根軸上知 I, I^b, P, Q 共圓。同理有 I, I^c, P, Q 共圓。 ■

Proposition 5.1.10. 設 H_a 為 A 關於 BC 的垂足，則

$$(H_a, AI \cap BC; D, D') = -1.$$

Proof. 由於

$$(A, AI \cap BC; I, I^a) = B(A, C; I, I^a) = -1,$$

將這個點列關於 BC 投影（即考慮變換 $P \mapsto \infty_{\perp BC}P \cap BC$）我們得到

$$(H_a, AI \cap BC; D, D') = -1.$$ ■

Proposition 5.1.11. 令 H_a 為 A 關於 BC 的垂足，則 DI^a 平分 $\overline{AH_a}$。

Proof. 我們有

$$(A, H_a; \infty_{AH_a}, DI^a \cap AH_a) = D(A, AI \cap BC; I, I^a) = -1,$$

即 DI^a 平分 $\overline{AH_a}$。 ■

在這節剩餘的部分，設 H_A, H_B, H_C 分別為 $\triangle BIC, \triangle CIA, \triangle AIB$ 的垂心。

Proposition 5.1.12. 點 H_A 為 I^a 關於 M_a 的對稱點。

Proof. 這只是因為

$$BH_A = CI + 90^\circ = CI^a, \quad CH_A = BI + 90^\circ = BI^a. \qquad \blacksquare$$

Proposition 5.1.13. 令 H_b^{BIC} 為 B 關於 CI 的垂足，H_c^{BIC} 為 C 關於 BI 的垂足。則 H_b^{BIC} 為 EF 與 B-中位線 M_cM_a 的交點，H_c^{BIC} 為 EF 與 C-中位線 M_aM_b 的交點。

Proof. 由於 M_a 為 $\triangle H_b^{BIC}$ 的外心，

$$M_aH_b^{BIC} = H_b^{BIC}B + H_b^{BIC}C - BC + 90^\circ = 2 \cdot CI - BC = CA,$$

因此 $H_b^{BIC} \in M_cM_a$。注意到 B, I, H_b^{BIC}, F 共圓，所以

$$\measuredangle IFH_b^{BIC} = \measuredangle BIC + 90^\circ = \measuredangle IAE + \measuredangle IFE,$$

即 $H_b^{BIC} \in EF$。同理，我們有 $H_c^{BIC} = EF \cap M_aM_b$。 $\blacksquare$

Proposition 5.1.14. 我們有

$$(D, ID \cap EF; I, H_A) = -1.$$

Proof. 令 $\triangle H_b^{BIC}DH_c^{BIC}$ 為 $\triangle BIC$ 的垂足三角形。由 (5.1.13)，$H_b^{BIC}H_c^{BIC} = EF$，故

$$H_b^{BIC}(D, ID \cap EF; I, H_A) = (D, D^\vee; B, C) = -1. \qquad \blacksquare$$

這件事結合西瓦三角形的性質，我們便得到：

Corollary 5.1.15. 內心 I 關於 $\triangle H_AH_BH_C$ 的西瓦三角形為切點三角形 $\triangle DEF$。

除此之外，我們能得到一個關於 H_A 的好刻畫：

Proposition 5.1.16. 點 H_A 關於 ω 的極線 $\mathfrak{p}_\omega(H_A)$ 為 A-中位線 M_bM_c。也就是說，H_A 關於 ω 的反演點為 I 關於 M_bM_c 的垂足。

Proof. 令 $T = ID \cap EF$，那麼 $\mathfrak{p}_\omega(T)$ 為過 A 且平行於 BC 的直線 $A\infty_{BC}$（見 (5.1.8) 的證明）。因為配極保交比，

$$(BC, A\infty_{BC}; \mathcal{L}_\infty, \mathfrak{p}_\omega(H_A)) \overset{\mathfrak{p}_\omega}{=} (D, S; I, H_A) = -1,$$

即 $\mathfrak{p}_\omega(H_A)$ 為 A-中位線。 ■

5.2 $X_2 \sim X_5$

- X_2 為重心（見 (0.3.3)），定義為三條中線的交點，一般的常見記號為 G；
- X_3 為外心（見 (0.1.9)），定義為三條中垂線的交點，一般的常見記號為 O；
- X_4 為垂心（見第 0.1 節的習題 1），定義為三條垂線的交點，一般的常見記號為 H；
- X_5 為九點圓 ε 的圓心（見 (1.1.5)），一般的常見記號為 N。

最重要的性質基本上如下：

Proposition 5.2.1. 外心 O 與垂心 H 為 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點。

Proposition 5.2.2. 四點 G, O, H, N 共於歐拉線 $\mathcal{E}$ 且

$$\frac{HG}{GO} = \frac{OG}{GN} = 2, \quad (G, H; O, N) = -1.$$

剩下的部分來討論他們與 I 的關係。

Proposition 5.2.3. 切點三角形 DEF 的歐拉線是 OI。

Proof. 注意到 $\triangle DEF$ 與 $\triangle I^aI^bI^c$ 位似，$\triangle I^aI^bI^c$ 的歐拉線是 OI，且 I 在 $\triangle DEF$ 的歐拉線上，因此他們的歐拉線重合，故 $\triangle DEF$ 的歐拉線是 OI。 ■

Proposition 5.2.4. 外接圓 Ω 為 $\triangle I^aI^bI^c, \triangle II^bI^c, \triangle I^aIIc, \triangle I^aI^bI$ 的共同九點圓。

Proof. 單純地注意到 $\triangle ABC$ 為 $\triangle I^aI^bI^c$ 的垂足三角形。 ■

Proposition 5.2.5. 點 I 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}(I)$ 垂直 OI，意即，若 I^cI^a, I^aI^b 分別與 CA, AB 交於 Y, Z，則 $OI \perp YZ$。

Proof. 由

$$YI^c \cdot YI^a = YC \cdot YA, \quad ZI^a \cdot ZI^b = ZA \cdot ZB,$$

我們得到 YZ 為 $\odot(ABC)$ 與 $\odot(I^aI^bI^c)$ 根軸，故垂直 O 與 $\triangle I^aI^bI^c$ 的外心 O^I 的連線。注意到 I, O 分別為 $\triangle I^aI^bI^c$ 的垂心及九點圓圓心，由 (5.2.2)，我們得到 $OI = OO^I \perp YZ$。 ■

Proposition 5.2.6. 設 D 關於 EF 的對稱點為 U，則 AU, BC, OI 共點。

Proof. 令 D^* 為 D 關於 ω 的對徑點，H_I 為 $\triangle DEF$ 的垂心，$H_I' \in \omega$ 為 H_I 關於 EF 的對稱點，X 為 H_I 關於 BC 的垂足。則

$$\measuredangle XH_ID = \measuredangle D^*DH_I' = -\measuredangle H_I'DD^*, \quad \measuredangle DXH_I = 90^\circ = -\measuredangle D^*H_I'D$$

告訴我們 $\triangle H_IXD \mathrel{\bar{\sim}} \triangle DH_I'D^*$。所以如果讓 M_d 為 $\overline{EF}$ 中點，那麼透過

$$\frac{H_IX}{H_IU} = \frac{H_IX}{DH_I'} = \frac{DH_I}{D^*D} = \frac{IM_d}{ID^*} = \frac{ID}{IA},$$

我們得到 $\triangle IAD$ 與 $\triangle H_DUX$ 位似。結合 (5.2.4) 便得到 $IH_D = IO$, AU, $DX = BC$ 共點。 ■

Proposition 5.2.7. 點對 (I, H) 為 $\triangle DEF$ 的垂足三角形 $\triangle H_dH_eH_f$ 的一對等角共軛點。

Proof. 由對稱性，我們只需要證明

$$H_dI + H_dH = H_dH_e + H_dH_f = 2 \cdot EF.$$

由 (5.1.5) 的證明，完全五線形 $\triangle ABC \cup EF \cup DH_d$ 有共同的密克點 S，因此 (4.1.6) 告訴我們 $\triangle AEF$, $\triangle ABC$ 的垂心和 H_d 共線。注意到 $\triangle AEF$ 垂心是 I 關於 EF 的對稱點 I'，所以

$$H_dI + H_dH = H_dI + H_dI' = 2 \cdot EF.$$ ■

Proposition 5.2.8. 由 E^aF^a, F^bD^b, D^cE^c 所圍成的三角形 $\triangle_I'$ 與 $\triangle ABC$ 的透視中心為 H，且 H 為 $\triangle_I'$ 的外心。

Proof. 由對稱性，我們只需證明過 A 垂直於 BC 的直線與 $F^bD^b \perp BI$, $D^cE^c \perp CI$ 共點。這等價於 $\triangle AF^bE^c$ 與 $\triangle IBC$ 正交，即 $I\infty_{\perp F^bE^c}$, $BA^* = B\infty_{\perp E^cA}$, $CA^* = C\infty_{\perp AF^b}$ 共點。由 (5.1.7)，F^bE^c 垂直於 IA^*，所以上述三線共點於 A^*，從而原命題得證。 ■

5.3 X_6

- X_6 為共軛重心（見 (2.2.16)），定義為重心 G 的等角共軛點，一般的常見記號為 K。

Proposition 5.3.1. 直線 AK 平分 $\overline{H_bH_c}$。

Proof. 令 M_{h_a} 為 $\overline{H_bH_c}$ 中點。由於 $\triangle ABC \overset{-}{\sim} \triangle AH_bH_c$，

$$\measuredangle H_bAM_{H_a} = -\measuredangle BAM_a = \measuredangle CAK,$$

即 A, M_{H_a}, K 共線。 ■

Proposition 5.3.2. 令 $\triangle K_aK_bK_c$, $\triangle K_AK_BK_C$, $\triangle K^aK^bK^c$ 分別為 K 的西瓦三角形、圓西瓦三角形及反西瓦三角形。那麼

$$(A, K_a; K, K_A) = (B, K_b; K, K_B) = (C, K_c; K, K_C) = -2,$$
$$(A, K_A; K_a, K^a) = (B, K_B; K_b, K^b) = (C, K_C; K_c, K^c) = -1.$$

Proof. 我們有

$$(A, K_a; K, K_A) \overset{B}{=} (A, C; K_B, K_A) = (A, C; K_B, B) \cdot (A, C; B, K_A) = (-1) \cdot 2 = -2,$$

同理有

$$(B, K_b; K, K^b) = (C, K_c; K, K^c) = -2.$$

由於 K^cK^a 與 Ω 相切於 B，因此

$$(A, K_A; K_a, K^a) \overset{B}{=} (A, K_A; C, B) = -1,$$

同理有

$$(B, K_B; K_b, K^b) = (C, K_C; K_c, K^c) = -1. \qquad \blacksquare$$

Proposition 5.3.3. 直線 M_aK 平分線段 $\overline{AH_a}$。

Proof. 令 T_a 為 B, C 關於 $\odot(ABC)$ 的切線的交點，則 A, K, T_a 共線且 M_aT_a 垂直於 BC。因此

$$\begin{aligned}(A, H_a; M_aK \cap AH_a, \infty_{AH_a}) &\overset{M_a}{=} (A, AK \cap BC; K, T_a) \\ &\overset{B}{=} (A, C; BK \cap \odot(ABC), B) = -1,\end{aligned}$$

即 M_aK 平分 $\overline{AH_a}$。 $\blacksquare$

Proposition 5.3.4. 對於外接圓上任意一點 X，X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}(X)$ 過 K。

Proof. 令 $\triangle X_aX_bX_c$ 為 X 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形。分別在 CA, AB 上取 $X_b^\vee$, $X_c^\vee$ 使得

$$(C, A; X_b, X_b^\vee) = (A, B; X_c, X_c^\vee) = -1,$$

則 $\mathfrak{t}(X) = X_b^\vee X_c^\vee$。由

$$(C, A; B, XX_b^\vee \cap \Omega) \overset{X}{=} (C, A; X_b, X_b^\vee) = -1 = (C, A; B, BK \cap \Omega),$$

可得 $K_B := XX_b^\vee \cap BK \in \Omega$，同理有 $K_C := XX_c^\vee \cap CK \in \Omega$。考慮 Ω 上的六折線 ABK_BXK_CC，由帕斯卡定理可得 K, $X_b^\vee$, $X_c^\vee$ 共線，即 $K \in \mathfrak{t}(X)$。 $\blacksquare$

Proposition 5.3.5. 對於任意一點 P，令 $\triangle P_AP_BP_C$ 為 P 的圓西瓦三角形，則 K 與 $\triangle P_AP_BP_C$ 的共軛重心 K_P 的連線過 P。

Proof. 考慮以 P 為中心，$\mathbf{Pow}_\Omega(P)$ 為反演冪的反演變換 $\mathfrak{I}$。我們有 $A \mapsto P_A$, $B \mapsto P_B$, $C \mapsto P_C$。因為反演變換保交比，所以

$$(P_B, P_C; P_A, \mathfrak{I}(K_A)) = (B, C; A, K_A) = -1,$$

即 $\mathfrak{I}(K_A) = P_AK_P \cap \Omega =: K_{P_A}$。令 $K_a = AK_A \cap BC$。那麼 $\mathfrak{I}(K_a)$ 為 $\odot(PP_AK_{P_A})$ 與 $\odot(PP_BP_C)$ 的第二個交點。由根心定理，$P\mathfrak{I}(K_a)$, $P_AK_{P_A}$, P_BP_C 共點，即

$K_a, P, K_{p_A} := P_AK_P \cap P_BP_C$ 共線。故由 (5.3.2)

$$(P_A, K_{p_A}; PK \cap P_AK_P, K_{P_A}) \overset{P}{=} (A, K_a; K, K_A) = -2 = (P_A, K_{p_A}; K_P, K_{P_A}),$$

即 K, K_P, P 共線。 ■

5.4 $X_7 \sim X_{10}$

- X_7 為熱爾岡點（見第 0.3 節的習題 4），定義為參考三角形與切點三角形的透視中心，一般的常見記號為 Ge；
- X_8 為奈格爾點（見第 0.3 節的習題 5），定義為參考三角形與旁切點三角形的透視中心，一般的常見記號為 Na；
- X_9 為 Mittenpunkt 點，定義為旁心三角形與中點三角形的透視中心，一般的常見記號為 Mt；
- X_{10} 為 Spieker center，定義為中點三角形的內心，一般的常見記號為 Sp。

Proposition 5.4.1. 點 Mt 為 Ge 的補點。

Proof. 由 (5.1.2)，$M_aMt = M_aI^a \parallel AGe$。同理有 $M_bMt \parallel BGe$, $M_cMt \parallel CNa$。因此 $\triangle ABC \cup Ge \overset{+}{\sim} \triangle M_aM_bM_c \cup Mt$，即 $Mt = Ge^{\complement}$。 ■

Proposition 5.4.2. 點 I, Sp 分別為 Na, I 的補點。特別地，

$$(G, Na; I, Sp) = -1$$

且 $HNa \parallel OI \parallel NSp$。

Proof. 由 (5.1.2)，$M_aI \parallel ANa$。同理有 $M_bI \parallel BNa, M_cI \parallel CNa$。因此 $\triangle ABC \cup Na \cup I \overset{+}{\sim} \triangle M_aM_bM_c \cup I \cup Sp$，即 $I = Na^{\complement}, Sp = I^{\complement}$。 ■

Proposition 5.4.3. 點 Mt 為 $\triangle I^aI^bI^c$ 的共軛重心。

Proof. 因為 $\triangle ABC$ 是 $\triangle I^aI^bI^c$ 的垂足三角形，所以由 (5.3.1)，$\triangle I^aI^bI^c$ 的共軛重心 K^I 滿足

$$K^I = I^aM_a \cap I^bM_b \cap I^cM_c = Mt. \qquad \blacksquare$$

Proposition 5.4.4. 直線 H_AGe 過 $\overline{EF}$ 中點 M_d。

Proof. 標號同 (5.1.14)，考慮 AD 和 EF 的交點 U，則

$$M_d(D,U;A,Ge) = -1 = M_d(D,S;I,H_A).$$

故 Ge, M_d, H_A 共線。 $\blacksquare$

Proposition 5.4.5. 直線 AI 為 H_ANa 在補點變換下的像。

Proof. 令 X 為 Na 關於 M_a 的對稱點。那麼 G 為 $AXNa$ 的重心。所以結合 I 為 Na 的補點，我們知道 I 為 $\overline{AX}$ 中點。注意到 H_A 關於 M_a 的對稱點為 I^a，因此 $H_ANa \parallel I^aX = AI$。故 $I = Na^{\complement}$ 告訴我們 $AI = (H_ANa)^{\complement}$。 $\blacksquare$

Proposition 5.4.6. 三點 I, K, Mt 共線。

Proof. 由 (5.3.5)，IK 會過 I 的圓西瓦三角形 $\triangle N_aN_bN_c$ 的共軛重心 K_I。因為 $\triangle I^aI^bI^c$ 與 $\triangle N_aN_bN_c$ 的位似中心為 I 且 Mt 為 $\triangle I^aI^bI^c$ 的共軛重心，所以 I, K_I, Mt 共線。故 I, K, Mt 共線。 $\blacksquare$

Proposition 5.4.7. 由 E_aF_a, F_bD_b, D_cE_c 所圍成的三角形與 $\triangle I^aI^bI^c$ 的位似中心為 Mt，且位似比為 $-\frac{2R+r}{2R}$，其中 R, r 分別為 Ω, ω 的半徑長。

Proof. 令 $X = F_bD_b \cap D_cE_c$。我們只需證明 X, I^a, M_a 共線，而這只是因為 $\triangle XD_bD_c$ 與 $\triangle I^aBC$ 的位似中心是 M_a (注意到 $\overline{D_bD_c}$ 的中點是 M_a)。

注意到 $XH_A = I^aM_a \parallel AD$ 且由 (5.2.8)，$AX \parallel DH_A$，因此 $(AH_A)(XD)$ 是個平行四邊形。令 O^I 為 $\triangle I^aI^bI^c$ 的外心，我們有 $(I^aO^I)(N_aN_a^*)$ 為平行四

邊形。故（如果取 $\overrightarrow{ID}$ 方向為正）

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XH} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AH} &= (\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IH_A}) + 2 \cdot \overrightarrow{OM_a} \\ &= r - 2 \cdot \overrightarrow{N_aM_a} + 2 \cdot \overrightarrow{OM_a} \\ &= r + 2R, \\ \overrightarrow{I^aO^I} = \overrightarrow{N_aN_a^*} &= -2R,\end{aligned}$$

因此位似比為 $-\frac{2R+r}{2R}$。 ■

Proposition 5.4.8. 三點 H, Mt, Sp 共線。

Proof. 見 (5.6.8)。 ■

5.5 X_{11}

- X_{11} 為費爾巴哈點（見 (3.3.4)），定義為內切圓 ω 與九點圓 ε 的切點，一般的常見記號為 Fe。

Proposition 5.5.1. 三點 I, N, Fe 共線。

Proposition 5.5.2. 令 X, Y, Z 分別為 D, E, F 關於 $\overline{EF}$, $\overline{FD}$, $\overline{DE}$ 的中垂線的對稱點。那麼 Fe 為 $\triangle XYZ$ 與 $\triangle M_aM_bM_c$ 的位似中心。

Proof. 我們有

$$YZ = ((F + D - E) + (D + E - F))_\omega = 2 \cdot D_\omega = M_bM_c.$$

由對稱性，我們得到 $\triangle XYZ$ 與 $\triangle M_aM_bM_c$ 位似。而剩下的就只是 Fe 存在性的構造證明（見 (3.3.4)）。 ■

Proposition 5.5.3. 我們有 $\triangle AOI \overset{+}{\sim} \triangle FeM_aD$。

Proof. 令 X 為 D 關於 $\overline{EF}$ 的中垂線的對稱點。那麼 Fe, X, M_a 共線 (5.5.2) 及 M_aD 與 ω 相切告訴我們 $\triangle FeM_aD \overset{-}{\sim} \triangle DM_aX$。因此原命題這等價於 $\triangle AA^*I \overset{+}{\sim} \triangle DD'X$。

注意到 N_a，作為 $\overline{XD}$ 的中垂線與 $\overline{DD'}$ 的中垂線的交點，為 $\triangle DD'X$ 的外心，所以由 A^*I 與 N_aD 交於 Ω 上 (見 (5.1.4)) 知

$$\measuredangle XD'D = \measuredangle AN_aD = \measuredangle AA^*I = -\measuredangle IA^*A.$$

而

$$\measuredangle D'DX = \perp AI - BC = \measuredangle HIA = \measuredangle IAO = -\measuredangle A^*AI.$$

故 $\triangle AA^*I \overset{+}{\sim} \triangle DD'X$，從而原命題成立。 ■

Corollary 5.5.4. 點 Fe 為 ε 與 ω 的外位似中心。

Proof. 由 (5.5.2) 及 (5.5.3)，我們有

$$\frac{FeX}{FeM_a} = 1 - \frac{M_aX}{M_aFe} = 1 - \left(\frac{\overline{M_aD}}{\overline{M_aFe}}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\overline{OI}}{\overline{OA}}\right)^2 = \frac{2r}{R} > 0,$$

因此 Fe 為外位似中心。 ■

這只是在表明 Fe 並非內位似中心。同樣的證明會告訴我們三個旁費爾巴哈點 Fe^a, Fe^b, Fe^c 會分別是 ε 與 $\omega^a, \omega^b, \omega^c$ 的內位似中心。

Corollary 5.5.5. 點 Fe 關於 $\triangle M_aM_bM_c$ 及 $\triangle DEF$ 的施坦納線皆為 OI。

Proof. 由 (5.5.3)，

$$\begin{aligned}(M_a + M_b + M_c - Fe)_\varepsilon &= (M_a + M_b + M_c - H_a)_\varepsilon + \measuredangle FeM_aH_a \\ &= \mathbf{T}_{M_a}\varepsilon + \measuredangle AOI = \perp OI, \\ (D + E + F - Fe)_\omega &= (E + F)_\omega + \measuredangle FeDM_a \\ &= \perp AI + \measuredangle AIO = \perp OI.\end{aligned}$$

因此 Fe 關於 $\triangle M_aM_bM_c$ 及 $\triangle DEF$ 的施坦納線皆平行於 OI (見 (1.4.5))。而 OI 為 $\triangle DEF$ 的歐拉線，所以過其垂心，且 O 為 $\triangle M_aM_bM_c$ 的垂心，因此兩條施坦納線皆為 OI。 ■

Proposition 5.5.6. 點 I 關於 Ω 的反演點 $\mathfrak{I}_\Omega(I)$ 與 Fe 的連線平行於歐拉線 $\mathcal{E}$。

Proof. 我們有

$$\frac{O\mathfrak{I}_\Omega(I)}{OI} = \frac{R^2}{\overline{OI}^2} = \frac{R^2}{R^2 - 2Rr} = \frac{R/2}{R/2 - r} = \frac{NFe}{NI},$$

所以 $\mathfrak{I}_\Omega(I)Fe \parallel ON = \mathcal{E}$。 ■

5.6 X_n, $n < 99$

5.6.1 X_{20}

- X_{20} 為 de Longchamps 點，定義為垂心 H 關於外心 O 的對稱點，一般的常見記號為 L。

顯然地，我們有：

Proposition 5.6.1. 點 L 為 H 的反補點且

$$(O, H; G, L) \overset{\complement}{=} (N, O; G, H) = -1.$$

Proposition 5.6.2. 令 L_a 為 AL 與 BC 的交點。那麼 OL_a 平分 $\overline{AH_a}$。

Proof. 注意到

$$(A, H_a; OL_a \cap AH_a, \infty_{AH_a}) \overset{O}{=} (AO \cap BC, H_a; L_a, M_a) \overset{A}{=} (O, H; L, G) = -1,$$

所以 $OL_a \cap AH_a$ 為 $\overline{AH_a}$ 中點。 ■

Proposition 5.6.3. 三點 I, Ge, L 共線且

$$\frac{IGe}{GeL} = -\frac{r}{4R + 2r}.$$

Proof. 這三點共線等價於 $Sp = I^\complement$, $Mt = Ge^\complement$, $H = L^\complement$ 共線，即 (5.6.8)。而

$$\frac{HMt}{MtBe} = \frac{2R + r}{2R}, \quad \frac{HSp}{SpBe} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{IGe}{GeL} = \frac{SpMt}{MtH} = -\frac{r}{4R + 2r}.$$ ■

5.6.2 X_{21}

Proposition 5.6.4. 四個三角形 $\triangle ABC, \triangle IBC, \triangle AIC, \triangle ABI$ 的歐拉線共於一點 $Sc = X_{21}$，稱為**西弗點** (**Schiffler point**)，且

$$\frac{GSc}{ScO} = \frac{2r}{3R},$$

其中 R, r 分別為 Ω, ω 的半徑長。

Proof. 令 $\mathcal{E}, \mathcal{E}_A$ 分別為 $\triangle ABC, \triangle IBC$ 的歐拉線，$X_A = \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_A$，並類似地定義 $\mathcal{E}_B, \mathcal{E}_C, X_B, X_C$。我們直接證明

$$\frac{GX_A}{X_AO} = \frac{2r}{3R}.$$

由對稱性，這告訴我們 $X_A = X_B = X_C$，即 $\mathcal{E}, \mathcal{E}_A, \mathcal{E}_B, \mathcal{E}_C$ 共點。

令 Y, Z 分別為 I, N_a 關於 BC 的對稱點。由於 H_A 為 I^a 關於 M_a 的對稱點，所以結合 A-版本的 (5.1.2) 我們得到 $\triangle H_AM_aZ \overset{+}{\sim} \triangle I^aM_aN_a \overset{+}{\sim} \triangle ADI$。如果令 P 為過 G 且垂直於 BC 的直線與 $\mathcal{E}_A$ 的交點，G_A 為 $\triangle IBC$ 的重心，那麼這告訴我們 $\triangle G_APG \overset{+}{\sim} \triangle H_AN_aZ \overset{+}{\sim} \triangle AYI$。因此

$$\frac{GX_A}{X_AO} = \frac{GP}{N_aO} = \frac{G_AG}{AI} \cdot \frac{IY}{N_aO} = \frac{2r}{3R}.$$ ■

Proposition 5.6.5. 點 Sc 的西瓦三角形 $\triangle Sc_aSc_bSc_c$ 與 $\triangle I^aI^bI^c$ 的透視中心為 O。

Proof. 令 $X = ASc \cap OM_a$。我們由孟氏定理有

$$\frac{M_aX}{XO} = -\frac{M_aA}{AG} \cdot \frac{GSc}{ScO} = \frac{r}{R}.$$

因此

$$(Y = AI \cap BC, AI \cap OSc_a; A, N_a) \overset{Sc_a}{=} (M_a, O; X, N_a) = \frac{r/R}{M_aN_a/N_aO} = \frac{DI}{M_aN_a}.$$

考慮關於 $\odot(IBC)$ 的反演變換 $\mathfrak{I}$，我們想要證明

$$\frac{DI}{M_aN_a} = (Y, I^a; A, N_a) \overset{\mathfrak{I}}{=} (A, I^a; Y, \infty_{AI}) = \frac{AY}{I^aY},$$

而這只是因為 $\triangle ADY \cup I \overset{+}{\sim} \triangle I^aM_aY \cup N_a$。 ■

5.6.3 X_{40}

- X_{40} 為 Bevan 點，定義為內心 I 關於外心 O 的對稱點，一般的常見記號為 Be。

Proposition 5.6.6. 點 Be 為旁心三角形 $\triangle I^aI^bI^c$ 的外心。

Proof. 由於 $\overline{II^a}$ 中點 N_a 與 O 的連線垂直於 BC，I^aBe 也垂直於 BC。因為 $\triangle I^aI^bI^c$ 與 $\triangle DEF$ 位似，所以 $\triangle I^aI^bI^c$ 的外心 O^I 滿足 $I^aO^I \parallel DI \parallel I^aBe$。同理有 $I^bO^I \parallel I^bBe, I^cO^I \parallel I^cBe$，因此 $O^I = Be$。 ■

Proposition 5.6.7. 點 Be 為 $\overline{NaL}$ 中點。

Proof. 因為

$$\frac{GNa}{NaI} \cdot \frac{IBe}{BeO} \cdot \frac{OL}{LG} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-2) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -1,$$

所以由孟氏定理，Na, Be, L 共線。再由孟氏定理，

$$\frac{NaBe}{BeL} = -\frac{NaI}{IG} \cdot \frac{GO}{OL} = -(-3) \cdot \frac{1}{3} = 1,$$

即 Be 為 $\overline{NaL}$ 中點。 ■

Proposition 5.6.8. 四點 H, Mt, Sp, Be 共線且

$$\frac{HMt}{MtBe} = \frac{2R+r}{2R}, \quad \frac{HSp}{SpBe} = 1.$$

Proof. 由 (5.2.8) 及 (5.4.7)，$\triangle_I', \triangle I^aI^bI^c$ 的外心 H, Be 連線過他們的位似中心 Mt 且

$$\frac{HMt}{MtBe} = \frac{2R+r}{2R}.$$

因為

$$(O, \infty_{OI}; I, HSp \cap OI) \overset{H}{=} (G, Na; I, Sp) = -1,$$

所以 HSp 過 I 關於 O 的對稱點 Be。故 H, Mt, Sp, Be 共線。

最後，由於 Sp 為 $\overline{INa}$ 中點且 $IBe = IO \parallel HNa$，所以 Sp 也是 $\overline{HBe}$ 中點。 ■

5.6.4 X_{54}

- X_{54} 為 Kosnita 點，定義為九點圓圓心 N 的等角共軛點，一般的常見記號為 Ko。

Proposition 5.6.9. 令 O_{OA} 為 $\triangle OBC$ 的外心。那麼 A, Ko, O_{OA} 共線。

Proof. 注意到 $\triangle ABC \overset{-}{\sim} \triangle AH_bH_c$ 且 $\triangle AH_bH_c$ 的外心為 $\overline{AH_a}$ 中點（位於 ε 上），因此 $\triangle ABC \cup O_{OA} \overset{-}{\sim} \triangle AH_bH_c \cup N$。所以

$$AO_{OA} + AN = AB + AH_b = AB + AC = AKo + AN,$$

即 A, Ko, AO_{OA} 共線。 ■

Proposition 5.6.10. 令 B', C' 分別為 B, C 關於 CA, AB 的對稱點，則 $AKo \perp B'C'$。

Proof. 設 X 為 O 關於 A 的對稱點，B, C 關於外接圓的切線交於 D，則我們只須證明 XD 垂直 $B'C'$，注意到

$$\frac{B'C}{CD} = \frac{XO}{OD} = \frac{C'B}{BD}, \quad \measuredangle B'CD = \measuredangle XOD = \measuredangle C'BD.$$

故 D 是 $\triangle B'XC' \overset{+}{\sim} \triangle COB$ 的旋似中心。 ■

Proposition 5.6.11. 點 Sc 為 $\triangle N_aN_bN_c$ 的 Kosnita 點 $Ko(\triangle N_aN_bN_c)$。

Proof. 由對稱性，我們只需證明 $\triangle IBC$ 的歐拉線 $\mathcal{E}_A$ 過 $Ko(\triangle N_aN_bN_c)$。令 G_A 為 $\triangle IBC$ 的重心，G'_A 為 I 關於 G_A 的對稱點。那麼 $\mathcal{E}_A = N_aG_A$ 過 $Ko(\triangle N_aN_bN_c)$ 等價於 $I^aG'_A$ 過 $Ko^I = Ko(\triangle I^aI^bI^c)$。令 J 為 I 關於 M_a 的對稱點，即 $\triangle I^aBC$ 的垂心。我們有

$$(I, G'_A; M_a, J) = -1 = (Be = O^I, N^I; G^I, I = H^I).$$

因為 (I^aI, I^aBe), (I^aM_a, I^aG^I), (I^aJ, I^aI) 皆為關於 $\angle I^bI^aI^c$ 的等角線，所以 $(I^aG'_A, I^aN^I)$ 也是關於 $\angle I^bI^aI^c$ 的等角線，即 $Ko^I \in I^aG'_A$。 ■

Corollary 5.6.12. 垂足三角形 $\triangle H_aH_bH_c$ 的歐拉線平行於 OKo。

5.6.5 X_{55}, X_{56}

- X_{55} 為 Ω 與 ω 的內位似中心；
- X_{56} 為 Ω 與 ω 的外位似中心。

Proposition 5.6.13. 四點 I, O, X_{55}, X_{56} 共線且

$$(I, O; X_{55}, X_{56}) = -1.$$

Proposition 5.6.14. 兩圓 Ω 與 ω 的內位似中心 X_{55} 為 Ge 的等角共軛點 Ge^*；Ω 與 ω 的外位似中心 X_{56} 為 Na 的等角共軛點 Na^*。

Proof. 令 X, Y, Z 分別為 D, E, F 關於 AI, BI, CI 的對稱點。那麼（假設 $\triangle ABC$ 是以逆時針作標號）

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XI} &= 2 \cdot \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{ID} + 180^\circ \\ &= \overrightarrow{AO} + 180^\circ = -\overrightarrow{AO},\end{aligned}$$

同理有 $\overrightarrow{YI} = -\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{ZI} = -\overrightarrow{CO}$。故 $\triangle ABC$ 與 $\triangle XYZ$ 位似且位似比是負的，也就是說，它們的位似中心為 X_{55}。因此由

$$\measuredangle GeAI = \measuredangle DAI = \measuredangle IAX = \measuredangle IAX_{55}$$

及其他兩條對稱的式子我們得到 X_{55} 為 Ge 的等角共軛點。

令 X^*, Y^*, Z^* 分別為 X, Y, Z 關於 ω 的對稱點。我們有 $\overrightarrow{X^*I} = \overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{Y^*I} = \overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{Z^*I} = \overrightarrow{CO}$，因此 $\triangle ABC$ 與 $\triangle XYZ$ 的位似中心為 X_{56}。因為 X^* 關於 AI 的對稱點為 D 關於 ω 的對徑點 D^*，且 A, D^*, Na 共線，所以由

$$\measuredangle NaAI = \measuredangle D^*AI = \measuredangle IAX^* = \measuredangle IAX_{56}$$

及其他兩條對稱的式子我們得到 X_{56} 為 Na 的等角共軛點。 ■

因此我們就以 Ge^* 代表 X_{55}，Na^* 代表 X_{56}。考慮三圓 $\Omega, \omega, \varepsilon$，由 Monge 定理：

Proposition 5.6.15. 我們有 G, Fe, Ge^* 共線，H, Fe, Na^* 共線。

5.6.6 X_{65}

- X_{65} 為切點三角形 $\triangle DEF$ 的垂心。

Proposition 5.6.16. 切點三角形 $\triangle DEF$ 的垂心 X_{65} 為 Sc 的等角共軛點 Sc^*。

Proof. 由 (5.6.5)，ASc, OI^a, BC 共點，而由 A-版本的 (5.2.6)，$A(D^a)'$, OI^a, BC 共點，其中 $(D^a)'$ 為 D^a 關於 E^aF^a 的對稱點。因此我們只需證明 $(A(D^a)', AX_{65})$ 為關於 $\angle BAC$ 的等角線，而這只是因為 $\triangle AEF \cup X_{65} \overset{-}{\sim} \triangle AF^aE^a \cup D'$。 ■

因此我們就以 Sc^* 代表 X_{65}。

Proposition 5.6.17. 點 Sc^* 位於 OI 上且

$$\frac{ScI}{IO} = \frac{r}{R}.$$

Proof. 我們有 $\triangle DEF \cup I \cup Sc^* \overset{+}{\sim} \triangle N_aN_bN_c \cup O \cup I$，因此 I, Sc^*, O 共線且

$$\frac{Sc^*I}{IO} = \frac{ID}{ON_a} = \frac{r}{R}.$$ ■

Proposition 5.6.18. 兩點 Ge^*, Sc^* 是關於以 O 為中心，$\overline{OI}$ 為半徑長的圓的反演點對，也就是說，

$$(I, Be; Ge^*, Sc^*) = -1.$$

Proof. 這只是因為

$$\frac{ScO}{IO} = \frac{r+R}{R} = \frac{IO}{Ge^*O}.$$ ■

Proposition 5.6.19. 我們有

(i) $GeNa^* \cap Ge^*Na = Sc$；

(ii) $GeNa \cap Ge^*Na^* = Sc^*$。

Proof. 因為

$$\frac{GSc}{ScO} \cdot \frac{OGe^*}{Ge^*I} \cdot \frac{INa}{NaG} = \frac{2r}{3R} \cdot \frac{R}{r} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1,$$

所以由孟氏定理，Sc, Ge^*, Na 共線。類似地，由 (5.6.3)，

$$\frac{LSc}{ScO}\cdot\frac{ONa^*}{Na^*I}\cdot\frac{IGe}{GeL}=\left(-\frac{12R+6r}{3R}\right)\cdot\left(-\frac{R}{r}\right)\cdot\left(-\frac{r}{4R+2r}\right)=-1,$$

因此 Sc, Na^*, Ge 共線。

由 (7.4.5)，我們便有 $Sc^* = GeNa \cap Ge^*Na^*$。不過我們這邊給個基礎證明：我們本來就知道它位於 $OI = Ge^*Na^*$ 上，所以剩 Ge, Na, Sc^* 共線。由 (5.6.3), (5.6.7), (5.6.17)，

$$\frac{IGe}{GeL}\cdot\frac{LNa}{NaBe}\cdot\frac{BeSc^*}{Sc^*I}=\left(-\frac{r}{4R+2r}\right)\cdot(-2)\cdot\left(-\frac{2R+r}{r}\right)=-1,$$

故 Ge, Na, Sc^* 共線。 ■

Proposition 5.6.20. 直線 $SpSc^*$ 為 ISc 在補變換下的像。

Proof. 由於 $I^{\complement} = Sp$，所以我們只需證明 $Sc^*Sc^{\complement}$ 平行於 ISc 就好。由 (5.6.17) 及 (5.6.4)，

$$\frac{Sc^*I}{IO}=\frac{r}{R}=\frac{3}{2}\cdot\frac{GSc}{ScO}=\frac{Sc^{\complement}Sc}{ScO},$$

故 $Sc^*Sc^{\complement} \parallel ISc$。 ■

5.6.7 X_{69}

- X_{69} 為垂心 H 的等截共軛點。

Proposition 5.6.21. 垂心 H 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點 H' 為共軛重心 K 的反補點 X_{69}。

Proof. 令 M 為 $\overline{AH_a}$ 中點。那麼由 (5.3.3)，A, X_{69}, $M^{\text{Ɔ}}$ 共線。而

$$\frac{BM^{\text{Ɔ}}}{M^{\text{Ɔ}}C}=\frac{M_bM}{MM_c}=\frac{CH_a}{H_aB}$$

告訴我們 $M^{\text{Ɔ}}$ 為 H_a 關於 $\overline{BC}$ 的等截點，因此 A, X_{69}, H' 共線。由對稱性，我們有

$$H' = AX_{69}\cap BX_{69}\cap CX_{69} = X_{69}.$$ ■

Proposition 5.6.22. 三點 Ge, Na, H' 共線。

Proof. 這等價於證明 $Mt = I^{\complement}$, $I = Na^{\complement}$, $K = (H')^{\complement}$ 共線，即 (5.4.6)。這邊給另一個比較直接的證明：我們證明

$$B(Na, H'; Ge, C) = C(Na, H'; Ge, B).$$

令 B' 為 B 關於 N_b 的對稱點，其中 N_b 為 $\overline{II^b}$ 中點。我們有

$$\begin{aligned} B(Na, H'; Ge, C) &= (E', BH' \cap CA; E, C) \\ &= (I^b, B'; I, \infty_{\perp CA}C \cap BI) \\ &= (I, B; I^b, \infty_{\perp CA}A \cap BI), \end{aligned}$$

同理，

$$C(Na, H'; Ge, B) = (I, C; I^c, \infty_{\perp AB}A \cap CI).$$

因此我們只需證明 BC, I^bI^c, $(\infty_{\perp CA}A \cap BI)(\infty_{\perp AB}A \cap CI)$ 共點，即 $I^bI^c \cap BC$, $\infty_{\perp CA}A \cap BI$, $\infty_{\perp AB}A \cap CI$ 共線，而這恰好是 A 關於 $\triangle BIC$ 的正交截線。 ■

5.7 X_n, $n \geq 99$

下次一定。

5.8 外傳

5.8.1 X_{19}

Definition 5.8.1. 令 ℓ_a 為 ω 與 ω^a 異於 BC, CA, AB 的切線，並類似地定義 ℓ_b, ℓ_c。令 ℓ'_a 為 ω^b 與 ω^c 異於 BC, CA, AB 的切線，並類似地定義 ℓ'_b, ℓ'_c。我們稱 $\triangle\ell_a\ell_b\ell_c$ 為 $\triangle ABC$ 的**內切線三角形** (**intangents triangle**)；$\triangle\ell'_a\ell'_b\ell'_c$ 為 $\triangle ABC$ 的**旁切線三角形** (**extangents triangle**)。

顯然地，內切線三角形的三邊 T_bT_c, T_cT_a, T_aT_b 分別為 BC 關於 I^bI^c 的對稱線，CA 關於 I^cI^a 的對稱線，AB 關於 I^aI^b 的對稱線，旁切線三角形的三邊 $T'_bT'_c$, $T'_cT'_a$, $T'_aT'_b$ 分別為 BC 關於 I^bI^c 的對稱線，CA 關於 I^cI^a 的對稱線，AB 關於 I^aI^b 的對稱線。

Proposition 5.8.2. 垂足三角形 $\triangle H_aH_bH_c$，內切線三角形 $\triangle T_aT_bT_c$ 及旁切線三角形 $\triangle T'_aT'_bT'_c$ 皆位似。

Proof. 由對稱性，我們只需證明（在形式和下）$H_bH_c = \ell_a = \ell'_a$，而這只是因為

$$\begin{aligned} H_bH_c &= AB + AB - BC, \\ \ell_a &= 2 \cdot II^a - BC = AB + AC - BC, \\ \ell'_a &= 2 \cdot I^bI^c - BC = AB + AC - BC. \end{aligned}$$

■

- X_{19} 為 Clawson 點，定義為旁切線三角形 $\triangle T'_aT'_bT'_c$ 與垂足三角形 $\triangle H_aH_bH_c$ 的位似中心，一般的常見記號為 $C\ell$。
- X_{33} 為內切線三角形 $\triangle T_aT_bT_c$ 與垂足三角形 $\triangle H_aH_bH_c$ 的位似中心。

Proposition 5.8.3. 直線 T_aI 垂直於 BC，且為 $\angle T_bT_aT_c$ 的其中一條角平分線。同理，T'_aI^a 也垂直於 BC，且為 $\angle T'_bT'_aT'_c$ 的其中一條角平分線。

Proof. 我們證明 T'_a 的情形。令 Y', Z' 分別為 $T'_cT'_a, T'_aT'_b$ 與 BC 的交點。那麼

$$\overline{Y'D'} = \overline{AF_a} = \overline{E_aA} = \overline{D'Z'},$$

即 D' 為 $\overline{Y'Z'}$ 中點。這告訴我們 I^a 位於 $\overline{Y'Z'}$ 的中垂線上。而

$$T'_aY' + T'_aZ' = (2I^cI^a - CA) + (2I^aI^b - AB) = 2BC = 2Y'Z'$$

也告訴我們 T'_a 位於 $\overline{Y'Z'}$ 的中垂線上，因此 T'_aI^a 垂直於 BC 且為 $\angle T'_bT'_aT'_c = \angle Y'T'_aZ'$ 的其中一條角平分線。 ■

注意到 $I^a\infty_{\perp BC}, I^b\infty_{\perp CA}, I^c\infty_{\perp AB}$ 共於 $\triangle I^aI^bI^c$ 的外心 Be，因此：

Corollary 5.8.4. 我們有

$$\triangle H_aH_bH_c \cup H \overset{+}{\sim} \triangle T_aT_bT_c \cup I \overset{+}{\sim} \triangle T'_aT'_bT'_c \cup Be.$$

特別地，$H, Mt, Sp, C\ell, Be$ 及 H, I, X_{33} 共線。

Proof. H, Mt, Sp, Be 共線就只是 (5.6.8)。 ■

類似地

Proposition 5.8.5. 以 Be 為圓心作圓 ω_{Be} 與 $\triangle T'_aT'_bT'_c$ 的三邊相切，那麼 ω_{Be} 的半徑長為 $2R+r$。

Proof. 令 D_{Be} 為 ω_{Be} 與 $T'_bT'_c$ 的切點，Be^a 為 Be 關於 I^bI^c 的對稱點。那麼由 A-版本的 (5.6.6)，$Be^aD \perp BC$，所以把 $BeD_{Be} \perp T'_bT'_c$ 關於 I^bI^c 對稱我們得到 D 為 D_{Be} 關於 I^bI^c 的對稱點。因此

$$\overline{BeD_{Be}} = \overline{Be^aD} = \left|\overrightarrow{Be^aI} + \overrightarrow{ID}\right| = \left|2 \cdot \overrightarrow{ON_a} + \overrightarrow{ID}\right| = 2R + r. \qquad \blacksquare$$

從這個證明，我們還可以看出 $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{BeD_{Be}} \parallel -\overrightarrow{ID_I}$，其中 D_I 是 ω 與 T_bT_c 的切點。

Lemma 5.8.6. 令 Y, Z, Y', Z' 分別為 $T_cT_a, T_aT_b, T'_cT'_a, T'_aT'_b$ 與 BC 的交點。那麼 $\triangle AYZ'$ 的外心為 I^b，$\triangle AY'Z$ 的外心為 I^c。

Proof. 這只是因為 $\overline{Z'A}, \overline{AY}$ 的中垂線分別為 I^aI^b, II^b，$\overline{ZA}, \overline{AY'}$ 的中垂線分別為 II^c, I^cI^a。 $\blacksquare$

Proposition 5.8.7. 點 Ge^* 為切線三角形 $\triangle T_AT_BT_C = \triangle(\mathbf{T}_A\Omega)(\mathbf{T}_B\Omega)(\mathbf{T}_C\Omega)$, $\triangle T_aT_bT_c, \triangle T'_aT'_bT'_c$ 與 I 的西瓦三角形 $\triangle X_aX_bX_c$ 共同的透視中心。

Proof. 我們有

$$\begin{aligned}\triangle T_AT_BT_C \cup O \cup \triangle ABC &\overset{+}{\sim} \triangle T_aT_bT_c \cup I \cup \triangle D_IE_IF_I \\ &\overset{+}{\sim} \triangle T'_aT'_bT'_c \cup Be \cup \triangle D_{Be}E_{Be}F_{Be}.\end{aligned}$$

而

$$\frac{Ge^*O}{Ge^*Be} = \frac{R}{2R+r} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{BeD_{Be}}}, \quad \frac{Ge^*I}{Ge^*Be} = \frac{-r}{2R+r} = \frac{\overrightarrow{ID_I}}{\overrightarrow{BeD_{Be}}}$$

告訴我們 $Ge^* \in OI$ 為 $\triangle T_AT_BT_C, \triangle T_aT_bT_c, \triangle T'_aT'_bT'_c$ 的位似中心。

由 (5.8.6)，X_a 位於 $\odot(AYZ')$ 與 $\odot(AY'Z)$ 的根軸 $A\infty_{\perp I^bI^c}$ 上，因此

$$X_aY \cdot X_aZ' = X_aY' \cdot X_aZ \quad \Longrightarrow \quad \frac{X_aY}{X_aZ} = \frac{X_aY'}{X_aZ'}$$

結合 $\triangle T_aYZ \overset{+}{\sim} \triangle T'_aY'Z'$ 告訴我們 T_a, T'_a, X_a 共線，故 Ge^* 為 $\triangle T_aT_bT_c$, $\triangle T'_aT'_bT'_c$, $\triangle X_aX_bX_c$ 的透視中心。 ■

因此如果令 X_{25} 為 $\triangle(\mathbf{T}_A\Omega)(\mathbf{T}_B\Omega)(\mathbf{T}_C\Omega)$ 與垂足三角形 $\triangle H_aH_bH_c$ 的位似中心，結合 (1.1.13) 我們得到：

Corollary 5.8.8. 四點 $C\ell$, X_{25}, X_{33}, Ge^* 共線。

Part II

圓錐曲線

前言

Chapter 6

基礎圓錐曲線

6.1 定義與基本性質

先介紹高中定義圓錐曲線的方式之一：

Definition 6.1.1. 令 $\odot(O)$ 為空間 $\mathbb{R}^3$ 中一圓，過 O 作直線 ℓ 使其與過 $\odot(O)$ 的平面正交，在 ℓ 上任取一點 $V \neq O$，當動點 $M \in \odot(O)$ 移動時，我們稱 VM 所形成的曲面 $\mathcal{S}$ 為一個**直圓錐面** (**circular conical surface**)、$\odot(O)$ 為其準線 (**directrix**)、V 為其頂點 (**vertex**)。

Definition 6.1.2. 我們稱 $\mathcal{C}$ 為平面 E 上的一個**圓錐曲線** (**conic**) 若存在一以 $V \notin E$ 為頂點的直圓錐面 $\mathcal{S}$，使得 $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap E$。

這是在 E 沒有加入無窮遠線的情況下的定義（一般平面）。如果 E 是射影平面的話，那我們也得把原先的空間 $\mathbb{R}^3$ 改成射影空間 $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$，直圓錐面 $\mathcal{S}$ 改成射影直圓錐面 $\overline{\mathcal{S}}$，即 $\mathcal{S}$ 聯集上所有 VM 上的無窮遠點。而 E 上的圓錐曲線就是 $\overline{\mathcal{S}} \cap E$，其中 $\overline{\mathcal{S}}$ 的頂點 V 不在 E 上。

之後，在沒有提及空間的情況下，我們皆省略「在平面 E 上」。

Definition 6.1.3. 令 $\mathcal{C}$ 為一圓錐曲線，$\mathcal{L}_\infty$ 為無窮遠線，則我們稱 $\mathcal{C}$ 為

(i) 橢圓 (**ellipse**)，若 $|\mathcal{C} \cap \mathcal{L}_\infty| = 0$；

(ii) 拋物線 (**parabola**)，若 $|\mathcal{C} \cap \mathcal{L}_\infty| = 1$；

(iii) 雙曲線 (**hyperbola**)，若 $|\mathcal{C} \cap \mathcal{L}_\infty| = 2$。

以下為較常看到的圓錐曲線等價定義：

Proposition 6.1.4. 令 $\mathcal{C}$ 為一圓錐曲線，則

1. $\mathcal{C}$ 為橢圓若且唯若存在兩點 F_1, F_2 及正實數 $a > \overline{F_1F_2}/2$ 使得

$$\mathcal{C} = \{P \mid \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a\};$$

2. $\mathcal{C}$ 為拋物線若且唯若存在一點 F 及一線 L 使得

$$\mathcal{C} = \{P \mid \overline{FP} = \mathrm{d}(L, P)\};$$

3. $\mathcal{C}$ 為雙曲線若且唯若存在兩點 F_1, F_2 及正實數 $a < \overline{F_1F_2}/2$ 使得

$$\mathcal{C} = \{P \mid |\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| = 2a\},$$

並且稱 F_1, F_2 或 F 為 $\mathcal{C}$ 的焦點 (**focus**)，L 為 $\mathcal{C}$ 的準線 (**directrix**)。

Proof. 只證明橢圓的情形，其餘類似。由圓錐曲線定義知，存在頂點為 V 的直圓錐面 s 及平面 E 滿足 $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap E$，令 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ 為與 $\mathcal{S}$ 及 E 皆相切的兩球，並設 $\odot(O_1) = \mathcal{S} \cap \mathcal{B}_1$, $\odot(O_2) = \mathcal{S} \cap \mathcal{B}_2$，$F_1 = E \cap \mathcal{B}_1$, $F_2 = E \cap \mathcal{B}_2$，對於任意一點 $P \in \mathcal{S}$，設 A_1, A_2 分別為 PV 與 $\odot(O_1)$,$\odot(O_2)$ 的交點，易知 $\overline{A_1A_2}$ 為定值，取 $a = \overline{A_1A_2}/2$，這時有

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \overline{A_1P} + \overline{A_2P} = \overline{A_1A_2} = 2a$$

故 $\mathcal{C} \subseteq \{P \mid \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a\}$。

若 $P \in \{P \mid \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a\} \setminus \mathcal{C}$，令射線 F_1P 與 $\mathcal{S}$ 交於 $P' \in \mathcal{C}$，則

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a = \overline{F_1P'} + \overline{F_2P'} \implies \overline{F_2P} = \overline{F_2P'} \pm \overline{PP'}.$$

即 $F_2 \in PP'$ 且 P, P' 位於 F_2 同向，矛盾。所以 $\mathcal{C} = \{P \mid \overline{F_1P}+\overline{F_2P} = 2a\}$。 ■

在講下個性質前我們先承認一些事情——所有（非退化）圓錐曲線都是光滑的（我們會在第 6.2.1 小節證明），並沿用在圓的時候的記號：

(i) $\mathbf{T}\mathcal{C}$ 為 $\mathcal{C}$ 的所有切線所形成的集合；

(ii) $\mathbf{T}_P\mathcal{C}$ 為 P 關於 $\mathcal{C}$ 的切線，其中 $P \in \mathcal{C}$；

(iii) $\mathbf{T}_\ell\mathcal{C}$ 為 ℓ 關於 $\mathcal{C}$ 的切點，其中 $\ell \in \mathbf{T}\mathcal{C}$。

我們顯然有 $\mathbf{T}\mathcal{C} = \{\mathbf{T}_P\mathcal{C} \mid P \in \mathcal{C}\}, \mathcal{C} = \{\mathbf{T}_\ell\mathcal{C} \mid \ell \in \mathbf{T}\mathcal{C}\}$。

Proposition 6.1.5. 令 $\mathcal{C}$ 為一圓錐曲線，一直線 ℓ 與 $\mathcal{C}$ 只有一個交點若且唯若 $\ell \in \mathbf{T}\mathcal{C}$。

Proof. 設 $\mathcal{C}$ 位於平面 E 上且以 $\odot(O)$ 為準線的直圓錐面 $\mathcal{S}$ 滿足 $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap E$。令 E_1 為過 $\mathcal{S}$ 的頂點及 ℓ 的平面，E_2 為 $\odot(O)$ 所在的平面，則

$$1 = |\ell \cap \mathcal{C}| = |E \cap E_1 \cap \mathcal{S}| \iff 1 = |(E_1 \cap E_2) \cap \odot(O)| = |E_1 \cap E_2 \cap \mathcal{S}|.$$

因此只需考慮當 $\mathcal{C}$ 為圓的情況，而這是簡單的。 ■

現在我們可以證明圓錐曲線的光學性質：

Proposition 6.1.6. 令非拋物線的圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 的焦點為 F_1, F_2，則對於 $\mathcal{C}$ 上任意一點 P，切線 $\mathbf{T}_P\mathcal{C}$ 為 $\angle F_1PF_2$ 的分角線。

Proof. 只證明橢圓的情形，雙曲線則類似。令 T'_P 為 $\angle F_1PF_2$ 的外角平分線，F'_2 為 F_2 關於 T'_P 的對稱點，則 F_1, P, F'_2 共線。所以對於任意一點 $Q \in T'_P \setminus \{P\}$，

$$\overline{F_1Q} + \overline{F_2Q} = \overline{F_1Q} + \overline{F'_2Q} > \overline{F_1F'_2} = \overline{F_1P} + \overline{F'_2P} = \overline{F_1P} + \overline{F_2P}.$$

故 $Q \notin \mathcal{C}$，因此 $T'_P = \mathbf{T}_P\mathcal{C}$。 ■

Proposition 6.1.7. 令拋物線 $\mathcal{P}$ 的焦點為 F，準線為 L，對於 $\mathcal{P}$ 上任意一點 P，P 關於 L 的垂足為 K，則切線 $\mathbf{T}_P\mathcal{P}$ 為 $\angle FPK$ 的內角平分線且為 $\overline{FK}$ 的中垂線。

Proof. 令 T'_P 為 $\angle FPK$ 的內角平分線，由 $\overline{FP}=\overline{KP}$ 知 T'_P 為 $\overline{FK}$ 的中垂線。對於任意一點 $Q\in T'_P\setminus\{P\}$，令 K_Q 為 Q 關於 L 的垂足，我們有

$$\overline{K_QQ}<\overline{KQ}=\overline{FQ}\implies Q\notin\mathcal{P},$$

即 $T'_P=\mathbf{T}_P\mathcal{P}$。 ■

Remark. 透過上面這個性質，我們可以將拋物線的另一個焦點視為垂直於準線方向上的無窮遠點，這樣依舊可以保持光學性質的命題成立。

Definition 6.1.8. 對於任意圓錐曲線 $\mathcal{C}$，令其焦點為 F_1,F_2，則我們稱 $\overline{F_1F_2}$ 中點 O 為 $\mathcal{C}$ 的中心。

由焦點的定義 (6.1.4)，我們顯然有：

Proposition 6.1.9. 對於非拋物線的圓錐曲線 $\mathcal{C}$，令 O 為其中心，則 $\mathcal{C}$ 關於 O 點對稱。

Definition 6.1.10. 對於一個圓錐曲線 $\mathcal{C}$，我們定義 $\mathcal{C}$ 的長軸為 $\mathcal{C}$ 與 F_1F_2 的兩個交點所定義的連線段，其中 F_1,F_2 為 $\mathcal{C}$ 的兩個焦點。

Proposition 6.1.11. 設 F 為圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 的其中一個焦點，Γ 是以 $\mathcal{C}$ 的長軸為直徑的圓。若 $\ell\in\mathbf{T}\mathcal{C}$，則 F 關於 ℓ 的垂足位於 Γ 上。

Proof. 這個性質在 $\mathcal{C}$ 為拋物線時就是光學性質 (6.1.7)：$\Gamma=V\infty_{\perp L}$，其中 L 為 $\mathcal{C}$ 的準線，$V=\infty_LF$ 與 $\mathcal{C}$ 的第二個交點（即 $\mathcal{C}$ 的頂點）。

以下假設 $\mathcal{C}$ 為橢圓或雙曲線。令 $T=\mathbf{T}_{\mathcal{C}}\ell$ 為 ℓ 與 $\mathcal{C}$ 的切點，O 為 $\mathcal{C}$ 的中心，F' 為 F 關於 O 的對稱點（即 $\mathcal{C}$ 的另一個焦點）。則由光學性質 (6.1.6)，$F'T$ 過 F 關於 ℓ 的對稱點 F''，因此 F 關於 ℓ 的垂足為 $\overline{FF''}$ 的中點 M 滿足

$$\overline{OM}=\frac{1}{2}\cdot\overline{F'F''}=\left|\overline{F'T}\pm\overline{FT}\right|,$$

即為 O 至長軸兩頂點的距離（這邊需要分圓錐曲線的種類來討論）。故 $M\in\Gamma$。 ■

習題

Problem 1. 試證明曲線 $\mathcal{C}$ 為一圓錐曲線若且唯若 $\mathcal{C}$ 為一圓或存在一點 F、一線 L 及一實數 $e > 0$ 使得

$$\mathcal{C} = \{P \mid \overline{FP} = e \cdot \mathrm{d}(L, P)\}$$

其中，

(i) 當 $e < 1$ 時，$\mathcal{C}$ 為橢圓；

(ii) 當 $e = 1$ 時，$\mathcal{C}$ 為拋物線；

(iii) 當 $e > 1$ 時，$\mathcal{C}$ 為雙曲線。

我們也可以定義圓為 $L = \mathcal{L}_\infty, e = 0$ 時的情況，這時候必須假設 $e \cdot \mathrm{d}(L, P)$ 為常數，而 F 為 $\mathcal{C}$ 的圓心。

Problem 2. 令 F_1, F_2 為圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 的兩個焦點，設 $\ell_1, \ell_2 \in \mathbf{T}\mathcal{C}$，$A$ 為 ℓ_1 與 ℓ_2 的交點。證明：ℓ_1, ℓ_2 為關於 $\angle F_1AF_2$ 的等角線。

6.2 圓錐曲線上的交比

我們曾經在圓上定義過交比（見第 2.1 節），現在我們想把這個定義延伸到圓錐曲線上。在那之前我們需要一些準備。

Definition 6.2.1. 設 E_1, E_2 為空間 $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ 中兩平面，V 為 $E_1 \cup E_2$ 外一點。令 $\varphi\colon E_1 \to E_2$ 定義為

$$\varphi(Q) = VQ \cap E_2,$$

則我們稱 φ 為將 E_1 映射至 E_2 的透視變換 (**perspective transformation**)，V 為其中心。

Proposition 6.2.2. 令 E_1, E_2 為兩平面，$\varphi\colon E_1 \to E_2$ 為一透視變換，則對於 E_1 上任一直線 ℓ，$\varphi(\ell)$ 為一直線。

Proof. 令 V 為 φ 的中心，並設 G 為過 V 與 ℓ 的平面。則

$$\varphi(\ell)=\{\varphi(Q)\mid Q\in\ell\}=\{PQ\cap E_2\mid Q\in\ell\}=\{PQ\mid Q\in\ell\}\cap E_2=G\cap E_2,$$

又兩相異平面的交集為直線，故 $\varphi(\ell)$ 為一直線。 ■

Theorem 6.2.3. 令 E_1, E_2 為兩平面，$\varphi\colon E_1\to E_2$ 為一透視變換，則對於 E_1 上共線四點 P_1, P_2, P_3, P_4，交比 $(P_\bullet):=(P_1,P_2;P_3,P_4)$ 及 $(\varphi(P_\bullet)):=(\varphi(P_1),\varphi(P_2);\varphi(P_3),\varphi(P_4))$ 相等。

Proof. 令 V 為 φ 的中心，則 $V,\ell,\varphi(\ell)$ 共平面，所以有

$$(P_\bullet)=V(P_\bullet)=V(\varphi(P_\bullet))=(\varphi(P_\bullet)).$$ ■

Theorem 6.2.4. 令 E_1,E_2 為兩平面，$\varphi\colon E_1\to E_2$ 為一透視變換，則對於 E_1 上共點四線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4，$(\ell_\bullet)=(\varphi(\ell_\bullet))$。

Proof. 令 V 為 φ 的中心，過 V 作任意一不過 $\bigcap\ell_\bullet$ 的平面 E_3，設 $R_i=\ell_i\cap E_3$，則

$$(\ell_\bullet)=(R_\bullet)=(\varphi(R_\bullet))=(\varphi(\ell_\bullet)).$$ ■

由圓錐曲線的定義，我們知道：

Proposition 6.2.5. 令 E 為一平面，對於任意圓錐曲線 $\mathcal{C}\subset E$，存在一平面 E_1、一圓 $\Omega\subset E_1$ 及一透視變換 $\varphi\colon E\to E_1$ 使得 $\varphi(\mathcal{C})=\Omega$。

為了得到下面這個定理，我們得再承認一件事情——五個點決定一個圓錐曲線、五條線決定一個相切圓錐曲線（我們會在這節的最後證明這件事）。另外，在不與其他符號混淆的情況下，有時會用 $(P_1P_2P_3P_4P_5)$ 代表過 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 的圓錐曲線，$(\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4\ell_5)$ 代表切 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4, ℓ_5 的圓錐曲線。

Theorem 6.2.6 (圓錐曲線基本定理/Fundamental Theorem of Conic Sections)**.** 令 P_1, P_2, P_3, P_4, A, A' 為平面上六點且任三點不共線，則 P_1, P_2, P_3, P_4, A, A' 共一圓錐曲線若且唯若 $A(P_\bullet)=A'(P_\bullet)$。

Proof. 令 $\mathcal{C} = (P_1P_2P_3AA')$ 且 E 為 $\mathcal{C}$ 所在平面，則存在一平面 E_1、一圓 Ω 在 E_1 上及一透視變換 $\varphi\colon E \to E_1$ 使 $\varphi(\mathcal{C}) = \Omega$。

($\Rightarrow$) 由 $\varphi(P_4) \in \Omega$ 知

$$A(P_\bullet) = \varphi(A)(\varphi(P_\bullet)) = \varphi(A')(\varphi(P_\bullet)) = A'(P_\bullet).$$

($\Leftarrow$) 令 $P_i' = P_i$, $i = 1, 2, 3$，$P_4' = AP_4 \cap \mathcal{C} \setminus \{A\}$，則由 ($\Rightarrow$) 知

$$A'(P_\bullet') = A(P_\bullet) = A'(P_\bullet),$$

即 $P_4' = A'P_4 \cap AP_4 = P_4$，故 $P_1, P_2, P_3, P_4, A, A'$ 共圓錐曲線。 ■

那這個定理當然也有其對偶命題：

Theorem 6.2.7. 令 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, L, L'$ 為平面上六線且任三線不共點，則 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, L, L'$ 共切圓錐曲線若且唯若 $L(\ell_\bullet) = L'(\ell_\bullet)$。

證明與點的版本類似。於是我們就可以好好的在圓錐曲線上（或切線）定義交比了。

Definition 6.2.8. 令 $\mathcal{C}$ 為一圓錐曲線，對於四點 $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{C}$，

$$(P_\bullet)_{\mathcal{C}} := (P_1, P_2; P_3, P_4)_{\mathcal{C}} := A(P_\bullet),$$

其中 $A \in \mathcal{C}$，稱為 (P_1, P_2, P_3, P_4) 在 $\mathcal{C}$ 上的交比。

Definition 6.2.9. 令 c 為一圓錐曲線，對於四線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \in \mathbf{T}c$，

$$(\ell_\bullet)_{\mathbf{T}c} := (\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4)_{\mathbf{T}\mathcal{C}} := L(\ell_\bullet),$$

其中 $L \in \mathbf{T}c$，稱為 $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ 在切 c 的交比。

那麼我們同時也可以把調和這個概念延伸到圓錐曲線上：

Definition 6.2.10. 給定任意圓錐曲線 $\mathcal{C}$，四點 $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{C}$，則我們稱四邊形 $(P_1P_2)(P_3P_4)$ 為 $\mathcal{C}$ 上的調和四邊形若 $(P_\bullet)_{\mathcal{C}} = -1$。

同 (2.2.11)，我們有：

Proposition 6.2.11. 給定任意圓錐曲線 $\mathcal{C}$，四點 $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{C}$，令 P_1, P_2 分別關於 $\mathcal{C}$ 的切線交於 A，則 $(P_1P_2)(P_3P_4)$ 為 $\mathcal{C}$ 上的調和四邊形若且唯若 A 在 P_3P_4 上。

6.2.1 圓錐曲線與二次曲線

現在我們來證明之前欠的事情——五個點決定一個圓錐曲線、五條線決定一個相切圓錐曲線。證明大致上分成兩步：

(i) 任四點（線）不共線（點）的五點（線）唯一決定一個二次曲線；

(ii) 圓錐曲線跟二次曲線等價。

一條二次曲線 $\mathcal{C}$ 就是在射影平面（座標為 $[x:y:z]$）上由二次函數

$$f(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 0 \qquad (\spadesuit)$$

所定義出來的曲線。為了在實數上有解，所以必須假設矩陣

$$M_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix}$$

不是正定或負定的，也不能是全零，不然就不是曲線了。這時候 $\mathcal{C}$ 是退化的（兩條直線的聯集）若且唯若 $\det M_{\mathcal{C}} = 0$。

我們先證明五個點可以決定一條二次曲線：給定五相異點 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5，其中任四點不共線（如果當中有四點共線的話，不妨假設 $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \ell$，那麼對於任意過 P_5 的直線 L，$\ell \cup L$ 都是由 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 所決定的二次曲線）。

我們可以假設 P_1, P_2, P_3 不共線。透過一個射影變換，我們可以再假設

$$P_1 = [1:0:0], \quad P_2 = [0:1:0], \quad P_3 = [0:0:1].$$

那麼代入 $(\spadesuit)$ 就得到 $A = B = C = 0$。因此所有過 P_1, P_2, P_3 的二次曲線都長得像

$$f(x,y,z) = 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 0.$$

設 $P_4 = [x_1 : y_1 : z_1]$, $P_5 = [x_2 : y_2 : z_2]$，那我們就是要解 $(D, E, F) \neq (0, 0, 0)$ 滿足

$$\begin{cases} Dy_1z_1 + Ez_1x_1 + Fx_1y_1 = 0, \\ Dy_2z_2 + Ez_2x_2 + Fx_2y_2 = 0. \end{cases}$$

而我們知道這個三元一次方程一定有非零解，但我們希望解空間是一維的（因為 (D, E, F) 跟 $(\lambda D, \lambda E, \lambda F)$ 所定義出來的二次曲線是同一條），使得這五個點決定唯一一條二次曲線。

注意到 (y_1z_1, z_1x_1, x_1y_1), $(y_2z_2, z_2x_2, x_2y_2) \neq (0, 0, 0)$，否則我們會得到 P_4, $P_5 \in \{P_1, P_2, P_3\}$。因此解空間是一維的若且唯若 $Q_1 = [y_1z_1 : z_1x_1 : x_1y_1]$ 跟 $Q_2 = [y_2z_2 : z_2x_2 : x_2y_2]$ 是同一個點（不然 $[D : E : F]$ 就會是定義直線 Q_1Q_2 的方程式的係數）。$Q_1 = Q_2$ 等價於

$$y_1z_1 = \lambda y_2z_2, \quad z_1x_1 = \lambda z_2x_2, \quad x_1y_1 = \lambda x_2y_2, \quad \lambda \neq 0.$$

如果 x_2, y_2, z_2 當中有一個是 0，不妨假設 $x_2 = 0$，則 $y_2z_2 \neq 0$。上式告訴我們 $x_1 = 0$，但這代表 P_2, P_3, P_4, P_5 共線，與原假設任四點不共線矛盾。所以我們可以假設 x_2, y_2, z_2 都不是 0，這樣上式變成

$$\lambda = \frac{y_1}{y_2} \cdot \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{y_1}{y_2} \implies \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \pm\sqrt{\lambda},$$

即 $P_4 = P_5$，與原假設五點相異矛盾。因此我們可以唯一的決定一條二次曲線 $\mathcal{C}$。

接下來，我們需要證明五條直線決定一個二次曲線，但其實這跟五個點的情形差不多：假設 ℓ_i 是由方程 $a_ix + b_iy + c_iz = 0$ 定義，那麼我們可以把 $\ell_i^\vee = [a_i : b_i : c_i]$ 想成是射影平面 $(\mathbb{P}^2)^\vee$ 的一個點。注意到 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5$ 中任四線不共點等價於 $\ell_1^\vee, \ell_2^\vee, \ell_3^\vee, \ell_4^\vee, \ell_5^\vee$ 中任四點不共線。這時候由點的情形我們知道存在唯一一條二次曲線 $\mathcal{C}^\vee$ 過五點 $\ell_1^\vee, \ell_2^\vee, \ell_3^\vee, \ell_4^\vee, \ell_5^\vee$。因此我們需要找到一個對應 $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}^\vee$ 使得 $\mathcal{C}$ 的切線是 $\mathcal{C}^\vee$ 上的點。所以我們要寫出一條二次曲線的所有切線：

Proposition 6.2.12. 對於一條非退化二次曲線 $\mathcal{C}\colon Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 0$ 上一點 $P = [x_0 : y_0 : z_0]$，P 關於 $\mathcal{C}$ 的切線為 $L\colon ax + by + cz =$

0，其中

$$[a:b:c]=[Ax_0+Fy_0+Ez_0:Fx_0+By_0+Dz_0:Ex_0+Dy_0+Cz_0]\in(\mathbb{P}^2)^\vee.$$

證明需要一點點的微積分：齊次方程 $f=0$ 所定義的曲線在 $P=[x_0:y_0:z_0]$ 的切線的定義方程式為

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P)x+\frac{\partial f}{\partial y}(P)y+\frac{\partial f}{\partial z}(P)z=0.$$

一個比較基礎的方式是將 L（在座標平面 $(x,y)=[x:y:1]$ 上）參數化為 $(\frac{x_0}{z_0}-\frac{b}{c}t,\frac{y_0}{z_0}+\frac{a}{c}t)$, $c=-(ax_0+by_0)$（這邊假設 P 不是原點也不在無窮遠線上）代入 $f(x,y,1)$ 得到 $f(t)$ 作為 t 的二次函數的判別式為 0（代表相切於 P）的充分必要條件。

所以由 (6.2.12)，$\mathcal{C}^\vee$ 就是 $\mathcal{C}$ 在射影變換

$$[x:y:z]\mapsto[Ax+Fy+Ez:Fx+By+Dz:Ex+Dy+Cz]=:[a:b:c]$$

下的像。這時候我們可以把 $\mathcal{C}^\vee$ 的定義方程式寫下來：

$$g(a,b,c)=Ua^2+Vb^2+Wc^2+2Xbc+2Yca+2Zab=0,$$

其中

$$M_{\mathcal{C}^\vee}=\begin{pmatrix}U&Z&Y\\Z&V&X\\Y&X&W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&F&E\\F&B&D\\E&D&C\end{pmatrix}^{-1}=M_{\mathcal{C}}^{-1},$$

因為

$$g(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&b&c\end{pmatrix}M_{\mathcal{C}^\vee}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}M_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}^\vee}M_{\mathcal{C}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

（乘上某個非零常數後，不妨假設是 1，）要等於

$$f(x,y,z)=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}M_{\mathcal{C}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

我們知道一個矩陣 M 滿足 $(M^{-1})^{-1}=M$，所以從二次函數的係數我們可以看出 $(\mathcal{C}^\vee)^\vee=\mathcal{C}$，因此我們找到一個一一對應 $\mathcal{C}\mapsto\mathcal{C}^\vee$。所以如果 $\mathcal{C}^\vee$ 是非退化的（等價於 $\ell_1^\vee,\ell_2^\vee,\ell_3^\vee,\ell_4^\vee,\ell_5^\vee$ 任三點不共線），$\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4,\ell_5$ 決定唯一一條

二次曲線 $\mathcal{C}$。如果 $\mathcal{C}^\vee$ 是退化的，即五線當中有三線共點，不妨假設是 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 共於 P，那 ℓ_4 與 ℓ_5 交於 $Q \neq P$。這時候五線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5$ 所決定的二次曲線是退化的重直線 PQ。

最後，我們需要證明圓錐曲線跟二次曲線等價。給定平面 $E \subset \mathbb{P}^3$，其中 $\mathbb{P}^3$ 的座標為 $[w : x : y : z]$，無窮遠面 E_∞ 的定義方程式為 $z = 0$。透過平移及旋轉，我們可以假設 E 是由方程式 $w = 0$ 所定義的，這時候 E 上的座標可以寫成 $[x : y : z]$。

我們先寫出所有的直圓錐面 $\mathcal{S}$：$\mathbb{R}^3$ 中的圓 $\odot(O)$ 可以寫成

$$(w_0, x_0, y_0) + r\cos\theta \cdot \vec{e}_1 + r\sin\theta \cdot \vec{e}_2,$$

其中 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 為兩個正交且長度為 1 的向量。如果取 $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ 為與 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 正交且長度為 1 的向量，那我們知道頂點 V 的座標一定形如

$$(w_1, x_1, y_1) = (w_0, x_0, y_0) + s \cdot \vec{e}_3, \quad s \neq 0.$$

令 $U = \begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{pmatrix}$，則 $\mathcal{S}$ 的定義方程式為

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{r}{s} \cdot c\right)^2, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} w - w_1 \\ x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}.$$

所以我們不妨假設 $s = 1$。

由於 U 是正交矩陣，所以如果令 $\vec{v} = \begin{pmatrix} w - w_1 \\ x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}, \vec{e} = \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} e_w \\ e_x \\ e_y \end{pmatrix}$，那麼

$$|\vec{v}|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = (r^2 + 1)c^2 = (r^2 + 1)(\vec{e} \cdot \vec{v})^2.$$

透過平移，我們不妨假設 $x_1 = y_1 = 0$；透過（關於 w 軸）旋轉，我們不妨假設 $e_y = 0$。這時候 $\mathcal{S} \cap E$ 的定義方程式（以座標 (x, y) 來寫）為

$$Ax^2 + By^2 + C + 2Dy + 2Ex + 2Fxy = 0,$$

其中

$$\begin{aligned} &A = 1 - (r^2 + 1)e_x^2, \quad B = 1, \quad C = w_1^2\left(1 - (r^2 + 1)e_w^2\right) \\ &E = (r^2 + 1)e_x e_w w_1, \quad D = F = 0, \end{aligned} \tag{$\clubsuit$}$$

且這些變數 r, e_x, e_w, w_1 中唯一的限制是 $e_x^2+e_w^2=1$。而 $\overline{\mathcal{S}}\cap E$ 的定義方程式則為

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy=0.$$

對於任意圓錐曲線 $\mathcal{C}\subset E$，因為 $\mathcal{C}$ 是某個射影直圓錐面 $\overline{\mathcal{S}}$ 與 E 的交集，因此由上面的討論我們知道 $\mathcal{C}$ 的定義方程式是二次的，故 $\mathcal{C}$ 是一條二次曲線。

對於任意非退化二次曲線 $\mathcal{C}\subset E$，假設其定義方程式為

$$f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy=0.$$

我們希望可以找到一個射影直圓錐面 $\overline{\mathcal{S}}$ 使得 $\mathcal{C}=\overline{\mathcal{S}}\cap E$。透過旋轉

$$(x,y)\mapsto(x',y')=(x\cos\theta-y\sin\theta, x\sin\theta+y\cos\theta),$$

我們總是可以找到 θ 使得 $2x'y'$ 的係數

$$F'=(A-B)\sin(2\theta)+F\cos(2\theta)=0.$$

因此我們不妨一開始就假設 $F=0$。這時候由於 $\mathcal{C}$ 的非退化性，A, B 不能同時為 0，不妨假設 $B\neq 0$。

因為我們想要解 (♣)，由焦點的存在性證明 (6.1.4)，我們會希望焦點落在 x 軸上。所以我們分一些情形：

(i) 如果 $A=0$，透過伸縮，我們可以假設 $B=1$，並且透過平移 $y\mapsto y+Dz$，我們可以假設 $D=0$（因為這時候 y 的一次項被配方掉了）。

(ii) 如果 $A\neq 0$ 且與 B 同號，那麼我們不妨假設 $|B|\geq|A|$，這時候我們再透過伸縮來假設 $B=1$。類似地，經過平移 $y\mapsto y+Dz$，我們可以假設 $D=0$。

(iii) 如果 $A\neq 0$ 且與 B 異號，那麼我們總是可以把 yz, zx 項配方掉，因此透過平移 $(x,y)\mapsto\left(x+\frac{E}{A}z, y+\frac{D}{B}z\right)$，我們可以假設 $D=E=0$。由於 A, B 異號，我們不妨假設 B 與 C 同號，並透過伸縮及平移使得 $B=1$ 且 $D=0$。

可以看出上面三種情形分別對應到拋物線、橢圓及雙曲線。無論是哪種情形，這時候的定義方程式只剩下

$$Ax^2+y^2+Cz^2+2Exz=0$$

且 x 軸都與 $\mathcal{C}$ 有兩個交點 X_1, X_2（因為 $AC - E^2 = \det M_{\mathcal{C}} < 0$：(i), (iii) 是顯然的（結合 $\det M_c \neq 0$），(ii) 則是由矩陣 $M_{\mathcal{C}}$ 的非正定性）。如果 $A = 1$，那 $\mathcal{C}$ 就已經是圓了，所以當然是圓錐曲線。如果 $A < 1$，那我們透過平移 $x \mapsto x' = x + a$ 把 X_1 平移到原點 $(0,0)$（因為 $X_1 \neq X_2$ 因此我們不妨假設 X_1 不是無窮遠點），這時候有 $C = 0$。

與 (♣) 比對，我們要解方程

$$\begin{cases} 1 - (r^2+1)e_x^2 = A, \\ w_1^2\left(1 - (r^2+1)e_w^2\right) = C = 0, \\ (r^2+1)e_xe_ww_1 = E, \\ e_x^2 + e_w^2 = 1. \end{cases}$$

因為 $w_1 \neq 0$，所以我們應該要取

$$e_w = \frac{1}{\sqrt{r^2+1}}, \quad e_x = \frac{r}{\sqrt{r^2+1}} \implies A = 1 - r^2 \implies r = \sqrt{1-A},$$
$$E = (r^2+1)e_xe_ww_1 = \sqrt{1-A}\cdot w_1 \implies w_1 = \frac{E}{\sqrt{1-A}}.$$

這給了我們上述方程的一個解，因此 $\mathcal{C}$ 是一條圓錐曲線。

6.3 一些定理

在有了圓錐曲線與交比的一些基礎下，就可以拿來證一些常見定理了。我們先把之前的帕斯卡定理 (2.3.3) 及布里昂雄定理 (2.3.5) 推廣成圓錐曲線的版本。

Theorem 6.3.1 (帕斯卡定理/Pascal's)**.** 令 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ 為任三點不共線的六點，則 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ 共一圓錐曲線若且唯若

$$P_1P_2 \cap P_4P_5,\ P_2P_3 \cap P_5P_6,\ P_3P_4 \cap P_6P_1$$

共線。

Proof. 只要把 (2.3.3) 的證明稍微改一下就好了。令 $Q_1 = P_1P_2 \cap P_4P_5$, $Q_2 =$

$P_2P_3 \cap P_5P_6$, $Q_3 = P_3P_4 \cap P_6P_1$，則

$$P_1(P_2, P_3; P_4, P_6) = Q_1(P_1, P_3; P_4, Q_3),$$
$$P_5(P_2, P_3; P_4, P_6) = Q_1(P_1, P_3; P_4, Q_2).$$

因此 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 共一圓錐曲線若且唯若

$$\begin{aligned} & P_1(P_2, P_3; P_4, P_6) = P_5(P_2, P_3; P_4, P_6) \\ \iff \quad & Q_1(P_1, P_3; P_4, Q_3) = Q_1(P_1, P_3; P_4, Q_2), \end{aligned}$$

即 Q_1, Q_2, Q_3 共線。 ■

其對偶命題為：

Theorem 6.3.2 (布里昂雄定理/Brianchon's)**.** 令 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4, ℓ_5, ℓ_6 為任三線不共點的六線，則 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4, ℓ_5, ℓ_6 切一圓錐曲線若且唯若

$$(\ell_1 \cap \ell_2)(\ell_4 \cap \ell_5),\ (\ell_2 \cap \ell_3)(\ell_5 \cap \ell_6),\ (\ell_3 \cap \ell_4)(\ell_6 \cap \ell_1)$$

共點。

其證明與帕斯卡定理類似（對偶）。

Remark. 跟圓的情況一樣，上面這兩個定理其實是可以允許兩點（線）重合的，只是兩點連線（線交點）就會變成切線（點），而反過來就是與該線相切（切於該點）。

Theorem 6.3.3 (卡諾圓錐曲線定理/Carnot's)**.** 給定任意 $\triangle ABC$，點對們 (D_1, D_2), (E_1, E_2), (F_1, F_2) 分別位於 BC, CA, AB 上，則下列敘述等價：

(i) D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2 共一圓錐曲線；

(ii) AD_1, AD_2, BE_1, BE_2, CF_1, CF_2 切一圓錐曲線；

(iii) $\dfrac{BD_1}{D_1C} \cdot \dfrac{BD_2}{D_2C} \cdot \dfrac{CE_1}{E_1A} \cdot \dfrac{CE_2}{E_2A} \cdot \dfrac{AF_1}{F_1B} \cdot \dfrac{AF_2}{F_2B} = 1$。

Proof. 只證明 (i) 等價 (iii)，(ii) 等價 (iii) 證明類似。令 E_2F_1, F_2D_1, D_2E_1 分別交 BC, CA, AB 於 X, Y, Z，則由孟氏定理可得

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CE_2}{E_2A}\cdot\frac{AF_1}{F_1B}=\frac{BD_1}{D_1C}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AF_2}{F_2B}=\frac{BD_2}{D_2C}\cdot\frac{CE_1}{E_1A}\cdot\frac{AZ}{ZB}=-1.$$

由帕斯卡定理，$D_1, D_2, E_1,, E_2, F_1, F_2$ 共一圓錐曲線若且唯若 X, Y, Z 共線若且唯若

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=-1 \iff \frac{BD_1}{D_1C}\cdot\frac{BD_2}{D_2C}\cdot\frac{CE_1}{E_1A}\cdot\frac{CE_2}{E_2A}\cdot\frac{AF_1}{F_1B}\cdot\frac{AF_2}{F_2B}=1. \qquad \blacksquare$$

Definition 6.3.4. 給定 $\triangle ABC$。

(i) 我們說圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 是 $\triangle ABC$ 的**外接圓錐曲線**若 $A, B, C\in\mathcal{C}$；

(ii) 我們說圓錐曲線 $\mathfrak{c}$ 是 $\triangle ABC$ 的**內切圓錐曲線**若 $BC, CA, AB\in\mathbf{T}\mathfrak{c}$。

類似於外接圓有圓西瓦三角形，對於一般圓錐曲線我們有：

Definition 6.3.5.

(i) 給定 $\triangle ABC$ 與一外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$，對於任意一點 P，我們定義 P 關於 $\triangle ABC$ 的 **$\mathcal{C}$-西瓦三角形**為 $\triangle(AP\cap\mathcal{C})(BP\cap\mathcal{C})(CP\cap\mathcal{C})$。

(ii) 給定 $\triangle ABC$ 與一內切圓錐曲線 $\mathfrak{c}$，對於任意一線 ℓ，我們定義 ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的 **$\mathfrak{c}$-西瓦三角形**為 $\triangle((BC\cap\ell)\mathfrak{c})((CA\cap\ell)\mathfrak{c})((AB\cap\ell)\mathfrak{c})$。

下面這個定理算是 $n=3$ 的情況，只是目前來講算是它最好用。

Theorem 6.3.6 (龐色列閉合/Poncelet's closure theorem)**.** 設 $\triangle A_1B_1C_1$ 及 $\triangle A_2B_2C_2$ 為平面上兩個三角形，則 $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ 共一外接圓錐曲線若且唯若 $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ 共切一內切圓錐曲線。

Proof. 注意到

$$A_1(B_1,C_1;B_2,C_2)=(B_2C_2)(A_1B_1,C_1A_1;A_2B_2,C_2A_2),$$
$$A_2(B_2,C_2;B_1,C_1)=(B_1C_1)(A_2B_2,C_2A_2;A_1B_1,C_1A_1),$$

因此 $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ 共一外接圓錐曲線若且唯若

$$\begin{aligned} & A_1(B_1, C_1; B_2, C_2) = A_2(B_2, C_2; B_1, C_1) \\ \iff & (B_2C_2)(A_1B_1, C_1A_1; A_2B_2, C_2A_2) = (B_1C_1)(A_1B_1, C_1A_1; A_2B_2, C_2A_2) \end{aligned}$$

若且唯若 $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ 共內切一圓錐曲線。 ■

讓我們回憶一下：一個完全四點形 $q = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ 的西瓦三角形是由

$$P_2P_3 \cap P_1P_4,\ P_3P_1 \cap P_2P_4,\ P_1P_2 \cap P_3P_4$$

為頂點所作出的三角形，這同時也是 P_4 關於 $\triangle P_1P_2P_3$ 的西瓦三角形的定義。類似地，一個完全四線形 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ 的西瓦三角形是由

$$P_2P_3 \cap P_1P_4,\ P_3P_1 \cap P_2P_4,\ P_1P_2 \cap P_3P_4$$

為頂點所作出的三角形，這同時也是 P_4 關於 $\triangle P_1P_2P_3$ 的西瓦三角形的定義。

Theorem 6.3.7 (九點圓錐曲線定理/Nine-Point Conic Theorem)**.** 對於任意完全四點形 $q = (P_1, P_2, P_3, P_4)$，定義 M_{ij} 為 $\overline{P_iP_j}$ 中點，則六點

$$M_{23},\ M_{14},\ M_{31},\ M_{24},\ M_{12},\ M_{34}$$

共一圓錐曲線且該圓錐曲線為 q 的西瓦三角形的外接圓錐曲線。

事實上他有一個推廣：

Theorem 6.3.8. 對於任意完全四點形 $q = (P_1, P_2, P_3, P_4)$，取一線 ℓ，定義 $Q_{ij} = P_iP_j \cap L$。在 P_iP_j 上取 R_{ij} 使得

$$(P_i, P_j; Q_{ij}, R_{ij}) = -1$$

那麼 R_{23}, R_{14}, R_{31}, R_{24}, R_{12}, R_{34} 共一圓錐曲線且該圓錐曲線為 q 的西瓦三角形的外接圓錐曲線。

Proof. 令 P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 分別交 P_1P_4, P_2P_4, P_3P_4 於 X, Y, Z，由西瓦定理與孟氏定理可得

$$\frac{P_2X}{XP_3} \cdot \frac{P_3Y}{YP_1} \cdot \frac{P_1Z}{ZP_2} \cdot \frac{P_2R_{23}}{R_{23}P_3} \cdot \frac{P_3R_{31}}{R_{31}P_1} \cdot \frac{P_1R_{12}}{R_{12}P_2} = -\frac{P_2Q_{23}}{Q_{23}P_3} \cdot \frac{P_3Q_{31}}{Q_{31}P_1} \cdot \frac{P_1Q_{12}}{Q_{12}P_2} = 1,$$

因此由卡諾定理可得 $X, Y, Z, R_{23}, R_{31}, R_{12}$ 共圓錐曲線，令其為 $\mathcal{C}$。注意到對於所有兩兩相異 i, j, k，Q_{jk}, R_{ij}, R_{ik} 共線，因此由

$$R_{31}(Y, Z; R_{23}, R_{14}) \overset{\ell}{=} Z(Q_{31}, R_{31}; Q_{12}, Q_{34}) = (Q_{31}, R_{31}; P_1, P_3) = -1$$
$$R_{12}(Y, Z; R_{23}, R_{14}) \overset{\ell}{=} Y(R_{12}, Q_{12}; Q_{31}, Q_{24}) = (R_{12}, Q_{12}; P_1, P_2) = -1$$

知 $R_{14} \in \mathcal{C}$，同理有 $R_{24}, R_{34} \in \mathcal{C}$，因此 $R_{23}, R_{14}, R_{31}, R_{24}, R_{12}, R_{34}$ 共於 $\mathcal{C}$ 且為 $\triangle XYZ$ 的外接圓錐曲線。 ■

其對偶命題為：

Theorem 6.3.9. 對於任意完全四線形 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$，取一點 P，定義 $L_{ij} = (\ell_i \cap \ell_j)P$。在 $\mathbf{T}(\ell_i \cap \ell_j)$ 中取 K_{ij} 使得

$$(\ell_i, \ell_j; L_{ij}, K_{ij}) = -1$$

那麼 $K_{23}, K_{14}, K_{31}, K_{24}, K_{12}, K_{34}$ 共切一圓錐曲線且該圓錐曲線為 $\mathcal{Q}$ 的對角三角形的內切圓錐曲線。

Definition 6.3.10. 給定任意完全四點形 $q = (P_1, P_2, P_3, P_4)$，對於一直線 ℓ，我們稱 (6.3.8) 中的圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 為 ℓ 關於 $\mathcal{Q}$ 的九點圓錐曲線。當 $\ell = \mathcal{L}_\infty$ 時，簡稱為九點圓錐曲線。

當 $\ell = \mathcal{L}_\infty$，$(R_{23}R_{14})(R_{31}R_{24})(R_{12}R_{34})$ 構成一個平行六邊形，因此 q 的九點圓錐曲線的中心為 $\overline{R_{23}R_{14}}$ 的中點，即 q 的重心

$$G = G_q = \frac{1}{4}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4).$$

對偶地，我們定義：

Definition 6.3.11. 給定任意完全四線形 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$，對於一點 P，我們稱 (6.3.9) 中的圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 為 P 關於 $\mathcal{Q}$ 的九線圓錐曲線。

6.3.1 牛頓三大定理

牛頓三大定理就是完全四線形與圓錐曲線有關幾個定理，第一個定理我們已經看過了 (見 (4.1.4))。

Theorem 6.3.12 (牛頓一號/Newton's theorem I). 對於任意完全四線形 $\mathcal{Q}$，其三個對角線段的中點共線，稱為 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線。

Theorem 6.3.13 (牛頓二號/Newton's theorem II). 對於完全四線形 $\mathcal{Q}$，若圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{Q}$ 中的四線皆相切，則 $\mathcal{C}$ 的中心位於 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線上。反之，若 O 為 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線上一點，則存在一以 O 為中心的圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{Q}$ 相切。

Proof. 不妨假設 ℓ_1 不平行於 ℓ_4。令 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$，$P_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$，$R_2$, R_3 分別為 $\overline{P_{31}P_{24}}$, $\overline{P_{12}P_{34}}$ 的中點，O 為 $\mathcal{C}$ 的中心。作 ℓ_1, ℓ_4 關於 O 的對稱直線 ℓ_1', ℓ_4'，那麼 $P_{14}' = \ell_1' \cap \ell_4'$ 為 P_{14} 關於 O 的對稱點。令 Q_2, Q_3 分別為 P_{14} 關於 R_2, R_3 的對稱點，因為 $\mathcal{Q}$ 與 ℓ_1', ℓ_4' 共切 $\mathcal{C}$，所以

$$\begin{aligned}\infty_{\ell_1}(Q_2, Q_3; P_{14}', \infty_{\ell_4}) &= (P_{24}, P_{34}; \ell_1' \cap \ell_4, \infty_{\ell_4}) = (P_{12}, P_{31}; \infty_{\ell_1}, \ell_1 \cap \ell_4') \\ &= \infty_{\ell_4}(Q_3, Q_2; \infty_{\ell_1}, P_{14}') = \infty_{\ell_4}(Q_2, Q_3; P_{14}', \infty_{\ell_1}),\end{aligned}$$

由交比的性質 (2.1.9)，我們有 Q_2, Q_3, P_{14}' 共線，關於 P_{14} 位似 $1/2$ 倍可得 $O \in R_2R_3$。反敘述就把論證反過來就好了。 ■

牛頓三號則是與完全四線形中的四邊形比較有關的定理。

Theorem 6.3.14 (牛頓三號/Newton's theorem III). 對於完全四線形 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$，定義 $P_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$，若圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 分別與 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 切於 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4，則 Q_1Q_3, Q_2Q_4, $P_{12}P_{34}$, $P_{23}P_{41}$ 共點。

Proof. 考慮六切線組 $(\ell_1\ell_1\ell_2\ell_3\ell_3\ell_4)$ 與 $(\ell_1\ell_2\ell_2\ell_3\ell_4\ell_4)$，由 (6.3.2) 知 Q_1Q_3, $P_{12}P_{34}$, $P_{23}P_{41}$ 與 Q_2Q_4, $P_{12}P_{34}$, $P_{23}P_{41}$ 分別共點，即四線 Q_1Q_3, Q_2Q_4, $P_{12}P_{34}$, $P_{23}P_{41}$ 共點。 ■

習題

Problem 1. 令 $\triangle S_1S_2S_3$ 為一個正三角形，P 為任意一點。證明：$\triangle PS_2S_3$, $\triangle PS_3S_1$, $\triangle PS_1S_2$ 的歐拉線共點。

Problem 2. 令 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，D 為 I 關於 BC 的垂足，M 為 $\overline{BC}$ 的中點。證明：IM 平分 $\overline{AD}$。

Problem 3. 設 $ABCD$ 為一個圓內接四邊形且 P 為其對角線 AC 與 BD 的交點，令 $M_{AB}, M_{BC}, M_{CD}, M_{DA}$ 分別為 $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$ 中點，$I_{AB}, I_{BC}, I_{CD}, I_{DA}$ 分別為 $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCD, \triangle PDA$ 的內心。證明：$M_{AB}I_{AB}, M_{BC}I_{BC}, M_{CD}I_{CD}, M_{DA}I_{DA}$ 四線共點。

Problem 4. 令 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，M 為 $\overline{AH}$ 的中點，E, F 分別為 B, C 關於 CA, AB 的垂足。在 EM 上取點 R 使得 $\measuredangle RBC = 90^\circ$，在 FM 上取點 S 使得 $\measuredangle BCS = 90^\circ$。證明：$A, R, S$ 共線。

Problem 5. 令 $\triangle DEF$ 為 $\triangle ABC$ 的弧中點三角形、$X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ 為 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的交點並且以 $D, Z_1, Z_2, E, X_1, X_2, F, Y_1, Y_2, D$ 為順序。設 $P_{bc} = EY_1 \cap FZ_2$, $P_{cb} = FZ_1 \cap EY_2$，同樣定義 $P_{ca}, P_{ac}, P_{ab}, P_{ba}$，證明 $P_{bc}P_{cb}$, $P_{ca}P_{ac}$, $P_{ab}P_{ba}$ 共點。

Problem 6. 在一個正三角形 ABC 的三邊上選六個點，其中 $A_1, A_2 \in BC$, $B_1, B_2 \in CA$, $C_1, C_2 \in AB$ 使得六邊形 $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ 的六邊等長。證明：A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 共點。

Problem 7. 令 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，P 為 I 關於 $\odot(ABC)$ 的反演點，P 關於 $\triangle ABC$ 的內切圓的其中一條切線交 $\odot(ABC)$ 於 X, Y。證明：$\angle XIY = 120^\circ$。

Problem 8. 若平面上有八個點 $P_1, P_2, \ldots, P_8$，$Q_i := P_{i-2}P_{i-1} \cap P_{i+1}P_{i+2}$。證明：$P_1, \ldots, P_8$ 共圓錐曲線若且唯若 $Q_1, \ldots, Q_8$ 共圓錐曲線。

6.A 附錄：無窮虛圓點

所謂平面幾何，就只是射影平面 $\mathbb{P}^2$ 與兩個點 ∞_i, ∞_{-i}。

我們從角度這個最基本的物件來切入這件事。一條在實數平面 $\mathbb{R}^2$ 中斜率是 $t \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 的直線被旋轉了 θ 之後，其斜率為

$$\frac{\sin\theta + t\cos\theta}{\cos\theta - t\sin\theta}.$$

注意到如果令 $\Theta = e^{2i\theta}$，那麼由歐拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i}{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2} = \frac{\Theta - 1}{i(\Theta + 1)},$$

因此在 $\mathbb{C}^2$ 中，我們可以定義一個斜率是 $t \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 的直線被「旋轉」了 $\Theta \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 後，其斜率為

$$t^\Theta := \frac{(\Theta - 1) + it(\Theta + 1)}{i(\Theta + 1) - t(\Theta - 1)}$$

顯然地，$(t^{\Theta_1})^{\Theta_2} = t^{\Theta_1\Theta_2}$。

Remark. 如果我們定義 $\mathbb{S}^1$ 定義為 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[r,s]/\langle r^2 + s^2 - 1\rangle$，那麼其實斜率與旋轉它的角度給了我們一個群作用：透過 $[x : y : 0] \mapsto t = y/x$ 把 $\mathcal{L}_\infty$ 想成 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$，透過 $(r,s) \mapsto r + is$ 把

$$\mathbb{S}^1(\mathbb{R}) = \{(r,s) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 + s^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

想成 $\{\Theta \in \mathbb{C} \mid |\Theta| = 1\} \subseteq \mathbb{C}^\times$，我們有以下作用

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ (r,s,t) = (e^{2i\theta}, t) &\longmapsto \tfrac{\sin\theta + t\cos\theta}{\cos\theta - t\sin\theta} = \tfrac{s + t(r+1)}{(r+1) - ts}, \end{aligned}$$

而上述的延伸定義就只是把這個作用放到 $\mathbb{C}$ 上（注意到

$$\mathbb{S}^1(\mathbb{C}) = \{(r,s) \in \mathbb{C}^2 \mid r^2 + s^2 = 1\}$$

與 $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 同構，透過座標變換 $\Theta = r + is$, $(r,s) = \left(\frac{\Theta + \Theta^{-1}}{2}, \frac{\Theta - \Theta^{-1}}{2i}\right)$）：

$$\frac{s + t(r+1)}{(r+1) - ts} = \frac{(\frac{\Theta - \Theta^{-1}}{2i}) + t(\frac{\Theta + \Theta^{-1}}{2} + 1)}{(\frac{\Theta + \Theta^{-1}}{2} + 1) - t(\frac{\Theta - \Theta^{-1}}{2i})} = t^\Theta.$$

對於任意的 $t_1, t_2 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$，$t_1^\Theta = t_2$ 若且唯若

$$\Theta = \frac{t_1+i}{t_1-i}\frac{t_2-i}{t_2+i} = (t_1, t_2; -i, i).$$

可以發現這只有在 t_1, t_2 其中一個是 $\pm i$ 時是辦不到的，對於其餘的情形，我們便定義

$$\begin{aligned}
&\measuredangle^e(t_1, t_2) = (t_1, t_2; -i, i)\\
&\measuredangle(t_1, t_2) = \frac{1}{2i}\log \measuredangle^e(t_1, t_2) = \left(\frac{1}{2\pi i}\log \measuredangle^e(t_1, t_2)\right) \cdot 180^\circ \in {}^{\mathbb{C}}\!/_{\mathbb{Z}\pi} = {}^{\mathbb{C}^\circ}\!/_{\mathbb{Z}\,180^\circ}
\end{aligned}$$

使得對於任意直線 ℓ_1, ℓ_2，$\measuredangle(\ell_1, \ell_2) = \measuredangle(\infty_{\ell_1}, \infty_{\ell_2})$。特別地，$(t_1, t_2; -i, i) = -1$ 若且唯若 $\measuredangle(t_1, t_2) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$。

當 $t = \pm i$ 時，$t^\Theta = t$ 對於所有 $\Theta \in \mathbb{C}^\times$，這個點對應到 $\mathbb{P}^2$ 上的點 $[1 : \pm i : 0]$，記為 $\infty_{\pm i}$（有些文獻會記為 I 與 J，但 I 在這邊通常指內心，因此我們不使用這個習慣），稱作**無窮虛圓點** (**circular point at infinity**)，它們會是所有圓的共同交點：

$$\left((x-x_0z)^2 + (y-y_0z)^2 - kz^2\right)(1, i, 0) = 0.$$

所以任意 $\triangle ABC$ 的外接圓 $\odot(ABC)$ 其實就是過 $A, B, C, \infty_i, \infty_{-i}$ 的圓錐曲線 $(ABC\infty_i\infty_{-i})$。

這邊舉一些例子來說明何謂平面幾何就是 $\mathbb{P}^2$ 與 ∞_i, ∞_{-i}。

Example 6.A.1. 因為 $\odot(ABC) = (ABC\infty_i\infty_{-i})$，所以對於任意 $P \in \odot(ABC)$，

$$\measuredangle BPC = \frac{1}{2i}\log P(B, C; \infty_{-i}, \infty_i) = \frac{1}{2i}\log A(B, C; \infty_{-i}, \infty_i) = \measuredangle BAC,$$

也就是我們熟知的圓周角性質。

Example 6.A.2. 如果令 X 為 BC 與 $\mathcal{L}_\infty := \infty_i\infty_{-i}$ 的交點，$X^\vee$ 為 $\mathcal{L}_\infty$ 上一點滿足 $(B, C; X, Y) = -1$，那麼 $AX^\vee$ 就是 A 關於 BC 的垂線。因此，由對稱性，我們可以透過 ∞_i, ∞_{-i} 兩個點來構造 $\triangle ABC$ 的垂心 H（事實上，H 為 ∞_i 與 ∞_{-i} 的西瓦積，見 (7.1.25)）。

Proposition 6.A.3. 兩點 $\infty_{\pm i}$ 為關於任意三角形 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對。

Proof. 注意到兩條 $\angle BAC$ 的角平分線 ℓ_+, ℓ_- 互相垂直，所以滿足

$$(\infty_{\ell_+}, \infty_{\ell_-}; \infty_{-i}, \infty_i) = -1.$$

因此固定 ℓ_+, ℓ_- 的對合變換，即等角共軛變換，會將 $A\infty_i$ 送至 $A\infty_{-i}$。 ■

Remark. 如果我們把三角形 $\triangle ABC \subseteq \mathbb{R}^2$ 想成是在複數平面 $\mathbb{C}$ 上，那麼 $\infty_{\pm i}$ 的重心座標為

$$[C-B : A-C : B-A], \quad [\overline{C-B} : \overline{A-C} : \overline{B-A}].$$

這時候，$\infty_i \times \infty_{-i} = [a^2 : b^2 : c^2]$，確實是我們熟知的等角共軛變換（見第 7.3, 7.4 節）。

如果 $\triangle ABC \subseteq \mathbb{C}^2$，那麼我們需要將 A, B, C 的「複數座標」透過映射

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & 1 \otimes x + i \otimes y & \longrightarrow & x + iy \end{array}$$

來表達，而共軛變換 $\overline{1 \otimes x + i \otimes y} = 1 \otimes x - i \otimes y$ 只對第一個 $\mathbb{C}$ 取。

對於一實數平面上的圓錐曲線 $\mathcal{C}$（定義方程式係數皆為實數的圓錐曲線），如果令 ℓ_{++}, ℓ_{+-} 為 ∞_i 關於 $\mathcal{C}$ 的兩條切線，ℓ_{-+}, ℓ_{--} 分別為 ℓ_{++}, ℓ_{+-} 在複共軛變換 $[x:y:z] \mapsto [\overline{x} : \overline{y} : \overline{z}]$ 下的像（同時也是 ∞_{-i} 關於 $\mathcal{C}$ 的兩條切線），那麼事實上我們有：

Proposition 6.A.4. 兩點 $F_+ = \ell_{++} \cap \ell_{-+}$, $F_- = \ell_{+-} \cap \ell_{--}$ 為 $\mathcal{C}$ 的兩個焦點。

Proof. 因為 $F_\pm$ 的複共軛點還是它們自己，所以兩個點都是實點。對於任意一點 $P \in \mathcal{C}$，令 F'_P 為 F_+ 關於切線 $\mathbf{T}_P\mathcal{C}$ 的對稱點，那麼由焦點的定義，我們只需證明 F'_P 的軌跡為一圓，或者說一個過 ∞_i, ∞_{-i} 的圓錐曲線。

令 X_P, Y_P, Z_P 分別為 $\mathbf{T}_P\mathcal{C}$ 與 $\ell_{++}, \ell_{-+}, FF'_P$ 的交點。那麼

$$(X_P, Y_P; Z_P; \infty_{\mathbf{T}_P\mathcal{C}}) = (F, F'_P; Z_P, \infty_{FF'_P}) = -1$$

與完全四線形的調和性質告訴我們 $F'_P = \infty_i Y_P \cap \infty_{-i} X_P$。顯然地，$X_P \mapsto P \mapsto Y_P$ 是個保交比變換，因此 F'_P 的軌跡是一個過 ∞_i, ∞_{-i} 的圓錐曲線。 ■

因此我們還有另外一對「虛」焦點 $F_i = \ell_{++} \cap \ell_{--}$, $F_{-i} = \ell_{+-} \cap \ell_{-+}$。因為在射影變換下我們是分不出 (F_+, F_-) 與 (F_i, F_{-i}) 的，所以我們就乾脆把焦點直接定義為兩對。

這些性質讓我們可以完全的把有序點對 $\{\infty_i, \infty_{-i}\}$ 射影變換到任意有序點對 $\mathbf{W} = \{W_+, W_-\}$，$W_+ \neq W_-$。我們定義 $\mathbf{W}$-無窮遠線 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathbf{W}} := W_+W_-$ 及 $\mathbf{W}$-角度 $\measuredangle^e_{\mathbf{W}}$：

$$\measuredangle^e_{\mathbf{W}}(\ell_1, \ell_2) := (\mathcal{L} \cap \ell_1, \mathcal{L} \cap \ell_2; W_-, W_+), \quad \ell_i \neq \mathcal{L},\ \ell_i \cap \mathbf{W} = \varnothing.$$

所以其實角度完全由點集 $\mathbf{W}$ 所決定。顯然地，$\measuredangle^e_{\mathbf{W}}(\ell_1, \ell_2) = 1$ 若且唯若 $\ell_1 \cap \ell_2 \in \mathcal{L}$，稱作 $\mathbf{W}$-平行。

因為仿射變換就是固定 $\mathcal{L}_\infty$ 的射影變換（保共線且保交比的變換），因此我們定義 $\mathbf{W}$-仿射變換為固定 $\mathcal{L}$ 的射影變換，並考慮 $\mathbf{W}$-仿射變換群：

$$\mathscr{A}_{\mathbf{W}} = \{\Phi \colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2 \mid \Phi(\mathcal{L}) = \mathcal{L}\}.$$

我們知道旋似變換就是固定 ∞_i, ∞_{-i} 的射影變換，因此我們考慮 $\mathbf{W}$-旋似變換群：

$$\mathscr{S}_{\mathbf{W}} = \{\Phi \in \mathscr{A}_{\mathbf{W}} \mid \Phi(W_\pm) = W_\pm\}.$$

這時候 $\mathbf{W}$-位似變換就是 $\mathscr{S}_{\mathbf{W}}$ 中讓 $\mathcal{L}$ 上的點都不動的元素，因此有 $\mathbf{W}$-位似變換群：

$$\mathscr{H}_{\mathbf{W}} = \{\Phi \in \mathscr{S}_{\mathbf{W}} \mid \Phi(P) = P,\ \forall P \in \mathcal{L}\}.$$

對於 $\Phi \in \mathscr{H}_{\mathbf{W}}$ 及任意三點 P, Q, R，我們有

$$\mathcal{L} \cap QR = \Phi(\mathcal{L} \cap QR) = \Phi(\mathcal{L}) \cap \Phi(Q)\Phi(R) = \mathcal{L} \cap \Phi(Q)\Phi(R).$$

因此 $QR \cap \Phi(Q)\Phi(R) \in \mathcal{L}$。同理有 $RP \cap \Phi(R)\Phi(P)$, $PQ \cap \Phi(P)\Phi(Q) \in \mathcal{L}$。所以由迪沙格定理，$P\Phi(P)$, $Q\Phi(Q)$, $R\Phi(R)$ 共於一點 O。因為 P, Q, R 是任意的，因此 $O_\Phi = O$ 是所有 $P\Phi(P)$ 的共同交點，稱為 Φ 的中心。注意到對於任意 Φ, $\Psi \in \mathscr{H}_{\mathbf{W}}$，$O_\Phi$, O_Ψ, $O_{\Phi\circ\Psi}$ 共線。

若 O_Φ 位於 $\mathcal{L}$ 上，我們就稱 Φ 是一個 $\mathbf{W}$-平移變換。這些 Φ 也形成一個群：

$$\mathscr{T}_{\mathbf{W}} = \{\Phi \in \mathscr{H}_{\mathbf{W}} \mid O_\Phi \in \mathcal{L}\}.$$

對於兩向量 $\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_1Q_1}$, $\vec{v}_2 = \overrightarrow{P_2Q_2}$，$P_i$, $Q_i \notin \mathcal{L}$, $W_\pm \notin \vec{v}_i$, $P_i \neq Q_i$，我們總是可以找到唯一的 $\Phi \in \mathscr{S}_{\mathbf{W}}$ 使得 $\Phi(P_1) = P_2$, $\Phi(Q_1) = Q_2$（即 $\Phi(\vec{v}_1) = \vec{v}_2$），因此我們定義

$$\frac{\vec{v}_2}{\vec{v}_1} = \Phi.$$

但這樣其實會有個問題，就是一般來說

$$\frac{\vec{v}_2}{\vec{v}_1} \circ \frac{\vec{w}_2}{\vec{w}_1} \neq \frac{\vec{w}_2}{\vec{w}_1} \circ \frac{\vec{v}_2}{\vec{v}_1}.$$

Proposition 6.A.5. 群 $\mathscr{T}_{\mathbf{W}}$ 是 $\mathscr{S}_{\mathbf{W}}$ 的**換位子群** (commutator subgroup)，意即，

$$\mathscr{T}_{\mathbf{W}} = [\mathscr{S}_{\mathbf{W}}, \mathscr{S}_{\mathbf{W}}] := \left\langle [\Phi, \Psi] := \Phi\Psi\Phi^{-1}\Psi^{-1} \,\middle|\, \Phi, \Psi \in \mathscr{S}_{\mathbf{W}} \right\rangle.$$

因此 $\mathscr{S}_{\mathbf{W}}$ 的阿貝爾化群 $\mathscr{S}_{\mathbf{W}}^{\mathrm{ab}} = \mathscr{S}_{\mathbf{W}} / \mathscr{T}_{\mathbf{W}}$。

所以我們應該將 $\vec{v}_2/\vec{v}_1$ 定義為 Φ 在 $\mathscr{S}_{\mathbf{W}}^{\mathrm{ab}}$ 中的像 $[\Phi]$，這樣就會有

$$\frac{\vec{v}_2}{\vec{v}_1} \circ \frac{\vec{w}_2}{\vec{w}_1} = \frac{\vec{w}_2}{\vec{w}_1} \circ \frac{\vec{v}_2}{\vec{v}_1} \in \mathscr{S}_{\mathbf{W}}^{\mathrm{ab}}.$$

因為

$$\frac{\vec{v}_3}{\vec{v}_1}(\vec{v}_1) = \vec{v}_3 = \frac{\vec{v}_3}{\vec{v}_2} \circ \frac{\vec{v}_2}{\vec{v}_1}(\vec{v}_1),$$

我們有

$$\frac{\vec{v}_3}{\vec{v}_1} = \frac{\vec{v}_3}{\vec{v}_2} \circ \frac{\vec{v}_2}{\vec{v}_1} = \frac{\vec{v}_2}{\vec{v}_1} \circ \frac{\vec{v}_3}{\vec{v}_2},$$

所以我們就可以像有向角一樣定義等號。

為了避免與內積的「$\cdot$」搞混，我們這邊沿用合成符號「$\circ$」來作為 $\mathscr{S}_{\mathbf{W}}^{\mathrm{ab}}$ 上的乘法。在原始情形 $\mathbf{W} = \{\infty_i, \infty_{-i}\}$，我們便省略下標中的 $\mathbf{W}$，而這時候 $\mathscr{S}^{\mathrm{ab}}$ 就會是我們心目中的在 $\mathbb{C}^2$ 上的複數座標。

Remark. 考慮短正合序列

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathscr{H}_{\mathbf{W}}/\mathscr{T}_{\mathbf{W}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{S}_{\mathbf{W}}/\mathscr{T}_{\mathbf{W}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{S}_{\mathbf{W}}/\mathscr{H}_{\mathbf{W}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathscr{H}_{\mathbf{W}}^{\mathrm{ab}} \arrow[r] & \mathscr{S}_{\mathbf{W}}^{\mathrm{ab}} \arrow[r] & \mathbb{S}^1 \arrow[r] & 1 \\
& & \dfrac{\vec{v}_2}{\vec{v}_1} \arrow[r, mapsto] & \measuredangle^{e}_{\mathbf{W}}(v_1, v_2). &
\end{tikzcd}$$

這完美的詮釋了旋似變換就是伸縮變換與旋轉變換的合成，也說明了 $\vec{v}_2/\vec{v}_1$ 這個記號（在原始情形 $\mathbf{W}=\{\infty_i,\infty_{-i}\}$ 時）可以想成是角度上的形式和的提昇。因此，如果把 v_i, w_i 想成是 $\vec{v}_i, \vec{w}_i$ 所定義的直線，那麼

$$\prod_{i=1}^{n}\vec{v}_i=\prod_{i=1}^{n}\vec{w}_i \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i=1}^{n}v_i=\sum_{i=1}^{n}w_i.$$

習題

Problem 1. 證明 $(t^{\Theta_1})^{\Theta_2}=t^{\Theta_1\Theta_2}$。

Chapter 7

配極

7.1 極

在圓上是擁有配極的，而且也有良好的射影定義，因為圓錐曲線又可以射影打成圓，所以在圓錐曲線上也同樣可以定義極點極線這些東西。

Definition 7.1.1. 給定圓錐曲線 $\mathcal{C}$，P 為任意一點，過 P 作一動線交 $\mathcal{C}$ 於 M_1, M_2 兩點，取 Q 使得 $(P,Q;M_1,M_2) = -1$，則 Q 的軌跡為一直線或一線段 ℓ，我們將 ℓ 或其延長 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P)$ 定義為 P 關於 $\mathcal{C}$ 的極線。

至於為什麼是直線或線段可以把 $\mathcal{C}$ 打成圓看看，這邊就不證明了。透過我們在圓上的配極知識，以及相同的論證，我們可以把一些常見的性質推廣到圓錐曲線的情形 (從 (7.1.2) 到 (7.1.8))。

Theorem 7.1.2 (極線互反定理)**.** 令 $\mathcal{C}$ 為一圓錐曲線，P, Q 為平面上兩點，則

$$P \in \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(Q) \iff Q \in \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P).$$

Definition 7.1.3. 令 $\mathcal{C}$ 為一圓錐曲線，若兩點 P, Q 滿足 P 關於 $\mathcal{C}$ 的極線過 Q，則我們稱 P, Q 關於 $\mathcal{C}$ 共軛 (**conjugate**)。

Definition 7.1.4. 令 $\mathcal{C}$ 為一圓錐曲線，K 為平面上一線，在 K 上取動點 Q，則 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(Q)$ 過定點 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(K)$，我們稱其為 K 關於 $\mathcal{C}$ 的極點 (**pole**)。

Proposition 7.1.5. 令 $\mathcal{C}$ 為一圓錐曲線，K, L 為平面上兩線，則

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(K) \in L \iff \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(L) \in K.$$

Definition 7.1.6. 令 $\mathcal{C}$ 為一圓錐曲線，若兩線 K, L 滿足 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(K) \in L$ 上，則我們稱 K, L 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。

Definition 7.1.7. 令 $\mathcal{C}$ 為一圓錐曲線，若 $\triangle ABC$ 滿足 A, B, C 兩兩關於 $\mathcal{C}$ 共軛（等價於 BC, CA, AB 兩兩關於 $\mathcal{C}$ 共軛），則我們稱 $\triangle ABC$ 為關於 $\mathcal{C}$ 的自共軛三角形 (**self-conjugate triangle**)，$\mathcal{C}$ 為 $\triangle ABC$ 的對角圓錐曲線。

Proposition 7.1.8. 令 $\mathcal{C}$ 為一圓錐曲線，P_1, P_2, P_3, P_4 為 $\mathcal{C}$ 上四點。設

$$X = P_1P_2 \cap P_3P_4,\ Y = P_1P_3 \cap P_4P_2,\ Z = P_1P_4 \cap P_2P_3,$$

則 $\triangle XYZ$ 為關於 $\mathcal{C}$ 的自共軛三角形。

Theorem 7.1.9. 令 $\mathcal{C}$ 為一圓錐曲線，五線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4, L 分別為五點 P_1, P_2, P_3, P_4, A 關於 $\mathcal{C}$ 的極線，則

$$A(P_\bullet) = L(\ell_\bullet).$$

下面的推論則是結合前面的交比得到的結果。

Corollary 7.1.10. 給定圓錐曲線 $\mathcal{C}$，任意六點 P_1, P_2, P_3, P_4, A, B 共一圓錐曲線若且唯若六線 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\{P_1, P_2, P_3, P_4, A, B\})$ 切一圓錐曲線。

Proof. 由

$$A(P_\bullet) = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(A)(\ell_\bullet),\ B(P_\bullet) = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(B)(\ell_\bullet),$$

知 P_1, P_2, P_3, P_4, A, B 共一圓錐曲線若且唯若

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(A)(\ell_\bullet) = A(P_\bullet) = B(P_\bullet) = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(B)(\ell_\bullet),$$

而這等價於 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\{P_1, P_2, P_3, P_4, A, B\})$ 切一圓錐曲線。 ■

Definition 7.1.11. 令 $\mathcal{C}$ 為一圓錐曲線，我們稱兩圓錐曲線 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 關於 $\mathcal{C}$ 共軛，記為 $\mathcal{C}_2 = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_1)$，若

$$\{\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P) \mid P \in \mathcal{C}_1\} = \mathbf{T}\mathcal{C}_2.$$

透過 (7.1.10)，可以保證對於任意 $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1$，存在一個 $\mathcal{C}_2$ 使得 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 關於 $\mathcal{C}$ 共軛，並且有 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 關於 $\mathcal{C}$ 共軛等價於 $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1$ 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。

Proposition 7.1.12. 令 $\mathcal{C}$ 為一圓錐曲線，O 為 $\mathcal{C}$ 的中心，則 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(O) = \mathcal{L}_\infty$。

Proof. 過 O 作兩條與 $\mathcal{C}$ 有交點的直線 $\ell_1\,\ell_2$，設其分別交 $\mathcal{C}$ 於 $(P_1, Q_1), (P_2, Q_2)$，則 $\overline{P_1Q_1}, \overline{P_2Q_2}$ 的中點們重合於 O，所以 $\infty_{P_1Q_1}, \infty_{P_2Q_2} \in \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(O)$，因此 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(O) = \mathcal{L}_\infty$。 ■

Corollary 7.1.13 (平行弦定理)**.** 令 $\mathcal{C}$ 為一圓錐曲線、O 為 $\mathcal{C}$ 的中心，P_1, P_2 為平面上兩點，則 O, P_1, P_2 共線若且唯若 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P_1)$ 平行於 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P_2)$。

Proof. 注意到 O, P_1, P_2 共線若且唯若 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(O) = \mathcal{L}_\infty, \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P_1), \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P_2)$ 共點，即 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P_1)$ 平行於 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P_2)$。 ■

Corollary 7.1.14. 令 $\mathcal{C}$ 為一圓錐曲線，O 為 $\mathcal{C}$ 的中心，$\overline{AB}$ 為 $\mathcal{C}$ 上的弦，則 $O\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(AB)$ 平分 $\overline{AB}$。

Proof. 令 $T = AB \cap O\,\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(AB), U = \infty_{AB}$，則 $O\,\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(AB) = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(U)$，因此由定義有 $(U, T; A, B) = -1$，故 T 為 $\overline{AB}$ 中點。 ■

Theorem 7.1.15 (八點圓錐曲線定理)**.** 給定 $\triangle ABC$，令 P, Q 為兩點，$\triangle P^aP^bP^c$, $\triangle Q^aQ^bQ^c$ 分別為 P, Q 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形，那麼 P, P^a, P^b, P^c, Q, Q^a, Q^b, Q^c 八點共一圓錐曲線。

Proof. 令 $\mathcal{C}$ 為經過 P, P^a, P^b, P^c, Q 的圓錐曲線，則 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(A)$, $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(B)$, $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(C)$ 為

$\triangle ABC$ 的三邊，令 AQ 與 $\mathcal{C}$ 的另一個交點為 $(Q^a)'$ 則

$$(A, AQ \cap BC; Q, (Q^a)') = -1 = (A, AQ \cap BC; Q, Q^a)$$

故 $Q^a = (Q^a)'$，因此 $Q^a \in \mathcal{C}$，同理有 $Q^b, Q^c \in \mathcal{C}$。 ∎

其對偶命題為：

Theorem 7.1.16 (八線圓錐曲線定理)**.** 令 K, L 為兩條直線，$\triangle K^aK^bK^c$, $\triangle L^aL^bL^c$ 分別為 K, L 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形，那麼 K, K^a, K^b, K^c, L, L^a, L^b, L^c 八線切一圓錐曲線。

在有了極線的定義後，我們就可以定義一些常用的「積」：

Definition 7.1.17. 對於任意兩點 P, Q，我們定義 P 與 Q 關於 $\triangle ABC$ 的交叉點，記為 $P \pitchfork Q$，為直線 PQ 關於圓錐曲線 $(ABCPQ)$ 的極點。

注意到這個定義與第 1.1 節的習題 3 是不一樣的，所以我們證明：

Proposition 7.1.18. 令 $\triangle P_aP_bP_c$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形。那麼 $P_a(P \pitchfork Q)$, P_bP_c, AQ 共點。

由對稱性，$P \pitchfork Q$ 關於 $\triangle P_aP_bP_c$ 的西瓦三角形與 $\triangle ABC$ 的透視中心為 Q（即第 1.1 節的習題 3 的定義），這也證明了該定義關於 P, Q 是對稱的。

Lemma 7.1.19 (Seydewitz–Staudt)**.** 給定 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$，P 為 BC 關於 $\mathcal{C}$ 的極點。過 P 作一直線分別交 CA, AB 於 U, V，那麼 U, V 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。

Proof. 令 D 為 BU 與 $\mathcal{C}$ 的第二個交點。考慮折線 $ABBDCC$，由帕斯卡定理 (6.3.1) 我們有 AB, CD, PU 共點於 V，因此由 (7.1.8)，U, V 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。 ∎

Proof of (7.1.18). 在 (7.1.19) 中取 $\triangle ABC = \triangle APQ$ 與 $\mathcal{C} = (ABCPQ)$，我們知道 $P_a(P \pitchfork Q)$ 與 AQ 交於 P_a 關於 $\mathcal{C}$ 的極線 P_bP_c 上。 ∎

Proposition 7.1.20. 若 $R = P \pitchfork Q$ 為 P 與 Q 關於 $\triangle ABC$ 的交叉點，$\triangle P_aP_bP_c, \triangle Q_aQ_bQ_c$ 分別為 P, Q 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形，那麼 $P_cP_a \cap Q_aQ_b$, $P_aP_b \cap Q_cQ_a$ 皆位於 AR 上。

Proof. 考慮原命題關於 $\mathcal{C} = (ABCPQ)$ 配極的等價命題，我們需要證明 A 關於 $(ABCPQ)$ 的切線，P_bQ_c, P_cQ_b, PQ 共點 (即 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(AR)$)。

注意到 $P_bP_c = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P_a)$ 與 $Q_bQ_c = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(Q_a)$ 交於 $BC = P_aQ_a$ 關於 $\mathcal{C}$ 的極點 U，因此

$$(B, C; AU \cap \mathcal{C}, A)_{\mathcal{C}} = -1 = A(B, C; U, P_bQ_c \cap P_cQ_b),$$

即 $A(P_bQ_c \cap P_cQ_b)$ 與 $\mathcal{C}$ 相切。

要證明 P_bQ_c, P_cQ_b, PQ 共點，由迪沙格定理，我們只需證明 $U = P_bP_c \cap Q_bQ_c$, $CP \cap BQ = P_cP \cap QQ_b$, $BP \cap CQ = PP_b \cap Q_cQ$ 共線，但這三點都位於 $BC \cap PQ$ 關於 $\mathcal{C}$ 的極線上。 ■

Proposition 7.1.21. 延續上述性質的標號，若 $P_a^\vee$, $P_b^\vee$, $P_c^\vee$ 分別為 P 的三線性極線與 BC, CA, AB 的交點，$Q_a^\vee$, $Q_b^\vee$, $Q_c^\vee$ 分別為 Q 的三線性極線與 BC, CA, AB 的交點，那麼 $P_bQ_c^\vee \cap P_cQ_b^\vee$, $P_b^\vee Q_c \cap P_c^\vee Q_b$ 也位於 AR 上。

Proof. 令 $\triangle T^aT^bT^c = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\triangle ABC)$。那麼 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(Q_a^\vee) = Q_aT^a$。類似於 (7.1.20) 的證明，我們要證明 $P_cP_a \cap Q_cT^c$, $P_aP_b \cap Q_bT^b$, $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(AR) = P_bQ_c \cap P_cQ_b$ 共線，而這由迪沙格定理等價於 $A = P_bQ_b \cap P_cQ_c$, T^b, T^c 共線。 ■

Proposition 7.1.22. 若 $R = P \pitchfork Q$ 為 P 與 Q 關於 $\triangle ABC$ 的交叉點，那麼 Q 的西瓦三角形 $\triangle_Q$ 與 R 的反西瓦三角形 $\triangle^R$ 的透視軸為 P 的三線性極線 $\mathfrak{t}(P)$。

Proof. 令 X 為 $P_b^\vee P_c^\vee$ 與 Q_bQ_c 的交點。我們只需證明

$$A(B, C; R, X) = (Q_c, Q_b; AR \cap Q_bQ_c, X) = -1.$$

考慮完全四線形 $(P_b^\vee P_c^\vee)(Q_bQ_c)$，第三對頂點為 A 與 $P_b^\vee Q_c \cap P_c^\vee Q_b \in AR$ (由 (7.1.21))，因此我們便有 AR, $P_b^\vee P_c^\vee$ 調和分割 $\overline{Q_bQ_c}$。 ■

因此我們可以定義 R 與 Q 的交叉商 $R\Psi Q$ 為 $\triangle^R$ 與 $\triangle_Q$ 的透視軸的三線性極點。這時候我們有

$$(R\Psi Q)\pitchfork Q = R.$$

Definition 7.1.23. 令 $\triangle P^aP^bP^c$, $\triangle Q^aQ^bQ^c$ 分別為 P, Q 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形。我們定義 P 與 Q 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦積，記為 $P\star Q$，為直線 PQ 關於過 P 與 Q 的對角圓錐曲線 $(PP^aP^bP^cQQ^aQ^bQ^c)$ 的極點。

我們定義 S 與 Q 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦商，記為 S/Q，為（唯一）滿足 $S = P\star Q$ 的點 P。

透過交叉點的定義，我們發現西瓦積 $P\star Q$ 同時是 P 與 Q 分別關於 $\triangle P^aP^bP^c$ 及 $\triangle Q^aQ^bQ^c$ 的交叉點。而西瓦商 S/Q 為 S 的西瓦三角形 $\triangle_S$ 與 Q 的反西瓦三角形 $\triangle^Q$ 的透視中心。

Proposition 7.1.24. 給定 $\triangle ABC$。對於任意兩點 P, Q，令 $S = P\star Q$。那麼

$$A(P, Q; S, PQ\cap BC) = -1.$$

Proof. 令 $\mathcal{D}$ 為過 P 與 Q 的對角圓錐曲線。因為 $PQ\cap BC$ 關於 $\mathcal{D}$ 的極線為 $\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(PQ)\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(BC) = SA$，所以由極線的定義，

$$A(P, Q; S, PQ\cap BC) = (P, Q; SA\cap PQ, PQ\cap BC) = -1. \qquad \blacksquare$$

Example 7.1.25. 因為

$$(\infty_i, \infty_{-i}; \infty_{\perp BC}, \infty_{BC}) = -1,$$

所以 ∞_i 與 ∞_{-i} 的西瓦積 S 滿足 $AS\perp BC$。由於這關於三邊是對稱的，因此 S 就是 $\triangle ABC$ 的垂心 H。反過來說，我們也可以把垂心定義成 ∞_i 與 ∞_{-i} 的西瓦積。

過 ∞_i, ∞_{-i} 的對角圓錐曲線 $\mathcal{D}_\infty$ 被稱為 $\triangle ABC$ 的極圓（當 $\triangle ABC$ 為銳角三角形時，極圓是虛圓），$\mathcal{D}_\infty$ 的圓心為 H。因為 A 關於 $\mathcal{D}_\infty$ 的極線是 BC，所以其實 $\mathcal{D}_\infty$ 就是以 H 為圓心，

$$\sqrt{\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HH_a}} = \sqrt{\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HH_b}} = \sqrt{\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HH_c}}$$

為半徑的圓，其中 $\triangle H_aH_bH_c$ 為 H 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形。

Proposition 7.1.26. 設 F 為圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 的其中一個焦點，那麼對於任意過 F 一線 $L \in \mathbf{T}F$，$F\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(L)$ 垂直於 L。

Proof. 如果我們用 (6.A.4) 中的焦點定義，那麼這就只是極線性質：

$$(F\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(L), L; F\infty_{-i}, F\infty_i) = -1 \quad \Longrightarrow \quad F\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(L) \perp L. \qquad \blacksquare$$

這邊給個實焦點定義的證明：我們只證明 $\mathcal{C}$ 為橢圓的情形，剩下的情況類似。令 A, B 為 $\mathcal{C}$ 與 L 的兩個交點，F' 為 F 關於 $\mathcal{C}$ 的中心 O 的對稱點（即 $\mathcal{C}$ 的另一個焦點）。那麼 $P = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(L)$ 為 $\angle FAF'$ 與 $\angle FBF'$ 的外角平分線的交點，即 $\triangle F'AB$ 的 F'-旁心。原命題等價於 F 為 $\triangle F'AB$ 的 F'-旁切圓與 AB 的切點。而這只是因為（由旁切圓切點的長度關係）

$$\overline{FA} + \overline{F'A} = \overline{FB} + \overline{F'B}.$$

證畢。

類似於圓的情形，我們也可以對一個虛圓錐曲線 $\mathcal{X}$ 配極。如果 O 為 $\mathcal{X}$ 的中心，那麼對 $\mathcal{X}$ 配極就會是對某個同樣以 O 為中心的（實）圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 配極後，再對 O 取對稱變換 $\mathfrak{r}_O$，意即，

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{X}} = \mathfrak{r}_O \circ \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}.$$

這在圓的情形就是把半徑長 $\sqrt{k}$ 換成 $\sqrt{-k}$ 而已。所以上面所提到的性質（除了 (7.1.26) 以外）都可以有虛圓錐曲線版本。

習題

Problem 1. 設 O 為圓 Γ 的圓心。證明：對於任意圓 Ω，$\mathfrak{p}_\Gamma(\Omega)$ 是一個以 O 為焦點的圓錐曲線。

Problem 2. 給定圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 與 $\triangle ABC$。證明：

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\triangle ABC) := \triangle \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(BC)\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(CA)\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(AB)$$

與 $\triangle ABC$ 透視。

Problem 3. 給定任意 $\triangle ABC$，P 為任意一點。設 $\triangle P_aP_bP_c$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，分別在 PP_a, PP_b, PP_c 上取點 D, E, F 使得

$$PP_a \cdot PD = PP_b \cdot PE = PP_c \cdot PF =: k.$$

證明：

(i) $\triangle ABC$ 與 $\triangle P_aP_bP_c$ 透視；

(ii) 當 k 變動時，透視中心的軌跡為經過 A, B, C, P 及 $\triangle ABC$ 的垂心 H 的圓錐曲線；

(iii) 當 k 變動時，透視軸的包絡線為與 BC, CA, AB 相切的拋物線。

Problem 4 (牛頓二號的推廣). 設完全四線形 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ 與圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 相切，令 $A_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$。若直線 L 與 $\mathcal{Q}$ 的對角線 $A_{ij}A_{kl}$ 於 P_{ij}，在 $A_{ij}A_{kl}$ 取 Q_{ij} 滿足 $(A_{ij}, A_{kl}; P_{ij}, Q_{ij}) = -1$。證明：

(i) Q_{14}, Q_{24}, Q_{34} 共線；

(ii) $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(Q_{14}Q_{24}Q_{34}) \in L$。

Problem 5. 給定 $\triangle ABC$。對於一點 P 及一線 ℓ，令 $\mathcal{C}$ 為 ℓ 關於 (A, B, C, P) 的九點圓錐曲線。則 ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極點 $\mathfrak{t}(\ell)$, $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\ell)$ 及 P 共線。

Problem 6. 對於任意兩三角形 $\triangle_1 = \triangle A_1B_1C_1$, $\triangle_2 = \triangle A_2B_2C_2$，$A_1$, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 共圓錐曲線若且唯若存在一圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 使得 $\triangle_1$, $\triangle_2$ 皆為關於 $\mathcal{C}$ 的自配極三角形。

Problem 7. 證明 (7.1.21) 中的 $P_bQ_c^\vee \cap P_cQ_b^\vee$ 位於 $P_a\mathfrak{p}_{(ABCPQ)}(AR)$ 上。

7.2 對合

Definition 7.2.1. 令 X 為一賦交比集（見第 7.A 節）。我們稱 $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$ 為一對合變換若 $\varphi^2 = \mathrm{id}_X$ 且 $\varphi \neq \mathrm{id}_X$，也就是在 $\mathrm{Aut}(X)$ 中階為 2 的元素。

Example 7.2.2. 若 X 為一直線，則關於 X 上一點 P 作對稱的變換是一個對合變換。

Example 7.2.3. 若 $X = \mathbf{T}P$，$P \notin \mathcal{L}_\infty$ 為任意一點，則關於 P 旋轉 90° 的旋似變換是一個對合變換。

Proposition 7.2.4. 令 X 為一賦交比集，若 $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$ 且存在一點 $A \in X$ 使得 $\varphi(A) \neq A$, $\varphi(\varphi(A)) = A$，則 φ 為一對合變換。

Proof. 由於 $\varphi(A) \neq A = \mathrm{id}_X(A)$，$\varphi \neq \mathrm{id}_X$。令 $P \in X$，則

$$(A, \varphi(A); P, \varphi(P))_X = (\varphi(A), A; \varphi(P), \varphi(\varphi(P)))_X = (A, \varphi(A); \varphi^2(P), \varphi(P))_X.$$

因此 $\varphi^2(P) = P$，所以 φ 為一對合。 ■

Theorem 7.2.5 (迪沙格對合定理/Desargues' Involution Theorem)**.** 給定任意完全四點形 $q = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ 及任意一線 ℓ 不過 q 的任何頂點，定義 $Q_{ij} = P_iP_j \cap \ell$，則

(i) 存在恰一射影對合變換 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\ell)$ 使得

$$(Q_{23}, Q_{14}), \quad (Q_{31}, Q_{24}), \quad (Q_{12}, Q_{34})$$

皆為 φ 的相互對；

(ii) 對於 ℓ 上兩點 A, B，P_1, P_2, P_3, P_4, A, B 共一圓錐曲線（含退化）若且唯若 (A, B) 為 φ 的相互對。

我們稱 (i) 中定義的 φ 為 q 截 ℓ 所定義的對合。

Proof. 不妨假設 Q_{23}, Q_{14}, Q_{12} 兩兩相異且 Q_{23}, Q_{14}, Q_{34} 兩兩相異。定義 $\varphi\colon \ell \to \ell$ 為一射影變換使得 $Q_{23} \mapsto Q_{14}$, $Q_{14} \mapsto Q_{23}$, $Q_{12} \mapsto Q_{34}$（由 (7.A.7) 知 φ 存在且唯一）。由 (7.2.4)，φ 為一對合變換。

(i) 由交比性質知

$$\begin{aligned}(Q_{23},Q_{14};Q_{12},Q_{31})&=(Q_{23},P_1P_4\cap P_2P_3;P_2,P_3)\\&=(Q_{23},Q_{14};Q_{24},Q_{34})\\&=(Q_{14},Q_{23};Q_{34},Q_{24}),\end{aligned}$$

因此 $\varphi(Q_{31})=Q_{24}$，故 $(Q_{23},Q_{14}),(Q_{31},Q_{24}),(Q_{12},Q_{34})$ 皆為 φ 的相互對。

(ii) 只證過去，證回來由同一法即可。由交比性質知

$$P_1(A,B;P_2,P_3)=P_1(A,B;Q_{12},Q_{31}),\quad P_4(A,B;P_2,P_3)=P_4(A,B;Q_{24},Q_{34}).$$

因此由 P_1, P_2, P_3, P_4, A, B 共一圓錐曲線（含退化）有

$$P_1(A,B;Q_{12},Q_{31})=P_4(A,B;Q_{24},Q_{34})=P_4(B,A;Q_{34},Q_{24}).$$

定義 $\varphi'\in\mathrm{Aut}(\ell)$ 使得 $A\mapsto B$, $B\mapsto A$, $Q_{12}\mapsto Q_{34}$，則 $Q_{31}\mapsto Q_{24}$ 且 φ' 為一對合變換，故 $\varphi'=\varphi$，所以 (A,B) 為 φ 的相互對。 ■

Example 7.2.6. 若取 $\ell=(P_3P_1\cap P_2P_4)(P_1P_2\cap P_3P_4)$，那麼這個對合變換的不動點為 $P_3P_1\cap P_2P_4$, $P_1P_2\cap P_3P_4$，所以我們就可以得到完全四線形的調和性質 (2.2.8)。

Example 7.2.7. 令 H,Ω 分別為銳角三角形 ABC 的垂心及外接圓，M_a 為 $\overline{BC}$ 中點，X_a 為 AM_a 與 Ω 的另一個交點，Y_a 為 $\overrightarrow{M_aH}$ 與 Ω 的交點。類似地定義 X_b, Y_b, X_c, Y_c。證明：X_aY_a, X_bY_b, X_cY_c 共點於 $\triangle ABC$ 的歐拉線上。

Solution. 令 Z_a, Z_b, Z_c 分別為 X_aY_a, X_bY_b, X_cY_c 與 $\triangle ABC$ 的歐拉線 $\mathcal{E}$ 的交點，我們需要證明 $Z_a=Z_b=Z_c$。

首先注意到 H 位於 A^*Y_a 上，其中 A^* 為 A 關於 Ω 的對徑點，而外心 O 位於 AA^* 上，因此我們應該要考慮完全四點形 (A,A^*,X_a,Y_a) 與線 $\mathcal{E}$。由迪沙格對合定理，如果令 U,V 為 $\mathcal{E}$ 與 Ω 的兩個交點

$$(O,Z_a),\quad (G,H),\quad (U,V)$$

為某個對合的相互對，其中 $G=AX_a\cap\mathcal{E}$ 為 $\triangle ABC$ 的重心。

同理，

$$(O, Z_b), \quad (G, H), \quad (U, V)$$

及

$$(O, Z_c), \quad (G, H), \quad (U, V)$$

也分別是某些對合的相互對。所以如果考慮 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ 滿足 $\varphi(G) = H$, $\varphi(H) = G$, $\varphi(U) = V$，那麼由保交比變換的唯一性

$$Z_a = Z_b = Z_c = \varphi(O).$$

除了像這樣給出未知點的刻畫以外，迪沙格對合定理一個比較常用的方式是證明共圓錐曲線：

Example 7.2.8. 設 A, A', B, B', C, C', D, D' 八點共圓錐曲線。考慮兩個四邊形 $(AA')(BB')$ 與 $(CC')(DD')$ 的十六個交點。證明：

- 有偶數個「$'$」的八個點 $AB \cap CD$, $AB \cap C'D'$, $AB' \cap CD'$, $AB' \cap C'D$, $A'B \cap CD'$, $A'B \cap C'D$, $A'B' \cap CD$, $A'B' \cap C'D'$ 共圓錐曲線；
- 有奇數個「$'$」的八個點 $AB \cap CD'$, $AB \cap C'D$, $AB' \cap CD$, $AB' \cap C'D'$, $A'B \cap CD$, $A'B \cap C'D'$, $A'B' \cap CD'$, $A'B' \cap C'D$ 也共圓錐曲線。

Solution. 對於 $I \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$，定義 P_I 為 $A^i B^j \cap C^k D^\ell$，其中

$$i = \begin{cases} \varnothing, & \text{if } 1 \in I, \\ ', & \text{if } 1 \notin I. \end{cases},$$

j, k, ℓ 則同理，分別對應至 2, 3, 4。舉例來說，$P_{134} = A'B \cap C'D'$, $P_{12} = A'B' \cap CD$。

我們證明 P, P_{12}, P_{13}, P_{23}, P_{14}, P_{24} 共圓錐曲線，剩下的則同理。考慮完全四點形 (A, A', B, B') 及直線 CD，由於 A, A', B, B', C, D 共圓錐曲線，

$$(C, D), \quad (P_1, P_2), \quad (P, P_{12})$$

為某個射影對合變換 φ 的相互對。考慮完全四點形 $(P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24})$ 及直線 CD，再由迪沙格對合定理 (7.2.5)，因為 φ 使 (C, D), (P_1, P_2) 為相互對，P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P, $P_{12} = \varphi(P)$ 共圓錐曲線。

而 (7.2.5) 的對偶命題當然也成立：

Theorem 7.2.9. 給定任意完全四線形 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ 及任意一點 P 不位於 $\mathcal{Q}$ 的任何直線上，定義 $L_{ij} = (\ell_i \cap \ell_j)P$，則

(i) 存在恰一對合變換 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{T}P)$ 使得

$$(L_{23}, L_{14}), \quad (L_{31}, L_{24}), \quad (L_{12}, L_{34})$$

皆為 φ 的相互對；

(ii) 對於過 P 兩線 S, T，ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4, S, T 切一圓錐曲線（含退化）若且唯若 (S,T) 為 φ 的相互對。

我們稱 (i) 中定義的 φ 為 $\mathcal{Q}$ 截 P 所定義的對合。

還記得九點（線）圓錐曲線嗎？（見 (6.3.10)）事實上對合就是對九點（線）圓錐曲線配極：

Proposition 7.2.10. 延續迪沙格定理 (7.2.5) 的標號，令 $\mathcal{C}$ 為 ℓ 關於 q 的九點圓錐曲線，那麼 (A,B) 為關於 φ 的相互對若且唯若 A, B 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。

Proof. 令 $\varphi' = [\, A \mapsto \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(A) \cap \ell \,] \in \mathrm{Aut}(\ell)$，取 R_{ij} 使得 $(P_i, P_j; Q_{ij}, R_{ij}) = -1$。那麼我們知道

$$Q_{23} = R_{12}R_{31} \cap R_{24}R_{34}, \quad Q_{14} = R_{12}R_{24} \cap R_{31}R_{34},$$

故 Q_{23}, Q_{14} 關於 $\mathcal{C}$ 共軛，也就是 $\varphi'(Q_{23}) = Q_{14}$, $\varphi'(Q_{14}) = Q_{23}$。同理有 $\varphi'(Q_{31}) = Q_{24}$，所以 $\varphi = \varphi'$，因此 (A,B) 為關於 φ 的相互對若且唯若 $\varphi'(A) = B$，即 A, B 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。 ■

Proposition 7.2.11. 延續迪沙格定理對偶版本 (7.2.9) 的標號，令 $\mathcal{C}$ 為 P 關於 $\mathcal{Q}$ 的九線圓錐曲線，那麼 (S,T) 為關於 φ 的相互對若且唯若 S, T 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。

這邊給個推論：

Corollary 7.2.12. 延續迪沙格定理的標號，φ 有不動點若且唯若 $\mathcal{C}$ 與 ℓ 有交點。此時，φ 的不動點為 $\mathcal{C}$ 與 ℓ 的交點。

Corollary 7.2.13. 延續迪沙格定理對偶版本的標號，φ 有不動線若且唯若 $\mathbf{T}P$ 中有 $\mathcal{C}$ 的切線。此時，φ 的不動線為 $\mathbf{T}P$ 中 $\mathcal{C}$ 的切線。

那在確定某個變換為對合變換時就會有一些好用的性質，或者反過來證明某個變換為對合變換。

Proposition 7.2.14. 令 ℓ 為一直線，$\varphi\colon \ell \to \ell$ 為一變換，則 φ 為一對合變換若且唯若 φ 為反演變換（這邊視對稱變換為反演變換）。

Proof. 只證過去，證回來由同一法即可。令 $A = \varphi(\infty_\ell)$，這邊分兩個情形：

(i) $A \neq \infty_\ell$，那麼對於 φ 的任兩對相互對 $(P, P'), (Q, Q')$，我們有

$$(A, \infty_\ell; P, Q) = (\infty_\ell, A; P', Q') \implies \frac{AP}{AQ} = \frac{Q'A}{P'A} \implies \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'} = \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AQ'},$$

因此 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'}$ 為定值，即 φ 是（以 A 為中心的）反演變換。

(ii) $A = \infty_\ell$，由 φ 為射影對合變換知存在 φ 的一對相互對 (P, P') 使得 $P \neq P'$。那麼對於 φ 的任一對相互對 (Q, Q')，我們有

$$(\infty_\ell, P; Q, Q') = (\infty_\ell, P'; Q', Q) \implies \frac{Q'P}{QP} = \frac{QP'}{Q'P'} \implies \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q'P'},$$

因此 $\overline{PP'}$ 中點為定點 M，即 φ 是（以 M 為中心的）對稱變換。 ■

另一個，如果延伸至複射影平面，比較快的看法是考慮 $(P_1, P_2, \infty_i, \infty_{-i})$ 截 ℓ 所定義的對合，其中 $\infty_{\pm i}$ 為兩個無窮虛圓點，

$$P_1 = Q\infty_i \cap R\infty_{-i}, \quad P_2 = Q'\infty_{-i} \cap R'\infty_i,$$

(Q, Q'), (R, R') 為 φ 的任意兩對相互對。因為這會告訴我們對於任意相互對 (P, P')，P_1, P_2, P, P', ∞_i, ∞_{-i} 共圓錐曲線，即 P_1, P_2, P, P' 共圓。所以 φ 是以 $A = P_1P_2 \cap \ell$ 為中心，$AP_1 \cdot AP_2$ 為冪的反演變換。

Proposition 7.2.15. 令 $\mathcal{C}$ 為一圓錐曲線、$\varphi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 為一變換，則 φ 為一對合變換若且唯若存在恰一點 $A \notin \mathcal{C}$ 使得對於所有 $P \in \mathcal{C}$，A, P, $\varphi(P)$ 共線。

Proof. 只證過去，證回來由同一法即可。對於 φ 的兩對相互對 $(P, P'), (Q, Q')$，定義 $A = PP' \cap QQ'$，則對於任意一對相互對 (R, R')，我們有

$$\begin{aligned} P(R, R'; A, Q) &= (R, R'; P', Q)_{\mathcal{C}} = (R', R; P, Q')_{\mathcal{C}} \\ &= (R, R'; Q', P)_{\mathcal{C}} = Q(R, R'; A, P), \end{aligned}$$

即 $A \in RR'$。 ■

一個直接的推論是（見 (3.3.2)）：

Corollary 7.2.16. 反演變換為保交比變換。

其對偶命題為：

Proposition 7.2.17. 令 $\mathcal{C}$ 為一圓錐曲線，設 $\varphi\colon \mathbf{T}\mathcal{C} \to \mathbf{T}\mathcal{C}$ 為一變換，則 φ 為一對合變換若且唯若存在恰一線 $K \notin \mathbf{T}\mathcal{C}$ 使得對於所有 $S \in \mathbf{T}\mathcal{C}$，$K$, S, $\varphi(S)$ 共點。

有時要證明在已知圓錐曲線上的六點（相切的六線）當中組出的三線（點）共點（線）時，可以等價於證明其為對合相互對，所以就可以用保交比變換把要驗的點送到其他地方去驗。

Example 7.2.18. 令 Ω 為 $\triangle ABC$ 的外接圓，M 為 Ω 上的弧 $\widehat{BC}$ 中點。B', C' 分別位於 CA, AB 上使得 BB' 及 CC' 皆平行於 AM，MB', MC' 分別交 Ω 另一點於 P, Q。最後，令 S 為 PQ 與 BC 的交點。證明：AS 為 A 關於 Ω 的切線。

Solution. 我們希望證明的是 A 關於 Ω 的切線，PQ 及 BC 共點，而這等價於

$$(A, A), \quad (P, Q), \quad (B, C)$$

是 Ω 上某個對合的相互對。由於 P, Q 分別是 MB', MC' 與 Ω 的第二個交點，所以我們應該要考慮完全四線形 (AB, CA, BB', CC') 及點 M，由迪沙格對合定理的對偶，我們便得到上述所要的相互對（注意到 $BB' \cap CC' = \infty_{AM}$）。

這邊給一個判斷四點是否共圓的判別法：

Proposition 7.2.19. 四點 P_1, P_2, P_3, P_4 共圓若且唯若完全四點形 (P_1, P_2, P_3, P_4) 截無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 所定義的對合有兩個垂直於對方的不動點。

Proof. 令 φ 為 $q = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ 截 $\mathcal{L}_\infty$ 所定義的對合。若 P_1, P_2, P_3, P_4 共於一圓 Γ，則

$$\varphi(W) = \infty_{(P_1+P_2+P_3+P_4)_\Omega - W}.$$

其不動點為 $\angle(P_1P_2, P_3P_4)$ 的兩條角平分線上的無窮遠點 $\infty_{\frac{1}{2}(P_1+P_2+P_3+P_4)_\Gamma}$，而它們垂直於對方。

若 φ 有兩個不動點 F_1, $F_2 \in \mathcal{L}_\infty$ 且 $F_1 \perp F_2$，那麼 $2F_1 = 2F_2$，所以

$$\varphi(W) = \infty_{2F_1 - W}.$$

這告訴我們

$$P_3P_1 + P_2P_4 = 2F_1 = P_1P_2 + P_3P_4,$$

即 P_1, P_2, P_3, P_4 共圓。 ■

Proposition 7.2.20. 給定完全四點形 q 與直線 ℓ。設 F_1, F_2 為 q 截 ℓ 所定義的對合 φ 的兩個不動點，那麼對於任意過 q 的圓錐曲線 $\mathcal{C}$，F_1, F_2 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。

Proof. 若 $\mathcal{C}$ 與 ℓ 有交點 A, B，則結論顯然：注意到

$$(A, B; F_1, F_2) = -1.$$

若 $\mathcal{C}$ 與 ℓ 沒有交點，我們考慮一個射影變換 Φ 將 ℓ 送至無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$。這時，由於 $\mathcal{C} \cap \ell = \varnothing$，所以 $\Phi(\mathcal{C})$ 是一個橢圓，因此可以再結合一個仿射變換使得 $\mathcal{C}$ 變成一個圓且 ℓ 依舊是無窮遠線。由 (7.2.19)，兩個不動點 F_1, F_2 垂直於對方，故它們關於 $\mathcal{C}$ 共軛。 ■

Example 7.2.21. 若取 $\ell = (P_3P_1 \cap P_2P_4)(P_1P_2 \cap P_3P_4)$，那麼我們就可以得到配極的基礎性質。

對偶地，我們有：

Proposition 7.2.22. 給定完全四線形 $\mathcal{Q}$ 與點 P。設 f_1, f_2 為 φ 的不動線，那麼對於任意切 $\mathcal{Q}$ 的圓錐曲線 $\mathcal{C}$，f_1, f_2 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。

Proposition 7.2.23. 若 P 與 Q 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦積為 S，那麼對於任意 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$，$\mathcal{C}$ 過 S 若且唯若 P, Q 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。

Proof. 令 X, Y, Z 分別為 BC, CA, AB 與 PQ 的交點，$X^\vee, Y^\vee, Z^\vee$ 分別為 AS, BS, CS 與 PQ 的交點。那麼存在一對合變換 φ: $PQ \to PQ$ 使得

$$(X, X^\vee), \quad (Y, Y^\vee), \quad (Z, Z^\vee)$$

為相互對。由 (7.1.24)，

$$(X, X^\vee; P, Q) = (Y, Y^\vee; P, Q) = (Z, Z^\vee; P, Q) = -1,$$

因此 P, Q 為 φ 的兩個不動點。所以由 (7.2.20)，對於任意過 A, B, C 的圓錐曲線 $\mathcal{C}$，$S \in \mathcal{C}$ 若且唯若 P, Q 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。 ■

習題

Problem 1 (2017 China TST2 P3)**.** 令 $ABCD$ 是一個四邊形，ℓ 是一條直線。設 ℓ 分別交 AB, CD, BC, DA, AC, BD 於 X, X', Y, Y', Z, Z'。證明：以 $\overline{XX'}$, $\overline{YY'}$, $\overline{ZZ'}$ 為直徑的圓們共軸。

Problem 2. 給定 $\triangle ABC$ 與三點 P, Q, R，設 D, E, F 分別為 QR 與 BC, CA, AB 的交點，AP 交 QR 於 A_1，取 A_2 使得

$$(Q, R; F, A_1) = (R, Q; E, A_2),$$

類似定義 B_2, C_2。證明：AA_2, BB_2, CC_2 共點。

Problem 3. 令 $\odot(I^a)$ 為 A 關於 $\triangle ABC$ 的 A-旁切圓，$\odot(I^a)$ 與 $\odot(ABC)$ 的公切線交 BC 於 X, Y，證明 AI^a 為 $\angle XAY$ 的角平分線。

Problem 4. 給定 $\triangle ABC$，令 D 為邊 BC 上任意一點，I, I_1, I_2 分別為 $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ADC$ 的內心，M, N 分別為 $\odot(ABC)$ 與 $\odot(IAI_1)$, $\odot(IAI_2)$ 的另兩個交點。證明：當 D 在 BC 上動時，直線 MN 過定點。

Problem 5. 設 $\triangle ABC$ 的 B, C-旁心分別為 I^b, I^c。令 ω 為 $\triangle ABC$ 的內切圓，D 為 ω 與 BC 的切點，DI^b, DI^c 分別交 ω 另一點於 X, Y，證明 AD, BX, CY 共點。

Problem 6 (2019 1J I3-2)**.** 給定凸五邊形 $ABCDE$，令點 A_1 為 BD 與 CE 的交點，點 B_1 為 CE 與 DA 的交點，並依此類推定義 C_1, D_1, E_1 等點。又令點 A_2 為三角形 ABD_1 的外接圓與三角形 AEC_1 的外接圓的另一個交點，點 B_2 為三角形 BCE_1 的外接圓與三角形 BAD_1 的外接圓的另一個交點，並依此類推定義 C_2, D_2, E_2 等點。證明直線 $AA_2, BB_2, CC_2, DD_2, EE_2$ 共點。

Problem 7. 設銳角三角形 ABC 的 B, C-旁心分別為 I^b, I^c，外接圓為 Ω。在 Ω 上取一點 D 使得 $AD \perp BC$，DI^b, DI^c 分別交 Ω 另一點於 Y, Z，$X = YZ \cap BC$。證明由 AX, AO, BC 所圍成的三角形為等腰三角形。

Problem 8 (2022 EGMO P6)**.** 令 O 為圓內接四邊形 $ABCD$ 的外心，X 為角 A 與角 B 的內角平分線的交點，Y 為角 B 與角 C 的內角平分線的交點，Z 為角 C 與角 D 的內角平分線的交點，W 為角 D 與角 A 的內角平分線的交點。令 P 為 AC 與 BD 的交點。設 X, Y, Z, W, O, P 兩兩相異。證明 $O, X,$ Y Z, W 共圓若且唯若 P, X, Y, Z, W 共圓。

7.3 等角共軛變換

我們曾經介紹過等角共軛點（見第 1.3 節），而現在是時候來了解這個簡單的幾何變換與圓錐曲線的關係了。

回憶一下這個性質 (見 (1.3.9)) :

Proposition 7.3.1. 對於任意完全 n 線形 $\mathcal{N}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$ 及一點 P，定義 P_i 為 P 關於 ℓ_i 的垂足，則 P 存在關於 $\mathcal{N}$ 的等角共軛點若且唯若 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 共圓。

此時，若 P^* 為 P 關於 $\mathcal{N}$ 的等角共軛點，定義 P_i^* 為 P^* 關於 ℓ_i 的垂足，則 $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_1^*, P_2^*, \ldots, P_n^*$ 共圓且其圓心為 $\overline{PP^*}$ 中點。

那等角共軛點跟圓錐曲線的一個主要關連就是來自於下面這個定理。

Theorem 7.3.2. 對於任意完全 n 線形 $\mathcal{N}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$ 及不在線上的兩點 P, P^*，則 (P, P^*) 為 $\mathcal{N}$ 的一對等角共軛點對若且唯若存在以 P, P^* 為焦點的圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 使得 $\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{N}$ 相切。

Proof. 令 $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_n^*$ 分別為 P^* 關於 $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ 的對稱點。

($\Rightarrow$) 則 $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_n^*$ 共圓且圓心為 P，令 T_i 為 PP_i^* 與 ℓ_i 的交點，則 $\overline{PT_i} \pm \overline{P^*T_i} = \overline{PP_i^*}$ 為定值，因此存在以 P, P^* 為焦點的圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 過 T_i，由 ℓ_i 為 $\angle PT_iP^*$ 的角平分線 (6.1.6) 知 $\mathcal{C}$ 與 ℓ_i 相切，即 $\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{N}$ 相切。

($\Leftarrow$) 令 $T_i = \mathbf{T}_{\ell_i}\mathcal{C}$ 為各邊切點，則 $\overline{PP_i^*} = \left|\overline{PT_i} \pm \overline{P^*T_i}\right|$ 為定值，因此 $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_n^*$ 共圓且圓心為 P，則由該圓在位似變換 $(P^*, 1/2)$ 下的像可得到 (P, P^*) 為 $\mathcal{N}$ 的一對等角共軛點對。 ■

這邊給個用 (6.A.4) 的定義的證明：若以 P, P^* 為焦點的圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{N}$ 相切，則由迪沙格對合定理 (7.2.9)，存在一個以

$$(A_{ij}P, A_{ij}P^*), \quad (A_{ij}\infty_i, A_{ij}\infty_{-i}), \quad (\ell_i, \ell_j)$$

為相互對的對合變換，因此 $A_{ij}P + A_{ij}P^* = \ell_i + \ell_j$。反過來說，我們只需考慮與 $P\infty_i, P\infty_{-i}, P^*\infty_i, P^*\infty_{-i}, \ell_1$ 相切的圓錐曲線 $\mathcal{C}$。因為存在一個以

$$(A_{1j}P, A_{1j}P^*), \quad (A_{1j}\infty_i, A_{1j}\infty_{-i}), \quad (\ell_1, \ell_j)$$

為相互對的對合變換，所以同樣地由迪沙格對合定理，ℓ_j 與 $\mathcal{C}$ 相切。

在三角形的情況，我們有：

Proposition 7.3.3. 令 (P, P^*) 為 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點對，$\mathcal{C}$ 是以 P, P^* 為焦點且與 $\triangle ABC$ 相切的圓錐曲線，T 為 $\mathcal{C}$ 與 BC 切點。則

$$\frac{BT}{TC} \cdot \frac{BX}{XC} = \left(\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}\right)^2,$$

其中 X 為 AP 與 BC 的交點。

在證明這個性質之前，我們需要一個引理：

Lemma 7.3.4. 令 (P, P^*) 為 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點對，P_a^* 為 P^* 關於 BC 的對稱點，則 (A, P_a^*) 為關於 $\triangle PBC$ 的等角共軛點。

Proof. 簡單的算角度：

$$\measuredangle CBA = \measuredangle CBP^* + \measuredangle P^*BA = \measuredangle P_a^*BC + \measuredangle CBP = \measuredangle P_a^*BP,$$
$$\measuredangle ACB = \measuredangle ACP^* + \measuredangle P^*CB = \measuredangle PCB + \measuredangle BCP_a^* = \measuredangle PCP_a^*. \qquad \blacksquare$$

Proof of (7.3.3). 令 P_a^* 為 P^* 關於 BC 的對稱點，則 P, T, P_a^* 共線且由 (7.3.4) 知 $PX = PA$, $PT = PP_a^*$ 為關於 $\angle BPC$ 的等角線。結合 (1.3.2)，我們便有

$$\frac{BT}{TC} \cdot \frac{BX}{XC} = \left(\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}\right)^2. \qquad \blacksquare$$

由於 T 關於 P, P^* 是對稱的，所以其實我們也有

$$\frac{BT}{TC} \cdot \frac{BX^*}{X^*C} = \left(\frac{\overline{BP^*}}{\overline{P^*C}}\right)^2.$$

將兩式相乘，並結合 (1.3.2)，我們得到：

Corollary 7.3.5. 令 (P, P^*) 為 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點對，$\mathcal{C}$ 是以 P, P^* 為焦點且與 $\triangle ABC$ 相切的圓錐曲線，T 為 $\mathcal{C}$ 與 BC 切點。則

$$\frac{BT}{TC} = \pm \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{BP^*}}{\overline{P^*C}},$$

其中正負號由 P, P^* 是否位於 $\angle BAC$ 內所決定。

結合 (7.1.26)，我們會得到：

Proposition 7.3.6. 設以一點 P 為（其中一個）焦點的圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 分別與完全 n 線形 $\mathcal{N}=(\ell_1,\dots,\ell_n)$ 各邊 ℓ_i 相切於 T_i。分別在 ℓ_i 上取一點 S_i 使得 $\measuredangle S_iPT_i=90^\circ$。則 $S_1,\dots,S_n$ 共線。

Proof. 事實上，由 (7.1.26)，$S_i=\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(T_i)\cap P\infty_{\perp PT_i}$ 位於 P 關於 $\mathcal{C}$ 的極線 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P)$ 上。 ■

Proposition 7.3.7. 給定任意完全 n 線形 $\mathcal{N}=(\ell_1,\dots,\ell_n)$。$T_1,\dots,T_n$ 分別為 $\ell_1,\dots,\ell_n$ 上的一些點滿足任三點不共線。則下列敘述等價：

(i) 存在一圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 使得 $\mathcal{C}$ 分別與 ℓ_i 相切 T_i。

(ii) 存在一點 $P\notin\mathcal{L}_\infty$ 使得 PA_{ij} 平分 $\angle T_iPT_j$，其中 $A_{ij}=\ell_i\cap\ell_j$。

這時候，P 為 $\mathcal{C}$ 的其中一個焦點。

Proof. 我們先證明 (i) ⇒ (ii)。由假設，存在 $\mathcal{C}$ 使得 $\mathcal{C}$ 與 ℓ_i 的切點為 T_i。令 P,P^* 為 $\mathcal{C}$ 的兩個焦點，不妨假設 P 不位於無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 上。由 (7.3.2)，我們知道 (P,P^*) 為 $\mathcal{N}$ 的一對等角共軛點。令 P_i^* 為 P^* 關於 ℓ_i 的對稱點，則 $T_i=PP_i^*\cap\ell_i$ (6.1.6)。由於 $A_{ij}P\perp P_i^*P_j^*$ 且 $\overline{PP_i^*}=\overline{PP_j^*}$，我們得到

$$PT_i+PT_j=PP_i^*+PP_j^*=2\cdot P_i^*P_j^*=2\cdot PA_{ij},$$

即 PA_{ij} 平分 $\angle T_iPT_j$。

(ii) ⇒ (i)：假設存在一點 P 使得 PA_{ij} 平分 $\angle T_iPT_j$。我們先證明 $n=3$ 的情形。令 P^* 為 P 關於 $\triangle A_{23}A_{31}A_{12}$ 的等角共軛點，那麼存在以 P,P^* 為焦點的圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 分別切 ℓ_i 與 T_i'。由 (i) ⇒ (ii)，PA_{ij} 平分 $\angle T_i'PT_j'$。我們有

$$\begin{aligned}2\cdot PT_1&=(2PA_{31}-PT_3)+(2PA_{12}-PT_2)=2PA_{31}+2PA_{12}-2A_{23}\\&=(2PA_{31}-PT_3')+(2PA_{12}-PT_2')=2\cdot PT_1',\end{aligned}$$

即 $PT_1=PT_1'$ 或 $PT_1\perp PT_1'$。若為後者，則

$$\begin{aligned}PT_2=2PA_{12}-PT_1=\perp(2PA_{12}-PT_1')=\perp PT_2',\\PT_3=2PA_{31}-PT_1=\perp(2PA_{31}-PT_1')=\perp PT_3'.\end{aligned}$$

由 (7.3.6)，我們得到 T_1, T_2, T_3 共線，與原假設矛盾。故 $PT_1 = PT_1'$，且

$$PT_2 = 2PA_{12} - PT_1 = 2PA_{12} - PT_1' = PT_2',$$
$$PT_3 = 2PA_{31} - PT_1 = 2PA_{31} - PT_1' = PT_3',$$

即 $\mathcal{C}$ 與 ℓ_i 切於 $T_i = T_i'$。

對於任意 $n > 3$，考慮 $\triangle A_{jk}A_{ki}A_{ij}$，我們知道（由 $n = 3$ 的情形）存在以 P 為其中一個焦點的圓錐曲線 $\mathcal{C}_{ijk}$ 分別與 ℓ_i, ℓ_j, ℓ_k 切於 T_i, T_j, T_k。注意到以 P 為其中一個焦點，且分別與 ℓ_1, ℓ_2 切於 T_1, T_2 的圓錐曲線只有一個：因為我們可以點出另一個焦點

$$P^* = T_1\infty_{2\ell_1 - T_1P} \cap T_2\infty_{2\ell_2 - T_1P}.$$

所以 $\mathcal{C}_{12i}$ 全部相等，記為 $\mathcal{C}$。那麼 $\mathcal{C}$ 分別與 ℓ_1, ℓ_2 相切於 T_1, T_2，且 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{12i}$ 分別與 ℓ_i 相切於 T_i。 ■

關於四邊形的等角共軛點後面會用一整個章節（第 9 章）來講解，這邊先提幾個特別重要的：

Proposition 7.3.8. 對於任意完全四線形 $\mathcal{Q}$，其所有等角共軛點對的中點軌跡為 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線。

Proof. 結合 (7.3.2) 與牛頓第二定理 (6.3.13)。 ■

接下來是曾經講過的 (4.1.11)：

Theorem 7.3.9. 給定任意完全四線形 $\mathcal{Q}$，令 M 為 $\mathcal{Q}$ 的密克點，τ 為 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線，則 (M, ∞_τ) 為關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點對。

Proof. 令 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$，$M_i$ 為 M 關於 ℓ_i 的對稱點，則知 M_1, M_2, M_3, M_4 共於垂心線 L 且垂直於 τ，因此以 M 為焦點，L 為準線的拋物線與 ℓ_i 相切且另一個焦點為 ∞_τ，故 (M, ∞_τ) 為關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點對。 ■

回到三角形的情況，回到三角形的情況，我們考慮 φ^K 為 $\triangle ABC$ 的等角共軛變換，也就是說，$\varphi^K(P)$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。

Proposition 7.3.10. 令 φ^K 為任意 $\triangle ABC$ 的等角共軛變換，ℓ 為一直線。

(i) 若 $\ell \cap \{A, B, C\} = X$，那麼 $\varphi(\ell)$ 為過 X 的直線。

(ii) 若 $\ell \cap \{A, B, C\} = \varnothing$，那麼 $\varphi(\ell)$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線。

Proof. (i) 假設 $A \in \ell$，那麼對於 ℓ 上任意一點 P

$$A\varphi(P) = AB + AC - AP = AB + AC - \ell$$

為定值，因此 $\varphi(\ell) = A\infty_{AB+AC-\ell}$ 為直線。

(ii) 對於 ℓ 上任意四點 P_1, P_2, P_3, P_4，

$$B(\varphi(P_\bullet)) = B(P_\bullet) = C(P_\bullet) = C(\varphi(P_\bullet)),$$

所以 $\varphi(\ell)$ 是一個過 B, C 的圓錐曲線或不過 B, C 的直線 L，但後者要求 ℓ 過 $B(L \cap BC), C(L \cap BC)$ 分別關於 $\angle CBA, \angle ACB$ 的等角線的交點 A，矛盾。因此 $\varphi(\ell)$ 是一個過 B, C 的圓錐曲線。同理，$\varphi(\ell)$ 也過 A。 ■

Proposition 7.3.11. 給定任意 $\triangle ABC$。令 I, I^a, I^b, I^c 為 $\triangle ABC$ 的內心與三個旁心，

$$\mathscr{F} = \{\mathcal{D} \mid I, I^a, I^b, I^c \in \mathcal{D}\}$$

為所有過 I, I^a, I^b, I^c 的圓錐曲線的集合。那麼對於 $\triangle ABC$ 的任意一對等角共軛點對 (P, P^*) 及任意一圓錐曲線 $\mathcal{D} \in \mathscr{F}$，$P$, P^* 關於 $\mathcal{D}$ 共軛。

Proof. 若 $P = P^*$，則 $P = I$, I^a, I^b, I^c，結論顯然，故以下假設 $P \neq P^*$。考慮完全四點形 (I, I^a, I^b, I^c) 與直線 PP^*，由迪沙格對合定理 (7.2.5)，存在一射影對合變換 $\psi \in \operatorname{Aut}(PP^*)$ 使得

$$(II^a \cap PP^*, I^bI^c \cap PP^*)$$

及其輪換皆為 ψ 的相互對。易知 P, P^* 為 ψ 的不動點，所以 (7.2.20) 告訴我們 P, P^* 關於 $\mathcal{D}$ 共軛。 ■

習題

Problem 1. 令 φ 為 $\triangle ABC$ 的等角共軛變換，設直線 ℓ 不通過 A, B, C 三點。證明：$A(\ell \cap BC)$ 與 $\mathbf{T}_A\varphi(\ell)$ 為關於 $\angle BAC$ 的等角線。

Problem 2 (2000 ISL G3). 令 O, H 分別為銳角三角形 ABC 的外心及垂心。證明存在 D, E, F 分別位於邊 BC, CA, AB 上使得

$$OD + DH = OE + EH = OF + FH$$

且直線 AD, BE, CF 共點。

Problem 3. 設 (P, P^*), (Q, Q^*) 為關於 $\triangle ABC$ 的兩對等角共軛點對滿足 $PP^* \parallel QQ^*$。令 I, I^a, I^b, I^c 分別為 $\triangle ABC$ 的內心與三個旁心，M_P, M_Q 分別為 $\overline{PP^*}$, $\overline{QQ^*}$ 中點。證明：I, I^a, I^b, I^c, M_P, M_Q 共圓錐曲線。

Problem 4 (Saragossa). 對於任意三角形 ABC 與一點 P，令 $\triangle P_aP_bP_c$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形，$\triangle P'_aP'_bP'_c$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形。

(i) 令 $U = P_bP'_c \cap P_cP'_b$, $V = P_cP'_a \cap P_aP'_c$, $W = P_aP'_b \cap P_bP'_a$，證明：AU, BV, CW 共於一點 $Sa_1(P)$，且 $Sa_1(P)$ 位於圓錐曲線 $(ABCKP)$ 上，其中 K 為 $\triangle ABC$ 的共軛重心。

(ii) 證明：P_aU, P_bV, P_cW 共於一點 $Sa_2(P)$，且 K, $Sa_1(P)$, $Sa_2(P)$ 共線。

(iii) 證明：P'_aU, P'_bV, P'_cW 共於一點 $Sa_3(P)$，$Sa_3(P)$ 為 P, $Sa_1(P)$ 關於 $\triangle ABC$ 的交叉點，且 P, $Sa_2(P)$, $Sa_3(P)$ 共線。

當我們把圓西瓦三角形改成 $\mathcal{C}$-西瓦三角形時也是對的，只是要把共軛重心 K 換成 $\triangle ABC$ 關於 $\mathcal{C}$ 的透視中心。

7.4 等共軛變換

在這節，我們把三角形中的等角共軛變換，即 P 送至其等角共軛點 $\varphi^K(P) = P^*$，推廣到更一般的情形。我們推廣的方法是透過等角共軛變換的射影定義 (7.3.11)：

Definition 7.4.1. 給定任意 $\triangle ABC$。我們說

$$\varphi\colon \mathbb{P}^2 \setminus (BC \cup CA \cup AB) \longrightarrow \mathbb{P}^2 \setminus (BC \cup CA \cup AB)$$

是一個**點等共軛變換** (isoconjugation on points) 若存在至少有兩個元素的圓錐曲線族 $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\varphi$，稱為 φ 的**對角圓錐曲線族**，滿足以下性質：

(i) 對於任意 $\mathcal{D} \in \mathscr{F}$（可能為虛圓錐曲線），稱為 φ 的**對角圓錐曲線** (**diagonal conic**)，$\triangle ABC$ 為關於 $\mathcal{D}$ 的自共軛三角形。

(ii) 對於任意一點 $P \notin BC \cup CA \cup AB$ 及任意 $\mathcal{D} \in \mathscr{F}$，$P, \varphi(P)$ 關於 $\mathcal{D}$ 共軛。

這邊我們取 $\mathscr{F}$ 為最大的，意即，所有滿足 (i) 及 (ii) 的虛圓錐曲線 $\mathcal{D}$ 都是 $\mathscr{F}$ 的一個元素。

我們要求 $\mathscr{F}$ 至少要有兩個元素是因為這樣才能唯一決定 $\varphi(P)$。事實上，也真的只需要用兩個元素就能決定了：

Proposition 7.4.2 (等共軛變換基本定理)**.** 給定 $\triangle ABC$，一點等共軛變換 φ 由其兩個相異對角圓錐曲線 $\mathcal{D}_0$ 與 $\mathcal{D}_\infty$ 決定，也就是對於所有 $P \notin BC \cup CA \cup AB$，$\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_0}(P) \neq \mathfrak{p}_{\mathcal{D}_\infty}(P)$。

Proof. 考慮變換 $\Phi(P) = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}_\infty}(\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_0}(P))$，那麼 $\Phi(A) = A, \Phi(B) = B, \Phi(C) = C$。假設存在 $P_0 \notin BC \cup CA \cup AB$ 使得 $\Phi(P_0) = P_0$，由 (7.A.10)，我們有 $\Phi = \mathrm{id}$。這告訴我們對於任意一點 P，$\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_0}(P) = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}_\infty}(P)$，故 $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_\infty$，矛盾。 ■

對偶地，我們定義：

Definition 7.4.3. 給定任意 $\triangle ABC$。我們說

$$\varphi\colon (\mathbb{P}^2)^\vee \setminus (\mathbf{T}A \cup \mathbf{T}B \cup \mathbf{T}C) \longrightarrow (\mathbb{P}^2)^\vee \setminus (\mathbf{T}A \cup \mathbf{T}B \cup \mathbf{T}C)$$

是一個**線等共軛變換** (isoconjugation on lines) 若存在至少有兩個元素的圓錐曲線族 $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\varphi$，稱為 φ 的**對角圓錐曲線族**，滿足以下性質：

(i) 對於任意 $\mathcal{D} \in \mathscr{F}$（可能為虛圓錐曲線），稱為 φ 的**對角圓錐曲線** (**diagonal conic**)，$\triangle ABC$ 為關於 $\mathcal{D}$ 的自共軛三角形。

(ii) 對於任意一線 $\ell \notin \mathbf{T}A \cup \mathbf{T}B \cup \mathbf{T}C$ 及任意 $\mathcal{D} \in \mathscr{F}$，$\ell, \varphi(\ell)$ 關於 $\mathcal{D}$ 共軛。

這邊我們取 $\mathscr{F}$ 為最大的，意即，所有滿足 (i) 及 (ii) 的虛圓錐曲線 $\mathcal{D}$ 都是 $\mathscr{F}$ 的一個元素。

Remark. 由對偶性，我們以下皆只證明點的性質。另外，若以重心坐標的角度來看，我們會知道一個等共軛變換一定是如同

$$[x:y:z] \mapsto \left[\frac{u}{x}:\frac{v}{y}:\frac{w}{z}\right]$$

的形式（後面會證明這件事）。我們稱 $P=[u:v:w]=\varphi(G)$ 是這個點等共軛變換的**極點** (pole)，其中 G 為 $\triangle ABC$ 的重心。舉例來說，等角共軛變換的極點就是 $\triangle ABC$ 的共軛重心 K（所以我們之前才將其記為 φ^K）。

對偶地，對於一個線等共軛變換 φ，我們定義 $\varphi(\mathcal{L}_\infty)$ 為 φ 的這個點等共軛變換的**極線** (polar)。舉例來說，（線的）等截共軛變換的極線為無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$。

類似於等角共軛變換，我們有：

Proposition 7.4.4. 給定任意 $\triangle ABC$，令 φ 為一點等共軛變換，ℓ 為一直線。

(i) 若 $\ell \cap \{A,B,C\}=X$，那麼 $\varphi(\ell)$ 為過 X 的直線。

(ii) 對於所有頂點 $X\in\{A,B,C\}$，

$$\begin{aligned} \mathbf{T}X &\xrightarrow{\ \varphi\ } \mathbf{T}X \\ XP &\longmapsto X\varphi(P) \end{aligned}$$

是一對合變換。（注意到由 (i)，這個映射是良好定義的。）

(iii) 若 $\ell \cap \{A,B,C\}=\varnothing$，那麼 $\varphi(\ell)$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線。

Proof. (i) 不妨假設 $X=A$。對於兩點 $P,Q\in\ell$，我們證明 $A,\varphi(P),\varphi(Q)$ 共線。取 $\mathcal{D}_0,\mathcal{D}_\infty\in\mathscr{F}$。那麼 $\varphi(P)=\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_0}(P)\cap\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_\infty}(P)$, $\varphi(Q)=\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_0}(Q)\cap\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_\infty}(Q)$。令 $R=\ell\cap BC$，那麼

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_0}(A,P;Q,R)=(A,P;Q,R)=\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_\infty}(A,P;Q,R).$$

注意到 $\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_0}(A)=BC=\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_\infty}(A)$，所以

$$\varphi(P)=\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_0}(P)\cap\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_\infty}(P),\quad \varphi(Q)=\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_0}(Q)\cap\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_\infty}(Q),\quad A=\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_0}(R)\cap\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_\infty}(R)$$

共線。

(ii) 易知其階為 2，因此只要證明它保交比即可。令 $\mathcal{D}$ 為 φ 的其中一個對角圓錐曲線，$\mathcal{L}$ 為不過頂點的一直線，$O = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(\mathcal{L})$，$U$ 為 $\mathcal{L}$ 上一點，那麼由配極變換為保交比變換知

$$(A, B; C, \varphi(U))_{\varphi(\mathcal{L})} = O(A, B; C, \varphi(U)) = (BC \cap \mathcal{L}, CA \cap \mathcal{L}; AB \cap \mathcal{L}, U).$$

因此

$$[XP \mapsto X\varphi(P)] = [S \mapsto XS] \circ [U \mapsto \varphi(U)] \circ [XP \mapsto XP \cap \mathcal{L}]$$

為一射影變換。

(iii) 的證明與等角共軛變換的證明相同（見 (7.3.10)）。 ■

Corollary 7.4.5. 給定任意 $\triangle ABC$，令 φ 為 $\triangle ABC$ 上的點等共軛變換。對於任兩點 P, Q，令 $R = PQ^\varphi \cap P^\varphi Q,\ S = PQ \cap P^\varphi Q^\varphi$。那麼 $S = R^\varphi$。

Proof. 由上述性質知 $A(B, C)$, $A(P, P^\varphi)$, $A(Q, Q^\varphi)$, $A(R, R^\varphi)$ 定義了一個 $\mathbf{T}A$ 上的對合變換。而由迪沙格對合定理的對偶 (7.2.9)，$A(P, P^*)$, $A(Q, Q^*)$, $A(R, S)$ 也定義了一個 $\mathbf{T}A$ 上的對合變換。因此 $AR^\varphi = AS$。由對稱性，我們得到 $S = R^\varphi$。 ■

Proposition 7.4.6. 給定 $\triangle ABC$。對於任意兩對點 (P, P^*), (Q, Q^*)，令 $R = PQ^* \cap P^*Q$。那麼下列敘述等價：

(i) $P \times P^* = Q \times Q^*$；

(ii) P, Q, R 共 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線且 $A(B, C)$, $A(P, P^*)$, $A(Q, Q^*)$ 定義了一個 $\mathbf{T}A$ 上的對合變換；

(iii) P, Q, R 及 P^*, Q^*, R 分別共 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線。

(iv) 存在與 $\triangle ABC$ 三邊及 $(PP^*)(QQ^*)$ 四邊皆相切的圓錐曲線。

Proof. 令 $R^* = PQ \cap P^*Q^*$。

(i) $\Rightarrow$ (ii)：我們有 $A(B, C)$, $A(P, P^*)$, $A(Q, Q^*)$ 及 $A(R, R^*)$（由 (7.4.5)）定義了 $\mathbf{T}A$ 上的某個對合變換。同理，$B(C, A)$, $B(P, P^*)$, $B(Q, Q^*)$, $B(R, R^*)$ 也

定義了一個 $\mathbf{T}B$ 上的對合變換。因此

$$A(C,P;Q,R)=A(B,P^*;Q^*,R^*)=B(A,P^*;Q^*,R^*)=B(C,P;Q,R),$$

即 P, Q, R 共 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線。

(ii) $\Rightarrow$ (iii)：因為

$$\begin{aligned}A(P^*,Q^*;B,C)&=A(P,Q;C,B)=R(P,Q;C,B)\\&=R(Q^*,P^*;C,B)=R(P^*,Q^*;B,C),\end{aligned}$$

所以 P^*, Q^*, R 共 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線。

(iii) $\Rightarrow$ (i)：令 $\triangle R_aR_bR_c$ 為 R 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形。那麼

$$A(P,Q^*;B,C)=(P,Q^*;R_c,R_b)_{ABCR}=(Q,P^*;R_c,R_b)_{ABCR}=A(Q,P^*;B,C).$$

因此 $A(B,C)$, $A(P,P^*)$, $A(Q,Q^*)$ 定義了一個 $\mathbf{T}A$ 上的對合變換。由對稱性，我們便得到 $P\times P^*=Q\times Q^*$。

(i) $\Leftrightarrow$ (iv)：令 c 是與 BC 及 $(PP^*)(QQ^*)$ 四邊皆相切的圓錐曲線，ℓ_B, ℓ_C 分別為 B, C 關於 c 的另一條切線。由迪沙格對合定理的對偶 (7.2.9)，(BC,ℓ_B), $B(P,P^*)$, $B(Q,Q^*)$ 定義了一個 $\mathbf{T}B$ 上的對合變換；(BC,ℓ_C), $C(P,P^*)$, $C(Q,Q^*)$ 定義了一個 $\mathbf{T}C$ 上的對合變換。所以 $P\times P^*=Q\times Q^*$ 若且唯若 $\ell_B=AB$, $\ell_C=BC$，即 c 也與 CA, AB 相切。 ■

接下來是第 12.2 節中會用到的一個結論：

Theorem 7.4.7. 給定 $\triangle ABC$。令 $\mathscr{L}$ 為所有不過 A, B, C 的直線集，$\mathscr{C}$ 為所有 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線。我們有如下完美配對：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\times\mathscr{C}&\longrightarrow\{\triangle ABC\text{ 上的點等共軛變換}\}\\(\mathcal{L}\,,\,\mathcal{C})&\longmapsto\varphi^{\mathcal{L}\times\mathcal{C}},\end{aligned}$$

其中 $\varphi^{\mathcal{L}\times\mathcal{C}}$ 滿足 $\varphi^{\mathcal{L}\times\mathcal{C}}(\mathcal{L})=\mathcal{C}$。也就是說，對於任意一不過頂點的直線 $\mathcal{L}$，我們有如下的一一對應：

$$\begin{aligned}\{\triangle ABC\text{ 上的點等共軛變換}\}&\longleftrightarrow\{\triangle ABC\text{ 的外接圓錐曲線}\}\\\varphi&\longmapsto\varphi(\mathcal{L}).\end{aligned}$$

Proposition 7.4.8. 給定任意 $\triangle ABC$，φ 為 $\triangle ABC$ 上的點等共軛變換。則對於任意一點 P，$\varphi(P)$ 為 $\triangle ABC$ 與 $\mathfrak{p}_{\varphi(\mathfrak{t}(P))}(\triangle ABC)$ 的透視中心，其中 $\mathfrak{t}(P)$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線。

Proof. 由 (7.4.4)，

$$(A\varphi(P), \mathbf{T}_A\varphi(\mathfrak{t}(P)); AB, AC) = A(P, \mathfrak{t}(P) \cap BC; C, B) = -1,$$

所以 $\mathfrak{p}_{\varphi(\mathfrak{t}(P))}(A) = \mathbf{T}_A\varphi(\mathfrak{t}(P))$ 為 $\varphi(P)$ 的反西瓦三角形的邊。同理可得 $\mathfrak{p}_{\varphi(\mathfrak{t}(P))}(B)$, $\mathfrak{p}_{\varphi(\mathfrak{t}(P))}(C)$ 也為反西瓦三角形的邊，因此 $\varphi(P)$ 為 $\triangle ABC$ 與 $\mathfrak{p}_{\varphi(\mathfrak{t}(P))}(\triangle ABC)$ 的透視中心。 ■

取 P 為重心 G 我們得到：

Corollary 7.4.9. 若 φ 為 $\triangle ABC$ 上以 G^φ 為極點的點等共軛變換，$\triangle G^{\varphi a}G^{\varphi b}G^{\varphi c}$ 為 G^φ 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形，則 $\varphi(\mathcal{L}_\infty)$ 是分別切 $\triangle G^{\varphi a}G^{\varphi b}G^{\varphi c}$ 三邊於 A, B, C 的圓錐曲線。

Proposition 7.4.10. 若一變換

$$\varphi\colon \mathbb{P}^2 \setminus BC \cup CA \cup AB \to \mathbb{P}^2 \setminus BC \cup CA \cup AB$$

滿足：對於所有頂點 $X \in \{A, B, C\}$，

$$X, P_1, P_2 \text{ 共線} \quad \Longrightarrow \quad X, \varphi(P_1), \varphi(P_2) \text{ 共線}$$

且 $[XP \mapsto X\varphi(P)]$ 是一對合變換使得 (XY, XZ) 是相互對，其中 Y, Z 是另外兩個頂點，則 φ 是點等共軛變換。

Proof. 顯然地，$\varphi^2 = \mathrm{id}$。取任意一點 $P_0 \neq A$, B, C 滿足 $P_0 \neq \varphi(P_0)$，那麼 φ 由 P_0, $\varphi(P_0)$ 決定：對於任意頂點 X，

$$X(Y, Z; P_0, P) = X(Z, Y; \varphi(P_0), \varphi(P)), \quad \varphi(P) = B\varphi(P) \cap C\varphi(P),$$

其中 Y, Z 是剩下兩個頂點。由 (7.4.2) 我們只要找到兩個使得 $\triangle ABC$ 為自共軛三角形的圓錐曲線 $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_\infty$ 使得

$$\varphi(P) = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}_0}(P) \cap \mathfrak{p}_{\mathcal{D}_\infty}(P)$$

即可。因為 $[XP \mapsto X\varphi(P)]$ 是保交比變換，所以只要滿足

$$\varphi(P_0) = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}_0}(P_0) \cap \mathfrak{p}_{\mathcal{D}_\infty}(P_0)$$

即可。

取 $\mathcal{D}_0$ 為過 P_0，與 $P_0\varphi(P_0)$ 相切且使得 $\triangle ABC$ 為自共軛三角形的圓錐曲線 (7.1.8)。類似地，取 $\mathcal{D}_\infty$ 為過 $\varphi(P_0)$，與 $P_0\varphi(P_0)$ 相切且使得 $\triangle ABC$ 為自共軛三角形的圓錐曲線。因為 $P_0 \neq \varphi(P_0)$，所以 $\mathcal{D}_0 \neq \mathcal{D}_\infty$ 而且

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_0}(P_0) \cap \mathfrak{p}_{\mathcal{D}_\infty}(P_0) = P_0\varphi(P_0) \cap \mathbf{T}_{\mathcal{D}_\infty}(\varphi(P_0)) = \varphi(P_0). \qquad \blacksquare$$

Remark. 在證明中，若 $P_0 = \varphi(P_0)$，那麼我們其實可以取

$$\mathscr{F} = \{\mathcal{D} \mid P_0, P_0^a, P_0^b, P_0^c \in \mathcal{D}\},$$

其中 $\triangle P_0^aP_0^bP_0^c$ 是 P 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形（見 (7.4.16)）。

Proof of (7.4.7). 若有兩個點等共軛變換 φ, ψ 使得 $\varphi(\mathcal{L}) = \psi(\mathcal{L})$。令 P 為 $\mathcal{L}$ 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極點，由 (7.4.9) 我們知道 $\varphi(P) = \psi(P)$。對於任意一點 Q，

$$A(B,C;\varphi(G),\varphi(Q)) = A(C,B;G,Q) = A(B,C;\psi(G),\psi(Q)),$$

即 $A, \varphi(Q), \psi(Q)$ 共線。同理可得 $B, \varphi(Q), \psi(Q)$ 及 $C, \varphi(Q), \psi(Q)$ 分別共線，因此 $\varphi(Q) = \psi(Q)$。這證明了該映射為單射。

接著，對於任意外接圓錐曲線 $\mathcal{D}$，我們構造 φ 使得 $\mathcal{D} = \varphi(\mathcal{L})$。對於任意一點 P，令 $\triangle P_AP_BP_C$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{D}$-西瓦三角形，

$$P_A' = P_A(\mathcal{L} \cap BC) \cap \mathcal{D}, \quad P_B' = P_B(\mathcal{L} \cap CA) \cap \mathcal{D}, \quad P_C' = P_C(\mathcal{L} \cap AB) \cap \mathcal{D}.$$

由帕斯卡定理，P, $X := \mathcal{L} \cap BC$, $Y := P_A'P_B \cap CA$, $Z := P_A'P_C \cap AB$ 共線（見 (12.2.1)），所以

$$\begin{aligned}(A, AP_A' \cap BP_B'; AP_A' \cap BC, P_A') &\overset{B}{=} (A, P_B'; C, P_A') \overset{P_B}{=} (A, \mathcal{L} \cap CA; C, Y) \\ &\overset{X}{=} (A, \mathcal{L} \cap AB; B, Z) \overset{P_C}{=} (A, P_C'; B, P_A') \\ &\overset{C}{=} (A, CP_C' \cap AP_A'; AP_A' \cap BC, P_A'),\end{aligned}$$

故 AP'_A, BP'_B, CP'_C 共於一點 $\varphi(P)$。由 (7.2.15)，$[P_A \mapsto P'_A]$ 為一對合變換，因此

$$[AP \mapsto A\varphi(P)] = [P'_A \mapsto A\varphi(P)] \circ [P_A \mapsto P'_A] \circ [AP \mapsto P_A]$$

也為對合變換。同理可得 $[BP \mapsto B\varphi(P)], [CP \mapsto C\varphi(P)]$ 也為對合變換，所以再由 (7.4.10) 可得 φ 為點等共軛變換。 ■

Definition 7.4.11. 給定 $\triangle ABC$，不過頂點的直線 $\mathcal{L}$ 與不在邊上的點 $\wp$。

(i) 對於任意點共軛變換 φ，我們記 $\mathcal{L}^\varphi = \varphi(\mathcal{L})$。

(ii) 對於任意外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$，我們記 $\mathcal{L}_\mathcal{C}$ 為上述一一對應中 $\mathcal{C}$ 對應到的元素。

(iii) 對於任意線等共軛變換 φ，我們記 $\wp^\varphi$ 為 $\varphi(\mathbf{T}\wp)$ 的包絡線。

(iv) 對於任意內切圓錐曲線 c，我們記 $\wp_c$ 為上述一一對應的對偶版本中 c 對應到的元素。

在這個記號下，$\mathcal{L}_\infty^{\varphi^K}$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓 Ω，其中 φ^K 為 $\triangle ABC$ 的等角共軛變換。

對於一個點等共軛變換 φ，我們有一件還沒做到的事，就是把對角圓錐曲線族 $\mathscr{F}$ 中的所有元素都寫出來。因為有 (7.4.7) 的對應，所以我們可以把 φ 換成是一個不過頂點的直線 $\mathcal{L}$ 以及 $\triangle ABC$ 的一個外接圓錐曲線 $\mathcal{C} = \mathcal{L}^\varphi$。

由定義，對於任意一個圓錐曲線 $\mathcal{D} \in \mathscr{F}$，我們都有 $\mathfrak{p}_\mathcal{D}(\mathcal{L}) \in \mathcal{C} = \mathcal{L}^\varphi$。那麼是不是對於任意一個 $\mathcal{C}$ 上的點 $O \neq A, B, C$，我們都能構造 $\mathcal{D}_O$ 使得 $\mathcal{L}$ 恰好是 O 關於 $\mathcal{D}_O$ 的極線呢？(注意到 $\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_O}$ 分別將 A, B, C, O 送至 $BC, CA, AB, \mathcal{L}$，所以 $\mathcal{D}_O$ 是唯一的。)

事實上，我們如下構造圓錐曲線 $\mathcal{D}_O$ (可能是虛的)：令 $\triangle O_AO_BO_C$ 為 O 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形，考慮對合變換 $\varphi_A \in \mathrm{Aut}(AO)$ 滿足 $\varphi_A(A) = O_A$, $\varphi_A(O) = AO \cap \mathcal{L}$。令 F_{A1}, F_{A2} 為 φ_A 的不動點 (可能是虛的)，並類似地定義 $F_{B1}, F_{B2}, F_{C1}, F_{C2}$。

Proposition 7.4.12. 這六點 $F_{A1}, F_{A2}, F_{B1}, F_{B2}, F_{C1}, F_{C2}$ 共一圓錐曲線 $\mathcal{D}_O$，

並且 $\triangle ABC$ 為關於 $\mathcal{D}_O$ 的自共軛三角形，$\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_O}(O) = \mathcal{L}$。

Proof. 透過一個射影變換，我們不妨假設 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$。由於 F_{A1}, F_{A2} 為 φ_A 的不動點，我們有

$$(A, O_A; F_{A1}, F_{A2}) = (O, \infty_{AO}; F_{A1}, F_{A2}) = -1.$$

因此 O 為 $\overline{F_{A1}F_{A2}}$ 中點且 F_{A2} 為 F_{A1} 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形的其中一個頂點，假設另外兩個頂點為 F_{A3}, F_{A4}。

令 F'_{A3} 為 F_{A3} 關於 O 的對稱點，那麼圓錐曲線 $\mathcal{D}_{OA} := (F_{A1}F_{A2}F_{A3}F_{A4}F'_{A3})$ 滿足 $\triangle ABC$ 為其自共軛三角形且 O 關於它的極線 $\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_{OA}}(O)$ 為無窮遠線 $\mathcal{L}$（注意到 $F'_{A3} \neq F_{A4}$）。

類似地，我們可以定義 $\mathcal{D}_{OB}$ 及 $\mathcal{D}_{OC}$，並且也滿足上述性質，所以由唯一性知 $\mathcal{D}_{OA} = \mathcal{D}_{OB} = \mathcal{D}_{OC}$，也就因此與所求 $\mathcal{D}_O$ 重合。 ■

所以說，φ 的對角圓錐曲線族 $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\varphi$ 就是

$$\{\mathcal{D}_O \mid O \in \mathcal{L}^\varphi\}.$$

在這上面有個透過 $\mathcal{L}^\varphi$ 得到的交比：

$$(\mathcal{D}_{O_\bullet})_{\mathscr{F}} = (\mathcal{D}_{O_1}, \mathcal{D}_{O_2}; \mathcal{D}_{O_3}, \mathcal{D}_{O_4})_{\mathscr{F}} = (O_\bullet)_{\mathcal{L}^\varphi},$$

我們可以證明這與 $\mathcal{L}$ 的選取無關，事實上：

Proposition 7.4.13. 對於任意一點（不在邊上的）P，

$$\begin{aligned} \mathscr{F} &\xrightarrow{\mathfrak{p}_{-}(P)} \mathbf{T}\varphi(P) \\ \mathcal{D} &\longmapsto \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(P) \end{aligned}$$

是保交比變換，而後者與 $\mathcal{L}$ 的選取無關。

Proof. 令 $\mathcal{C} = \mathcal{L}^\varphi$，我們有保交比變換

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\xrightarrow{\mathcal{D}_{-}} \mathscr{F} \\ O &\longmapsto \mathcal{D}_O. \end{aligned}$$

我們想要證明 $\mathfrak{p}_{-}(P) \circ \mathcal{D}_{-} : O \mapsto \mathfrak{p}_{\mathcal{D}_O}(P)$ 也是保交比變換。

注意到

$$W = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}_O}(P) \cap \mathcal{L} = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}_O}(OP),$$

所以 $U = \varphi(W)$ 為 OP 與 $\mathcal{C} = \mathcal{L}^\varphi$ 的第二個交點。由於 $O \mapsto U, \varphi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{C}$ 皆為保交比變換，我們得到

$$\mathfrak{p}_-(P) \circ \mathcal{D}_- = [W \mapsto \mathfrak{p}_{\mathcal{D}_O}(P) = \varphi(P)W] \circ \varphi \circ [O \mapsto U]$$

也為保交比變換。 ■

Proposition 7.4.14. 對於 $\triangle ABC$ 上任意兩個相異點等共軛變換 φ, ψ，令 $\mathscr{F}_\varphi, \mathscr{F}_\psi$ 分別為 φ, ψ 的對角圓錐曲線。那麼 $\mathscr{F}_\varphi$ 與 $\mathscr{F}_\psi$ 的交集恰好只有一個元素 $\mathcal{D}_{\varphi,\psi}$。

Proof. 給定任意一不過頂點的直線 $\mathcal{L}$。考慮外接圓錐曲線們 $\mathcal{L}^\varphi$ 與 $\mathcal{L}^\psi$ 的第四個交點 O，我們知道存在元素 $\mathcal{D}_{\varphi O} \in \mathscr{F}_\varphi, \mathcal{D}_{\psi O} \in \mathscr{F}_\psi$ 使得 O 關於它們的極線 $\mathfrak{p}_{\mathcal{D}_{\varphi O}}(O), \mathfrak{p}_{\mathcal{D}_{\psi O}}(O)$ 皆為 $\mathcal{L}$。那麼由唯一性知 $\mathcal{D}_{\varphi O} = \mathcal{D}_{\psi O}$，記其為 $\mathcal{D}_{\varphi,\psi}$。由於一個點等共軛變換由其對角圓錐曲線族中的兩個元素所決定 (7.4.2)，因此 $\mathscr{F}_\varphi$ 與 $\mathscr{F}_\psi$ 的交集至多只有一個元素，即 $\mathcal{D}_{\varphi,\psi}$。 ■

所以我們可以定義兩個點等共軛變換 φ, ψ 的「連線」為 $\mathcal{D}_{\varphi,\psi} \in \mathscr{F}_\varphi \cap \mathscr{F}_\psi$，而兩「線」$\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_\infty$ 的「交點」是由兩者所定義出來的點等共軛變換。那麼對角圓錐曲線族 $\mathscr{F}_\varphi$ 其實就是所有過 φ 的直線集 $\mathbf{T}\varphi$。對於任意一不在邊上的點 P，三個點等共軛變換 φ, ψ, χ 共線若且唯若 $\varphi(P), \psi(P), \chi(P)$ 共線。

Example 7.4.15. 給定 $\triangle ABC$。對於任意一點 P，令 P^* 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，P° 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交共軛點（見第 12.1.1 小節）。證明：若 P 落在 $\triangle ABC$ 的歐拉線上，那麼 H, P^*, P° 共線，其中 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心。

Solution. 令 φ 為將 H 送至 P 的點等共軛變換，那麼

$$P = \varphi(H), \quad O = H^*, \quad G = H^\circ$$

共線，其中 O, G 分別為 $\triangle ABC$ 的外心及重心。因此

$$H = \varphi(P), \quad P^*, \quad P^\circ$$

也共線。

另一件還沒做到的事就是證明所有的點等共軛變換都長得像

$$[x:y:z]\mapsto\left[\frac{u}{x}:\frac{v}{y}:\frac{w}{z}\right],$$

也就是要證明

$$\big([\triangle PBC]\cdot[\triangle\varphi(P)BC]\big):\big([\triangle APC]\cdot[\triangle A\varphi(P)C]\big):\big([\triangle ABP]\cdot[\triangle AB\varphi(P)]\big)$$

是定值。由對稱性，我們只需證明

$$\frac{BP_A}{P_AC}\cdot\frac{B\varphi(P)_A}{\varphi(P)_AC}=\frac{[\triangle ABP]\cdot[\triangle AB\varphi(P)]}{[\triangle APC]\cdot[\triangle A\varphi(P)C]}$$

為定值，其中 $P_A=AP\cap BC,\ \varphi(P)_A=A\varphi(P)\cap BC$。事實上，如果令 $U=\varphi(\infty_{BC})$，那麼左式可以寫成

$$\begin{aligned}A(B,C;P,\infty_{BC})\cdot A(B,C;\varphi(P),\infty_{BC})&=A(B,C;P,\infty_{BC})\cdot A(C,B;P,U)\\&=A(B,C;P,\infty_{BC})\cdot A(B,C;U,P)\\&=A(B,C;U,\infty_{BC}),\end{aligned}$$

而最後的值與 P 無關。

反過來，當我們給定 $[u:v:w]$ 時（$uvw\neq 0$），

$$\varphi:[x:y:z]\mapsto\left[\frac{u}{x}:\frac{v}{y}:\frac{w}{z}\right]$$

也會是一個點等共軛變換：對於任意過 A 的直線 $\ell=[0:q:r]$，$\varphi(\ell)=[0:rw:qv]$，所以 φ: $\mathbf{T}A\to\mathbf{T}A$ 是一個對合變換，因此由對稱性及 (7.4.10)，φ 是一個點等共軛變換。

對於任意兩點 $P=[x_P:y_P:z_P],\ Q=[x_Q:y_Q:z_Q]$，我們知道讓 P 打到 Q 的點等共軛變換 φ 的係數為

$$[u:v:w]=[x_Px_Q:y_Py_Q:z_Pz_Q].$$

我們把這個點稱作 P,Q 的**重心座標積** (**barycentric product**)，記為 $P\times Q$，這時候 φ 的極點 $\varphi(G)$ 就是 $P\times Q$，所以我們可以把 φ 寫成 $\varphi^{P\times Q}$。類似地，我們可以定義重心座標商

$$P\div Q=\left[\frac{x_P}{x_Q}:\frac{y_P}{y_Q}:\frac{z_P}{z_Q}\right].$$

那麼對於任意一點 R，$\varphi^{P\times Q}(R) = P\times Q \div R$。

對於一線 $\mathcal{L}$，其點等共軛變換 φ 下的像是一個圓錐曲線 $\mathcal{C} = \mathcal{L}^{\varphi}$，所以我們可以寫

$$\mathcal{C} = G^{\varphi} \div \mathcal{L}.$$

把 $\mathcal{L}$ 乘到左邊得到

$$\mathcal{L}\times\mathcal{C} = \mathcal{C}\times\mathcal{L} = G^{\varphi}$$

（注意到這個意思是對於任意一動點 $P\in\mathcal{C}$，$\mathcal{L}\times P$ 過定點 G^{φ}），故 $\varphi = \varphi^{\mathcal{L}\times\mathcal{C}}$。所以說如果把 $\mathcal{L}$ 送到 $\mathcal{C}$ 與把 P 送到 Q 定義了同一個點等共軛變換，那麼

$$P\times Q = \mathcal{L}\times\mathcal{C}.$$

7.4.1 哪次沒有不動點

就像等角共軛變換 φ^K 的不動點 I, I^a, I^b, I^c 構成一組反西瓦四點組一樣，一個點等共軛變換 φ 若有不動點 S，那麼其反西瓦三角形的頂點 S^a, S^b, S^c 也是 φ 的不動點：注意到一點 Q 為 φ 的不動點若且唯若

$$Q\in\bigcap_{\mathcal{C}\in\mathscr{F}}\mathcal{C}.$$

從這個觀察我們可以直接得到 φ 的不動點數量至多為 4：若存在五個不動點 $Q_1,\dots,Q_5$，則對於所有 $\mathcal{D}\in\mathscr{F}$，$Q_1,\dots,Q_5\in\mathcal{D}$，但 $|\mathscr{F}|>1$，矛盾。

如果令 G^{φ} 為 φ 的極點，那麼我們有重心座標平方根

$$\sqrt{G^{\varphi}} = \{S, S^a, S^b, S^c\},$$

也就是說 $G^{\varphi} = S\times S = \cdots = S^c\times S^c$。從這個角度，我們也能看出 $\triangle ABC$ 是四個不動點 S, S^a, S^b, S^c 的西瓦三角形。

類似於 (7.3.11) 的證明，我們可以得到：

Proposition 7.4.16. 給定任意 $\triangle ABC$ 及一點 S，令 $\triangle S^aS^bS^c$ 為 S 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形，$\mathscr{F}$ 為所有經過 S, S^a, S^b, S^c 的圓錐曲線的集合。對於任意一點 $P\notin\{A,B,C\}$，過 A, B, C 作直線 ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C 滿足

$$(AP,\ell_A;SS^a,S^bS^c) = (BP,\ell_B;SS^b,S^cS^a) = (CP,\ell_C;SS^c,S^aS^b) = -1.$$

那麼 ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C 交於一點 Q，且對於所有 $\mathcal{D} \in \mathscr{F}$，$P$, Q 關於 $\mathcal{D}$ 共軛。

因此，存在一個等共軛變換 φ 使得 S, S^a, S^b, S^c 為不動點。

Proof. 只需證明若點 Q 滿足

$$(BP, BQ; SS^b, S^cS^a) = (CP, CQ; SS^c, S^aS^b) = -1,$$

則 $(AP, AQ; SS^a, S^bS^c) = -1$。類似於等角共軛變換的情形 (7.3.11)，存在一射影對合變換 $\psi \in \mathrm{Aut}(PQ)$ 使得

$$(SS^a \cap PQ, S^bS^c \cap PQ)$$

及其輪換皆為 ψ 的相互對，且 P, Q 為 ψ 的不動點，因此

$$(AP, AQ; SS^a, S^bS^c) = -1. \qquad \blacksquare$$

因為這時候 $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\varphi = \{\mathcal{D} \mid S, S^a, S^b, S^c \in \mathcal{D}\}$，所以其實 $\mathscr{F}$ 上的交比就是最自然的那個：

$$(\mathcal{D}_\bullet)_{\mathscr{F}} := (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2; \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4) = (\mathbf{T}_S\mathcal{D}_i),$$

原因是 $\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(S) = \mathbf{T}_S\mathcal{D}$。

Proposition 7.4.17. 給定任意 $\triangle ABC$，令 φ 為一點等共軛變換且 S, S^a, S^b, S^c 為 φ 的不動點，那麼對於任意直線 ℓ，$\varphi(\ell)$ 為 ℓ 關於完全四點形 (S, S^a, S^b, S^c) 的九點圓錐曲線 (6.3.8)。

Proof. 令 $\mathcal{C}$ 為 ℓ 關於完全四點形 (S, S^a, S^b, S^c) 的九點圓錐曲線，Q^a, Q^b, Q^c, $(Q^a)'$, $(Q^b)'$, $(Q^c)'$ 分別為 SS^a, SS^b, SS^c, S^bS^c, S^cS^a, S^aS^b 與 ℓ 的交點。取 R^a 使得

$$(S, S^a; Q^a, R^a) = -1,$$

並類似地定義 R^b, R^c, $(R^a)'$, $(R^b)'$, $(R^c)'$，則由 SS^a 為不動線及 S, S^a 為不動點知 $R^a = \varphi(Q^a) \in \varphi(\ell)$，同理有 R^b, R^c, $(R^a)'$, $(R^b)'$, $(R^c)' \in \varphi(\ell)$，故 $\mathcal{C} = \varphi(\ell)$。 $\blacksquare$

應該說我們一開始也可以這樣定義九點圓錐曲線，這樣證明共圓錐曲線簡單多了。取 $\ell = \mathcal{L}_\infty$ 結合 (7.4.9) 就可以得到 (S, S^a, S^b, S^c) 的九點圓錐曲線是 $\triangle G^{\varphi a} G^{\varphi b} G^{\varphi c}$ 的內切圓錐曲線。這節就以一個等共軛變換的應用來當結尾。

Theorem 7.4.18. 對於任意完全四點形 (P_1, P_2, P_3, P_4)，所有經過 P_1, P_2, P_3, P_4 的圓錐曲線的中心的軌跡為 (P_1, P_2, P_3, P_4) 的九點圓錐曲線。

那他的推廣是：

Theorem 7.4.19. 對於任意完全四點形 (P_1, P_2, P_3, P_4) 及一線 ℓ，ℓ 關於所有經過 P_1, P_2, P_3, P_4 的圓錐曲線的極點的軌跡為 ℓ 關於 (P_1, P_2, P_3, P_4) 的九點圓錐曲線。

Proof. 令 $\triangle ABC$ 為 (P_1, P_2, P_3, P_4) 的西瓦三角形，φ 為 $\triangle ABC$ 上並且以 P_1, P_2, P_3, P_4 為不動點的點等共軛變換。

($\Rightarrow$) 令 $\mathcal{C}$ 為過 P_1, P_2, P_3, P_4 的圓錐曲線，那麼

$$\varphi(\mathfrak{p}_\mathcal{C}(\ell)) \in \mathfrak{p}_\mathcal{C}(\mathfrak{p}_\mathcal{C}(\ell)) = \ell,$$

因此由 (7.4.17) 知 $\mathfrak{p}_\mathcal{C}(\ell)$ 位於 ℓ 關於 (P_1, P_2, P_3, P_4) 的九點圓錐曲線上。

($\Leftarrow$) 令 O 為 (P_1, P_2, P_3, P_4) 的九點圓錐曲線上一點，取 $Q_i \in OP_i$ 使得

$$(Q_i, OP_i \cap \ell; O, P_i) = -1,$$

$\mathcal{C}_i$ 為過 P_1, P_2, P_3, P_4, Q_i 的圓錐曲線，那麼 O 為關於 $\mathcal{C}_i$ 的極線經過 $\varphi(O)$ 及 $OP_i \cap \ell$。若 O 皆不為 ℓ 關於 $\mathcal{C}_i$ 的極點就有 $\varphi(O) = OP_i \cap \ell$，則 O, P_1, P_2, P_3, P_4 共線，矛盾。 ■

上面的定理、性質與推論都有對偶版本，那這邊就省略敘述及證明。

7.A 附錄：交比再現

我們現在知道一些可以定義交比的物體，比方說：直線、過某個點的直線集、圓錐曲線及切某個圓錐曲線的直線集等等，所以在這些東西之間就可

以找出一些保持交比不變的變換。我們稱這些集合為賦交比集（這名字是我亂掰的），一個嚴格的定義如下：

Definition 7.A.1. 一個**賦交比集** $(X, (-,-;-,-)_X)$ 是一個集合 X 與一個交比有理函數

$$\begin{aligned}(-,-;-,-)_X\colon\quad X\times X\times X\times X &\dashrightarrow \mathbb{R}\cup\{\infty\}\\ (P_1,P_2,P_3,P_4) &\longmapsto (P_1,P_2;P_3,P_4)_X \ =: (P_\bullet)_X,\end{aligned}$$

使得存在一個雙射函數 $\varphi\colon \mathbb{R}\cup\{\infty\}\to X$ 滿足 $(a_\bullet)_X = (\varphi(a_\bullet))$，對於所有可定義交比的 a_1, a_2, a_3, $a_4\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$。

Example 7.A.2. 這邊有一些賦交比集。

- 一直線（上的所有點）
- 過一點 P 的所有直線 $\mathbf{T}P$
- 過兩個定點的圓所形成的集合
- 一圓錐曲線（上的所有點）
- 一圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 的切線集 $\mathbf{T}\mathcal{C}$
- 過四個定點的圓錐曲線所形成的集合
- 與四條定線相切的圓錐曲線所形成的集合

交比的定義方式就是最自然的那個（從某個點看切線，從某條線看切點）。

以下假設所有形如 $(X_i, (-,-;-,-)_{X_i})$ 的都是賦交比集。

我們曾經定義過

$$A(P_\bullet) = A(P_1,P_2;P_3,P_4) = (AP_1,AP_2;AP_3,AP_4) = (AP_\bullet),$$

更一般地，如果 $\varphi\colon X_1\to X_2$ 是一個變換，那麼我們定義

$$\varphi(P_\bullet)_{X_2} = \varphi(P_1,P_2;P_3,P_4)_{X_2} = (\varphi(P_1),\varphi(P_2);\varphi(P_3),\varphi(P_4))_{X_2} = (\varphi(P_\bullet))_{X_2}.$$

Definition 7.A.3. 我們稱一個變換 $\varphi\colon X_1 \to X_2$ 為**保交比變換**若對於所有 P_1, P_2, P_3, $P_4 \in X_1$，$(\varphi(P_\bullet))_{X_2} = (P_\bullet)_{X_1}$。

那麼顯然有 φ 是雙射的，為了方便起見，我們把所有從 X_1 送至 X_2 的保交比變換收集起來，記作 $\mathrm{Hom}(X_1, X_2)$，特別地，$\mathrm{Aut}(X) := \mathrm{Hom}(X, X)$。那麼透過

$$((\psi \circ \varphi)(P_\bullet))_{X_3} = (\psi(\varphi(P_\bullet)))_{X_3} = (\varphi(P_\bullet))_{X_2} = (P_\bullet)_{X_1},$$

我們得到：

Proposition 7.A.4. 給定集合 X_1, X_2, X_3，若

$$\varphi \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2), \quad \psi \in \mathrm{Hom}(X_2, X_3),$$

那麼 $\psi \circ \varphi \in \mathrm{Hom}(X_1, X_3)$。

Proposition 7.A.5. 給定集合 X_1, X_2 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2)$，則存在反函數 $\varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}(X_2, X_1)$。

Proof. 由於 φ 是雙射的，所以 φ^{-1} 存在，對於 P_1, P_2, P_3, $P_4 \in X_2$，

$$(\varphi^{-1}(P_\bullet))_{X_1} = (\varphi(\varphi^{-1}(P_\bullet)))_{X_2} = (P_\bullet)_{X_2},$$

故 $\varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}(X_2, X_1)$。 ■

Proposition 7.A.6. 給定直線 ℓ 及 ℓ 上任意相異三點 P_1, P_2, P_3，若

$$\varphi\colon \{P_1, P_2, P_3\} \to \ell$$

使得 $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$, $\varphi(P_3)$ 兩兩相異，那麼存在唯一的一個函數 $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Aut}(\ell)$ 使得 $\tilde{\varphi}(P_i) = \varphi(P_i)$。

Proof. 不妨將 ℓ 想像為 $\mathbb{P}^1$，使其上面有四則運算，若 φ 將 $P_i \mapsto Q_i$，定義 $\tilde{\varphi}\colon \ell \to \ell$ 為

$$(Q_1, Q_2; Q_3, \tilde{\varphi}(P)) = (P_1, P_2; P_3, P) \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\varphi}(P) = \frac{aP + b}{cP + d},$$

其中 a, b, c, d 滿足 $ad \neq bc$，那麼顯然有 $\tilde{\varphi}(P_i) = \varphi(P_i)$，而 $(\tilde{\varphi}(Q_\bullet)) = (Q_\bullet)$ 則交由讀者自行驗證。 ■

所以說其實

$$\mathrm{Aut}(\ell) = \left\{ \left[p \mapsto \tfrac{ap+b}{cp+d} \right] \,\middle|\, ad \neq bc \right\} \cong \mathrm{PGL}(1).$$

Proposition 7.A.7. 給定集合 X_1, X_2，對於任意相異三點 P_1, P_2, $P_3 \in X_1$，若 $\varphi\colon \{P_1, P_2, P_3\} \to X_2$ 滿足 $\varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3)$ 兩兩相異，那麼存在唯一的一個函數 $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2)$ 使得 $\tilde{\varphi}(P_i) = \varphi(P_i)$。

Proof. 令 ℓ 為一直線，取任意 $\psi_j \in \mathrm{Hom}(X_j, \ell)$，由 (7.A.6) 知我們不妨假設 $\psi_1(P_i) = \psi_2(\varphi(P_i)) = i$，那麼 $\tilde{\varphi} := \psi_2^{-1} \circ \psi_1 \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2)$，並且顯然有 $\tilde{\varphi}(P_i) = \varphi(P_i)$。

若存在 $\tilde{\varphi}' \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2)$ 使得 $\tilde{\varphi}'(P_i) = \varphi(P_i)$，那麼 $\chi := \tilde{\varphi}^{-1}\tilde{\varphi}' \in \mathrm{Aut}(X_1)$。對於所有 $Q \in X_1$，

$$(P_1, P_2; P_3, \chi(Q))_{X_1} = (\chi(P_1), \chi(P_2); \chi(P_3), \chi(Q))_{X_1} = (P_1, P_2; P_3, Q)_{X_1},$$

因此 $\chi = \mathrm{id}_{X_1}$，即 $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}'$ 是唯一的。 ■

Proposition 7.A.8. 對於任意集合 X，$\mathrm{Aut}(X) \cong \mathrm{PGL}(1)$。

Proof. 取任意 $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^1$，則

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(X) &\longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) = \mathrm{PGL}(1) \\ \psi &\longmapsto \varphi\psi\varphi^{-1} \end{aligned}$$

是一個同構。 ■

回憶一下，我們曾經定義所有經過 P 的直線集為 $\mathbf{T}P$，即 $\mathbf{T}P = \{\ell \mid P \in \ell\}$。講了這麼多，我們來看看有那些基礎性質吧：

Proposition 7.A.9. 若雙射函數 $\Phi\colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 保共線，即

$$P \in QR \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(P) \in \Phi(Q)\Phi(R),$$

則 Φ 保交比，即 $(\Phi(X_\bullet)) = (X_\bullet)$，對於所有共線四點 X_1, X_2, X_3, X_4。

Proof. 令 P_1, P_2, P_3, P_4 為共線四點，Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 為另一組共線四點且兩線相異。設 $R_i = P_iQ_{i+1} \cap P_{i+1}Q_i$，那麼 R_1, R_2, R_3 共線若且唯若 $(P_\bullet) = (Q_\bullet)$。因為 Φ 保共線，所以 $(P_\bullet) = (Q_\bullet)$ 若且唯若 $\Phi(R_1)$, $\Phi(R_2)$, $\Phi(R_3)$ 共線，而這又等價於 $\Phi(P_\bullet) = \Phi(Q_\bullet)$。故我們有個良好定義的雙射函數 $\overline{\Phi}\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$：

$$\overline{\Phi}((P_\bullet)) := \Phi(P_\bullet)$$

顯然地，$0, 1, \infty$ 為 $\overline{\Phi}$ 的不動點。

給定任意兩個實數 x, y，在任一直線 ℓ 上取五點 P_1, P_2, P_3, P_4, P_4' 滿足

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = x \quad \text{及} \quad (P_1, P_2; P_3, P_4') = y,$$

那麼我們可以只用直線在 ℓ 上找到兩點 Q, R 滿足

$$(P_1, P_2; P_3, Q) = xy \quad \text{及} \quad (P_1, P_2; P_3, R) = x + y.$$

例如：取一點 A 及一線 L 使得 $AP_1 \parallel L$ 並考慮變換 $P \mapsto AP \cap L$，那麼我們可以假設 $P_1 = \infty$, $P_2 = 0$, $P_3 = 1$。再由 Φ 保共線，

$$\begin{aligned}
\Phi(P_1, P_2; P_3, Q) &= \Phi(P_1, P_2; P_3, P_4) \cdot \Phi(P_1, P_2; P_3, P_4'), \text{ 及} \\
\Phi(P_1, P_2; P_3, R) &= \Phi(P_1, P_2; P_3, P_4) + \Phi(P_1, P_2; P_3, P_4')
\end{aligned}$$

故 $\overline{\Phi}(xy) = \overline{\Phi}(x)\overline{\Phi}(y)$, $\overline{\Phi}(x + y) = \overline{\Phi}(x) + \overline{\Phi}(y)$，而滿足這樣的函數（注意到這是因為實數才是對的）只有 $\overline{\Phi}(x) = x$，所以 Φ 保交比。 ■

我們還可以推得以下性質（這時候就不需要是實數了）：

Proposition 7.A.10. 如果 A, B, C, D 是任三點不共線的四點並且 $\Phi\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ 是一個保共線的雙射函數，使得 A, B, C, D 為不動點，那麼 $\Phi = \mathrm{id}$。

Proof. 由 (7.A.9)，對於所有共線四點 X_1, X_2, X_3, X_4，我們有 $(\Phi(X_\bullet)) = (X_\bullet)$。令 $O = AD \cap BC$，則

$$\Phi(O) = \Phi(AD \cap BC) = AD \cap BC = O,$$

所以對於 AD 上任意一點 X

$$\Phi(A, D; O, X) = (A, D; O, X) = (\Phi(A), \Phi(D); \Phi(O), X),$$

即 $\Phi(X) = X$。那麼對於任意一點 Y，

$$\Phi(BY) \cap AD = \Phi(BY \cap AD) = BY \cap AD$$

所以 $\Phi(BY) = BY$，同理有 $\Phi(CY) = CY, \Phi(AY) = AY$，所以

$$\Phi(Y) = \bigcap \Phi(AY) = \bigcap AY = Y,$$

故 $\Phi = \mathrm{id}$。 ■

如同大保交比讓我們可以在許多命題上只需驗三個點，這個性質讓我們可以在許多命題上只需驗四個點。

Remark. 結合 (7.A.9) 及 (7.A.10)，我們可以證明一個變換 Φ 是保共線變換等價於其解析式可以寫成

$$\Phi[x : y : z] = [\Phi_{11}x + \Phi_{12}y + \Phi_{13}z : \Phi_{21}x + \Phi_{22}y + \Phi_{23}z : \Phi_{31}x + \Phi_{32}y + \Phi_{33}z],$$

其中 $(\Phi_{ij})_{1\le i,j\le 3}$ 是一個可逆矩陣，這個定理被稱為**射影幾何基本定理** (**fundamental theorem of projective geometry**)，這類的變換稱作**射影變換** (**projective transformation**)。更進一步，對於任三點不共線的四點組們 P_1, P_2, P_3, P_4 與 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4，存在恰一個射影變換 Φ，使得 $\Phi(P_i) = Q_i$。

另外，如果我們把 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 改成 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$，那變換

$$\Phi[x : y : z] := [\overline{x} : \overline{y} : \overline{z}]$$

保共線，但不保交比且解析式也不能寫成上面矩陣的形式，那證明會錯的原因是因為 $\mathbb{C}$ 有非平凡的自同構，比方說 $[z \mapsto \overline{z}]$。

Proposition 7.A.11. 給定兩點 P, Q，若 $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{T}P, \mathbf{T}Q)$，則 $\ell \cap \varphi(\ell)$ 的軌跡為一圓錐曲線或直線 (我們姑且稱它為退化的圓錐曲線)，即存在一圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 使得 $\mathcal{C} = \{\ell \cap \varphi(\ell) \mid \ell \in \mathbf{T}P\}$。

Proof. 令 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \in \mathbf{T}P$，$R_i = \ell_i \cap \varphi(\ell_i)$，則

$$P(R_\bullet) = (\ell_\bullet) = (\varphi(\ell_\bullet)) = Q(R_\bullet),$$

即 $R_4 \in (PQR_1R_2R_3)$，而這對於任意 R_4 都對，所以 $\{\ell \cap \varphi(\ell) \mid \ell \in \mathbf{T}P\} \subseteq \mathcal{C}$，而另一邊包含就反過來論述就好了。 ■

Proposition 7.A.12. 給定任意集合 X 與 X 上兩相異元素 P_1, P_2，對於任意實數 k，我們定義一個變換 $\varphi\colon X \to X$，$Q \in X$ 會送至使得 $(P_1, P_2; Q, R) = k$ 的 R，則 $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$。

Proof. 我們知道只要證明 X 為線的情形，過 P_1 作一線 $\ell \neq X$，在 X 上取點 R_1, R_2, R_3, R_4，使得 $R_1 = P_1$ 且 $(R_\bullet) = k$，那麼對於任意 Q，R_2P_2, R_3Q, $R_4\varphi(Q)$ 共點。故 $\varphi = [S \mapsto SR_4 \cap X] \circ [Q \mapsto R_3Q \cap R_2P_2] \in \mathrm{Aut}(X)$。 ∎

Proposition 7.A.13. 給定圓錐曲線 $\mathcal{C}$、直線 ℓ 及 $\mathcal{C}$ 上一定點 P，過 P 作一動線 L 分別交 $\mathcal{C}, \ell$ 於 Q, R，取 A 使得 $(P, Q; R, A)$ 為定值 k，則 A 的軌跡為一圓錐曲線或直線。

Proof. 過 P 作一直線 K，並且 K 上取 P_1, P_2, P_3, P_4 使得 $P_1 = P, P_2 = K \cap \mathcal{C}, P_3 = K \cap \ell$ 且 $(P_\bullet) = k$，則 P_2Q, P_3R, P_4A 共點，考慮變換

$$\varphi := [S \mapsto P_4S] \circ [Q \mapsto P_2Q \cap \ell] \circ [L \mapsto L \cap \mathcal{C}] \in \mathrm{Hom}(\mathbf{T}P, \mathbf{T}P_4)$$

由 (7.A.11) 知 $A = L \cap \varphi(L)$ 的軌跡為一圓錐曲線或直線。 ∎

Proposition 7.A.14. 給定圓錐曲線 $\mathcal{C}$，$\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ 若且唯若存在一線 ℓ 使得對於所有 $P, Q \in \mathcal{C}$，$P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q \in \ell$。

Proof. 固定 $\mathcal{C}$ 上三點 A, B, C，考慮折線 $(A\varphi(B)C\varphi(A)B\varphi(C))$，由帕斯卡定理知 $B\varphi(C) \cap \varphi(B)C$, $C\varphi(A) \cap \varphi(C)A$, $A\varphi(B) \cap \varphi(A)B$ 共線，令其為 ℓ'。考慮變換

$$\varphi' := [R \mapsto AR \cap \mathcal{C}] \circ [P \mapsto P\varphi(A) \cap \ell] \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C}),$$

則 A, B, C 為 $\varphi^{-1} \circ \varphi'$ 的不動點。

($\Rightarrow$) 由 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ 可得 $\varphi' = \varphi$，那麼對於任意 $P, Q \in \mathcal{C}$，我們考慮折線

$$(A\varphi(P)Q\varphi(A)P\varphi(Q)),$$

由帕斯卡定理知 $P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q$, $Q\varphi(A) \cap \varphi(Q)A$, $A\varphi(P) \cap \varphi(A)P$ 共線，即 $P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q \in \ell$

($\Leftarrow$) 若 $P\varphi(A) \cap \varphi(P)A \in \ell$，則 $\varphi'(P) = \varphi(P)$，因此 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$。 ∎

Proposition 7.A.15. 給定圓錐曲線 $\mathcal{C}$，若 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$，則存在一圓錐曲線 $\mathcal{C}'$ 使得對於所有 $P \in \mathcal{C}$，$P\varphi(P) \in \mathbf{T}\mathcal{C}'$。

Proof. 若 $\varphi = \mathrm{id}$，則 $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$。若 $\varphi \neq \mathrm{id}$，取一點 A 使得 $\varphi(A) \neq A$，由上個性質知存在 ℓ 使得 $A\varphi(P) \cap \varphi(A)P \in \ell,\ \forall P \in \mathcal{C}$。對於 $\mathcal{C}$ 上任意一點 P，由牛頓三號定理知 $A\varphi(P) \cap P\varphi(A),\ AP \cap \varphi(A)\varphi(P),\ \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(A\varphi(A)),\ \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P\varphi(P))$ 共線，並且還有

$$(A\varphi(P) \cap P\varphi(A), AP \cap \varphi(A)\varphi(P); \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(A\varphi(A)), \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P\varphi(P)) = -1$$

注意到 $[AP \mapsto \varphi(A)\varphi(P)] \in \mathrm{Hom}(\mathbf{T}A, \mathbf{T}\varphi(A))$，所以 $AP \cap \varphi(A)\varphi(P)$ 的軌跡是某個圓錐曲線 $\mathcal{C}^*$，取 $P = A$ 可得 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(A\varphi(A)) \in \mathcal{C}^*$。由 (7.A.13) 知 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P\varphi(P))$ 的軌跡是一個圓錐曲線 $\mathcal{C}^*$，因此 $P\varphi(P) \in \mathbf{T}\mathcal{C}'$，其中 $\mathcal{C}' = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}^*)$。 ■

Remark. 值得注意的是並不是所有 $\mathcal{C}'$ 都可以從某個 $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ 裡的元素得到。若 $\mathcal{C}'$ 是非退化的圓錐曲線，那麼它可以從某個 $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ 裡的元素得到若且唯若 $\mathcal{C}'$ 與 $\mathcal{C}$ 相切於兩個點（可能是虛交點），$\mathcal{C}'$ 退化為一個點的情形則是第 7.2 節主要想討論的東西。

7.B 多項式法

一般來說，我們在平面幾何中遇到的物件都能夠透過另外一些物件的代數操作來得到（比方說我們在解析時出現的多項式或有理分式），因此我們希望有系統的來了解這些有理分式的次數大小，並藉此分析一個命題需要驗幾個點才會對。具體而言就是用到了：一個至多為 d 次多項式 $P(x)$ 若至少有 $d+1$ 個根，那麼 $P(x) \equiv 0$。

Definition 7.B.1. 令 $\iota\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ 為一代數映射，那麼我們一定可以寫成

$$[s:t] \mapsto [x_0(s,t) : x_1(s,t) : \cdots : x_n(s,t)],$$

其中 x_i 都是齊次多項式，次數都一樣，且 $\gcd(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 1$。這時候我們定義 ι 的**度** (**degree**) 為

$$\deg \iota := \deg x_0 = \deg x_1 = \cdots = \deg x_n.$$

因為我們專注在射影平面 $\mathbb{P}^2$，所以下面一般而言都是取 $n=2$（有時會用到 $n=1$）。另外，我們在平面幾何遇到的物件（例如：直線、圓、圓錐曲線等等）幾乎都是 $\mathbb{P}^1$。

對於兩映射 $\iota_A = [x_A : y_A : z_A]$, $\iota_B = [x_B : y_B : z_B]$（想成是射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上的兩個動點 A, B），我們可以得到 A, B 連成的直線「AB」的映射 $\iota_{AB}^{\vee} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$，定義為

$$[s:t] \mapsto [y_A z_B - y_B z_A : z_A x_B - z_B x_A : x_A y_B - x_B y_A].$$

Proposition 7.B.2. 對於兩映射 ι_A, ι_B，我們有

$$\deg \iota_{AB}^{\vee} \le \deg \iota_A + \deg \iota_B - \#\{P \mid \iota_A(P) = \iota_B(P)\}.$$

特別地，若 $\#\{P \mid \iota_A(P) = \iota_B(P)\} \ge \deg \iota_A + \deg \iota_B + 1$，則 $\iota_A = \iota_B$。

Proof. 取一次式 e_P 使得 $e_P(P) = 0$，那麼

$$\prod_{\iota_A(P)=\iota_B(P)} e_P \,\Big|\, y_A z_B - y_B z_A,\ z_A x_B - z_B x_A,\ x_A y_B - x_B y_A,$$

因此

$$\begin{aligned}\deg \iota_{AB}^{\vee} &\le \deg(y_A z_B - y_B z_A) - \sum_{\iota_A(P)=\iota_B(P)} \deg e_P \\ &= \deg \iota_A + \deg \iota_B - \#\{P \mid \iota_A(P) = \iota_B(P)\}.\end{aligned}$$ ■

Proposition 7.B.3. 若 $\varphi\colon \ell_1 \to \ell_2$ 為一保交比變換，那麼 $\deg \iota_1 = \deg \iota_2$，其中 $\iota_i \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ 滿足 $\iota_i(\mathbb{P}^1) = \ell_i$ 且 $\iota_2 = \varphi \circ \iota_1$。

Proposition 7.B.4. 若 $\varphi\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ 為一保交比變換，那麼 $\deg \iota_1 = \deg \iota_2$，其中 $\iota_i \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ 滿足 $\iota_i(\mathbb{P}^1) = \mathcal{C}_i$ 且 $\iota_2 = \varphi \circ \iota_1$。

Proposition 7.B.5. 若 $\varphi\colon \ell \to \mathcal{C}$ 為一保交比變換，那麼 $2 \cdot \deg \iota = \deg(\varphi \circ \iota)$，其中 $\iota \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ 滿足 $\iota(\mathbb{P}^1) = \ell$。

Proposition 7.B.6. 若 $\iota_A, \iota_B\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ 為兩映射使得 $\mathcal{C} = \iota_A(\mathbb{P}^1) = \iota_B(\mathbb{P}^1)$ 為一圓錐曲線，那麼

$$\deg \iota_{AB}^{\vee} = \tfrac{1}{2}\left(\deg \iota_A + \deg \iota_B\right).$$

Proof. 不妨假設 $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = z^2\}$，那麼存在齊次多項式 P_A, Q_A, P_B, Q_B 使得

$$(x_A, y_A, z_A) = (P_A^2 - Q_A^2, 2P_AQ_A, P_A^2 + Q_A^2),$$
$$(x_B, y_B, z_B) = (P_B^2 - Q_B^2, 2P_BQ_B, P_B^2 + Q_B^2)$$

且 $\gcd(P_A, Q_A) = \gcd(P_B, Q_B) = 1$。顯然地，

$$2(P_AQ_B - P_BQ_A) \,\big|\, y_Az_B - y_Bz_A,\ z_Ax_B - z_Bx_A,\ x_Ay_B - x_By_A,$$

所以有

$$\iota_{AB}^{\vee}[s : t] = \big[Q_AQ_B - P_AP_B : -(P_AQ_B + P_BQ_A) : P_AP_B + Q_AQ_B\big].$$

若不可約多項式 $f(s,t)$ 同時整除 $Q_AQ_B - P_AP_B$, $P_AQ_B + P_BQ_A$, $P_AP_B + Q_AQ_B$，結合 $\gcd(P_A, Q_A) = \gcd(P_B, Q_B) = 1$ 我們得到 f 為常數。因此

$$\deg \iota_{AB}^{\vee} = \deg(P_AQ_B + P_BQ_A) = \frac{1}{2}\left(\deg \iota_A + \deg \iota_B\right). \qquad \blacksquare$$

這個性質除了直接開還可以反著開：

Corollary 7.B.7. 若 $\iota_A\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ 為一映射使得 $\mathcal{C} = \iota_A(\mathbb{P}^1)$ 為一圓錐曲線，$\iota_L^{\vee}\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ 使得 $A \in L$。令 $\iota_B\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ 為 ι_L 與 $\mathcal{C}$ 異於 ι_A 的交點，那麼

$$\deg \iota_B = 2\deg \iota_L^{\vee} - \deg \iota_A.$$

那我們最常使用的是下面這個定理：

Theorem 7.B.8. 給定三映射 $\iota_1, \iota_2, \iota_3\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$，若

$$\#\{P \in \mathbb{P}^1 \mid \iota_1(P), \iota_2(P), \iota_3(P) \text{ 共線 }\} \geq \deg \iota_1 + \deg \iota_2 + \deg \iota_3 + 1,$$

則對於所有 $P \in \mathbb{P}^1$，$\iota_1(P)$, $\iota_2(P)$, $\iota_3(P)$ 共線。

Proof. 注意到 $\iota_1(P)$, $\iota_2(P)$, $\iota_3(P)$ 共線若且唯若

$$D = \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0,$$

而 $\deg D \leq \deg \iota_1 + \deg \iota_2 + \deg \iota_3$。 ■

Corollary 7.B.9. 若六個映射 $\iota_i \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, $i = 1 \sim 6$ 滿足

$$\#\{P \in \mathbb{P}^1 \mid \iota_1(P), \iota_2(P), \iota_3(P), \iota_4(P), \iota_5(P), \iota_6(P) \text{ 共圓錐曲線}\} \geq 2 \cdot \sum_{i=1}^{6} \deg \iota_i + 1,$$

則對於所有 $P \in \mathbb{P}^1$，$\iota_1(P)$, $\iota_2(P)$, $\iota_3(P)$, $\iota_4(P)$, $\iota_5(P)$, $\iota_6(P)$ 共圓錐曲線。

Proof. 令 $A_i = \iota_i(P)$。由帕斯卡定理 (6.3.1)，A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 共圓錐曲線若且唯若

$$X = A_1A_2 \cap A_4A_5,\ Y = A_2A_3 \cap A_5A_6,\ Z = A_3A_4 \cap A_6A_1$$

共線。我們知道

$$\begin{aligned}
\deg X &\leq \deg \iota_{A_1A_2} + \deg \iota_{A_4A_5} \leq (\deg \iota_1 + \deg \iota_2) + (\deg \iota_4 + \deg \iota_5), \\
\deg Y &\leq \deg \iota_{A_2A_3} + \deg \iota_{A_5A_6} \leq (\deg \iota_2 + \deg \iota_3) + (\deg \iota_5 + \deg \iota_6), \\
\deg Z &\leq \deg \iota_{A_3A_4} + \deg \iota_{A_6A_1} \leq (\deg \iota_3 + \deg \iota_4) + (\deg \iota_6 + \deg \iota_1).
\end{aligned}$$

因此由

$$\begin{aligned}
&\#\{P \in \mathbb{P}^1 \mid X, Y, Z \text{ 共線}\} \\
&= \#\{P \in \mathbb{P}^1 \mid \iota_1(P), \iota_2(P), \iota_3(P), \iota_4(P), \iota_5(P), \iota_6(P) \text{ 共圓錐曲線}\} \\
&\geq 2 \cdot \sum_{i=1}^{6} \deg \iota_i + 1 \geq \deg X + \deg Y + \deg Z + 1
\end{aligned}$$

及 (7.B.8) 知 X, Y, Z 永遠共線，故 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 永遠共圓錐曲線。 ■

Corollary 7.B.10. 若四個映射 $\iota_i \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, $i = 1 \sim 4$ 滿足

$$\#\{P \in \mathbb{P}^1 \mid \iota_1(P), \iota_2(P), \iota_3(P), \iota_4(P) \text{ 共圓}\} \geq 2 \cdot \sum_{i=1}^{4} \deg \iota_i + 1,$$

則對於所有 $P \in \mathbb{P}^1$，$\iota_1(P)$, $\iota_2(P)$, $\iota_3(P)$, $\iota_4(P)$ 共圓。

Proof. 在 (7.B.9) 中取 ι_5, ι_6 為兩個無窮虛圓點 $\infty_{\pm i} = [1 : \pm i : 0]$，那麼 $\iota_1(P)$, $\iota_2(P)$, $\iota_3(P)$, $\iota_4(P)$ 共圓若且唯若 $\iota_1(P)$, $\iota_2(P)$, $\iota_3(P)$, $\iota_4(P)$, $\iota_5(P)$, $\iota_6(P)$ 共圓錐曲線。因為 $\deg_{\iota_5} = \deg_{\iota_6} = 0$，所以我們只要驗證

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{6} \deg \iota_i + 1 = 2 \cdot \sum_{i=1}^{4} \deg \iota_i + 1$$

個點就好。 ■

Proposition 7.B.11. 對於四個映射 $\iota_i \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, $i = 1 \sim 4$，我們有交比映射 $\iota_{(1,2;3,4)} \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$，定義為

$$\iota_{(1,2;3,4)}(P) = (\iota_1(P), \iota_2(P); \iota_3(P), \iota_4(P)).$$

那麼

$$\deg \iota_{(1,2;3,4)} \le \sum_{i=1}^{4} (\deg \iota_i - N_i) + 2N,$$

其中 $N_i = \#\{P \in \mathbb{P}^1 \mid \iota_j(P)$ 皆重合, $j \neq i\}$, $N = \#\{P \in \mathbb{P}^1 \mid \iota_i(P)$ 皆重合$\}$。

Proof. 令 $\iota_i[s : t] = [u_i(s,t) : v_i(s,t)]$，則

$$\iota_{(1,2;3,4)} = [(u_1v_3 - u_3v_1)(u_2v_4 - u_4v_2) : (u_1v_4 - u_4v_1)(u_2v_3 - u_3v_2)].$$

取一次式 e_P 使得 $e_P(P) = 0$，那麼

$$\prod_{\iota_i(P)=\iota_j(P)=\iota_k(P)} e_P \mid (u_1v_3 - u_3v_1)(u_2v_4 - u_4v_2),\ (u_1v_4 - u_4v_1)(u_2v_3 - u_3v_2)$$

且

$$\prod_{\iota_1(P)=\iota_2(P)=\iota_3(P)=\iota_4(P)} e_P^2 \mid (u_1v_3 - u_3v_1)(u_2v_4 - u_4v_2),\ (u_1v_4 - u_4v_1)(u_2v_3 - u_3v_2).$$

故

$$\deg \iota_{(1,2;3,4)} \le \sum_{i=1}^{4} (\deg \iota_i - N_i) + 2N.$$ ■

Chapter 8

等軸雙曲線

8.1 特殊圓錐曲線與龐色列點

人生幾何，人生中總是會碰到一些特殊的人，幾何中總是會碰到一些特殊的圓錐曲線。

Proposition 8.1.1. 令 $\mathcal{P}$ 為一個以 F 為焦點、L 為準線的拋物線，設 $\triangle ABC$ 為與 $\mathcal{P}$ 相切的三角形，則 $F \in \odot(ABC)$ 且 L 經過 $\triangle ABC$ 的垂心。

Proof. 令 F 關於 BC, CA, AB 的對稱點分別為 F_a, F_b, F_c，$\mathcal{P}$ 分別與 BC, CA, AB 切於 T_a, T_b, T_c，那麼由拋物線的光學性質可得 F_a, F_b, F_c 分別為 T_a, T_b, T_c 關於 L 的垂足，因此由 F_a, F_b, F_c 共線於 L 及施坦納定理知 $F \in \odot(ABC)$ 且 L 經過 $\triangle ABC$ 的垂心。 ■

Proposition 8.1.2. 令 $\mathcal{P}$ 為一個以 F 為焦點、L 為準線的拋物線，設 $\triangle ABC$ 為 $\mathcal{P}$ 的自共軛三角形，則 F 位於 $\triangle ABC$ 的九點圓上且 L 經過 $\triangle ABC$ 的外心。

Proof. 令 U 為垂直於 L 方向上的無窮遠點，則 $U \in \mathcal{P}$ 且 U 為 O 的中心，令 M_a, M_b, M_c 分別為 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 的中點，AU 分別交 BC, M_bM_c 於 P, T，則由 $(A, U; P, T) = -1$ 知 $T \in \mathcal{P}$，由 $M_bM_c \parallel BC$ 及平行弦定理知 M_bM_c 為 T 關於 $\mathcal{P}$ 的極線，即 M_bM_c 與 $\mathcal{P}$ 相切，同理有 M_cM_a, M_aM_b 與 $\mathcal{P}$ 相切，再由上

述性質就有 F 位於 $\triangle ABC$ 的九點圓上且 L 經過 $\triangle ABC$ 的外心。 ■

講完兩個大家該知道的性質之後讓我們回到章節標題。

Definition 8.1.3. 我們稱一個雙曲線 $\mathcal{H}$ 為一等軸雙曲線 (**rectangular hyperbola**) 若 $\mathcal{H}$ 上的兩個無窮遠點方向垂直。等價地來說，一個等軸雙曲線就是讓兩個無窮虛圓點共軛的圓錐曲線。

會叫等軸雙曲線是因為每個雙曲線都有所謂的貫軸與共軛軸，而等軸雙曲線就是當貫軸與共軛軸等長的時候。平面上所有（非退化）的等軸雙曲線都可以旋似到方程 $xy = 1$ 的解集。

Proposition 8.1.4. 給定任意非直角三角形 $\triangle ABC$，設其垂心為 H，$\mathcal{H}$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線，則 $H \in \mathcal{H}$ 若且唯若 $\mathcal{H}$ 為等軸雙曲線。

Proof. 考慮 $\triangle ABC$ 上的等角共軛變換 φ，令 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，則 $H \in \mathcal{H}$ 若且唯若 $O \in \varphi(\mathcal{H})$，設 $\varphi(\mathcal{H})$ 與 $\odot(ABC)$ 交於 X, Y 兩點（若無交點，則 $\mathcal{H}$ 與 $\mathcal{L}_\infty$ 不相交），那麼 $O \in \varphi(\mathcal{H})$ 若且唯若 X, Y 為關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點若且唯若 $\varphi(X), \varphi(Y)$ 的方向垂直，即 $\mathcal{H}$ 為等軸雙曲線。 ■

如果我們把 H 想成是 ∞_i 與 ∞_{-i} 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦積 (7.1.25)，那麼這個性質其實就只是 (7.2.23)。

透過解析也是可以很快看出來，假設 $A = (a, a^{-1})$, $B = (b, b^{-1})$, $C = (c, c^{-1})$，那麼 $\triangle ABC$ 的垂心 $H = (-(abc)^{-1}, -abc)$。那麼如果現在有四點 $A = (a, a^{-1})$, $B = (b, b^{-1})$, $C = (c, c^{-1})$, $D = (d, d^{-1})$ 位於等軸雙曲線 $\mathcal{H}$ 上且 H_A, H_B, H_C, H_D 分別為 $\triangle H_BH_CH_D$, $\triangle H_CH_DH_A$, $\triangle H_DH_AH_B$, $\triangle H_AH_BH_C$ 的垂心，則

$$\begin{aligned}(A, B; C, D)_{\mathcal{H}} &= (a, b; c, d)\\ &= (-(bcd)^{-1}, -(cda)^{-1}; -(dab)^{-1}, -(abc)^{-1})\\ &= (H_A, H_B; H_C, H_D)_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Example 8.1.5. 令 $\mathcal{E}$ 為不等邊銳角三角形 ABC 的歐拉線，證明由 CA, AB, $\mathcal{E}$ 所圍成的三角形的歐拉線平行於 BC。

Solution. 令 O, H 分別為 $\triangle ABC$ 的外心及垂心。考慮過 A, B, C, O, H 的圓錐曲線 $\mathcal{H}$，那麼 $\mathcal{H}$ 是個等軸雙曲線，且為 $\mathcal{E}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛變換下的像。令 $X = CA \cap \mathcal{E}$, $Y = AB \cap \mathcal{E}$, U 為 $\mathcal{H}$ 與 $\odot(ABC)$ 的第四個交點，那麼

$$\measuredangle XYA = \measuredangle(\mathcal{E}, AB) = \measuredangle CAU = \measuredangle CBU,$$
$$\measuredangle AXY = \measuredangle(AC, \mathcal{E}) = \measuredangle UAB = \measuredangle UCB,$$

故 $\triangle AYX \overset{+}{\sim} \triangle UBC$。注意到 $\triangle UBC$ 的垂心 H_U 也位於 $\mathcal{H}$ 上，所以 $\mathcal{H}$ 是 $\triangle UBC$ 的歐拉線 $\mathcal{E}_U$ 關於 $\triangle UBC$ 的等角共軛變換下的像。因此若 $\mathcal{E}_U$ 分別與 CU, UB 交於 R, S，則 $\triangle USR \overset{+}{\sim} \triangle ABC$。所以 $\triangle AYX$ 的歐拉線 $\mathcal{E}'$ 滿足

$$\mathcal{E}' = XY + RS - BC = (AY + BC - UB) + (US - AB) = BC.$$

再來這個可以想成是 (8.1.4) 取極限後的版本。

Proposition 8.1.6. 給定任意直角三角形 $\triangle ABC$，設 BC 為其斜邊，AD 為高，$\mathcal{H}$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線，則 AD 與 $\mathcal{H}$ 相切若且唯若 $\mathcal{H}$ 為等軸雙曲線。

Proof. 考慮 $\triangle ABC$ 上的等角共軛變換 φ，令 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，則 AD 與 $\mathcal{H}$ 相切若且唯若 $\varphi(\mathcal{H})$, AO, BC 共點，即 $O \in \varphi(\mathcal{H})$。與上述的性質證明相同，$O \in \varphi(\mathcal{H})$ 若且唯若 $\mathcal{H}$ 為等軸雙曲線。 ■

Proposition 8.1.7. 令 $\mathcal{H}$ 是以 T 為中心的等軸雙曲線（這邊中心不用 O 的原因是怕跟外心搞混），則 $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P) + TP$（形式和）為定值，即對於任意兩點 P_1, P_2，

$$\measuredangle(\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P_1), \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P_2)) + \measuredangle P_1TP_2 = 0^\circ.$$

Proof. 令 $U = \infty_{TP}$, $V = \infty_{\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P)}$，由平行弦定理知 $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(U) \parallel \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P)$。令 W_1, W_2 為 $\mathcal{H}$ 與 $\mathcal{L}_\infty$ 的兩個交點，由 U, V 關於 $\mathcal{H}$ 共軛知

$$-1 = (U, V; W_1, W_2) \overset{T}{=} T(P, V; W_1, W_2).$$

而 $\measuredangle W_1TW_2 = 90^\circ$，所以 $\angle P_iTV_i$ 有分角線 TW_1, TW_2。故

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P) + TP = 2 \cdot TW_1 = 2 \cdot TW_2$$

為定值。 ■

這個一樣有無窮虛圓點的看法：因為 $\triangle T\infty_i\infty_{-i}$ 為 $\mathcal{H}$ 的自共軛三角形，所以對於任意兩點 P, Q

$$(\infty_{\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P)}, \infty_{\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(Q)}; \infty_{-i}, \infty_i) \overset{\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}}{=} T(P, Q; \infty_i, \infty_{-i}) = (\infty_{TQ}, \infty_{TP}; \infty_{-i}, \infty_i).$$

Corollary 8.1.8. 令 $\mathcal{H}$ 是以 T 為中心的等軸雙曲線，設 $\triangle ABC$ 為 $\mathcal{H}$ 的自共軛三角形，則 $T \in \odot(ABC)$。

Proof. 由 (8.1.7) 可得 $\measuredangle BTC = -\measuredangle(CA, AB) = \measuredangle BAC$，即 $T \in \odot(ABC)$。 ■

Corollary 8.1.9. 令 $\mathcal{H}$ 是以 T 為中心的等軸雙曲線。設 $A, B, C \in \mathcal{H}$，則 T 位於 $\triangle ABC$ 的九點圓 ε 上。

Proof. 令 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，則 $H \in \mathcal{H}$。由 (7.1.8)，我們知道 (A, B, C, H) 的西瓦三角形 $\triangle H_aH_bH_c$ 為關於 $\mathcal{H}$ 的自共軛三角形，因此結合 (8.1.8)，T 位於 $\triangle ABC$ 的九點圓 $\varepsilon = \odot(H_aH_bH_c)$ 上。 ■

這個推論也可以從 (7.4.18) 看出來：T 位於完全四點形 (A, B, C, H) 的九點圓錐曲線 ε 上。

Proposition 8.1.10. 若 $\overline{BC}$ 為一個等軸雙曲線 $\mathcal{H}$ 上的直徑，那麼對於任意 $A \in \mathcal{H}$，A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點 $A^* \in \mathcal{H}$，且 $\mathbf{T}_A\mathcal{H}$ 為 $\triangle ABC$ 的 A-共軛中線。

Proof. 考慮關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛變換 φ，設 $L = \varphi(\mathcal{H}), L' = \varphi(\mathbf{T}_A\mathcal{H})$，那麼 $\varphi(L \cap L') \in \mathcal{H} \cap \mathbf{T}_A\mathcal{H} = A$，所以 $L \cap L' \in BC$。注意到 $\triangle ABC$ 的垂心 $H \in \mathcal{H}$，故其關於 $\overline{BC}$ 中點的對稱點位於 $\mathcal{H}$ 上，即 A^*。所以由 $\infty_{\perp BC} = \varphi(A^*) \in L$ 知 L 為 BC 中垂線，故 $\mathbf{T}_A\mathcal{H}$ 為 $L' = A(L \cap BC)$ 關於 $\angle BAC$ 的等角線，即 $\triangle ABC$ 的 A-共軛中線。 ■

在這個性質中出現的雙曲線其實是來自下面這個常見的幾何圖形：

Example 8.1.11. 設 E, F 分別位於 $\triangle ABC$ 的邊 CA, AB 上，且滿足 B, C, E, F 共圓。令 $P = BE \cap CF$，則 P 的等角共軛點 Q 滿足

$$\measuredangle CBQ = \measuredangle PBA = \measuredangle EBF = \measuredangle ECF = \measuredangle ACP = \measuredangle QCB,$$

即 Q 位於 $\overline{BC}$ 中垂線 ℓ_a 上（或 BC 上）。因此 P 的軌跡是 ℓ_a 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡，即某個過垂心 H 的等軸雙曲線 $\mathcal{H}_a$。

注意到 A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點 A^* 也位於 $\mathcal{H}_a$ 上且 $(BC)(HA^*)$ 是平行四邊形，因此 $\mathcal{H}_a$ 的中心是 $\overline{BC}$ 中點 M，即 $\overline{BC}$ 是 $\mathcal{H}_a$ 的直徑。因此當我們給定任意等軸雙曲線 $\mathcal{H}$ 上的直徑 $\overline{BC}$ 時，對於任意 $P \in \mathcal{H}$，$PB + PC$ 為定值。這件事也可以透過無窮虛圓點觀察出來：因為 $\triangle M\infty_i\infty_{-i}$ 是關於 $\mathcal{H}_a$ 的自共軛三角形，所以由 (7.1.8)，$X = B\infty_{-i} \cap C\infty_i$, $Y = B\infty_i \cap C\infty_{-i} \in \mathcal{H}$。這告訴我們對於任意 $P \in \mathcal{H}$，

$$B(A, P; \infty_{-i}, \infty_i) = (A, P; X, Y)_{\mathcal{H}} = C(A, P; \infty_i, \infty_{-i}) = C(P, A; \infty_{-i}, \infty_i).$$

Example 8.1.12 (2022 3J M5)**.** 平面上 ABC 為銳角三角形，其外心為 O，外接圓為 Ω。分別在線段 AB, AC 上各取一點 D, E，並作過 A 與 DE 垂直的直線 ℓ。設 ℓ 分別與三角形 ADE 的外接圓及 Ω 再交於點 P, Q。令直線 OQ 與 BC 交於點 N，直線 OP 與 DE 交於點 S，且點 W 為三角形 SAO 的垂心。

試證：S, N, O, W 四點共圓。

Solution. 由於 $\measuredangle SWO = \measuredangle OAS$，所以由上述例子我們只需證明 $SN + SA = ON + OA$，即 S, O 位於過以 $\overline{AN}$ 為直徑的某個等軸雙曲線 $\mathcal{H}$ 上。由於 $N = OQ \cap BC$，所以我們需要在固定 Q 的情況下（即 P 位於 AQ 上）證明

(i) S 的軌跡為某個等軸雙曲線 $\mathcal{H}$；

(ii) $\overline{AN}$ 為 $\mathcal{H}$ 的直徑。

當 Q 固定時，$E = D\infty_{\perp AQ} \cap AC$, $P = AQ \cap D\infty_{AQ+(\perp AQ)-AC}$。這告訴我們 $D \mapsto E, D \mapsto P$ 皆為保交比變換，因此

$$S = OP \cap DE = OP \cap \infty_{\perp AQ}D$$

為一個過 $O, \infty_{\perp AQ}$ 的圓錐曲線 $\mathcal{H}$。當 $D = A$ 時，$S = OA \cap \infty_{\perp AQ}A = A$；當 $D = \infty_{AB}$ 時，$S = O\infty_{AQ} \cap \infty_{\perp AQ}\infty_{AB} = \infty_{AQ}$。所以 $\mathcal{H}$ 同時經過 ∞_{AQ} 及 $\infty_{\perp AQ}$，故 $\mathcal{H}$ 為一等軸雙曲線。

接下來，我們要證明 $N \in \mathcal{H}$。換句話說我們要取一點 D 使得 $N = OP \cap DE$，這時候一定要有 $D = AB \cap N\infty_{\perp AQ}$，我們只需證明此時 $P = Q$。這等價於 Q 為 $\triangle ABC \cap DE$ 的密克點，而事實上我們有 B, D, Q, N 共圓：

$$\measuredangle DNQ = \measuredangle(\perp AQ, OQ) = (A - Q)_\Omega = \measuredangle ABQ = \measuredangle DBQ.$$

最後，我們要說 $\overline{AN}$ 為 $\mathcal{H}$ 的直徑。由上述例子，我們只需證明

$$OA + ON = \infty_{AQ}A + \infty_{AQ}N = 2AQ,$$

而這是顯然的。

Example 8.1.13. 透過這些等軸雙曲線的性質，我們可以證明反演變換其實也是某種點等共軛變換。事實上，如果 $\mathfrak{I}$ 是一個以 O 為中心，k 為反演冪的反演變換，$\mathfrak{s}$ 是一個關於以過 O 的直線 ℓ 的對稱變換。那麼 $\mathfrak{C} := \mathfrak{I} \circ \mathfrak{s}$ 是一個關於 $\triangle O\infty_i\infty_{-i}$ 的點等共軛變換，其中 $\infty_{\pm i}$ 為兩個無窮虛圓點：

如果 $k < 0$，我們可以把 k 改成 $-k$ 且 ℓ 改成過 O 且垂直 ℓ 的直線，這會給我們同一個變換。因此我們不妨假設 $k > 0$。令 Γ 是以 O 為圓心，$\sqrt{k}$ 為半徑長的圓。那麼 $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_\Gamma$。考慮 Γ 與 ℓ 的兩個交點 X, Y，並定義

$$\mathscr{F} = \{\mathcal{H} \mid X, Y \in \mathcal{H},\ \mathcal{H} \text{ 是以 } O \text{ 為中心的等軸雙曲線}\}.$$

因為 ∞_i, ∞_{-i} 調和分割任意互相垂直的兩個無窮遠點，所以 $\triangle O\infty_i\infty_{-i}$ 是關於任意一個 $\mathcal{H} \in \mathscr{F}$ 的自共軛三角形。對於所有 P，我們知道 $P^* = \mathfrak{I} \circ \mathfrak{s}(P)$ 滿足 $(XY)(PP^*)$ 是調和四邊形。我們只需證明對於所有 $\mathcal{H} \in \mathscr{F}$，$\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P)$ 過 P^*。

令 A, B 為 $\Omega := \odot(XYPP^*)$ 與 $\mathcal{H}$ 的另外兩個交點。由 (8.1.10)，A, B 分別關於 $\mathcal{H}$ 的切線 $\mathbf{T}_A\mathcal{H}, \mathbf{T}_B\mathcal{H}$ 與 X, Y 分別關於 Ω 的切線 $\mathbf{T}_X\Omega, \mathbf{T}_Y\Omega$ 共於一點 T，而 T 由 $(XY)(PP^*)$ 的調和四邊形性也位於 $L := PP^*$ 上。考慮完全四點形 $\mathfrak{q} = (A, B, X, X)$，其中 XX 為 $\mathbf{T}_X\Omega$。注意到 $\mathfrak{q}$ 截 L 所定義出來的對合有相互對

$$(P, P^*), \quad (L \cap AB, T), \quad (L \cap AX, L \cap BX).$$

我們證明這個對合就是 $[Q \mapsto L \cap \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(Q)]$。我們已經有

$$L \cap \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(T) = L \cap \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(A) \cap \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(B)) = L \cap AB.$$

因此只需證明 $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(L \cap AX)$, L, BX 共點，或等價地，$\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(L)$, $U := \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(AX)$, $L \cap BX$ 共線，而這只是因為

$$\begin{aligned} U(A, B; X, \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(L)) &= (A, B; UX \cap AB, \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(L)) \\ &\overset{\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}}{=} (TA, TB; TX, L) = U(A, B; X; L \cap BX). \end{aligned}$$

我們還可以看出 $\mathcal{F}$ 中的圓錐曲線的另外兩個共同交點其實就是以 O 為圓心，$\sqrt{-k}$ 為半徑的虛圓 Ξ 與過 O 且垂直於 ℓ 的直線 $\ell^{\perp}$ 的兩個交點（因為如果把 X, Y 換成這兩個交點上面的證明還是對的）。事實上，這些反演變換（與對稱變換的合成）也是所有關於 $\triangle O\infty_i\infty_{-i}$ 的點等共軛變換。

Definition 8.1.14. 對於任意不構成垂心組的完全四點形 $q = (P_1, P_2, P_3, P_4)$，我們記 $\mathcal{H}(P_1P_2P_3P_4)$ 為通過 P_1, P_2, P_3, P_4 的等軸雙曲線（注意到這是唯一的）。我們稱 $\mathcal{H}(P_1P_2P_3P_4)$ 的中心 T 為 q 的龐色列點 (**Poncelet point**)。

Theorem 8.1.15. 令 T 為完全四點形 $q = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ 的龐色列點，則 $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$ 的九點圓，P_i 關於 $\triangle P_{i+1}P_{i+2}P_{i+3}$ 的佩多圓及 q 的西瓦圓，這九個圓共點，且該點為 T。

Proof. 令 $\mathcal{H}$ 為通過 P_1, P_2, P_3, P_4 的等軸雙曲線，$\triangle XYZ$ 為 q 的西瓦三角形，則 $\triangle XYZ$ 為 $\mathcal{H}$ 的自共軛三角形，因此由 (8.1.9) 及 (8.1.8) 知 T 位於 $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$ 的九點圓上且位於 q 的西瓦圓上。令 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 為 P_4 關於 $\triangle P_1P_2P_3$ 的佩多三角形，M_{ij} 為 $\overline{P_iP_j}$ 的中點。由 T 位於 $\odot(M_{14}Q_2M_{31})$, $\odot(M_{14}Q_3M_{12})$ 上可得

$$\begin{aligned} \measuredangle Q_2TQ_3 &= \measuredangle Q_2TM_{14} + \measuredangle M_{14}TQ_3 = \measuredangle Q_2M_{31}M_{14} + \measuredangle M_{14}M_{12}Q_3 \\ &= \measuredangle Q_2P_3P_4 + \measuredangle P_4P_3Q_3 = \measuredangle Q_2Q_1P_4 + \measuredangle P_4Q_1Q_3 = \measuredangle Q_2Q_1Q_3, \end{aligned}$$

即 $T \in \odot(Q_1Q_2Q_3)$，同理有 T 位於其他 P_i 關於 $\triangle P_{i+1}P_{i+2}P_{i+3}$ 的佩多圓上。 ■

Definition 8.1.16. 給定任意 $\triangle ABC$，P 為非 $\triangle ABC$ 的垂心或其頂點的任意一點，我們稱 $\widehat{P}$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的**反角共軛** (**antigonal conjugate**) 若

$$\measuredangle BPC + \measuredangle B\widehat{P}C = \measuredangle CPA + \measuredangle C\widehat{P}A = \measuredangle APB + \measuredangle A\widehat{P}B = 0^\circ.$$

顯然 P^* 是存在且唯一的。

Proposition 8.1.17. 給定任意 $\triangle ABC$，若 $\widehat{P}$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的反角共軛，則 P 與 $\widehat{P}$ 的中點 T 為完全四點形 (A, B, C, P) 的龐色列點。

Proof. 令 P^* 為 P 關於 $\mathcal{H}(ABCP)$ 的對徑點，則 P^* 為 P 關於 T 的對稱點且

$$AP + AP^* = BP + BP^* = CP + CP^*.$$

這告訴我們

$$\measuredangle BPC + \measuredangle BP^*C = \measuredangle CPA + \measuredangle CP^*A = \measuredangle APB + \measuredangle AP^*B = 0^\circ,$$

所以由反角共軛的唯一性知 $P^* = \widehat{P}$，因此 T 為 (A, B, C, P) 的龐色列點。 ■

Example 8.1.18 (2018 ISL G4). 在三角形 ABC 的內部選一個點 T。令 A_1, B_1, C_1 分別為 T 對直線 BC, CA, AB 的反射點。記三角形 $A_1B_1C_1$ 的外接圓為 Ω。設直線 A_1T, B_1T, C_1T 分別與圓 Ω 再交於點 A_2, B_2, C_2。證明：直線 AA_2, BB_2, CC_2 共點，且其交點在 Ω 上。

Solution. 當 T 為 $\triangle ABC$ 的垂心時，我們發現 $A = A_2$, $B = B_2$, $C = C_2$，所以交出來的那個點應該要是一個對於 H 而言不太好定義的東西，那先猜是 T 關於 $\triangle ABC$ 的反角共軛 T^* 不虧。由於 $\overline{TT^*}$ 的中點，即 (A, B, C, T) 位於 T 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓上，T^* 位於 $\Omega = \odot(A_1B_1C_1)$ 上。因此由對稱性，我們只剩下證明 A, A_2, T^* 共線。

藉由 $\measuredangle CB_1A = -\measuredangle CTA = \measuredangle CT^*A$，我們得到 $T^* \in \odot(AB_1C)$。注意到 C 為 $\triangle A_1B_1T$ 的外心，因此

$$\measuredangle B_1T^*A = \measuredangle B_1CA = \measuredangle B_1A_1T = \measuredangle B_1T^*A_2,$$

即 A, A_2, T^* 共線。

Proposition 8.1.19. 給定 $\triangle ABC$。對於任意一點 P，令 $\widehat{P}$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的反角共軛。那麼 $P, \widehat{P}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 $P^*, \widehat{P}^*$ 為關於 $\odot(ABC)$ 的反演點對，也就是說，

$$\widehat{-} = \varphi^K \circ \mathfrak{I} \circ \varphi^K,$$

其中 φ^K 為關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛變換，$\mathfrak{I}$ 為關於 $\odot(ABC)$ 的反演變換。

Proof. 令 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(ABCP)$，$W_1, W_2$ 為 $\mathcal{H}$ 上的兩個無窮遠點。那麼 $\widehat{P}$ 為 P 關於 $\mathcal{H}$ 的對徑點，所以由 $\mathbf{T}_P\mathcal{H} \cap \mathbf{T}_{\widehat{P}}\mathcal{H} \in \mathcal{L}_\infty = W_1W_2$ 知 $(P\widehat{P})(W_1W_2)$ 為 $\mathcal{H}$ 上的調和四邊形。注意到 W_1, W_2 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 W_1^*, W_2^* 為（過外心 O 的直線）$P^*\widehat{P}^*$ 與 $\odot(ABC)$ 的兩個交點，因此

$$(P, \widehat{P}; W_1, W_2)_{\mathcal{H}} = (P^*, \widehat{P}^*; W_1^*, W_2^*) = -1,$$

即 $P^*, \widehat{P}^*$ 為關於 $\odot(ABC)$ 的反演點對。 ■

關於反角共軛的更多性質，見第 12.1 節。

Proposition 8.1.20. 給定任意 $\triangle ABC$，令 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，對於 $\triangle ABC$ 的任意一對等角共軛點對 (P, Q)，令 T 為 (A, B, C, P) 的龐色列點，則 T 關於 $\triangle ABC$ 的中點三角形的施坦納線為 OQ。

Proof. 令 $\triangle M_aM_bM_c$ 為 $\triangle ABC$ 的中點三角形，$\mathcal{S}$ 為 T 關於 $\triangle M_aM_bM_c$ 的施坦納線，$\mathcal{H} = \mathcal{H}(ABCP)$ 為經過 A, B, C, P 的等軸雙曲線，U 為 H 關於 $\mathcal{H}$ 的對徑點，則 $U \in \odot(ABC)$。考慮 $\triangle ABC$ 上的等角共軛變換 φ，我們有 $\varphi(U) = \infty_{OQ}$。因此由 T 關於 $\odot(M_aM_bM_c)$ 的對徑點關於 $\triangle M_aM_bM_c$ 的等角共軛點為 $\infty_{\mathcal{S}}$ 知 $\mathcal{S} \parallel OQ$，又 O 為 $\triangle M_aM_bM_c$ 的垂心，因此 $\mathcal{S} = OQ$。 ■

Proposition 8.1.21. 給定任意 $\triangle ABC$，令 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，對於 $\triangle ABC$ 的任意一對等角共軛點對 (P, Q)，令 T 為 (A, B, C, P) 的龐色列點，則 T 關於 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形的施坦納線平行於 OQ。

Proof. 令 $\triangle P_aP_bP_c$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，$\triangle M_aM_bM_c$ 為 $\triangle ABC$ 的中點三角形。由 (8.1.20) 知原命題等價於 P_aT 關於 $\angle P_bP_aP_c$ 的等角線平行於

M_aT 關於 $\angle M_bM_aM_c$ 的等角線，即

$$P_aP_b + P_aP_c - P_aT = M_aM_b + M_aM_c - M_aT.$$

注意到 $\odot(P_aM_aT)$ 為 $\triangle PBC$ 的九點圓，所以

$$\begin{aligned}\measuredangle P_aTM_a &= PB + PC - 2BC \\ &= (BC + BA - (\perp P_cP_a)) + (CA + CB - (\perp P_aP_b)) - 2BC \\ &= M_aM_b + M_aM_c - P_aP_b - P_aP_c.\end{aligned}$$ ■

事實上，一個點的佩多圓與九點圓的夾角是可以直接算的。

Theorem 8.1.22. 給定任意 $\triangle ABC$ 及一點 P，那麼 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓在 (A, B, C, P) 的龐色列點的夾角為

$$\perp \sum (AP - BC) = 90^\circ + \measuredangle(BC + CA + AB, AP + BP + CP).$$

Proof. 令 $\triangle P_aP_bP_c$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，$\triangle M_aM_bM_c$ 為 $\triangle ABC$ 的中點三角形，T 為 (A, B, C, P) 的龐色列點，則 T 位於 $\triangle PCA$ 與 $\triangle PAB$ 的九點圓上。設 L_P, L_M 分別為 T 關於 $\odot(P_aP_bP_c), \odot(M_aM_bM_c)$ 的切線，則

$$L_P = TP_b + TP_c - P_bP_c, \quad L_M = TM_b + TM_c - M_bM_c$$

由 (8.1.21) 證明中的計算，

$$\measuredangle P_bTM_b = PC + PA - 2CA, \quad \measuredangle P_cTM_c = PA + PB - 2AB,$$

因此

$$\begin{aligned}L_M - L_P &= \measuredangle P_bTM_b + \measuredangle P_cTM_c + P_bP_c - M_bM_c \\ &= (2PA + PB + PC - 2CA - 2AB) + (AB + AC - (\perp AP)) - BC \\ &= \perp (PA + PB + PC - BC - CA - AB).\end{aligned}$$ ■

那他有個推廣，但又可以說是直接推論：

Theorem 8.1.23. 給定任意 $\triangle ABC$ 與一外接等軸雙曲線 $\mathcal{H}$。令 P, Q 為 $\mathcal{H}$ 上兩點，那麼 P, Q 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓在 $\mathcal{H}$ 的中心的夾角為

$$\measuredangle(AQ + BQ + CQ, AP + BP + CP).$$

8.1.1 封騰定理

跟牛頓定理一樣，封騰定理有三個，但是複雜多了。

Theorem 8.1.24 (封騰一號/Fontené's Theorem I). 令 $\triangle M_aM_bM_c$ 為 $\triangle ABC$ 的中點三角形。對於任意一對等角共軛點對 (P, Q)，令 T 為 (A, B, C, P) 的龐色列點，$\triangle Q_aQ_bQ_c$ 為 Q 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，$R_a = Q_bQ_c \cap M_bM_c$，則 $T \in Q_aR_a$。

Proof. 令 T', Q'_a 分別為 T, Q_a 關於 M_bM_c 的對稱點，則 $T' \in \odot(\overline{AO})$ 且 $T' \in OQ$，因此有 $\measuredangle AT'Q = 90°$，即 T' 為完全四線形 (CA, AB, M_bM_c, Q_bQ_c) 的密克點。由

$$\measuredangle R_aT'Q_b = \measuredangle R_aM_bA = \measuredangle Q'_aAQ_b = \measuredangle Q'_aT'Q_b,$$

$T' \in R_aQ'_a$，關於 M_bM_c 對稱後就有 $T \in Q_aR_a$。 ■

Corollary 8.1.25. 同樣定義 R_b, R_c，則 $\triangle R_aR_bR_c$ 的垂心為 $\triangle Q_aQ_bQ_c$ 的外心，即 $\overline{PQ}$ 中點。

Proof. 注意到 $\triangle R_aR_bR_c$ 為 T 關於 $\triangle Q_aQ_bQ_c$ 的西瓦三角形，因此 $\triangle R_aR_bR_c$ 為關於 $\odot(Q_aQ_bQ_c)$ 的自共軛三角形，故 $\triangle R_aR_bR_c$ 的垂心為 $\odot(Q_aQ_bQ_c)$ 的圓心。 ■

Theorem 8.1.26 (封騰二號/Fontené's Theorem II). 給定任意 $\triangle ABC$，ℓ 為一個通過 $\triangle ABC$ 的外心的直線，Q 為 ℓ 上一動點，則 Q 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓過一定點且該定點位於 $\triangle ABC$ 的九點圓上（該定點即為 (A, B, C, P) 的龐色列點，其中 P 為 Q 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點）。

Proof. 令 P 為 Q 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，那麼 Q 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓，即 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓，經過 (A, B, C, P) 的龐色列點，而其即為 OQ 關於 $\triangle ABC$ 的中點三角形的反施坦納點，故為定點。 ■

最後是封騰三號，很多在網路上的證明是錯的。

Theorem 8.1.27 (封騰三號/Fontené's Theorem III). 給定任意 $\triangle ABC$，(P, Q) 為 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點對，則 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓相切若且唯若 PQ 通過 $\triangle ABC$ 的外心。

Proof. 令 O, H, N 分別為 $\triangle ABC$ 的外心、垂心、九點圓圓心，T_1 為 (A, B, C, P) 的龐色列點，T_2 為 (A, B, C, Q) 的龐色列點。

(⇒) 若 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓相切，那麼切點為 T_1 也為 T_2，因此 $T_1 = T_2$，故 P, Q 位於同一個 $\triangle ABC$ 的外接等軸雙曲線上，兩邊取等角共軛變換就有 $O \in PQ$。

(⇐) 設 $O \in PQ$，同樣取等角共軛變換有 $T := T_1 = T_2$，而兩圓相切等價於 M, N, T 共線，其中 M 為 $\overline{PQ}$ 中點。令 H 關於 T 的對稱點為 T'，$\mathcal{H}$ 為經過 A, B, C, P, Q 的圓錐曲線，則 $H, T' \in \mathcal{H}$ 且 T 為 $\mathcal{H}$ 的中心。令 T' 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點為 T^*，$\mathcal{S}_X$ 為 X 關於 $\triangle ABC$ 的施坦納線，那麼 $\mathcal{S}_{T^*} \parallel PQ$，所以

$$T'(A, B; C, O) = (A, B; C, T^*) = (\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B; \mathcal{S}_C, \mathcal{S}_{T^*}) = H(A, B; C, \infty_{PQ})$$

故 $D := H\infty_{PQ} \cap OT' \in \mathcal{H}$。由平行弦定理與其推論知 $\overline{HD}$ 中點位於 TM 上，將直線 OT' 關於 H 位似 1/2 倍則可得 $N \in TM$。 ■

結合 (8.1.22)，我們可以得到下面這個滿強大的結論：

Corollary 8.1.28. 給定 $\triangle ABC$，則對於任意一點 P，下列敘述等價：

(i) $\sum \measuredangle(AP, BC) = 90^\circ$；

(ii) P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓相切；

(iii) 若 Q 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，PQ 通過 $\triangle ABC$ 的外心。

事實上滿足這些等價條件的 P 的軌跡是一條三次曲線，又稱作 $\triangle ABC$ 的 McCay 三次曲線，未來會再對它有多一點的介紹。

習題

Problem 1. 設 $\triangle ABC$ 為某個等軸雙曲線 $\mathcal{H}$ 的自共軛三角形，則 $\triangle ABC$ 的內心與三個旁心 I, I^a, I^b, I^c 皆位於 $\mathcal{H}$ 上。

8.2 費爾巴哈雙曲線

這個雙曲線可以說是最常遇到的，費爾巴哈這個名字來自於下面這個定理（應該啦）：

Theorem 8.2.1 (費爾巴哈定理/Feuerbach's)**.** 給定任意 $\triangle ABC$，其九點圓與內切圓及三個旁切圓相切。

我們在 (3.3.4) 給出了一些證明，這邊就直接開上一節的定理推論來證：

Proof. 由 (8.1.28) 及 $\sum \measuredangle(AI^X, BC) = 90^\circ$ 就有內切圓及三個旁切圓與九點圓相切。 ■

回憶以下的定義：

Definition 8.2.2. 對於任意 $\triangle ABC$，我們稱其九點圓與內切圓的切點為 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈點 (**Feuerbach point**)。同樣地，對於 $X \in \{A, B, C\}$，我們定義 X-費爾巴哈點為其九點圓與 X-旁切圓的切點。

Remark. 我們可以相信，在內心上會對的性質，在某旁心上也會對 (?)。所以同樣地，在費爾巴哈點上會對的性質，在某旁費爾巴哈點上也通常會對（只要不是什麼跟距離相關的不等式之類的）。因此之後看到的定理或性質就只考慮費爾巴哈點與內心它們兩點的情形。

以下假設 I, G, O, H, N, Fe 分別為 $\triangle ABC$ 的內心、重心、外心、垂心、九點圓圓心及費爾巴哈點。

由於 (A, B, C, P) 的龐色列點位於 $\triangle ABC$ 的九點圓及 P 的佩多圓上，我們有：

Proposition 8.2.3. 點 Fe 為 (A, B, C, I) 的龐色列點。

這樣就可以進到我們的主題了。

Definition 8.2.4. 我們稱通過 A, B, C, I 的等軸雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe} = \mathcal{H}(ABCI)$ 為 $\triangle ABC$ 的**費爾巴哈雙曲線** (**Feuerbach hyperbola**)，其中 I 為 $\triangle ABC$ 的內心。類似地，我們可以定義 $\triangle ABC$ 的 A, B, C-費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe_a}$, $\mathcal{H}_{Fe_b}$, $\mathcal{H}_{Fe_c}$。

注意到等角共軛變換為等共軛變換，因此有：

Proposition 8.2.5. 集合對 $(\mathcal{H}_{Fe}, OI)$ 為一對（關於 $\triangle ABC$ 的）等角共軛集合對。

Corollary 8.2.6. 令 X_{104} 為 H 關於 Fe 的對稱點，即 $\mathcal{H}_{Fe}$ 與外接圓 Ω 的第四個交點，則 (X_{104}, ∞_{OI}) 為一對等角共軛點對。因此我們經常以 ∞_{OI}^* 來記 X_{104}。

Proposition 8.2.7. 令 F_I, F_O 分別為 I, O 關於 BC 的垂足，$e = OI \cap BC$。設 I_e, O_e 分別為 e 關於 AI, AO 的垂足，那麼 $Fe = F_I I_e \cap F_O O_e$。

事實上，我們有以下推廣：

Proposition 8.2.8. 令 P 為任意一點，Q 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，T 為 (A, B, C, Q) 的龐色列點。設 T_P, T_O 分別為 P, O 關於 BC 的垂足，e 為 OP 與 BC 的交點。若 P_e, O_e 分別為 e 關於 AP, AO 的垂足，那麼

$$\triangle APO \overset{+}{\sim} \triangle TT_PT_O$$

且 $T = T_P P_e \cap T_O O_e$。

Proof. 令 T, T_P, T_O 關於平行於 BC 的中位線的對稱點分別為 T', T'_P, T'_O，則由封騰一號的證明知 $T' \in OP$ 且 A, P, T', T'_P 及 A, O, T', T'_O 分別共圓，故

$$\measuredangle OPA = \measuredangle T'T'_PA = \measuredangle T_OT_PT,\ \measuredangle AOP = \measuredangle AT'_OT' = \measuredangle TT_OT_P$$

因此 $\triangle APO \overset{+}{\sim} \triangle TT_PT_O$。注意到 P, T_P, e, P_e 及 O, T_O, e, O_e 分別共圓，所以

$$\measuredangle TT_Pe = \measuredangle APO = \measuredangle P_ePe = \measuredangle P_eT_Pe$$

所以 $T \in T_PP_e$，同理有 $T \in T_OO_e$ ■

從上方的證明我們還可以看出以下的事實：

Proposition 8.2.9. 令 OP 分別交 BC, CA, AB 於 D, E, F，則

$$\measuredangle ATD = \measuredangle BTE = \measuredangle CTF = 90^\circ.$$

Proof. 同樣令 T 關於平行於 BC 的中位線的對稱點為 T'，則 T' 為 A 關於 OP 的垂足，所以 $T' \in \odot(\overline{AD})$，由 $\overline{AD}$ 中點位於平行於 BC 的中位線上知 $T \in \odot(\overline{AD})$，同理有 $T \in \odot(\overline{BE}), \odot(\overline{CF})$。 ■

所以說 OP 是 T 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線。換句話說，我們可以大致了解九點圓上的點的正交截線了。由 (8.2.9) 的證明，我們可以直接得到：

Corollary 8.2.10. 直線 HT 為完全四線形 $\triangle ABC \cup OP$ 的施坦納線（垂心線）。

我們回到內心的情形。由 (7.1.16)，我們可以得到以下推論：

Corollary 8.2.11. 令 K 為一條直線，$\triangle K^aK^bK^c$ 為 K 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形，若 $\triangle M_aM_bM_c$ 為 $\triangle ABC$ 的中點三角形，則

$$K,\ K^a,\ K^b,\ K^c,\ M_bM_c,\ M_cM_a,\ M_aM_b$$

七線切一拋物線。

證明就取其中一線為無窮遠線即可。直接套在 K 為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 的透視軸就有：

Corollary 8.2.12. 令 $\triangle DEF$ 為切點三角形，X, Y, Z 分別為

$$EF \cap BC,\ FD \cap CA,\ DE \cap AB,$$

則 $\triangle DEF \cup \overline{XYZ} \cup \triangle M_aM_bM_c$ 共密克點且該點為 Fe，其垂心線為 OI。

讓我們再回到費爾巴哈雙曲線，注意到外接圓 Ω 與內切圓 ω 的內位似中心 X_{55} 及外位似中心 X_{56} 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點分別為熱爾岡點 Ge 及 $\triangle ABC$ 的奈格爾點 Na，因此有：

Proposition 8.2.13. 兩點 $Ge, Na \in \mathcal{H}_{Fe}$，且

$$(H, I; Na, Ge)_{\mathcal{H}_{Fe}} = -1.$$

Proposition 8.2.14. 直線 OI 與 $\mathcal{H}_{Fe}$ 相切。

這性質有個推廣：

Proposition 8.2.15. 令 φ 為 $\triangle ABC$ 的點等共軛變換，且 S 為 φ 的不動點，那麼對於任意過 A, B, C, S 的（非退化）圓錐曲線 $\mathcal{C}$，$\mathbf{T}_S\mathcal{C} = \varphi(\mathcal{C})$。

Proof. 假設 $\varphi(\mathcal{C})$ 不與 $\mathcal{C}$ 相切，則有另一個交點 $P \neq S$，那麼

$$\varphi(P) \in \varphi(\mathcal{C} \cap \varphi(\mathcal{C})) \subset \varphi(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C} = \{P, S\}.$$

但 $\varphi(S) = S$，所以 $\varphi(P) = P$，那麼我們有 PS 過 $\triangle ABC$ 的某個頂點，這與 $\mathcal{C}$ 是非退化的矛盾。 ■

這個性質的對偶版本當然也是對的。結合兩個性質就得到 (5.6.3)：

Corollary 8.2.16. 令 L 為 H 關於 O 的對稱點，即 $\triangle ABC$ 的 de Longchamps 點，則 I, Ge, L 共線。

Proof. 注意到 I, Na, G 共線，所以有

$$I(H,O;G,L)=-1=(H,I;Na,Ge)_{\mathcal{H}_{Fe}}=I(H,O;G,IGe\cap\mathcal{E}),$$

因此 I, Ge, L 共線。 ■

這個推論是梁-澤利克定理 (11.4.4) 的特例。

Example 8.2.17 (2000 IMO P6). 令 AH_1, BH_2, CH_3 分別為銳角三角形 ABC 的高。其內切圓分別切三邊 BC, CA, AB 於 T_1, T_2, T_3。考慮 H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 分別關於直線 T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 的對稱線。證明由這些直線所構成的三角形其頂點位於 ABC 的內切圓上。

Solution. 考慮 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$。注意到 H_2H_3, T_2T_3 分別為 H_1, T_1 關於 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的極線，$U_1:=H_2H_3\cap T_2T_3$ 為 $BC=H_1T_1$ 關於 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的極點。令 ℓ_i 為 $H_{i+1}H_{i+2}$ 關於 $T_{i+1}T_{i+2}$ 的對稱線，那麼由 B, C, H_2, H_3 共圓，

$$\ell_1=2\cdot T_2T_3-H_2H_3=(AB+AC)-(CA+AB-BC)=BC,$$

即 ℓ_1 平行於 BC。

因為 BU_1, CU_1 皆與 $\mathcal{H}_{Fe}$ 相切，所以過 U_1 且與 BC 平行的直線 ℓ_1 為 $\overline{BC}$ 中點 M_1 關於 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的極線。由對稱性，這件事把 1 改成 2, 3 也是對的，故 $\ell_2\cap\ell_3$ 為中位線 M_2M_3 關於 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的極點 P_1，而我們只需要證明 P_1 落在內切圓上。

由封騰一號 (8.1.24)，T_1Fe, M_2M_3, T_2T_3 共點。把這個命題關於 $\mathcal{H}_{Fe}$ 配極就得到 $\infty_{T_2T_3}$, P_1, T_1 共線。由平行弦定理 (7.1.13)，Fe, P_1, M_1 共線。故 P_1 為 $T_1\infty_{T_2T_3}$ 與 FeM_1 的交點。

令 P_1' 為 FeM_1 與內切圓的第二個交點，則由 (8.2.8)，

$$\measuredangle M_1T_1P_1'=\measuredangle T_1FeM_1=\measuredangle IAO=\measuredangle(BC,\perp AI)=\measuredangle(M_1T_1,T_2T_3),$$

即 $P_1'=FeM_1\cap T_1\infty_{T_2T_3}=P_1$。故 P_1 位於內切圓上。

因為 $O\times H=Na\times Na^*$ 且 $ONa^*\cap HNa=\infty_{OI}$，所以結合 (7.4.5) 我們得到：

Proposition 8.2.18. 點 ∞_{OI}^* 為 ONa 與 HNa^* 的交點。

習題

Problem 1. 證明四個費爾巴哈點共圓。

Problem 2. 設 X 為 $\triangle ABC$ 的 A-偽內切圓與 $\odot(ABC)$ 的切點，Fe 為 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈點。證明：$AX \perp BC$ 若且唯若 A, Fe, X 共線。

Problem 3 (2015 全國賽 P3)**.** 令 $\triangle DEF$ 為切點三角形，$\triangle D_tE_tF_t$ 為 $\triangle DEF$ 在位似變換 $\mathfrak{h}_{I,t}$ 下的像。證明：AD_t, BE_t, CF_t 共於一點 I_t，並且當 t 變動時，I_t 的軌跡為 $\mathcal{H}_{Fe}$。

這提供了另一個證明 $Ge = I_1, Na = I_{-1} \in \mathcal{H}_{Fe}$ 的方法。

Problem 4. 給定兩點 O_1, O_2，Ω_1, Ω_2 分別為以 O_1, O_2 為圓心，$\overline{O_1O_2}$ 為半徑的圓。在 Ω_2 外取一點 $A \in \Omega_1$，過 A 作關於 Ω_2 的兩條切線 AT_b, AT_c 分別交 Ω_1 於 B, C 兩點。設 $\triangle ABC$ 的垂心為 H，H 關於 BC 的對稱點為 D，OD 交 BC 於 E，若 M, F 分別為 $\overline{BC}, \overline{AH}$ 的中點，證明：T_bT_c 與 $\odot(DFM)$ 相切。

Problem 5. 設三角形 ABC 的外接圓為 Γ，外心為 O，A-旁心為 I^a。令 $\overline{OI^a}$ 交 Γ 於 K，K 關於 CA, AB 的垂足分別為 E, F。證明：EF 與 OI^a 交於三角形 ABC 的 A-旁切圓上。

Problem 6 (2017 CMO)**.** 令 $\odot(O), \odot(I)$ 分別為銳角三角形 ABC 的外接圓與內切圓。B, C 關於 $\odot(O)$ 的切線交於 L，$\odot(I)$ 與 BC 切於 D。Y 為 A 關於 BC 的垂足，AO 與 BC 交於 X，OI 與 $\odot(O)$ 交於 P, Q。證明：P, Q, X, Y 共圓若且唯若 A, D, L 共線。

Problem 7. 令 ℓ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線，$\mathcal{H}$ 為經過 A, B, C, P 的等軸雙曲線。證明：$\mathbf{T}_P\mathcal{H} \perp \ell$。

8.3 Kiepert 雙曲線

在討論這個雙曲線之前，我們先回憶等角點與等力點的定義。另外在這章，我們都以同樣的記號表示相同的點，不再重複定義。

Definition 8.3.1. 給定 $\triangle ABC$。取兩點 F_1, F_2 使得

$$\measuredangle BF_iC = \measuredangle CF_iA = \measuredangle AF_iB = -i \cdot 60^\circ.$$

我們稱 F_1 為 $\triangle ABC$ 的第一等角點，F_2 為 $\triangle ABC$ 的第二等角點。這兩個點分別為 X_{13}, X_{14}。

Definition 8.3.2. 給定 $\triangle ABC$。令 S_1, S_2 為三個阿波羅尼奧斯圓 $\Gamma_A^{B,C}, \Gamma_B^{C,A}, \Gamma_C^{A,B}$（見第 3.4 節）的兩個交點，其中 S_1 位於 $\odot(ABC)$ 內，S_2 位於 $\odot(ABC)$ 外。我們稱 S_1 為 $\triangle ABC$ 的第一等力點，S_2 為 $\triangle ABC$ 的第二等力點。這兩個點分別為 X_{15}, X_{16}。

另一個等角點的等價定義是 (3.4.9)：

Definition 8.3.3. 給定 $\triangle ABC$，分別以 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 為邊長向 $\triangle ABC$ 外（內）側作正三角形 $\triangle A_{1(2)}BC, \triangle B_{1(2)}CA, \triangle C_{1(2)}AB$，則第一（二）等角點 $F_1(F_2)$ 為 $AA_{1(2)}, BB_{1(2)}, CC_{1(2)}$ 所共的點。

由定義，我們有：

Proposition 8.3.4 (Kiepert's)**.** 五點 A, B, C, F_1, F_2 共等軸雙曲線 $\mathcal{H}_K$，且 $\overline{F_1F_2}$ 為 $\mathcal{H}_K$ 的直徑。

Proof. 注意到我們有 $\measuredangle BF_1C + \measuredangle BF_2C = 0^\circ$ 及其輪換式，因此 F_1, F_2 為關於 $\triangle ABC$ 的反角共軛點對，再由龐色列點的性質 (8.1.17) 知原命題成立。 ■

當然這個雙曲線就直接稱為 $\triangle ABC$ 的 **Kiepert 雙曲線**了。在接下來的幾個性質中，我們令 $i \in \{1, 2\}$。由於 F_i, S_i 為 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，所以等

軸雙曲線 $\mathcal{H}_K$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡為直線 S_1S_2，稱為 $\triangle ABC$ 的**布洛卡軸** (**Brocard axis**)。(更多關於布洛卡的性質，見第 8.3.1 小節。)

Proposition 8.3.5. 對於任意角度 θ，分別取 $A_\theta, B_\theta, C_\theta$ 滿足

$$\measuredangle A_\theta BC = \measuredangle BCA_\theta = \measuredangle B_\theta CA = \measuredangle CAB_\theta = \measuredangle C_\theta AB = \measuredangle ABC_\theta = \theta.$$

那麼 $AA_\theta, BB_\theta, CC_\theta$ 共於一點 K_θ，且一點 $K \in \mathcal{H}_K$ 若且唯若 $K = K_\theta$ 對於某個 θ。

Proof. 令 $K_\theta = BB_\theta \cap CC_\theta$。當 $\theta = \pm 60^\circ$ 時，$K_\theta = F_1, F_2$；當 $\theta = 90^\circ$ 時，K_θ 為垂心 H。因此 K_θ 的軌跡為過 B, C, F_1, F_2, H 的圓錐曲線，即 $\triangle ABC$ 的 Kiepert 雙曲線 $\mathcal{H}_K$，所以也過 A。同理，我們也有 $CC_\theta \cap AA_\theta \in \mathcal{H}_K$，因此 $AA_\theta, BB_\theta, CC_\theta$ 共於 $\mathcal{H}_K$ 上。 ■

所以在 Kiepert 雙曲線上，我們其實可以把每個點都用一個角度 (θ) 寫出來，比方說 $G = K_{0^\circ}$, $H = K_{90^\circ}$, $F_1 = K_{60^\circ}$, $F_2 = K_{-60^\circ}$，其中 G, H 分別為 $\triangle ABC$ 的重心及垂心。

Proposition 8.3.6. 對於任意 θ，我們有 $(K_\theta, K_{-\theta}; H, G)_{\mathcal{H}_K} = -1$。

Proof. 注意到 A_0 為 $\overline{BC}$ 中點，所以是 $\overline{A_\theta A_{-\theta}}$ 中點，$A_{90^\circ} = \infty_{\perp BC}$，所以

$$(K_\theta, K_{-\theta}; H, G)_{\mathcal{H}_K} \overset{A}{=} (A_\theta, A_{-\theta}; A_0, A_{90^\circ}) = -1.$$ ■

取 $\theta = 60^\circ$ 會有 $(F_1F_2)(HG)$ 為 $\mathcal{H}_K$ 上的調和四邊形，此外：

Corollary 8.3.7. 直線 F_1F_2 平分 $\overline{GH}$。

Proof. 由於 $(F_1F_2)(HG)$ 為 $\mathcal{H}_K$ 上的調和四邊形，所以

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(GH) = \mathbf{T}_G\mathcal{H}_K \cap \mathbf{T}_H\mathcal{H}_K \in F_1F_2$$

又 F_1F_2 經過 $\mathcal{H}_K$ 的中心，所以由 (7.1.14) 知 F_1F_2 平分 $\overline{GH}$。 ■

再來的性質會用到梁-澤利克定理 (11.4.4)，是第五章的東西，可以等看完那邊再回來補這邊。以下令 $\mathcal{E}$ 為 $\triangle ABC$ 的歐拉線。

Proposition 8.3.8. 令 $\theta \in [-\pi/2, \pi/2)$，我們有

$$t(A_\theta) = t(B_\theta) = t(C_\theta) = -\frac{1}{2\cos 2\theta}.$$

Proof. 由對稱性知只需證明 A_θ 的情況。令 $\triangle O_aO_bO_c$ 為 A_θ 關於 $\triangle ABC$ 的卡諾三角形，$\triangle O_AO_BO_C$ 為 $\triangle O_aO_bO_c$ 關於 A_θ 位似 $-2\cos 2\theta$ 下的像，那麼 O_A 為 $\triangle A_\theta BC$ 的垂心。由 $O_AO_B \parallel O_aO_b \perp A_\theta C \perp O_AB$ 知 $O_A \in BO_B$，同理有 $O_A \in CO_C$，所以 AO_A, BO_B, CO_C 共點於 O_A，因此

$$t(A_\theta) = -\frac{1}{2\cos 2\theta}. \qquad \blacksquare$$

令 $A_\theta^*, B_\theta^*, C_\theta^*, K_\theta^*$ 分別為 $A_\theta, B_\theta, C_\theta, K_\theta$ 的等角共軛點，顯然地，我們有 A, A_θ, K_θ、A, B_θ, C_θ^*、A, B_θ^*, C_θ 及 $A, A_\theta^*, K_\theta^*$ 以及輪換的共 12 組共線，所以有：

Theorem 8.3.9. 同 (8.3.5) 中的標號，我們有

$$t(K_\theta) = -\frac{1}{2\cos 2\theta}.$$

特別地，$t(F_i) = 1$。

Proof. 令 $t_0 = -(2\cos 2\theta)^{-1}$，$T \in \mathcal{E}$ 滿足 $t(T) = t_0$，那麼我們有 $T \in B_\theta B_\theta^* \cap C_\theta C_\theta^*$，注意到 $\triangle BB_\theta^*C_\theta$ 與 $\triangle CC_\theta^*B_\theta$ 的透視軸為 $AA_\theta^*K_\theta^*$，所以由迪沙格定理知 $BC, B_\theta C_\theta, B_\theta^*C_\theta^*$ 共點。因為 $B = K_\theta B_\theta \cap K_\theta^*B_\theta^*, C = C_\theta K_\theta \cap C_\theta^*K_\theta^*$，所以由迪沙格定理及 $B_\theta C_\theta, B_\theta^*C_\theta^* \in BC$ 知 $\triangle K_\theta B_\theta C_\theta$ 與 $\triangle K_\theta^*B_\theta^*C_\theta^*$ 透視，即 $T \in K_\theta K_\theta^*$，因此

$$t(K_\theta) = -\frac{1}{2\cos 2\theta}. \qquad \blacksquare$$

Proposition 8.3.10. 對於任意角度 α, β, γ，$K_\alpha, K_\beta, K_\gamma^*$ 共線若且唯若

$$\alpha + \beta + \gamma = 0^\circ.$$

Proof. 令 AK_α^* 交 $\mathcal{H}_K$ 於 K_{α_A}，那麼 $\alpha_A + \alpha = \measuredangle BAC$。同 (8.3.9) 的證明可得 $K_\alpha K_{\alpha_A} \cap K_\alpha^* K_{\alpha_A}^* = K_\alpha K_{\alpha_A} \cap OK \in BC$。我們類似定義 α_B, α_C，同樣有 $K_\alpha K_{\alpha_B} \cap OK \in CA, K_\alpha K_{\alpha_C} \cap OK \in AB$，令 OK 分別與 BC, CA, AB 交於 $D,$

E, F，$K^*_{\gamma'} = K_\alpha K_\beta \cap OK$，那麼

$$\begin{aligned}(D, E; F, K^*_{\gamma'}) &\overset{K_\alpha}{=} (K_{\alpha_A}, K_{\alpha_B}; K_{\alpha_C}, K_\beta) = (A_{\alpha_A}, A_{\alpha_B}; A_{\alpha_C}, A_\beta) \\ &= (A_{-\measuredangle BAC}, A_{-\measuredangle CBA}; A_{-\measuredangle ACB}, A_{-\alpha-\beta}) = (D, E; F, K^*_{-\alpha-\beta}),\end{aligned}$$

所以 $\alpha + \beta + \gamma' = 0^\circ$，故 $K_\alpha, K_\beta, K^*_\gamma$ 共線若且唯若 $\alpha + \beta + \gamma = 0^\circ$。 ■

取 $\alpha = \beta = \theta, \gamma = -2\theta$，我們得到：

Corollary 8.3.11. 直線 $K_\theta K^*_{-2\theta}$ 與 $\mathcal{H}_K$ 相切於 K_θ。

Corollary 8.3.12. 對於任意 θ，我們有 $K^*_{-2\theta} = \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(K_\theta K_{\theta+90^\circ})$。特別地，$K$ 為 GH 關於 $\mathcal{H}_K$ 的極點。

換句話說，我們可以知道 OK 上一點關於 $\mathcal{H}_K$ 的極線。結合這些上面性質我們就可以證明下面這個定理了。

Theorem 8.3.13 (Kiepert 雙曲線基本性質)**.** 令 N 為 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心，$T_\theta = \mathcal{E} \cap K_\theta K^*_\theta, P_\theta := K_\theta K^*_{-2\theta} \cap K_{-\theta} K^*_{2\theta}$，對於任意 θ，我們有：

(i) $G = K_\theta K^*_{-\theta} \cap K^*_\theta K_{-\theta}$；

(ii) $K = K_\theta K_{-\theta} \cap K^*_\theta K^*_{-\theta}$；

(iii) $N \in K_\theta K_{\theta+90^\circ}$；

(iv) $T_\theta = K_\theta K^*_\theta \cap K_{-\theta} K^*_{-\theta}$；

(v) $P_\theta \in \mathcal{E}$。

Proof. 我們依序證明命題 (i), (ii), (iii), (iv), (v)。

(i) 在 (8.3.10) 中取 $\alpha = 0, \beta = \pm\theta$，那麼 $G \in K_\theta K^*_{-\theta} \cap K^*_\theta K_{-\theta}$。

(ii) 在 (8.3.10) 中取 $\alpha = \pm\theta, \beta = \mp\theta$，那麼 $K \in K_\theta K_{-\theta} \cap K^*_\theta K^*_{-\theta}$。

(iii) 因為 $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(K_\theta K_{\theta+90^\circ}) = K_{2\theta} \in OK$，所以 $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(OK) \in K_\theta K_{\theta+90^\circ}$。取 $\theta = 0^\circ$，我們有 $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(OK) \in \mathcal{E}$，而 $O \in \mathcal{E}$，所以

$$(G, H; O, \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(OK)) = -1,$$

故 $N = \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(OK)$。

(iv) 注意到
$$t(K_\theta) = -\frac{1}{2\cos(2\theta)} = -\frac{1}{2\cos(-2\theta)} = t(K_{-\theta}),$$
所以 $T_\theta = \mathcal{E} \cap K_\theta K_\theta^* \in K_{-\theta}K_{-\theta}^*$。

(v) 因為 $K_{\pm\theta}K_{\mp 2\theta}^* = \mathbf{T}_{K_{\pm\theta}}\mathcal{H}_K$，且 $K_\theta H K_{-\theta} G$ 為 $\mathcal{H}_K$ 上的調和四邊形，所以 $P_\theta = \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(K_\theta K_{-\theta}) \in GH$。 ■

Example 8.3.14 (等角等力基本性質)**.** 取 $\theta = \pm 60^\circ$，結合前面的性質，我們有：

(i) $G = F_1S_2 \cap F_2S_1$, $K = F_1F_2 \cap S_1S_2$, $F_1S_1 \parallel F_2S_2 \parallel \mathcal{E}$；

(ii) F_1, F_2, O, N 共圓 (Lester 圓)；

(iii) GK 為 $\triangle GF_1F_2$ 的共軛中線，

還可以得到直線 F_iS_i 與 $\mathcal{H}_K$ 相切。

Example 8.3.15. 除了等角點外，$\mathcal{H}_K$ 上重要的還有維田點 ($V_1 = K_{45^\circ}$, $V_2 = K_{-45^\circ}$)，它甚至有出現在 ISL 裡面 (2001 ISL G1)。我們有：

(i) O 是 V_1V_2 關於 $\mathcal{H}_K$ 的極點；

(ii) $V_1V_2 = NK$；

(iii) $H = V_1V_1^* \cap V_2V_2^*$。

注意到 $[T_\theta \mapsto P_\theta] \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$，所以他的位置其實是可以算的 (?)。事實上我們有：

Proposition 8.3.16. 對於任意 θ，我們有 $T_\theta G = 2 \cdot GP_\theta$，故
$$OP_\theta = 2\cos 2\theta \cdot P_\theta N.$$

如果定義 $Q_\theta = K_\theta K_{-\theta} \cap \mathcal{E}$，那麼同樣有 $[P_\theta \mapsto Q_\theta] \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$，所以：

Proposition 8.3.17. 對於任意 θ，$3 \cdot NQ_\theta = 2\cos 2\theta \cdot Q_\theta O$。

8.3.1 布洛卡

這邊稍微離題，補充一下前面提到的布洛卡。

Proposition 8.3.18. 給定 $\triangle ABC$，存在恰兩點 Br_1, Br_2 使得

$$\measuredangle BABr_1 = \measuredangle CBBr_1 = \measuredangle ACBr_1, \quad \measuredangle Br_2AC = \measuredangle Br_2BA = \measuredangle Br_2CB,$$

稱為 $\triangle ABC$ 的**第一布洛卡點** (**first Brocard point**) 與**第二布洛卡點** (**second Brocard point**)。此時，Br_1, Br_2 為關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對。

Proof. 若這樣的 Br_1 存在，則由 $\measuredangle CBBr_1 = \measuredangle ACBr_1$ 知 $\odot(BBr_1C)$ 與 CA 相切。類似地，$\odot(CBr_1A)$ 與 AB 相切，$\odot(ABr_1B)$ 與 BC 相切。因此，如果令 Ω_{A1} 為過 B, C 且與 CA 相切的圓，並類似地定義 Ω_{B1}, Ω_{C1}，則 Br_1 為三圓 $\Omega_{A1}, \Omega_{B1}, \Omega_{C1}$ 的交點。由於

$$(B-C)_{\Omega_{A1}} + (C-A)_{\Omega_{B1}} + (A-B)_{\Omega_{C1}} = \measuredangle BCA + \measuredangle CAB + \measuredangle ABC = 0^\circ,$$

我們得到 $\Omega_{A1}, \Omega_{B1}, \Omega_{C1}$ 共於一點，即所求的 Br_1。類似地，我們可以定義 $\Omega_{A2}, \Omega_{B2}, \Omega_{C2}$，並證明 $\Omega_{A2}, \Omega_{B2}, \Omega_{C2}$ 共於一點 Br_2。

由於 Br_1 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 Br_1^* 滿足

$$\measuredangle Br_1^*AC = \measuredangle Br_1^*BA = \measuredangle Br_1^*CB,$$

因此由 Br_2 的唯一性知 $Br_1^* = Br_2$。 ■

從角元西瓦的角度來看，我們就是要找到 θ 使得

$$\frac{\sin\theta}{\sin(\alpha-\theta)} \cdot \frac{\sin\theta}{\sin(\beta-\theta)} \cdot \frac{\sin\theta}{\sin(\gamma-\theta)} = 1,$$

其中 $\alpha = \measuredangle BAC, \beta = \measuredangle CBA, \gamma = \measuredangle ACB$，這個角 θ 被稱作 $\triangle ABC$ 的**布洛卡角** (**Brocard angle**)。當 $\theta = 0^\circ$ 時，左側為 0；當 $\theta = \min\{\alpha,\beta,\gamma\}^-$ 時，左側為 $+\infty$，所以（由中間值定理）我們知道解 $\theta \in (0^\circ, \min\{\alpha,\beta,\gamma\})$。換句話說，$Br_1, Br_2$ 皆位於 $\triangle ABC$ 內。

另外，在上面的證明，我們用到了切圓 $\Omega_{Ai}, \Omega_{Bi}, \Omega_{Ci}$。它們之間的交點是有名字的：

Definition 8.3.19. 令 P_A 為 Ω_{B2} 與 Ω_{C1} 異於 A 的交點，Q_A 為 Ω_{B1} 與 Ω_{C2} 異於 A 的交點。我們稱 P_A 為 $\triangle ABC$ 的 ***A*-Humpty 點**，Q_A 為 $\triangle ABC$ 的 ***A*-Dumpty 點**。類似地，我們可以定義 $\triangle ABC$ 的 B, C-Humpty 點 P_B, P_C 與 Dumpty 點 Q_B, Q_C。

由於

$$\measuredangle CP_AA + \measuredangle CQ_AA = \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = \measuredangle CBA,$$
$$\measuredangle AP_AB + \measuredangle AQ_AB = \measuredangle ABC + \measuredangle CAB = \measuredangle ACB,$$

透過 (1.3.6) 我們得到：

Proposition 8.3.20. $\triangle ABC$ 的 A-Humpty 點 P_A 與 A-Dumpty 點 Q_A 為關於 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點。

Proposition 8.3.21. 令 H, G, P_A 分別為 $\triangle ABC$ 的垂心、重心及 A-Humpty 點，則 B, C, H, P_A 共圓且 P_A 為 H 關於 AG 的垂足。

Proof. 由於

$$(C-B)_{\odot(BHC)} + (A-C)_{\Omega_{B2}} + (B-A)_{\Omega_{C1}} = (-\measuredangle BAC) + \measuredangle BCA + \measuredangle ABC = 0^\circ,$$

我們有 $P_A \in \odot(BHC)$。

令 G_A 為一點使得 $(AG_A)(BC)$ 為平行四邊形，則 $G_A \in \odot(BHC)$ 且 A, G, G_A 共線。由

$$\measuredangle BP_AG_A = \measuredangle BCG_A = \measuredangle CBA = \measuredangle BP_AA,$$

我們得到 A, P_A, G_A 共線。結合 $\measuredangle HP_AG_A = \measuredangle HBG_A = 90^\circ$，我們得到 P_A 為 H 關於 $P_AG_A = AG$ 的垂足。 ■

Proposition 8.3.22. 令 O, K, Q_A 分別為 $\triangle ABC$ 的外心、共軛重心及 A-Dumpty 點，則 B, C, O, Q_A 共圓且 Q_A 為 O 關於 AK 的垂足。

Proof. 基本上與前一個性質的證明類似。由於

$$(C-B)_{\odot(BOC)}+(A-C)_{\Omega_{B1}}+(B-A)_{\Omega_{C2}}=2\cdot\measuredangle BAC+\measuredangle CAB+\measuredangle CAB=0^\circ,$$

我們有 $Q_A\in\odot(BOC)$。

令 K_A 為 B 關於 $\odot(ABC)$ 的切線與 C 關於 $\odot(ABC)$ 的切線的交點，則 $K_A\in\odot(BOC)$ 且 A, K, K_A 共線。由

$$\measuredangle BQ_AK_A=\measuredangle BCK_A=\measuredangle BAC=\measuredangle BQ_AA,$$

我們得到 A, Q_A, K_A 共線。結合 $\measuredangle OQ_AK_A=\measuredangle OBK_A=90^\circ$，我們得到 Q_A 為 O 關於 $Q_AK_A=AK$ 的垂足。 ■

Theorem 8.3.23. 令 O, K, Br_1, Br_2 分別為 $\triangle ABC$ 的外心、共軛重心及兩個布洛卡點，$Br_A=BBr_1\cap CBr_2$, $Br_B=CBr_1\cap ABr_2$, $Br_C=ABr_1\cap BBr_2$，Q_A, Q_B, Q_C 分別為 $\triangle ABC$ 的 A, B, C-Dumpty 點。則 $O, K, Br_1, Br_2, Br_A, Br_B, Br_C, Q_A, Q_B, Q_C$ 十點共圓且 $\overline{OK}$ 為其直徑。這個圓被稱作 $\triangle ABC$ 的**布洛卡圓** (**Brocard circle**)。

Proof. 由於 ABr_1, ABr_2 為關於 $\angle BAC$ 的等角線，

$$\measuredangle Br_ABC=\measuredangle Br_1BC=\measuredangle Br_1AB=\measuredangle CABr_2=\measuredangle BCBr_2=\measuredangle BCBr_A,$$

即 Br_A 位於 $\overline{BC}$ 的中垂線上。類似地，Br_B 位於 $\overline{CA}$ 的中垂線上；Br_C 位於 $\overline{AB}$ 的中垂線上。所以由 $Br_1\in\Omega_{C1}$, $Br_2\in\Omega_{B2}$，我們得到

$$\measuredangle Br_BBr_1Br_C=\measuredangle Br_BBr_1Br_C=\measuredangle Br_BOBr_C=\measuredangle CAB,$$

即 $O, Br_1, Br_2, Br_B, Br_C$ 五點共圓。類似地，我們得到 $O, Br_1, Br_2, Br_C, Br_A$ 五點共圓。因此 $O, Br_1, Br_2, Br_A, Br_B, Br_C$ 共於一圓 Γ_{Br}。

由於 Q_A 為 Ω_{B1} 與 Ω_{C2} 的第二個交點，

$$\begin{aligned}\measuredangle Br_1Q_ABr_2&=\measuredangle Br_1Q_AA+\measuredangle AQ_ABr_2=\measuredangle Br_1CA+\measuredangle ABBr_2\\&=\measuredangle Br_1BC+\measuredangle BCBr_2=\measuredangle Br_1Br_ABr_2,\end{aligned}$$

故 $Q_A\in\Gamma_{Br}$。同理，$Q_B, Q_C\in\Gamma_{Br}$。

最後，(8.3.22) 告訴我們 Q_B, Q_C 分別為 O 關於 BK, CK 的垂足，所以 O, K, Q_B, Q_C 共圓且 $\overline{OK}$ 為其直徑，故 $\overline{OK}$ 為 Γ_{Br} 的直徑。 ■

Corollary 8.3.24. 令 O, K, Br_1, Br_2 分別為 $\triangle ABC$ 的外心、共軛重心及兩個布洛卡點，則 OK 為 $\overline{Br_1Br_2}$ 的中垂線。

Proof. 令 $Br_A = BBr_1 \cap CBr_2$，我們有 O, K, Br_1, Br_2, Br_A 共圓且 $\overline{OK}$ 為其直徑。由於 Br_A 位於 $\overline{BC}$ 的中垂線上，

$$\begin{aligned}\measuredangle Br_2Br_1O = \measuredangle Br_2Br_AO &= \measuredangle(CBr_A, \perp BC)\\ &= \measuredangle(\perp BC, BBr_A) = \measuredangle OBr_ABr_1 = \measuredangle OBr_2Br_1,\end{aligned}$$

即 $\triangle OBr_1Br_2$ 為等腰三角形且頂角為 O。因為 K 為 O 關於 $\odot(OBr_1Br_2)$ 的對徑點，所以 OK 為 $\overline{Br_1Br_2}$ 的中垂線。 ■

Proposition 8.3.25. 令 $\triangle Br_{1a}Br_{1b}Br_{1c}, \triangle Br_{2a}Br_{2b}Br_{2c}$ 分別為 $\triangle ABC$ 的兩個布洛卡點 Br_1, Br_2 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形。則

$$\triangle Br_{1c}Br_{1a}Br_{1b} \overset{+}{\cong} \triangle Br_{2b}Br_{2c}Br_{2a} \overset{+}{\sim} \triangle ABC.$$

Proof. 我們有

$$\measuredangle Br_{1b}Br_{1a}Br_{1c} = \measuredangle ACBr_1 + \measuredangle Br_1BA = \measuredangle CBBr_1 + \measuredangle Br_1BA = \measuredangle CBA.$$

類似地，$\measuredangle Br_{1c}Br_{1b}Br_{1a} = \measuredangle ACB, \measuredangle Br_{1a}Br_{1c}Br_{1b} = \measuredangle BAC$。因此

$$\triangle Br_{1c}Br_{1a}Br_{1b} \overset{+}{\sim} \triangle ABC.$$

同理，我們有 $\triangle Br_{2b}Br_{2c}Br_{2a} \overset{+}{\sim} \triangle ABC$。

最後，因為 $\triangle Br_{1c}Br_{1a}Br_{1b}$ 及 $\triangle Br_{2b}Br_{2c}Br_{2a}$ 共外接圓，所以兩者相似比為 1，即全等。 ■

Proposition 8.3.26. 延續 (8.3.25) 的標號。令 Br_1^* 為 Br_1 關於 $\triangle Br_{1a}Br_{1b}Br_{1c}$ 的等角共軛點，Br_2^* 為 Br_2 關於 $\triangle Br_{2a}Br_{2b}Br_{2c}$ 的等角共軛點。則

(i) Br_1^*, Br_2^* 位於 $\odot(\overline{Br_1Br_2})$ 上；

(ii) $K = Br_1Br_2^* \cap Br_2Br_1^*$。

Proof. 顯然地，$\triangle Br_{1c}Br_{1a}Br_{1b}$ 與 $\triangle Br_{2b}Br_{2c}Br_{2a}$ 的旋似中心為它們的共同外心 O_{Br}，即 $\overline{Br_1Br_2}$ 中點。因為 $\triangle Br_{1c}Br_{1a}Br_{1b}$ 與 $\triangle ABC$ 的旋似中心為 $\triangle Br_{1c}Br_{1a}Br_{1b}$ 關於 $\triangle ABC$ 的密克點 Br_1，所以 Br_1^* 為 $\triangle Br_{1c}Br_{1a}Br_{1b}$ 的第二布洛卡點，故 $\mathfrak{r}(Br_1^*) = Br_2$，其中 $\mathfrak{r}$ 是以 O_{Br} 為中心的旋轉變換，使得 $\mathfrak{r}(\triangle Br_{1c}Br_{1a}Br_{1b}) = \triangle Br_{2b}Br_{2c}Br_{2a}$。同理有 $\mathfrak{r}(Br_1) = Br_2^*$，這告訴我們

$$\overline{O_{Br}Br_1} = \overline{O_{Br}Br_2} = \overline{O_{Br}Br_1^*} = \overline{O_{Br}Br_2^*},$$

即 Br_1^*, Br_2^* 位於 $\odot(\overline{Br_1Br_2})$ 上。

透過

$$\begin{aligned}\measuredangle(Br_1Br_1^*, Br_1Br_2) &= \measuredangle(Br_{1b}Br_{1c}, CA) = 90^\circ + \measuredangle BABr_1 \\ &= \measuredangle OBr_aBr_1 = 90^\circ + \measuredangle KBr_2Br_1,\end{aligned}$$

我們得到 $Br_2Br_1^* \perp Br_1Br_1^* \perp KBr_2$，即 $K \in Br_2Br_1^*$。同理，我們有 $K \in Br_1Br_2^*$。 ■

Proposition 8.3.27. 令 $\mathcal{C}_{Br}$ 是以 $\triangle ABC$ 的兩個布洛卡點 Br_1, Br_2 為焦點且與 $\triangle ABC$ 相切的圓錐曲線，稱為 $\triangle ABC$ 的**布洛卡內橢圓** (**Brocard inellipse**)。則 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{C}$-切點三角形為 $\triangle ABC$ 的共軛重心 K 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形。

Proof. 令 D, E, F 分別為 $\mathcal{C}_{Br}$ 與 BC, CA, AB 的切點。由 (7.3.5)，因為 Br_1, Br_2 位於 $\triangle ABC$ 內，

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{BBr_1}}{\overline{Br_1C}} \cdot \frac{\overline{BBr_2}}{\overline{Br_2C}}.$$

我們有

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BBr_1}}{\overline{Br_1C}} &= \frac{\overline{AB} \cdot |\sin\measuredangle BABr_1/\sin\measuredangle ABr_1B|}{\overline{CA} \cdot |\sin\measuredangle Br_1AC/\sin\measuredangle CBr_1A|} \\ &= \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} \cdot \left|\frac{\sin\measuredangle BABr_1}{\sin\measuredangle Br_1AC}\right| \cdot \left|\frac{\sin\measuredangle CAB}{\sin\measuredangle ABC}\right| = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{CA}^2} \cdot \left|\frac{\sin\measuredangle BABr_1}{\sin\measuredangle Br_1AC}\right|.\end{aligned}$$

類似地，

$$\frac{\overline{BBr_2}}{\overline{Br_2C}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC} \cdot \overline{CA}} \cdot \left|\frac{\sin\measuredangle BABr_2}{\sin\measuredangle Br_2AC}\right|.$$

故

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{CA}^2} \cdot \left|\frac{\sin\measuredangle BABr_1}{\sin\measuredangle Br_1AC}\right| \cdot \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC} \cdot \overline{CA}} \cdot \left|\frac{\sin\measuredangle BABr_2}{\sin\measuredangle Br_2AC}\right| = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}\right)^2,$$

即 $D = AK \cap BC$。同理，我們有 $E = BK \cap CA$, $F = CK \cap AB$。 ■

布洛卡內橢圓 $\mathcal{C}_{Br}$（因為 Br_1, Br_2 位於 $\triangle ABC$ 內，所以它是個橢圓）其實是圓上的保交比變換連線的包絡線：

Proposition 8.3.28. 延續 (8.3.27) 的標號。考慮保交比變換 $\varphi\colon \Omega = \odot(ABC) \to \Omega$，滿足 $\varphi(A) = B, \varphi(B) = C, \varphi(C) = A$，那麼

$$\{P\varphi(P) \mid P \in \Omega\}$$

的包絡線為 $\mathcal{C}_{Br}$。

Proof. 由 (7.A.15)，$\{P\varphi(P) \mid P \in \Omega\}$ 的包絡線為一圓錐曲線 $\mathcal{C}$。取 $P = A, B, C$，我們得到 $\triangle ABC$ 與 $\mathcal{C}$ 相切。令 $\triangle K_AK_BK_C$ 為 K 關於 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形，則

$$\begin{aligned}(B, K_B; C, A) &= -1 = (A, K_A; B, C)\\ &= (\varphi(A), \varphi(K_A); \varphi(B), \varphi(C)) = (B, \varphi(K_A); C, A),\end{aligned}$$

即 $\varphi(K_A) = K_B$。同理 $\varphi(K_B) = K_C, \varphi(K_C) = K_A$。

要證明 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{Br}$，我們只需證明 K_BK_C, K_CK_A, K_AK_B 與 $\mathcal{C}_{Br}$ 相切即可。由對稱性，我們證明 K_BK_C 與 $\mathcal{C}_{Br}$ 相切：令 S, T 分別為 K_BK_C 與 CA, AB 的交點，$\triangle DEF$ 為 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{C}$-切點三角形，則

$$(A, E; C, S) \overset{K_B}{=} (A, B; C, K_C) = -1 = (C, A; B, K_B) \overset{K_C}{=} (F, A; B, T).$$

由於 AF, EA 分別與 $\mathcal{C}_{Br}$ 切於 F, E，BC 與 $\mathcal{C}_{Br}$ 相切，所以 $ST = K_BK_C$ 也與 $\mathcal{C}_{Br}$ 相切。 ■

因為 $\varphi^3(A) = A, \varphi^3(B) = B, \varphi^3(C) = C$，所以 $\varphi^3 = \mathrm{id}$。因此對於任意一點 $P \in \Omega$，$\mathcal{C}_{Br}$ 與 $\triangle_P = \triangle P\varphi(P)\varphi^2(P)$ 相切。由於透過 $\triangle_P$ 所定義出來的 φ 與原本的相同（因為 $\varphi(P) = \varphi(P), \varphi(\varphi(P)) = \varphi^2(P), \varphi(\varphi^2(P)) = P$），我們發

現 $\mathcal{C}_{Br}$ 也會是以 $\triangle_P$ 的兩個布洛卡點為焦點且與 $\triangle_P$ 相切的圓錐曲線。事實上，我們有：

Proposition 8.3.29. 延續 (8.3.28) 的標號。對於任意一點 $P \in \Omega$，$\triangle_P = \triangle P\varphi(P)\varphi^2(P)$ 的外心、共軛重心、第一布洛卡點、第二布洛卡點皆與 $\triangle ABC$ 的重合且布洛卡角 $\measuredangle\varphi(P)PBr_1$ 為定值。這時候，$\triangle_P$ 的 $\mathcal{C}_{Br}$-切點三角形也為 K 關於 $\triangle_P$ 的西瓦三角形。

Proof. 顯然地，$\triangle_P$ 的外心為 $\triangle ABC$ 的外心 O。我們定義對合變換 $\psi\colon \Omega \to \Omega$ 為 $\psi(Q) = QBr_1 \cap \Omega$，也定義保交比變換 $\Phi = \psi \circ \varphi^{-1}$。那麼

$$(\Phi(A) - A)_\Omega = (\Phi(B) - B)_\Omega = (\Phi(C) - C)_\Omega = \theta := \measuredangle BABr_1,$$

因此對於所有 $Q \in \Omega$，都有 $(\Phi(Q) - Q)_\Omega = \theta$。取 $Q = A_P = P$, $B_P = \varphi(P)$, $C_P = \varphi^2(P)$，我們得到

$$\begin{aligned}
\measuredangle B_PA_PBr_1 &= \measuredangle B_PA_P\Phi(B_P) = \theta,\\
\measuredangle C_PB_PBr_1 &= \measuredangle C_PB_P\Phi(C_P) = \theta,\\
\measuredangle A_PC_PBr_1 &= \measuredangle A_PC_P\Phi(A_P) = \theta,
\end{aligned}$$

故 Br_1 為 $\triangle_P$ 的第一布洛卡點。

同理，Br_2 為 $\triangle_P$ 的第二布洛卡點。注意到 $\triangle_P$ 的共軛重心為外心 O 關於 $\odot(OBr_1Br_2)$ 的對徑點 (8.3.23)，所以為 K。由於 $\mathcal{C}_{Br}(\triangle_P) = \mathcal{C}_{Br}$，$\triangle_P$ 的 $\mathcal{C}_{Br}$-切點三角形為 $K = K(\triangle_P)$ 關於 $\triangle_P$ 的西瓦三角形。 ■

習題

Problem 1 (τ)**.** 在 A, B, C, F_1, F_2 五個點中任取三點，則該三點所形成的三角形的歐拉線過 G。

Problem 2. 令 O_A, O_B, O_C 分別為 $\triangle S_iBC, \triangle AS_iC, \triangle ABS_i$ 的外心。證明：AO_A, BO_B, CO_C 共點於 OK 上。

Problem 3. 令 N 為 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心，I^a, I^b, I^c 為 $\triangle ABC$ 的三個旁

心。證明：N 及 $\overline{F_1S_1}, \overline{F_2S_2}$ 的中點們位在同一個 $\triangle I^aI^bI^c$ 的外接等軸雙曲線上。

Problem 4. 令 $\triangle H_aH_bH_c, \triangle M_aM_bM_c$ 分別為 $\triangle ABC$ 的垂足三角形及中點三角形。證明：對於任意一點 P，P 關於 $\triangle H_aH_bH_c$ 的等角共軛點位於 P 關於 $\triangle M_aM_bM_c$ 的等角共軛點與等截共軛點的連線上。

Problem 5. 令 K_θ 為 $\triangle ABC$ 的 Kiepert 雙曲線上一點（對應的角度是 θ），$\triangle XYZ$ 為 P 關於 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形的圓西瓦三角形，那麼 K_θ 位於 $\triangle XYZ$ 的 Kiepert 雙曲線上，而且 K_θ 這時候對應的角度是 $-\theta$。

Problem 6. 一個四邊形 $ABCD$ 有布洛卡點對（也就是存在點 P, Q 滿足 $\measuredangle BAP = \measuredangle CBP = \measuredangle DCP = \measuredangle ADP, \measuredangle QAD = \measuredangle QBA = \measuredangle QCB = \measuredangle QDC$）若且唯若 $ABCD$ 是一個圓內接調和四邊形。

8.4 Jerabek 雙曲線

我們都知道，如果給定 $\triangle ABC$ 與一個點 P 我們可以定義一些 P 關於 $\triangle ABC$ 的點、線、圓等等的曲線，我們之前已經定義過正交截線與三線性極線了。先來看看它們有什麼性質吧。

Proposition 8.4.1. 給定 $\triangle ABC$ 與一點 P，令 $\mathcal{O}_P$, $\mathfrak{t}(P)$ 分別為 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線與三線性極線，$\mathcal{S}_P$ 則為 P 關於 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓 ω_P 的極線（即 $\mathfrak{p}_{\omega_P}(P)$），那麼 $\mathcal{O}_P$, $\mathfrak{t}(P)$, $\mathcal{S}_P$ 共點。

Proof. 令 Ω 為以 P 為圓心的任意圓，定義 $A^* = \mathfrak{p}_\Omega(BC)$，類似定義 B^*, C^*。那麼由定義，$\mathfrak{p}_\Omega(\mathcal{O}_P)$ 為 $\triangle A^*B^*C^*$ 的垂心，$\mathfrak{p}_\Omega(\mathfrak{t}(P))$ 為 $\triangle A^*B^*C^*$ 的重心。注意到 $\omega, \Omega, \odot(A^*B^*C^*)$ 共軸，令 O^* 為 $\triangle A^*B^*C^*$ 的外心，考慮 OP 分別與 ω, $\Omega, \odot(A^*B^*C^*)$ 的交點，並注意到反演保調和，所以 $\mathfrak{p}_\Omega(\mathcal{S}_P)$ 為 $\triangle A^*B^*C^*$ 的外心。由 $\mathfrak{p}_\Omega(\mathcal{O}_P), \mathfrak{p}_\Omega(\mathfrak{t}(P)), \mathfrak{p}_\Omega(\mathcal{S}_P)$ 共線知 $\mathcal{O}_P$, $\mathfrak{t}(P)$, $\mathcal{S}_P$ 共點。 ■

當 P 位於 $\odot(ABC)$ 上時，$\mathcal{S}_P$ 變為 $\triangle ABC$ 的施坦納線，這時有：

Proposition 8.4.2. 給定 $\triangle ABC$ 與 $\odot(ABC)$ 上一點 P，那麼 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線、三線性極線及施坦納線共點。

對以 P 為圓心的圓配極，我們還會有一些很美好的性質：

Proposition 8.4.3. 給定 $\triangle ABC$ 與 $\odot(ABC)$ 上一點 P，Ω 是以 P 為圓心的圓。那麼

(i) $\mathfrak{p}_\Omega(\triangle ABC) \overset{-}{\sim} \triangle ABC$ 且 P 位於其外接圓上。

(ii) 若 (Q, Q^*) 為關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，取 Q' 使得 $\mathfrak{p}_\Omega(\triangle ABC) \cup Q' \overset{-}{\sim} \triangle ABC \cup Q$，則 $Q^* \in \mathfrak{p}_\Omega(Q^*)$。

Proof. (i) 由簡單的角度計算可輕易得到。關於 (ii)，我們考慮一個對稱變換與旋似變換的合成 φ 使得 $\varphi(A') = A, \varphi(B') = B, \varphi(C') = C$。令 $\mathcal{C}$ 為以 P 為中心的等角共軛變換的對角圓錐曲線（注意到 $P \in \odot(ABC)$），$\Phi := \mathfrak{p}_{\mathcal{C}} \circ \varphi \circ \mathfrak{p}_\Omega$ 為一個將點送至點的變換，則 A, B, C, P 是 Φ 的不動點，並且 Φ 是一個雙射的保共線變換。因此由 (7.A.10) 可得 $\Phi = \mathrm{id}$，故

$$\varphi(\mathfrak{p}_\Omega(Q^*)) = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(Q^*)$$

由等角共軛變換的性質知 $Q \in \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(Q^*)$，所以 $Q' \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(Q^*)) = \mathfrak{p}_\Omega(Q^*)$。 ■

那麼由 (8.4.1) 的證明可以得到：

Corollary 8.4.4. 給定 $\triangle ABC$ 與 $\odot(ABC)$ 上一點 P，那麼 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線、三線性極線及施坦納線分別經過 $\triangle ABC$ 的外心、共軛重心及垂心。

我們考慮所有這些共點的軌跡，就有：

Proposition 8.4.5. 給定 $\triangle ABC$ 與 $\odot(ABC)$ 上一點 P，那麼 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線、三線性極線及施坦納線共的點 Q 所形成的軌跡是一個等軸雙曲線。更進一步地，PQ 經過 $\odot(ABC)$ 上的定點。

Proof. 令 $\triangle ABC$ 的外心及垂心分別為 O, H。對於任意一點 $P \in \odot(ABC)$，在 BC 上取 D 使得 $\measuredangle APD = 90^\circ$，$A$, P 關於 BC 的對稱點分別為 A', P'。那麼

$$O(A, B; C, D) = (AO \cap BC, B; C, D) = (A, B; C, P) = H(A', B; C, P'),$$

所以 $Q = OD \cap HP' \in \mathcal{H}$，其中 $\mathcal{H}$ 為經過 A, B, C, O, H 的圓錐曲線。令 H^* 為 $\mathcal{H}$ 與 $\odot(ABC)$ 異於 A, B, C 的交點，則

$$H^*(A, B; C, P) = H(A', B, C, P') = H(A, B, C, Q) = H^*(A', B, C, Q),$$

所以 $H^* \in PQ$。 ■

Definition 8.4.6. 我們稱 (8.4.5) 中的等軸雙曲線為 $\triangle ABC$ 的 Jerabek 雙曲線。

我們馬上可以得到下面這個性質：

Proposition 8.4.7. 令 $\mathcal{H}_J$ 為 $\triangle ABC$ 的 Jerabek 雙曲線，那麼 $\mathcal{H}_J$ 在等角共軛變換下的像為歐拉線。 ■

Example 8.4.8. 垂心 H 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點 $H' \in \mathcal{H}_J$。

習題

Problem 1. 設 $\mathcal{E}$ 為不等邊 $\triangle ABC$ 的歐拉線，並分別交 CA, AB 於 E, F。證明：$\triangle AEF$ 的歐拉線平行於 BC。

Problem 2. 給定 $\triangle ABC$ 與一點 P，令 $\mathcal{O}_P$, $\mathfrak{t}(P)$ 分別為 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線與三線性極線，$\triangle Q_aQ_bQ_c$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 Q 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形。若 H', G' 分別為 $\triangle Q_aQ_bQ_c$ 的垂心、重心。證明：

(i) $QH' \perp \mathcal{O}_P$,

(ii) $QG' \perp \mathcal{T}_P$.

Problem 3. 令 P 位於 $\triangle ABC$ 的歐拉線上，H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，若 Q 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，證明：HQ 與經過 A, B, C, H, P 的圓錐曲線相切。

Problem 4. 令 N 為 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心，Ko 為 N 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 (**Kosnita point**)。證明：NKo 過 $\triangle ABC$ 的歐拉線關於 $\triangle ABC$ 的反施坦納點 (**Euler reflection point**)。

Chapter 9

完美六點組與等角共軛軌跡

9.1 完美六點組

為了透徹了解等角共軛軌跡在做什麼，我們先引入一個很好用的工具——完美六點組[6]。完美六點組是中國的幾何專家葉中豪與單墫發展出來的一套工具（原文稱其為完美六邊形），並在最後寫了一首詩：

數學花園大，
幾何算一家，
春日興致好，
請來看小花。

Definition 9.1.1. 我們說 $(AD)(BE)(CF)$ 為一個完美六點組若 $(BE)(CF)$, $(CF)(AD)$, $(AD)(BE)$ 有共同的密克點 M。這時候 M 被稱為 $(AD)(BE)(CF)$ 的密克點。

更一般地，我們說 $2n$ 個點 $(X_1Y_1)\cdots(X_nY_n)$ 為一個完美 $2n$ 點組若存在一點 M 使得對於所有 i, j，$(X_iY_i)(X_jY_j)$ 的密克點為 M。特別地，對於任意以 M 為密克點的完美六點組，$(AD)(BE)(CF)(M\infty)$ 是完美八點組，其中 ∞ 為任意無窮遠點。

顯然地，從這個定義我們知道 $(AD)(BE)(CF)$ 的完美六點組性在對稱、

平移、位似、旋似下都是保持的。

若 $M \notin \mathcal{L}_\infty$，則存在一個 $\triangle M\infty_i\infty_{-i}$ 上的點等共軛變換 Φ（或者說，反演變換與對稱變換的合成）將 A, B, C 分別送至 D, E, F，稱為 $(AD)(BE)(CF)$ 的 Clawson–Schmidt 共軛變換（簡稱 C–S 共軛變換）；若 $M \in \mathcal{L}_\infty$，那麼事實上 M 可以是 $\mathcal{L}_\infty$ 上任意一點，且這時 $(BE)(CF), (CF)(AD), (AD)(BE)$ 皆為平行四邊形，或者說，$(AD)(BE)(CF)$ 為一個平行六邊形，這時候，我們簡記 M 為 ∞，$(AD)(BE)(CF)$ 的 C–S 共軛變換則定義為關於它們的共同中點的對稱變換。因此無論如何我們有完美六點組的存在性及唯一性——給定五點 B, C, D, E, F，存在唯一一點 A 使得 $(AD)(BE)(CF)$ 為完美六點組（在這裡，我們將所有的無窮遠點視為同一點 ∞）。

Example 9.1.2. 設完全四線形 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$，$A_{ij} := \ell_i \cap \ell_j$ 為 $\mathcal{Q}$ 的頂點，那麼 $(A_{23}A_{14})(A_{31}A_{24})(A_{12}A_{34})$ 是一個完美六點組。

Proposition 9.1.3. 一個六點組 $(AD)(BE)(CF)$ 是完美六點組若且唯若

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \circ \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} \circ \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = -1 \in \mathscr{S}^{\mathrm{ab}}, \tag{Υ}$$

其中 -1 代表任何關於一點作點對稱的變換。若 $W \in \mathcal{L}_\infty \setminus \{\infty_i, \infty_{-i}\}$, X, $Y \notin \mathcal{L}_\infty$，我們將 $\overrightarrow{XW}/\overrightarrow{WY}$ 定為 -1。

在特例情形 (9.1.2) 中，這個性質就只是大家熟悉的孟氏定理。

Proof. 由存在性及唯一性，我們只需要證明當 $(AD)(BE)(CF)$ 是完美六點組時，

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \circ \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} \circ \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = -1.$$

令 M 為 $(BE)(CF), (CF)(AD), (AD)(BE)$ 的共同密克點。那麼

$$\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{BF}} = \frac{\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{MB}}, \quad \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MC}}, \quad \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AE}} = \frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MA}}.$$

因此

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \circ \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} \circ \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = \left(-\frac{\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{MB}}\right) \circ \left(-\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MC}}\right) \circ \left(-\frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MA}}\right) = -1. \qquad \blacksquare$$

因此 (Υ) 也經常被拿來當作完美六點組的定義，也因為它與 $AFBDCE$ 的六個邊有關，所以大部分的人稱完美六點組為完美六邊形。

Proposition 9.1.4. 六邊形 $(AD)(BE)(CF)$ 為完美六點組若且唯若存在兩點 X_+, X_- 使得 $(AD)(X_+X_-)$, $(BE)(X_+X_-)$, $(CF)(X_+X_-)$ 皆為調和四邊形。

Proof.

($\Rightarrow$) 令 M, Φ 分別為 $(AD)(BE)(CF)$ 的密克點及 C–S 共軛變換，X_+, X_- 為 Φ 的其中兩個不動點滿足 $M \in X_+X_-$。以下證明這兩個點就是我們要的。

由對稱性，我們只需證明 $(AD)(X_+X_-)$ 為調和四邊形。由 (??)，

$$\infty_{\pm i}(A, D; X_+, X_-) = -1,$$

因此 A, D, X_+, X_-, ∞_i, ∞_{-i} 共圓錐曲線，即 A, D, X_+, X_- 共圓，且 $(A, D; X_+, X_-) = -1$。

($\Leftarrow$) 令 M 為 $\overline{X_+X_-}$ 中點。因為 $(X_+, X_-; M, X_+X_- \cap \infty_i\infty_{-i}) = 1$，所以 X_- 為 X_+ 關於 $\triangle M\infty_i\infty_{-i}$ 的反西瓦三角形的頂點，因此存在 $\triangle M\infty_i\infty_{-i}$ 上以 X_+, X_- 為不動點的點等共軛變換 Φ。因為

$$\infty_{\pm i}(A, \Phi(A); X_+, X_-) = -1 = \infty_{\pm i}(A, D; X_+, X_-),$$

所以 $\Phi(A) = D$。由對稱性，$\Phi(B) = E$, $\Phi(C) = F$。 ■

Proposition 9.1.5. 反演保完美六點組，意即，若 $(AD)(BE)(CF)$ 為完美六點組，那麼對於任意一點 O，$(AD)(BE)(CF)$ 關於 O 點反演 $\Im$ 下的像 $(A^\Im D^\Im)(B^\Im E^\Im)(C^\Im F^\Im)$ 也是完美六點組。

Proof. 令 M, Φ 分別為 $(AD)(BE)(CF)$ 的密克點及 C–S 共軛變換。我們可以將 $\Im$（在合成一個對稱變換後）視為一個 $\triangle O\infty_i\infty_{-i}$ 上的點等共軛變換。

要證明 $(A^\Im D^\Im)(B^\Im E^\Im)(C^\Im F^\Im)$ 是一個完美六點組，我們只需要證明存在一個點 X 及 $\triangle X\infty_i\infty_{-i}$ 上的點等共軛變換將 $A^\Im \leftrightarrow D^\Im$, $B^\Im \leftrightarrow E^\Im$, $C^\Im \leftrightarrow F^\Im$。事實上，這個點等共軛變換就是 $\Im \circ \varphi \circ \Im$，而 X 就是 $\Im(\varphi(O))$：我們觀察到 $\Im \circ \varphi \circ \Im$ 限制在 $\mathbf{T}\infty_{\pm i}$ 上是個對合，且把 $\mathcal{L}_\infty$ 送至 $\Im \circ \varphi(\infty_{\pm i}O) = \infty_{\pm i}X$。 ■

Example 9.1.6. 設 $ABCD$ 為圓內接四邊形，O 是圓心，P 是對角線 AC 與 BD 的交點，則 $(AC)(BD)(OP)$ 是完美六點組。

Solution. 考慮關於 $\odot(O)$ 的反演，我們知道 P 會送至 $(AC)(BD)$ 的密克點 M，O 會送至 ∞，而 A, B, C, D 則為不動點。因此我們只需證明 $(AC)(BD)(\infty M)$ 是完美六點組，但這是顯然的。

Example 9.1.7. 設 $ABCDEF$ 為圓內接六邊形，則 $(AD)(BE)(CF)$ 是完美六點組若且唯若 AD, BE, CF 共點。

Solution. 令 $P = CF \cap AD, P' = AD \cap BE$，則由上述例子我們知道 $(CF)(AD)(OP)$ 及 $(AD)(BE)(OP')$ 分別為完美六點組。因此 $(AD)(BE)(CF)$ 是完美六點若且唯若 $P = P'$，即 AD, BE, CF 共點。

Proposition 9.1.8. 若六邊形 $(AD)(BE)(CF)$ 為完美六點組且六點不共圓，則

$$\odot(DEF),\ \odot(DBC),\ \odot(AEC),\ \odot(ABF)$$

共點於一點 P 且

$$\odot(ABC),\ \odot(AEF),\ \odot(DBF),\ \odot(DEC)$$

共點於一點 Q。此時，(P, Q) 也在這個完美體系當中。

Proof. 設 $\odot(AEC)$ 與 $\odot(ABF)$ 的第二個交點為 P。考慮以 P 為中心的反演變換 $\mathfrak{I}$，則 $A^{\mathfrak{I}}, E^{\mathfrak{I}}, C^{\mathfrak{I}}$ 及 $A^{\mathfrak{I}}, B^{\mathfrak{I}}, F^{\mathfrak{I}}$ 分別共線。令 $(D')^{\mathfrak{I}} = B^{\mathfrak{I}}C^{\mathfrak{I}} \cap E^{\mathfrak{I}}F^{\mathfrak{I}}$，則 $(A^{\mathfrak{I}}(D')^{\mathfrak{I}})(B^{\mathfrak{I}}E^{\mathfrak{I}})(C^{\mathfrak{I}}F^{\mathfrak{I}})$ 為完美六點組，因此由 $(AD)(BE)(CF)$ 為完美六點組，我們得到 $D = (D')^{\mathfrak{I}\circ\mathfrak{I}} = D'$，即 $\odot(DEF), \odot(DBC)$ 也經過 P。

由密克定理，$\odot(A^{\mathfrak{I}}B^{\mathfrak{I}}C^{\mathfrak{I}}), \odot(A^{\mathfrak{I}}E^{\mathfrak{I}}F^{\mathfrak{I}}), \odot(D^{\mathfrak{I}}B^{\mathfrak{I}}F^{\mathfrak{I}}), \odot(D^{\mathfrak{I}}E^{\mathfrak{I}}C^{\mathfrak{I}})$ 交於四邊形 $(B^{\mathfrak{I}}E^{\mathfrak{I}})(C^{\mathfrak{I}}F^{\mathfrak{I}})$ 的密克點 M，因此 $\odot(ABC), \odot(AEF), \odot(DBF), \odot(DEC)$ 交於一點 Q。由於 $(A^{\mathfrak{I}}D^{\mathfrak{I}})(B^{\mathfrak{I}}E^{\mathfrak{I}})(C^{\mathfrak{I}}F^{\mathfrak{I}})(M\infty)$ 為完美八點組，$(AD)(BE)(CF)(QP)$ 也是完美八點組。 ∎

我們將這種完美八點組 $(AD)(BE)(CF)(PQ)$ 稱為共圓完美八點組。由定義，此時 $(BE)(CF)(PQ)(AD)$ 也是完美八點組，也就是說，這四對點是對稱的。

Example 9.1.9. 令 P_A, P_B, P_C 分別為 P 關於 BC, CA, AB 的對稱點，則 $\odot(BP_AC)$, $\odot(CP_BA)$, $\odot(AP_CB)$, $\odot(P_AP_BP_C)$ 共點於 P 關於 $\triangle ABC$ 的反角共軛（見 (8.1.16)）。

Proposition 9.1.10. 若 $(AD)(BE)(CF)(PQ)$ 為共圓完美八點組，那麼 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$, $\overline{PQ}$ 的中點們共圓。

Proof. 設 M 為 $(AD)(BE)(CF)(PQ)$ 的密克點，M_A, M_B, M_C, M_P 分別為 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$, $\overline{PQ}$ 的中點。因為密克點的等角共軛點為牛頓線上的無窮遠點 (7.3.9)，所以

$$\begin{aligned} M_CM_A + M_BM_P &= (AC + AF - AM) + (PB + PE - PM) \\ &= (A + B + C + P)_{\odot(ABCP)} + (A + E + F + P)_{\odot(AEFP)} \\ &\quad - AM - PM. \end{aligned}$$

而上式關於 (B, E), (C, F) 是對稱的，因此等於 $M_AM_B + M_CM_P$。 ■

Example 9.1.11. 在 (9.1.9) 中，該圓圓心為 N。

Proposition 9.1.12 (破鏡重圓)**.** 令 $AFBDCE$ 為一個六邊形，設 D, E, F 關於 BC, CA, AB 的對稱點分別為 D', E', F'，則 $\triangle DEF \overset{-}{\sim} \triangle D'E'F'$ 若且唯若 $(AD)(BE)(CF)$ 為完美六點組。

Proof. 設 E'', F'' 分別為 E', F' 關於 BC 的對稱點，則 $\triangle DE''F'' \overset{-}{\sim} \triangle D'E'F'$，因此

$$\triangle DEF \overset{-}{\sim} \triangle D'E'F' \iff \triangle DEF \overset{+}{\sim} \triangle DE''F'' \iff \triangle DEE'' \overset{+}{\sim} \triangle DFF''.$$

令 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，則

$$\triangle CEE'' \overset{+}{\sim} \triangle OAB, \quad \triangle BFF'' \overset{+}{\sim} \triangle OAC.$$

這告訴我們

$$\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{AC}}\circ\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{ED}}\circ\frac{\overrightarrow{DF}}{\overrightarrow{FB}}=-\frac{\overrightarrow{CE}\circ\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{BF}\circ\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{OA}}\circ\frac{\overrightarrow{DF}}{\overrightarrow{DE}}=-\frac{\overrightarrow{DF}/\overrightarrow{FF''}}{\overrightarrow{DE}/\overrightarrow{EE''}}.$$

因此 $(AD)(BE)(CF)$ 為完美六點組若且唯若 $\triangle DEE'' \overset{+}{\sim} \triangle DFF''$。 ■

Proposition 9.1.13. 若 $(AD)(BE)(CF)$ 為完美六點組，則存在一點 P 使得

$$\triangle PBC \overset{+}{\sim} \triangle AFE, \quad \triangle APC \overset{+}{\sim} \triangle FBD, \quad \triangle ABP \overset{+}{\sim} \triangle EDC.$$

Proof. 令 M 為 $(AD)(BE)(CF)$ 的密克點，取 P 使得 $\triangle PBC \overset{+}{\sim} \triangle AFE$。則 $\triangle MBC \overset{+}{\sim} \triangle MFE$ 告訴我們 $\triangle PBC \cup M \overset{+}{\sim} \triangle AFE \cup M$。因此 $\triangle MAP \overset{+}{\sim} \triangle MFB$，結合 $\triangle MCA \overset{+}{\sim} \triangle MDF$，我們便有 $\triangle APC \cup M \overset{+}{\sim} \triangle FBD \cup M$。同理有 $\triangle ABP \cup M \overset{+}{\sim} \triangle EDC \cup M$。 ■

這個點 P 被稱為 $\triangle DEF$（關於 $(AD)(BE)(CF)$）的內點，那當然我們也可以作出剩下七個三角形（關於 $(AD)(BE)(CF)$）的內點。

習題

Problem 1. 設完美六點組 $(A_1A_4)(A_2A_5)(A_3A_6)$ 的密克點為 M，M 關於 A_iA_{i+1} 的垂足為 M_i。證明：M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 共點。

Problem 2. 令 P 為 $\triangle DEF$ 關於完美六點組 $(AD)(BE)(CF)$ 的內點，Q 為 P 關於 $\triangle DEF$ 的等角共軛點，D', E', F' 分別為 D, E, F 關於 BC, CA, AB 的對稱點。證明：$\triangle DEF \cup Q \overset{-}{\sim} \triangle D'E'F' \cup Q$。

9.2 等角共軛點是完美的

那麼我們為什麼要學完美六點組呢？考慮完全四線形 $\mathcal{Q}=(\ell_1,\ldots,\ell_4)$。令 $\triangle ABC=\triangle\ell_1\ell_2\ell_3$，$A^*, B^*, C^*$ 分別為 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 與 ℓ_4 的交點使得 AA^*, BB^*, CC^* 為 $\mathcal{Q}$ 的三條對角線。我們的目標是刻畫 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛軌跡

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\mathcal{Q}) &= \{P \mid P \text{ 有關於 } \mathcal{Q} \text{ 的等角共軛點}\}\\ &= \{P \mid \exists P^* \text{ 使得在所有 } \triangle \subseteq \mathcal{Q} \text{ 上，} P \times P^* = \infty_i \times \infty_{-i}\}.\end{aligned}$$

因為 $(AA^*)(BB^*)(CC^*)$ 是完美六點組，所以我們得到一個 C–S 共軛變換將 $A \leftrightarrow A^*, B \leftrightarrow B^*, C \leftrightarrow C^*$，記為 $\Phi_{\mathcal{Q}}$。

Proposition 9.2.1. 若 (P, P^*) 為關於四邊形 $(BB^*)(CC^*)$ 的等角共軛點對，則 $(BB^*)(CC^*)(PP^*)$ 為完美六點組。

Proof. 取 P' 使得 $(BB^*)(CC^*)(PP')$ 為完美六點組，那麼 $(AA^*)(BB^*)(CC^*)(PP')$ 為完美八點組。因為 P 有關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點 P^*，所以有 $PB + PB^* = PC + PC^*$ (1.3.14)。由

$$\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} \circ \frac{\overrightarrow{CB^*}}{\overrightarrow{B^*P}} \circ \frac{\overrightarrow{PC^*}}{\overrightarrow{C^*B}} = -1,$$

我們得到

$$\begin{aligned}\measuredangle BP'C &= CB^* - B^*P + PC^* - C^*B = CA - AB + PB - PC \\ &= CA - AB + (AB + BC - BP^*) - (BC + CA - CP^*) = \measuredangle BP^*C\end{aligned}$$

因為 B, C 是任意的，因此我們必有 $P' = P^*$。 ∎

Proposition 9.2.2. 若 (P, P^*) 為關於完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點對，則 $\overline{PP^*}$ 中點位於 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線 τ 上。

Proof. 令 $\mathcal{C}$ 為以 P, P^* 為焦點且與 $\mathcal{Q}$ 中四線皆相切的圓錐曲線，則 $\overline{PP^*}$ 中點為 $\mathcal{C}$ 的中心。由牛頓第二定理 (6.3.13)，$\mathcal{C}$ 的中心，即 $\overline{PP^*}$ 中點，位於 τ 上。 ∎

所以說如果 (P, P^*) 是一對等角共軛點對，那他就會滿足上述兩個性質。事實上，當 $\mathcal{Q}$ 足夠一般的時候，這也是充分條件。

Proposition 9.2.3. 設 $(BB^*)(CC^*)$ 不是一個平行四邊形，若 $(BB^*)(CC^*)(PP^*)$ 為完美六點組，且 $\overline{BB^*}, \overline{CC^*}, \overline{PP^*}$ 的中點們共線，那麼 (P, P^*) 為關於四邊形 $(BB^*)(CC^*)$ 的等角共軛點對。

Proof. 因為 $\overline{PP^*}$ 的中點位於 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線上，由 (7.3.2) 或 (7.3.8)，存在關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點對 $(Q, Q^*), (R, R^*)$ 使得 $\overline{PP^*}, \overline{QQ^*}, \overline{RR^*}$ 有共同的中點且 $\infty_i =$

$QR^* \cap Q^*R$, $\infty_{-i} = QR \cap Q^*R^*$。這時候 $(BB^*)(CC^*)(QQ^*)$, $(BB^*)(CC^*)(RR^*)$ 皆為完美六點組，因此

$$(BB^*)(CC^*)(PP^*)(QQ^*)(RR^*)$$

為完美十點組。

若 $\{P, P^*\} \neq \{Q, Q^*\}$, $\{R, R^*\}$，設 $M \notin \mathcal{L}_\infty$ 為 $\mathcal{Q}$ 的密克點，則 M 為完美六點組 $(PP^*)(QQ^*)(RR^*)$ 的密克點。因為 $PQ \cap P^*Q^* \in \mathcal{L}_\infty \neq \{\infty_i, \infty_{-i}\}$，所以 $\measuredangle MPQ = \measuredangle MQ^*P^*$ 告訴我們 $MP \parallel MQ^*$，但這樣必有 $M \in PQ^*$（因為 $M \notin \mathcal{L}_\infty$）。可是由對稱性，$M = PQ^* \cap P^*Q \in \mathcal{L}_\infty$，矛盾。 ■

所以說 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛軌跡 $\mathcal{K}$ 完全由它的 Φ 以及牛頓線決定，寫出來就是：

Theorem 9.2.4 (QL-Cu1)**.** 令 τ 為 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線，將對角線頂點送至對方的對合為 Φ，則 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛軌跡 $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{Q})$ 的仿射部分

$$\mathcal{K}(\mathcal{Q}) \setminus \mathcal{L}_\infty = \left\{ P \,\middle|\, \infty^\vee_{P\Phi(P)} \in \tau \right\},$$

其中 $\infty^\vee_{P\Phi(P)}$ 為 $\overline{P\Phi(P)}$ 的中點。

把上面這條式子解析展開，我們就會得到：

Proposition 9.2.5. 等角共軛軌跡 $\mathcal{K}$ 是一條三次曲線。

顯然地，$\mathcal{K}$ 通過 $\mathcal{Q}$ 的六個頂點、密克點 M、牛頓線上的無窮遠點 ∞_τ 及兩個無窮虛圓點 ∞_i, ∞_{-i}。因此它是一個**圓環三次曲線** (**circular cubic**)，意思就是它通過兩個無窮虛圓點。

如果遇到 $ABDE$ 為平行四邊形時的情形，我們就會需要特判：

Proposition 9.2.6. 若四邊形 $(BB^*)(CC^*)$ 為一個平行四邊形，則其等角共軛軌跡 $\mathcal{K}$ 為經過 B, B^*, C, C^* 的等軸雙曲線 $\mathcal{H}$ 與無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 的聯集。

Proof. 顯然有 $\mathcal{L}_\infty \subseteq \mathcal{K}$，只要證明 $P \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}_\infty \iff P \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{L}_\infty$ 即可，而

$$P \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}_\infty \quad \iff \quad \measuredangle BPC + \measuredangle B^*PC^* = 0^\circ$$

取 Q 使得 $\triangle BCQ \overset{+}{\sim} \triangle C^*B^*P$，則 $CQ \parallel B^*P$，而

$$\begin{aligned} \measuredangle BPC + \measuredangle B^*PC^* = 0^\circ \quad &\iff \quad \measuredangle BPC + \measuredangle CQB = 0^\circ \\ &\iff \quad Q \in \odot(PBC) \\ &\iff \quad \measuredangle CB^*P = \measuredangle PQC = \measuredangle PBC. \end{aligned}$$

由 (8.1.10)，這等價於 P 位於以 $\overline{BB^*}$ 中點為中心，經過 B, B^*, C 的等軸雙曲線，即 $\mathcal{H}$。 ■

綜上所述，我們得到若 (P, P^*) 為關於四邊形 $(BB^*)(CC^*)$ 的等角共軛點對，則 (B, B^*) 為關於四邊形 $(CC^*)(PP^*)$ 的等角共軛點對，(C, C^*) 為關於四邊形 $(PP^*)(BB^*)$ 的等角共軛點對。我們把這樣的完美六點組 $(AD)(BE)(PQ)$ 稱作**等角完美六點組**。

Definition 9.2.7. 對於一個完全四線形 $\mathcal{Q}$，我們定義 $\mathcal{K}(\mathcal{Q})$ 為所有存在關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點的 P 的軌跡 (等角共軛軌跡)。類似地，我們定義 $\tau(\mathcal{Q})$ 為 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線，$\Phi_\mathcal{Q}$ 為 $\mathcal{Q}$ 的 C–S 共軛變換。

下面這個性質可以推論出許多等角共軛點的小引理。

Proposition 9.2.8. 若 (P, P^*), (Q, Q^*) 為關於完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點對，則 $\mathcal{K}(\mathcal{Q}) = \mathcal{K}((PP^*)(QQ^*))$。

Proof. $\mathcal{Q}$ 的密克點 M 為無窮遠點的情況是容易的，以下假設 $M \neq \infty$。因為 $(BB^*)(CC^*)(PP^*)$ 及 $(BB^*)(CC^*)(QQ^*)$ 皆為完美六點組，所以 (P, P^*), (Q, Q^*) 為兩組 C–S 共軛點對。注意到 $\overline{PP^*}$, $\overline{QQ^*}$ 的中點們皆位於 $\tau(\mathcal{Q})$ 上，所以由 (9.2.4)，我們有 $\mathcal{K}(\mathcal{Q}) = \mathcal{K}((PQ)(RS))$。 ■

換句話說，我們可以考慮完美 $2n$ 點組 $(X_1Y_2)(X_2Y_2)\cdots(X_nY_n)$，滿足 (X_i, Y_i) 都是關於四邊形 $(X_1Y_1)(X_2Y_2)$ 的等角共軛點對，那麼對於任意 i, j, k，

(X_k, Y_k) 是關於四邊形 $(X_iY_i)(X_jY_j)$ 的等角共軛點對。我們把這樣的完美 $2n$ 點組稱作等角完美 $2n$ 點組。

Corollary 9.2.9. 令 (P, P^*), (Q, Q^*) 為關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，若 (R, R^*) 為關於四邊形 $(PP^*)(QQ^*)$ 的等角共軛點對，則 (R, R^*) 也為關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對。

Proof. 因為 (P, P^*), (Q, Q^*) 為關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，所以存在以 P, P^* 為焦點的圓錐曲線 $\mathcal{C}_P$ 及以 Q, Q^* 為焦點的圓錐曲線 $\mathcal{C}_Q$ 使得 $\mathcal{C}_P$, $\mathcal{C}_Q$ 皆與 $\triangle ABC$ 相切。設 ℓ 為 $\mathcal{C}_P$, $\mathcal{C}_Q$ 的第四條公切線，則 (P, P^*), (Q, Q^*) 皆為完全四線形 $\triangle ABC \cup \ell$ 的等角共軛點對，所以 (R, R^*) 為關於 $\triangle ABC \cup \ell$ 的等角共軛點對。特別地，(R, R^*) 為關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對。 ■

Remark. 證明當中的「取第四條公切線」是一個常用的技巧，因為一般來說題目都是一個三角形，所以需要這條線來輔助變成完全四線形。

在上述推論中取 $(R, R^*) = (PQ^* \cap P^*Q, PQ \cap P^*Q^*)$，我們得到：

Corollary 9.2.10. 令 (P, P^*), (Q, Q^*) 為關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，則 $(PQ^* \cap P^*Q, PQ \cap P^*Q^*)$ 也為關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對。

這是 (7.4.5) 在等角共軛變換的特例。另一個重要的推論是：

Corollary 9.2.11. 令 (P, P^*), (Q, Q^*) 為關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，則四邊形 $\mathcal{Q} = (PP^*)(QQ^*)$ 的密克點 M 位於 $\odot(ABC)$ 上，且 M 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點為 $\infty_{\tau(\mathcal{Q})}$。

Proof. 在 (9.2.9) 中取 $(R, R^*) = (M, \infty_{\tau(\mathcal{Q})})$ 就有 $(M, \infty_{\tau(\mathcal{Q})})$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對。因為 $\infty_{\tau(\mathcal{Q})} \in \mathcal{L}_\infty$，所以 $M \in \odot(ABC)$。 ■

如果只是要證明 M 位於 $\odot(ABC)$ 上的話，這個引理其實有漂亮的純幾證明：取 X 使得 $\triangle MAX \overset{+}{\sim} \triangle MPQ \overset{+}{\sim} \triangle MQ^*P^*$。則 $\triangle APQ^* \overset{+}{\sim} \triangle XQP^*$ 告訴我

們

$$\measuredangle QXP^* = \measuredangle PAQ^* = \measuredangle QAP^*,$$

即 A, P^*, Q, X 共圓，等價地，

$$AX = AQ + P^*X - P^*Q.$$

同理，如果取 Y 使得 $\triangle MBY \overset{+}{\sim} \triangle MPQ \overset{+}{\sim} \triangle MQ^*P^*$，則

$$BY = BQ + P^*Y - P^*Q.$$

因此由 $\triangle ABQ^* \overset{+}{\sim} \triangle XYP^*$，

$$BY - AX = P^*Y - P^*X + \measuredangle AQB = \measuredangle AQ^*B + \measuredangle AQB = \measuredangle ACB,$$

即 $AX \cap BY \in \odot(ABC)$，但由 $\triangle MAX \overset{+}{\sim} \triangle MBY$ 這等價於 $M \in \odot(ABC)$。

Corollary 9.2.12. 令 (P, P^*) 為關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，I 為 $\triangle ABC$ 的內心或旁心，則存在一點 $M \in \odot(ABC)$ 使得 $\triangle MPI \overset{+}{\sim} \triangle MIP^*$。若 $\infty_{PP^*}^{\vee}$ 為 $\overline{PP^*}$ 中點，則 M 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點為 $\infty_{I\infty_{PP^*}^{\vee}}$。

Proof. 在上述推論中取 $(Q, Q^*) = (I, I)$。設 M 為 $(PP^*)(II)$ 的密克點，則 $\triangle MPI \overset{+}{\sim} \triangle MIP^*$。因為其牛頓線為 $I\infty_{PP^*}^{\vee}$，故 M 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點為 $\infty_{I\infty_{PP^*}^{\vee}}$。 ■

還記得之前的共圓完美八點組 (9.1.8) 嗎，把它套到等角共軛點上就有：

Proposition 9.2.13. 設 (P, P^*) 為關於四邊形 $(BB^*)(CC^*)$ 的等角共軛點對，

$$Q = \odot(PBC) \cap \odot(PB^*C^*) \cap \odot(P^*BC^*) \cap \odot(P^*B^*C),$$
$$Q^* = \odot(P^*B^*C^*) \cap \odot(P^*BC) \cap \odot(PB^*C) \cap \odot(PBC^*).$$

則 (Q, Q^*) 為關於 $(BB^*)(CC^*)$ 的等角共軛點對。

Proof. 由 (9.1.8)，我們有 $(BB^*)(CC^*)(PP^*)(QQ^*)$ 為完美八點組，所以只要證明 $\overline{QQ^*}$ 中點位於四邊形 $(BB^*)(CC^*)$ 的牛頓線 τ 上即可。注意到 $\overline{BB^*}, \overline{CC^*}, \overline{PP^*}, \overline{QQ^*}$ 的中點們共圓，而 $\overline{BB^*}, \overline{CC^*}, \overline{PP^*}$ 的中點們共線於 τ，所以 $\overline{QQ^*}$ 中點也在 τ 上。 ■

Example 9.2.14 (2018 IMO P6)**.** 一個凸四邊形 $ABCD$，滿足 $AB \cdot CD = BC \cdot DA$。點 X 在 $ABCD$ 內部，滿足

$$\angle XAB = \angle XCD \quad 且 \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

證明 $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$。

Solution. 原題等價於證明 X 有關於四邊形 $(AC)(BD)$ 的等角共軛點。取 Y, P, Q 使得 $(AC)(BD)(XY)(PQ)$ 為共圓完美八點組，其中

$$P \in \odot(AXB) \cap \odot(CXD), \quad Q \in \odot(BXC) \cap \odot(DXA),$$

則由上述性質我們只須證明 (P, Q) 為關於四邊形 $(AC)(BD)$ 的等角共軛點對。由

$$\measuredangle XPB = \measuredangle XAB = \measuredangle XCD = \measuredangle XPD,$$

我們知道 B, P, D 共線。同理有 A, Q, C 共線。

如果我們現在分別在線段 $\overline{BD}, \overline{AC}$ 上取兩點 P', Q' 使得 (P', Q') 為關於四邊形 $(AC)(BD)$ 的等角共軛點對，則我們知道

$$X' = \odot(APB) \cap \odot(BQC) \cap \odot(CPD) \cap \odot(DQA)$$

滿足所有 X 的性質。而 X, X' 皆位於 $ABCD$ 內部告訴我們 $X = X'$，那麼原題就得證了。

事實上，我們可以簡單地證明 AC 關於 $\angle BAD$ 的等角線 ℓ_A，AC 關於 $\angle DCB$ 的等角線 ℓ_C 及 BD 共點：令 P'_A, P'_C 分別為 ℓ_A 及 ℓ_C 與 BD 的交點，Z 為 AC 與 BD 的交點，則

$$\begin{aligned}
\frac{BP'_A}{P'_A D} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\sin \measuredangle BAP'_A}{\sin \measuredangle P'_A AD} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\sin \measuredangle ZAD}{\sin \measuredangle BAZ} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{DA}^2} \cdot \frac{ZD}{BZ}, \\
\frac{BP'_C}{P'_C D} &= \frac{\overline{CB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\sin \measuredangle BCP'_C}{\sin \measuredangle P'_C CD} = \frac{\overline{CB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\sin \measuredangle ZCD}{\sin \measuredangle BCZ} = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{DC}^2} \cdot \frac{ZD}{BZ}.
\end{aligned}$$

由條件 $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{BC} \cdot \overline{DA}$，我們知道上面兩個值相等，因此 $P'_A = P'_C$。我們把 ℓ_A, ℓ_C, BD 所共的點叫做 P'。類似地定義 $Q' \in AC$，我們發現 (P', Q') 真的是關於四邊形 $(AC)(BD)$ 的等角共軛點對，因此原命題成立。

透過 (9.2.13)，我們有：

Proposition 9.2.15. 令 (P,P^*) 為四邊形 $(BB^*)(CC^*)$ 的等角共軛點對，O, O_P, O_B, O_C 分別為

$$\triangle PBC,\ \triangle PB^*C^*,\ \triangle P^*BC^*,\ \triangle P^*B^*C$$

的外心，O^*, O_P^*, O_B^*, O_C^* 分別為

$$\triangle P^*B^*C^*,\ \triangle P^*BC,\ \triangle PB^*C,\ \triangle PBC^*$$

的外心。則 $(OO^*)(O_PO_P^*)(O_BO_B^*)(O_CO_C^*)$ 構成共圓等角完美八點組，且其密克點與四邊形 $(BB^*)(CC^*)$ 的密克點重合，其牛頓線與四邊形 $(BB^*)(CC^*)$ 的牛頓線垂直。

Proof. 設 $\odot(O), \odot(O_P), \odot(O_B), \odot(O_C)$ 共點於 Q，$\odot(O^*), \odot(O_P^*), \odot(O_B^*), \odot(O_C^*)$ 共點於 Q^*，則 (Q,Q^*) 為關於 $(BB^*)(CC^*)$ 的等角共軛點對。我們首先注意到

$$\measuredangle QBO = 90^\circ - \measuredangle BPQ = 90^\circ - \measuredangle Q^*PB^* = \measuredangle B^*Q^*O_B^*,$$

因此 $\triangle OBQ \overset{+}{\sim} \triangle O_B^*Q^*B^*$。由 $\triangle MBQ \overset{+}{\sim} \triangle MQ^*B^*$ 知道

$$\triangle MOO_B^* \overset{+}{\sim} \triangle MBQ^* \overset{+}{\sim} \triangle MQB^*. \tag{ȣ}$$

類似地，我們有

$$\triangle MO^*O_B \overset{+}{\sim} \triangle MB^*Q \overset{+}{\sim} \triangle MBQ^*,$$

因此 $(OO^*)(O_BO_B^*)$ 的密克點是 M。同理，我們得到 $(OO^*)(O_PO_P^*)(O_BO_B^*)(O_CO_C^*)$ 構成完美八點組，且其密克點為 M。

因為

$$O_BO + O_BO^* = \perp BQ + \perp C^*P^* = \perp BP^* + \perp C^*Q = O_BO_P^* + O_BO_P,$$

所以 O_B 有關於 $(OO^*)(O_PO_P^*)$ 的等角共軛點，且由 $(OO^*)(O_PO_P^*)(O_BO_B^*)$ 為完美六點組，該點為 O_B^*。由對稱性，我們得到 $(OO^*)(O_PO_P^*)(O_BO_B^*)(O_CO_C^*)$ 為完美等角八點組。類似地，由

$$O_BO + O_CO_P = \perp BQ + \perp B^*Q = \perp CQ + \perp C^*Q = O_CO + O_BO_P,$$

我們得到 O, O_P, O_B, O_C 共圓，並由對稱性，我們得到 $(OO^*)(O_PO_P^*)(O_BO_B^*)(O_CO_C^*)$ 為共圓完美八點組。

最後，設 τ, τ_O 分別為 $(BB^*)(QQ^*)$ 及 $(O_BO_B^*)(OO^*)$ 的牛頓線，則由 (♉)，

$$\tau = BQ + BQ^* - BM = \perp OO_B + OO_B^* - OM = \tau_O + 90^\circ,$$

即 $\tau \perp \tau_O$。 ■

如果我們再作由共圓等角完美八點組 $(OO^*)(O_PO_P^*)(O_BO_B^*)(O_CO_C^*)$ 的外心們構成的共圓等角完美八點組 $(XX^*)(X_PX_P^*)(X_BX_B^*)(X_CX_C^*)$，從上面的證明我們還可以看出 $(XX^*)(X_PX_P^*)(X_BX_B^*)(X_CX_C^*)$ 其實就是 $(AD)(BE)(PQ)(RS)$ 關於 M 的位似。

接下來這個好像跟完美六點組沒什麼關係，不過就稍微提一下吧。

Proposition 9.2.16. 令 (P, P^*) 為四邊形 $(BB^*)(CC^*)$ 的等角共軛點對，則 $\triangle PBC$, $\triangle PB^*C^*$, $\triangle P^*BC^*$, $\triangle P^*B^*C$ 的垂心們 H, H_P, H_B, H_C 共線且垂直於 $(BB^*)(CC^*)$ 的牛頓線 τ。

Proof. 由對稱性，我們只要證明 HH_B 垂直於 τ 即可。考慮平移變換 $C^* \mapsto P$，並令 $P^* \mapsto X$, $B \mapsto Y$。令 C', X' 分別為 C, X 關於 $\odot(PBC)$, $\odot(XYP)$ 的對徑點，則 $(BP)(C'H)$, $(BP)(X'H_B)$ 皆為平行四邊形，因此 $C'X' \parallel HH_B$。由

$$\measuredangle CC'P = \measuredangle CBP = \measuredangle P^*BC^* = \measuredangle XYP = \measuredangle XX'P$$

及 $\measuredangle C'PC = \measuredangle X'PX = 90^\circ$ 可得 $\triangle C'CP \overset{+}{\sim} \triangle X'XP$，或者說，$\triangle CXP \overset{+}{\sim} \triangle C'X'P$，因此 $CX \perp C'X'$。而 $\overline{CC^*}$, $\overline{XC^*}$ 的中點們皆位於 τ 上，所以 $HH_B \parallel C'X' \perp \tau$。 ■

這時候我們可以看另外四個三角形 $\triangle P^*B^*C^*$, $\triangle P^*BC$, $\triangle PB^*C$, $\triangle PBC^*$，就會有另一組四點共線 H^*, H_P^*, H_B^*, H_C^*。那你可能會好奇什麼時候這八點共線，其實他有個等價條件：

Proposition 9.2.17. 令 (P, P^*) 為四邊形 $(BB^*)(CC^*)$ 的等角共軛點對，則

$\triangle PBC$, $\triangle PB^*C^*$, $\triangle P^*BC^*$, $\triangle P^*B^*C$, $\triangle P^*B^*C^*$, $\triangle P^*BC$, $\triangle PB^*C$, $\triangle PBC^*$

的垂心們共於一線 ℓ 若且唯若 PP^*, BB^*, CC^* 共於一點 X。此時，$X \in \ell$。

我們先證明以下引理：

Lemma 9.2.18. 設 (P, P^*) 為關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，H, H_P^* 分別為 $\triangle PBC$, $\triangle P^*BC$ 的垂心。以 P, P^* 為焦點並與 $\triangle ABC$ 相切的圓錐曲線分別切 CA, AB 於 E, F，則 PP^*, EF, HH_P^* 共點。

Proof. 令 X 為 PP^* 與 HH_P^* 的交點，由 $PH \parallel P^*H_P^*$ 及 (P, P^*) 為關於 $(CF)(AB)$ 的等角共軛點對，

$$\frac{PX}{P^*X} = \frac{PH}{P^*H_P^*} = \frac{\overline{BC}\cot\measuredangle BPC}{\overline{BC}\cot\measuredangle BP^*C} = \frac{\cot\measuredangle APF}{\cot\measuredangle AP^*F}.$$

注意到 A 為四邊形 $(PP^*)(EF)$ 的切圓 ω 的圓心。設 S, T 分別為 ω 與 PE, P^*F 的切點，U 為 PE 與 P^*F 的交點。由牛頓第三定理 (6.3.14)，PP^*, EF, ST 共點，最後，由

$$\frac{PX}{XP^*} \cdot \frac{P^*T}{TU} \cdot \frac{US}{SP} = -\frac{\cot\measuredangle APF}{\cot\measuredangle AP^*F} \cdot \frac{\tan\measuredangle P^*AT}{\tan\measuredangle TAU} \cdot \frac{\tan\measuredangle UAS}{\tan\measuredangle SAP} = -1$$

及孟氏定理知 X, T, S 共線。 ■

回到原命題：

Proof. 由 (9.2.16)，那八個垂心們共線若且唯若 $\triangle PBC$ 的垂心 H 與 $\triangle P^*BC$ 的垂心 H_P^* 連線 ℓ 垂直於牛頓線 τ。因此，當我們固定 B, C, P, P^* 時（這時候 B^*C^* 構成以 P, P^* 為焦點並與 BC 相切的圓錐曲線的包絡線），B^*, C^* 在 $HH_P^* \perp \tau$ 下是被唯一決定的（除非 $ABDE$ 是平行四邊形，但這時結論顯然）。所以我們只需證明 $(\Leftarrow)$ 與

(♠) 給定 B, C, P, P^* 時，存在 B^*, C^* 使得 $(PP^*)(BB^*)(CC^*)$ 為的等角完美六點組且 PP^*, BB^*, CC^* 共點。

我們先構造 (♠)，令 $\mathcal{C}$ 是以 P, P^* 為焦點並與 BC 相切的圓錐曲線，分別作 B, C 關於 $\mathcal{C}$ 的另一條切線 T_B, T_C 並分別切 $\mathcal{C}$ 於 U, V。設 $X = PP^* \cap UV$, $B^* = BX \cap T_C$, $C^* = CX \cap T_B$。由牛頓第三定理 (6.3.14)，B^*C^* 與 $\mathcal{C}$ 相切，故 $(PP^*)(BB^*)(CC^*)$ 為等角完美六點組且 PP^*, BB^*, CC^* 共於 X。

(⇐) 我們證明 H, H_P^*, X 共線，剩下的則同理。同樣地，由牛頓第三定理 (6.3.14)，若 U, V 分別為 BC^*, CB^* 與 $\mathcal{C}$ 的切點，則 PP^*, BB^*, CC^*, UV 共點於 X。由 (9.2.18)，PP^*, UV, HH_P^* 共點，證畢。 ■

9.2.1 馴服巨龍

讓我們回來看看等角共軛軌跡 $\mathcal{K}$。如果我們今天把兩個無窮虛圓點 ∞_i, ∞_{-i} 替換成任意兩點 $\mathbf{W} = \{W_+, W_-\}$，那麼我們也可以定義任意完全四線形的 $\mathbf{W}$-共軛軌跡：

$$\mathcal{K}^{\mathbf{W}}(\mathcal{Q}) = \mathcal{K}^{W_+\times W_-}(\mathcal{Q}) = \{P \mid \exists P^* \text{使得在所有} \triangle \subseteq \mathcal{Q} \text{上，} P \times P^* = W_+ \times W_-\}.$$

上面的那些證明幾乎都可以直接改成 $\mathbf{W}$-版本。這時候 $\mathbf{W}$-密克點 $M_{\mathbf{W}}$ 就是圓錐曲線們 $\{(\triangle\mathbf{W})\}_{\triangle\subseteq\mathcal{Q}}$ 的共同交點，$\mathbf{W}$-牛頓線 $\tau_{\mathbf{W}}$ 就是 $\mathbf{W}$-無窮遠線 $\mathcal{L}_{\mathbf{W}} = W_+W_-$ 在 $\mathcal{Q}$ 的對角線三角形 δ 上以四線 ℓ_i 為不動線的線等共軛變換下的像 $\mathcal{L}_{\mathbf{W}}^{\vee}$，$\mathbf{W}$-C–S 共軛變換就是 $\triangle M_{\mathbf{W}}\mathbf{W}$ 上的點等共軛變換將 $\mathcal{Q}$ 的對頂點對互送。

對偶地，我們可以定義任意完全四點形 q 的 $\mathbf{w}$-共軛軌跡：

$$k^{\mathbf{w}}(q) = k^{w_+\times w_-}(q) = \{\ell \mid \exists \ell^* \text{使得在所有} \triangle \subseteq q \text{上，} \ell \times \ell^* = w_+ \times w_-\}.$$

因為我們知道只要是 $\mathcal{K}$ 裡面任兩對等角共軛點所圍成的完全四線形會有同一個等角共軛軌跡，所以乾脆就先把完全四線形 $\mathcal{Q}$ 拋掉，那這樣當然也還是可以定義牛頓線、等角共軛變換 (分別記為 $\tau(\mathcal{K}), \Phi_{\mathcal{K}}$)、密克點、等角共軛點等等。

Definition 9.2.19. 一個三次曲線 $\mathcal{K}$ 被稱為巨龍若存在一個完全四線形 $\mathcal{Q}$ 使得 $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{Q})$。

那我們關心的第一件事情是可以對它上面的點反演：

Proposition 9.2.20. 令 A 為巨龍 $\mathcal{K}$ 上任一點，則 $\mathcal{K}$ 關於以 A 為中心的反演變換 $\mathfrak{I}$ 下的像 $\mathcal{K}^{\mathfrak{I}}$ 也是巨龍。更進一步地，如果 (P, P^*) 為關於 $\mathcal{K}$ 的等角共軛點對，則 $(P^{\mathfrak{I}}, (P^*)^{\mathfrak{I}})$ 也為關於 $\mathcal{K}^{\mathfrak{I}}$ 的等角共軛點對。

Proof. 令 (B, B^*) 為任一對 $\mathcal{K}$ 的等角共軛點對，C 為 AB^* 與 A^*B 的交點，C^* 為 AB 與 A^*B^* 的交點，則 (C, C^*) 為 $\mathcal{K}$ 的等角共軛點對。而

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{K} &\iff PB + PB^* = PC + PC^* \\ &\iff (AP + AB - P^{\mathfrak{I}}B^{\mathfrak{I}}) + (AP + AB^* - P^{\mathfrak{I}}(B^*)^{\mathfrak{I}}) \\ &\qquad = (AP + AC - P^{\mathfrak{I}}C^{\mathfrak{I}}) + (AP + AC^* - P^{\mathfrak{I}}(C^*)^{\mathfrak{I}}) \\ &\iff P^{\mathfrak{I}}B^{\mathfrak{I}} + P^{\mathfrak{I}}(B^*)^{\mathfrak{I}} = P^{\mathfrak{I}}C^{\mathfrak{I}} + P^{\mathfrak{I}}(C^*)^{\mathfrak{I}} \\ &\iff P^{\mathfrak{I}} \in \mathcal{K}((B^{\mathfrak{I}}(B^*)^{\mathfrak{I}})(C^{\mathfrak{I}}(C^*)^{\mathfrak{I}})). \end{aligned}$$

因此 $\mathfrak{I}(\mathcal{K})$ 為 $(B^{\mathfrak{I}}(B^*)^{\mathfrak{I}})(C^{\mathfrak{I}}(C^*)^{\mathfrak{I}})$ 的等角共軛軌跡。

若 P^* 為 P 關於 $\mathcal{K}$ 的等角共軛點，那麼 $(PP^*)(BB^*)(CC^*)$ 為完美六點組告訴我們 $(P^{\mathfrak{I}}(P^*)^{\mathfrak{I}})(B^{\mathfrak{I}}(B^*)^{\mathfrak{I}})(C^{\mathfrak{I}}(C^*)^{\mathfrak{I}})$ 也是完美六點組。 ■

其實三次曲線上也是可以配極的，只是有極圓錐曲線跟極線兩種，見第 11 章。主要是有一天閒閒沒事作密克點關於巨龍的極圓錐曲線，然後就發現了這個：

Proposition 9.2.21. 令 M 為巨龍 $\mathcal{K}$ 的密克點，過 M 作動線 ℓ 並交 $\mathcal{K}$ 於 R, S 兩點，取 $M_\ell^\vee$ 使得 $(R, S; M, M_\ell^\vee) = -1$，則 $M_\ell^\vee$ 的軌跡為一圓。

Proof. 令 R^*, S^* 分別為 R, S 關於 $\mathcal{K}$ 的等角共軛點。則 $\Phi_{\mathcal{K}}(M_\ell^\vee)$ 為 $\overline{R^*S^*}$ 中點。由於 RS 交 R^*S^* 於 M，因此 RS^* 交 R^*S 於 $\infty_{\tau(\mathcal{K})}$，即 $RS^* \parallel R^*S \parallel \tau = \tau(\mathcal{K})$。而 $\overline{RR^*}, \overline{SS^*}$ 的中點們皆位於 τ 上，所以 $\overline{R^*S^*}$ 中點位於 τ 上，因此 $M^\vee$ 的軌跡為 $\Phi_{\mathcal{K}}(\tau)$。 ■

事實上，∞_τ 的極圓錐曲線是個等軸雙曲線，但這邊不打算證明。有了上面這個性質就可以證明下面這個：

Theorem 9.2.22 (Telv Cohl/老封的猜想)**.** 令 M 為巨龍 $\mathcal{K}$ 的密克點，過 M 作動線 ℓ 並交 $\mathcal{K}$ 於 R, S 兩點，則以 $\overline{RS}$ 為直徑的圓們共軸。

Proof. 延續上個性質的標號。在上個性質中，我們證明了 $\overline{RS}$ 的中點皆位於 τ 上，所以只須證明存在一點非無窮遠的點為它們的根心。當 $M \in \tau$ 時，其

實全部的圓都以 M 為圓心，所以根軸就是無窮遠線。當 $M \notin \tau$ 時，令 O 為 $\Phi_{\mathcal{K}}(\tau)$ 的圓心，由 $M, M^\vee \in \Phi_{\mathcal{K}}(\tau)$ 知 $\Phi_{\mathcal{K}}(\tau)$ 與 $\odot(\overline{RS})$ 正交，因此 O 關於 $\odot(\overline{RS})$ 的冪為 $\Phi_{\mathcal{K}}(\tau)$ 的半徑，而其為定值，所以過 O 垂直 τ 的直線為它們的根軸。 ■

就把那個軸稱為 $\mathcal{K}$ 的老封軸（我亂取的）。這時候如果所有這些圓都交在老封軸上的兩個點的話（當然這在某些 $\mathcal{K}$ 並不會是實交點，在等角共軛軌跡分成兩部分的時候才會是實交點），那這兩個點有個你一定猜得到的性質：

Proposition 9.2.23. 延續 (9.2.22) 的標號，令 U, V 為所有 $\odot(\overline{RS})$ 的共同交點，則 $U, V \in \mathcal{K}(\mathcal{Q})$ 且 (U, V) 為關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點對。

Proof. 令 R^*, S^* 分別為 R, S 關於 $\mathcal{K}$ 的等角共軛點，則

$$\measuredangle RUS + \measuredangle R^*US^* = 90^\circ + 90^\circ = 0^\circ,$$

因此 $U \in \mathcal{K}$，同理 $V \in \mathcal{K}$。由

$$\measuredangle RUS + \measuredangle RVS = 90^\circ + 90^\circ = 0^\circ = \measuredangle R\infty_\tau S,$$
$$\measuredangle R^*US^* + \measuredangle R^*VS^* = 90^\circ + 90^\circ = 0^\circ = \measuredangle R^*\infty_\tau S^*,$$

可得 (U, V) 為關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點對。 ■

Proposition 9.2.24. 令 $M, \mathcal{I}$ 分別為巨龍 $\mathcal{K}$ 的密克點、老封軸，則 M 關於 $\mathcal{I}$ 的垂足 V 位於 $\mathcal{K}$ 上。

Proof. 設 $M\infty_{\tau(\mathcal{K})}$ 交 $\mathcal{K}$ 另一點於 V'，則以 $\overline{V'\infty_{\tau(\mathcal{K})}}$ 為直徑的圓也跟其它 $\odot(\overline{RS})$ 共軸，但 $\odot(\overline{V'\infty_{\tau(\mathcal{K})}})$ 就是過 V' 垂直 $\tau(\mathcal{K})$ 的直線，又 $\mathcal{I} \perp \tau$，$V = V' \in \mathcal{K}$。 ■

我們稱上個性質所定義出來的 V 為 $\mathcal{K}$ 的**影消點**。

Proposition 9.2.25. 令 T 為巨龍 $\mathcal{K}$ 的影消點，Y 為 V 關於 $\mathcal{K}$ 的牛頓線 τ 的垂足，則對於任意 $P, Q \in \mathcal{K}$，(P, Q) 為關於 $\mathcal{K}$ 的等角共軛點對若且唯若 $\triangle PVY, \triangle QVY$ 的垂心關於 τ 對稱。

習題

Problem 1. 設三角形 ABC 的內心為 I，D 為 A 關於 BC 的垂足，A^* 為 A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點。證明：$\measuredangle BID = \measuredangle A^*IC$。

Problem 2 (2018 3J M3)**.** 設三角形 ABC 的內心為 I，ℓ 為線段 $\overline{AI}$ 的中垂線。令 P 為 $\triangle ABC$ 的外接圓上一點，Q 為 AP 與 ℓ 的交點，R 位於 ℓ 上使得 $\angle IPR = 90^\circ$。設 IQ 與 $\triangle ABC$ 的中位線（平行於 BC）交於 M。證明：$\angle AMR = 90^\circ$。

Problem 3 (2019 2J M6)**.** 設三角形 ABC 的內心為 I，A-旁心為 J。令 $\overline{AA'}$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓的直徑，H_1, H_2 分別為 $\triangle BIA', \triangle CJA'$ 的垂心。證明：H_1H_2 平行於 BC。

Problem 4 (Tau)**.** 設 I, O, N 分別為三角形 ABC 的內心、外心及九點圓圓心。證明：若 $IN \parallel BC$，則 $\angle AIO = 135^\circ$。

Problem 5 (2023 1J I2-G)**.** 有一等腰梯形 $ABCD$，其中 AD 平行於 BC，並設 Ω 為其外接圓。令 X 為 D 關於 BC 的對稱點，Q 為 Ω 的弧 BC（不含 A）上一點，P 為 DQ 與 BC 的交點。點 E 滿足 EQ 平行於 PX 且 EQ 平分 $\angle BEC$。證明 EQ 亦平分 $\angle AEP$。

Problem 6. 令 $\odot(I)$ 為 $\triangle ABC$ 的內切圓，P 位於 $\odot(I)$ 上使其關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 Q 位於 $\odot(I)$ 外。令 $\triangle QEF$ 為 Q 關於 $\odot(I)$ 的兩條切線與 P 關於 $\odot(I)$ 的切線所圍成的三角形並假設 $\odot(I)$ 為其內切圓，證明：$\triangle QEF$ 的 Q-偽內切圓切點 S 位於 $\odot(ABC)$ 上。

9.3 當不動點遇上牛頓線

當一個完全四線形有內切圓（或旁切圓）的時候，通常會有一些美好的性質，放在完美六點組內也不例外，來看看有什麼優秀的東西吧。首先，因

為 (I,I) 為關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點對，所以：

Proposition 9.3.1. 設完全四線形 $\mathcal{Q}$ 有切圓 $\odot(I)$，關於 $\mathcal{Q}$ 的 C–S 共軛變換為 Φ，則 I 為 Φ 的不動點。

也就是說 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線 τ 上有不動點 I。

透過完美六點組，我們可以得到之前花了一點力氣證明的 (4.3.5)：

Proposition 9.3.2. 令 M 為有切圓 $\odot(I)$ 的四邊形 $(BB^*)(CC^*)$ 的密克點，J 為 I 關於 M 的對稱點，則 $(IJ)(BB^*)$, $(IJ)(CC^*)$ 為調和四邊形。

Proof. C–S 共軛變換 Φ 的不動點為 I, J，因此由 (9.1.4) 我們知道 $(IJ)(BB^*)$, $(IJ)(CC^*)$ 為調和四邊形。 ■

Proposition 9.3.3. 設完全四線形 $\mathcal{Q}$ 有切圓 $\odot(I)$，則其等角共軛軌跡 $\mathcal{K}$ 為一個等軸雙曲線 $\mathcal{H}$ 在關於 $\odot(I)$ 的反演變換下的像。這時候 $\mathcal{K}$ 被稱為一個**斜環索線** (**oblique strophoid**)，切圓圓心 I 則被稱為 $\mathcal{K}$ 的內心。

Proof. 設 $(BB^*)(CC^*)$ 為 $\mathcal{Q}$ 中的一個四邊形。令 $\mathfrak{I}$ 為關於 $\odot(I)$ 的反演變換，則 $(B^{\mathfrak{I}}(B^*)^{\mathfrak{I}})(C^{\mathfrak{I}}(C^*)^{\mathfrak{I}})$ 為平行四邊形，因此由 $I \in \mathcal{K}$，(9.2.20) 及 (9.2.6)，$\mathcal{K}^{\mathfrak{I}}$ 為某個等軸雙曲線 $\mathcal{H}$ 聯集無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$。故

$$\mathcal{K} = (\mathcal{H} \cup \mathcal{L}_\infty)^{\mathfrak{I}} = \mathcal{H}^{\mathfrak{I}} \cup I = \mathcal{H}^{\mathfrak{I}}.$$ ■

Corollary 9.3.4. 延續 (9.3.3) 的標號，對於任意 $\mathcal{K}$ 的等角共軛點對 (P,P^*)，P, P^* 在關於 $\mathcal{K}$ 的內心 I 的反演變換下的像 $P^{\mathfrak{I}}$, $(P^*)^{\mathfrak{I}}$ 為 $\mathcal{H}$ 的一組對徑點。

Proof. 令 M 為 $\mathcal{K}$ 的密克點，固定 $\mathcal{K}$ 上兩對等角共軛點對 (B,B^*), (C,C^*)，J 為 I 關於 M 的對稱點。則 (9.3.2) 告訴我們 $(IJ)(PP^*)$, $(IJ)(BB^*)$, $(IJ)(CC^*)$ 為調和四邊形，所以 J^* 為線段們 $\overline{P^{\mathfrak{I}}(P^*)^{\mathfrak{I}}}$, $\overline{B^{\mathfrak{I}}(B^*)^{\mathfrak{I}}}$, $\overline{C^{\mathfrak{I}}(C^*)^{\mathfrak{I}}}$ 的共同中點，即 $\mathcal{H}$ 的中心，並且 $P^{\mathfrak{I}}$, $(P^*)^{\mathfrak{I}}$ 為 $\mathcal{C}$ 的一組對徑點。 ■

Corollary 9.3.5. 令 (P,P^*) 為關於 $\triangle ABC$ 的一組等角共軛點對，$\odot(I)$ 為

$\triangle ABC$ 的內切圓或旁切圓。令 $\mathfrak{I}$ 為關於 $\odot(I)$ 的反演變換，則六點

$$A^{\mathfrak{I}},\ B^{\mathfrak{I}},\ C^{\mathfrak{I}},\ P^{\mathfrak{I}},\ (P^*)^{\mathfrak{I}},\ I$$

共等軸雙曲線。

Proof. 令 $\mathcal{C}$ 為以 P, P^* 為焦點且與 $\triangle ABC$ 相切的圓錐曲線，ℓ 為 $\mathcal{C}$ 與 $\odot(I)$ 的第四條切線。則 (P,P^*), (I,I) 為關於 $\mathcal{Q} = \triangle ABC \cup \ell$ 的等角共軛點對，因此 $\mathcal{K}(\mathcal{Q})$ 關於 $\odot(I)$ 的反演下的像為一個等軸雙曲線 $\mathcal{H}$，而我們知道 $A^{\mathfrak{I}}$, $B^{\mathfrak{I}}$, $C^{\mathfrak{I}}$, $P^{\mathfrak{I}}$, $(P^*)^{\mathfrak{I}}$, I 共於 $\mathcal{H}$。 ■

基於我們對等軸雙曲線的認識，我們還可以得到下面兩個推論：

Corollary 9.3.6. 令 M 為 $\mathcal{K}$ 的密克點，過 M 作一條直線 ℓ 交 $\mathcal{K}$ 於 R, S 兩點，則 $\measuredangle RIS = 90^\circ$。

Proof. 顯然地，$R^{\mathfrak{I}}$, $S^{\mathfrak{I}}$ 為 $\mathcal{H}$ 上兩點滿足 I, $M^{\mathfrak{I}}$, $R^{\mathfrak{I}}$, $S^{\mathfrak{I}}$ 共圓，而 I, $M^{\mathfrak{I}}$ 為 $\mathcal{H}$ 的一組對徑點。由 (8.1.10) 我們知道 $\overline{R^{\mathfrak{I}}S^{\mathfrak{I}}}$ 為 $\odot(IM^{\mathfrak{I}}R^{\mathfrak{I}}S^{\mathfrak{I}})$ 的直徑，即 $\measuredangle RIS = 90^\circ$。 ■

Corollary 9.3.7. 若一對等角共軛點對 (P,P^*) 的連線 PP^* 交 $\mathcal{K}$ 於 V_P，則 $IV_P \perp PP^*$。

Proof. 顯然地，$P^{\mathfrak{I}}$, $(P^*)^{\mathfrak{I}}$, $V_P^{\mathfrak{I}}$ 為 $\mathcal{H}$ 上三點滿足 I, $P^{\mathfrak{I}}$, $(P^*)^{\mathfrak{I}}$, $V_P^{\mathfrak{I}}$ 共圓，而 $P^{\mathfrak{I}}$, $(P^*)^{\mathfrak{I}}$ 為 $\mathcal{H}$ 的一組對徑點，故 $\overline{IV_P^{\mathfrak{I}}}$ 為 $\odot(IP^{\mathfrak{I}}(P^*)^{\mathfrak{I}}V_P^{\mathfrak{I}})$ 的直徑，即 $IV_P \perp PP^*$。 ■

還記得老封的猜想嗎 (9.2.22)，那這時候其實就是 $(U,V) = (I,I)$ 的情形，也就是：

Proposition 9.3.8. 令 M, τ 分別為斜環索線 $\mathcal{K}$ 的密克點、牛頓線，過 M 作動線 ℓ 並交 $\mathcal{K}$ 於 R, S 兩點，則以 $\overline{RS}$ 為直徑的圓們共軸於 I 關於 τ 的垂線，且其為 I 關於 $\odot(\overline{RS})$ 的切線。

Proof. 由 (9.2.22) 知只須證明該垂線與 $\odot(\overline{RS})$ 相切，而 $\overline{RS}$ 中點 N 位於 τ 上，所以 $NI \parallel \tau$，因此該垂線與 $\odot(\overline{RS})$ 相切。 ■

這時候 $\mathcal{K}$ 的影消點 T 為 I 關於 $M\infty_\tau$ 的垂足。

那巨龍對其上任一點反演是巨龍，所以斜環索線對其上任一點反演當然也是斜環索線。

Proposition 9.3.9. 令 A 為斜環索線 $\mathcal{K}$ 上非內心的一點，則 $\mathcal{K}$ 關於以 A 為中心的反演變換下的像仍然為斜環索線。

Proof. 令 I 為 $\mathcal{K}$ 的內心，$\mathcal{K}^*$, I^* 分別為 $\mathcal{K}$, I 關於以 A 為中心的反演變換下的像，則 $\mathcal{K}^*$ 關於以 I^* 為中心的反演下的像是 $\mathcal{K}$ 關於以 I 為中心的反演變換合成一個對稱變換下的像 (3.1.16)，即等軸雙曲線，所以 $\mathcal{K}^*$ 為斜環索線。 ■

因為 (I, I) 是所有 $\triangle \subseteq \mathcal{Q}$ 的等角共軛點對，所以在第 9.3.3 小節的記號下，$\mathcal{K}(\mathcal{Q})$ 其實就是 $\mathcal{K}^{I^2}(\mathcal{Q})$。一般來說，我們有：

Theorem 9.3.10. 完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的 W^2-共軛軌跡 $\mathcal{K}^{W^2}(\mathcal{Q})$ 為 (BB^*CC^*W) 在 $\triangle AA^*W$ 上的等共軛變換 $B \times B^* = C \times C^*$ 下的像。

Proof. 令 $Q = B \times B^* \div P = C \times C^* \div P$。那麼由 (7.4.6)，

$$B(W, Q; C, C^*) = B(W, BQ \cap B^*P; A^*, A) = P(W, B^*; A^*, A),$$
$$B^*(W, Q; C, C^*) = B^*(W, B^*Q \cap BP; A, A^*) = P(W, B; A, A^*).$$

因此 Q 位於圓錐曲線 (BB^*CC^*W) 上若且唯若 $P(W, W)$, $P(A, A^*)$, $P(B, B^*)$ 定義了一個 $\mathbf{T}P$ 上的對合變換，而這由（切線版本的）(1.3.14)，等價於 $P \in \mathcal{K}^{W^2}(\mathcal{Q})$。 ■

習題

Problem 1. 設銳角三角形 ABC 的外心為 O，內心為 I。令 D, E, F 分別為劣弧 $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, $\widehat{AB}$ 的中點，S 為 BO 與 FD 的交點，T 為 CO 與 DE 的交點，H 為三角形 OEF 的垂心。證明：OI, HD, ST 共點。

Problem 2. 令斜環索線 $\mathcal{K}$ 的內心為 I，若 $P \in \mathcal{K}(\mathcal{Q})$，令過 P 且垂直 PI 的直線為 ℓ_P。證明：ℓ_P 的包絡線是一個圓錐曲線。

Problem 3. 設四邊形 $ABCD$ 有內切圓 $\odot(I)$，AB 交 CD 於 E，AD 交 BC 於 F，AC 交 BD 於 T。設 $\odot(ATB)$ 與 $\odot(CTD)$ 再交於 P，$\odot(ATD)$ 與 $\odot(BTC)$ 再交於 Q。證明：若 E, F, P, Q 共圓，則 I 也在這個圓上。

9.4 對偶——等截共軛軌跡

我們知道等角共軛點的對偶是等截共軛線（見第 1.5 節），因此我們希望等角共軛點的這些性質也能推廣至等截共軛線的情形。

給定完全四點形 $q = (A, B, C, D)$。我們想要決定等截共軛軌跡

$$k(q) = \{\ell \mid \ell \text{ 有關於 } q \text{ 的等截共軛線}\}.$$

注意到 $\mathcal{L}_\infty \in k(q)$ 是等截共軛變換的不動線，所以 $k(q)$ 其實在第 9.2.1 小節中的記號就是 $k^{\mathcal{L}_\infty^2}(q)$，因此我們應該把它想成是斜環索線 (9.3.3) 的對偶。為了方便討論，我們比較常考慮扣掉無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 的等截共軛軌跡

$$k^\circ(q) = k(q) \setminus \{\mathcal{L}_\infty\}.$$

讓我們回憶這個性質 (1.5.5)：

Proposition 9.4.1. 對於任意一線 $\ell \neq \mathcal{L}_\infty$，令 $P_{XY} = XY \cap \ell$。則 ℓ 有關於 q 的等截共軛線若且唯若 $\overline{P_{BC}P_{AD}}, \overline{P_{CA}P_{BD}}, \overline{P_{AB}P_{CD}}$ 的中點重合。

對於有等截共軛線的 ℓ，令 M_ℓ 為 $\overline{P_{BC}P_{AD}}, \overline{P_{CA}P_{BD}}, \overline{P_{AB}P_{CD}}$ 的共同中點。用迪沙格對合 (7.2.5) 來看，就是完全四點形 q 截直線 ℓ 所定義的對合為關於 M_ℓ 的對稱。

Proposition 9.4.2. 中點 M_ℓ 位於 q 的九點圓錐曲線（見 (6.3.8)）$\mathcal{C}_q$ 上。反之，對於任意一點 $M \in \mathcal{C}_q$，存在（唯一）一線 $\ell \in k^\circ(q)$ 使得 $M = M_\ell$。

Proof. 考慮 q 的西瓦三角形 $\triangle X_AX_BX_C$ 上的點等共軛變換 φ 使得 q 的頂點為 φ 的不動點。由 (7.4.17)，$\mathcal{C}_q=\varphi(\mathcal{L}_\infty)$。對於任意過 q 的圓錐曲線 $\mathcal{C}$，(7.2.20) 告訴我們 M_ℓ,∞_ℓ 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。因此 $\varphi(M_\ell)=\infty_\ell$，故 $M_\ell\in\varphi(\mathcal{L}_\infty)=\mathcal{C}_q$。

現在令 M 為 $\mathcal{C}_q$ 上一點，取 ℓ 使得 M 為 $P_{BC}=BC\cap\ell$ 與 $P_{AD}=AD\cap\ell$ 的中點（也就是取 $\ell=MU$，其中 U 為 $\mathcal{L}_\infty$ 上一點使得 $(\infty_{BC},\infty_{AD};\infty_{X_AM},U)=-1$）。由對合為關於 $\mathcal{C}_q$ 的配極 (7.2.10)，M 為 q 截 ℓ 所定義的對合的不動點。因此 M 也是 $\overline{P_{CA}P_{BD}},\overline{P_{AB}P_{CD}}$ 的中點，故 $M=M_\ell$。 ■

Example 9.4.3. 若 q 為垂心組，意即，D 為 $\triangle ABC$ 的垂心，則九點圓錐曲線 $\mathcal{C}_q$ 為 $\triangle ABC$ 的九點圓。對於九點圓上一點 $M=M_\ell$，我們有 ℓ 為 D 關於 M 的對稱點 P 關於 $\triangle ABC$ 的西姆松線：由於 M 同時為 AD 的中點與 $\overline{P_{BC}P_{AD}}$ 的中點，$PP_{BC}\parallel P_{AD}D=AD$，即 P_{BC} 為過 P 且平行於 AD 的直線與 BC 的交點。由對稱性，我們得到 P 關於 $\triangle ABC$ 的西姆松線為 $P_{BC}P_{CA}P_{AB}=\ell$。

所以 $k^\circ(q)$ 為 $\triangle ABC$ 的所有西姆松線所組成的集合。當然，這個結果對於 A,B,C,D 來說是對稱的，所以 $k^\circ(q)$ 當然也是，比方說，$\triangle BCD$ 的所有西姆松線所組成的集合。我們在第 10.2 節會看到西姆松線的包絡線其實是一條三尖瓣線，因此我們得到斜環索線的對偶其實是仿射過後的三尖瓣線。

透過這個作法，我們可以輕易地作出任意一個完全四點形的等截共軛線（透過畫平行線）。

令 ℓ_* 為 ℓ 關於 q 的等截共軛線。我們可以類似地定義 ℓ_* 上一點 M_{ℓ_*}。

Proposition 9.4.4. 兩點 M_ℓ,M_{ℓ_*} 為 q 的九點圓錐曲線 $\mathcal{C}_q$ 上的一組對徑點。

Proof. 由於 M_ℓ,M_{ℓ_*} 已經位於 $\mathcal{C}_q$ 上，所以我們只需證明 $\overline{M_\ell M_{\ell_*}}$ 的中點為 $\mathcal{C}_q$ 的中心。由定義，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(M_\ell+M_{\ell_*})&=\frac{1}{4}(P_{BC}+P_{AD})+\frac{1}{4}(P_{BC*}+P_{AD*})\\&=\frac{1}{4}(P_{BC}+P_{BC*})+\frac{1}{4}(P_{AD}+P_{AD*})=\frac{1}{2}(M_{BC}+M_{AD}),\end{aligned}$$

其中 M_{BC}, M_{AD} 分別為 $\overline{BC}, \overline{AD}$ 的中點，因此 $\overline{M_\ell M_{\ell_*}}$ 中點為 $\overline{M_{BC}M_{AD}}$ 中點，即 $\mathcal{C}_q$ 的中心（q 的重心）。 ■

在垂心組的例子 (9.4.3)，我們知道 ℓ, ℓ_* 會是 P, P^* 關於 $\triangle ABC$ 的西姆松線，其中 $\overline{PP^*}$ 為 $\odot(ABC)$ 的一條直徑，所以我們應該要有：

Proposition 9.4.5. 兩線 ℓ 與 ℓ_* 交於 q 的九點圓錐曲線 $\mathcal{C}_q$ 上。

Proof. 令 $X_A = AD \cap BC \in \mathcal{C}_q, U = M_\ell\infty_{AD} \cap M_{\ell_*}\infty_{BC}, V = M_\ell\infty_{BC} \cap M_{\ell_*}\infty_{AD}$。考慮六折線 $M_\ell UM_{\ell_*}M_{AD}X_AM_{BC}$，由於 $(M_{BC}M_{AD})(M_\ell M_{\ell_*})$ 為平行四邊形，

$$\infty_{AD} = M_\ell U \cap M_{AD}X_A, \quad \infty_{BC} = UM_{\ell_*} \cap X_AM_{BC}, \quad \infty_{M_{BC}M_\ell} = M_{\ell_*}M_{AD} \cap M_{BC}M_\ell$$

共於無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$，所以由帕斯卡定理，U 位於 $\mathcal{C}_q$ 上。同理，V 也位於 $\mathcal{C}_q$ 上。注意到

$$\begin{aligned}(\ell, M_\ell X_A; M_\ell U, M_\ell V) &= X(\infty_\ell, M_\ell; P_{AD}, P_{BC}) = -1\\ &= X(\infty_{\ell_*}, M_{\ell_*}; P_{AD*}, P_{BC*}) = (\ell_*, M_{\ell_*}X_A; M_{\ell_*}U, M_{\ell_*}V),\end{aligned}$$

所以 $\ell \cap \ell_*$ 位於過 $M_\ell, M_{\ell_*}, X_A, U, V$ 的圓錐曲線 $\mathcal{C}_q$ 上。 ■

Proposition 9.4.6. 六點 $A, B, C, D, \infty_\ell, \infty_{\ell_*}$ 共圓錐曲線。

Proof. 由迪沙格對合定理，我們只需證明 $(\infty_\ell, \infty_{\ell_*})$ 也是 q 截 $\mathcal{L}_\infty$ 所定義的對合變換 φ 的相互對。

令 $O_\ell \in \mathcal{C}_q$ 為 ℓ 與 ℓ_* 的交點，那麼 $(\infty_\ell, \infty_{\ell_*}), (\infty_{CA}, \infty_{BD}), (\infty_{AB}, \infty_{CD})$ 為 φ 的相互對若且唯若

$$M_\ell M_{\ell_*}, \quad U_{CA}U_{BD}, \quad U_{AB}U_{CD}$$

共點，其中 U_{XY} 為 $O_\ell\infty_{XY}$ 與 $\mathcal{C}_q$ 的另一個交點。

事實上，我們證明 $\overline{U_{CA}U_{BD}}, \overline{U_{AB}U_{CD}}$ 也是 $\mathcal{C}_q$ 的直徑（這樣三線會共於 $\mathcal{C}_q$ 的中心 G_q）：注意到

$$(U_{CA}, M_{BC}; M_{CA}, M_{AB}) \overset{\infty_{CA}}{\underset{\mathcal{C}}{=}} (O_\ell, M_{AB}; Y, M_{CA}) \overset{\infty_{CA}}{\underset{\mathcal{C}}{=}} (U_{BD}, M_{AD}; M_{BD}, M_{CD}),$$

因此由 $M_{BC}M_{AD}$, $M_{CA}M_{BD}$, $M_{AB}M_{CD}$ 過 G_q，我們知道 $U_{CA}U_{BD}$ 也過 G_q。同理，$U_{AB}U_{CD}$ 也過 G_q。 ■

令 $\mathcal{C}_\ell$ 為過 A, B, C, D, ∞_ℓ, ∞_{ℓ_*} 的圓錐曲線，由迪沙格對合定理 (7.2.5)，$\mathcal{C}_\ell$ 與 ℓ 相切於 ∞_ℓ，等價地，ℓ 是 $\mathcal{C}_\ell$ 的其中一條漸近線。同理 $\mathcal{C}_\ell$ 與 ℓ_* 相切於 ∞_{ℓ_*}，因此 ℓ_* 是 $\mathcal{C}_\ell$ 的另一條漸近線。所以我們得到：

Proposition 9.4.7. 雙曲線 $\mathcal{C}_\ell$ 的兩條漸近線為 ℓ 及 ℓ_*。

從這些性質，我們發現 $\mathcal{k}^\circ(q)$ 是由其九點圓錐曲線 $\mathcal{C}_q$ 及一保交比變換 $\varphi\colon \mathcal{C}_q \to \mathcal{L}_\infty$ 所決定，其中 φ 滿足對於所有 $\mathcal{C}_q$ 的直徑 $\overline{MM^*}$，$M\varphi(M) \cap M^*\varphi(M^*) \in \mathcal{C}_q$。

在完全四點形 $\triangle ABC \cup H$ 的例子，$\mathcal{C}_q$ 就是 $\triangle ABC$ 的九點圓，φ 則將九點圓上一點 P 送至 $\infty_{\perp(A+B+C-\mathfrak{h}_{H,2}(P))}$。

注意到 φ 可以由兩個非對徑點 M_1, M_2 所決定，所以類似於等角共軛點的情形，我們得到：

Proposition 9.4.8. 若 (K, K_*), $(L, L_*) \neq (\mathcal{L}_\infty, \mathcal{L}_\infty)$ 為完全四點形 q 的兩對等截共軛線對，則

$$\mathcal{k}^\circ(q) = \mathcal{k}^\circ((KK_*)(LL_*)),$$

其中 $(KK_*)(LL_*)$ 為完全四點形 $(K \cap L, L \cap K_*, K_* \cap L_*, L_* \cap K)$。

當然，上面這些性質都可以把無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 改成任意一線 $\mathcal{L}$，這時候一點 A 關於 $\overline{P_1P_2}$ 的等截點會變成 $\psi_{\mathcal{L}}(A)$，其中 $\psi_{\mathcal{L}}\colon P_1P_2 \to P_1P_2$ 為一射影對合變換使得 $\psi_{\mathcal{L}}(P_1) = P_2$ 且 $\mathcal{L} \cap P_1P_2$ 為 $\psi_{\mathcal{L}}$ 的其中一個不動點。而漸近線的敘述則會變成 ℓ, ℓ_* 為過 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}_\ell}(\mathcal{L}) \in \mathcal{C}_q^{\mathcal{L}}$ 的兩條（$\mathcal{C}_\ell$ 的）切線。

因為 $\mathcal{k}(q)$ 是斜環索線的對偶，所以其實 $\mathcal{K}^{W^2}(\mathcal{Q})$ 還有另一個刻畫：令 $\mathcal{C}$ 為 W 關於 $\mathcal{Q}$ 的九線圓錐曲線，L_{ij} 為 A_{ij} 關於 $\mathcal{C}$ 異於 $A_{ij}A_{kl}$ 的切線。那麼存在一保交比變換 $\varphi\colon \mathbf{T}W \to \mathbf{T}\mathcal{C}$ 使得 $\varphi(WA_{ij}) = L_{ij}$，且

$$\mathcal{K}^{W^2}(\mathcal{Q}) = \{\ell \cap \varphi(\ell) \mid \ell \in \mathbf{T}W\}$$

是一個與 $\mathcal{C}$ 相切於三個點的三次曲線。取 $\mathcal{Q}$ 有內切圓或旁切圓 $\odot(I)$ 的情形，我們得到 $\mathcal{C}$ 是以 I 關於 M 的對稱點 J 為焦點，牛頓線 τ 為準線的拋物線。

Chapter 10

完全四線形的心

10.1 基礎的心

給定一個完全四線形 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$，跟第 4 章一樣，我們定義

- 六個頂點：$A_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$
- 四個三角形：$\triangle_i := \triangle \ell_{i+1}\ell_{i+2}\ell_{i+3}$
- 三個對角線段與對頂點：$\overline{A_{ij}A_{kl}}$ 與 (A_{ij}, A_{kl})
- 三個四邊形：$A_{ij}A_{jk}A_{kl}A_{li}$，其中有凸四邊形、凹四邊形以及折四邊形(就圖形上來看)
- 對角線三角形 (西瓦三角形)：δ，由三個對角線段延長所圍成的三角形

那下面這些「心」相信大家已經聽過，或者在之前的章節有出現過，比方說：

Proposition 10.1.1 (QL-P1, 密克點). 四個三角形 $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ 的外接圓們共於一點 $M = M(\mathcal{Q})$。

Proposition 10.1.2 (QL-L1, 牛頓線). 三條對角線 $\overline{A_{23}A_{14}}$, $\overline{A_{31}A_{24}}$, $\overline{A_{12}A_{34}}$ 的中點們共於一直線 $\tau = \tau(\mathcal{Q})$。

Proposition 10.1.3 (QL-Ci3, 密克圓). 五點 M, O_1, O_2, O_3, O_4 共於一圓，其

中 O_i 為 $\triangle_i$ 的外心。

Proposition 10.1.4 (QL-L2, 垂心線, 施坦納線)**.** 令 H_i 為 $\triangle_i$ 的垂心，則四點 H_1, H_2, H_3, H_4 共於一線 $\mathcal{S}$。

Proposition 10.1.5 (QL-Co1)**.** 令 $\mathcal{P}$ 是以密克點 M 為焦點、垂心線 $\mathcal{S}$ 為準線的拋物線，則 $\mathcal{P}$ 與 $\mathcal{Q}$ 中的四線相切。

Proposition 10.1.6 (QL-Tf1, Clawson–Schmidt Conjugate)**.** 存在唯一一個由反演與對稱合成的變換 $\Phi_{\mathcal{Q}}$（$\triangle M\infty_i\infty_{-i}$ 上的點等共軛變換）使得 $A_{23} \leftrightarrow A_{14}$, $A_{31} \leftrightarrow A_{24}$, $A_{12} \leftrightarrow A_{34}$。

不要懷疑，一個變換也可以稱作是心。

Theorem 10.1.7 (QL-Cu1)**.** 完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛軌跡為

$$\mathcal{K} := \left\{ P \,\middle|\, \infty^{\vee}_{P\Phi(P)} \in \tau(\mathcal{Q}) \right\}.$$

透過我們在等共軛變換學到的知識，還可以定義：

Definition 10.1.8 (QL-Tf2)**.** 考慮 $\mathcal{Q}$ 的對角線三角形 δ 上以四線 ℓ_i 為不動線的線等共軛變換 φ。對於一直線 L，我們定義 L 關於 $\mathcal{Q}$ 的等共軛直線 $L^{\vee} = \varphi(L)$。

若 $X_i, X_i^{\vee}$ 分別為 $L, L^{\vee}$ 與對角線 $A_{jk}A_{i4}$ 的交點，那麼 $(X_i, X_i^{\vee}; A_{jk}, A_{i4}) = -1$。特別地，$\tau(\mathcal{Q})$ 就是 $\mathcal{L}^{\vee}_{\infty}$。

10.2 三尖瓣線

為了能夠透徹的理解某些心在做什麼，這邊引進這個常用工具：

Definition 10.2.1. 三尖瓣線 (**deltoid**) 是一個圓繞著直徑為其三倍的圓內側

純滾動時，圓上一點產生的軌跡。

為了讓讀者有點概念等等要幹嘛，這邊先提一個重要結論，一個三角形的所有西姆松線 (1.4.1) 的包絡線是三尖瓣線。

Proposition 10.2.2. 令 $\triangle ABC$ 為一個正三角形，$\odot(I)$ 為其內切圓，則 $\odot(I)$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡為以 A, B, C 為頂點的三尖瓣線。

Proof. 令 P 為 $\odot(I)$ 上一點，P 關於 I 位似 $-2/3, -4/3, -2$ 倍的點分別為 P_1, P_2, P_3，A, B, C 關於 I 位似 $2/3$ 倍的點分別為 A', B', C'。設 $\mathcal{S}$ 為 P_2 關於 $\triangle A'B'C'$ 的西姆松線。

Claim. P_3 關於 $\mathcal{S}$ 的垂足 P^* 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。

Proof of Claim. 令 P 關於 AI 的對稱點為 Q，則由對稱性只須證明 A, P^*, Q 共線。設 P_2 關於 $B'C'$ 的對稱點為 P_2'，P_3 關於 BC 的對稱點為 P_3'，則 I, P_2', P_3' 共線且其為 P_2 關於 $\triangle A'B'C'$ 的施坦納線。令 X, Y 分別為 P_2P_2', P_3P_3' 與 $\mathcal{S}$ 的交點，Z 為 P_3 關於 AI 的對稱點，則 I 為 $\triangle AP_3'Z$ 的重心，因此 Q 為 $\overline{AV}$ 中點。

設 M, N 分別為 $\overline{BC}, \overline{AI}$ 中點，顯然有 $\triangle P_3P^*Y$ 與 $\triangle MQN$ 位似，因此由

$$\frac{P_3Y}{YP_3'} = \frac{2P_2X}{XP_2'} = 2 = \frac{MN}{NA}$$

可得 $P^*P_3' \parallel AQ$，即 A, P^*, Q 共線。 □

回到原命題，P^* 位於 $\odot(\overline{P_1P_3})$ 上 (其半徑為 $\odot(I)$ 的半徑的 $1/3$)。設 I' 為 I 關於 BC 的對稱點，則

$$\measuredangle P_3P_1P^* = \measuredangle P_3IA + \measuredangle I'IV = 3\measuredangle P_3I'A$$

因此 P^* 位於以 A, B, C 為頂點的三尖瓣線上。

將上述的證明反過來寫便可得到以 A, B, C 為頂點的三尖瓣線上的每個點的等角共軛點在內切圓上。 ■

Proposition 10.2.3. 令 $\triangle ABC$ 為一個正三角形，$\odot(I)$ 為其內切圓，P 為 $\odot(I)$ 上一點，Q 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。若 A, B, C 關於 I 位似 $2/3$ 倍的點分別為 $A', B'., C'$，P 關於 I 位似 $-4/3$ 倍的點為 P'，則 P' 關於 $\triangle A'B'C'$ 的西姆松線為 Q 關於以 A, B, C 為頂點的三尖瓣線的切線。

Proof. 由上個性質的證明，Q 位於 P' 關於 $\triangle A'B'C'$ 的西姆松線 $\mathcal{S}$ 上，因此只要證明 $\mathcal{S}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡與 $\odot(I)$ 於 P 點相切即可。

令 P 關於 I 位似 2 倍的點為 P^*，則 P^* 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點位於 $\mathcal{S}$ 上，因此 $\mathcal{S}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡為經過 A, B, C, P, P^* 的圓錐曲線 $\mathcal{C}$。令 AP, P^*P 分別交 $\odot(ABC)$ 另一點於 U, V，P 關於 $\odot(I)$ 的切線交 BC 於 W，M 為 $\overline{BC}$ 中點，I' 為 I 關於 BC 的對稱點。由

$$\measuredangle P^*WP = \measuredangle PWI = \measuredangle PMI = \measuredangle P^*I'A = \measuredangle P^*UP$$

知 P, P^*, U, W 共圓，因此

$$\measuredangle VUW = \measuredangle VUP^* + \measuredangle P^*UW = 180^\circ$$

即 U, V, W 共線。設 AP 交 BC 於 X，則由

$$P(A, B; C, W) = (X, B; C, W) = U(A, B; C, V) = P^*(A, B; C, P)$$

可得 PW 為 P 關於 $\mathcal{C}$ 的切線。 ∎

Corollary 10.2.4. 令 ω 為一圓。對於 ω 上任意一點 P，作一線 $\ell_P \in TP$，使得

$$\ell_P + (P)_\omega$$

為定值，即對於所有 $P_1, P_2 \in \omega$，

$$\measuredangle(\ell_{P_1}, \ell_{P_2}) = \measuredangle P_2AP_1$$

其中 A 為 ω 上任意一點。則 $\{\ell_P \mid P \in \omega\}$ 的包絡線為一個三尖瓣線。

Proof. 令 Ω 為 ω 關於以 ω 的圓心 O 位似 2 倍下的像，在 ω 上取一點 A 使得 $\ell_A = OA$，A' 為 O 關於 A 的對稱點，並取 $B', C' \in \Omega$ 使得 $\triangle A'B'C'$ 是正三角

形。對於 Ω 上任意一點 P'，令 $\mathcal{S}'_P$ 為 P' 關於 $\triangle A'B'C$ 的西姆松線，則 $\mathcal{S}'_P$ 經過 $\overline{OP'}$ 中點 P，注意到 OA 為 A' 關於 $\triangle A'B'C'$ 的西姆松線，所以

$$\measuredangle(\mathcal{S}'_P, \ell_P) = \measuredangle(\mathcal{S}'_P, \mathcal{S}_A) + \measuredangle(\ell'_A, \ell_P) = \measuredangle A'B'P' + \measuredangle PBA = 0^\circ$$

其中 B 為 $\overline{OB'}$ 中點。即 $\mathcal{S}'_P = \ell_P$，因此由 (10.2.3) 知 $\{\ell_P \mid P \in \omega\}$ 的包絡線為一個三尖辮線。 ■

有了這些性質之後，這個定理就變得很簡單了。

Theorem 10.2.5 (施坦納三尖辮線定理)**.** 給定任意 $\triangle ABC$，對於任意一點 $P \in \odot(ABC)$，令 $\mathcal{S}_P$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的西姆松線，則 $\{\mathcal{S}_P \mid P \in \odot(ABC)\}$ 的包絡線為一個三尖辮線。

Proof. 令 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，$\odot(N)$ 為 $\triangle ABC$ 的九點圓，對於任意兩點 P_1, $P_2 \in \odot(N)$，令 P'_i 為 H 關於 P_i 的對稱點，則 $P_i \in \mathcal{S}_{P'_i}$ 且

$$\measuredangle(\mathcal{S}_{P'_1}, \mathcal{S}_{P'_2}) = \measuredangle P'_2AP'_1 = -\measuredangle P_1XP_2$$

其中 $X \in \odot(N)$。所以由 (10.2.4) 可得 $\{\mathcal{S}_P \mid P \in \odot(ABC)\}$ 的包絡線為一個三尖辮線。 ■

Definition 10.2.6. 同上述定理的標號，我們稱該三尖辮線 $\mathcal{D}$ 為 $\triangle ABC$ 的施坦納三尖辮線 (**Steiner deltoid**)，$\mathcal{D}$ 中三個頂點的外接圓稱為 $\triangle ABC$ 的施坦納圓 (**Steiner circle**)。

藉由上面的證明，我們可以歸納出以下結果：

Proposition 10.2.7. 給定任意 $\triangle ABC$，$H, \odot(N), \mathcal{D}$ 分別為 $\triangle ABC$ 的垂心、九點圓及施坦納三尖辮線。令 P 為 $\odot(ABC)$ 上一點，M 為 $\overline{HP}$ 中點，P 關於 $\triangle ABC$ 的西姆松線 $\mathcal{S}$ 與 $\odot(N)$ 交於 $Q \neq M$，則 $\mathcal{S}$ 與 $\mathcal{D}$ 於 Q 關於 M 的對稱點相切。

Proof. The proof is trivial and left as an exercise to the reader. ■

10.2.1 轉一下

我們上面證明西姆松線的包絡線是一個三尖辦線，那事實上我們可以定義 α-西姆松線（我亂取的）：

Definition 10.2.8. 給定任意 $\triangle ABC$ 與一角 α，對於任意一點 $P \in \odot(ABC)$，分別在 BC, CA, AB 上取點 D, E, F 使得

$$\measuredangle(PD, BC) = \measuredangle(PE, CA) = \measuredangle(PF, AB) = \alpha.$$

則 D, E, F 共線 (12.1.11)，並稱其為 P 關於 $\triangle ABC$ 的 α-西姆松線，記為 $\mathcal{S}_{\alpha,P}$。

顯然地，當固定 P 時，$\mathcal{S}_{\alpha,P}$ 的包絡線是以 P 為焦點的拋物線，而 $\alpha = 0^\circ$ 時，$\mathcal{S}_{\alpha,P}$ 為無窮遠線。類似於原本的西姆松線，我們有以下角度關係：

Proposition 10.2.9. 給定任意 $\triangle ABC$ 與兩角 α_1, $\alpha_2 \neq 0$，則對於任意兩點 P_1, $P_2 \in \odot(ABC)$，

$$\measuredangle(\mathcal{S}_{\alpha_1,P_1}, \mathcal{S}_{\alpha_2,P_2}) = \alpha_1 - \alpha_2 - \measuredangle P_1AP_2.$$

Proof. 簡單的算角度。事實上，

$$\begin{aligned}\measuredangle(\mathcal{S}_{P_1,\alpha_1}, \mathcal{S}_{P_2,\alpha_2}) &= \measuredangle(\mathcal{S}_{P_1,\alpha_1}, \mathcal{S}_{P_1,\alpha_2}) + \measuredangle(\mathcal{S}_{P_1,\alpha_2}, \mathcal{S}_{P_2,\alpha_2})\\ &= (\alpha_1 - \alpha_2) - \measuredangle P_1AP_2.\end{aligned}$$ ■

看一下這節的標題，你就會想所有的 α-西姆松線的包絡線是不是也是三尖辦線。當然，當 $\alpha = 0^\circ$ 時，所有的 α-西姆松線都重合於無窮遠線，所以我們不考慮這個情形。

Theorem 10.2.10. 給定任意 $\triangle ABC$ 與一角 $\alpha \neq 0^\circ$，則 $\{\mathcal{S}_{\alpha,P} \mid P \in \odot(ABC)\}$ 的包絡線為一個三尖辦線。

不過很可惜的是，我們不能直接套 (10.2.4)，因為我們還沒有「α-施坦納定理」。所以我們需要以下推廣：

Proposition 10.2.11. 給定任意 $\triangle ABC$ 與一角 $\alpha \neq 0$，令 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，則存在一圓 $\odot(N')$ 與一以 H 為中心的旋似變換 $\mathfrak{S}$ 使得 $\mathfrak{S}(\odot(ABC)) = \odot(N')$ 且對於任意一點 $P \in \odot(ABC)$，$\mathfrak{S}(P)$ 在 P 關於 $\triangle ABC$ 的 α-西姆松線上。

Proof. 令 O 為 $\triangle ABC$ 的外心。分別在 BC, CA, AB 上取點 R_A, R_B, R_C 使得

$$\measuredangle(OR_A, BC) = \measuredangle(OR_B, CA) = \measuredangle(OR_C, AB) = \alpha.$$

易得 $\triangle R_AR_BR_C \cup O \overset{+}{\sim} \triangle ABC \cup H$。令 $\odot(N') = \odot(R_AR_BR_C)$，對於任意一點 P，我們定義 $\mathfrak{S}(P)$ 為使 $\triangle HPQ \overset{+}{\sim} \triangle HON'$ 的 Q，以下證明這會滿足我們的要求。

令 O_A, O_B, O_C 分別為 O 關於 BC, CA, AB 的對稱點。注意到 H 為 $\triangle O_AO_BO_C$ 的外心且

$$\triangle OO_AR_A \overset{+}{\sim} \triangle OO_BR_B \overset{+}{\sim} \triangle OO_CR_C \overset{+}{\sim} \triangle OHN',$$

所以 $\triangle O_AO_BO_C \cup H \overset{+}{\sim} \triangle R_AR_BR_C \cup N'$，且 N' 位於 $\overline{OH}$ 的中垂線上。

對於任意一點 $P \in \odot(ABC)$，令 $Q = \mathfrak{S}(P)$，由 $\triangle HPQ \overset{+}{\sim} \triangle HON'$，我們有

$$\frac{\overline{N'Q}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{HN'}}{\overline{HO}} = \frac{\overline{ON'}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{N'R_A}}{\overline{HO_A}}.$$

而 $\odot(ABC)$ 與 $\odot(O_AO_BO_C)$ 等大，所以 $\overline{N'Q} = \overline{N'R_A}$，即 $Q \in \odot(N')$。因此我們有 $\mathfrak{S}(\odot(ABC)) = \odot(N')$。

令 $\mathcal{S}_{\alpha,P}$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的 α-西姆松線，D, E, F 分別為 $\mathcal{S}_{\alpha,P}$ 與 BC, CA, AB 的交點，P_A, P_B, P_C 分別為 P 關於 BC, CA, AB 的對稱點。由施坦納定理，我們知道 P_A, P_B, P_C 共線且過 H。因此由

$$\triangle PDP_A \overset{+}{\sim} \triangle PEP_B \overset{+}{\sim} \triangle PFP_C \overset{+}{\sim} \triangle OR_AO_A \overset{+}{\sim} \triangle ON'H \overset{+}{\sim} \triangle PQH,$$

我們有 $P_AP_BP_C \cup H \overset{+}{\sim} DEF \cup Q$，所以 $Q \in \mathcal{S}_{\alpha,P}$。 ■

Remark. 這個命題基本上就是第 1.4 節的習題 5。

在有了這個性質之後，(10.2.10) 的證明就跟原定理 (10.2.5) 的證明一樣了。那麼我們類似地定義：

Definition 10.2.12. 同 (10.2.10) 的標號，我們稱三尖瓣線 $\mathcal{D}_\alpha$ 為 $\triangle ABC$ 的 α-施坦納三尖瓣線。

顯然地，所有與 $\triangle ABC$ 相切的所有三尖瓣線一定是某個 α-施坦納三尖瓣線，那現在的問題就是如果我們有一個三尖瓣線上的任三條切線，要怎麼得到 α。為了解決這個問題，我們得再更深入 (10.2.11) 的證明。

Proposition 10.2.13. 同 (10.2.11) 證明的標號，令 S 為 $\infty_{\mathcal{S}_{\alpha,P}}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，則

$$\triangle ABC \cup S \overset{+}{\sim} \triangle R_AR_BR_C \cup \mathfrak{S}(P),$$

且旋似角為 $90^\circ + \alpha$。

Proof. 簡單的算角度。事實上，令 $A^* = \mathfrak{S}^{-1}(R_A),\ B^* = \mathfrak{S}^{-1}(R_B)$，則

$$\measuredangle R_BR_A\mathfrak{S}(P) = \measuredangle B^*A^*P = -\measuredangle(\mathcal{S}_{B^*,\alpha}, \mathcal{S}_{\alpha,P}) = \measuredangle(\mathcal{S}_{\alpha,P}, CA) = \measuredangle BAS,$$

且

$$\measuredangle(R_BR_C, BC) = \measuredangle(\perp OR_A, BC) = 90^\circ + \alpha. \qquad \blacksquare$$

最後，我們證明本小節最重要的定理：

Theorem 10.2.14. 給定 $\triangle ABC$ 與一角 $\alpha \neq 0$，設 $\mathcal{D}_\alpha$ 為 $\triangle ABC$ 的 α-施坦納三尖瓣線。令 P_1, P_2, P_3 為 $\odot(ABC)$ 上三點，$\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_{P_i,\alpha}$。令

$$\beta = P_1 + P_2 + P_3 - A - B - C - 2\alpha \quad (\odot(ABC)).$$

(i) 當 $\beta = 0^\circ$ 時，$\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ 共點。

(ii) 當 $\beta \neq 0^\circ$ 時，$\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ 不共點，且 $\mathcal{D}_\alpha$ 是由 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ 所圍成的三角形的 β-施坦納三尖瓣線。

Proof. 同 (10.2.11) 的證明的標號，並令 S_i 為 $\infty_{\mathcal{S}_i}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，

T_i 為 $\mathcal{S}_{i-1}$ 與 $\mathcal{S}_{i+1}$ 的交點，H' 為 $\mathfrak{S}(\triangle P_1P_2P_3)$ 的垂心。由 (1.4.5)，我們有

$$\begin{aligned}
\beta &= \sum_i P_i - \sum_{\text{cyc}} A - 2\alpha = \sum_{\text{cyc}} \mathcal{S}_{A,\alpha} - \sum_i \mathcal{S}_i - 2\alpha \\
&= \sum \measuredangle(O_BO_C, \mathcal{S}_{P_1,\alpha}) + \alpha = \sum_i Q_i - \sum_{\text{cyc}} R_A + \alpha \quad (\odot(N')) \\
&= Q_1 - R_A + Q_2Q_3 - R_BR_C + \alpha \quad (\odot(N')) \\
&= S_1 - A + Q_2Q_3 - BC + 90^\circ \quad (\odot(ABC)) && \text{由 (10.2.13)} \\
&= \measuredangle(\perp Q_2Q_3, \mathcal{S}_1).
\end{aligned}$$

注意到

$$\measuredangle P_{i-1}T_iP_{i+1} = \measuredangle(\mathcal{S}_{i-1}, \mathcal{S}_{i+1}) = -\measuredangle P_{i-1}P_iP_{i+1},$$

所以 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ 共點若且唯若 $T_1 = T_2 = T_3 = H'$ 若且唯若 $H' \in \mathcal{S}_1$，這又等價於

$$\beta = \measuredangle(\perp Q_2Q_3, \mathcal{S}_1) = 0,$$

這證明了 (i)，以下證明 (ii)。

假設已經有 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ 不共點。設 $\mathcal{D}_\alpha$ 為 $\triangle T_1T_2T_3$ 的 β'-施坦納三尖辦線，那麼由 (10.2.11) 的證明，H' 為 $\triangle T_1T_2T_3$ 的外心，且 $\beta' = \measuredangle(H'Q_1, \mathcal{S}_1)$。所以

$$\beta' = \measuredangle(\perp Q_2Q_3, \mathcal{S}_1) = \beta. \qquad \blacksquare$$

取 $\alpha = 90^\circ$ 就有這個常見的小推論（即第 1.4 節的習題 3）：

Corollary 10.2.15. 給定任意 $\triangle ABC$，P_1, P_2, P_3 為 $\odot(ABC)$ 上三點，$\mathcal{S}_i$ 為 P_i 關於 $\triangle ABC$ 的西姆松線，則 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ 共點若且唯若

$$A + B + C = P_1 + P_2 + P_3 \quad (\odot(ABC)).$$

習題

Problem 1. 設 $\triangle ABC$ 的施坦納三尖辦線分別切 BC, CA, AB 於 D, E, F，則 AD, BE, CF 交於 $\triangle ABC$ 的垂心關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點。

Problem 2. 令 S_1, S_2, S_3 為 $\triangle ABC$ 的施坦納三尖辮線的頂點。證明：(形式和)

$$3 \cdot S_1S_2 = BC + CA + AB.$$

10.3 Hervey 的心

都看完施坦納的三尖辮了，還不把一個完全四線形塞進去 (?)

Proposition 10.3.1. 令完全四線形 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ 的四個外心為 O_1, O_2, O_3, O_4，H_i' 為 $\triangle O_{i+1}O_{i+2}O_{i+3}$ 的垂心，則 O_i, H_i' 們共圓錐曲線且 $H_i' \in \ell_i$。

Proof. 令 $\mathcal{Q}$ 的密克點為 M，注意到 ℓ_i 為 M 關於 $\triangle O_{i+1}O_{i+2}O_{i+3}$ 的施坦納線，因此 $H_i' \in \ell_i$。而 O_i, H_i' 們位於經過 O_1, O_2, O_3, O_4 的等軸雙曲線上。 ■

Corollary 10.3.2 (QL-P5, Clawson 中心). 線段 $\overline{O_iH_i'}$ 的中點們重合。

Proof. 即重合於 $O_1O_2O_3O_4$ 的龐色列點 T。 ■

Corollary 10.3.3 (QL-Ci4, Hervey 圓). 四點 H_1', H_2', H_3', H_4' 共於一圓。

Proof. 將密克圓 $\odot(O_1O_2O_3O_4)$ 關於 $O_1O_2O_3O_4$ 的龐色列點對稱，則 H_1', H_2', H_3', H_4' 皆位於該圓上。 ■

Theorem 10.3.4 (QL-Qu2, Kantor-Hervey 三尖辮線). 存在一個三尖辮線 Δ 與 $\mathcal{Q}$ 中四線相切。

當然，這可以由 α-施坦納三尖辮線得到。事實上，Δ 為 M 關於 $\triangle \ell_j\ell_k\ell_l$ 的 α_i-施坦納三尖辮線，其中

$$\alpha_i = \measuredangle(M(\ell_i \cap \ell_j), \ell_j) = \measuredangle(\ell_i, \tau).$$

不過這邊給個直接構造的證明：

Proof. 考慮一變換 $\varphi = \Phi \circ \mathfrak{s}_T$，為關於 Clawson 中心 (10.3.2) T 的對稱變換 $\mathfrak{s}_T$ 合成 $\mathcal{Q}$ 的 C-S 共軛變換 Φ，對於一點 $P \in \odot(H_1'H_2'H_3'H_4')$。定義 L_P 為 P 關於

$M\varphi(P)$ 的垂線，則由簡單的角度計算及 (10.2.4) 知 L_P 的包絡線為一個三尖辦線 Δ。注意到 $\ell_i = L_{H_i'}$，因此 Δ 與 $\mathcal{Q}$ 中四線相切。 ■

那顯然這個三尖辦線是唯一的。從這個證明中，我們還可以看出：

Corollary 10.3.5. 完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的 Kantor-Hervey 三尖辦線 Δ 與 $\mathcal{Q}$ 的 Hervey 圓相切。

Proposition 10.3.6 (QL-P3, Kantor-Hervey 點)**.** 令 Δ 的中心為 $\obar$，則 $\obar$ 位於 $\mathcal{Q}$ 中三角形的歐拉線段 (外心與垂心的連線段) 的中垂線上。

Proof. 因為 Δ 為 M 關於 $\triangle\ell_j\ell_k\ell_l$ 的 α_i-施坦納三尖辦線，所以由 (10.2.11) 可得 $\obar$ 位於 $\overline{O_iH_i}$ 的中垂線上。 ■

Proposition 10.3.7 (QL-P2, 莫利點)**.** 令 Mo 為 $\obar$ 關於垂心線 $\mathcal{S}$ 的垂足，$\mathcal{Q}$ 中四個三角形的九點圓圓心分別為 N_1, N_2, N_3, N_4，則過 N_i 且垂直 ℓ_i 的直線經過 Mo。

Proof. 延續上個性質證明用的標號，注意到 $\obar N_i \perp O_iH_i$，所以有 $\obar$, H_i, N_i, Mo 共圓。我們有

$$\measuredangle(N_iMo, \ell_i) = \measuredangle N_iMoH_i + \measuredangle(\mathcal{S}_{\mathcal{Q}}, \ell_i) = \measuredangle N_i\obar H_i + \measuredangle(\tau, \ell_i) + 90^\circ$$

$$= \alpha_i - \alpha_i + 90^\circ = 90^\circ,$$

其中 $\tau = \tau(\mathcal{Q})$ 為 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線，即 $N_iMo \perp \ell_i$。 ■

當然這些東西還是可以避開三尖辦線來證明。

習題

Problem 1. 令 ℓ 為一個完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線關於其密克點的對稱線。證明：ℓ 與 $\mathcal{Q}$ 的 Kantor-Hervey 三尖辦線相切。

10.4 莫利與他的心臟線

是說講了這麼久的三尖辮了，大家總該對心臟有點興趣了吧。

Definition 10.4.1. 一顆**心臟線** (cardoid) $\mathbb{K}$ 是一個圓 Γ' 沿著另一個半徑相同的圓 Γ 純滾動時，圓上一點產生的軌跡。我們稱 Γ 的圓心為 $\mathbb{K}$ 的中心，$\mathbb{K}$ 唯一的尖點為 $\mathbb{K}$ 的尖點。

看著這個定義應該是不能做一些太有用的事，所以可能要先用下面這個性質來轉掉命題：

Proposition 10.4.2. 一顆心臟線關於其尖點反演下的像為一個拋物線，並且尖點是它的焦點。

Proof. 設 $\mathbb{K}$ 為一圓 Γ' 繞著 Γ 純滾動時，圓上一點產生的軌跡。若 Y 為其尖點，則不難發現 $\mathbb{K}$ 上的每個點與 Y 的中垂線為 Γ 的切線。反之，Y 關於 Γ 的一條切線的對稱點位於 $\mathbb{K}$ 上，將這個性質關於 Y 反演後可得 $\mathbb{K}^*$ 上每個點是過 Y 與直線 $L = \Gamma^*$ 相切的某個圓的圓心。因此 $\mathbb{K}^*$ 為以 Y 為焦點，L 為準線的拋物線。 ■

Proposition 10.4.3. 若以 Y 為尖點的心臟線 $\mathbb{K}$ 為一圓 Γ' 繞著 Γ 純滾動時，圓上一點產生的軌跡。設 $P \in \mathbb{K}$ 且 $\overline{YP}$ 的中垂線與 Γ 切於 T，則 P 關於 $\mathbb{K}$ 的切線為過 P 並垂直於 PT 的直線。

Proof. 待補 ■

先回顧一下大家熟悉的莫利角三分線定理 (1.6.1)：

Theorem 10.4.4. 對於任意 $\triangle ABC$（以逆時針旋轉標號），過 A 作角三分線 ℓ_A^{Bi}, $i = -1, 0, 1$，滿足 ℓ_A^{B0} 位於 $\angle BAC$ 內且

$$\measuredangle(\ell_A^{Bi}, CA) = 2\measuredangle(AB, \ell_A^{Bi}), \quad \measuredangle(\ell_A^{Bi}, \ell_A^{Bj}) = (j - i) \cdot 60^\circ$$

ℓ_A^{Ci} 定為 ℓ_A^{Bi} 關於 $\angle BAC$ 的等角線，類似定義 $\ell_B^{Ci}, \ell_B^{Ai}, \ell_C^{Ai}, \ell_C^{Bi}$，定義 $a_{ij} = \ell_B^{Ci} \cap$

ℓ_C^{Bj}，類似定義 b_{ij}, c_{ij}。那麼對於所有 $(i,j,k) \in \{-1,0,1\}^3$ 滿足 $3 \nmid 1+i+j+k$，$\triangle a_{jk}b_{ki}c_{ij}$ 是一個正三角形，且

$$\measuredangle(b_{ki}c_{ij}, BC) = \measuredangle a_{jk}BC + \measuredangle a_{jk}CB$$

剩下的則輪換。

同時，我們藉由這個定理定義了第一、二、三莫利三角形 $\triangle_0 = \triangle a_{00}b_{00}c_{00}$, $\triangle_1 = \triangle a_{11}b_{11}c_{11}$, $\triangle_{-1} = \triangle a_{(-1)(-1)}b_{(-1)(-1)}c_{(-1)(-1)}$。我們定義

$$\Lambda^{\triangle ABC} = \bigcup (b_{ii}c_{ii} \cup c_{ii}a_{ii} \cup a_{ii}b_{ii})$$

為 $\triangle_i$ 所有邊的聯集，而

$$\lambda_A^{\triangle ABC} = \left\{a_{ij} \mid (i,j) \in \{-1,0,1\}^2\right\}$$

則為頂點們，類似定義 $\lambda_B^{\triangle ABC}, \lambda_C^{\triangle ABC}$，$\lambda = \lambda_A \cup \lambda_B \cup \lambda_C$ 為所有頂點。

Theorem 10.4.5. 給定完全四線形 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$，設 $\mathcal{Q}$ 中的四個三角形為 $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$，$\Lambda_i = \Lambda^{\triangle_i}$，$A_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$。若 $L_i \subset \Lambda_i$, $L_j \subset \Lambda_j$ 為兩條直線滿足 $L_i \cap \lambda_{A_{jk}}^{\triangle_i} = \{P_i, Q_i\}$ 與 $L_j \cap \lambda_{A_{ki}}^{\triangle_j} = \{P_j, Q_j\}$ 關於 A_{kl} 透視，則

$$L_i \cap L_j \in (A_{jl}P_i \cap A_{il}P_j)(A_{jl}Q_i \cap A_{il}Q_j) \cap (A_{jk}P_i \cap A_{ik}P_j)(A_{jk}Q_i \cap A_{ik}Q_j),$$

其中 i, j, k, l 兩兩相異。特別地，$L_i \cap L_j \in \bigcap \Lambda_m$。

Proof. 我們有

$$(A_{jl}P_i \cap A_{il}P_j)(A_{jl}Q_i \cap A_{il}Q_j) \subset \Lambda_k.$$

因為三角形們 $\triangle A_{jl}P_iQ_i$ 與 $\triangle A_{il}P_jQ_j$ 關於 A_{kl} 透視，由迪沙格定理，

$$L_i \cap L_j \in (A_{jl}P_i \cap A_{il}P_j)(A_{jl}Q_i \cap A_{il}Q_j) \subset \Lambda_k,$$

同理有

$$L_i \cap L_j \in (A_{jk}P_i \cap A_{ik}P_j)(A_{jk}Q_i \cap A_{ik}Q_j) \subset \Lambda_l,$$

所以 $L_i \cap L_j \in \bigcap \Lambda_m$。 ■

Corollary 10.4.6. 延續 (10.4.5) 的標號，$\left|\bigcap \Lambda_i\right| \geq 27$(重根重複計算)。

Proof. 我們知道滿足 $\{P_i, Q_i\}$ 與 $\{P_j, Q_j\}$ 關於 A_{kl} 透視的 (L_i, L_j) 的組合共有 27 種（在給定 i, j, k, l 的情況下），所以 $\left|\bigcap \Lambda_i\right| \geq 27$。 ■

介紹完這兩個看似沒關聯的東西之後就是要把他們合在一起 (?

Proposition 10.4.7. 若 $\triangle ABC$ 的三邊與一顆心臟線 $\mathbb{K}$ 相切，且 $\mathbb{K}$ 與 BC 切於兩點，則 $\mathbb{K}$ 的中心 $P \in \lambda_A$。反之，若 $P \in \lambda_A$，則存在唯一一顆以 P 為中心的心臟線 $\mathbb{K}$ 與 $\triangle ABC$ 的三邊相切，且 $\mathbb{K}$ 與 BC 切於兩點。

Proof. 設 $\mathbb{K}$ 與 BC 切於 T_1, T_2 兩點，與 AB 切於 T，則存在一點 S 位於以 P 為圓心並經過 $\mathbb{K}$ 的尖點 Y 的圓 Γ 上，且 $\triangle PT_1T_2$ 是以 Y 為中心正三角形。作 P 關於 S 位似 -2 倍的點 P'，則 $P'T = AB$。令 $\overline{PP'}$ 的中垂線交 $P'T$ 於 B'，M, M', N 分別為 $\overline{T_1T_2}, \overline{PP'}, \overline{SP'}$ 的中點。注意到

$$\measuredangle MPB' = \measuredangle YPS + \measuredangle P'PB' = \measuredangle SNT + \measuredangle TP'S = \measuredangle B'PP',$$

所以 $\triangle B'PM \mathrel{\bar{\sim}} \triangle B'PM'$，故 $\measuredangle B'MP = 90^\circ$。因此 $B' = B$ 且

$$3 \cdot \measuredangle CBP = \measuredangle CBP + \measuredangle PBM' + \measuredangle M'BP' = \measuredangle CBA.$$

同理有 $3 \cdot \measuredangle PCB = \measuredangle ACB$，所以 $P \in \lambda_A$。

若 $P \in \lambda_A$，取 BC 上兩點 T_1, T_2 使得 $\triangle PT_1T_2$ 是正三角形，再把上面著證明反過來寫就可以了，唯一性則是因為 P 與尖點 Y 是唯一的。 ■

接下來的這個定理我目前沒有找到什麼很簡短的證明，希望大家能夠找到一個更短的給我 (?)，雖然證明看起來很長，但事實上想法並不難。

Theorem 10.4.8. 若 $\triangle ABC$ 與一顆心臟線 $\mathbb{K}$ 相切，則 $\mathbb{K}$ 的中心位於 $\Lambda^{\triangle ABC}$ 上。反之，若 P 位於 $\Lambda^{\triangle ABC}$ 上，則存在唯一一顆以 P 為中心的心臟線與 $\triangle ABC$ 的三邊相切。

Proof. 令 L 為 $\mathbb{K}$ 的切線並且切 $\mathbb{K}$ 於兩點，D, E, F 分別為 L 與 BC, CA, AB 的交點，則由 (10.4.7) 知 $P \in \lambda_A^{\triangle AEF} \cap \lambda_B^{\triangle BFD} \cap \lambda_C^{\triangle CDE}$。分別在兩圓 $\odot(PFD)$, $\odot(PDE)$ 上取點 U, V 使得 $\measuredangle UDP = \measuredangle VDP = 60^\circ$，那麼 $PU \subset \Lambda^{\triangle BFD}$, $PV \subset \Lambda^{\triangle CDE}$ 且 D, U, V 共線，所以由 (10.4.5) 知 $P \in \Lambda^{\triangle ABC}$。

相反地，若 $P \in \Lambda^{\triangle ABC}$，假設 $P \in \ell \subset \Lambda^{\triangle ABC}$，令

$$\{U_1, U_2\} = \ell \cap \lambda_B^{\triangle ABC}, \quad \{V_1, V_2\} = \ell \cap \lambda_C^{\triangle ABC},$$

使得 (AU_i, AV_i) 為關於 $\angle BAC$ 的角三分線。分別在 AU_1, AV_1 上取兩點 S_1, T_1 使得 $\triangle PS_1T_1$ 為正三角形且 $\measuredangle PS_1T_1 = \measuredangle U_1AU_2$。令

$$S_2 = PT_1 \cap AU_2, \quad T_2 = PS_1 \cap AV_2,$$

那麼顯然有 $S_2, T_2 \in \odot(AS_1T_1)$，故 $\triangle PS_2T_2$ 也為正三角形。令

$$E = CA \cap S_1S_2, \quad F = AB \cap T_1T_2,$$

易知 $\odot(AS_1T_1)$ 分別與 CA, AB 的另一個交點 G, H 分別是 P 關於 S_1S_2, T_1T_2 的對稱點。因此 ES_1, FT_1 分別為 $\angle AEP, \angle PFA$ 的角平分線，所以 $\triangle PS_1T_1$ 是 $\triangle AEF$ 的莫利三角形。同理，$\triangle PS_2T_2$ 也是 $\triangle AEF$ 的莫利三角形。

設 D 為 EF 與 BC 的交點，$W = PS_1 \cap AS_2$, $X = PT_1 \cap AT_2$，注意到 $P \in \Lambda^{\triangle ABC} \cap \Lambda^{\triangle AEF}$ 且

$$P = U_1U_2 \cap S_1W = V_1V_2 \cap T_1X, \quad A = U_1S_1 \cap U_2W = V_1T_1 \cap V_2X.$$

由 (10.4.5) 知 $P \in \lambda_B^{\triangle BFD} \cap \lambda_C^{\triangle CDE}$，再由 (10.4.7) 知存在以 P 為中心的心臟線們 $\mathbb{K}_A, \mathbb{K}_B, \mathbb{K}_C$ 使得 $\mathbb{K}_A$ 與 $\triangle AEF$ 三邊相切並且與 EF 切於兩點，$\mathbb{K}_B, \mathbb{K}_C$ 則輪換。由於 D, E, F 共線，所以 $\mathbb{K}_A = \mathbb{K}_B = \mathbb{K}_C$，並且其與 $\triangle ABC$ 三邊相切。

最後，假設存在兩個以 P 為中心並且與 $\triangle ABC$ 的三邊相切的心臟線 $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$。令 L_i 為 $\mathbb{K}_i$ 的切線並且切 $\mathbb{K}_i$ 於兩點，E_i, F_i 分別為 L_i 與 CA, AB 的交點，那麼

$$P \in \lambda_A^{\triangle AE_1F_1} \cap \lambda_A^{\triangle AE_2F_2}.$$

分別在 AU_1, AV_1 取 Y_i, Z_i 使得 $\triangle AY_iZ_i$ 是 $\triangle AE_iF_i$ 的莫利三角形。注意到

$$\triangle PY_1Z_1 \overset{+}{\sim} \triangle PY_2Z_2,$$

所以 $\triangle PY_1Z_1 = \triangle PY_2Z_2$，故 $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$。因此 $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_2$，這證明了唯一性。 ■

所以說我們有與三邊相切的心臟線跟 Λ 的一一對應。

Proposition 10.4.9 (QL-27Qu1, 莫利多重心臟線). 存在 (至少) 27 個心臟線與 $\mathcal{Q}$ 中四線相切 (重根重複計算)。

Proof. 由 (10.4.6) 知 $\left|\bigcap \Lambda_i\right| \geq 27$ (重根重複計算)，令 $P \in \bigcap \Lambda_i$，則由 (10.4.8) 可得存在以 P 為中心的心臟線 $\mathbb{K}_i$ 與 $\triangle_i$ 相切。對於任意相異 i, j，由 (10.4.8) 證明的最後一部份可以得到 $\mathbb{K}_i = \mathbb{K}_j$，所以存在唯一一個以 P 為中心的心臟線 $\mathbb{K}$ 與 $\mathcal{Q}$ 中四線相切。 ∎

習題

Problem 1. 令 $\mathbb{K}$ 為一個心臟線並且有尖點 Y。設 L 為一過 Y 的動線並交 $\mathbb{K}$ 於 A, B。證明：$\overline{AB}$ 中點的軌跡是一個圓。

Problem 2. 同 (1.6.1) 的標號，證明：對於所有 $(i, j, k) \in \{-1, 0, 1\}^3$ 滿足 $3 \nmid 1 + i + j + k$，

(i) $\triangle a_{jk}b_{ki}c_{ij}$ 與 $\triangle a_{(j-1)(k-1)}b_{(k-1)(i-1)}c_{(i-1)(j-1)}$ 透視於一點 P_{ijk} (注意到不是所有的正三角形都是正向相似)；

(ii) P_{ijk} 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點為 $\triangle a_{jk}b_{ki}c_{ij}$ 與 $\triangle ABC$ 的透視中心。

Problem 3 (Bobson). 同 (1.6.1) 的標號，證明：

(i) 對於所有 $i \in \{-1, 0, 1\}$, $A \in \odot(a_{ii}a_{(i+1)(i+2)}a_{(i+2)(i+1)})$；

(ii) $\odot(a_{11}a_{23}a_{32})$, $\odot(a_{22}a_{31}a_{13})$, $\odot(a_{33}a_{12}a_{21})$ 共軸。

Problem 4 (QL-Qu1, 莫利單心臟線). 令完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的密克點為 M，密克圓為 $\mathbb{M}$。考慮所有經過 M 且圓心位於 $\mathbb{M}$ 上的圓，證明：這些圓的包絡線為一顆心臟線 $\mathbb{K}$。

Problem 5 (QL-Cu2). 令完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的四個三角形為 $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \triangle_4$，證明：由 (10.4.5) 所定義出來的 Λ_i 的 27 個共同交點位於同一個三次曲線上。

Problem 6. 證明 $\triangle ABC$ 的莫利三角形與其施坦納三尖瓣線的頂點位似。

Chapter 11

基礎三次曲線與梁-澤利克定理

Definition 11.0.1. 平面（$\mathbb{P}^2$）上一個齊次 d 次方程 $F(x,y,z)$ 的根 $[x:y:z]$ 所定義出來的曲線 $\mathcal{V}=\mathcal{V}(F)$ 被稱為是一個 d 次曲線。我們說 $\mathcal{V}$ 是非奇異的若其上的每個點的切線存在且唯一，等價地，

$$F=\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

沒有共同根。

一個經典的代數幾何結果是：

Theorem 11.0.2 (Bézout). 一個 d 次曲線與一個 e 次曲線交於 de 個點（記重數）。

11.1 非奇異三次曲線的群運算

為了講群運算，必須用個講到三次曲線就不可不提的定理：

Theorem 11.1.1 (Cayley–Bacharach). 若兩個三次曲線 $\mathcal{K}_0,\mathcal{K}_\infty$（含退化）交於 $P_1,\dots,P_9$ 且 $P_1,\dots,P_8$ 中任五點不共線，這八點不共圓錐曲線，那麼

(i) 所有經過 $P_1,\dots,P_8$ 的三次曲線 $\mathcal{K}$ 都形如 $\mathcal{K}_0+t\mathcal{K}_\infty$，特別地，$P_9\in\mathcal{K}$；

(ii) 我們有

$$P_9(P_5, P_6; P_7, P_8) = (P_5, P_6; P_7, P_8)_{P_1P_2P_3P_4}.$$

Proof. (i) 若 $P_1, \ldots, P_8$ 中有四點共線，不妨假設 $P_1, \ldots, P_4$ 共於 ℓ，那麼定義 $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_\infty, \mathcal{K}$ 的三次式在 ℓ 上必須恆等於 0。這告訴我們 $\mathcal{K}_0 = \ell \cup \mathcal{C}_0, \mathcal{K}_\infty = \ell \cup \mathcal{C}_\infty$, $\mathcal{K} = \ell \cup \mathcal{C}$，其中 $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_\infty, \mathcal{C}$ 為圓錐曲線。而 $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_\infty, \mathcal{C}$ 都經過 $P_5, \ldots, P_8$，因此 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 + t\mathcal{C}_\infty$，故 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + t\mathcal{K}_\infty$。

同理，若 $P_1, \ldots, P_8$ 中有七點共圓錐曲線，不妨假設 $P_1, \ldots, P_7$ 共於 $\mathcal{C}$，那麼 $\mathcal{K}_0 = \ell_0 \cup \mathcal{C}, \mathcal{K}_\infty = \ell_\infty \cup \mathcal{C}, \mathcal{K} = \ell \cup \mathcal{C}$，其中 $\ell_0, \ell_\infty, \ell$ 都為過 P_8 的直線。故對於某個 t，

$$\mathcal{K} = \ell \cup \mathcal{C} = (\ell_0 + t\ell_\infty) \cup \mathcal{C} = \mathcal{K}_0 + t\mathcal{K}_\infty.$$

若 $P_1, \ldots, P_8$ 中有三點共線，不妨假設 P_1, P_2, P_3 共於 ℓ，那麼存在 t 使得 $\mathcal{K}_t \supseteq \ell$（不妨假設 $t \neq 0$，否則我們就交換 $\mathcal{K}_0$ 與 $\mathcal{K}_\infty$），這代表 $\mathcal{K}_t = \ell \cup (P_4P_5P_6P_7P_8)$。同理，也存在 $t' \neq 0$ 使得 $\mathcal{K}_0 + t\mathcal{K}\ell \cup (P_4P_5P_6P_7P_8)$。這告訴我們 $\mathcal{K}$ 可以透過 $\mathcal{K}_0$ 與 $\mathcal{K}_\infty$ 的線性組合來得到。

同理，若 $P_1, \ldots, P_8$ 中有六點共圓錐曲線，不妨假設 $P_1, \ldots, P_6$ 共於 $\mathcal{C}$，那麼不妨假設存在 $t, t' \neq 0$ 使得 $\mathcal{K}_t = \mathcal{K}_0 + t'\mathcal{K} = \mathcal{C} \cup P_7P_8$。這告訴我們 $\mathcal{K}$ 可以透過 $\mathcal{K}_0$ 與 $\mathcal{K}_\infty$ 的線性組合來得到。

對於一般情形，即 $P_1, \ldots, P_8$ 中任三點不共線，任六點不共圓錐曲線，假設 $\mathcal{K}$ 不形如 $\mathcal{K}_0 + t\mathcal{K}_\infty$。那麼我們總是可以取到 s, t 使得 $\mathcal{K}' = s\mathcal{K} + \mathcal{K}_0 + t\mathcal{K}_\infty \supseteq P_1P_2$ 且定義方程式不為 0。這保證了 $\mathcal{K}' = P_1P_2 \cup \mathcal{C}$ 對於某個過 $P_3, \ldots, P_8$ 的圓錐曲線 $\mathcal{C}$，但這與 $P_3, \ldots, P_8$ 不共圓錐曲線矛盾。

(ii) 對於任意一點 X，考慮過 P_1, P_2, P_3, P_4 的圓錐曲線族 $\{\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_0 + t\mathcal{C}_\infty\}$ 使得 $\mathcal{C}_{t_j}$ 過 P_j，$j = 5, 6, 7$；過 X 的直線族 $\{\ell_t = \ell_0 + t\ell_\infty\}$ 使得 ℓ_{t_j} 過 P_j，$j = 5, 6, 7$。我們有

$$\mathcal{K}_X = \bigcup_t \mathcal{C}_t \cap \ell_t = \{\mathcal{C}_0 \cdot \ell_\infty = \mathcal{C}_\infty \cdot \ell_0\}$$

是一條過 $P_1, \ldots, P_7, X$ 的三次曲線。

若 X 位於過 P_5, P_6, P_7, P_8 的圓錐曲線

$$\mathcal{C} = \{X \mid X(P_5, P_6; P_7, P_8) = (P_5, P_6; P_7, P_8)_{P_1P_2P_3P_4}\}.$$

上，取 t_8 滿足

$$(t_5, t_6; t_7, t_8) = X(P_5, P_6; P_7, P_8) = (P_5, P_6; P_7, P_8)_{P_1P_2P_3P_4}$$

便有 P_8 位於 $\mathcal{K}_X$ 上。當 X 跑遍 $\mathcal{C}$，這給了我們一個三次曲線族 $\{\mathcal{K}_X\}_{X\in\mathcal{C}}$。

我們證明所有過 $P_1, \ldots, P_8$ 的三次曲線 $\mathcal{K}$ 都形如 $\mathcal{K}_X$，$X \in \mathcal{C}$。令 Q_j 為 $\mathcal{C}_j := (P_1P_2P_3P_4P_j)$ 與 $\mathcal{K}$ 的第六個交點，X_j 為 $\ell_j := P_jQ_j$ 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點。因為 $\ell_j \cup \mathcal{C}_k$ 與 $\ell_k \cup \mathcal{C}_j$ 交於 $P_1, \ldots, P_4, P_j, P_k, Q_j, Q_k, \ell_j \cap \ell_k$，所以由 (i)，$\ell_j \cap \ell_k \in \mathcal{K}$，即 $X_j = X_k \in \mathcal{K}$。令 $X = X_5 = \cdots = X_8$。我們有 $\mathcal{K}_X$ 與 $\mathcal{K}$ 交於 $P_1, \ldots, P_7, Q_5, Q_6, Q_7, X$，所以 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_X$。取 t_8 滿足

$$(t_5, t_6; t_7, t_8) = (\ell_5, \ell_6; \ell_7, \ell_8).$$

因為 $\ell_8 \cap \mathcal{C}_{t_8} = \ell_8 \cap \mathcal{K}_X \setminus \{X\} = \ell_8 \cap \mathcal{K} \setminus \{X\} = \{P_8, Q_8\}$，所以 $\mathcal{C}_{t_8} = \mathcal{C}_8$，故

$$(\ell_5, \ell_6; \ell_7, \ell_8) = (t_5, t_6; t_7, t_8) = (\mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6; \mathcal{C}_7, \mathcal{C}_8),$$

即 $X \in \mathcal{C}$。

因此存在兩點 $X_0, X_\infty \in \mathcal{C}$ 使得 $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_{X_0}, \mathcal{K}_\infty = \mathcal{K}_{X_\infty}$。如果令

$$\mathcal{C}' = \{X \mid X(P_5, P_6; P_7, P_9) = (P_5, P_6; P_7, P_9)_{P_1P_2P_3P_4}\},$$

那麼同樣的方法會給我們所有過 $P_1, \ldots, P_7, P_9$ 的三次曲線族 $\{\mathcal{K}_X\}_{X\in\mathcal{C}'}$。特別地，$X_0, X_\infty \in \mathcal{C}'$。因此

$$\mathcal{C} = (P_5P_6P_7X_0X_\infty) = \mathcal{C}' \ni P_9,$$

故 $P_9(P_5, P_6; P_7, P_8) = (P_5, P_6; P_7, P_8)_{P_1P_2P_3P_4}$。 ■

所以可以由一條三次曲線上已知的點構造出其他點，經常使用到的一件事是三條直線的聯集是一條（退化的）三次曲線。這邊舉密克定理作為例子：

Example 11.1.2. 對於一個完全四線形 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$，令 $A_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$，$\infty_i$, ∞_{-i} 為兩個無窮虛圓點，$\mathcal{K}_i = \ell_i \cup (A_{kl}A_{lj}A_{jk}\infty_i\infty_{-i})$。那麼 $\mathcal{K}_i$ 們都過八個點 A_{ij}, $\infty_{\pm i}$。所以他們也同時都過第九個點，令其為 M。注意到 $(A_{kl}A_{lj}A_{jk}\infty_i\infty_{-i}) = \odot(A_{kl}A_{lj}A_{jk})$ 且 ℓ_j, ℓ_k, ℓ_l 與它皆已有兩個交點，所以 $\mathcal{Q}$ 的四個三角形的外接圓共點於 M。

這還有以下推論：

Theorem 11.1.3 (三圓錐曲線定理/Three Conics Theorem)**.** 設三個非退化的圓錐曲線 $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ 交於兩點 P, Q，若 $\mathcal{C}_i$, $\mathcal{C}_j$ 交於另外兩點 A_{ij}, B_{ij}，那麼 $A_{23}B_{23}$, $A_{31}B_{31}$, $A_{12}B_{12}$ 共點。

Proof. 設 $R = A_{31}B_{31} \cap A_{12}B_{12}$，則注意到 $\mathcal{C}_2 \cup A_{31}B_{31}$ 與 $\mathcal{C}_3 \cup A_{12}B_{12}$ 都經過 A_{23}, A_{31}, A_{12}, B_{23}, B_{31}, B_{12}, P, Q, R 九點，而 $\mathcal{C}_1 \cup A_{23}B_{23}$ 經過那九個點中扣掉 R 的八個點，所以 $R \in \mathcal{C}_1 \cup A_{23}B_{23}$。若 $R \in \mathcal{C}_1$，那麼 $R \in \{A_{31}, B_{31}\} \cap \{A_{12}, B_{12}\}$，無論如何都有 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ 交於除了 P, Q 以外的另一點 R，所以 $R \in A_{23}B_{23}$。 ■

當然這個命題可以單純用交比證明。另外，如果取 P, Q 為兩個無窮虛圓點 $\infty_{\pm i}$，我們便得到根心定理。讓我們回到群運算。

Definition 11.1.4. 給定一個非奇異的三次曲線 $\mathcal{K}$ 與其上一點 O，我們定義 $\mathcal{K}$ 上的點的加法如下：對於任兩點 $P, Q \in \mathcal{K}$，令 X 為 PQ 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點，我們將 $P + Q$ 定為 OX 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點（這之中若有重合則直線改為切線，且交點數為重根數）。

這個加法的單位元是 O 並且顯然有交換律，即 $P+Q = Q+P$。令 S 為 O 關於 $\mathcal{K}$ 的切線與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點（注意到因為是切線，所以 $\mathcal{O}$ 要算兩次），那麼一點 $P \in \mathcal{K}$ 的加法反元素就是 PS 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點。

我們現在來證明結合律：令 P, Q, $R \in \mathcal{K}$，X, Y, Z 分別為 PQ, QR, $(P+Q)R$ 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點，那麼 O, X, $P+Q$、O, Y, $Q+R$ 及 O, Z, $(P+Q)+R$ 分別共線。考慮 $PQ \cup \mathcal{O}Y \cup (P+Q)R$ 與 $\mathcal{K}$ 的九個交點，分別為

$$P,\ Q,\ X,\ O,\ Y,\ Q+R,\ P+Q,\ R,\ Z,$$

注意到 $QR \cup OX \cup (Q+R)P$ 經過了除了 Z 以外的八個點，所以由 Cayley–Bacharach 定理，它也經過了第九個。換句話說，Z 是 $(Q+R)P$ 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點，故 $P+(Q+R)$ 是 OZ 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點，即 $(P+Q)+R$。

另外，這邊需要假設 $\mathcal{K}$ 是非奇異的，這樣才能保證切線的存在性與唯一性，或者說我們只在 $\mathcal{K}$ 的非奇異部份 $\mathcal{K}^{\circ}$ 上進行群運算。

Proposition 11.1.5. 對於群 $(\mathcal{K}, O)$，令 L 為 O 關於 $\mathcal{K}$ 的切線與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點。那麼三點 $P, Q, R \in \mathcal{K}$ 共線若且唯若 $P+Q+R=L$。

Proof. 若 P, Q, R 共線，則 $P+Q$ 是 OR 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點，所以 $(P+Q)+R$ 是 OO，即 O 關於 $\mathcal{K}$ 的切線，與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點 L。

若 $P+Q+R=L$，則 $P+Q=L-R$ 是 OR 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點，因此 P, Q, R 共線。 ■

Proposition 11.1.6. 對於三次曲線 $\mathcal{K}$ 上任六點 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$，$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ 共圓錐曲線若且唯若

$$P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6 = 2 \cdot L,$$

其中 L 為 $\mathcal{O}$ 關於 $\mathcal{K}$ 的切線與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點。

Proof. 令 Q_1, Q_2, Q_3 分別為 P_1P_4, P_2P_5, P_3P_6 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點，那麼由 (11.1.1)，$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ 共圓錐曲線若且唯若 Q_1, Q_2, Q_3 共線。由於

$$P_1+P_4+Q_1 = P_2+P_5+Q_2 = P_3+P_6+Q_3 = L,$$

Q_1, Q_2, Q_3 共線等價於

$$Q_1+Q_2+Q_3 = 3 \cdot L - (P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6) = L. \qquad ■$$

Proposition 11.1.7. 對於三次曲線 $\mathcal{K}$ 上任一點 A，定義 $i_A \colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ 為將 P 送至 AP 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點的映射。那麼對於任意一點 $B \in \mathcal{K}$ 滿足 $2 \cdot A = 2 \cdot B$，我們有

(a) 對於 $P, Q \in \mathcal{K}$ 使得 B, P, Q 共線，$B, i_A(P), i_A(Q)$ 也共線。因此我們得到一個映射

$$\begin{aligned} \mathbf{T}B &\xrightarrow{\quad\varphi\quad} \mathbf{T}B \\ BP &\longmapsto Bi_A(P). \end{aligned}$$

(b) φ 是一個射影對合變換。

Proof. (a) 因為 $B+P+Q=L$，所以

$$\begin{aligned} B+i_A(P)+i_A(Q) &= B+(L-A-P)+(L-A-Q) \\ &= 2L+(2B-2A)-(B+P+Q)=L, \end{aligned}$$

即 $B, i_A(P), i_A(Q)$ 共線。

(b) 對於任意兩點 $P, Q \in \mathcal{K}$，我們有

$$P+i_A(P)+Q+i_A(Q)+2\cdot B = 2\cdot(L-A)+2\cdot A = 2\cdot L,$$

因此圓錐曲線 $\mathcal{C}=(Pi_A(P)Qi_A(Q)B)$ 與 $\mathcal{K}$ 在 B 有相同的切線。令 X 為 BA 與 $\mathcal{C}$ 的第二個交點。那麼存在一 $\mathcal{C}$ 上的射影對合變換使得 (A, X), $(P, i_A(P))$, $(Q, i_A(Q))$ 為相互對。這告訴我們存在一 $\mathbf{T}B$ 上的射影對合變換使得 $(\mathbf{T}_B\mathcal{C}=\mathbf{T}_B\mathcal{K}, BA)$, $(BP, Bi_A(P)=\varphi(BP))$, $(BQ, Bi_A(Q)=\varphi(BQ))$ 為相互對。因為這件事對於所有 Q 都對，所以 φ 是一個射影對合變換。 ■

這邊我們舉巨龍（完全四線形的等角共軛軌跡，見 (9.2.4)）作為例子。令 M, τ, Φ 分別為 $\mathcal{K}$ 的密克點、牛頓線、C-S 共軛變換，並假設 Φ 沒有不動點（否則 $\mathcal{K}$ 在不動點會有兩條切線）。為了方便起見，我們取 M 作為單位元 O。

對於任意一對等角共軛點對 (P, P^*)，我們知道 $P\infty_\tau \cap P^*M \in \mathcal{K}$，因此 $P+\infty_\tau = P^* = \Phi(P)$，換句話說，在 $\mathcal{K}$ 上，Φ 其實就是 $+\infty_\tau$。由於 Φ 是一個對合，我們得到 $2\cdot\infty_\tau = O$。

令 $\infty_i, \infty_{-i} \in \mathcal{K}$ 為兩個無窮虛圓點，那麼 $\infty_i\infty_{-i}$ 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點為 ∞_τ，因此 $\infty_i+\infty_{-i}$ 為 $\mathcal{K}$ 的影消點 T（見 (9.2.24)）。所以對於 $\mathcal{K}$ 上任四點 P_1, P_2, P_3, P_4，P_1, P_2, P_3, P_4 共圓若且唯若

$$P_1+P_2+P_3+P_4+T = 2\cdot S.$$

由於 M 關於 $\mathcal{K}$ 的切線在變換 Φ 下為 $M\infty_\tau$，因此 $\Phi(S)=T$，故 $2\cdot S = 2\cdot(T+\infty_\tau)=2\cdot T$。也就是說，上式可以再化簡為

$$P_1+P_2+P_3+P_4=T.$$

有個不太好證明的定理：

Theorem 11.1.8. 若非奇異三次曲線 $\mathcal{K}$ 是在 $\mathbb{C}$ 上定義的，那麼存在一個複數 τ，$\operatorname{Im}\tau>0$，使得 (作為黎曼曲面與群，)

$$(\mathcal{K},O)\cong \mathbb{C}/_{\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}}.$$

這個映射要寫下來在平面幾何這個範疇上來說算是過於困難，但我們可以拿它來得到一個推論：

Corollary 11.1.9. 我們有

$$(\mathcal{K},O)[m]:=\{P\in\mathcal{K}\mid m\cdot K=O\}\cong(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2.$$

11.1.1 三次曲線觀點下的巨龍

令 $\mathcal{Q}=(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$ 為一完全四線形。我們的目標是透過三次曲線來刻劃 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛軌跡 $\mathcal{K}$ (見第 9.2 節)。跟之前一樣，為了簡化記號，以下記 $A=A_{23}$, $B=A_{31}$, $C=A_{12}$, $A^*=A_{14}$, $B^*=A_{24}$, $C^*=A_{34}$ 使得 $A^*B^*C^*$ 為 $\triangle ABC$ 的截線。這邊的證明基本上會是純射影的，因此我們會需要把一些熟知的結果重新證明一遍，比方說 (1.3.14)：

Proposition 11.1.10. 對於不在 $\mathcal{L}_\infty$ 上的點 P，$P\in\mathcal{K}$ 若且唯若

$$PB+PB^*=PC+PC^*.$$

Proof. 首先，由迪沙格對合，$PB+PB^*=PC+PC^*$ 若且唯若 $\{P(A_{ij},A_{kl})\}$, $P(\infty_i,\infty_{-i})$ 定義了一個 $\mathbf{T}P$ 上的對合變換。

令 P^* 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，$Q=P\infty_{-i}\cap P^*\infty_i$。若 $P\in\mathcal{K}$，那麼 (7.4.6) 告訴我們 P, Q, ∞_i 共任意 $\triangle\subseteq\mathcal{Q}$ 的外接圓錐曲線。但這個結合

(7.4.6) 又告訴我們在 $\triangle PQ\infty_i$ 上，

$$A \times A^* = B \times B^* = C \times C^*.$$

特別地，$\{P(A_{ij}, A_{kl})\}$, $P(\infty_i, \infty_{-i}) = P(\infty_i, Q)$ 定義了一個 $\mathbf{T}P$ 上的對合變換。

反之，若 $\{P(A_{ij}, A_{kl})\}$, $P(\infty_i, \infty_{-i})$ 定義了一個 $\mathbf{T}P$ 上的對合變換，考慮 $\triangle PQ\infty_i$ 上的等共軛變換 $\varphi = A \times A^*$，那麼 A, B, C, P, Q, ∞_i 共圓錐曲線與條件再結合 (7.4.6) 會有 $\varphi = B \times B^* = C \times C^*$。因此 (7.4.6) 跟我們說 A, B^*, C^*, P, Q, ∞_i 共圓錐曲線，再結合 $A(B^*, C^*)$, $A(P, P^*)$, $A(\infty_i, \infty_{-i})$ 定義了一個 $\mathbf{T}A$ 上的對合變換與 (7.4.6)，我們得到在 $\triangle AB^*C^*$ 上，$P \times P^* = \infty_i \times \infty_{-i}$。因此 $P \in \mathcal{K}$。 ■

這等價於

$$P(A_{12}, A_{13}; \infty_{-i}, \infty_i) = P(A_{24}, A_{34}; \infty_{-i}, \infty_i),$$

代表 $\mathcal{K}$ 是兩個圓錐曲線族

$$\mathcal{C}_t := \{P \mid P(A_{12}, A_{13}; \infty_{-i}, \infty_i) = t\},$$
$$\mathcal{C}'_t := \{P \mid P(A_{24}, A_{34}; \infty_{-i}, \infty_i) = t\}$$

的交點。當 $t = 1$ 時，$\mathcal{C}_t \cap \mathcal{C}'_t = \mathcal{L}_\infty \cup \{A_{14}\}$，因此 $\mathcal{K}$ 是一條三次曲線。因為這時候 $\mathcal{K}$ 經過兩個無窮虛圓點 $\infty_{\pm i}$，所以特別地我們稱它為圓環三次曲線。

Theorem 11.1.11 (巨龍基本定理). 對於 $\mathcal{Q}$ 的兩對等角共軛點對 (P, P^*), (Q, Q^*)，

$$\mathcal{K}(\mathcal{Q}) = \mathcal{K}((PP^*)(QQ^*)),$$

Proof. 我們先證明 $\mathcal{K}(\mathcal{Q}) = \mathcal{K}((AA^*)(PP^*))$。事實上，由

$$BA + BA^* = BP + BP^*$$

我們有 $B \in \mathcal{K}((AA^*)(PP^*))$ 並同理有 B^*, C, $C^* \in \mathcal{K}((AA^*)(PP^*))$。這代表 $\mathcal{K}(\mathcal{Q})$ 及 $\mathcal{K}((AA^*)(PP^*))$ 都經過十個點 A, A^*, B, B^*, C, C^*, P, P^*, $\infty_{\pm i}$。因此兩個三次曲線重合。特別地，這告訴我們 Q, $Q^* \in \mathcal{K}((AA^*)(PP^*))$。因此同樣的論證會給我們

$$\mathcal{K}(\mathcal{Q}) = \mathcal{K}((AA^*)(PP^*)) = \mathcal{K}((PP^*)(QQ^*)).$$ ■

我們這邊也重新證明 (M, ∞_τ) 是關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點對：

Proposition 11.1.12. 點 M 關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點 M^* 就是 $\mathcal{L}_\infty$ 與 $\mathcal{L}_\infty^\vee$ 的交點，其中 $\mathcal{L}_\infty^\vee$ 是 $\mathcal{L}_\infty$ 關於 $\mathcal{Q}$ 的等共軛直線 (10.1.8)，即牛頓線 τ。

Proof. 這可以用大保交比證明。固定 $\triangle ABC$ 及 A^*。讓 M 在 $(ABC\infty_i\infty_{-i})$ 上動。令 $\triangle\mathcal{L}_\infty^a\mathcal{L}_\infty^b\mathcal{L}_\infty^c$ 為 $\mathcal{L}_\infty$ 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形，X, Y, Z 分別為 AA^*, BB^*, CC^* 與 $\mathcal{L}_\infty^a, \mathcal{L}_\infty^b, \mathcal{L}_\infty^c$ 的交點。那麼 X, Y, Z 共於 $\mathcal{L}_\infty^\vee$。因此

$$M \longmapsto (CA^*\infty_i\infty_{-i}M) \longmapsto B^* \longmapsto Y \longmapsto \mathcal{L}_\infty^\vee \longmapsto \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_\infty^\vee$$

是個保交比變換。而 $M = B, C, \infty_{\pm i}$ 時 $\mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_\infty^\vee$ 分別對應到 $\infty_{CA}, \infty_{AB}, \infty_{\mp i}$。因此 $M^* = \infty_\tau$。 ■

注意到由 (7.4.6)，在 $\triangle M\infty_i\infty_{-i}$ 上，

$$\Phi := A \times A^* = B \times B^* = C \times C^*,$$

即 $\mathcal{Q}$ 上的 C–S 共軛變換 (10.1.6)。我們發現對於 $\mathcal{K}$ 上任一點 P，$\Phi(P)$ 為 P 關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點 P^*：

$$\measuredangle A_{ij}\Phi(P)A_{ik} = \measuredangle PA_{kl}M + \measuredangle MA_{jl}P = \measuredangle(\ell_j, \ell_k) - \measuredangle A_{ij}PA_{ik} = \measuredangle A_{ij}P^*A_{ik},$$

其中第一個等號是由直線 $\mathcal{L}_\infty$ 截兩個完全四點形 $(M, \Phi(P), A_{kl}, A_{ij}\Phi(P) \cap A_{kl}P)$ 與 $(M, \Phi(P), A_{jl}, A_{ik}\Phi(P) \cap A_{jl}P)$ 所定義的對合來得到，而最後一個等號可以直接由 $P, \infty_i, P\infty_{-i} \cap P^*\infty_i$ 及 $P^*, \infty_{-i}, P^*\infty_{-i} \cap P^*\infty_i$ 分別共 $\triangle A_{jk}A_{ki}A_{ij}$ 的外接圓錐曲線來得到。

特別地，這告訴我們對於任意兩對等角共軛點對 (P, P^*), (Q, Q^*)，$(PP^*)(QQ^*)$ 的 Clawson–Schmidt 變換也是 Φ，也因此與 $\mathcal{Q}$ 有同樣的密克點 M。因為

$$\mathcal{K}(\mathcal{Q}) = \mathcal{K}((AA^*)(PP^*)),$$

所以他們與 $\mathcal{L}_\infty$ 的第三個交點 ∞_τ 也相等。故 ∞_{PP^*} 關於 $\overline{PP^*}$ 的調和點 $\infty_{PP^*}^\vee$ 都位於同一個直線 $\tau = \mathcal{L}_\infty^\vee = \infty_{AA^*}^\vee\infty_\tau$ 上。

這完全給了我們 $\mathcal{K}$ 的刻畫 (9.2.4)：

Theorem 11.1.13. 等角共軛軌跡 $\mathcal{K}$ 的仿射部分（即扣掉無窮遠線的部分）就是

$$\widetilde{\mathcal{K}}(\mathcal{Q}) := \left\{ P \,\middle|\, \tau, \infty_i \infty_{-i} \text{ 調和分割 } \overline{P\Phi(P)} \right\}.$$

Proof. 我們已經知道 $\mathcal{K} \setminus \mathcal{L}_\infty$ 落在 $\widetilde{\mathcal{K}}(\mathcal{Q})$ 中，而 $\widetilde{\mathcal{K}}(\mathcal{Q})$ 又是一個三次曲線（的仿射部分），因此 $\mathcal{K}$ 的仿射部分就是 $\widetilde{\mathcal{K}}(\mathcal{Q})$。 ■

習題

Problem 1. 試用 Cayley–Bacharach 定理證明帕斯卡定理。

Problem 2 (Four Conics Theorem)**.** 設 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ 為三個圓錐曲線，令 A_{ij}, B_{ij}, P_{ij}, Q_{ij} 為 $\mathcal{C}_i,\mathcal{C}_j$ 的交點，若 P_{23}, P_{31}, P_{12}, Q_{23}, Q_{31}, Q_{12} 共圓錐曲線，證明：$A_{23}A_{23}$, $A_{31}A_{31}$, $A_{12}A_{12}$ 共點。

Problem 3. 令 $\mathcal{K}$ 為一個三次曲線，$A \in \mathcal{K}$ 對 $\mathcal{K}$ 做兩條切線分別切 $\mathcal{K}$ 於 B, C，S 為 BC 與 $\mathcal{K}$ 的另一個交點。證明：A, S 分別關於 $\mathcal{K}$ 的切線交於 $\mathcal{K}$ 上。

11.2 配極之路

Definition 11.2.1. 對於一個 d 次曲線 $\mathcal{V} = \mathcal{V}(F)$ 及一點 $P = [p : q : r]$，我們定義 $\mathcal{V}$ 關於 P 的微分曲線，記為 $\partial_P \mathcal{V}$，是由

$$P \cdot \nabla F := p\,\frac{\partial F}{\partial x} + q\,\frac{\partial F}{\partial y} + r\,\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

所定義出來的集合。它會是一個 $d-1$ 次曲線（當 $P \cdot \nabla F \neq 0$）或 $\mathbb{P}^2$（當 $P \cdot \nabla F = 0$）。

顯然地，對於任意兩點 P, Q，$\partial_P \partial_Q \mathcal{V} = \partial_Q \partial_P \mathcal{V}$。微分曲線有以下良好的幾何解釋：

Proposition 11.2.2. 給定 d 次曲線 $\mathcal{V}$。對於任意過 P 一線 $\ell \not\subseteq \mathcal{V}$，令 Q_1, $\ldots$, Q_d 為 ℓ 與 d 次曲線 $\mathcal{V}$ 的交點。那麼對於任意一點 $M \in \ell$，$M \in \partial_P \mathcal{V}$ 若且唯若

(i) $M = P \in \{Q_1, \ldots, Q_d\}$，

(ii) M 在 $Q_1, \ldots, Q_d$ 出現兩次以上（即重根），或

(iii) $\dfrac{d}{PM} = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{Q_iM}$。

Proof. 如果將 ℓ 參數化為 $\{P_t = [p+tu : q+tv : r+tw] \mid t \in \mathbb{P}^1\}$，並且令 t_i 為 Q_i 的座標，那麼

$$f(t) = F(p+tu, q+tv, r+tw) = c\prod_{i=1}^{d}(t-t_i)$$

對於某個常數 c。所以

$$\left(u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z}\right)(P_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t) = \sum_{i=1}^{d}\frac{f(t)}{t-t_i}.$$

由於 F 是齊次的且次數為 d，所以（由簡單的微積分）

$$\begin{aligned} d \cdot f(t) &= \left((p+tu)\frac{\partial F}{\partial x} + (q+tv)\frac{\partial F}{\partial y} + (r+tw)\frac{\partial F}{\partial z}\right)(P_t) \\ &= \left(p\frac{\partial F}{\partial x} + q\frac{\partial F}{\partial y} + r\frac{\partial F}{\partial z}\right)(P_t) + \sum_{i=1}^{d}\frac{tf(t)}{t-t_i}. \end{aligned}$$

因此 $M = P_t \in \partial_P\mathcal{V}$ 若且唯若

$$d \cdot f(t) = \sum_{i=1}^{d}\frac{tf(t)}{t-t_i}.$$

若 $f(t) = 0$，那麼 $t = t_i$ 對於某個 i，因此

- 當 $t_i = 0$ 時，上式顯然成立，即 (i)；
- 當 $t_i \neq 0$ 時，這等價於 $(t-t_i)^2 \mid f(t)$，即 (ii)。

若 $f(t) \neq 0$，那麼這等價於

$$\frac{d}{PM} = \frac{d}{t} = \sum_{i=1}^{d}\frac{1}{t-t_i} = \sum_{i=1}^{d}\frac{1}{Q_iM},$$

即 (iii)。 ■

Corollary 11.2.3. 給定任意一個射影變換 Φ。對於任意一個 d 次曲線 $\mathcal{V}$ 及一點 P，

$$\partial_{\Phi(P)}\Phi(\mathcal{V}) = \Phi(\partial_P\mathcal{V}).$$

換句話說，微分曲線是射影不變的。

Proof. 情況 (i) 與 (ii) 顯然等價，所以我們只需證明

$$\frac{d}{PM}=\sum_{i=1}^{d}\frac{1}{Q_iM}\quad\Longrightarrow\quad\frac{d}{\Phi(P)\Phi(M)}=\sum_{i=1}^{d}\frac{1}{\Phi(Q_i)\Phi(M)}.$$

若 Q_i 都為 P，那麼左右兩邊的等式皆恆成立（這時候 $\ell\subseteq\partial_P\mathcal{V}$）。因此不妨假設 $Q_1\neq P$。我們發現左邊可以寫成

$$0=\sum_{i=1}^{d}\frac{PQ_i}{Q_iM}=\frac{PQ_1}{Q_1M}\left(1+\sum_{i=2}^{d}(P,M;Q_i,Q_1)\right),$$

即

$$\sum_{i=2}^{d}(\Phi(P),\Phi(M);\Phi(Q_i),\Phi(Q_1))=\sum_{i=2}^{d}(P,M;Q_i,Q_1)=-1.$$

把這條式子用類似的方法寫回去便會得到

$$\frac{d}{\Phi(P)\Phi(M)}=\sum_{i=1}^{d}\frac{1}{\Phi(Q_i)\Phi(M)}.$$ ■

透過 (11.2.2)，我們發現 $\partial_P\mathcal{V}$ 在 $d=2$ 的時候就是 P 關於圓錐曲線 $\mathcal{V}$ 的極線，所以定義：

Definition 11.2.4. 一點 P 關於一個 d 次曲線 $\mathcal{V}$ 的極 k 次曲線為

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}^{k}(P):=\partial_P^{d-k}\mathcal{V}=\underbrace{\partial_P\cdots\partial_P}_{d-k\text{ 次}}\mathcal{V}$$

Proposition 11.2.5. 對於一個 d 次曲線 $\mathcal{V}$ 及一點 P，下列敘述等價：

(i) $P\in\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}^{k}(P)$ 對於某個 $0\le k\le d$；

(ii) $P\in\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}^{k}(P)$ 對於所有 $0\le k\le d$。

Proof. 我們只需證明 $P\in\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}^{k}(P)$ 若且唯若 $P\in\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}^{k-1}(P)$。令 $F^{(k)}$ 為定義 $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}^{k}(P)$ 的方程式，$P=[p:q:r]$。那麼 $F^{(k)}$ 為齊次且次數為 k，因此

$$\begin{aligned}F^{(k-1)}(P)&=\left(p\,\frac{\partial F^{(k)}}{\partial x}+q\,\frac{\partial F^{(k)}}{\partial y}+r\,\frac{\partial F^{(k)}}{\partial z}\right)(P)\\&=\left(x\,\frac{\partial F^{(k)}}{\partial x}+y\,\frac{\partial F^{(k)}}{\partial y}+z\,\frac{\partial F^{(k)}}{\partial z}\right)(P)=(k\cdot F^{(k)})(P).\end{aligned}$$

故 $P\in\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}^{k}(P)$ 若且唯若 $P\in\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}^{k-1}(P)$。 ■

因為一個次數為 0 的多項式 F 所定義出來的集合不是空集合 $\varnothing$（當 $F \neq 0$），就是全空間 $\mathbb{P}^2$（當 $F = 0$），所以：

Corollary 11.2.6. 對於一個 d 次曲線 $\mathcal{V}$ 及一點 P，

$$\mathfrak{p}^d_{\mathcal{V}}(P) = \begin{cases} \varnothing & \text{if } P \notin \mathcal{V}, \\ \mathbb{P}^2 & \text{if } P \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

因為情況只有兩種，所以我們會直接以其定義方程式，即 $\neq 0$ 代表 $\varnothing$，而以 $= 0$ 代表 $\mathbb{P}^2$。這時候上式寫為

$$\mathfrak{p}^d_{\mathcal{V}}(P) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P \in \mathcal{V}.$$

最終，我們得到：

Corollary 11.2.7 (對偶性). 對於一個 d 次曲線 $\mathcal{V}$，兩點 P, Q，及整數 $0 \leq k \leq d$，

$$P \in \mathfrak{p}^k_{\mathcal{V}}(Q) \quad \Longleftrightarrow \quad Q \in \mathfrak{p}^{d-k}_{\mathcal{V}}(P).$$

Proof. 兩邊都等價於 $\partial^k_P \partial^{d-k}_Q \mathcal{V} = \partial^{d-k}_P \partial^k_Q \mathcal{V} = 0$。 ∎

當 $n = 3$ 時，若直線 ℓ 交三次曲線 $\mathcal{K}$ 於三點 P, Q, R，則 ℓ 與 $\mathfrak{p}^1_{\mathcal{K}}(P)$（異於 P）的第二個交點 M 滿足

$$\begin{aligned} \frac{3}{PM} = \frac{1}{PM} + \frac{1}{QM} + \frac{1}{RM} \quad & \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{PM} = \frac{1}{QM} + \frac{1}{RM} \\ & \Longleftrightarrow \quad (P, M; Q, R) = -1 \\ & \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{QR} = \frac{1}{PR} + \frac{1}{MR} \end{aligned}$$

因此，$R \in \partial_Q \partial_P \mathcal{K}$。等價地，我們得到：

Proposition 11.2.8. 三次曲線 $\mathcal{V}$ 上的共線三點 P, Q, R 滿足

$$\partial_P \partial_Q \partial_R \mathcal{K} = 0.$$

Definition 11.2.9. 給定一個三次曲線 $\mathcal{K}$。對於任意一線 K，

(i) 其上動點 P 關於 $\mathcal{K}$ 的極圓錐曲線 $\mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}}(P)$ 過四個定點 S_1, S_2, S_3, S_4，記集合 $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ 為 $\mathfrak{p}^0_{\mathcal{K}}(K)$，稱為 K 關於 $\mathcal{K}$ 的極點。

(ii) 其上動點 P 關於 $\mathcal{K}$ 的極線 $\mathfrak{p}^1_{\mathcal{K}}(P)$ 的包絡線是一個圓錐曲線，記為 $\mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}}(K)$，稱為 K 關於 $\mathcal{K}$ 的極圓錐曲線 (**poloconic**)。

記得這邊是線的極圓錐曲線，不要跟點的搞混。那麼顯然有：

Proposition 11.2.10. 給定一個三次曲線 $\mathcal{K}$，那麼對於任意一線 K 及一點 P，

$$P \in \mathfrak{p}^0_{\mathcal{K}}(K) \quad \Longleftrightarrow \quad K = \mathfrak{p}^1_{\mathcal{K}}(P).$$

Proposition 11.2.11. 給定一個三次曲線 $\mathcal{K}$，K 為任意一線，那麼存在 $\triangle ABC$ 及其上的某個等共軛變換 φ 使得 $\{\mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}}(P) \mid P \in K\}$ 為 φ 的對角圓錐曲線族，且 $\mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}}(K) = \varphi(K)$。

Proposition 11.2.12. 給定一個三次曲線 $\mathcal{K}$，K 為任意一線，那麼 $\mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}}(K)$ 為 K 關於 $\mathfrak{p}^0_{\mathcal{K}}(K)$ 的九點圓錐曲線。

11.2.1 三角形

令 $\triangle = \triangle ABC$。那麼我們也可以把 $\triangle$ 視為一個三次曲線：在重心座標下，即 $xyz = 0$。

Proposition 11.2.13. 對於任意一點 P，

(i) $\mathfrak{p}^1_{\triangle}(P)$ 為 P 關於 $\triangle$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}(P)$；

(ii) $\mathfrak{p}^2_{\triangle}(P)$ 是以 P 為透視中心的 $\triangle$ 的外接圓錐曲線 $\mathfrak{c}(P)$。

Proof. (i) 令 $P_a = AP \cap BC$，Q 為 AP 與 $\mathfrak{p}^1_{\triangle}(P)$ 的交點。那麼 P 為 AQ 與

$\mathfrak{p}^2_\triangle(Q)$ 的第二個交點，因此

$$\begin{aligned}\frac{3}{QP}=\frac{2}{AP}+\frac{1}{P_aP} \quad &\Longrightarrow \quad 2\cdot\frac{QP}{AP}+\frac{QP}{P_aP}=3\\ &\Longrightarrow \quad 2\cdot\frac{QA}{AP}+\frac{QP_a}{P_aP}=0\\ &\Longrightarrow \quad (Q,P;P_a,A)=-2.\end{aligned}$$

令 $P_b=BP\cap CA$，$P_a^\vee$, $P_b^\vee$ 分別為 $\mathfrak{t}(P)$ 與 BC, CA 的交點。則

$$\begin{aligned}(AP\cap\mathfrak{t}(P),P;P_a,A)&=P_a^\vee(P_b^\vee,P_b;C,A)\cdot P_b(P_a^\vee,P;P_a,A)\\&=-1\cdot(1-(P_a^\vee,P_a;B,C))=-2.\end{aligned}$$

因此由對稱性，$\mathfrak{p}^1_\triangle(P)=\mathfrak{t}(P)$。

(ii) 令 M 為 AP 與 $\mathfrak{p}^2_\triangle(P)$ 的第二個交點。那麼類似於 (a) 的計算，我們有

$$\frac{3}{PM}=\frac{2}{AM}+\frac{1}{P_aM} \quad \Longrightarrow \quad (P,M;P_a,A)=-2.$$

令 P_A 為 AP 與 $\mathfrak{c}(P)$ 的第二個交點，P^a 為 B, C 關於 $\mathfrak{c}(P)$ 的切線的交點（即 P 關於 $\triangle$ 的反西瓦三角形的頂點）。我們也有

$$\begin{aligned}(P,P_A;P_a,A)&=(P,P^a;P_a,A)\cdot(P^a,P_A;P_a,A)\\&=-1\cdot(1-(P^a,P_a;P_A,A))=-2.\end{aligned}$$

因此由對稱性，$\mathfrak{p}^2_\triangle(P)=\mathfrak{c}(P)$。 ■

我們可以把 (12.3.23) 寫為：

Proposition 11.2.14. 令 $S=P*Q$ 為 P 與 Q 的西瓦積。那麼

$$\partial_P\partial_Q\triangle=\partial_S^2\triangle.$$

11.2.2 巨龍

令 $\mathcal{K}$ 為一個巨龍。我們知道它是一個圓環三次曲線。對於一點 $P\in\mathcal{K}$，我們記 P^* 為 P 關於 $\mathcal{K}$ 的等角共軛點。

Definition 11.2.15. 對於一點 P，我們定義 $\triangle_P = \partial_P\partial_{P^*}$，$P$-影消點 V_P 為 PP^* 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點。

密克點 M 與牛頓線上的無窮遠點 ∞_τ 所對應到的影消點 $V_M = V_{\infty_\tau}$ 就是 $\mathcal{K}$ 的影消點 $V_{\mathcal{K}}$。

Proposition 11.2.16. 對於任意兩對等角共軛點對 (Q,Q^*), (R,R^*)，令 $P = QR^* \cap Q^*R$, $P^* = QR \cap Q^*R^*$。那麼 $\triangle_P\mathcal{K}$, QQ^*, RR^* 共點。

Proof. 令 $\mathcal{C}_P = \partial_P\mathcal{K}$, $S = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}_P}(Q^*R^*)$, $S^* = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}_P}(QR)$。由 (11.2.8)，$Q$, R^* 關於 $\mathcal{C}_P$ 共軛，因此 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}_P}(Q) = R^*S^*$。同理有 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}_P}(R) = S^*Q^*$, $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}_P}(Q^*) = RS$, $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}_P}(R^*) = SQ$。故 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}_P}(\triangle QRS) = \triangle Q^*R^*S^*$。結合第 7.1 節的習題 2，這告訴我們 QQ^*, RR^*, SS^* 共點。而我們知道

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{C}_P}(P^*) = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}_P}(QR \cap Q^*R^*) = SS^*. \qquad \blacksquare$$

Corollary 11.2.17. 對於一點 $P \in \mathcal{K} \setminus \{\infty_{\pm i}\}$，我們有 $\triangle_P\mathcal{K} = V_P\infty_{\perp PP^*}$。對於 $P = \infty_{\pm i}$，我們有 $\triangle\mathcal{K} = \tau$.

Proof. 由 (11.2.8)，V_P 已經位於 $\triangle_P\mathcal{K}$ 上。因此我們只需證明 $S := QQ^* \cap RR^*$ 關於 PP^* 的垂足 V 就是 V_P。因為 $(Q,Q^*;S,QQ^* \cap PP^*) = -1$ 及 $SV \perp PP^*$，所以

$$VQ + VQ^* = 2 \cdot PP^* = VP + VP^*,$$

即 V 位於 $\mathcal{K}$ 上。

對於 $P = \infty_{\pm i}$，我們證明對於所有 Q，$S = QQ^* \cap RR^*$ 位於 τ 上。事實上，由

$$(Q,Q^*;\infty_i\infty_{-i} \cap QQ^*, S) = -1,$$

S 是 $\overline{QQ^*}$ 的中點，故位於 τ 上。 $\blacksquare$

Corollary 11.2.18. 同 (11.2.16) 的記號，$\triangle_P\mathcal{K}$, $\triangle_Q\mathcal{K}$, $\triangle_R\mathcal{K}$ 共於完全四線形 $\mathcal{Q} = \triangle PQR \cup P^*Q^*R^*$ 的對角線三角形 $\delta_{\mathcal{Q}}$ 的垂心。

如果 $\mathcal{K}$ 沒有內心，那麼它就會是非奇異的。

Proposition 11.2.19. 當 P 在 $\mathcal{K}$ 上動時，$V_P + 2P$（在 $\mathcal{K}$ 上的群運算下）是定值。因此，

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}, M) &\xrightarrow{V_-} (\mathcal{K}, V_{\mathcal{K}}) \\ P &\longmapsto V_P\end{aligned}$$

是個同態。

Proof. 因為對於任意兩對等角共軛點對 (P, P^*), (Q, Q^*)，我們都有 $P + Q^* = P^* + Q$，所以

$$\begin{aligned}V_P + 2P &= (V_P + P + P^*) + (P - P^*) \\ &= (V_Q + Q + Q^*) + (Q - Q^*) = V_Q + 2Q.\end{aligned}$$

■

這告訴我們對於任意一點 $V_0 \in \mathcal{K}$，存在恰好 $4 = 2^2$ 個點 P_1, P_1^*, P_2, P_2^* 使得 $V_0 = V_{P_1} = V_{P_2}$。事實上，它們就是 $\mathcal{K}$ 與 V_0 關於 $\mathcal{K}$ 的兩條角平分線 ℓ_1, ℓ_2 的交點，這邊的角平分線 ℓ_1, ℓ_2 就是過 V_0 的兩相異線滿足

$$2 \cdot \ell_1 = 2 \cdot \ell_2 = V_0 M + \tau.$$

因為 $\ell_1 = P_1 P_1^* \perp \ell_2 = P_2 P_2^*$，所以我們得到：

Proposition 11.2.20. 直線 $\triangle_{P_1}\mathcal{K}$ 與 $\mathcal{K}$ 的三個交點恰好就是 V_0, P_2, P_2^*。

Proposition 11.2.21. 點 V_0 關於 $\mathcal{K}$ 的等角共軛點 V_0^* 關於 $\mathcal{K}$ 的極圓錐曲線 $\mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^2(V_0^*)$ 為 $(V_0^* P P^* Q Q^*)$。

Proof. 要證明 $\mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^2(V_0^*) = (V_P^* P P^* Q Q^*)$，由對稱性我們只需證明 $P \in \mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^2(V_0^*)$。由對偶性，這等價於 $V_0^* = V_P^* \in \mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^1(P)$。因為 P, P^*, V_P 共線且

$$P + P + V_P^* = P + P^* + V_P,$$

V_P^* 位於 P 關於 $\mathcal{K}$ 的切線 $\mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^1(P)$ 上。 ■

Proposition 11.2.22. 對於一點 $V_0 \in \mathcal{K}$，令 S_1, S_2 分別為 $\partial_{V_0}\mathcal{K}$ 與 V_0 關於 $\mathcal{K}$ 的兩條角平分線的第二個交點。那麼 $\triangle_{V_0}\mathcal{K} = S_1 S_2$。令 N 為 $V_0^* \infty_{\perp V_0 V_0^*}$ 關於 $\mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^2(V_0)$ 的極點，也就是 $\overline{S_1 S_2}$ 的中點。那麼 $V_0 N$ 垂直於 $\mathfrak{p}_{\mathcal{K}}^1(V_0)$。

Proof. 令 P_i, P_i^* 為 $\mathcal{K}$ 與 V_0S_i 的另外兩個交點。那麼 $V_0^*P_i, V_0^*P_i^*$ 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點分別為 P_i, P_i^*（也就是 $V_0^*P_i, V_0^*P_i^*$ 與 $\mathcal{K}$ 相切）。因此

$$(P_i, P_i^*; V_0, S_i) = -1$$

結合 (11.2.16) 告訴我們 $S_i \in \triangle_{V_0}\mathcal{K}$。

考慮 $\mathcal{C}_{V_0} = \partial_{V_0}\mathcal{K}$ 上的對合 φ，$\varphi(U) = \infty_{\perp V_0U} \cap \mathcal{C}_{V_0}$。我們證明 N 是對合中心，即 $N = \bigcap\limits_U U\varphi(U)$。

注意到 $V_0\infty_{\pm i}$ 與 $\mathcal{C}_{V_0}$ 的第二個交點 $R_\pm$ 為 φ 的不動點。因此我們只需證明 $N = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}_{V_0}}(V_0^*\infty_{\perp V_0V_0^*})$ 是 R_+, R_- 關於 $\mathcal{C}_{V_0}$ 的切線的交點，或等價地，$R_\pm \in V_0^*\infty_{\perp V_0V_0^*}$。令 $Q_\pm = V_0\infty_{\pm i} \cap V_0^*\infty_{\mp i}$。那麼

$$(V_0, R_\pm; \infty_{\pm i}, Q_{\pm i}) = -1$$

告訴我們 $R_\pm \in V_0^*(\infty_i\infty_{-i} \cap Q_+Q_-)$。透過

$$(\infty_i, \infty_{-i}; \infty_i\infty_{-i} \cap V_0V_0^*, \infty_i\infty_{-i} \cap Q_+Q_-) = -1,$$

我們得到 $\infty_i\infty_{-i} \cap Q_+Q_- = \infty_{\perp V_0V_0^*}$，因此 N 是 φ 的對合中心。

最後，因為 N 位於 $V_0\varphi(V_0)$ 上，所以 $V_0N = V_0\varphi(V_0)$ 垂直於 V_0 關於 $\mathcal{C}_{V_0}$ 的切線 $\partial_{V_0}^2\mathcal{K}$。 ■

習題

Problem 1. 令 τ 為完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線，證明：$\mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}(\mathcal{Q})}(\infty_\tau)$ 是一個等軸雙曲線。

11.3 等三次曲線

在三角形中，當然有一些很重要的三次曲線，我們這邊來定義幾個：

Definition 11.3.1. 給定一個等共軛變換 φ，我們稱一個三次曲線 $\mathcal{K}$ 是一個 φ 不變的等三次曲線 (**isocubic**) 若 $\varphi(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$。

所以這個時候我們可能會想知道他的解析式長怎樣，假設

$$\varphi[x:y:z] = \left[\frac{p}{x} : \frac{q}{y} : \frac{r}{z}\right],$$

大家可以驗證 $\mathcal{K}$ 有下列兩種形式：

$$ux(ry^2 - qz^2) + vy(pz^2 - rx^2) + wz(qx^2 - py^2) = 0 \qquad (p\mathcal{K}),$$

$$ux(ry^2 + qz^2) + vy(pz^2 + rx^2) + wz(qx^2 + py^2) + kxyz = 0 \qquad (n\mathcal{K}),$$

其中 k 是一個常數。我們先來定義第一種 $(p\mathcal{K})$：

Definition 11.3.2. 給定 $\triangle ABC$ 與一個等共軛變換 φ，那麼對於任一點 P，那麼我們定義以 P 為中心 (**pivot**) 的等三次曲線

$$\mathcal{K}^p_\varphi(P) = \{Q \mid P, Q, \varphi(Q) \text{ 共線}\}.$$

這時 $\mathcal{K}^p_\varphi(P)$ 被稱為可中心化的 (**pivotal**)。

這個時候 $P = [u:v:w]$。顯然地，我們有：

Proposition 11.3.3. 對於任意一點 P，A, B, C, P, $\varphi(P)$, $S^x \in \mathcal{K}^p_\varphi(P)$，其中 S, S^a, S^b, S^c 為 φ 的不動點。

Definition 11.3.4. 令 φ 為 $\triangle ABC$ 的等角共軛變換，$\mathcal{E}$ 為 $\triangle ABC$ 的歐拉線，G, O, N, $L \in \mathcal{E}$ 分別為 $\triangle ABC$ 的重心、外心、九點圓圓心及 de Longchamps 點。我們定義

$$\mathcal{K}^p_\varphi(\infty_\mathcal{E}),\ \mathcal{K}^p_\varphi(G),\ \mathcal{K}^p_\varphi(O),\ \mathcal{K}^p_\varphi(N),\ \mathcal{K}^p_\varphi(L)$$

分別為 $\triangle ABC$ 的 Neuberg, Thomson, McCay, Napolean-Feurerbach, Darboux 三次曲線。

所以我們之前在封騰三號的那個等價其實就是 McCay 三次曲線。

Proposition 11.3.5. 對於一三次曲線 $\mathcal{K}$ 及其上相異四點 A, B, C, P，若 $2 \cdot A = 2 \cdot B = 2 \cdot C = 2 \cdot P$，那麼 $\mathcal{K}$ 就是 $\triangle ABC$ 上以 P 為中心的等三次曲線。

Proof. 考慮變換 $i_P\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$，將一點 $Q \in \mathcal{K}$ 送至 PQ 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點。由 (11.1.7)，$\varphi_A\colon AQ \mapsto Ai_P(Q)$ 是一個良好定義的射影對合變換。(11.1.9) 告訴我們

$$(\mathcal{K}, P)[2] := \{Q \in \mathcal{K} \mid 2 \cdot Q = O\} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2,$$

因此 $(\mathcal{K}, P)[2] = \{A, B, C, P\} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$。特別地，

$$C + A = B + P, \quad A + B = C + P,$$

即 $i_P(B), i_P(C)$ 分別位於 CA, AB 上。這告訴我們 φ_A 是一個將 AB 送至 AC 的射影對合。同理，$\varphi_B\colon BQ \mapsto Bi_P(Q), \varphi_C\colon CQ \mapsto Ci_P(Q)$ 也是將相鄰兩邊互送的射影對合。這告訴我們存在一個 $\triangle ABC$ 上的點等共軛變換 φ 將 Q 送至 $i_P(Q)$。因此 $\mathcal{K}$ 是以 P 為中心的等三次曲線。 ■

我們來看第二種 $(n\mathcal{K})$，定義該等三次曲線為 $\mathcal{K}_\varphi^{n,k}(P)$，注意到我們可以把其解析式寫成

$$\left(\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w}\right)\left(\frac{p}{ux} + \frac{q}{vy} + \frac{r}{wz}\right) = \frac{p}{u^2} + \frac{q}{v^2} + \frac{r}{w^2} - \frac{k}{uvw},$$

並且 $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 0$ 是 $P = [u : v : w]$ 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線（見第 1.5 節），$\frac{p}{ux} + \frac{w}{vy} + \frac{r}{wz} = 0$ 是以 $\varphi(P)$ 為透視中心的 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathfrak{c}(\varphi(P)) = \varphi(\mathfrak{t}(P))$，所以我們可以把 $\mathcal{K}_\varphi^{n,k}(P)$ 想成是代入方程 $\mathfrak{t}(P)\varphi(\mathfrak{t}(P))$ 為某常數的軌跡。

Proposition 11.3.6. 點 P 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}(P)$ 與三邊 BC, CA, AB 的交點 $P_a^\vee, P_b^\vee, P_c^\vee$ 位於 $\mathcal{K}_\varphi^{n,k}$ 上。 ■

我們把這個 P 稱為這個等三次曲線的根（儘管 P 有極高機率不在上面）。

Theorem 11.3.7. 對於任意等三次曲線 $\mathcal{K}_\varphi^{n,k}(P)$，存在一個圓錐曲線 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\varphi^{n,k}(P)$ 使得 $Q \in \mathcal{K}_\varphi^{n,k}(P)$ 若且唯若 $Q, \varphi(Q)$ 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。 ■

那可以發現這個 $\mathcal{C}$ 不是唯一的，甚至我們可以直接取 $\mathcal{C}$ 是一個圓 Γ（有可能是廣義圓或虛圓），或者等價於所有 $\odot\big(\overline{Q\varphi(Q)}\big)$ 共根心於 Γ 的中心，這時我們把 $\mathcal{K}_\varphi^{n,k}$ 記為 $\mathcal{K}_\varphi^{n}(\Gamma)$。不過 Γ 也不一定是唯一的，比方說 $\odot\big(\overline{Q\varphi(Q)}\big)$ 們根本共軸。那事實上，

Proposition 11.3.8. 延續上述標號，$\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(A), \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(B), \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(C)$ 分別與 BC, CA, AB 交於 $P_a^\vee, P_b^\vee, P_c^\vee$。 ■

那這當然是因為 $A, B, C \in \mathcal{K}_\varphi^{n,k}$。注意到 $\mathcal{K}_\varphi^{n,k}$ 的解析式中有個常數 k，可以想像 k 在動的時候會產出一整坨經過 A, B, C, D, E, F 的等三次曲線。

關於 $\mathcal{K}_\varphi^{n,k}$ 有個很好想像的例子是 $\mathcal{K}(\triangle ABC \cup \ell)$（即巨龍），注意到它沒有中心，可是關於等角共軛變換不變。這時，D, E, F 共線於 ℓ，我們發現對於所有等角共軛點對 (P, Q)，$\odot(\overline{PQ})$ 們的圓心都在牛頓線 τ 上，所以根心就是 $\infty_{\perp\tau}$，而 $\Gamma = \tau$。那跟巨龍一樣，我們有：

Proposition 11.3.9. 給定 $\triangle ABC$、一個等共軛變換 φ 及一圓 Γ，若 P, Q 為 $\mathcal{K}_\varphi^n(\Gamma)$ 上兩點，則 $R = PQ \cap \varphi(P)\varphi(Q) \in \mathcal{K}_\varphi^n(\Gamma)$。

Proof. 由 (7.4.5) 知 $\varphi(R) = P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q$，因此我們有三圓 $\omega_P := \odot(\overline{P\varphi(P)})$, $\omega_Q := \odot(\overline{Q\varphi(Q)})$, $\omega_R := \odot(\overline{R\varphi(R)})$ 共軸於其垂心線，而 Γ 的中心位於 ω_P, ω_Q 的根軸上，所以也位於 ω_P, ω_R 的根軸上，故 $R \in \mathcal{K}_\varphi^n(\Gamma)$。 ■

當 φ 是等角共軛變換時，事情還會再更美好，我們先來看一個定理：

Theorem 11.3.10. 給定 $\triangle ABC$，$(P, P^*), (Q, Q^*)$ 為關於 $\triangle ABC$ 的兩對等角共軛點對，令 $\omega_P = \odot(\overline{PP^*}), \omega_Q = \odot(\overline{QQ^*})$，$\Omega_P, \Omega_Q$ 分別是 P, Q 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓。那麼 ω_P, ω_Q 的根軸為 Ω_P, Ω_Q 的根軸關於 $\triangle ABC$ 的垂心位似 2 倍下的像。

Corollary 11.3.11. 給定 $\triangle ABC$，$(P, P^*), (Q, Q^*)$ 為關於 $\triangle ABC$ 的兩對等角共軛點對，令 $R = PQ \cap P^*Q^*$，則 P, Q, R 分別關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓們共軸。 ■

那麼我們可以把 $\mathcal{K}_\varphi^{n,k}$ 換成以下定義：

Proposition 11.3.12. 給定 $\triangle ABC$ 與及一圓 $\Gamma \not\supseteq \mathcal{L}_\infty$，令 φ 為 $\triangle ABC$ 的等角共軛變換，Γ' 為 Γ 關於 $\triangle ABC$ 的垂心位似 $1/2$ 倍的像。那麼 $P \in \mathcal{K}_\varphi^n(\Gamma)$ 若

且唯若 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 Γ' 正交。 ■

那我們之前有算過一個點的佩多圓跟九點圓的夾角嘛，所以：

Corollary 11.3.13. 對於任意 $\triangle ABC$，令 φ 為 $\triangle ABC$ 的等角共軛變換，則對於任意一點 P，下列敘述等價：

(i) $P \in \mathcal{K}_\varphi^n(\odot(ABC))$；

(ii) P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓正交；

(iii) $\sum \measuredangle(AP, BC) = 0^\circ$。 ■

$\mathcal{K}_\varphi^n(\odot(ABC))$ 被稱為 Kjp 三次曲線。滿足 $\sum \measuredangle(AP, BC) = 90^\circ$ 的軌跡是 McCay 三次曲線，事實上，滿足 $\sum \measuredangle(AP, BC) = \theta$ 的軌跡也是一個三次曲線 $\mathcal{K}_\theta$，並且顯然有 $\varphi(\mathcal{K}_\theta) = \mathcal{K}_{-\theta}$。

習題

Problem 1. 給定 $\triangle ABC$ 及一角 θ。證明：滿足 $\sum \measuredangle BAP = \theta$ 的軌跡是一條三次曲線。

11.4 梁-澤利克定理

所以這個定理真的有助於理解星際旅行嗎？詳見[1]。

Definition 11.4.1. 給定 $\triangle ABC$，O, H 為 $\triangle ABC$ 的外心、垂心。對於任意一點 P，令 Q 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，我們定義

$$t(P) = t(P, \triangle ABC) = \frac{TO}{TH},$$

其中 $T = PQ \cap OH$。

所以可以看出有些點是不能定義 t 值的，就是 A, B, C, I^x, O, H 這些點，其中 I^x 是 $\triangle ABC$ 的內心或旁心。我們把這些不能定義 t 值的點收集成一個集合 $\mathcal{Z}$，以下假設點 P 與其等角共軛點都不落在 $\mathcal{Z}$ 裡。顯然我們直接有：

Proposition 11.4.2. 令 Q 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，那麼 $t(P) = t(Q)$。

若 φ 為 $\triangle ABC$ 的等角共軛變換，那對於任意一個 $t = t_0$，我們知道滿足 $t(P) = t_0$ 的點的軌跡是 $\mathcal{K}_\varphi^p(T)$，其中 T 在 $\triangle ABC$ 的歐拉線 OH 上並滿足 $t(T) = t_0$。

Definition 11.4.3 (廣義歐拉線)**.** 給定 $\triangle ABC$、一點 P 及一個常數 x，我們定義 $\triangle ABC$ 的 (x, P)-歐拉線為 $\triangle ABC$ 的垂心 H 與 $\triangle ABC$ 的外心 O 在關於 P 位似 $1/x$ 倍下的像 $\mathfrak{h}_{P,1/x}(O)$ 的連線 $\mathfrak{h}_{P,1/x}(O)H$。

Theorem 11.4.4 (Liang–Zelich)**.** 給定 $\triangle ABC$ 及一常數 $t_0 \neq 0, \infty$，P 為任意一點，令 P_a, P_b, P_c 分別為 P 關於 BC, CA, AB 的對稱點，O_a, O_b, O_c 分別為 $\triangle BPC, \triangle CPA, \triangle APB$ 的外心，那麼下列敘述等價

(i) $t(P) = t_0$。

(ii) $\triangle P_aP_bP_c$ 在關於 P 位似 t_0 倍的像與 $\triangle ABC$ 透視。

(iii) $\triangle O_aO_bO_c$（又稱為 P 關於 $\triangle ABC$ 的卡諾三角形 (**Carnot triangle**)）在關於 P 位似 t_0^{-1} 倍的像與 $\triangle ABC$ 透視。

(iv) $\triangle ABC, \triangle BPC, \triangle CPA, \triangle APB$ 的 (t_0, P) 歐拉線共點。

當 $t_0 = 0$ 時，(i), (iii), (iv) 等價。當 $t_0 = \infty$ 時，(i), (ii) 等價。

我們把定理的證明放到後面。這定理可以推論出以下這些事：

Proposition 11.4.5. 給定 $\triangle ABC$ 與一點 P，那麼對於下列三角形 XYZ，$t(P, \triangle XYZ) = t(P, \triangle ABC)$：

(i) P 關於 $\triangle ABC$ 的卡諾三角形；

(ii) P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形；

(iii) P 關於 $\triangle ABC$ 的反佩多三角形；

(iv) P 關於 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形。

Proof. 我們依序證明命題 (i), (ii), (iii), (iv)。

(i) 令 $t_0 = t(P, \triangle ABC)$，$\triangle O_aO_bO_c$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的卡諾三角形。注意到 $\triangle O_aO_bO_c$ 關於 P 位似 $1/t_0$ 倍的像與 $\triangle ABC$ 透視，所以 P 關於 $\triangle O_aO_bO_c$ 三邊對稱所形成的三角形 $\triangle ABC$ 關於 P 位似 t_0 倍的像與 $\triangle O_aO_bO_c$ 透視，故 $t(P, \triangle O_aO_bO_c) = t_0$。

(ii) 令 Q 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，$\triangle O'_aO'_bO'_c$ 為 Q 關於 $\triangle ABC$ 的卡諾三角形，$\triangle P_aP_bP_c$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形。因為 $\triangle P_aP_bP_c \cup P \overset{+}{\sim} \triangle O'_aO'_bO'_c \cup O$，其中 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，所以由 (i)，

$$\begin{aligned} t(P, \triangle P_aP_bP_c) &= t(O, \triangle O'_aO'_bO'_c) = t(Q, \triangle O'_aO'_bO'_c) \\ &= t(Q, \triangle ABC) = t(P, \triangle ABC). \end{aligned}$$

(iii) 令 $\triangle P_AP_BP_C$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，那麼由 (ii)，

$$t(P, \triangle P_AP_BP_C) = t(P, \triangle ABC).$$

(iv) 令 $\triangle DEF$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形，$\triangle P_aP_bP_c$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，P^* 為 P 關於 $\triangle P_aP_bP_c$ 的等角共軛點，那麼算角度有 $\triangle DEF \cup P \overset{+}{\sim} \triangle P_aP_bP_c \cup P^*$，所以由 (ii)，

$$t(P, \triangle DEF) = t(P^*, \triangle P_aP_bP_c) = t(P, \triangle P_aP_bP_c) = t(P, \triangle ABC). \qquad \blacksquare$$

Remark. 一般來說好像會把 (ii) 稱作梁-澤利克定理，不過我這邊把他當推論。此外，取圓西瓦三角形可以視為反演，也就是說對 P 反演保 t 值。

講完基本定理了，那在證明這個定理的過程中有一些有趣的定理被使用了，我們來看一個比較重要的：

Theorem 11.4.6 (Strong Sondat's Theorem)**.** 給定一線 L，對於任意兩個透視軸不為 L 的三角形 $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$，滿足 $A_2(L \cap A_1P)$, $B_2(L \cap B_1P)$, $C_2(L \cap C_1P)$ 共點的 P 的軌跡是某個 $\triangle A_1B_1C_1$ 的外接圓錐曲線與 L 的聯集。

Proof. 令 $X_1 = B_1(A_2B_2 \cap L) \cap C_1(A_2C_2 \cap L)$，類似地定義 Y_1, Z_1。注意到

$$B_1Y_1 \cap C_1Z_1, \quad C_1X_1 \cap A_1Z_1, \quad A_Y \cap BX \in L,$$

所以由帕斯卡定理 (6.3.1)，我們知道 $A_1, B_1, C_1, X_1, Y_1, Z_1$ 共一個圓錐曲線 $\mathcal{C}_1$。我們類似地定義 $\mathcal{C}_2, X_2, Y_2, Z_2$。

對 $A_1A_1C_1X_1B_1Z_1$ 開帕斯卡定理，我們可以得到如果

$$A_1^* = T_{A_1}\mathcal{C}_1 \cap B_1X_1, \quad C_1^* = A_1C_1 \cap B_1Z_1,$$

則 $\triangle A_1^*B_1C_1^*$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 的透視軸為 L。我們考慮透視變換 φ 使得

$$A_1^* \mapsto A_2, \quad B_1 \mapsto B_2, \quad C_1^* \mapsto C_2.$$

由 $A_1C_1^* \cap X_2C_2, A_1B_1 \cap X_2B_2 \in L$，我們知道 $\varphi(A_1) = X_2$，所以

$$\varphi(T_{A_1}\mathcal{C}_1) = \varphi(A_1A_1^*) = A_2X_2.$$

取 P 為 $\mathcal{C}_1$ 上一點，令 $Q_A = A_1P \cap L$，類似地定義 Q_B, Q_C，那麼

$$A_1(P, X_1; Y_1, Z_1) = A_2(Q_A, A_2; B_2, C_2).$$

故

$$A_2(Q_A, A_2; B_2, C_2) = B_2(Q_B, A_2; B_2, C_2) = C_2(Q_C, A_2; B_2, C_2).$$

所以 A_2Q_A, B_2Q_B, C_2Q_C 共點於 $Q \in \mathcal{C}_2$。

我們現在來證明所有滿足條件的 P 一定在 $\mathcal{C}_1 \cup L$ 上。考慮一點 $P' \in AP$，類似地定義 Q'_A, Q'_B, Q'_C，那麼 $B_2Q'_B \mapsto C_2Q'_C$ 是一個保交比變換。由於 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 不會透視於 L，$B_2Q'_B \cap C_2Q'_C$ 是一個非退化圓錐曲線並交 $A_2Q'_A = A_2Q_A$ 於兩個點，也就是當 $A_2Q'_A, B_2Q'_B, C_2Q'_C$ 共點時。當 $P' = Q_A$ 時，顯然 $A_2Q'_A, B_2Q'_B, C_2Q'_C$ 共點於 Q_A。所以當 $P' \neq Q_A$ 時，我們必有 $P' = P$。 ■

一般而言會取 L 是無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$，也就是：

Corollary 11.4.7. 對於任意兩個不位似的三角形 $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$，滿足過 A_2 平行 A_1P 的直線, 過 B_2 平行 B_1P 的直線, 過 C_2 平行 C_1P 的直線共點的 P 的軌跡是某個 $\triangle A_1B_1C_1$ 的外接圓錐曲線與 $\mathcal{L}_\infty$ 的聯集。

那直接推論有：

Corollary 11.4.8 (Sondat's Theorem)**.** 若 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 正交且透視，那麼它們的透視中心位於兩個正交中心的連線上。

Proof. 若 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 位似，則命題顯然，後面假設 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 不位似。令 Q 為 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 的透視中心，P_i 為 $\triangle A_iB_iC_i$ 關於 $\triangle A_{3-i}B_{3-i}C_{3-i}$ 的正交中心 ($A_iP_i \perp B_{3-i}C_{3-i}$，及其輪換)。令 $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{L}_\infty$ 為滿足 $A_{3-i}\infty_{A_iP}, B_{3-i}\infty_{B_iP}, C_{3-i}\infty_{C_iP}$ 共點的 P 的軌跡，那麼 $Q \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$，由強 Sondat 定理的構造證明中可以看到 $D := B_1\infty_{A_2B_2} \cap C_1\infty_{C_2A_2} \in \mathcal{C}_1$，並且 D 為 $\triangle P_1B_1C_1$ 的垂心。所以由 $A_1D \parallel T_{A_2}\mathcal{C}_2$ 知

$$Q(A_1, B_1; C_1, P_1) = D(A_1, B_1; C_1, P_1) = A_2(A_2, B_2; C_2, P_2) = Q(A_2, B_2; C_2, P_2).$$

因此 $QP_1 = QP_2$，或 $Q \in P_1P_2$。 ■

Corollary 11.4.9. 延續上述推論的標號，若 P_1, P_2 為兩個透視中心，則 P_1P_2 垂直於 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 的透視軸。

我們回來看看有哪些點落在 $\mathcal{K}_{t_0} := \mathcal{K}_\varphi(T)$ 上。由 (11.3.3) 我們知道 T, $\varphi(T)$、內心及三個旁心在上面。除此之外，由梁-澤利克定理與性質，可以得到：

Proposition 11.4.10. 給定 $\triangle ABC$ 及一常數 t_0，令 $\triangle DEF$ 為 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，在 AD 上取一點 H_a 使得 $AH_a/DH_a = 2t_0$，類似定義 H_b, H_c，那麼 H_a, H_b, $H_c \in \mathcal{K}_{t_0}$。

Proof. 令 H_a 關於 BC, CA, AB 的對稱點分別為 H_{aa}, H_{ab}, H_{ac}，那麼我們知道 H_{aa} 關於 H_a 位似 t_0 倍下的像為 A，所以 $\triangle H_{aa}H_{ab}H_{ac}$ 關於 H_a 位似 t_0 倍下的像與 $\triangle ABC$ 透視，由梁-澤利克定理的 (ii)，$H_a \in \mathcal{K}_{t_0}$。同理有 H_b, $H_c \in \mathcal{K}_{t_0}$。 ■

如果想把上面這個證明類似地應用在梁-澤利克定理的 (iii)，會發現其中一個點是 T，而另外兩個點則不一定存在。

Proposition 11.4.11. 令 $\mathcal{K}^p_\varphi(L)$ 為 $\triangle ABC$ 的 Darboux 三次曲線，則 $\mathcal{K}^p_\varphi(L)$ 關於 $\triangle ABC$ 的外心 O 對稱。

Proof. 注意到 $t(L) = 1/2$，所以由 (11.4.4) 中 (i) 與 (ii) 的等價性，一點 $P \in \mathcal{K}^p_\varphi(L)$ 若且唯若 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形與 $\triangle ABC$ 透視。令 $P \in \mathcal{K}^p_\varphi(L)$，$P'$ 為 P 關於 O 的對稱點。設 $\triangle P_aP_bP_c$, $\triangle P'_aP'_bP'_c$ 分別為 P, P' 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，那麼他們的對應頂點關於三邊中點對稱，因此 $\triangle P'_aP'_bP'_c$ 與 $\triangle ABC$ 透視於 $\triangle P_aP_bP_c$ 與 $\triangle ABC$ 的透視中心關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點（以重心 G 為極點的點等共軛變換），所以 $P' \in \mathcal{K}^p_\varphi(L)$。 ■

11.4.1 梁-澤利克定理的證明

以下的證明基本上是參考[1]。注意到 (i) 的 t_0 是唯一的，所以要證明 (i) 與其他敘述等價只需要證明其敘述可以推至 (i) 且存在一個 t_0 使該敘述成立。我們先證明對於 (ii), (iii), (iv) 都存在一個 t_0 使它們成立。事實上，如果令 $\triangle P'_aP'_bP'_c$ 為 $\triangle P_aP_bP_c$ 關於 P 位似下的像，則 $CP'_c \cap AP'_a$ 的軌跡是一個過 C, A, H, P 的圓錐曲線 $\mathcal{C}_B$，其中 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心。同理，$AP'_a \cap BP'_b$ 的軌跡是一個過 A, B, H, P 的圓錐曲線 $\mathcal{C}_C$。由於 $\mathcal{C}_B$, $\mathcal{C}_C$ 已經有三個交點 A, H, P，因此他們會有第四個交點 X，這時候 X 就是某個 $\triangle P'_aP'_bP'_c$ 與 $\triangle ABC$ 的透視中心。(iii), (iv) 的證明則同理。

Theorem 11.4.12. 給定三角形 ABC 與一點 P，令 H_A, H_B, H_C 分別為 $\triangle BPC$, $\triangle CPA$, $\triangle APB$ 的垂心。考慮三角形 DEF 使得 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 正交且透視，且 $\triangle ABC$ 關於 $\triangle DEF$ 的正交中心為 P。令 P' 為 $\triangle DEF$ 關於 $\triangle ABC$ 的正交中心。

(1) $\triangle DEF$ 與 $\triangle H_AH_BH_C$ 正交且透視。

(2) 若 J 為 $\triangle DEF$ 與 $\triangle H_AH_BH_C$ 的透視中心且 H, H' 分別為 $\triangle ABC, \triangle DEF$ 的垂心，則 $J = HP' \cap H'P$ 且位於圓錐曲線 $(DEFHP')$ 上。

Proof. (1) 令 X 為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 的透視中心，則 (11.4.6) 告訴我們 X 位於等軸雙曲線 $\mathcal{H} = (ABCHP)$ 上。注意到 H_A, H_B, $H_C \in \mathcal{H}$，因此 $\triangle AH_BH_C$

的垂心 H^* 也位於 $\mathcal{H}$ 上且滿足

$$H_BH^* \perp H_CA \perp BP, \quad H_CH^* \perp AH_B \perp CP.$$

因此 H^* 同時也是 $\triangle H_ABH_C$ 的垂心且 H^* 是 $\triangle H_AH_BH_C$ 關於 $\triangle DEF$ 的正交中心。

令 K 為 H_AD 與 $\mathcal{H}$ 的另一個交點。考慮六折線 $CXAH_CKH_A$，由帕斯卡定理，

$$CX \cap H_CK, \quad XA \cap KH_A = D, \quad AH_C \cap H_AC = \infty_{\perp AB} = \infty_{DE}$$

共線。因為 $E \in CX$，所以 $E \in H_CK$。同理，我們有 $F \in H_BK$，故 K 是 $\triangle DEF$ 與 $\triangle H_AH_BH_C$ 的透視中心。

(2) 考慮六折線 $JHAXPH_A$，由帕斯卡定理，

$$JH \cap XP, \quad HA \cap PH_A = \infty_{\perp BC}, \quad AX \cap H_AJ = D$$

共線。由 (11.4.8)，$D\infty_{\perp BC} \cap XP = P'$，因此 $J \in HP'$。

令 V 為 $H_A\infty_{AX}$ 與 $\mathcal{H}$ 的另一個交點。考慮六折線 $AXBH_AVH_B$，由帕斯卡定理，

$$AX \cap H_AV = \infty_{AX}, \quad XB \cap VH_B, \quad BH_A \cap H_BA = \infty_{\perp CP}$$

共線，即 $BX \parallel VH_B$。同理，我們得到 $CX \parallel VH_C$，即 $H_A\infty_{DX}, H_B\infty_{EX}, H_C\infty_{FX}$ 共點。由 (11.4.6) 及 $\triangle DEF$ 與 $\triangle H_AH_BH_C$ 正交，我們得到 J 位於等軸雙曲線 $\mathcal{H}' = (DEFXP')$ 上。因為

$$\begin{aligned} P(A, H_A; H_B, H_C) &= P'(\infty_{\perp EF}, D; E, F) \\ &= J(P'\infty_{\perp EF} \cap \mathcal{H}', D; E, F) \\ &= J(P'\infty_{\perp EF} \cap \mathcal{H}', H_A; H_B, H_C), \end{aligned}$$

所以 $\triangle P'EF$ 的垂心 $H_D = P'\infty_{\perp EF} \cap \mathcal{H}'$ 位於 AJ 上。類似於上面的作法，考慮六折線 $JH'DXP'H_D$，由帕斯卡定理，

$$JH' \cap XP', \quad H'D \cap P'H_D = \infty_{\perp EF}, \quad DX \cap H_DJ = A$$

共線。由 (11.4.8)，$A\infty_{\perp EF} \cap XP' = P$，因此 $J \in H'P$。 ■

我們現在證明 (i) $\Rightarrow$ (iii)：令 $\triangle O'_aO'_bO'_c$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的卡諾三角形在關於 P 位似 t_0^{-1} 倍下的像，O_P 為 $\triangle O_aO_bO_c$ 的外心，O', O'_P 分別為 O, O_P 關於 P 位似 t_0^{-1} 下的像。因為 $PQ \parallel OO_P \parallel O'O'_P$，所以我們要證明 $\triangle ABC$ 與 $\triangle O'_aO'_bO'_c$ 透視會得到 O', H, O'_P 共線。

由在 (11.4.12) 中取 $\triangle DEF = \triangle O'_aO'_bO'_c$，我們得到 $\triangle H_AH_BH_C$ 與 $\triangle O'_aO'_bO'_c$ 透視。注意到 $\triangle O'_aO'_bO'_c$ 關於 $\triangle ABC$ 的正交中心為 O'，$\triangle ABC$ 關於 $\triangle O'_aO'_bO'_c$ 的正交中心為 P，因此 $J = HO' \cap H'P \in \mathcal{C} = (O'_aO'_bO'_cO'H')$ 為 $\triangle H_AH_BH_C$ 與 $\triangle O'_aO'_bO'_c$ 透視中心，其中 H' 為 $\triangle O'_aO'_bO'_c$ 的垂心。

因為 (P, O') 為關於 $\triangle O'_aO'_bO'_c$ 的等角共軛點對，因此 $H'P \cap O'O'_P$（作為 $H'O' \cap PO'_P$ 關於 $\triangle O'_aO'_bO'_c$ 的等角共軛點）位於 $\mathcal{C}$ 上。故 J 同時為 $O'H$ 及 $O'O'_P$ 與 $\mathcal{C}$ 的另一個交點，特別地，O', H, O'_P 共線。

事實上，我們也可以從證明中看出 $O'_a = AU \cap PO_a$, $O'_b = BU \cap PO_b$, $O'_c = CU \cap PO_c$，其中 $U = OP \cap HQ$。

再來，我們證明 (i)(iii) $\Rightarrow$ (iv)：設 $\triangle O'_aO'_bO'_c$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的卡諾三角形在關於 P 位似 t_0^{-1} 倍下的像。在 (11.4.12) 中取 $\triangle DEF = \triangle O'_aO'_bO'_c$，我們得到 $\triangle BPC, \triangle CPA, \triangle APB$ 的 (t_0, P)-歐拉線 $O'_aH_A, O'_bH_B, O'_cH_C$ 共於一點 J，且 $J \in HP$。由 (i)，HP 就是 $\triangle ABC$ 的 (t_0, P)-歐拉線，因此四個 (t_0, P)-歐拉線共點。

最後，我們證明 (i)(iii) $\Rightarrow$ (ii)：我們先證明 $\Gamma_A = \odot(APO'_a)$, $\Gamma_B = \odot(BPO'_b)$, $\Gamma_C = \odot(CPO'_c)$ 共軸。令 $A' = O'_PO'_a \cap AH$, $B' = O'_PO'_b \cap BH$, $C' = O'_PO'_c \cap CH$，則

$$\begin{aligned} PO'_a - A'O'_a &= PO_a - O_PO_a \\ &= (PB + PC - AH) - (O_aO_b + O_aO_c - AP) \\ &= PA - A'A, \end{aligned}$$

即 $A' \in \Gamma_A$。同理有 $B' \in \Gamma_B, C' \in \Gamma_C$。

由 $O'O'_a \parallel OO_a \parallel AH$ 及 O', H, O'_P 共線，

$$\frac{O'_PA'}{O'_PO'_a} = \frac{O'_PH}{O'_PO'}.$$

同理有另外兩個比例式，所以 $\triangle A'B'C'$ 與 $\triangle O'_aO'_bO'_c$ 關於 O'_P 位似。這告訴我們

$$O'_PO'_a \cdot O'_PA' = O'_PO'_b \cdot O'_PB' = O'_PO'_c \cdot O'_PC',$$

因此 O'_P 關於三個圓 $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ 的冪一樣。故 $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ 共軸於 PO'_P。

令 $\triangle O_AO_BO_C$ 為 P 關於 $\triangle O'_aO'_bO'_c$ 的卡諾三角形，則 $\triangle O_AO_BO_C$ 同時也是 P 關於 $\triangle O_aO_bO_c$ 的卡諾三角形在以 P 為中心的 t_0 倍位似下的像。注意到 $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ 的圓心分別為 $O_bO_c \cap O_BO_C, O_cO_a \cap O_CO_A, O_aO_b \cap O_AO_B$，因此由 $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ 共軸及迪沙格定理，$\triangle O_aO_bO_c$ 與 $\triangle O_AO_BO_C$ 透視。這告訴我們 $t(P, \triangle ABC) = t(P, \triangle O_aO_bO_c)$。

令 $\triangle K_aK_bK_c$ 為 Q 關於 $\triangle ABC$ 的卡諾三角形，則同理有 $t(Q, \triangle ABC) = t(Q, \triangle K_aK_bK_c)$。因為 $\triangle P_aP_bP_c \cup P \overset{+}{\sim} \triangle K_aK_bK_c \cup O$，所以

$$\begin{aligned} t(P, \triangle P_aP_bP_c) &= t(O, \triangle K_aK_bK_c) = t(Q, \triangle K_aK_bK_c) \\ &= t(Q, \triangle ABC) = t(P, \triangle ABC). \end{aligned}$$

因此 P 關於 $\triangle P_aP_bP_c$ 的卡諾三角形 $\triangle ABC$ 在以 P 為中心位似 t_0^{-1} 倍下的像與 $\triangle P_aP_bP_c$ 透視，換句話說，$\triangle P_aP_bP_c$ 在以 P 為中心位似 t_0 倍下的像與 $\triangle ABC$ 透視。

習題

Problem 1. 給定 $\triangle ABC$，令 A_1 為 A 關於 BC 的對稱點，類似定義 B_1, C_1，設 $A_2 = BC_1 \cap CB_1$。證明：A_1A_2 平行於 $\triangle ABC$ 的歐拉線。

Problem 2. 給定任意三角形 $\triangle ABC$。令 B^*, C^* 分別為 B, C 關於 CA, AB 的對稱點，I^b, I^c 分別為 B, C 關於 $\triangle ABC$ 的旁心，$P = I^bC^* \cap I^cB^*$，A', B', C' 分別為 P 關於 BC, CA, AB 的對稱點。證明：AA', BB', CC' 共點。

Problem 3 (2017 3J M3). 平面上有一個三角形 ABC，其外接圓為 Γ，設點 A' 是點 A 在 Γ 上的對徑點。作正三角形 BCD，使得 A, D 兩點位於 BC 的異側。設過 A' 且與 $A'D$ 垂直的直線分別與直線 CA, AB 交於 E, F 兩點。以

EF 為底，作底角為 30° 的等腰三角形 ETF，並使 A, T 兩點位於 EF 的異側。證明：AT 經過三角形 ABC 的九點圓圓心 N。

Problem 4. 令銳角 $\triangle ABC$ 是非等腰的且 P 為其內部一點。A_1, B_1, C_1 分別為 P 關於 BC, CA, AB 的垂足。試找出所有點 P 使得 AA_1, BB_1, CC_1 共點且

$$\angle PAB + \angle PBC + \angle PCA = 90^\circ.$$

Chapter 12

特殊截線

12.1 共軛圓錐曲線

Proposition 12.1.1. 給定 $\triangle ABC$，一點 $P \notin \{A, B, C\}$ 與三角 α, β, γ，滿足

$$(\alpha, \beta, \gamma) \neq (\measuredangle(BC, AP),\ \measuredangle(CA, BP),\ \measuredangle(AB, CP)),$$

則存在一 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}^\sharp_{P,\alpha,\beta,\gamma}$ 使得以下命題成立：

對於任意一點 $Q \notin \mathcal{L}_\infty$，分別在 BC, CA, AB 上取 D, E, F 使得

$$\measuredangle(QD, AP) = \alpha,\ \measuredangle(QE, BP) = \beta,\ \measuredangle(QF, CP) = \gamma,$$

則 $Q \in \mathcal{C}^\sharp_{P,\alpha,\beta,\gamma}$ 若且唯若 D, E, F 共於一線 L。

Proof. 取 $\triangle XYZ$ 使得 $A \in YZ$, $B \in ZX$, $C \in XY$ 且

$$\measuredangle(YZ, AP) = \alpha,\ \measuredangle(ZX, BP) = \beta, \measuredangle(XY, CP) = \gamma.$$

取點 U 使得 $BXCU$ 是平行四邊形。類似地定義 V, W。注意到

$$BW \cap CV,\ CU \cap AW,\ AV \cap BU \in \mathcal{L}_\infty.$$

由帕斯卡逆定理，A, B, C, U, V, W 共圓錐曲線。

Claim. 過 A, B, C, U, V, W 的圓錐曲線 $\mathcal{C}^\sharp_{P,\alpha,\beta,\gamma}$ 滿足條件。

Proof of Claim. 令 $Q \in \mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}$，分別在 BC, CA, AB 上取 D, E, F 使得

$$\measuredangle(QD, AP) = \alpha,\ \measuredangle(QE, BP) = \beta,\ \measuredangle(QF, CP) = \gamma,$$

則 $QD \parallel YZ, QE \parallel ZX, QF \parallel XY$。在 $\mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}$ 上取 D' 使得 Q, D, D' 共線，類似地定義 E', F'。由帕斯卡定理 (6.3.1)，$E, F, BE' \cap CF'$ 共線，類似地有另外兩共線，所以我們只需證明 AD', BE', CF' 共點。我們知道當 $Q = U, V, W$ 時此命題 $\mathscr{P}$ 成立（都共點於 $\mathcal{L}_\infty$），由於 $Q \mapsto D', E', F'$ 是保交比變換 (7.2.15)，$\mathscr{P}$ 是圓錐曲線 $\mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}$ 上的射影命題，故對於任意 $Q \in \mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}$，$\mathscr{P}$ 成立。

假設 $Q \notin \mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}$，但 D, E, F 共線。對於任意一過 Q 的弦 $\overline{RS}$，其中 $R, S \in \mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}$，我們有 D, E, F，D_R, E_R, F_R，D_S, E_S, F_S 分別共線。因此對於任意 $T \in RS$，D_T, E_T, F_T 共線。由於 $\overline{RS}$ 是任意的，對於所有 T，D_T, E_T, F_T 共線，但這在 A 附近是錯的（當

$$(\alpha, \beta, \gamma) \neq (\measuredangle(BC, AP),\ \measuredangle(CA, BP),\ \measuredangle(AB, CP))$$

時，D_T 在一個小範圍內，E_TF_T 的斜率為任意）。 ■

Definition 12.1.2. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與三角 α, β, γ 滿足 (12.1.1) 的條件。

(i) 我們稱上述性質所定義的圓錐曲線 $\mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的 α, β, γ-共軛圓錐曲線。

(ii) 若 $Q \in \mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}$，我們稱上述性質所定義的直線 L，記為 $\mathcal{T}_Q(\triangle ABC, P, \alpha, \beta, \gamma)$，為 Q 關於 $\triangle ABC$ 的 $(P, \alpha, \beta, \gamma)$-截線。

(iii) 若 $\alpha = \beta = \gamma$，我們簡記 $\mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\alpha,\alpha}$ 為 $\mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha}$，為 P 關於 $\triangle ABC$ 的 α-共軛圓錐曲線；簡記 $\mathcal{T}_Q(\triangle ABC, P, \alpha, \alpha, \alpha)$ 為 $\mathcal{T}_Q(\triangle ABC, P, \alpha)$，為 Q 關於 $\triangle ABC$ 的 (P, α)-截線。

(iv) 當 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ 時，記 $\mathcal{T}_Q(\triangle ABC, P, 90^\circ)$ 為 $\mathcal{O}_Q(\triangle ABC, P)$，為 Q 關於 $\triangle ABC$ 的 P-正交截線。

(v) 當 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ 且 $P = Q$ 時，記 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC, P)$ 為 $\mathcal{O}(\triangle ABC, P)$，為 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線。

從 (12.1.1) 的構造證明中，我們可以看出：如果令 $\tilde{P}$ 為 $\triangle ABC$ 關於 $\triangle XYZ$ 的密克點，那麼 $\mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma} = \mathcal{C}_{\tilde{P},\tilde{\alpha}}$ 對於某個角度 $\tilde{\alpha} = \measuredangle(YZ, A\tilde{P})$。除了共軛圓錐曲線之外，我們還有反共軛曲線：

Definition 12.1.3. 給定 $\triangle ABC$，一點 Q 與三角 α, β, γ，我們定義

$$\mathcal{C}^{\flat}_{Q,\alpha,\beta,\gamma} := \{P \mid Q \in \mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}\}$$

為 Q 關於 $\triangle ABC$ 的 α, β, γ-反共軛曲線。

但反共軛曲線不見得是圓錐曲線，不過我們還是有：

Proposition 12.1.4. 給定 $\triangle ABC$，一點 $Q \notin \{A, B, C\}$ 與一角 α，其中 $(Q, \alpha) \neq (H, 90^\circ)$，$H$ 為 $\triangle ABC$ 的垂心，則

$$\mathcal{C}^{\flat}_{Q,\alpha} = \mathcal{C}^{\flat}_{Q,\alpha,\alpha,\alpha} = \mathcal{C}^{\sharp}_{Q,-\alpha}.$$

Proof. 取點 U 使得 $(BC)(QU)$ 是平行四邊形。類似地定義 V, W。取點 X 使得

$$\measuredangle UBX = \measuredangle UCX = \alpha.$$

類似地定義 Y, Z。由 $\mathcal{C}^{\sharp}_{Q,-\alpha}$ 的構造，A, B, C, X, Y, Z 共於 $\mathcal{C}^{\sharp}_{Q,-\alpha}$。

Claim. 過 A, B, C, X, Y, Z 的圓錐曲線 $\mathcal{C}^{\flat}_{Q,\alpha} = \mathcal{C}^{\sharp}_{Q,-\alpha}$ 滿足條件。

Proof of Claim. 令 $P \in \mathcal{C}^{\flat}_{Q,\alpha}$，我們希望證明 $Q \in \mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha}$。我們回憶一下 $\mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha}$ 的構造，取 $\triangle X'Y'Z'$ 使得 P 為 $\triangle ABC$ 關於 $\triangle X'Y'Z'$ 的密克點且

$$\measuredangle(Y'Z', AP) = \measuredangle(Z'X', BP) = \measuredangle(X'Y', CP) = \alpha.$$

取點 U' 使得 $BX'CU'$ 是平行四邊形。類似地定義 V', W'，則 $\mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha}$ 是通過 A, B, C, U', V', W' 的圓錐曲線。注意到 $[BP \mapsto BX']$, $[CP \mapsto CX']$ 是保交比變換，所以 X' 在定圓錐曲線上移動，因此 U' 也在定圓錐曲線 $\mathcal{C}_U$ 上移動。類似地定義 $\mathcal{C}_V$, $\mathcal{C}_W$。當 $P = X$ 時，$U' = Q$，所以 $Q \in \mathcal{C}_U$，同理，$Q \in \mathcal{C}_V$, $Q \in \mathcal{C}_W$。由帕斯卡定理，$Q \in \mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha}$ 若且唯若

$$BW' \cap CV', \quad CQ \cap AW', \quad AV' \cap BQ$$

共線。我們知道當 $P = X, Y, Z$ 時此命題 $\mathscr{P}$ 成立。注意到 $BW' \cap CV' \in \mathcal{L}_\infty$，

$$[P \mapsto (CQ \cap AW')(AV' \cap BQ)]$$

是一個從 $\mathcal{C}^\flat_{Q,\alpha}$ 至某個與 BQ, CQ 相切的圓錐曲線 $\mathcal{C}'$ 的所有切線的保交比變換，取 $P = X$ 可得 $\mathcal{C}'$ 與 $\mathcal{L}_\infty$ 相切，故對於任意 $P \in \mathcal{C}^\flat_{Q,\alpha}$，$\mathscr{P}$ 成立。

假設 $P \notin \mathcal{C}^\flat_{Q,\alpha}$，但 $Q \in \mathcal{C}^\sharp_{P,\alpha}$。對於任意一過 P 的弦 $\overline{RS}$，其中 $R, S \in \mathcal{C}^\flat_{Q,\alpha}$，我們有 $Q \in \mathcal{C}^\sharp_{P,\alpha} \cap \mathcal{C}^\sharp_{R,\alpha} \cap \mathcal{C}^\sharp_{S,\alpha}$。因此對於任意 $T \in RS$，$Q \in \mathcal{C}^\sharp_{T,\alpha}$。由於 $\overline{RS}$ 是任意的，對於所有 T，$Q \in \mathcal{C}^\sharp_{T,\alpha}$。分別取 $T \in BC, CA, AB$，我們可以得到

$$\measuredangle(BC, AQ) = \measuredangle(CA, BQ) = \measuredangle(AB, CQ) = \alpha$$

但這只會在 $(Q, \alpha) = (H, 90^\circ)$ 時發生。 ■

Remark. 從證明中可以看出，如果取 X, Y, Z 滿足

$$\measuredangle VAY = \measuredangle WAZ = \alpha, \quad \measuredangle WBZ = \measuredangle UBX = \beta, \quad \measuredangle UCX = \measuredangle VCY = \gamma,$$

且 A, B, C, X, Y, Z 共圓錐曲線 (等價於

$$BZ \cap CY, \quad CX \cap AZ, \quad AY \cap BX$$

共線)，則 $\mathcal{C}^\flat_{Q,\alpha,\beta,\gamma}$ 也為圓錐曲線。但這時候我們並沒有與 $\mathcal{C}^\sharp$ 之間的關係。

對於 $\mathcal{C}^\sharp$ 及 $\mathcal{C}^\flat$ 我們有如下的刻畫：

Proposition 12.1.5. 給定任意一點 $P \notin \{A, B, C, H\}$，

(i) 對於任意一角 α，$\mathcal{C}^\sharp_{P,\alpha} = \mathcal{C}^\flat_{P,-\alpha}$；

(ii) 若 $\widehat{P}$ 是 P 關於 $\triangle ABC$ 的反角共軛 (見 (8.1.16))，則

$$\{A, B, C, \widehat{P}\} = \Big(\bigcap_\alpha \mathcal{C}^\sharp_{P,\alpha}\Big) \cap \Big(\bigcap_\alpha \mathcal{C}^\flat_{P,\alpha}\Big);$$

(iii) $[\alpha \mapsto \mathcal{C}^\sharp_{P,\alpha}]$ 是一個從所有的角度 $\mathbb{R}^\circ \big/ 180^\circ$ 至所有通過 $A, B, C, \widehat{P}$ 的圓錐曲線集 $\mathscr{F}$ 的保交比變換。

Proof. 對於 (ii) 和 (iii)，同 (12.1.1) 中 $\mathcal{C}^\sharp_{P,\alpha}$ 的構造，我們有以下的保交比變換

$$\alpha \longleftrightarrow X \in \odot(BPC) \longleftrightarrow Y \in \odot(CPA) \longleftrightarrow Z \in \odot(APB)$$

對於任意 α，$\widehat{P} \in \mathcal{C}^\sharp_{P,\alpha}$ 若且唯若

$$BW \cap CV, \quad C\widehat{P} \cap AW, \quad AV \cap B\widehat{P}$$

共線。當 $\alpha = \measuredangle(B\widehat{P}, CP)$ 時，此命題 $\mathscr{P}$ 成立（三點都位於 $\mathcal{L}_\infty$ 上）。由對稱性，當 $\alpha = \measuredangle(C\widehat{P}, AP), \measuredangle(A\widehat{P}, BP)$ 時，$\widehat{P} \in \mathcal{C}^\sharp_{P,\alpha}$，因此此時 $\mathscr{P}$ 也成立。注意到 $BW \cap CV \in \mathcal{L}_\infty$，

$$[\alpha \mapsto (C\widehat{P} \cap AW)(AV \cap B\widehat{P})]$$

是一個從所有角度 $\mathbb{R}^\circ/180^\circ$ 至某個與 $B\widehat{P}$, $C\widehat{P}$ 相切的拋物線 $\mathcal{P}$（由 $\alpha = \measuredangle(B\widehat{P}, CP)$）的所有切線的保交比變換，故對於任意角 α，$\mathscr{P}$ 成立。這證明了 (ii) 和 (iii)。 ■

意外地得到了 Reim 定理 (0.1.14) 的推廣：

Corollary 12.1.6. 令兩圓 Ω_1, Ω_2 交於 A, B，X_i, $Y_i \in \Omega_i$，則 A, B, X_1, Y_1, X_2, Y_2 共圓錐曲線若且唯若 $X_1Y_1 \parallel X_2Y_2$。

Proposition 12.1.7. 給定一 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$，我們有個對射

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^\circ/180^\circ &\longrightarrow \{(P_\alpha, \alpha) \mid \mathcal{C} = \mathcal{C}_{P_\alpha,\alpha}\} \\ \alpha &\longmapsto (P_\alpha, \alpha), \end{aligned}$$

P_α 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 P_α^* 的軌跡是一個過外心的圓且 $\alpha \mapsto P_\alpha^*$ 是保交比變換。事實上，這個軌跡就是 $\mathcal{C}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛變換下的像 $\varphi^K(\mathcal{C})$ 關於 $\odot(ABC)$ 的反演變換下的像。

Proof. 對於 $\mathcal{C}$ 上任一點 $\widehat{P}$，令 P 為 $\widehat{P}$ 關於 $\triangle ABC$ 的反角共軛點。那麼 P, $\widehat{P}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 P^*, $\widehat{P}^*$ 為關於 $\odot(ABC)$ 的反演點對 (8.1.19)，所以 P^* 的軌跡為一過 O 的圓。如同 (12.1.1) 的證明，令 U, V, W 分別為 $\odot(B\widehat{P}C)$, $\odot(C\widehat{P}A)$, $\odot(A\widehat{P}B)$ 與 $\mathcal{C}$ 的第二個交點，X, Y, Z 分別為 U, V, W 關於 $\overline{BC}$ 中點、$\overline{CA}$ 中點、$\overline{AB}$ 中點的對稱點。那麼 P 為 $\triangle ABC$ 關於 $\triangle XYZ$ 的密克點。

Claim. $\measuredangle(YZ, AP) = \measuredangle(OP^*, \varphi^K(\mathcal{C})) + 90^\circ$.

Proof of Claim. 令 U^* 為 U 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。那麼 $\varphi^K(\mathcal{C}) = \widehat{P}^*U^*$，所以

$$\begin{aligned}\measuredangle(OP^*, \varphi^K(\mathcal{C})) &= \measuredangle O\widehat{P}^*B + \measuredangle B\widehat{P}^*U^* = \measuredangle P^*BO + (U^* - B)_{\odot(B\widehat{P}^*C)}\\ &= \perp (BP - CA) + (U^* - B)_{\odot(B\widehat{P}^*C)}.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\measuredangle(YZ, AP) &= \measuredangle XBP = BP - CU = BP - CA - CB + CU^*\\ &= (BP - CA) + (U^* - B)_{\odot(B\widehat{P}^*C)},\end{aligned}$$

得證。 □

因此 P_α 就定義為使 $\measuredangle(OP^*, \varphi^K(\mathcal{C})) = \alpha + 90^\circ$ 的 P^*（關於 $\triangle ABC$）的等角共軛點，這樣的選取是唯一且存在的，並且 $\alpha \mapsto P_\alpha^*$ 顯然是保交比變換。 ■

Proposition 12.1.8. 給定 $\triangle ABC$ 與一點 $P \notin \{A, B, C, H\}$。若 $\widehat{P}$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的反角共軛，$\widehat{P}^*$ 為 $\widehat{P}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，則以 $\widehat{P}$, $\widehat{P}^*$ 為焦點且與 $\triangle ABC$ 相切圓錐曲線是 $\mathcal{T}_{\widehat{P}}(\triangle ABC, P, \alpha)$ 的包絡線。

Proof. 令 E, F 分別為 $\mathcal{T}_{\widehat{P}}(\triangle ABC, P, \alpha)$ 與 CA, AB 的交點，則

$$\measuredangle E\widehat{P}F = \measuredangle(\widehat{P}E, BP) + \measuredangle BPC + \measuredangle(CP, \widehat{P}F) = \measuredangle C\widehat{P}B$$

所以存在 $\widehat{P}$ 關於 $(BE)(CF)$ 的等角共軛點 (1.3.14)，因此以 $\widehat{P}$, $\widehat{P}^*$ 為焦點且與 $\triangle ABC$ 相切圓錐曲線與 EF 相切。 ■

事實上，也可以透過這個證明來得到 (12.1.5) 的 (ii)。我們來看 $\mathcal{C}^\sharp$ 與 $\mathcal{C}^\flat$ 在特殊點或特殊角的時候有什麼性質。

(1) $\alpha = 0^\circ$：

Proposition 12.1.9. 對於任意一點 P，$\mathcal{C}^\sharp_{P,0^\circ} = \mathcal{C}^\flat_{P,0^\circ}$ 是 P 關於 $\triangle ABC$ 的九點圓錐曲線 $\mathcal{C}$ (6.3.7) 關於 P 位似 2 倍下的像。特別地，若 $\triangle P_AP_BP_C$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形，$\triangle P_A'P_B'P_C'$ 為 $\triangle P_AP_BP_C$ 關於 P 位似 2 倍下的像，則 P_A', P_B', $P_C' \in \mathcal{C}^\sharp_{P,0^\circ} = \mathcal{C}^\flat_{P,0^\circ}$。

反過來說，對於任意外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$，如果取 P 使得 $\mathcal{C}$ 為 (A,B,C,P) 的九點圓錐曲線關於 P 位似 2 倍下的像，等價地，取 P 為 $O_\mathcal{C}$ 的關於 $\triangle ABC$ 的反補點 $O_\mathcal{C}^{\daleth}$，其中 $O_\mathcal{C}$ 為 $\mathcal{C}$ 的中心，那麼 $P = P_{0^\circ}$。這時候 (12.1.7) 的證明告訴我們 P^* 關於 $\odot(ABC)$ 的反演點是 O 關於 $\varphi^K(\mathcal{C})$ 的垂足。

對於 $\mathcal{C}$ 上任意一點 Q，考慮其關於 $\triangle ABC$ 的 $(P,0^\circ)$-截線 $\mathcal{T}_Q(\triangle ABC,P,0^\circ)$。事實上，這些截線（與無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$）構成完全四點形 (A,B,C,P) 的等截共軛軌跡（見 (9.4.3)），所以我們也可以把它們想成是廣義的西姆松線，記為 $\mathcal{S}_Q^\mathcal{C}$。一個簡單的推論是：

Corollary 12.1.10. 直線 $\mathcal{S}_Q^\mathcal{C} = \mathcal{T}_Q(\triangle ABC,P,0^\circ)$ 平分線段 $\overline{PQ}$。

(2) $P = H$：

Proposition 12.1.11. 給定 $\triangle ABC$ 及一角 $\alpha \neq 90^\circ$，令 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，則 $\mathcal{C}_{H,\alpha}^\sharp = \odot(ABC)$。

Corollary 12.1.12 (西姆松定理/Simson's). 給定 $\triangle ABC$，對於任意一點 P，$P \in \odot(ABC)$ 若且唯若 P 關於 $\triangle ABC$ 三邊的垂足共線。

這些當然都只是簡單的算角度。

(3) $\alpha = 90^\circ$：由等軸雙曲線的性質 (8.1.4) 與 $\mathcal{C}_{P,90^\circ}^\sharp$ 的構造，我們可以得到：

Proposition 12.1.13. 對於任意一點 P，$\mathcal{C}_{P,90^\circ}^\sharp = \mathcal{C}_{P,90^\circ}^\flat$ 是通過 P 的等軸雙曲線且對於任意 $Q \in \mathcal{C}_{P,90^\circ}^\sharp = \mathcal{C}_{P,90^\circ}^\flat$，$PQ \perp \mathcal{O}_Q(\triangle ABC,P)$。

Proof. 同 (12.1.1) 證明中的標號，我們有 U, V, W 分別為 $\triangle PBC$, $\triangle PCA$, $\triangle PAB$ 的垂心，因此通過 P 的等軸雙曲線 $\mathcal{H}_P$ 也通過 U, V, W，故 $\mathcal{C}_{P,90^\circ}^\sharp = \mathcal{H}_P$。這同時也得到 $\mathcal{C}_{P,90^\circ}^\flat = \mathcal{H}_P$。

令 $Q \in \mathcal{C}_{P,90^\circ}^\sharp$，$H_B$, H_C 分別為 $\triangle BPQ$, $\triangle CPQ$ 的垂心。由帕斯卡定理

(6.3.1)，

$$H_BQ \cap CA,\ H_CQ \cap AB,\ BH_B \cap CH_C$$

共線，又 $BH_B \parallel CH_C \perp PQ$，我們有 $\mathcal{O}_Q(\triangle ABC, P) = EF \perp PQ$。 ■

Corollary 12.1.14. 一點 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線垂直於 P 關於等軸雙曲線 $(ABCHP)$ 的切線，其中 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心。

12.1.1 正交共軛點

在有了以上設定之後，我們來看看正交共軛點，它是等共軛變換的另一個例子。這是個好例子，因為它（在實數下）不一定有不動點。

Definition 12.1.15. 給定 $\triangle ABC$ 與一點 P，我們定義其正交共軛點 P° 為 $\mathcal{O}_H(\triangle ABC, P)$ 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極點，其中 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心。

由於 H 會在 $\mathcal{C}^\sharp_{P,90^\circ}$ 上 (12.1.13)，所以這個定義是好的。由 (12.1.13)，我們可以輕易得到：

Proposition 12.1.16. 對於任意一點 P，HP 垂直 P° 的三線性極線。 ■

Proposition 12.1.17. 變換 $[P \mapsto P^\circ]$ 是以垂心 H 為極點的等共軛變換。

Proof. 由 (7.4.10) 及極點的定義，我們需要證明 $P \mapsto P^\circ$ 滿足：

(i) $H^\circ = G$，其中 G 是 $\triangle ABC$ 的重心。

(ii) $P \notin BC \cup CA \cup AB \implies P^\circ \notin BC \cup CA \cup AB$，

(iii) 對於所有頂點 $X \in \{A, B, C\}$，

$$X, P_1, P_2 \text{ 共線} \implies X, P_1^\circ, P_2^\circ \text{ 共線},$$

(iv) 對於所有頂點 $X \in \{A, B, C\}$，$[XP \mapsto XP^\circ]$ 是一對合變換。

(i)：$\mathcal{O}_H(\triangle ABC, H) = \mathcal{L}_\infty$，而 $\mathcal{L}_\infty$ 的三線性極點為 G。

(ii)：若 $P^\circ \in BC \cup CA \cup AB$，不妨假設 $P^\circ \in BC$，則 P° 的三線性極線 $\mathcal{T}$ 為 BC。但這代表 $BP \perp CH, CP \perp BH$，即 $P = A$。

(iii)：若 A, P_1, P_2 共線，則 $\mathcal{O}_H(\triangle ABC, P_1)$ 與 $\mathcal{O}_H(\triangle ABC, P_2)$ 交於 $D \in BC$ 上，所以 P_1°, P_2° 滿足

$$A(P_1^\circ, D; B, C) = -1 = A(P_2^\circ, D; B, C),$$

即 A, P_1°, P_2° 共線。

(iv)：我們先觀察到此變換保交比：

$$(P_\bullet) = X(P_\bullet) = H(\mathcal{O}_H(\triangle ABC, P_\bullet) \cap YZ) = (\mathcal{O}_H(\triangle ABC, P_\bullet) \cap YZ) = X(P_\bullet^\circ)$$

最後用到了關於 YZ 中點反演是一個保交比變換 (7.2.14)。再來要說明他對合，事實上，我們有 $XY \mapsto XZ, XZ \mapsto XY$。 ■

直接把等共軛變換的性質與推論套上去就有：

Corollary 12.1.18.

(i) 變換 $P \mapsto P^\circ$ 會將不過頂點的直線送至 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線。

(ii) 因為 $G \leftrightarrow H$，所以歐拉線 $\mathcal{E}$ 的像 $\mathcal{E}^\circ$ 是 $\triangle ABC$ 的 Kiepert 雙曲線 (8.3.4)。

(iii) 令 $\triangle H^aH^bH^c$ 為 H 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形，則 $\varphi(\mathcal{L}_\infty)$ 為 $\triangle H^aH^bH^c$ 的內切圓錐曲線。

12.2 張志煥截線

張志煥截線是幾何王子張志煥在計算共圓時經常使用到的工具。下面的部分也是與張志煥合著的。

Proposition 12.2.1. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。令 $\triangle P_AP_BP_C$ 為 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{C}$-西瓦三角形。對於 $\mathcal{C}$ 上一點 X，令 $X_A = XP_A \cap BC$, $X_B = XP_B \cap CA$, $X_C = XP_C \cap AB$，則 P, X_A, X_B, X_C 共線。

Proof. 考慮 $\mathcal{C}$ 上的六折線們 BCP_CXP_AA, CAP_AXP_BB，由帕斯卡定理即可得 P, X_A, X_B, X_C 共線。 ■

我們稱上述所共的直線 $PX_AX_BX_C$ 為 X 關於 $(\triangle ABC, \mathcal{C})$ 的**張志煥 $\boldsymbol{P}$-截線**，記為 $\mathbf{Per}_P^{\mathcal{C}}(X)$。特別地，對於任意外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$，$\mathbf{Per}_P^{\mathcal{C}}(A) = AP$, $\mathbf{Per}_P^{\mathcal{C}}(B) = BP$, $\mathbf{Per}_P^{\mathcal{C}}(C) = CP$；對於任意 $P \in \mathcal{C}$，$\mathbf{Per}_P^{\mathcal{C}}(X) = PX$。對偶地來說，我們也可以定義一線 x 關於 $(\triangle ABC, \mathfrak{c})$ 的張志煥 ℓ-截點，其中 $\mathfrak{c}$ 為 $\triangle ABC$ 的內切圓錐曲線，ℓ 為 $\mathfrak{c}$ 的其中一條切線。為了方便討論，以下只考慮截線的情形。

當固定外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 及其上一點 $X \neq A, B, C$ 時，$\mathbf{Per}_{-}^{\mathcal{C}}(X)$ 給了一個從 $\mathbb{P}^2 \setminus (BC \cup CA \cup AB)$ 至 $(\mathbb{P}^2)^\vee \setminus (\mathbf{T}A \cup \mathbf{T}B \cup \mathbf{T}C)$ 的雙射。

當固定外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 及一點 $P \notin \mathcal{C}$ 時，因為

$$\mathbf{Per}_P^{\mathcal{C}} = [X_A \mapsto PX_A] \circ [X \mapsto X_A],$$

所以我們得到：

Proposition 12.2.2. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。我們有

$$\mathbf{Per}_P^{\mathcal{C}} \colon \mathcal{C} \to \mathbf{T}P$$

為保交比變換。

Proposition 12.2.3. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。設 $\mathcal{C}'$ 為 $\triangle ABC \cup P$ 的某個外接圓錐曲線，$\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{C}'$ 的第四個交點為 T，則對於 $\mathcal{C}$ 上一點 X，$\mathbf{Per}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap TX \in \mathcal{C}'$。

Proof. 令 D 為 $\mathbf{Per}_P^{\mathcal{C}}(X)$ 與 $\mathcal{C}'$ 的第二個交點。由於 $\mathbf{Per}_P^{\mathcal{C}}$ 為保交比變換，我們有

$$\begin{aligned} T(A, B; C, X) = (A, B; C, X)_{\mathcal{C}} = \mathbf{Per}_P^{\mathcal{C}}(A, B; C, X) \\ = (AP, BP; CP, \mathbf{Per}_P^{\mathcal{C}}(X)) = (A, B; C, D)_{\mathcal{C}'} = T(A, B; C, D), \end{aligned}$$

故 T, X, D 共線。 ■

Proposition 12.2.4. 給定 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。對於任意兩點 P, Q 與任意一點 $X \in \mathcal{C}$，$\mathbf{Per}_P^{\mathcal{C}}(X)$ 與 $\mathbf{Per}_Q^{\mathcal{C}}(X)$ 的交點，記為 $\mathbf{Li}_{P,Q}^{\mathcal{C}}(X)$，位於外接圓錐曲線 $(ABCPQ)$ 上。

Proof. 令 $P_A = AP \cap \mathcal{C}$, $Q_A = AQ \cap \mathcal{C}$，我們有

$$\begin{aligned} P(A, \mathbf{Li}_{P,Q}^{\mathcal{C}}(X); B, C) &= (AP \cap BC, XP_A \cap BC; B, C) \overset{P_A}{=} (A, X; B, C)_{\mathcal{C}} \\ &\overset{Q_A}{=} (AQ \cap BC, XQ_A \cap BC; B, C) = Q(A, \mathbf{Li}_{P,Q}^{\mathcal{C}}(X); B, C) \end{aligned}$$

因此由圓錐曲線基本定理 (6.2.6) 可得 $\mathbf{Li}_{P,Q}^{\mathcal{C}}(X) \in (ABCPQ)$。 ■

因此對於任意 $\triangle ABC$ 過 P 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}'$，當 Q 在 $\mathcal{C}'$ 上動時，$\mathbf{Li}_{P,Q}^{\mathcal{C}}(X)$ 為 $\mathcal{C}'$ 上一定點（即 $\mathbf{Per}_P^{\mathcal{C}}(X)$ 與 $\mathcal{C}'$ 的第二個交點），記為 $\mathbf{Li}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(X)$。特別地，取 $Q = T$ 為 $\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{C}'$ 的第四個交點時，我們得到：

Proposition 12.2.5. 令 T 為 $\triangle ABC$ 的兩個外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{C}'$ 的第四個交點，則對於任意 $X \in \mathcal{C}$，T, X, $\mathbf{Li}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(X)$ 共線。

顯然地，我們有：

Proposition 12.2.6. 給定三角形 $\triangle ABC$。對於任意一點 X 及任意 $\triangle ABC \cup X$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$，

$$\begin{aligned} \mathcal{C}' &\xrightarrow{\mathbf{Per}_{-}^{\mathcal{C}}(X)} \mathbf{T}\big(\mathbf{Li}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(X)\big) \\ P &\longmapsto \mathbf{Per}_P^{\mathcal{C}}(X) \end{aligned}$$

為一保交比變換。

Example 12.2.7. 設 $\triangle ABC$ 的內心為 I，外心為 O。令 H_A 為 $\triangle BIC$ 垂心，$\triangle DEF$ 為 $\triangle ABC$ 切點三角形。設 $\odot(AEF)$ 和 $\odot(AIO)$ 分別交 $\odot(ABC)$ 於 S 和 T（與 A 相異）。

證明：T, H_A, I, S 共圓。

Solution. 令 $\mathcal{H}_{Fe}$ 為 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈雙曲線，則 $\mathbf{Per}_I(S) = ID = IH_A$ 告訴我們 $\mathbf{Li}_{\mathcal{H}_{Fe}}(S) = H_A$。設 OI 上的無窮遠點 ∞_{OI} 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點為

U，則 U 為 Ω 與 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的第四個交點，因此 U, S, H_A 共線（由 (12.2.5)）。

令 A^* 為 A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點，則 S, I, A^* 共線，故

$$\measuredangle H_ASI = \measuredangle USA^* = \measuredangle UAO = \measuredangle H_AIO,$$

即 $\odot(H_ASI)$ 和 OI 相切。另一方面，我們有

$$\measuredangle TSI = \measuredangle TSA^* = \measuredangle TAO = \measuredangle TIO,$$

即 $\odot(TSI)$ 和 OI 相切。故 T, H_A, I, S 共圓。

對於任意不過頂點的直線 $\mathcal{L}$，我們知道 $\triangle ABC$ 上的（點）等共軛變換與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線有個一一對應（見 (7.4.7)），即 $\varphi \mapsto \varphi(\mathcal{L})$。以下假設所有的等共軛變換都是點等共軛變換，並簡記 $\varphi(\mathcal{L})$ 為 $\mathcal{L}^\varphi$（見 (7.4.11)），特別地，當 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$ 且 φ 為等角共軛變換 $\varphi^K = (-)^*$ 時，$\mathcal{L}_\infty^*$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓 Ω。

Proposition 12.2.8. 令 φ 為 $\triangle ABC$ 上的一等共軛變換，$\mathscr{F}$ 為 φ 的對角圓錐曲線族（見 (7.4.1)）。對於 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 及其上一點 X，令 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_X \in \mathscr{F}$ 滿足 X 關於 $\mathcal{D}$ 的極線 $\mathfrak{p}_\mathcal{D}(X)$ 為 $\mathcal{L} := \varphi(\mathcal{C})$。那麼對於任意一點 P，

$$\mathbf{Per}_P^\mathcal{C}(X) = \mathfrak{p}_\mathcal{D}(\varphi(P)).$$

Proof. 令 P_A 為 AP 與 $\mathcal{C}$ 的第二個交點，$X_A = BC \cap XP_A$，我們證明 $X_A \in \mathfrak{p}_\mathcal{D}(\varphi(P))$。注意到

$$\varphi(P_A) = \mathcal{L} \cap \mathfrak{p}_\mathcal{D}(P_A) = \mathfrak{p}_\mathcal{D}(XP_A),$$

因此

$$\mathfrak{p}_\mathcal{D}(X_A) = \mathfrak{p}_\mathcal{D}(BC)\mathfrak{p}_\mathcal{D}(XP_A) = A\varphi(P_A) = A\varphi(P),$$

故 $X_A \in \mathfrak{p}_\mathcal{D}(\varphi(P))$。 ■

透過這個觀點，我們就能夠直接寫下 **Li**：

Corollary 12.2.9. 延續上個性質的標號，對於 $\triangle ABC$ 的任意外接圓錐曲線 $\mathcal{C}'$，

$$\mathbf{Li}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(X) = \bigcap_{P\in\mathcal{C}'} \mathbf{Per}^{\mathcal{C}}_{P}(X) = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(\varphi(\mathcal{C}')).$$

Proposition 12.2.10. 給定 $\triangle ABC$。對於任意兩點 P, Q，$\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 及 $\mathcal{C}$ 上一點 X，令 $\mathbf{Li} = \mathbf{Li}^{\mathcal{C}}_{P,Q}(X)$，則

$$\mathbf{Per}^{\mathcal{C}}_{P\times Q\div\mathbf{Li}}(X) = PQ.$$

換句話說，$P \times Q = \mathbf{Li}^{\mathcal{C}}_{P,Q}(X) \times \left(\mathbf{Per}^{\mathcal{C}}_{-}(X)\right)^{-1}(PQ)$。

Proof. 令 $\varphi = \varphi^{P\times Q}$，那麼 $\varphi(\mathbf{Li}) = P \times Q \div \mathbf{Li}$。因此

$$\mathbf{Per}^{\mathcal{C}}_{P\times Q\div\mathbf{Li}}(X) = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(\varphi(P\times Q\div\mathbf{Li})) = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(\mathbf{Li}) = \varphi((ABCPQ)) = PQ. \qquad \blacksquare$$

Proposition 12.2.11 (志煥線基本定理)**.** 令 φ, ψ 為 $\triangle ABC$ 上的兩個等共軛變換。設 X 為 $\mathcal{L}^{\varphi}$ 和 $\mathcal{L}^{\psi}$ 的第四個交點，P 為任意一點，則

(i) $X, \varphi(P)_A = A\varphi(P) \cap \mathcal{L}^{\varphi}, \psi(P)_A = A\psi(P) \cap \mathcal{L}^{\psi}$ 共線。

(ii) $\varphi(P)\psi(P) = \mathbf{Per}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(P)}(X) = \mathbf{Per}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{\psi(P)}(X)$。

Proof. (i) 簡單地觀察到

$$\begin{aligned} X(A, \varphi(P)_A; B, C) = A(A, \varphi(P)_A; B, C)_{\mathcal{L}^{\varphi}} &\overset{\varphi}{=} A(\mathcal{L} \cap BC, P; C, B) \\ &\overset{\psi}{=} A(A, \psi(P)_A; B, C)_{\mathcal{L}^{\psi}} = X(A, \psi(P)_A; B, C). \end{aligned}$$

(ii) 設直線 $X\varphi(P)_A\psi(P)_A$ 交 BC 於 X_A，我們有

$$X_A\varphi(P) = \mathbf{Per}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(P)}(X) = \mathbf{Per}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{\psi(P)}(X) = X_A\psi(P),$$

故

$$\varphi(P)\psi(P) = \mathbf{Per}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(P)}(X) = \mathbf{Per}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{\psi(P)}(X).$$

如果只是要證明 (ii) 的話，我們也有以下這個看法：考慮對角圓錐曲線 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\varphi,\psi} \in \mathscr{F}_{\varphi} \cap \mathscr{F}_{\psi}$，這時候 $\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(X) = \varphi(X)\psi(X) = \mathcal{L}$ 且 $\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(P) = \varphi(P)\psi(P)$，因此

$$\mathbf{Per}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(P)}(X) = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(P) = \varphi(P)\psi(P).$$

同理，$\mathbf{Per}_{\psi(P)}^{\mathcal{L}^\psi}(X) = \varphi(P)\psi(P)$。 ■

Example 12.2.12 (= (7.4.5) 等共軛對合)**.** 令 φ 為 $\triangle ABC$ 上的一等共軛變換。對於任意兩點 P, Q，設 $P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q = R,\ PQ \cap \varphi(P)\varphi(Q) = S$，則 $\varphi(R) = S$。

Solution. 定義一等共軛變換 $\psi = \psi^{P\times Q}$ 將 $P \mapsto Q$，考慮 $\mathcal{L}^\varphi, \mathcal{L}^\psi$ 的交點 X，則由 (12.2.11) 的 (ii)，

$$\begin{aligned}\mathbf{Per}_P^{\mathcal{L}^\psi}(X) &= P\varphi(Q) = \mathbf{Per}_{\varphi(Q)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X),\\ \mathbf{Per}_Q^{\mathcal{L}^\psi}(X) &= \varphi(P)Q = \mathbf{Per}_{\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X).\end{aligned}$$

注意到 $R = \mathbf{Li}_{P,Q}^{\mathcal{L}^\psi}(X) = \mathbf{Li}_{\varphi(P),\varphi(Q)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X)$，因此

$$R \in (ABCPQ) \cap (ABC\varphi(P)\varphi(Q)) \quad\Longrightarrow\quad \varphi(R) = \varphi(P)\varphi(Q) \cap PQ = S.$$

現在假設外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓 $\Omega = \odot(ABC)$，那麼某些張志煥截線就會是一些我們平常熟悉的線。

Example 12.2.13. 令 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，則對於任意一點 $X \in \Omega$，$\mathbf{Per}_O^\Omega(X)$ 為 X 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線 $\mathcal{O}(X)$。

Example 12.2.14. 令 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，則對於任意一點 $X \in \Omega$，$\mathbf{Per}_H^\Omega(X)$ 為 X 關於 $\triangle ABC$ 的施坦納線 $\mathcal{S}_X$。

Example 12.2.15. 令 K 為 $\triangle ABC$ 的共軛重心，則對於任意一點 $X \in \Omega$，$\mathbf{Per}_K^\Omega(X)$ 為 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}(X)$。

也因為這些例子，我們簡記 $\mathbf{Per}_P^\Omega(X)$ 為 $\mathbf{Per}_P(X)$，為 X 關於 $\triangle ABC$ 的張志煥 P-截線。類似地，我們分別簡記 $\mathbf{Li}_{P,Q}^\Omega(X)$ 及 $\mathbf{Li}_{\mathcal{C}'}^\Omega(X)$ 為 $\mathbf{Li}_{P,Q}(X)$ 及 $\mathbf{Li}_{\mathcal{C}'}(X)$。

事實上，我們對於 $\mathbf{Per}_P(X)$ 的角度有一些刻畫。

Proposition 12.2.16. 設 P, P^* 為關於 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點，X 為外接圓 Ω 上任意點，則

$$\measuredangle(\mathbf{Per}_P(X), BC) = \measuredangle AXP^*.$$

用形式和來寫就是

$$\mathbf{Per}_P(X) + P^*X = (A + B + C + X)_\Omega.$$

Proof. 令 $\mathcal{D}$ 是以 X 為中心的對角圓錐曲線，那麼 $\mathcal{D}$ 經過 $\triangle ABC$ 的內心及三個旁心，因此是個等軸雙曲線。故

$$\mathbf{Per}_P(X) + P^*X = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(P^*) + P^*X = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(A) + AX = (A + B + C + X)_\Omega.$$

這邊提供另一個比較純幾的證明：令 $P_A = AP \cap \Omega$, $P_A^* = AP^* \cap \Omega$, $D = AP \cap BC$, $X_A = XP_A \cap BC$。由 $P_AP_A^* \parallel BC$，我們易得 $\triangle X_AP_AD \mathrel{\overset{-}{\sim}} \triangle AP_A^*X$。在 P_AX_A 上取點 E 使得 $DE \parallel PX_A = \mathbf{Per}_P(X)$，由 1.3 節的習題 4，我們有

$$\frac{AP^*}{P^*P_A^*} = \frac{PD}{DP_A} = \frac{X_AE}{EP_A}.$$

因此我們有 $\triangle X_AED \mathrel{\overset{-}{\sim}} \triangle AP^*X$，故

$$\measuredangle AXP^* = \measuredangle EDX_A = \measuredangle(PX_A, BC) = \measuredangle(\mathbf{Per}_P(X), BC). \qquad \blacksquare$$

當然，第一個證明得以讓我們把這個性質推廣到任意等共軛的情形：

Proposition 12.2.17. 給定 $\triangle ABC$ 上的一等共軛變換 φ 及一對等共軛點對 (P, Q)。對於 $\mathcal{L}^\varphi$ 上任意一點 X，若令 Y 為 XQ 與 $\mathcal{L}^\varphi$ 的第二個交點，則 $\varphi(Y) = \mathbf{Per}_P^{\mathcal{L}^\varphi}(X) \cap \mathcal{L}$。

舉例來說，當 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$，$\mathcal{L}^\varphi$ 為等軸雙曲線時，我們得到 $\mathbf{Per}_P^{\mathcal{L}^\varphi}(X) \perp HY$，其中 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心。

Example 12.2.18 (2022 2J I1-G)**.** 令 I, O, H, Ω 分別為三角形 ABC 的內心、外心、垂心與外接圓。設 AI 與 Ω 交於 $M \neq A$，IH 與 BC 交於 D，MD 與 Ω 交於 $E \neq M$。

證明：直線 OI 與 $\triangle IHE$ 的外接圓相切。

Solution. 考慮等共軛 $\varphi = \varphi^{I\times H}$，$X$ 為 $\mathcal{L}^{\varphi}$ 與外接圓 Ω 的第四個交點，則由基本定理 (12.2.11) 知（取 $P = I$）

$$\mathbf{Per}_I(X) = \mathbf{Per}_H^{\mathcal{L}^{\varphi}}(X) = IH.$$

由題目假設，我們有 $\mathbf{Per}_I(E) = IH$，因此 $E = X$。再使用一次基本定理（取 $P = H$），我們得到

$$\mathbf{Per}_O(E) = \mathbf{Per}_I^{\mathcal{L}^{\varphi}}(E) = OI.$$

最後由算角引理 (12.2.16)，

$$\measuredangle HEI = \measuredangle(\mathbf{Per}_I(E), \mathbf{Per}_O(E)) = \measuredangle(IH, IO),$$

即 OI 與 $\odot(IHE)$ 相切。

這邊給一個不需要用到張志煥截線的作法，基本上是用到 (9.2.11) 底下的純幾證明：

取一點 X 使得 $\triangle XHI \overset{+}{\sim} \triangle XIO$。我們先證明 X 位於 Ω 上：取 Y, Z 使得 $\triangle XAY \overset{+}{\sim} \triangle XBZ \overset{+}{\sim} \triangle XHI$，則由旋似，$\triangle IAH \overset{+}{\sim} \triangle OYI$。這告訴我們 $\measuredangle OYI = \measuredangle IAH = \measuredangle OAI$，即 A, O, I, Y 共圓。同理有 B, O, I, Z 共圓。設 P 為 AY 與 BZ 的交點，則一樣由旋似，$\triangle AIB \overset{+}{\sim} \triangle YOZ$，所以得到

$$\begin{aligned}\measuredangle APB &= \measuredangle YAI + \measuredangle AIB + \measuredangle IBZ \\ &= \measuredangle YOI + \measuredangle AIB + \measuredangle IOZ = 2 \cdot \measuredangle AIB = \measuredangle ACB,\end{aligned}$$

即 P 位於 Ω 上。再由 $\measuredangle AXB = \measuredangle(AY, BZ) = \measuredangle APB$ 即得 X 也位於 Ω 上。

因為 $\measuredangle XHI = \measuredangle XIO$，$OI$ 與 $\odot(XHI)$ 相切，因此我們只需證明 E, X, H, I 共圓。注意到 $\measuredangle DBM = \measuredangle BEM$，所以 $MD \cdot ME = \overline{MB}^2 = \overline{MI}^2$，故

$$\measuredangle MEI = \measuredangle DIM = \measuredangle HIA = \measuredangle IOY = \measuredangle IAP = \measuredangle MEP,$$

即 E, I, P 共線。因此由 $\measuredangle IEX = \measuredangle YAX = \measuredangle IHX$ 我們得到 E, X, H, I 共圓。

稍微把這個解法的後半部改一下，我們就得到下列這個更一般的命題：

Theorem 12.2.19. 令 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$ 為無窮遠線，$\Omega = \mathcal{L}^*$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓。對於任意兩點 P, Q，令 X 為 $\mathcal{L}^\varphi$ 與 Ω 的第四個交點，其中 $\varphi = \varphi^{P\times Q}$；$R = PQ^* \cap P^*Q$，其中 $(-)^*$ 為等角共軛變換。則

(i) $R = \mathbf{Li}_{P,Q}^{\mathcal{L}^\varphi}(X)$；

(ii) P, Q, R, X 四點共圓。

Proof. 由 (12.2.11) 的 (ii)，我們有

$$\mathbf{Li}_{P,Q}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = \mathbf{Per}_P^{\mathcal{L}^\varphi}(X) \cap \mathbf{Per}_Q^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = PQ^* \cap P^*Q,$$

這證明了 (i)。結合 (12.2.11) 的 (ii) 及 (12.2.16)，我們得到

$$\begin{aligned}\measuredangle PRQ &= \measuredangle(PQ^*, P^*Q) = \measuredangle(\mathbf{Per}_{Q^*}(X), \mathbf{Per}_{P^*}(X)) \\ &= \measuredangle AXQ + \measuredangle PXA = \measuredangle PXQ,\end{aligned}$$

即 P, Q, R, X 共圓。 ■

這個定理有個推廣：

Theorem 12.2.20. 給定 $\triangle ABC$ 上的一等共軛變換 ψ。對於任意兩點 P, Q，令 X 為 $\mathcal{L}^\varphi$ 與 $\mathcal{L}^\psi$ 的第四個交點，其中 $\varphi = \varphi^{P\times Q}$；$R = P\psi(Q) \cap \psi(P)Q$。則

(i) $R = \mathbf{Li}_{P,Q}^{\mathcal{L}^\varphi}$；

(ii) $\triangle ABC \cup X$ 截 $\mathcal{L}$ 所定義出來的對合與 $\triangle PQR \cup X$ 截 $\mathcal{L}$ 所定義出來的對合是同一個。

Proof. (i) 的證明與 (12.2.19) 中 (i) 的證明類似。

(ii)：令 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\varphi,\psi} \in \mathscr{F}_\varphi \cap \mathscr{F}_\psi$，那麼 $\mathfrak{p}_\mathcal{D}(X) = \mathcal{L}$ 且 $\triangle ABC$ 與 $\triangle PQR$ 都是關於 $\mathcal{D}$ 的自共軛三角形。因此兩者所定義出來的對合都是 $\mathfrak{p}_\mathcal{D}(-) \cap \mathcal{L}$。 ■

當 $\psi = \varphi^K$ 為等角共軛變換，$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$ 為無窮遠線時，$\triangle ABC \cup X$ 截 $\mathcal{L}$ 所定義出來的對合的兩個不動點 $\infty_{\frac{1}{2}(A+B+C+X)_\Omega}$ 互相垂直於對方，因此 P, Q, R, X 共圓（由 (7.2.19)）。另外，P, Q, R 其實是對稱的：由 (7.4.5)，$P = Q\psi(R) \cap \psi(Q)R, Q = R\psi(P) \cap \psi(R)P$。

12.3 重心座標積

我們曾經在第 7.4 節的最後面介紹過重心座標積（商）：給定 $\triangle = \triangle ABC$，

$$[x_1 : y_1 : z_1] \times [x_2 : y_2 : z_2] := [x_1x_2 : y_1y_2 : z_1z_2],$$
$$[x_1 : y_1 : z_1] \div [x_2 : y_2 : z_2] := \left[\tfrac{x_1}{x_2} : \tfrac{y_1}{y_2} : \tfrac{z_1}{z_2}\right].$$

我們知道一個點 P 關於 $\triangle$ 的等角共軛點就是 $K \times G \div P$，其中 G, K 分別為 $\triangle$ 的重心 $[1 : 1 : 1]$ 及共軛重心 $[a^2 : b^2 : c^2]$。注意到這邊其實是不用再多乘 G 的，但是我們之所以這麼做是因為想要保持他的權重為 1，兩邊齊次的情況下比較不容易算錯。比方說，一點 P 關於 $\triangle$ 的等截共軛點就會寫成 $G \times G \div P$。

更精確地來說，我們考慮集合

$$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{Z} = \{([x : y : z], k) \mid [x : y : z] \in \mathbb{P}^2, k \in \mathbb{Z}\}.$$

這上面的乘除法就定義為

$$([x_1 : y_1 : z_1], k_1) \times ([x_1 : y_1 : z_1], k_2) := ([x_1x_2 : y_1y_2 : z_1z_2], k_1 + k_2),$$
$$([x_1 : y_1 : z_1], k_1) \div ([x_1 : y_1 : z_1], k_2) := \left(\left[\tfrac{x_1}{x_2} : \tfrac{y_1}{y_2} : \tfrac{z_1}{z_2}\right], k_1 - k_2\right).$$

而平面上的點就是權重為 1 的點，即 $\mathbb{P}^2 \times \{1\}$。

Example 12.3.1.

- 一個點等共軛變換 φ 就是形如

  $$([x : y : z], 1) \longmapsto \left(\left[\tfrac{u}{x} : \tfrac{v}{y} : \tfrac{w}{z}\right], 1\right)$$

  的變換，因此如果令 $\varphi = ([u : v : w], 2)$，我們就有 $\varphi(P) = \varphi \div P$。因此一個點等共軛變換的權重為 2。

- 一個固定 A, B, C 的射影變換 Φ 都形如

  $$([x : y : z], 1) \longmapsto ([ux : vy : wz], 1),$$

  因此如果令 $\Phi = ([u : v : w], 0)$，我們就有 $\Phi(P) = \Phi \times P$。我們有時也稱一個權重為 0 的點為比例。特別地，恆等變換 id 就是 $([1 : 1 : 1], 0)$，這時候我們簡記這個重心座標為 $\mathbf{1}$。

在重心座標下，取補點為

$$[u:v:w]^{\mathsf{C}} = [v+w:w+u:u+v],$$

取反補點為

$$[u:v:w]^{\reflectbox{C}} = [v+w-u:w+u-v:u+v-w].$$

為了讓權重為 1 的點送到權重為 1 的點，我們這邊假設這兩個操作都是保持權重的，也就是

$$\begin{aligned}
([u:v:w],k)^{\mathsf{C}} &= ([v+w:w+u:u+v],k),\\
([u:v:w],k)^{\reflectbox{C}} &= ([v+w-u:w+u-v:u+v-w],k).
\end{aligned}$$

注意到這兩個變換在權重為 1 的時候與重心 G（或者說無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$）的選取有關，所以為了讓它們成為射影不變量，我們應該要在權重 0 的情況下操作。一個最基本的共線就是來自補點變換：G, P, P^{C} 共線。

Proposition 12.3.2. 對於任意比例 $r = ([u:v:w],0)$，

$$r \times r^{\mathsf{C}} = (r^{-1})^{\mathsf{C}}.$$

Proof. 這只是因為

$$u(v+w) = uvw \cdot \left(v^{-1}+w^{-1}\right). \qquad \blacksquare$$

如果取 $r = P \div G$，我們就有

$$P \times P^{\mathsf{C}} = G^2 \times (G \div P)^{\mathsf{C}} = G \times (G^2 \div P)^{\mathsf{C}}.$$

類似地，如果定義

$$[u:v:w]^{\mathsf{D}} = [v-w:w-u:u-v] = [w-v:u-w:v-u],$$

我們有 $r \times r^{\mathsf{D}} = (r^{-1})^{\mathsf{D}}$。

這邊差點沒給幾何意義：P^{D} 這個點其實是 GP 關於施坦納外接橢圓 $\mathcal{S}t$ 的極點 $\mathfrak{p}_{\mathcal{S}t}(GP)$，稱為差點，因此當 $P = G$，也就是幾何時，並沒有意義。因為 P, P^{C}, $P^{\reflectbox{$\mathsf{C}$}}$, G 共線且任意點的差點都位於無窮遠線上，所以 $P^{\mathsf{D}} = P^{\mathsf{CD}} = P^{\mathsf{DC}} = P^{\reflectbox{C}\mathsf{D}} = P^{\mathsf{D}\reflectbox{C}}$，也就是說，$(-)^{\mathsf{D}}$ 是 $(-)^{\mathsf{C}}$ 與 $(-)^{\reflectbox{$\mathsf{C}$}}$ 的殺手。

Definition 12.3.3. 對於任意一點 X，令 $\triangle X_aX_bX_c$, $\triangle X^aX^bX^c$ 分別為 X 的西瓦三角形及反西瓦三角形。我們定義 ***X*-補點變換**，記為 $(-)^{\mathsf{C}_X}$，為將 A, B, C, X 分別送至 X_a, X_b, X_c, X 的射影變換；***X*-反補點變換**，記為 $(-)^{\reflectbox{$\mathsf{C}$}_X}$，為將 A, B, C, X 分別送至 X^a, X^b, X^c, X 的射影變換。

特別地，G-補點變換與 G-反補點變換為原本的補點變換與反補點變換。

類似地，令 $\mathfrak{c}(X)$ 是以 X 為透視中心的 $\triangle$ 的外接圓錐曲線。我們定義 ***X*-差點變換**，記為 $(-)^{\mathsf{D}_X}$，為將 P 送至 XP 關於 $\mathfrak{c}(X)$ 的極點的變換。

注意到 X, $\triangle X_aX_bX_c$, $\triangle X^aX^bX^c$, $\mathfrak{c}(X)$ 分別為 G, $\triangle G_aG_bG_c$, $\triangle G^aG^bG^c$, $\mathcal{S}t = \mathfrak{c}(G)$ 在射影變換 $\Phi = X \div G$ 下的像，所以

$$
\begin{aligned}
(-)^{\mathsf{C}_X} &= \Phi \circ (-)^{\mathsf{C}} \circ \Phi^{-1}, \\
(-)^{\reflectbox{C}_X} &= \Phi \circ (-)^{\reflectbox{C}} \circ \Phi^{-1}, \\
(-)^{\mathsf{D}_X} &= \Phi \circ (-)^{\mathsf{D}} \circ \Phi^{-1}.
\end{aligned}
$$

因此我們得到：

Proposition 12.3.4. 給定一點 X。對於任意一點 P，

$$
\begin{aligned}
P^{\mathsf{C}_X} &= X \times (P \div X)^{\mathsf{C}}, \\
P^{\reflectbox{C}_X} &= X \times (P \div X)^{\reflectbox{C}}, \\
P^{\mathsf{D}_X} &= X \times (P \div X)^{\mathsf{D}}.
\end{aligned}
$$

更一般地，對於權重為 k 的物件 $\mathbf{P}$，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}^{\mathsf{C}_X} &= X^k \times (\mathbf{P} \div X^k)^{\mathsf{C}}, \\
\mathbf{P}^{\reflectbox{C}_X} &= X^k \times (\mathbf{P} \div X^k)^{\reflectbox{C}}, \\
\mathbf{P}^{\mathsf{D}_X} &= X^k \times (\mathbf{P} \div X^k)^{\mathsf{D}}.
\end{aligned}
$$

由 (7.4.6)，我們有：

Proposition 12.3.5. 給定四點 P, P^*, Q, Q^* 滿足 $P \times P^* = Q \times Q^*$，那麼 P, Q, $PQ^* \cap P^*Q$ 共於 $\triangle$ 的外接圓錐曲線。

Example 12.3.6. 令 $G = X_2$, $K = X_6$, $Ge = X_7$, $Mt = X_9$, $Ge^* = X_{55}$, $I' = X_{75}$ 分別為 $\triangle$ 的重心、共軛重心、熱爾岡點、Mittenpunkt 點、外接圓與內切圓的內位似中心、內心的等截共軛點。證明：GGe^*, KGe, MtI' 共點。

Solution. 因為 I, G, Na 共線，所以取等截共軛變換有 I', G, Ge 共於一外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。注意到 $G \times K = Ge \times Ge^*$，所以 GGe^* 與 KGe 交於 $\mathcal{C}$ 上。因此我們只需證明 $K \times I' = Ge \times Mt$，而這是因為

$$\begin{aligned} K \times I' &= K \times (G^2 \div I) = (K \times G \div I) \times G = I \times G \\ &= (G \div Ge)^{\mathsf{C}} \times G^2 = (Ge \div G) \times (Ge \div G)^{\mathsf{C}} \times G^2 = Ge \times Mt. \end{aligned}$$

讓我們回憶交叉點的定義 (7.1.17)：

Definition 12.3.7. 對於任意兩點 P, Q，我們定義 P 與 Q 關於 $\triangle$ 的交叉點，記為 $P \pitchfork Q$，為直線 PQ 關於圓錐曲線 $(\triangle PQ)$ 的極點。

Proposition 12.3.8. 令 $R = P \pitchfork Q$ 為 P 與 Q 關於 $\triangle$ 的交叉點。那麼

$$R = P \times (P \div Q)^{\mathsf{C}} = Q \times (Q \div P)^{\mathsf{C}}.$$

Proof. 考慮射影變換 $A, B, C, Q \mapsto A, B, C, G$，那麼由於 $R = \mathfrak{p}_{(ABCPQ)}(PQ)$ 是射影不變的，所以只需證明 $Q = G$ 的情形：

$$R = G \times (G \div P)^{\mathsf{C}},$$

即 $R^{\reflectbox{$\mathsf{C}$}}$ 為 P 關於 $\triangle$ 的等截共軛點 P'。

令 X_a, X_b, X_c 分別為 AP, BP, CP 與 $B^{\mathsf{C}}C^{\mathsf{C}}, C^{\mathsf{C}}A^{\mathsf{C}}, A^{\mathsf{C}}B^{\mathsf{C}}$ 的交點。那麼由 (7.1.18)，

$$R^{\reflectbox{C}} = (A^{\mathsf{C}}X_a \cap B^{\mathsf{C}}X_b \cap C^{\mathsf{C}}X_c)^{\reflectbox{C}} = AX_a^{\reflectbox{C}} \cap BX_b^{\reflectbox{C}} \cap CX_c^{\reflectbox{C}}.$$

由

$$\frac{BX_a^{\reflectbox{C}}}{X_a^{\reflectbox{C}}C} = \frac{B^{\mathsf{C}}X_a}{X_aC^{\mathsf{C}}} = \frac{C(AP \cap BC)}{(AP \cap BC)B} = \frac{B(AP' \cap BC)}{(AP' \cap BC)C}$$

我們得到 $P' \in AX_a^{\reflectbox{C}}$。再藉由對稱性我們便有 $R^{\reflectbox{$\mathsf{C}$}} = P'$。 ■

Example 12.3.9. 對於任意 $\triangle$，其共軛重心 K 為重心 G 與垂心 H 的交叉點。而兩種表示法

$$
\begin{aligned}
G \pitchfork H &= H \times (H \div G)^{\mathsf{C}} = H \times O \div G, \\
G \pitchfork H &= G \times (G \div H)^{\mathsf{C}} = G \times (H' \div G)^{\mathsf{C}}
\end{aligned}
$$

代表 K 是 G 的等角共軛點，也是 H 的等截共軛點 H' 的補點。

Example 12.3.10. $X_{55} = I \pitchfork Mt$：

$$
\begin{aligned}
I \pitchfork Mt &= I \times (I \div Mt)^{\mathsf{C}} = I \times (Ge \div G)^{\mathsf{C}} \\
&= I \times (Mt \div G) = I \times (I \div Ge) = X_{55}.
\end{aligned}
$$

讓我們回憶西瓦積的定義 (7.1.23)：

Definition 12.3.11. 令 $\triangle P^aP^bP^c, \triangle Q^aQ^bQ^c$ 分別為 P, Q 關於 $\triangle$ 的反西瓦三角形。我們定義 P 與 Q 關於 $\triangle$ 的西瓦積，記為 $P\star Q$，為直線 PQ 關於過 P 與 Q 的對角圓錐曲線 $(PP^aP^bP^cQQ^aQ^bQ^c)$ 的極點。

我們定義 S 與 Q 關於 $\triangle$ 的西瓦商，記為 S/Q，為（唯一）滿足 $S = P\star Q$ 的點 P。

透過交叉點的定義，我們發現西瓦積 $P\star Q$ 同時是 P 與 Q 關於 $\triangle P^aP^bP^c$ 及 $\triangle Q^aQ^bQ^c$ 的交叉點。

Proposition 12.3.12. 令 $S = P\star Q$ 為 P 與 Q 關於 $\triangle$ 的西瓦積。那麼

$$
S = Q \div (P \div Q)^{\mathsf{C}} = P \div (Q \div P)^{\mathsf{C}}.
$$

Proof. 類似地，我們不妨假設 $Q = G$。那麼 S 為 P 與 G 關於 $\triangle A^{\text{Ↄ}}B^{\text{Ↄ}}C^{\text{Ↄ}}$ 的交叉點。等價地，

$$
S^{\mathsf{C}} = P^{\mathsf{C}} \pitchfork G = G \times (G \div P^{\mathsf{C}})^{\mathsf{C}} = (G^2 \div P^{\mathsf{C}})^{\mathsf{C}},
$$

即 $S = G^2 \div P^{\mathsf{C}} = Q \div (P \div Q)^{\mathsf{C}}$。 ■

Corollary 12.3.13. 令 R, S 分別為 P 與 Q 關於 $\triangle$ 的交叉點及西瓦積。那麼 $P \times Q = R \times S$。

Corollary 12.3.14. 令 $P = S/Q$ 為 S 與 Q 關於 $\triangle$ 的西瓦商。那麼

$$P = Q \times (Q \div S)^{\text{ↄ}}.$$

當然，如果我們也定義所謂的交叉商，即唯一一點 P 滿足 $R = P \pitchfork Q$，那麼有

$$P = Q \div (R \div Q)^{\text{ↄ}}.$$

這樣的 P 我們就記作 $R \Psi Q$。

Proposition 12.3.15. 對於任意兩點 P, Q，

$$P \times Q = (P/Q) \times (Q \Psi P).$$

在這節，我們記 $\mathfrak{t}(P)$ 為 P 的三線性極線，$\mathfrak{c}(P)$ 是以 P 為透視中心的外接圓錐曲線。對於任意直線 ℓ，$\mathfrak{t}(\ell)$ 為 ℓ 的三線性極點。對於任意外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$，$\mathfrak{c}(\mathcal{C})$ 為 $\mathcal{C}$ 的透視中心。

因為 $\mathfrak{t}$ 與 $\mathfrak{c}$ 都是射影不變的，所以：

Proposition 12.3.16. 對於任意兩點 P, Q，

$$\mathfrak{t}(P) \div P = \mathfrak{t}(Q) \div Q, \quad \mathfrak{c}(P) \div P = \mathfrak{c}(Q) \div Q.$$

特別地，

$$\mathfrak{t}(P) \div P = \mathcal{L}_\infty \div G = \mathfrak{t}(\mathbf{1}), \quad \mathfrak{c}(P) \div P = \mathcal{S}t \div G = \mathfrak{c}(\mathbf{1}).$$

Proposition 12.3.17. 對於任意兩點 P, Q，$P \times Q = \mathfrak{c}(P) \times \mathfrak{t}(Q)$，也就是說，對於任意等共軛變換 φ，

$$\varphi(\mathfrak{c}(P)) = \mathfrak{t}(\varphi(P)), \quad \varphi(\mathfrak{t}(Q)) = \mathfrak{c}(\varphi(Q)).$$

即 (7.4.8)。

Corollary 12.3.18. 對於任意兩點 P, Q，$Q \in \mathfrak{c}(P)$ 若且唯若 $P \in \mathfrak{t}(Q)$。

Proof. 如果令 $\varphi = P \times Q$，那麼 $\mathfrak{t}(Q) = \varphi(\mathfrak{c}(P))$。因此

$$P \in \mathfrak{t}(Q) = \varphi(\mathfrak{c}(P)) \iff Q = \varphi(P) \in \mathfrak{c}(P). \qquad \blacksquare$$

$\triangle$ 上的一個對角圓錐曲線 $\mathcal{D}$ 就是使 $\triangle$ 為自共軛三角形的圓錐曲線。對於任意三點 P, Q, R，這三點共對角圓錐曲線若且唯若點等共軛變換 P^2, Q^2, R^2 共用同樣的對角圓錐曲線，這代表 P^2, Q^2, R^2 共於一線 $\mathfrak{t}(\varphi)$ (見 (7.4.14) 與其後面的解釋)，其中 φ 也是某點等共軛變換。因此我們總是可以把一個對角圓錐曲線 $\mathcal{D}$ 寫為 $\sqrt{\mathfrak{t}(\varphi)}$。等價地，$\varphi = \mathfrak{t}(\mathcal{D}^2)$。經過兩點 P, Q 的對角圓錐曲線 $\mathcal{D}_{P,Q}$ 就是 $\sqrt{P^2Q^2}$。

Example 12.3.19. 極圓 $\mathcal{D}_\infty$，即通過兩個無窮虛圓點的對角圓錐曲線，其實就是 $\sqrt{\mathfrak{t}(G \times H)}$，其中 G, H 分別為 $\triangle$ 的重心與垂心。

Proposition 12.3.20. 對於任意一點 P 及對角圓錐曲線 $\mathcal{D} = \sqrt{\mathfrak{t}(\varphi)}$，

$$\mathfrak{t}(\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(P)) = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(\mathfrak{t}(P)) = \varphi(P) = \mathfrak{t}(\mathcal{D}^2) \div P.$$

Proof. 要證明 $\mathfrak{t}(\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(P)) = \mathfrak{t}(\mathcal{D}^2) \div P$，我們只需證明 $\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(P) = \mathcal{D}^2 \div P$。而這是因為對於 $Q \in \mathcal{D}$，由點等共軛變換的定義我們有 $Q^2 \div P$ 位於 $\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(P)$ 上。

若 $Q = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(\mathfrak{t}(P))$，則 $P = \mathfrak{t}(\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(Q)) = \varphi(Q)$。因此 $\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(\mathfrak{t}(P)) = \varphi(P)$。 $\blacksquare$

Proposition 12.3.21. 直線 $\mathfrak{t}(P)$ 與對角圓錐曲線 $\mathcal{D} = \sqrt{\mathfrak{t}(\varphi)}$ 相切若且唯若 $\varphi \in \mathfrak{t}(P^2)$，或者說，$P^2 \in \mathfrak{c}(\varphi)$。

Proof. 由 (12.3.20)，$\mathfrak{t}(P)$ 與 $\mathcal{D} = \sqrt{\mathfrak{t}(\varphi)}$ 相切若且唯若 $\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(\mathfrak{t}(P)) = \varphi(P)$ 位於 $\mathfrak{t}(P)$ 上。這等價於 $\varphi \in \mathfrak{t}(P) \times P = \mathfrak{t}(P^2)$。 $\blacksquare$

Proposition 12.3.22. 對於任意一線 $\mathfrak{t}(Q)$ 及一點 P，$\mathfrak{t}(Q)$ 在 P-補變換下的像

$$\mathfrak{t}(Q)^{\complement_P} = \mathfrak{t}(P \div (P \div Q)^{\mathsf{I}}),$$

$\mathfrak{t}(Q)$ 在 P-反補變換下的像

$$\mathfrak{t}(Q)^{\mathfrak{I}_P} = \mathfrak{t}(P \div (P \div Q)^{\mathfrak{C}}).$$

如果令 $\varphi = P^2$，那麼我們可以把上述式子寫成

$$(-)^{\mathfrak{C}_P} \circ \mathfrak{t} \circ \varphi = \mathfrak{t} \circ \varphi \circ (-)^{\mathfrak{I}_P}$$

Proof. 考慮點等共軛變換 $\varphi = P^2$ 及對角圓錐曲線 $\mathcal{D} = \sqrt{\mathfrak{t}(\varphi)}$。由 (12.3.20)，對於任意一點 R 我們有

$$\mathfrak{t}(\varphi(R)) = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(R).$$

注意到 $P \div (P \div Q)^{\mathfrak{I}} = P^2 \div (P^2 \div Q)^{\mathfrak{I}_P} = \varphi(\varphi(Q)^{\mathfrak{I}_P})$，所以如果令 $R = \varphi(Q)$，第一條要證明的式子就可以寫成

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(R)^{\mathfrak{C}_P} = \mathfrak{t}(\varphi(R))^{\mathfrak{C}_P} = \mathfrak{t}(\varphi(R^{\mathfrak{I}_P})) = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(R^{\mathfrak{I}_P}).$$

因為 $P, R, R^{\mathfrak{I}_P}$ 共線，所以 $\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(P) = \mathfrak{t}(\varphi(P)) = \mathfrak{t}(P), \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(R), \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(R^{\mathfrak{I}_P})$ 共於一點 $W = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(PR)$。

令 X 為 PR 與 $\mathfrak{t}(P)$ 的交點。那麼 $\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(X) = WP$。因此

$$\begin{aligned}(\mathfrak{t}(P), WP; \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(R), \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(R)^{\mathfrak{C}_P}) = -2 = (P, X; R^{\mathfrak{I}_P}, R)& \\ \overset{\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}}{=} (\mathfrak{t}(P), WP; \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(R), \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(R^{\mathfrak{I}_P}))&\end{aligned}$$

告訴我們 $\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(R)^{\mathfrak{C}_P} = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(R^{\mathfrak{I}_P})$。同理（或者把 R 換成 $R^{\mathfrak{I}_P}$），我們可以證明 $\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(R)^{\mathfrak{I}_P} = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(R^{\mathfrak{C}_P})$，再由 (12.3.20) 寫回去就得到

$$\mathfrak{t}(Q)^{\mathfrak{I}_P} = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(\varphi(Q))^{\mathfrak{I}_P} = \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(\varphi(Q)^{\mathfrak{C}_P}) = \mathfrak{t}(P \div (P \div Q)^{\mathfrak{C}}).$$ ■

Proposition 12.3.23. 令 $S = P \star Q$ 為 P 與 Q 關於 $\triangle$ 的西瓦積。那麼 P 關於 $\mathfrak{c}(Q)$ 的極線為 $\mathfrak{t}(S)$，也就是說，

$$\mathfrak{t}(\mathfrak{p}_{\mathfrak{c}(Q)}(P)) = P \star Q.$$

Proof. 令 $\triangle Q^aQ^bQ^c$ 為 Q 的反西瓦三角形。那麼 $\mathfrak{c}(Q)$ 為 $\triangle Q^aQ^bQ^c$ 的內切圓錐曲線且 S 為 P 與 Q 關於 $\triangle Q^aQ^bQ^c$ 的交叉點。令 D 為 $\mathfrak{p}_{\mathfrak{c}(Q)}(P)$ 與 BC 的交點。那麼 $\mathfrak{p}_{\mathfrak{c}(Q)}(D) = Q^aP$ 與 AS 交於 BC 上。所以由對稱性，S 為 $\mathfrak{p}_{\mathfrak{c}(Q)}(P)$ 關於 $\triangle$ 的三線性極點。 ■

Corollary 12.3.24. 對於任意兩點 S, Q，

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{c}(Q)}(\mathfrak{t}(S)) = S/Q.$$

Corollary 12.3.25. 如果 $\mathcal{C}$ 為直線 $\ell = \mathfrak{t}(U)$ 在等共軛變換 φ 下的像，那麼

$$\begin{aligned}\mathfrak{t}(\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P)) &= \varphi\big(U \times (U \div \varphi(P))^{\mathsf{C}}\big),\\ \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{t}(P)) &= \varphi\big(U \div (\varphi(P) \div U)^{\text{Ɔ}}\big).\end{aligned}$$

Proof. 令 $Q = \varphi(U) = \varphi \div U$。我們有

$$\mathfrak{t}(\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P)) = Q \div (P \div Q)^{\mathsf{C}} = \varphi \div U \div (U \div \varphi(P))^{\mathsf{C}} = \varphi\big(U \times (U \div \varphi(P))^{\mathsf{C}}\big).$$

而第二條（即西瓦商）就只是把第一條反過來寫。 ∎

Theorem 12.3.26. 對於任意兩點 P, Q，

$$(P \pitchfork Q) \div \mathfrak{t}(PQ) = ((P \star Q) \div \mathfrak{t}(PQ))^{\mathsf{C}}.$$

Proof. 令 $R = P \pitchfork Q$, $S = P \star Q$, $U = \mathfrak{t}(PQ)$, $\varphi = P \times Q = R \times S$。那麼 $\mathcal{C} := \varphi(PQ) = (ABCPQ)$ 及 (12.3.25) 告訴我們

$$\begin{aligned}R &= \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{t}(U)) = \varphi\big(U \div (\varphi(U) \div U)^{\text{Ɔ}}\big) = (\varphi \div U) \times (\varphi \div U^2)^{\text{Ɔ}},\\ S &= \varphi \div R = U \div (\varphi \div U^2)^{\text{Ɔ}}.\end{aligned}$$

所以如果令 $r = \varphi \div U^2$，我們有

$$R \div U = r \times r^{\text{Ɔ}} = r^{\text{Ɔ}} \times r^{\text{Ɔ}\mathsf{C}} = \left(\left(r^{\text{Ɔ}}\right)^{-1}\right)^{\mathsf{C}} = (S \div U)^{\mathsf{C}}.$$ ∎

特別地，如果我們取 $P = \infty_i, Q = \infty_{-i}$，那麼 $P \pitchfork Q$ 為 O，$P \star Q$ 為 H，$\mathfrak{t}(PQ) = G$，因此這個定理給我們歐拉線性質：$O = H^{\mathsf{C}}$。

Corollary 12.3.27. 對於直線 ℓ 及外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$，若 $U = \mathfrak{t}(\ell)$, $R = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\ell)$，那麼

$$(R \div U) \times (R \div U)^{\text{Ɔ}} = \ell \times \mathcal{C} \div U^2.$$

Proof. 單純地令 $\{P, Q\} = \ell \cap \mathcal{C}$。 ∎

Proposition 12.3.28. 兩點 P, Q 的三線性極線的交點

$$T = \mathfrak{t}(P) \cap \mathfrak{t}(Q) = P \times (P \div Q)^{\mathtt{D}} = Q \times (Q \div P)^{\mathtt{D}}.$$

Proof. 由 (12.3.24) 及 (12.3.14)，我們有

$$\mathfrak{t}(P) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{c}(Q)}(P/Q) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{c}(Q)}(Q \times (Q \div P)^{\mathtt{Ↄ}}),$$

因此

$$\mathfrak{t}(P) \cap \mathfrak{t}(Q) = Q \times (Q \div P)^{\mathtt{ↃD}} = Q \times (Q \div P)^{\mathtt{D}}. \qquad \blacksquare$$

Proposition 12.3.29. 兩點 P, Q 連線的三線性極點

$$U = \mathfrak{t}(PQ) = Q \div (P \div Q)^{\mathtt{D}} = P \div (Q \div P)^{\mathtt{D}}.$$

特別地，三點 P, Q, R 共線若且唯若

$$(Q \div P)^{\mathtt{D}} = (R \div P)^{\mathtt{D}}.$$

Proof. 由 (12.3.23) 及 (12.3.12)，我們有

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}(PQ) &= \mathfrak{t}(\mathfrak{p}_{\mathfrak{c}(Q)}((P \div Q)^{\mathtt{D}} \times Q)) = ((P \div Q)^{\mathtt{D}} \times Q) \star Q \\ &= Q \div (P \div Q)^{\mathtt{DC}} = Q \div (P \div Q)^{\mathtt{D}}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Corollary 12.3.30. 令 $T = \mathfrak{t}(P) \cap \mathfrak{t}(Q)$, $U = \mathfrak{t}(PQ)$。那麼 $P \times Q = T \times U$。

當 P, Q 為兩個無窮虛圓點 $\infty_{\pm i}$ 時，

$$\begin{aligned} T &= \mathfrak{t}(P) \cap \mathfrak{t}(Q) = \mathfrak{c}(\triangle \infty_i \infty_{-i}) = K, \\ U &= \mathfrak{t}(PQ) = \mathfrak{t}(\mathcal{L}_\infty) = G, \end{aligned}$$

其中 K, G 分別為共軛重心及重心。這也驗證了 K 為 G 的等角共軛點。

注意到我們也可以類似地定義兩條線 p 與 q 關於 $\triangle$ 的交叉線、西瓦積：即 $p \cap q$ 關於與 $\triangle, p, q$ 皆相切的圓錐曲線 $(\triangle pq)$ 的極線 $p \pitchfork q$ 及 $p \cap q$ 關於切 p, q 的對角圓錐曲線 $\mathcal{D}_{p,q}$ 的極線 $p \star q$。

Proposition 12.3.31. 令 p, q, r, s 分別為 P, Q, R, S 關於 $\triangle$ 的三線性極線。那麼

(i) $R = P \pitchfork Q$ 若且唯若 $r = p \star q$；

(ii) $S = P \star Q$ 若且唯若 $s = p \pitchfork q$。

Proof. (i) 令 $\varphi = \mathfrak{t}(P^2) \cap \mathfrak{t}(Q^2) = \mathfrak{c}(\triangle P^2 Q^2)$ 使得 p, q 與 $\mathcal{D}_{p,q} = \sqrt{\mathfrak{t}(\varphi)}$ 相切。那麼

$$\mathfrak{t}(p \star q) = \mathfrak{t}(\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(p \cap q)) = \varphi(p \cap q).$$

因為 $\varphi = P^2 \times (P^2 \div Q^2)^{\mathsf{D}}$，$p \cap q = P \times (P \div Q)^{\mathsf{D}}$，所以

$$\varphi(p \cap q) = P \times (P \div Q)^{\mathsf{C}} = R.$$

(ii) 就只是把 (i) 的命題整個對偶。 ■

T 跟 U 的直線版本當然是顯然的：

$$\begin{aligned} T = \mathfrak{t}(P) \cap \mathfrak{t}(Q) \quad &\Longleftrightarrow \quad t = \mathfrak{t}(p \cap q), \\ U = \mathfrak{t}(PQ) \quad &\Longleftrightarrow \quad u = \mathfrak{t}(p)\mathfrak{t}(q). \end{aligned}$$

考慮以 A, B, C, S 作為不動點的（關於 S 的西瓦三角形的）點等共軛變換 φ。那麼 $(-)^{\mathsf{Ↄ}_S} \circ \varphi \circ (-)^{\mathsf{C}_S}$ 就會是 $\triangle$ 上的點等共軛變換 S^2。因此對於任意一點 Q，

$$\begin{aligned} Q^{\varphi} &= (S^2 \div Q^{\mathsf{Ↄ}_S})^{\mathsf{C}_S} = S \times (((Q \div S)^{\mathsf{Ↄ}})^{-1})^{\mathsf{C}} \\ &= S \times (Q \div S)^{\mathsf{Ↄ}} \times (Q \div S) = Q \times (Q \div P)^{\mathsf{Ↄ}} = S/Q, \end{aligned}$$

或者說：

Proposition 12.3.32. 兩點 P, Q 是關於以 $\triangle \cup S$ 為不動點的點等共軛變換的等共軛對若且唯若 $S = P \star Q$。

對偶地，考慮以 BC, CA, AB, r 作為不動線的（關於 r 的西瓦三角形的）線等共軛變換 φ。(12.3.32) 的對偶命題告訴我們兩線 p, q 是關於 φ 的等共軛對若且唯若 $r = p \star q$。結合 (12.3.31)，我們得到：

Proposition 12.3.33. 兩線 $\mathfrak{t}(P)$, $\mathfrak{t}(Q)$ 是關於以 $\triangle \cup \mathfrak{t}(R)$ 為不動點的點等共軛變換的等共軛對若且唯若 $R = P \pitchfork Q$。

Example 12.3.34. 考慮完全四線形 $\triangle \cup \mathfrak{t}(R)$ 的牛頓線 τ。我們知道 τ 其實就是無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 在 $\triangle \cup \mathfrak{t}(R)$ 所定義的線等共軛變換下的像。因此

$$\tau = \mathfrak{t}(R \uplus \mathfrak{t}(\mathcal{L}_\infty)) = \mathfrak{t}(R \uplus G),$$

其中 G 為 $\triangle$ 的重心。

12.3.1 張志煥截線

Theorem 12.3.35. 對於任意點 P，外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 及其上一點 X，

$$\mathbf{Per}_P^{\mathcal{C}}(X) = P \times X \div \mathcal{C} = \mathfrak{t}(P \times X \div \mathfrak{c}(\mathcal{C})).$$

Proof. 令 P_A 為 AP 與 $\mathcal{C}$ 的第二個交點，X_A 為 XP_A 與 BC 的交點。我們只須證明 X_A 位於 $P \times X \div \mathcal{C}$ 上，即 AX_A 在變換 $\varphi = \varphi^{P \times X}$ 下的像與 $\mathcal{C}$ 相切於 A。而這只是因為

$$\begin{aligned}(AB, AC; \mathbf{T}_A\mathcal{C}, AX) &= P_A(B, C; A, X) = (B, C; AP \cap BC, X_A) \\ &= A(B, C; P, X_A) = (AC, AB; AX, \varphi(AX_A)) \\ &= (AB, AC; \varphi(AX_A), AX).\end{aligned}$$ ∎

注意到這個 $P \times X \div \mathcal{C}$ 關於 P, X 是對稱的，所以如果我們不限制 X 位於 $\mathcal{C}$ 上這個條件的話，我們其實有 $\mathbf{Per}_P^{\mathcal{C}}(X) = \mathbf{Per}_X^{\mathcal{C}}(P)$，故我們將其記為一個看起來比較對稱的形式 $\mathbf{Per}^{\mathcal{C}}(P, X)$。

Example 12.3.36. 對於外接圓 Ω 上一點 X，X 關於 $\triangle$ 的正交截線

$$\mathcal{O}(X) = \mathbf{Per}^{\Omega}(O, X) = \mathfrak{t}(O \times X \div K),$$

X 關於 $\triangle$ 的施坦納線

$$\mathcal{S}_X = \mathbf{Per}^{\Omega}(H, X) = \mathfrak{t}(H \times X \div K).$$

因為

$$\begin{aligned}\mathbf{Li}^{\mathcal{C}}_{P,Q}(X) &= \mathbf{Per}^{\mathcal{C}}(P,X)\cap\mathbf{Per}^{\mathcal{C}}(Q,X)\\ &= \mathfrak{t}(P\times X\div\mathfrak{c}(\mathcal{C}))\cap\mathfrak{t}(Q\times X\div\mathfrak{c}(\mathcal{C}))\\ &= (\mathfrak{t}(P)\cap\mathfrak{t}(Q))\times X\div\mathfrak{c}(\mathcal{C}) = \mathfrak{c}(ABCPQ)\times X\div\mathfrak{c}(\mathcal{C}),\end{aligned}$$

所以我們得到：

Theorem 12.3.37. 對於任意三點 X, Y, Z，$\mathbf{Li}^{\mathfrak{c}(Y)}_{\mathfrak{c}(Z)}(X) = Z\times X\div Y$。

Example 12.3.38. 我們證明 (12.2.5)：如果令 T 為 $\mathfrak{c}(Y)$ 與 $\mathfrak{c}(Z)$ 的第四個交點，那麼 $T, X, \mathbf{Li}^{\mathfrak{c}(Y)}_{\mathfrak{c}(Z)}(X)$ 共線。

因為 $T = \mathfrak{c}(Y)\cap\mathfrak{c}(Z) = t(YZ) = Y\div(Z\div Y)^{\mathsf{D}}$，所以 $T, X, \mathbf{Li}^{\mathfrak{c}(Y)}_{\mathfrak{c}(Z)}(X) = Z\times X\div Y$ 共線若且唯若 $Y\div X, (Z\div Y)^{\mathsf{D}}, (Z\div Y)\times(Z\div Y)^{\mathsf{D}} = (Y\div Z)^{\mathsf{D}}$ 共線。而這是因為後兩者都位於 $\mathfrak{t}(\mathbf{1})$ 上，第一個也位於 $\mathfrak{t}(X)\div X = \mathfrak{t}(\mathbf{1})$ 上。

12.3.2 根號變換與平方變換

在解析的途中，有時候我們會發現解析的每一項都是由 a^2, b^2, c^2 所組成的。那如果把這三個數寫成新的變數 u, v, w，那麼我們是不是就可以把整個命題換成是關於邊長為 u, v, w 的三角形來處理呢？這時候共線、共外接圓錐曲線、比例等性質都會被保持。

那應該要怎麼在純幾的架構下來看這件事呢？事實上就是換了一套幾何：我們定義兩個新的無窮虛圓點 $\infty^{\mathsf{s}}_{\pm i}$ 為 $\mathfrak{c}(K^2\div G)$ 與 $\mathcal{L}_\infty$ 的兩個交點，這邊 K 為 $\triangle ABC$ 的共軛重心。這麼一來無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 在新的幾何下會被保持，而

$$K^2\div G = \mathfrak{c}(\triangle\infty^{\mathsf{s}}_i\infty^{\mathsf{s}}_{-i})$$

在新的幾何下則被理解為共軛重心 $K = \mathfrak{c}(\triangle\infty_i\infty_{-i})$。因為 $(K^2\div G)\times G = K^2$，所以說原本的共軛重心 K 在新的幾何下就是等角共軛變換 $K\times G$ 的不動點，即內心 I 或三個旁心 I^a, I^b, I^c。

這成功地讓我們把 a^2, b^2, c^2 開根號。另外，這邊需要注意一點，就是原本的點並沒有移動，動的是幾何。我們把這個變換記為 $(-)^{\mathsf{r}}$，稱為**根號變換**。

由定義，$(\infty_{\pm i}^{\mathsf{s}})^{\mathsf{r}} = \infty_{\pm i}$。

Example 12.3.39. 因為 $G^{\mathsf{r}} = \mathfrak{t}(\mathcal{L}_\infty) = G$，$K^{\mathsf{r}} = I$，所以奈格爾點 $Na = I^{\reflectbox{$\mathsf{C}$}} = (K^{\reflectbox{$\mathsf{C}$}})^{\mathsf{r}} = (H')^{\mathsf{r}}$，其中 H' 是垂心 H 的等截共軛點。因此 $H^{\mathsf{r}} = (G^2 \div H')^{\mathsf{r}} = G^2 \div Na$ 為熱爾岡點 Ge。而 $O^{\mathsf{r}} = Ge^{\mathsf{C}} = Mt$。這給了我們下列表格：

P	G	O	H	K	H'
P^{r}	G	Mt	Ge	I	Na

反過來說，我們也可以把所有的 a, b, c 變成是 u^2, v^2, w^2，純幾下就是定義兩個新的無窮虛圓點 $\infty_{\pm i}^{\mathsf{r}}$ 為 $\mathfrak{c}(I)$ 與 $\mathcal{L}_\infty$ 的兩個交點，並得到一個新的幾何。我們把這個變換記為 $(-)^{\mathsf{s}}$，稱為**平方變換**。當然，s 與 r 互為反變換是需要證明的，不過這就留給讀者。

更一般地來說，如果我們想要令 $u = u(a, b, c)$, $v = v(a, b, c)$, $w = w(a, b, c)$，那麼就是定義 $\infty_{\pm i}^{\text{new}}$ 為 $\mathfrak{c}(P)$ 與 $\mathcal{L}_\infty$ 的兩個交點，其中 $P = [u(a, b, c)^2 : v(a, b, c)^2 : w(a, b, c)^2]$。

Chapter 13

X_n

這章主要來詳細介紹 $1 \leq n \leq 100$ 的所有 X_n。讓我們回憶一下：

- X_1 為內心 I，定義為三條內角平分線的交點；
- X_2 為重心 G，定義為三條中線的交點；
- X_3 為外心 O，定義為三條中垂線的交點；
- X_4 為垂心 H，定義為三條垂線的交點；
- X_5 為九點圓 ε 的圓心 N；
- X_6 為共軛重心 K，定義為重心 G 的等角共軛點。
- X_7 為熱爾岡點 Ge，定義為參考三角形與切點三角形的透視中心；
- X_8 為奈格爾點 Na，定義為參考三角形與旁切點三角形的透視中心；
- X_9 為 Mittenpunkt 點 Mt，定義為旁心三角形與中點三角形的透視中心；
- X_{10} 為 Spieker center Sp，定義 I 的補點；
- X_{11} 為費爾巴哈點 Fe，定義為內切圓 ω 與九點圓 ε 的切點；
- X_{13} 為第一等角點 F_1，為滿足

$$\measuredangle BF_1C = \measuredangle CF_1A = \measuredangle AF_1B = 120^\circ$$

的點；

- X_{14} 為第二等角點 F_2，為滿足

$$\measuredangle BF_2C = \measuredangle CF_2A = \measuredangle AF_2B = 60^\circ$$

的點；

- X_{15} 為第一等力點 S_1，定義為 F_1 的等角共軛點；
- X_{16} 為第一等力點 S_2，定義為 F_2 的等角共軛點；
- X_{19} 為 Clawson 點 $C\ell$，定義為旁切線三角形與垂足三角形的位似中心；
- X_{20} 為 de Longchamps 點 L，定義為 H 關於 O 的對稱點；
- X_{21} 為西弗點 Sc，定義為四個三角形 $\triangle ABC, \triangle IBC, \triangle AIC, \triangle ABI$ 的歐拉線所共的點；
- X_{25} 為切線三角形與垂足三角形的位似中心；
- X_{33} 為內切線三角形與垂足三角形的位似中心；
- X_{40} 為 Bevan 點 Be，定義為 I 關於 O 的對稱點；
- X_{54} 為 Kosnita 點 Ko，定義為 N 的等角共軛點；
- X_{55} 為 Ω 與 ω 的內位似中心 Ge^*；
- X_{56} 為 Ω 與 ω 的外位似中心 Na^*；
- X_{65} 為切點三角形的垂心 Sc^*；
- X_{69} 為 H 的等截共軛點 H'；
- X_{104} 為 ∞_{OI} 的等角共軛點 ∞_{OI}^*。

另外，我們約定一些記號：$\triangle_P = \triangle P_aP_bP_c$ 代表 P 的西瓦三角形，$\triangle^P = \triangle P^aP^bP^c$ 代表 P 的反西瓦三角形，X_{nP}, X_n^P 分別代表 $\triangle_P, \triangle^P$ 的 X_n。比方說，O_H 代表垂足三角形 $\triangle_H = \triangle H_aH_bH_c$ 的外心，即 N。對於 $\triangle_H$，我們總是選取其 X_1，即 I_H，為 H，同理對於 $\triangle^K$，$I^K = O$。

這邊先提一個常用的定理：

Theorem 13.0.1. 對於 $17 \le n \le 53$，(X_n, X_{n+44}) 為等角共軛點對。

舉例來說，我們有：

Proposition 13.0.2. 點 X_{25} 的等角共軛點為 H'。

Proof. 由定義

$$X_{25} = H/K = K \times (K \div H)^{\text{ɔ}} = K \times (O \div G)^{\text{ɔ}} = K \times H \div G.$$

因此 $G \times K \div X_{25} = G^2 \div H = H'$。 ■

因此我們便以 $(H')^*$ 來記 X_{25}。

13.1 與 X_1 的選取有關的點

如果我們定義內心 $I = X_1$ 是等角共軛變換 $\infty_i \times \infty_{-i}$ 的不動點，那麼其實 I 有四個選擇（另外三個分別是三個旁心）。因此有些點就與這個選取有關，比方說費爾巴哈點 $Fe = X_{11}$ 就與 I 有關，但重心 $G = X_2$ 就與 I 無關。

Proposition 13.1.1. 三點 I, O, K 共對角圓錐曲線。這個對角圓錐曲線被稱作 $\triangle ABC$ 的 Stammler 雙曲線，記為 $\mathcal{D}_S$。

Proof. 考慮過 O, K 的對角圓錐曲線 $\mathcal{D}$，我們只需說明 $\mathcal{D}$ 是等軸雙曲線即可。因為 O, K 分別是 K 的反西瓦三角形 $\triangle^K$，即切線三角形 $\mathbf{T}_\triangle\Omega = \triangle(\mathbf{T}_A\Omega)(\mathbf{T}_B\Omega)(\mathbf{T}_C\Omega)$ 的內心（或旁心）及熱爾岡點（或其對應的旁熱爾岡點），所以 $\mathcal{D}$ 是切線三角形的費爾巴哈雙曲線，因此為等軸雙曲線。 ■

因為 $\mathbf{T}_\triangle\Omega$ 的外心與 O 的連線為 $\triangle$ 的歐拉線 $\mathcal{E}$，因此：

Corollary 13.1.2. 歐拉線 $\mathcal{E}$ 為 O 關於 $\mathcal{D}_S$ 的切線。

Lemma 13.1.3. 對於任意一點 P，

- I 與 P 的交叉點 $I \pitchfork P$ 及 I 與 P^* 的西瓦積 $I \star P^*$ 為等角共軛點對；
- P 與 I 的交叉商 $P \psi I$ 及 P^* 與 I 的西瓦商 P^*/I 為等角共軛點對。

Proof. 因為 $I \div P = P^* \div I$, $P \div I = I \div P^*$，所以

$$(I \pitchfork P) \times (I \star P^*) = (I \times (I \div P)^{\complement}) \times (I \div (P^* \div I)^{\complement}) = I^2$$
$$(P \Psi I) \times (P^*/I) = (I \div (P \div I)^{\mho}) \times (I \times (I \div P^*)^{\mho}) = I^2. \qquad \blacksquare$$

當然，把 I 換成任意等共軛變換 φ 的不動點，P^* 換成 P^φ，上述命題及證明也是成立的。

13.1.1 在 OI 上的點或在費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上的點

當 $n = 1, 35, 36, 40, 46, 55, 56, 57, 65$ 時，$X_n \in OI$ 且與 X_1 的選取有關。

當 $n = 1, 7, 8, 9, 21, 79, 80, 84, 90$ 時，$X_n \in \mathcal{H}_{Fe}$ 且與 X_1 的選取有關。

這些點當中，已經介紹過的有 $n = 1, 3, 4, 7, 8, 9, 21, 40, 55, 56, 65$。

Proposition 13.1.4. 四邊形 $(IMt)(NaSc)$ 是 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上的調和四邊形。

Proof. 這只是因為（由 (5.6.8)）

$$(I, Mt; Na, Sc)_{\mathcal{H}_{Fe}} = H(I, Mt; Na, Sc) = (I, Be; \infty_{OI}, O) = -1. \qquad \blacksquare$$

Proposition 13.1.5. 在重心座標積下，$I \times Na = G \times Mt = Sp \times Sc$。因此 $I \times Sp = Na \times Sc^*$。

Proof. $I \times Na = G \times Mt$ 在平方變換下等價於 $K \times H' = G \times O$，而這顯然是對的。在等共軛變換 $I \times Na$ 下，

$$(Na, I \times Na \div Sp; Mt, I) = (I, Sp; G, Na) = -1 = (Na, Sc; Mt, I),$$

因此 $I \times Na = Sp \times Sc$。 $\blacksquare$

透過 (5.6.5)，我們得到：

Proposition 13.1.6. 西弗點 Sc 其實就是西瓦積 $I \star O$。

X_{57}, X_{84}

- X_{57} 為 $Mt = X_9$ 的等角共軛點 Mt^*；
- X_{84} 為 $Be = X_{40}$ 的等角共軛點 Be^*。

Proposition 13.1.7. 點 Mt 位於 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上，且

$$(I, Mt; Na, Sc)_{\mathcal{H}_{Fe}} = -1,$$

因此 Mt^* 位於 OI 上滿足 $(I, Mt^*; Na^*, Sc^*) = -1$。

Proof. 由 (5.4.5)，如果我們令 H_A 為 $\triangle BIC$ 的垂心，N_a 為 AI 與 Ω 的第二個交點，那麼

$$H_A(I, Mt; Na, Sc) = (I, I^a; \infty_{AI}, N_a) = -1.$$

而這對於 A, B, C 是對稱的。因此 $Mt \in (INaScH_AH_BH_C) = \mathcal{H}_{Fe}$。 ■

由 Mt 的定義，我們知道它其實就是西瓦商 G/I，即

$$I \times (I \div G)^{\complement} = I \times Na \div G = I \times G \div Ge.$$

因此

$$Mt^* = I \times Ge \div G = I \times (Mt \div G)^{\complement} = I \times (I \div Ge)^{\complement} = Ge/I,$$

所以我們有：

Proposition 13.1.8. 點 Mt^* 為切點三角形 $\triangle DEF$ 與旁心三角形 $\triangle I^aI^bI^c$ 的透視中心。

Corollary 13.1.9. 四點 G, Ge, Mt, Mt^* 共線。

Proof. 我們本來就知道 G, Ge, Mt 共線 (5.4.1)，而 Ge, Mt, Mt^* 共線是因為 Ge, Mt 分別為 $\triangle DEF$, $\triangle I^aI^bI^c$ 的共軛重心 (5.4.3)。 ■

Proposition 13.1.10. 我們有 $Be = OMt^* \cap HMt$, $Be^* = OMt \cap HMt^*$。

Proof. 由 (7.4.5)，我們只需證明 $Be = OMt^* \cap HMt$，而 $Be \in OMt^*$ 只是 (13.1.7)，$Be \in HMt$ 只是 (5.6.8)。 ■

X_{35}，X_{36}，X_{79}，X_{80}

- X_{36} 為 I 關於外接圓 Ω 的反演點 $I^{\Im}$；
- X_{35} 為 $I^{\Im}$ 關於 $\overline{OI}$ 的調和共軛點。
- X_{79} 為 X_{35} 的等角共軛點；
- X_{80} 為 X_{36} 的等角共軛點。

這四個點最有名的應該是 X_{80}，因為由 (8.1.19)，我們有：

Proposition 13.1.11. 點 X_{80} 為 I 的反角共軛。因此我們就記 X_{80} 為 $\widehat{I}$。

Corollary 13.1.12. 我們有 $I, N, Fe, Fe^{\vee}, \hat{I}$ 共線。

而我們對 X_{36} 的第一個認識應該是 (5.5.6)，它會告訴我們：

Proposition 13.1.13. 三線 $Fe^{\vee}X_{35}$, $FeI^{\Im}$, IX_{79} 皆平行於歐拉線 $\mathcal{E}$，或者說，皆過 $\infty_{\mathcal{E}} = X_{30}$。

Proof. 我們已經有 $Fe, \infty_{\mathcal{E}}, I^{\Im}$ 共線了，因此

$$\infty_{\mathcal{E}}(Fe, Fe^{\vee}; I, N) = -1 = \infty_{\mathcal{E}}(I^{\Im}, X_{35}; I, O)$$

告訴我們 $Fe^{\vee} = X_{12}, \infty_{\mathcal{E}}, X_{35}$ 也共線。

最後，由 (13.1.11), (13.1.12) 及

$$\begin{aligned} I(O, H; X_{79}, \widehat{I}) &= (I, H; X_{79}, \widehat{I})_{\mathcal{H}_{Fe}} \\ &= (I, O; X_{35}, I^{\Im}) = -1 = (H, O; \infty_{\mathcal{E}}, N), \end{aligned}$$

我們便有 $I, \infty_{\mathcal{E}}, X_{79}$ 共線。 ■

Proposition 13.1.14. 我們有

$$(I, X_{35}; O, Ge^*) = (I, I^{\Im}; O, Na^*) = -1.$$

Proof. 因為 $(I, O; X_{35}, I^{\Im}) = (I, O; Ge^*, Na^*) = -1$，所以我們只需證明後者，即 $(I, I^{\Im}; O, Na^*) = -1$。但這等價於 $(I, \widehat{I}; H, Na) = -1$，而這是因為 $I, \widehat{I}$ 關於 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的切線都平行於 $OI \parallel HNa$。 ■

Proposition 13.1.15. 西弗點 $Sc = X_{21}$ 為 $X_{35}\widehat{I}$ 與 $I^{\Im}X_{79}$ 的交點，其等角共軛點 $Sc^* = X_{65}$ 為 $OI = X_{35}I^{\Im}$ 與 $X_{79}\widehat{I}$ 的交點。

Proof. 因為

$$(I, H; X_{79}, \widehat{I})_{\mathcal{H}_{Fe}} = (I, O; X_{35}, I^{\Im}) = -1,$$

所以 $X_{79}\widehat{I}$ 過 IH 關於 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的極點，即 Sc^*，而我們本來就知道 $Sc^* \in OI$。 ■

Proposition 13.1.16. 四點 Sp, Sc, X_{35}, $\widehat{I}$ 共線。

Proof. 我們證明 Sp, Sc, X_{35} 共線：由 (13.1.14)，

$$Sc(I, Sp; G, Na) = -1 = Sc(I, X_{35}; O, Ge^*),$$

因此我們只需要 Na, Sc, Ge^* 共線，即 (5.6.19)。 ■

Proposition 13.1.17. 三點 $I^{\Im}$, $\widehat{I}$, ∞^*_{OI} 共線。

Proof. 因為 $(I\widehat{I})(HNa)$ 為 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上的調和四邊形，因此由 (13.1.14) 及 (8.2.18) 我們有

$$\infty^*_{OI}(I, \widehat{I}; H, Na) = -1 = (I, I^{\Im}; Na^*, O) = \infty^*_{OI}(I, I^{\Im}; H, Na),$$

即 $I^{\Im}$, $\widehat{I}$, ∞^*_{OI} 共線。 ■

X_{46}，X_{90}

- X_{46} 為 H 關於 I 的西瓦商 H/I；
- X_{90} 為 H/I 的等角共軛點。

因為 X_{46} 關於過它與 I 的對角圓錐曲線的切線會過 $X_{90} = X^*_{46}$ 與 H，因此有：

Proposition 13.1.18. 三點 H, X_{46}, X_{90} 共線。

由於

$$H/I = I \times (I \div H)^{\mathfrak{I}} = I \times (O \div I)^{\mathfrak{I}},$$

我們得到：

Proposition 13.1.19. 點 X_{46} 是 O 的 I-反補點。特別地，X_{46} 位於 OI 上。

另一方面，我們其實有：

Proposition 13.1.20. 點 Sc^* 是 O 的 I-補點。

Proof. 因為 Sc^* 是 I 與 H 的交叉點，所以

$$Sc^* = I \times (I \div H)^{\complement} = I \times (O \div I)^{\complement}. \qquad \blacksquare$$

當然，這也可以從 (13.1.6) 得到。因此我們有：

Proposition 13.1.21. 兩點 I, O 調和分割 X_{46}, Sc^*，故

$$(I, H; X_{90}, Sc)_{\mathcal{H}_{Fe}} = -1.$$

由 (13.1.3)，我們有 $X_{90} = H^* \Psi I = O \Psi I$，即 O 關於 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的極線為 IX_{90}。

Proposition 13.1.22. 我們有 $X_{46} = I^{\mathfrak{I}}Be \cap \widehat{I}Be^*$, $X_{90} = I^{\mathfrak{I}}Be^* \cap \widehat{I}Be$。

Proof. 由 (7.4.5)，我們只需證明 $Be = I^{\mathfrak{I}}X_{46} \cap \widehat{I}X_{90}$。顯然地，$Be \in OI = I^{\mathfrak{I}}X_{46}$。

因為 X_{90} 關於 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的切線過 O，所以

$$\widehat{I}(I, X_{90}; \infty_{\mathcal{E}}, O) = (I, X_{90}; \widehat{I}, \widehat{I}O \cap \mathcal{H}_{Fe})_{\mathcal{H}_{Fe}} = -1,$$

故 $\widehat{I}X_{90}$ 過 Be。 $\blacksquare$

Proposition 13.1.23. 我們有 $X_{46} = MtX_{79} \cap Mt^*X_{35}$, $X_{90} = MtX_{35} \cap Mt^*X_{79}$。

Proof. 由 (7.4.5)，我們只需證明 $X_{35} = MtX_{90} \cap Mt^*X_{46}$。顯然地，$X_{35} \in OI = Mt^*X_{46}$。

由 (13.1.10)，O, Mt, Be^* 共線，因此

$$(I, X_{90}; Mt, Be^*)_{\mathcal{H}_{Fe}} = -1.$$

結合 (13.1.22)，這告訴我們

$$X_{90}(I, O; Mt, I^{\mathfrak{I}}) = (I, X_{90}; Mt, Be^*)_{\mathcal{H}_{Fe}} = -1,$$

即 Mt, X_{35}, X_{90} 共線。 ■

13.1.2 在 IG 或 $(IG)^*$ 上的點

當 $n = 1, 8, 10, 42, 43, 78$ 時，$X_n \in IG$ 且與 X_1 的選取有關。

當 $n = 1, 34, 56, 58, 86, 87$ 時，$X_n \in (IG)^*$ 且與 X_1 的選取有關。

Proposition 13.1.24. 點 $Sp = I^{\mathsf{C}}$ 位於 Kiepert 雙曲線 $\mathcal{H}_K$ 上。

Proof. 考慮過 I, G 的對角圓錐曲線 $\mathcal{D}$。因為 I^a, I^b, I^c 位於 $\mathcal{D}$ 上，所以 $\mathcal{D}$ 是等軸雙曲線，因此過 G 的反西瓦三角形 $\triangle A^{\reflectbox{C}}B^{\reflectbox{C}}C^{\reflectbox{C}}$ 的垂心 $H^{\reflectbox{$\mathsf{C}$}}$。故 $\mathcal{D}^{\mathsf{C}}$ 為過 G, H, Sp 的 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線，即 $\mathcal{H}_K$。 ■

Corollary 13.1.25. 三點 I, G, L 共對角圓錐曲線。

Proof. 因為 $Sp = I^{\mathsf{C}}$, $G = G^{\mathsf{C}}$, $H = L^{\mathsf{C}}$ 共外接圓錐曲線。 ■

- X_{58} 為 Sp 的等角共軛點 Sp^*。

因為 G, H, Sp 共外接圓錐曲線，所以我們馬上得到：

Proposition 13.1.26. 點 Sp^* 位於布洛卡軸 OK 上。

Proposition 13.1.27. 三點 I, Sc, Sp^* 共線且為 $SpSc^*$ 的反補線。

Proof. 考慮 $(\triangle ISp)$ 上的六折線 $III'Sc^*Sp(I')^{\mathsf{C}}$。由帕斯卡定理，

$$\mathbf{T}_I(\triangle ISp) \cap Sc^*Sp, \quad II' \cap Sp(I')^{\mathsf{C}}, \quad I'Sc^* \cap (I')^{\mathsf{C}}I$$

共線。而 $II' = (Sp(I')^{\complement})^{\mathsf{Ↄ}}$ 且由 (13.1.52)，$I'Sc^* = ((I')^{\complement}I)^{\mathsf{Ↄ}}$。因此 $IScSp^* = \mathbf{T}_I(\triangle ISp) \parallel Sc^*Sp$。因為 $I = Sp^{\mathsf{Ↄ}}$，所以 $IScSp^* = (SpSc^*)^{\mathsf{Ↄ}}$。 ■

- X_{42} 為 I 與 K 的交叉點 $I \pitchfork K$；
- X_{43} 為 K 與 I 的西瓦商 K/I；
- X_{86} 為 I 與 G 的西瓦積 $I \star G$；
- X_{87} 為 G 與 I 的交叉商 $G \Psi I$。

由 (13.1.3)，$(X_{42}, X_{86}), (X_{43}, X_{87})$ 皆為等角共軛點對。因為 IX_{42} 與 $(\triangle IK)$ 相切，因此 $IX_{42} = (\triangle IK)^* = IG$。因為 IX_{43} 為 K 關於 $(\triangle^I X_{43})$ 的極線，因此過 $K^* = G$。

13.1.3 在 IH 或 $(IH)^*$ 上的點

當 $n = 1, 33, 34, 73$ 時，$X_n \in IH$ 且與 X_1 的選取有關。

當 $n = 1, 29, 77, 78$ 時，$X_n \in (IH)^*$ 且與 X_1 的選取有關。

- X_{33} 為內切線三角形與垂足三角形的透視中心；
- X_{34} 為 X_{33} 關於 $\overline{IH}$ 的調和共軛點；
- X_{77} 為 X_{33} 的等角共軛點；
- X_{78} 為 X_{34} 的等角共軛點。

Proposition 13.1.28. 西瓦積 $C\ell \star X_{33}$ 就是 H。

Proof. 注意到以 A 為中心並把 I 送至 I^a 的位似變換會把 T_a 送至 T'_a 關於 I^a 的對稱點，因此

$$(AH_a, BC; H_aC\ell, H_aX_{33}) = H_a(A, AI \cap BC; T'_a, T_a) = A(H_a, I; T'_a, T_a) = -1.$$

由對稱性，我們便有 $C\ell \star X_{33} = H$。 ■

Corollary 13.1.29. 在重心座標積下，

$$
\begin{aligned}
I \times H = Ge \times X_{33} = Na \times X_{34}, \\
I \div H = X_{77} \div Ge = X_{78} \div Na.
\end{aligned}
$$

Proof. 由 (13.1.41)，$C\ell = I \times H \div G$，所以

$$
\begin{aligned}
X_{33} &= (I \times H \div G) \times (I \times H \div G \div H)^{\complement} \\
&= I \times H \div G \times (Na \div G) = I \times H \div Ge.
\end{aligned}
$$

因為 $(H, I; X_{33}, X_{34}) = -1$，所以 $I \times H \div X_{34}$ 位於 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上滿足

$$
(I, H; Ge, I \times H \div X_{34})_{\mathcal{H}_{Fe}} = -1,
$$

即 $I \times H = Na \times X_{34}$。

而第二條式子就只是把第一條式子取等角共軛變換。 ■

Proposition 13.1.30. 三點 I, Ge, X_{77} 及三點 I, Na, X_{78} 分別共線。

Proof. 因為 I, H, Ge 共外接圓錐曲線，所以取等共軛變換 $I \times Ge$ 後得到 Ge, X_{77}, I 共線。同理，因為 I, H, Na 共外接圓錐曲線，所以取等共軛變換 $I \times Na$ 後得到 Na, X_{78}, I 共線。 ■

13.1.4 在 IN 或 $(IN)^*$ 上的點

當 $n = 1, 11, 12, 80$ 時，$X_n \in IN$ 且與 X_1 的選取有關。

當 $n = 1, 36, 59, 60$ 時，$X_n \in (IN)^*$ 且與 X_1 的選取有關。

- X_{12} 為 Fe 關於 $\overline{IN}$ 的調和共軛點 $Fe^\vee$。
- X_{59} 為 Fe 的等角共軛點 Fe^*；
- X_{60} 為 $Fe^\vee$ 的等角共軛點 $Fe^{\vee *}$。

13.1.5 在 IK 或 $(IK)^*$ 上的點

當 $n = 1, 37, 45, 72$ 時，$X_n \in IK$ 且與 X_1 的選取有關。

當 $n = 1, 28, 81, 89$ 時，$X_n \in (IK)^*$ 且與 X_1 的選取有關。

- X_{37} 為 I 與 G 的交叉點 $I \pitchfork G$；
- X_{81} 為 X_{37} 的等角共軛點。

顯然地，我們有

$$I \pitchfork G = G \times (G \div I)^{\complement} = (I')^{\complement},$$

因此我們就以 $(I')^{\complement}$ 來記 X_{37}。而

$$X_{81} = I^2 \div (I \times (I \div G)^{\complement}) = I \div (K \div I)^{\complement} = I \star K.$$

Proposition 13.1.31. 點 $(I')^{\complement}$ 位於 IK 上。

Proof. 因為 IK 與 $(IK)^* = (\triangle IG)$ 相切，所以過 $I \pitchfork G = (I')^{\complement}$。 ■

因為 $r \times r^{\complement} = (r^{-1})^{\complement}$，所以：

Proposition 13.1.32. 在重心座標積下，$G \times (I')^{\complement} = I \times Sp$。

因為對於任意一點 P，我們有 $P, P', P^{\complement}, (P')^{\complement}$ 共外接圓錐曲線，所以：

Proposition 13.1.33. 四點 $I, Sp, (I')^{\complement}, I'$ 共於一外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 且

$$(I, Sp; (I')^{\complement}, Sc^*)_{\mathcal{C}} = -1.$$

因此 $I, (I')^*, Sp^*, I \star K$ 共線且

$$(I, Sp^*; I \star K, Sc) = -1.$$

Proof. 我們只需證明 $(I, Sp; (I')^{\complement}, Sc^*)_{\mathcal{C}} = -1$。取點等共軛變換 $I \times Sp$，這由 (13.1.32) 及 (13.1.5) 等價於 $(Sp, I; G, Na) = -1$，而這顯然是對的。 ■

這還有另一個看法：因為 ISp^* 與 $(\triangle ISp)$ 相切，因此由 (13.1.43)，

$$(I, Sp; (I')^{\complement}, Sc^*)_{\mathcal{C}} = I(Sp^*, Sp; (I')^{\complement}, Sc^*) = (C\ell^*, G; Mt, Mt^*) = -1.$$

Corollary 13.1.34. 點 $(I')^{\complement}$ 為 K 關於 $\overline{IMt}$ 的調和共軛點。

Proof. 這是因為

$$(I, Mt; (I')^{\complement}, K) = C\ell(I, Sp; (I')^{\complement}, Mt^*) = -1. \qquad \blacksquare$$

Corollary 13.1.35. 三點 $C\ell$, $(H')^*$, $(I')^{\complement}$ 共線。

Proof. 因為

$$C\ell(I, Sp; (I')^{\complement}, Mt^*) = -1 = (I, Be; Ge^*, Mt^*) = C\ell(I, Sp; Ge^*, Mt^*),$$

所以 $C\ell$, $(H')^*$, $(I')^{\complement}$ 共線。 $\blacksquare$

13.1.6 在歐拉線 $\mathcal{E}$ 或 Jerabek 雙曲線 $\mathcal{H}_J$ 上的點

當 $n = 21, 27, 28, 29$ 時，$X_n \in \mathcal{E}$ 且與 X_1 的選取有關。

當 $n = 65, 71, 72, 73$ 時，$X_n \in \mathcal{H}_J$ 且與 X_1 的選取有關。

- X_{27} 為 H 與 $C\ell$ 的西瓦積 $H \star C\ell$；
- X_{28} 為 $C\ell$ 與 $(H')^*$ 的西瓦積 $C\ell \star (H')^*$；
- X_{29} 為 I 與 H 的西瓦積 $I \star H$。

我們先證明這三個點都位於 $\mathcal{E}$ 上：由 (13.1.41)，

$$H \star C\ell = H \div ((I \times H \div G) \div H)^{\complement} = H \div (Sp \div G) = Sp^\circ,$$

而我們知道 $\mathcal{E}^\circ = (\triangle G^\circ H^\circ) = (\triangle HG) = \mathcal{K}_K \ni Sp$。

注意到

$$\begin{aligned} C\ell \star (H')^* &= (I \times H \div G) \div ((H \times K \div G) \div (I \times H \div G))^{\complement} \\ &= I \times H \div G \div (I \div G)^{\complement} = I \times H \div Sp. \end{aligned}$$

因此 $C\ell \star (H')^* \in \mathcal{E}$ 若且唯若 $Sp \in I \times H \div \mathcal{E} = (\triangle IC\ell)$，而這只是因為 I, Sp^*, $C\ell^*$ 共線。

最後，因為 H 關於過 I, H 的對角圓錐曲線 $\mathcal{D}$ 的極線 $\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}(H)$ 會經過 H 的等角共軛點 O 以及 $I \star H$，因此 $I \star H \in \mathcal{E}$。

Proposition 13.1.36. 點 X_{73} 位於 IH 上。

Proof. 因為 $X_{73} = I \pitchfork O$，所以 I 關於 $(\triangle IO)$ 的切線 $(\triangle IO)^* = IH$ 過 X_{73}。 ■

考慮保交比變換 $\varphi\colon \mathcal{E} \to OI,\ P \mapsto X_{73}P^* \cap OI$。我們有 $O^\varphi = I,\ H^\varphi = O,$ $Sc^\varphi = Sc^*$。因此對於任意一點 $P \in \mathcal{E}$，

$$\frac{R}{2(R+r)} \cdot \frac{HP}{PO} = (O,H;Sc,P) = (I,O;Sc^*,\varphi(P)) = -\frac{r}{R+r} \cdot \frac{OP^\varphi}{P^\varphi I},$$

或者說

$$\frac{OP^\varphi}{P^\varphi I} = -\frac{R}{2r} \cdot \frac{HP}{PO}$$

如果取 $P = N$，我們就有

$$\frac{ON^\varphi}{N^\varphi I} = -\frac{R}{2r} \quad \Longrightarrow \quad N^\varphi = I^{\mathfrak{I}}.$$

如果取 $P = \infty_{\mathcal{E}}$，我們就有

$$\frac{O\infty_{\mathcal{E}}^\varphi}{\infty_{\mathcal{E}}^\varphi I} = \frac{R}{2r} \quad \Longrightarrow \quad \infty_{\mathcal{E}}^\varphi = X_{35}.$$

如果取 $P = G$，我們就有

$$\frac{OG^\varphi}{G^\varphi I} = \frac{R}{r} \quad \Longrightarrow \quad G^\varphi = Na^*.$$

如果取 $P = L$，我們就有

$$\frac{OL^\varphi}{L^\varphi I} = -\frac{R}{r} \quad \Longrightarrow \quad L^\varphi = Ge^*.$$

把這些結果整理起來，便得到：

Proposition 13.1.37. 我們有 $X_{73} = IH \cap I^{\mathfrak{I}}Ko \cap \infty_{\mathcal{E}}X_{35} \cap KNa^* \cap Ge^*L^*$。

Proposition 13.1.38. 三點 $X_{42} = I \pitchfork K,\ Sc^*,\ X_{73}$ 共線。

Proof. 因為 K, H, O 共外接圓錐曲線，所以 $I \div K,\ I \div H,\ I \div O$ 共線，因此 $I \pitchfork K,\ Sc^* = I \pitchfork H,\ X_{73} = I \pitchfork O$ 共線。 ■

13.1.7 其他點

上面還沒出現但是與 X_1 的選取有關的點 X_n 的 n 有 19, 27, 31, 38, 41, 44, 47, 48, 63, 75, 82, 85, 88, 91, 92, 100。

讓我們回憶一下：

- X_{19} 為 Clawson 點 $C\ell$，為旁切線三角形 $\triangle T'_aT'_bT'_c$ 與垂足三角形 $\triangle H_aH_bH_c$ 的位似中心。

Proposition 13.1.39. 四點 $K, C\ell, X_{34}, Sc^*$ 共線。

Proof. 如果令 $X = Sc^*H' \cap HMt$，那麼由 (5.8.8) 我們有

$$\begin{aligned} Sc^*(O,H;K,H') &= (O,H;K,H')_{\mathcal{H}_J} = (H,O;G,(H')^*), \\ Sc^*(O,H;Cl,H') &= (Be,H;Cl,X) = (H,Be;X,Cl) = Ge^*(H,O;X,(H')^*). \end{aligned}$$

因此 $K, C\ell, Sc^*$ 共線若且唯若 G 位於 Ge^*X 上。

由 (5.6.19), (5.6.22)，$Sc^*H' = NaGe$ 為 IMt 的補線，因此 X 為 Mt 關於 Sp 的對稱點，故 (5.6.8) 的比例關係告訴我們

$$\begin{aligned} \frac{HX}{XBe} \cdot \frac{BeGe^*}{Ge^*O} \cdot \frac{OG}{GH} &= \frac{BeMt}{MtH} \cdot \left(-\frac{2R+r}{R}\right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{2R}{2R+r} \cdot \left(-\frac{2R+r}{R}\right) \cdot \frac{1}{2} = -1, \end{aligned}$$

即 X, Ge^*, G 共線。

由 (5.6.18)，

$$C\ell(I,H;X_{33},X_{34}) = -1 = C\ell(I,Be;Ge^*,Sc^*),$$

所以 $C\ell, X_{34}, Sc^*$ 共線。 ■

Proposition 13.1.40. 五點 $K, Mt, C\ell, Ge^*, Mt^*$ 共外接圓錐曲線且其上的四邊形 $(KC\ell)(MtMt^*)$ 為調和四邊形。

Proof. 注意到 GGe 在等截共軛變換 G^2 下的像為 $(\triangle GNa)$，因此 $GGe = GGeMtMt^*$ 與 $(\triangle GNa)$ 相切。把這件事作等角共軛變換就會得到 $\mathcal{C} =$

$(\triangle KGe^*)$ 與 KNa^* 相切。所以要證明 $C\ell$ 也在 $\mathcal{C}$ 上我們只需證明 $(KMtC\ell Ge^*Mt^*)$ 與 KNa^* 相切，而這是因為 (由 (5.6.18) 及 (13.1.4))

$$Ge^*(K, C\ell; Mt, Mt^*) = (KGe^* \cap HMt, C\ell; Mt, Be) \overset{K}{=} (Ge^*, Sc^*; I, Be) = -1,$$
$$K(Na^*, C\ell; Mt, Mt^*) = (Na^*, Sc^*; I, Mt^*) = -1.$$

這同時也告訴我們 $(KC\ell)(MtMt^*)$ 是 $\mathcal{C}$ 上的調和四邊形。 ■

Proposition 13.1.41. 在重心座標積下，$C\ell \times G = I \times H$。

Proof. 令 $\widetilde{C\ell} = I \times H \div G$，$\widetilde{Sp} = IG \cap H\widetilde{C\ell}$。那麼我們有 G, H, $\widetilde{Sp}$ 共外接圓錐曲線，即 $\mathcal{H}_K$。這告訴我們 $\widetilde{Sp}$ 為 IG 與 $\mathcal{H}_K$ 的第二個交點，即 Sp (由 (13.1.24))。故 $\widetilde{C\ell} \in H\widetilde{Sp} = HMt$。

類似地，因為 $\widetilde{C\ell}^* = I \times G \div H = Ge \times Mt \div H$，所以 H, Ge, Mt 共外接圓錐曲線告訴我們 $\widetilde{C\ell}^* \in GeMt = GeMt^*$。而我們由 (13.1.40) 知道 $C\ell^* \in GeMt^*$。

因此 $\widetilde{C\ell}$ 為 HMt 與 $(GeMt^*)^* = (\triangle Ge^*Mt)$ 的第二個交點，即 $C\ell$。 ■

Corollary 13.1.42. 三點 $I, H, C\ell$ 共對角圓錐曲線。

Proof. 這三點取 I-補點分別為

$$I, \quad I \times (H \div I)^{\complement} = I \times (I \div O)^{\complement} = I \pitchfork O, \quad I \times (C\ell \div I)^{\complement} = I \times (H \div G)^{\complement}.$$

因此 $I, H, C\ell$ 共對角圓錐曲線若且唯若 $I, I \pitchfork O, I \times O \div G$ 共外接圓錐曲線。再取等共軛變換 $I \times O$，這等價於 $O, Sc = I \star O, G$ 共線，而這是顯然的。 ■

- X_{63} 為 $C\ell$ 的等角共軛點 $C\ell^*$。

  在重心座標積下，

$$C\ell^* = K \times G \div (I \times H \div G) = I \times G \div H.$$

由 (13.1.40)，我們直接得到：

Proposition 13.1.43. 點 $C\ell^*$ 位於 GGe 上且

$$(G, C\ell^*; Mt, Mt^*) = -1.$$

Proposition 13.1.44. 四點 I, Sc, Sp^*, $C\ell^*$ 共線。

Proof. 注意到 $I = I^*$, $K = G^*$, Na^*, Sp^* 共於外接圓錐曲線 $(IG)^*$ 且

$$(I, Sp^*; G, Na)_{(IG)^*} = (I, Sp; G, Na) = -1.$$

因為 IG 與 $(IG)^*$ 相切於 I，所以由 (13.1.43)，

$$I(G, Sp^*; Mt, Mt^*) = I(G, Sp^*; K, Na^*) = -1 = (G, C\ell^*; Mt, Mt^*),$$

即 I, Sp^*, $C\ell^*$ 共線。

類似地，因為 IMt^* 與 $\mathcal{H}_{Fe}$ 相切，所以由 (13.1.4) 及 (13.1.43)，

$$I(G, Sc; Mt, Mt^*) = (Na, Sc; Mt, I)_{\mathcal{H}_{Fe}} = -1 = (G, C\ell^*; Mt, Mt^*),$$

即 I, Sc, $C\ell^*$ 共線。 ■

Proposition 13.1.45. 三點 I, G, $C\ell^*$ 共對角圓錐曲線。

Proof. 注意到這三個點只是 (13.1.42) 中的三點在射影變換 $G \div H$ 下的像。 ■

因為 $I \times G = H \times C\ell^*$ 且 $Sc = IC\ell^* \cap GH$，所以 $IH \cap GC\ell^* = I \times G \div Sc$。由 (13.1.5)，

$$I \times G \div Sc = G \times Sp \div Na.$$

這個點是 X_{226}。我們有如下刻畫：

Proposition 13.1.46. 點 X_{226} 為 $C\ell^*$ 的補點 $(C\ell^*)^{\complement}$。

Proof. 由 (13.1.45)，$Sp = I^{\complement}$, $G = G^{\complement}$, $(C\ell^*)^{\complement}$ 共外接圓錐曲線。而 $X_{226} = G \times Sp \div Na$ 也位於 $(\triangle GSp) = (GSp)^{G \times Sp}$ 上。因此我們只需證明 X_{226}, G, $C\ell^*$ 共線。取等共軛變換 $I \times G$，這等價於 Sc, I, H 共外接圓錐曲線，而這三點都位於 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上。 ■

Corollary 13.1.47. 三點 Na, L, $C\ell^*$ 共線。

Proof. 因為 $(C\ell^*)^{\complement} \in IH$，所以 $C\ell^* \in (IH)^{\text{Ɔ}} = NaL$。 ■

Proposition 13.1.48. 三點 Sp, X_{46}, $C\ell^*$ 共線。

Proof. 因為 $IH \parallel NaLC\ell^*$，所以 $\overline{INa}$ 中點 Sp 與 $\overline{HL}$ 中點 O 的連線也平行於它們。因為

$$(I, X_{46}; O, Sc^*) = -1,$$

所以我們只需要證明 $Sp(I, C\ell^*; O, Sc^*) = -1$。而

$$Sp(I, C\ell^*; O, Sc^*) = (G, C\ell^*; GC\ell^* \cap OSp, (C\ell^*)^{\complement}) \overset{\infty_{IH}}{=} (G, Na; Sp, I) = -1. \quad \blacksquare$$

- X_{75} 為 I 的等截共軛點 I'；
- X_{31} 為 I' 的等角共軛點 $(I')^*$。

因為 I, Ge, Na 共外接圓錐曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$，所以取等截共軛變換我們得到：

Proposition 13.1.49. 三點 Ge, Na, I' 共線。

Proposition 13.1.50. 三點 I, $(I')^*$, $C\ell^*$ 共線。

Proof. 因為 $(I')^* = I \times K \div G$，所以 I, $(I')^*$, $C\ell^* = I \times G \div H$ 共線若且唯若 G, K, H' 共線，即 (5.6.21)。 ■

取等角共軛變換，我們得到：

Corollary 13.1.51. 三點 I, $C\ell$, I' 共外接圓錐曲線。

Proposition 13.1.52. 三點 Na, Sc^*, I' 共於 $I(I')^{\complement}$ 的反補線。

Proof. 由 (13.1.33)，

$$I'(I, Sp; (I')^{\complement}, Sc^*) = -1 = I'(I, Sp; G, Na),$$

因此 $I'Sc^* = I'Na$。因為 $(NaI')^{\complement} = I(I')^{\complement}$，所以 $NaSc^*I' = (I(I')^{\complement})^{\mho}$。 ■

- X_{48} 為 I 與 $C\ell^*$ 的交叉點 $I \pitchfork C\ell^*$；
- X_{92} 為 I 與 $C\ell$ 的西瓦積 $I \star C\ell$；

- X_{91} 為 X_{48} 與 X_{92} 的交叉商 $X_{48} \Psi X_{92}$；
- X_{47} 為 X_{91} 的等角共軛點。

因為 $C\ell = I \times H \div G$，我們有

$$I \pitchfork C\ell^* = I \times (I \div C\ell^*)^{\mathsf{C}} = I \times (H \div G)^{\mathsf{C}} = I \times O \div G,$$
$$I \star C\ell = I \div (C\ell \div I)^{\mathsf{C}} = I \div (H \div G)^{\mathsf{C}} = I \times G \div O.$$

這告訴我們 (X_{48}, X_{92}) 是一對等角共軛點對，也告訴我們 (X_{63}, X_{92}) 是一對等截共軛點對。

注意到 $IC\ell$ 與 $(\triangle IC\ell^*)$ 相切，因此：

Proposition 13.1.53. 三點 I, $C\ell$, X_{48} 共線。

Proposition 13.1.54. 三點 H, Na, X_{92} 共線。

Proof. 令 X 為 HX_{92} 與過 I, H, $C\ell$ 的對角圓錐曲線 $\mathcal{D}$ 的第二個交點。那麼 $(IC\ell)(HX)$ 為 $\mathcal{D}$ 上的調和四邊形。因為歐拉線 $\mathcal{E}$ 為 H 關於 $\mathcal{D}$ 的切線（注意到 $X_{27} = I \star H \in \mathcal{E}$），所以

$$H(I, Sp; G, X_{92}) = H(I, C\ell; G, X) = -1 = (I, Sp; G, Na),$$

即 H, Na, X_{92} 共線。 ■

由 (13.1.42)，IX_{29}, IX_{92} 都是 I 關於過 I, H, $C\ell$ 的對角圓錐曲線的切線，因此：

Proposition 13.1.55. 三點 I, X_{29}, X_{92} 共線。

同理，$C\ell X_{27}$, $C\ell X_{92}$ 都是 $C\ell$ 關於過 I, H, $C\ell$ 的對角圓錐曲線的切線，因此：

Proposition 13.1.56. 三點 $C\ell$, X_{27}, X_{92} 共線。

Proposition 13.1.57. 點 X_{47} 為 X_{91} 的 X_{92}-補點。

Proof. 這只是因為

$$\begin{aligned}X_{47} &= X_{48} \times X_{92} \div X_{91}\\ &= (X_{91} \times (X_{91} \div X_{92})^{\mathsf{C}}) \times X_{92} \div X_{91} = X_{92} \times (X_{91} \div X_{92})^{\mathsf{C}}.\end{aligned}$$

■

Proposition 13.1.58. 在重心座標積下，$X_{91} = I \times H \div X_{24}$。因此 $X_{47} = I \times X_{24} \div H$。

Proof. 首先，我們有

$$X_{91} = X_{92} \div (X_{48} \div X_{92})^{\reflectbox{C}} = I \times G \div O \div (O^2 \div G^2)^{\reflectbox{C}}.$$

因此我們只需證明

$$H \times (N \div H)^{\reflectbox{C}} = X_{24} = K \times (O^2 \div G^2)^{\reflectbox{C}},$$

或者說

$$(N \div H)^{\reflectbox{C}} = O \div G \times (O^2 \div G^2)^{\reflectbox{C}}.$$

事實上，我們證明：

Lemma 13.1.59. 對於所有比例 r，

$$(r^{\mathsf{C}} \div r^{\reflectbox{C}})^{\reflectbox{C}} = r \times (r^2)^{\reflectbox{C}}.$$

Proof of Lemma. 取 $r = I \div G$，這其實就是

$$(Sp \div Na)^{\reflectbox{C}} = I \times H' \div G^2 = I \div H,$$

即 (13.1.46) (注意到 $C\ell^* = I \times G \div H$, $X_{226} = Sp \times G \div Na$)。 □

在 (13.1.59) 中取 $r = O \div G$ 就會得到我們要的。 ■

因為 X_{24} 位於歐拉線 $\mathcal{E}$ 上，所以我們馬上就得到：

Corollary 13.1.60. 點 X_{47} 位於 $IC\ell^* = I \times \mathcal{E} \div H$ 上。

Proposition 13.1.61. 三點 Sc, X_{24}, X_{47} 共外接圓錐曲線，因此三點 Sc^*, X_{68}, X_{91} 共線。

Proof. 我們只需證明 $Sc \times X_{47} \div X_{24}$ 位於 $ISc = IC\ell^* = IX_{47}$ 上 (13.1.43)。而 (13.1.58) 告訴我們

$$Sc \times X_{47} \div X_{24} = I \times Sc \div H.$$

因此我們只需證明 I, H, Sc 共外接圓錐曲線，但它們都在 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上。 ∎

Proposition 13.1.62. 點 X_{47} 為兩線 $X_{33}X_{90}$ 與 $X_{34}X_{46}$ 的交點。

13.2 與 X_1 的選取無關的點

13.2.1 歐拉線 $\mathcal{E}$ 上的點

當 $n = 2, 3, 4, 5, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30$。

- X_{22} 為 G 的圓西瓦三角形與切線三角形的透視中心。

如果令 $\triangle_G^\Omega = \triangle G_a^\Omega G_b^\Omega G_c^\Omega$ 為 G 的圓西瓦三角形，$\triangle_K^\Omega = \triangle K_a^\Omega K_b^\Omega K_c^\Omega$ 為 K 的圓西瓦三角形，那麼 G_a^Ω, K_a^Ω 關於 $\overline{BC}$ 的中垂線對稱，因此 $K^aG_a^\Omega$ 與 BC 交於 $K_a = K^aK_a^\Omega \cap BC$ 關於 $\overline{BC}$ 的等截點 K_a'。因此 AK_a' 過 K 的等截共軛點 K'。由對稱性，我們得到：

Proposition 13.2.1. 點 X_{22} 是 K' 與 K 的西瓦商 K'/K。

這告訴我們

$$X_{22} = K \times (K \div K')^{\complement} = K \times (K^2 \div G^2)^{\complement}.$$

Proposition 13.2.2. 點 X_{22} 位於歐拉線 $\mathcal{E}$ 上且

$$(G, X_{22}; O, (H')^*) = -1.$$

Proof. X_{22} 在根號變換下的像為

$$I \times (I^2 \div G^2)^{\complement} = I \times H' \div G = I \times G \div H = C\ell^*,$$

而 $\mathcal{E} = GO$ 在根號變換下的像為 GMt。因此由 (13.1.43)，$X_{22} \in \mathcal{E}$ 且

$$(G, X_{22}; O, K^2 \div O) = -1.$$

最後，我們注意到

$$(H')^* = K \times G \div (G^2 \div H) = K \times H \div G = K^2 \div O. \qquad \blacksquare$$

- X_{23} 為 Far-out 點，定義為 G 關於外接圓 Ω 的反演點 $G^{\mathfrak{I}}$；
- X_{67} 為 $G^{\mathfrak{I}}$ 的等角共軛點，同時也是 K 關於 $\mathcal{H}_J$ 的對徑點。

  這兩個點好像沒啥好說的。

- X_{24} 為垂足三角形的垂足三角形與參考三角形的透視中心；
- X_{51} 為垂足三角形的重心 G_H；
- X_{52} 為垂足三角形的垂心 H_H；
- X_{53} 為垂足三角形的共軛重心 K_H；
- X_{68} 為 X_{24} 的等角共軛點；
- X_{95} 為 G_H 的等角共軛點 G_H^*；
- X_{96} 為 H_H 的等角共軛點 H_H^*；
- X_{97} 為 K_H 的等角共軛點 K_H^*。

Proposition 13.2.3. 點 X_{24} 位於歐拉線 $\mathcal{E}$ 上。

Proof. 如果我們將垂足三角形的 X_1 選為 H，那麼 X_{24} 其實就是垂足三角形的 X_{46}，即 H_H/I_H，因此由 (13.1.19)，$X_{24} \in O_H I_H = NH = \mathcal{E}$。 $\blacksquare$

(13.1.19) 還告訴我們 X_{24} 是 $N = O_H$ 關於垂足三角形的 $H = I_H$-反補點。換句話說，存在一射影變換將 A, B, C, H, X_{24} 分別送至 H_a, H_b, H_c, H, N，即 X_{24} 是 N 的 H-反補點 $H \times (N \div H)^{\mathfrak{I}}$。在 (13.1.58) 的證明中我們還看到了這等於 $K \times (O^2 \div G^2)^{\mathfrak{I}}$。

Proposition 13.2.4. 四點 N, K, X_{24}, H_H 共外接圓錐曲線。

Proof. 若將參考三角形換成 $\triangle_H$，那麼這等價於證明 O, Mt, O 的 I-反補點 $I \times (O \div I)^{\mathfrak{I}}, H$ 共 $\triangle^I$ 的外接圓錐曲線。考慮此命題在 I-補變換下的命題，我們要證明 $Sc^*, K, I \pitchfork O, O$ 共外接圓錐曲線，但這些點都位於 $\mathcal{H}_J$ 上。 $\blacksquare$

Corollary 13.2.5. 我們有 $X_{24} = GN \cap KKo$, $X_{68} = GKo \cap KN$。

Proposition 13.2.6. 我們有 $X_{24} = X_{33}X_{35} \cap X_{34}X_{36}$。

Proof. 由於 $(I, O; X_{35}, I^{\Im}) = (I, H; X_{33}, X_{34}) = -1$，因此我們只需證明 X_{24}, X_{34}, X_{36} 共線。考慮 $\mathcal{H}_J$ 上的六折線 $OHX_{73}KoKSc^*$，那麼由帕斯卡定理，

$$X_{34} = HX_{73} \cap KSc^*, \quad X_{36} = X_{73}Ko \cap Sc^*O, \quad X_{24} = OH \cap KoK$$

共線。 ■

由 (5.6.8)，我們得到 $O = Be_H$, $K = Mt_H$, H_H 共線，即：

Proposition 13.2.7. 點 H_H 位於布洛卡軸上。

由 (5.4.6)，我們得到：

Proposition 13.2.8. 三點 $H = I_H$, K_H, $K = Mt_H$ 共線。

顯然地，我們有 $G_H = H \pitchfork K$, $H_H = H \pitchfork X_{24}$。

- X_{26} 為切線三角形的外心 O^K。

  對 $\triangle^K$ 開 (5.2.3)，我們得到 O^K 位於歐拉線上。

13.2.2 Jerabek 雙曲線 $\mathcal{H}_J$ 上的點

當 $n = 3, 4, 6, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74$

13.2.3 布洛卡軸 OK 上的點

當 $n = 3, 6, 15, 16, 32, 39, 50, 52, 58, 61, 62$

13.2.4 Kiepert 雙曲線 $\mathcal{H}_K$ 上的點

當 $n = 2, 4, 13, 14, 76, 83, 94, 96, 98$

13.2.5 其他點

下次一定。

參考資料

[1] Ivan Zelich and Xuming Liang (2015). *Generalisations of the Properties of the Neuberg Cubic to the Euler Pencil of Isopivotal Cubics.*
`https://ijgeometry.com/wp-content/uploads/2015/10/1.pdf`

[2] *Desargues' Involution Theorem.*
`https://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/63.pdf`

[3] Chris van Tienhoven. *Encyclopedia of Quadri-Figures.*
`https://chrisvantienhoven.nl/`

[4] Jean-Pierre Ehrmann and Bernard Gibert (2015). *Special Isocubics in the Triangle Plane*
`http://bernard.gibert.pagesperso-orange.fr/files/Resources/SITP.pdf`

[5] 張志煥。*正交截線*

[6] dqzy800. *完美六邊形研究綜述*
`https://bbs.cnool.net/5443327.html`

[7] 鄭容濤。*等角共軛點與完美六邊形初論*