

# 幾何引理維基

$$\mathcal{Li}4 + \mathcal{S}_{\otimes} + \text{和輝 (?)}$$

February 21, 2021

# 目錄

前言	i
0 基本性質與記號	1
0.1 記號 . . . . .	1
0.2 一般引理 . . . . .	3
1 內心	4
1.1 偽內切圓 . . . . .	8
1.2 費爾巴哈雙曲線 . . . . .	12
參考資料	15

# 前言

曾經證明過的引理不可能忘記，只不過是想不起而已。

# Chapter 0

## 基本性質與記號

### 0.1 記號

若  $X, Y$  為兩點 (不在無窮遠線  $\mathcal{L}_\infty$  上),  $XY$  代表過  $X, Y$  的直線,  $\overline{XY}$  代表連接  $X, Y$  的線段 (與  $\mathcal{L}_\infty$  沒有交點的那個)。若  $K, L$  為兩線,  $K \cap L$  代表  $K$  與  $L$  的交點,  $\angle(K, L)$  代表  $K$  與  $L$  的無向夾角,  $\angle(K, L)$  代表  $K$  與  $L$  的有向夾角。

$\odot(XYZ)$  為  $\triangle XYZ$  的外接圓,  $\odot(\overline{XY})$  是以  $\overline{XY}$  為直徑的圓,  $\odot(X)$  則是以  $X$  為圓心的圓。給定一圓  $\Gamma$  及圓上一點  $X$ , 我們通常以  $XP \cap \Gamma$  或  $\Gamma \cap XP$  代表  $XP$  與  $\Gamma$  的異於  $X$  的交點 (若  $XP$  與  $\Gamma$  相切則還是  $X$ )。

有時, 若有三線  $a, b, c$ , 我們會以  $\triangle abc$  代表以  $a, b, c$  三線圍成的三角形  $\triangle(b \cap c)(c \cap a)(a \cap b)$ 。

我們說  $\triangle X_1Y_1Z_1$  與  $\triangle X_2Y_2Z_2$  正向相似, 記為  $\triangle X_1Y_1Z_1 \stackrel{+}{\sim} \triangle X_2Y_2Z_2$ , 若  $\triangle X_1Y_1Z_1$  與  $\triangle X_2Y_2Z_2$  相似且

$$\angle Y_1X_1Z_1 = \angle Y_2X_2Z_2, \angle Z_1Y_1X_1 = \angle Z_2Y_2X_2, \angle X_1Z_1Y_1 = \angle X_2Z_2Y_2.$$

我們說  $\triangle X_1Y_1Z_1$  與  $\triangle X_2Y_2Z_2$  反向相似, 記為  $\triangle X_1Y_1Z_1 \stackrel{-}{\sim} \triangle X_2Y_2Z_2$ , 若  $\triangle X_1Y_1Z_1$  與  $\triangle X_2Y_2Z_2$  相似且

$$\angle Y_1X_1Z_1 = -\angle Y_2X_2Z_2, \angle Z_1Y_1X_1 = -\angle Z_2Y_2X_2, \angle X_1Z_1Y_1 = -\angle X_2Z_2Y_2.$$

給定  $\triangle ABC$  與一點  $P$ , 我們有:  $P$  關於  $\triangle ABC$  的

- 西瓦三角形  $\triangle(AP \cap BC)(BP \cap CA)(CP \cap AB)$

- 反西瓦三角形，使得  $P$  關於其西瓦三角形為  $\triangle ABC$  (存在性與唯一性詳見<sup>[1]</sup>)
- 佩多 (垂足) 三角形  $\triangle(P\infty_{\perp BC} \cap BC)(P\infty_{\perp CA} \cap CA)(P\infty_{\perp AB} \cap AB)$
- 反佩多三角形  $\triangle(A\infty_{\perp AP})(B\infty_{\perp BP})(C\infty_{\perp CP})$ ，使得  $P$  關於其佩多三角形為  $\triangle ABC$
- 圓西瓦三角形  $\triangle(AP \cap \odot(ABC))(BP \cap \odot(ABC))(CP \cap \odot(ABC))$

其中，西瓦三角形的定義關於  $A, B, C, P$  四個點是對稱的，所以也被定義為一個完全四點形的西瓦三角形。

給定  $\triangle ABC$  與一線  $\ell$ ，我們有： $\ell$  關於  $\triangle ABC$  的

- 西瓦三角形  $\triangle(A(BC \cap \ell))(B(CA \cap \ell))(C(AB \cap \ell))$
- 反西瓦三角形，使得  $\ell$  關於其西瓦三角形為  $\triangle ABC$  (同樣地存在性與唯一性詳見<sup>[1]</sup>)

跟點的情形一樣，西瓦三角形的定義也可以延伸至完全四線形 (但一般稱作對角線三角形)。

當我們給定三角形  $ABC$ ，在不特別說明的情況下我們令

- $I, G, O, H$  分別為內心、重心、外心及垂心
- $I_x$  為  $X$ -旁心
- $\triangle DEF$  為切點三角形，即  $I$  的佩多三角形
- $\triangle D_x E_x F_x$  為  $X$ -切點三角形，即  $I_x$  的佩多三角形
- $\triangle D' E' F' = \triangle D_a E_b F_c$  為旁切點三角形
- $\triangle M_a M_b M_c$  為中點三角形
- $\triangle N_a N_b N_c$  為弧中點三角形

## 0.2 一般引理

**Lemma 0.2.1.** 若兩圓  $\Omega, \omega$  相切於  $T$ ,  $\overline{AB}$  為  $\Omega$  上一弦與  $\omega$  相切於  $U$ , 則  $TU$  為  $\angle ATB$  的角平分線。

*Proof.* 令  $A', B'$  分別為  $TA, TB$  與  $\omega$  異於  $T$  的交點, 則

$$\angle BAT = \angle(BT, T_T\Omega) = \angle(B'T, T_T\omega) = \angle B'A'T,$$

即  $AB \parallel A'B'$ 。所以

$$\angle ATU = \angle A'TU = \angle A'UA = \angle UA'B' = \angle UTB. \quad \blacksquare$$

**Lemma 0.2.2** (等截共軛線). 設直線  $\ell$  交  $\triangle ABC$  三邊於  $D, E, F$ , 並設  $D'$  為  $D$  關於  $M_a$  的對稱點, 類似地在  $CA, AB$  上定義  $E', F'$ , 則  $D', E', F'$  三點共線且平行於  $\triangle ABC \cup \ell$  的牛頓線。

*Proof.* 設  $G$  為  $\triangle ABC$  的重心, 對於任意點  $P$ , 考慮以  $A$  為中心比例為 2 的位似變換合成上以  $M_A$  為中心比例為  $-1$  的位似變換將  $P$  送至  $P^c$ , 則由孟氏定理知道此變換把  $P$  送至  $P$  的反補點, 即  $\overline{P^cG} = 2\overline{GP}$ , 故對於三頂點此變換皆相同, 設  $T_E, T_F$  為  $BE, CF$  中點, 則  $T_E T_F$  為  $\triangle ABC \cup \ell$  的牛頓線, 且由上面的討論容易發現  $T_E, T_F$  的反補點為  $E', F'$  故反補變換將  $\triangle ABC \cup \ell$  的牛頓線送至  $D^c, E^c, F^c$ , 因此三點共線且平行牛頓線。  $\blacksquare$

**Lemma 0.2.3.** 設  $X, Y$  為一圓錐曲線  $C$  上的兩點,  $X, Y$  關於  $C$  的切線交於  $P$ , 則對於任意過  $P$  並交  $C$  於  $A, B$  兩點的直線, 皆有

$$(X, Y; A, B)_C = -1.$$

# Chapter 1

## 內心

**Lemma 1.0.1.** 我們有

$$\angle BIC = 90^\circ + \angle BAI = 90^\circ + \angle IAC.$$

*Proof.* 注意到  $AI, BI, CI$  分別垂直  $EF, FD, DE$ ，所以

$$\angle BIC = \angle FDE = \angle AFE = 90^\circ + \angle BAI = 90^\circ + \angle IAC. \quad \blacksquare$$

**Lemma 1.0.2** (雞爪圓). 設  $N_a$  為  $\widehat{BC}$  弧中點，則  $B, I_a, C, I$  共圓且圓心為  $N_a$ 。

*Proof.* 注意到

$$\angle BIN_a = \angle BIA = \angle BAI + \angle IBA = \angle N_aAC + \angle IBA = \angle N_aBI$$

故  $\overline{N_aI} = \overline{N_aB}$ ，同理有  $\overline{N_aI} = \overline{N_aC} = \overline{N_aI_a}$ 。 ■

**Lemma 1.0.3.** 設  $\triangle ABC$  中  $A$ -旁切圓切  $BC$  於  $D'$ ，則  $\overline{BC}$  中點  $M_a$  為  $\overline{DD'}$  中點。

*Proof 1.* 令  $I_a$  為  $A$ -旁心，由 (1.0.2)， $\overline{II_a}$  的中點為  $\widehat{BC}$  中點  $N_a$ ，故

$$\frac{DM_a}{M_aD'} = \frac{IN_a}{N_aI_a} = 1. \quad \blacksquare$$

**Lemma 1.0.4.** 設  $\triangle ABC$  中  $A$ -旁切圓切  $BC$  於  $D'$ ， $M_a$  為  $\overline{BC}$  中點，則  $IM_a \parallel AD'$ 。

*Proof.* 令  $D^*$  爲  $D$  關於  $\odot(I)$  的對徑點，過  $D^*$  作平行於  $BC$  的直線分別交  $AB, AC$  於  $XY$ ，則  $\triangle AXY$  與  $\triangle ABC$  位似。因此  $A, D^*, D'$  共線。由 (1.0.3)， $IM_a$  爲  $\triangle DD'D^*$  的  $D$ -中位線，故  $IM_a \parallel D^*D' = AD'$ 。 ■

**Lemma 1.0.5.** 設  $\odot(AEF)$  和  $\odot(ABC)$  交於  $A, X$ ，則  $XD$  過  $\widehat{BC}$  弧中點  $N_a$ 。

*Proof 1.* 注意到  $X$  是  $\triangle ABC \cup EF$  的密克點，故  $\triangle XBF \simeq \triangle XCE$ ，因此

$$\frac{XB}{XC} = \frac{FB}{EC} = \frac{DB}{DC}.$$

故  $\angle BXD = \angle DXC$ 。因爲  $A, X$  位於  $BC$  同側且  $D$  位於  $\overline{BC}$  內，因此  $XD$  爲  $\angle BXC$  的內角平分線且  $X, D, N_a$  共線。 ■

*Proof 2.* 設  $N'_a$  爲  $N_a$  對外接圓的對徑點，注意到  $X$  是  $\triangle ABC \cup EF$  的密克點，考慮  $EF$  和  $BC$  的交點  $Y$ ，則我們有  $XYFB$  共圓，因此由算角度

$$\angle YXN'_a = \angle YXB + \angle BXN'_a = \angle YFB + \angle BAN'_a = \angle EFB + \angle BAN'_a = 0^\circ.$$

故  $X, Y, N'_a$  共線，因此

$$(N_a, N'_a; B, C) = -1 = (D, Y; B, C) = X(D, Y; B, C)$$

故  $X, D, N_a$  共線。 ■

**Lemma 1.0.6.** 沿用 (1.0.5) 的標號，設  $IX$  交  $EF$  於  $T$ ，則  $DT \perp EF$ 。

*Proof.* 注意到  $I$  是  $\odot(AEF)$  上  $\widehat{EF}$  的弧中點，故

$$\frac{TF}{TE} = \frac{XF}{XE} = \frac{XB}{XC} = \frac{DB}{DC},$$

所以  $\triangle XTD \simeq \triangle XFB$ ，因此

$$\angle XN_aA = \angle XBA = \angle XBF = \angle XDT \implies DT \parallel N_aA \perp EF. \quad \blacksquare$$

**Lemma 1.0.7.** 令  $H, I$  分別爲  $\triangle ABC$  的垂心和內心，則  $(H, I)$  爲  $\triangle DEF$  的垂足三角形的一對等角共軛點。

*Proof.* 考慮  $D$  對  $EF$  的垂足  $T$ ，我們只需要證明  $\angle HTD = \angle DTI$  則其他兩邊也同理，由 (1.0.6)， $X$  是  $\triangle ABC \cup EF \cup DT$  的密克點，故  $\triangle AEF, \triangle ABC$  的垂心和  $T$  共線，注意到  $\triangle AEF$  垂心是  $I$  對  $EF$  的對稱點，故  $\angle HTD = \angle DTI$ 。 ■



---

**Lemma 1.0.8** (熱爾岡點). 直線  $AD, BE, CF$  共於一點  $Ge$ 。

*Proof 1.* 由西瓦定理及

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = 1. \quad \blacksquare$$

*Proof 2.* 考慮六折線  $BDCEAF$ ，由於其與內切圓  $\odot(I)$  相切，由布里昂雄定理得證。  $\blacksquare$

*Proof 3.* 由 Sondat 定理， $\triangle DEF$  與  $\triangle p_{\odot(I)}(D)p_{\odot(I)}(E)p_{\odot(I)}(F)$  透視，而我們顯然有

$$\triangle p_{\odot(I)}(D)p_{\odot(I)}(E)p_{\odot(I)}(F) = \triangle ABC. \quad \blacksquare$$

**Lemma 1.0.9.** 設  $EF$  與  $BC$  交於  $X$ ，則  $(B, C; D, X) = -1$ 。

*Proof 1.* 由孟氏定理，

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

因此

$$\frac{BD/DC}{BX/XC} = -\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1. \quad \blacksquare$$

*Proof 2.* 由 (1.0.8) 及完全四線形  $(CA, AB, BE, CF)$  的調和分割性質。  $\blacksquare$

**Lemma 1.0.10.** 設  $ID$  交  $EF$  於  $T$ ，則  $AT$  平分  $\overline{BC}$ 。

*Proof 1.* 過  $T$  作平行於  $BC$  的直線交  $CA, AB$  於  $X, Y$ ，則  $I$  關於  $XY, YA, AX$  的垂足  $T, E, F$  共線。由西姆松定理， $I \in \odot(AXY)$ ，由  $\triangle AXY \cup I$  與  $\triangle ABC \cup N_a$  位似可得  $A, T, M_a$  共線。  $\blacksquare$

*Proof 2.* 過  $A$  作平行於  $BC$  的直線交  $EF$  於  $S$ ，則  $ST = p_{\odot(I)}(A)$ 。由於  $IT \perp AS$ ，所以  $p_{\odot(I)}(T) = AS$ ，故

$$A(B, C; T, \infty_{BC}) = (F, E; T, S) = -1,$$

即  $AT$  平分  $BC$ 。  $\blacksquare$

**Lemma 1.0.11.** 設  $J$  為  $C$  關於  $BI$  的垂足，則  $J$  為  $C$ -中位線與  $EF$  的交點。

*Proof 1.* 由

$$\angle(M_a J, AB) = \angle M_a J B + \angle J B A = \angle I B C + \angle C B I = 0,$$

我們知道  $J$  位於  $C$ -中位線上。注意到  $C, E, J, I$  共圓，所以由 (1.0.1)，

$$\angle J E C = \angle B I C = 90^\circ + \angle I A E = \angle F E C,$$

即  $J \in EF$ 。 ■

*Proof 2.*  $J$  位於  $C$ -中位線同上面的算角度證明。由於  $\triangle DEF$  為熱爾岡點  $Ge$  關於  $\triangle ABC$  的西瓦三角形且  $Ge$  位於費爾巴哈雙曲線  $\mathcal{H}_{Fe}$  上，因此  $EF = \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(D)$ 。注意到  $D, J$  為  $\triangle IBC$  的垂足三角形的兩個頂點且  $I \in \mathcal{H}_{Fe}$ ，所以  $J \in \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(D) = EF$ 。 ■

**Lemma 1.0.12.** 設  $H_A$  為  $\triangle BIC$  垂心， $ID \cap EF = S$ ，則

$$(D, S; I, H_A) = -1.$$

*Proof 1.* 設  $BI \cap EF = J, DI \cap EF = S, BC \cap EF = X$ ，則  $C, J, H'$  共線，故

$$J(D, S; I, H_A) = (D, X; B, C) = -1. \quad \blacksquare$$

*Proof 2.* 由於  $\triangle DEF$  為熱爾岡點  $Ge$  關於  $\triangle ABC$  的西瓦三角形且  $Ge$  位於費爾巴哈雙曲線  $\mathcal{H}_{Fe}$  上，因此  $EF = \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(D)$ ，故原命題由調和性質顯然。 ■

**Lemma 1.0.13.** 標號沿用 (1.0.12)，則  $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(H_A)$  為  $A$ -中位線。

*Proof.* 注意到  $S \in EF = \mathfrak{p}_{\odot(I)}(A)$ ，因此  $A \in \mathfrak{p}_{\odot(I)}(S)$  且  $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(S) \perp IS \perp BC$ ，故  $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(S)$  過  $A$  且平行  $BC$ ，因此由配極保交比

$$(BC, \mathfrak{p}_{\odot(I)}(S); \mathcal{L}_\infty, \mathfrak{p}_{\odot(I)}(H_A)) = (D, S; I, H_A) = -1.$$

故  $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(H_A)$  為  $A$ -中位線。 ■

**Lemma 1.0.14.** 設  $\overline{EF}$  中點為  $M$ ， $H_A$  為  $\triangle BIC$  垂心，則  $Ge, M, H_A$  共線。

*Proof.* 標號沿用 (1.0.12)，考慮  $AD$  和  $EF$  的交點  $U$ ，則

$$M(D, U; A, Ge) = -1 = M(D, S; I, H_A).$$

故  $M, Ge, H_A$  共線。 ■

**Lemma 1.0.15.** 三角形  $DEF$  的歐拉線是  $OI$ 。

*Proof.* 注意到  $\triangle DEF$  與  $\triangle I_a I_b I_c$  位似， $\triangle I_a I_b I_c$  的歐拉線是  $OI$ ，且  $I$  在  $\triangle DEF$  的歐拉線上，因此他們的歐拉線重合，故  $\triangle DEF$  的歐拉線是  $OI$ 。 ■

**Lemma 1.0.16.** 設  $\triangle ABC$  的費爾巴哈雙曲線為  $\mathcal{H}_{Fe}$ ，則  $OI$  和  $\mathcal{H}_{Fe}$  相切。

*Proof.* 注意到  $\mathcal{H}_{Fe}$  是  $OI$  的等角共軛軌跡，且  $I \in \mathcal{H}_{Fe}$ ，若  $OI$  和  $\mathcal{H}_{Fe}$  有第二個交點  $X$ ，則  $X$  的等角共軛點也會在費爾巴哈雙曲線上但這就和它是二次曲線矛盾，因此只有一個交點。 ■

**Lemma 1.0.17.** 設  $BI, CI$  分別與  $CA, AB$  交於  $Y, Z$ ， $YZ$  與  $\odot(ABC)$  交於  $P, Q$  兩點，則  $I, I_b, I_c, P, Q$  共圓。

*Proof.* 由  $Y$  位於  $\odot(ACPQ)$  及  $\odot(ACII_b)$  的根軸上知  $I, I_b, P, Q$  共圓。同理有  $I, I_c, P, Q$  共圓。 ■

**Lemma 1.0.18.** 我們有  $I$  關於  $\triangle ABC$  的三線性極線  $t(I)$  垂直  $OI$ ，類似地，有  $I_x$  關於  $\triangle ABC$  的三線性極線  $t(I_x)$  垂直  $OI_x$ 。

*Proof 1.* ■

*Proof 2.* 注意到  $OI$  與費爾巴哈雙曲線  $\mathcal{H}_{Fe}$ ，故  $I$  的正交截線垂直  $OI$ ，且注意到  $I$  對  $ABC$  的三線性極線，正交截線， $I$  對  $(DEF)$  的極線共點，故  $I$  對  $ABC$  的三線性極線，正交截線平行，故  $I$  的三線性極線垂直  $OI$ 。 ■

## 1.1 偽內切圓

**Lemma 1.1.1** (偽內切圓). 設圓  $\omega_A$  分別與  $CA, AB$  相切於  $E_A, F_A$ ，且與  $\odot(ABC)$  內切，稱  $\omega_A$  為  $\triangle ABC$  的  $A$ -偽內切圓。則  $I, E_A, F_A$  共線，意即，

$I \in \mathfrak{p}_{\omega_A}(A)$ 。

*Proof 1.* 令  $T_A$  為  $\omega_A$  與  $\odot(ABC)$  的切點。由 (0.2.1) 可得  $T_A E_A$  為  $\angle C T_A A$  的角平分線，由  $E_A$  位於  $\overline{CA}$  內及  $T_A, N_b$  位於  $CA$  異側可得  $T_A, E_A, N_b$  共線。由  $\angle C T_A N_b = \angle C A N_b = \angle N_b C E_A$ ，我們知道  $\triangle N_b E_A C \sim \triangle N_b C T_A$ 。令  $I' = B N_b \cap E_A F_A$ ，則

$$\angle T_A F_A I' = \angle T_A F_A E_A = \angle T_A E_A C = \angle T_A C N_b = \angle T_A B I',$$

因此  $B, T_A, I', F_A$  共圓。由

$$\angle T_A I' N_b = \angle T_A F_A B = \angle T_A E_A F_A = \angle N_b E_A I'$$

我們可得  $\triangle N_b E_A I' \sim \triangle N_b I' T_A$ ，故

$$N_b I'^2 = N_b E_A \cdot N_b T_A = N_b C^2.$$

所以由 (1.0.2) 及  $I, I'$  在  $B N_b$  上位於  $N_b$  同側可得  $I' = I$ 。 ■

*Proof 2.* 考慮關於  $A$  的反演命題，我們只要證明：

若  $A$ -旁切圓分別與  $CA, AB$  相切於  $E_a, F_a$ ，則  $A, I_a, E_a, F_a$  共圓。

而這顯然是對的。 ■

*Proof 3.* 同 *Proof 1.*，我們有  $T_A, E_A, N_b$  共線，同理有  $T_A, F_A, N_c$  共線。考慮六折線  $AB N_b T_A N_c C$ ，由於其頂點皆位於  $\odot(ABC)$  上，所以  $E_A, F_A, I = B N_b \cap C N_c$  共線。 ■

**Lemma 1.1.2.** 設圓  $\omega$  與  $CA$  相切於  $\overline{CA}$  內，且與  $\odot(ABC)$  內切。設  $P$  為  $CA$  上一點使得  $BP$  與  $\omega$  相切，則  $I \in \mathfrak{p}_{\omega}(A)$ 。

*Proof 1.* 證明類似於 (1.1.1) 的 *Proof 1.*。令  $T$  為  $\omega$  與  $\odot(ABC)$  的切點， $E, F$  分別為  $\omega$  與  $CP, PB$  的切點。由 (0.2.1) 可得  $TE$  為  $\angle C T A$  的角平分線，由  $E$  位於  $\overline{CA}$  內及  $T, N_b$  位於  $CA$  異側可得  $T, E, N_b$  共線。由  $\angle C T N_b = \angle C A N_b = \angle N_b C E$ ，我們知道  $\triangle N_b E C \sim \triangle N_b C T$ 。令  $I' = B N_b \cap E F$ ，則

$$\angle T F I' = \angle T F E = \angle T E C = \angle T C N_b = \angle T B I',$$

因此  $B, T, I', F$  共圓。由

$$\angle TI'N_b = \angle TFB = \angle TEF = \angle N_bEI'$$

我們可得  $\triangle N_bEI' \sim \triangle N_bI'T$ ，故

$$N_bI'^2 = N_bE \cdot N_bT = N_bC^2.$$

所以由 (1.0.2) 及  $I, I'$  在  $BN_b$  上位於  $N_b$  同側可得  $I' = I$ 。 ■

*Proof 2.* ■

**Lemma 1.1.3.** 標號同 (1.1.1)，令  $T_A$  爲  $\omega_A$  與  $\odot(ABC)$  的切點，則  $B, T_A, I, F_A$  及  $C, T_A, I, E_A$  分別共圓。

*Proof.* 由 (1.1.1) 的 *Proof 1.* 可以直接看出。如果在假設 (1.1.1) 是對的情況下，我們有  $I, E_A, F_A$  共線。由於  $BI$  與  $T_AE_A$  交於  $N_b$ ，

$$\angle T_AF_AI = \angle(T_AN_b, CA) = \angle N_bT_AC + \angle T_ACA = \angle ABN_b + \angle T_ABA = \angle T_ABI,$$

即  $B, T_A, I, F_A$  共圓。同理有  $C, T_A, I, E_A$  共圓。 ■

**Lemma 1.1.4.** 標號同 (1.1.1)，令  $N'_a$  爲  $\widehat{BAC}$  中點，則  $I, N'_a, T_A$  共線。

*Proof 1.* 由 (1.1.3) 及  $AI \perp E_AF_A$ ，

$$\angle IT_AB = \angle IF_AB = \angle IAB + 90^\circ = \angle N'_aAB = \angle N'_aT_AB,$$

所以  $I, N'_a, T_A$  共線。 ■

*Proof 2.* 由 (0.2.3) 及關於  $T_A$  的位似，

$$-1 = (T_A, AT_A \cap \omega_A; E_A, F_A) = (T_A, A; N_b, N_c).$$

考慮以  $I$  爲中心，反演幂爲  $\mathcal{P}(\odot(ABC), I)$  的反演變換，則

$$-1 = (T_A, A; N_b, N_c) = (T_AI \cap \odot(ABC), N_a; B, C),$$

因此  $T_AI \cap \odot(ABC) = N'_a$ 。 ■

**Lemma 1.1.5.** 標號同 (1.1.3)，類似定義  $T_B, T_C$ ，則  $AT_A, BT_B, CT_C$  共點於  $\odot(ABC)$  與  $\odot(I)$  的外位似中心。

*Proof.* 由 Monge 定理，我們有  $AT_A$  過  $\odot(ABC), \odot(I)$  的外位似中心。同理， $BT_B, CT_C$  也過  $\odot(ABC), \odot(I)$  的外位似中心。 ■

**Lemma 1.1.6.** 內切圓  $\odot(I)$  和外接圓  $\odot(O)$  的外、內位似中心分別為  $N_a, G_e$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點。

*Proof.* 我們只證明外位似中心的情況，內位似中心的證明類似，標號同 (1.1.1)。由 (1.1.5)， $AT_A$  過  $\odot(ABC), \odot(DEF)$  的外位似中心，且透過對  $A$  反演可以得到  $AN_a, AT_A$  為等角線。對於  $B, C$  我們有同樣的結論。 ■

**Lemma 1.1.7.** 標號同 (1.1.3)，若  $P$  為  $\odot(ABC)$  上任一點， $Q$  為  $AP$  與  $BC$  的交點，則  $T_A \in \odot(APQ)$ 。

*Proof.* 由 Reim 定理及  $DQ = BC$ ，這等價於證明  $T_A D$  與過  $A$  平行於  $BC$  的直線交於  $\odot(ABC)$ 。將此命題關於  $BC$  中垂線對稱，我們需要證明  $A, D', U_A$  共線，其中  $U_A \in \odot(ABC)$  滿足  $T_A U_A \parallel BC$ 。由 (1.1.6) 我們知道  $AT_A, AD' = AN_a$  是關於  $\angle BAC$  的等角線，因此  $A, D', U_A$  共線。 ■

**Lemma 1.1.8.** 標號同 (1.1.3)，令  $X$  為 (1.0.5) 中的  $X$ ，我們有  $E_A F_A, BC, N_a T_A$  共於一點  $S$ 。

*Proof.* 考慮四圓  $\odot(ABC), \odot(IT_A N_a), \odot(BIC), \odot(AXI)$ 。由 (1.1.4)， $\odot(IT_A N_a)$  與  $\odot(BIC), \odot(AXI)$  相切於  $I$ ，故此四圓有共同的根心。而上述四線皆為其中某兩圓的根軸，因此共點。 ■

**Lemma 1.1.9.** 若  $P$  為  $\widehat{BC}$  上任一點， $J_b, J_c$  分別為  $\triangle ABP, \triangle APC$  的內心，則  $P, T_A, J_b, J_c$  共圓。

*Proof.* ■

## 1.2 費爾巴哈雙曲線

**Lemma 1.2.1.** 給定一數  $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ，考慮以  $I$  為中心的位似變換將  $\triangle DEF$  送至  $\triangle D_t E_t F_t$ ，則  $AD_t, BE_t, CF_t$  共於一點  $P_t$ ，則  $P_t$  在  $\triangle ABC$  的費爾巴哈雙曲線  $\mathcal{H}_{Fe}$  上。

*Proof.* 由 (1.1.6)， $Na$  的等角共軛點在  $OI$  上，故  $Na \in \mathcal{H}_{Fe}$ ，且由 (1.0.3) 知道  $BNa, CNa$  分別過  $E, F$  在  $\odot(DEF)$  上的對徑點，因此

$$B(E_t, Na; I, H) = t = C(F_t, Na; I, H) \implies BE_t \cap CF_t \in \mathcal{H}_{Fe}.$$

同理可證  $AD_t, BE_t, CF_t$  共點在  $\triangle ABC$  的費爾巴哈雙曲線上。 ■

**Lemma 1.2.2.** 標號沿用 (1.2.1)， $P_{-2}$  是  $I$  在費爾巴哈雙曲線上的對徑點  $X_{80}$ 。

*Proof.* 由  $G$  的  $-2$  倍位似知  $OI$  平行  $HNa$ ，又因為  $OI$  是  $I$  在費爾巴哈雙曲線上的切線，由 (0.2.3) 知  $(I, X_{80}; H, Na)_{\mathcal{H}_{Fe}} = -1$ 。又  $I = P_0, H = P_\infty, Na = P_{-1}$ ，故  $X_{80} = P_{-2}$ 。 ■

**Lemma 1.2.3.**  $(A, B; C, I)_{\mathcal{H}_{Fe}} = (D, E, F, Fe)_{\odot(I)}$ 。

*Proof.* 令  $D'$  為  $D$  在內切圓上的對鏡點，由 (1.2.2) 知  $AX_{80}$  過  $I$  對  $D'$  的對稱點。對  $I$  位似  $1/2$  倍得  $AX_{80}$  和  $D'Fe$  平行，故和  $DFe$  垂直。而  $Fe$  在內切圓上的切線當然垂直  $IFe$ ，故

$$(A, B; C, I)_{\mathcal{H}_{Fe}} = X_{80}(A, B; C, I) = Fe(D, E; F, Fe) = (D, E, F, Fe)_{\odot(I)}. \quad \blacksquare$$

**Lemma 1.2.4.** 費爾巴哈點  $Fe$  是  $\triangle DEF$  的歐拉反射點  $X_{110}$ 。一個三角形的歐拉反射點指的是垂直其歐拉線方向的無窮遠點的等角共軛點。

*Proof.* 令過  $F$  垂直  $OI$  的線和內切圓對  $\angle DFE$  的等角線和內切圓的另一個交點

為  $F'$ 。由 (1.2.3) 知

$$\begin{aligned}
 (D, E; F, Fe)_{\odot(I)} &= (A, B; C, I)_{\mathcal{H}_{Fe}} \\
 &= I(A, B; C, I) \\
 &= \mathcal{L}_{\infty}(EF, DF; DE, \perp OI) && (\text{轉 } 90^\circ) \\
 &= F(E, D; \infty_{DE}, \infty_{\perp OI}) \\
 &= F(D, E; \infty_{BC}, F') && (\text{對 } \angle DFE \text{ 取等角線}) \\
 &= (D, E; F, F')_{\odot(I)}.
 \end{aligned}$$

因此  $Fe = F'$ 。 ■

**Lemma 1.2.5.** 直線  $IH$  是  $Fe$  對  $\triangle DEF$  的正交截線。

*Proof 1.* 令  $D'$  為  $D$  在內切圓上的對鏡點，只需證  $D'Fe, IH, EF$  共點。

$$\begin{aligned}
 (A, B; C, I)_{\mathcal{H}_{Fe}} &= (HA, HB; HC, HI) \\
 &= (ID, IE; IF, IH) \\
 &= (ID \cap EF, E; F, IH \cap EF).
 \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}
 (D, E; F, Fe)_{\odot(I)} &= D'(D, E; F, Fe) \\
 &= (D'D \cap EF, E; F, D'Fe \cap EF).
 \end{aligned}$$

由 (1.2.3) 即知  $D'Fe$  和  $IH$  交在  $EF$  上。 ■

*Proof 2.* 同 *Proof 1.*，我們證明  $D'Fe, IH, EF$  共點。注意到上述交點即為  $D$  對  $EF$  的垂線對費爾巴哈的極點。 ■

**Lemma 1.2.6.**  $\triangle DEF$  的垂心  $T$  是  $IH$  對費爾巴哈雙曲線的極點。特別地， $T$  在  $OI$  上。

*Proof.* 令  $D'$  為  $D$  在內切圓上的對鏡點，由 (1.2.5) 可知  $FeD' \cap EF$  在  $IH$  上，由熱爾岡點的定義知  $Ge = P_1$  (cf.(1.2.1))，故  $Ge$  在費爾巴哈雙曲線  $\mathcal{H}_{Fe}$  上。注意到  $\triangle DEF$  是  $Ge$  對  $\triangle ABC$  的西瓦三角形，故  $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(EF) = D$ 。由於  $FeD'$  過



$\mathcal{H}_{Fe}$  的中心  $Fe$ ，故其極點必在  $\mathcal{L}_\infty$  上。注意到根據 (1.2.2)， $D'Fe$  過  $AI$  中點，故  $D'Fe$  的極點就是  $\infty_{AI}$ 。由於  $AI$  垂直  $EF$ ，因此  $FeD' \cap EF$  對費爾巴哈雙曲線的極線就是  $D$  對  $EF$  的垂線。對  $E, F$  做一樣的論述即得到  $IH$  對  $\mathcal{H}_{Fe}$  的極點是  $\triangle DEF$  垂心。 ■

**Lemma 1.2.7.** 標號沿用 (1.2.1)。令  $T$  為  $\triangle DEF$  垂心，則對所有數  $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ， $T, P_t, P_{-t}$  共線。特別地， $T, Ge, Na$  共線。

*Proof.* 令  $TP_t \cap \mathcal{H}_{Fe} = P_s$ ，則由 (0.2.3) 知

$$\begin{aligned} -1 &= (I, H; P_t, P_s)_{\mathcal{H}_{Fe}} \\ &= (P_0, P_\infty, P_t, P_s)_{\mathcal{H}_{Fe}} \\ &= (P_0, P_\infty, P_t, P_s) \\ &= (0, \infty, t, s) \end{aligned}$$

因此  $s = -t$ 。 ■

## 參考資料

[1] *Li4*. 圓錐曲線

<https://Lii4.github.io/Conic.pdf>