幾何引理維基

$\mathcal{L}i4 + \mathcal{S}_{\otimes} +$ 和輝 (?)

March 8, 2021

目錄

前言

曾經證明過的引理不可能忘記，只不過是想不起而已。

這份講義的內容會以作者們有印象的幾何引理爲主，如果讀者有任何想加進來的引理或者哪裡出現了 typo 都可以私訊我們或寄信到 chjh21005@gmail.com 告訴我。

贊助商： IMOC 2021

Chapter 0

基本性質與記號

0.1 記號

我們以 $\mathcal{L}_\infty$ 代表無窮遠線。若直線 $L \neq \mathcal{L}_\infty$，我們以 $\infty_L = L \cap \mathcal{L}_\infty$ 代表 L 上的無窮遠點。若 X, Y 爲兩點 (不在無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 上)，

- XY 代表過 X, Y 的直線
- $\overline{XY}$ 代表連接 X, Y 的線段 (與 $\mathcal{L}_\infty$ 沒有交點的那個)

若 K, L 爲兩線，

- $K \cap L$ 代表 K 與 L 的交點
- $\measuredangle(K, L)$ 代表 K 與 L 的有向夾角
- $\angle(K, L) = |\measuredangle(K, L)|$ 代表 K 與 L 的無向夾角

對於三點 X, O, Y，

- 有向角 $\measuredangle XOY = \measuredangle(OX, OY)$
- 無向角 $\angle XOY = \angle(OX, OY)$

這邊給出一些有向角的性質，

(i) 對於任意兩線 K, L，

$$\measuredangle(K, L) + \measuredangle(L, K) = 0^\circ.$$

(ii) 若四線 K, K', L, L' 滿足 $K \parallel K', L \parallel L'$，則

$$\measuredangle(K, K') = \measuredangle(L, L').$$

(iii) 對於任意四線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$，

$$\measuredangle(\ell_1, \ell_2) + \measuredangle(\ell_3, \ell_4) = \measuredangle(\ell_1, \ell_4) + \measuredangle(\ell_3, \ell_2).$$

(iv) X, Y, Z 三點共線若且唯若存在另一點 O 使得

$$\measuredangle YXO = \measuredangle ZXO.$$

(v) P, Q, X, Y 四點共圓若且唯若

$$\measuredangle XPY = \measuredangle XQY.$$

有時，若有三線 a, b, c，我們會以 $\triangle abc$ 代表以 a, b, c 三線圍成的三角形 $\triangle(b \cap c)(c \cap a)(a \cap b)$。

我們說 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 與 $\triangle X_2Y_2Z_2$ 正 (反/負) 向相似，記爲

$$\triangle X_1Y_1Z_1 \overset{+}{\sim} (\overset{-}{\sim}) \triangle X_2Y_2Z_2,$$

若 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 與 $\triangle X_2Y_2Z_2$ 相似且

$$\begin{cases} \measuredangle Y_1X_1Z_1 = \pm\measuredangle Y_2X_2Z_2, \\ \measuredangle Z_1Y_1X_1 = \pm\measuredangle Z_2Y_2X_2, \\ \measuredangle X_1Z_1Y_1 = \pm\measuredangle X_2Z_2Y_2. \end{cases}$$

我們記

- $\odot(XYZ)$ 爲 $\triangle XYZ$ 的外接圓
- $\odot(\overline{XY})$ 是以 $\overline{XY}$ 爲直徑的圓
- $\odot(X)$ 是以 X 爲圓心的圓
- $\mathcal{H}(WXYZ)$ 爲過 W, X, Y, Z 的等軸雙曲線

給定一圓 Γ，

- 對於任意一點 P，我們定義 $\mathbf{Pow}_\Gamma(P)$ 爲 P 關於 Γ 的冪

給定任意圓錐曲線 $\mathcal{C}$，

- 對於 $\mathcal{C}$ 上一點 X，我們定義 $T_X\mathcal{C}$ 爲 X 關於 $\mathcal{C}$ 的切線
- 對於 $\mathcal{C}$ 上一點 X，我們通常以 $XP \cap \mathcal{C}$ 或 $\mathcal{C} \cap XP$ 代表 XP 與 $\mathcal{C}$ 的異於 X 的交點 (若 XP 與 $\mathcal{C}$ 相切則還是 X)
- 對於任意一點 P，我們定義 $\mathfrak{p}_\mathcal{C}(P)$ 爲 P 關於 $\mathcal{C}$ 的極線
- 對於任意一線 ℓ，我們定義 $\mathfrak{p}_\mathcal{C}(\ell)$ 爲 ℓ 關於 $\mathcal{C}$ 的極點
- 對於任意 $\triangle ABC$，我們定義

$$\mathfrak{p}_\mathcal{C}(\triangle ABC) = \triangle \mathfrak{p}_\mathcal{C}(A)\mathfrak{p}_\mathcal{C}(B)\mathfrak{p}_\mathcal{C}(C) = \triangle \mathfrak{p}_\mathcal{C}(BC)\mathfrak{p}_\mathcal{C}(CA)\mathfrak{p}_\mathcal{C}(AB).$$

- 對於任意圓錐曲線 $\mathcal{C}'$，我們定義

$$\mathfrak{p}_\mathcal{C}(\mathcal{C}') = \{\mathfrak{p}_\mathcal{C}(T_P\mathcal{C}') \mid P \in \mathcal{C}'\},$$

  同時也是集合 $\{\mathfrak{p}_\mathcal{C}(P) \mid P \in \mathcal{C}'\}$ 的包絡線。

0.1.1 三角形與一點一線

給定 $\triangle ABC$ 與一點 P，我們有：P 關於 $\triangle ABC$ 的

- 西瓦三角形 $\triangle(AP \cap BC)(BP \cap CA)(CP \cap AB)$
- 反西瓦三角形，使得 P 關於其西瓦三角形爲 $\triangle ABC$ (存在性與唯一性詳見 [1])
- 佩多 (垂足) 三角形 $\triangle(P\infty_{\perp BC} \cap BC)(P\infty_{\perp CA} \cap CA)(P\infty_{\perp AB} \cap AB)$
- 反佩多三角形 $\triangle(A\infty_{\perp AP})(B\infty_{\perp BP})(C\infty_{\perp CP})$，使得 P 關於其佩多三角形爲 $\triangle ABC$
- 圓西瓦三角形 $\triangle(AP \cap \odot(ABC))(BP \cap \odot(ABC))(CP \cap \odot(ABC))$

其中，西瓦三角形的定義關於 A, B, C, P 四個點是對稱的，所以也被定義爲一個完全四點形的西瓦三角形。

給定 $\triangle ABC$ 與一線 ℓ，我們有：ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的

- 西瓦三角形 $\triangle(A(BC\cap\ell))(B(CA\cap\ell))(C(AB\cap\ell))$
- 反西瓦三角形，使得 ℓ 關於其西瓦三角形爲 $\triangle ABC$ (同樣地存在性與唯一性詳見 [1])

跟點的情形一樣，西瓦三角形的定義也可以延伸至完全四線形 (但一般稱作對角線三角形)。

0.1.2 三角形的特殊點

當我們給定三角形 ABC，在不特別說明的情況下我們默認

- I, G, O, H 分別爲內心、重心、外心及垂心
- I_x 爲 X-旁心
- $\triangle DEF$ 爲切點三角形，即 I 的佩多三角形
- $\triangle D_xE_xF_x$ 爲 X-切點三角形，即 I_x 的佩多三角形
- $\triangle D'E'F' = \triangle D_aE_bF_c$ 爲旁切點三角形
- $\triangle M_aM_bM_c$ 爲中點三角形
- $\triangle N_aN_bN_c$ 爲弧中點三角形，即 I 的圓西瓦三角形
- $\triangle N'_aN'_bN'_c$ 爲上弧中點三角形，即 $\triangle N_aN_bN_c$ 關於 O 對稱後的像
- $\triangle H_aH_bH_c$ 爲垂足三角形，即 H 的佩多三角形
- N 爲九點圓圓心
- K 爲共軛重心，即 G 的等角共軛點
- Ge 爲熱爾岡點，即 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 的透視中心
- Na 爲納格爾點，即 $\triangle ABC$ 與 $\triangle D'E'F'$ 的透視中心

- Fe 爲費爾巴哈點
- Fe_x 爲 X-費爾巴哈點

當然我們有時會重新定義把上面的默認蓋掉。

0.2 一般引理

Lemma 0.2.1. 若兩圓 Ω, ω 相切於 T，$\overline{AB}$ 爲 Ω 上一弦與 ω 相切於 U，則 TU 爲 $\angle ATB$ 的角平分線。

Proof. 令 A', B' 分別爲 TA, TB 與 ω 異於 T 的交點，則

$$\measuredangle BAT = \measuredangle(BT, T_T\Omega) = \measuredangle(B'T, T_T\omega) = \measuredangle B'A'T,$$

即 $AB \parallel A'B'$。所以

$$\measuredangle ATU = \measuredangle A'TU = \measuredangle A'UA = \measuredangle UA'B' = \measuredangle UTB. \qquad \blacksquare$$

Lemma 0.2.2. 若兩個三角形 $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ 位似 (即 $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$, $AB \parallel A'B'$)，則 AA', BB', CC' 共點。

Proof. 迪沙格定理。 $\blacksquare$

Lemma 0.2.3. 給定三角形 $\triangle_1 = \triangle A_1B_1C_1$, $\triangle_2 = \triangle A_2B_2C_2$, $\triangle_3 = \triangle A_3B_3C_3$，則 $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$ 共透視軸若且唯若 $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$ 兩兩透視中心共線。

Proof. $\blacksquare$

Lemma 0.2.4. 若 P, Q 爲兩點滿足 $BPCQ$ 爲平行四邊形，則 $\measuredangle BAP = \measuredangle QAC$ 若且唯若 $\measuredangle ABP = \measuredangle PCA$。

Proof 1. 取 A' 使得 $\triangle ABP \overset{+}{\cong} \triangle A'QC$，則

$$\begin{aligned} \measuredangle BAP = \measuredangle QAC &\iff \measuredangle QA'C = \measuredangle QAC \\ &\iff A, A', Q, C \text{ 共圓} \\ &\iff \measuredangle A'QC = \measuredangle A'AC \\ &\iff \measuredangle ABP = \measuredangle PCA. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Lemma 0.2.5. 若 D_1, D_2 位於 BC 上，E_1, E_2 位於 CA 上，F_1, F_2 位於 AB 上，滿足 E_1, E_2, F_1, F_2、F_1, F_2, D_1, D_2、D_1, D_2, E_1, E_2 分別共圓，則 D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2 共圓。

Proof. 令 $\omega_A = \odot(E_1E_2F_1F_2)$, $\omega_B = \odot(F_1F_2D_1D_2)$, $\omega_C = \odot(D_1D_2E_1E_2)$。若六點不共圓，則 $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ 兩兩相異，而他們之間的根軸爲 $\triangle ABC$ 三邊，但我們知道三根軸共點於根心，矛盾。 ■

Lemma 0.2.6. 給定 $\triangle ABC$ 和一點 P，設 P 關於 CA, AB 的垂足爲 P_B, P_C。設 AQ 爲 AP 關於 $\angle BAC$ 的等角線，則 $AQ \perp P_BP_C$。

Proof. 設 $AQ \cap P_BP_C = D$，則 A, P_B, P_C, P 四點共圓，故

$$\measuredangle AP_BD = \measuredangle AP_BP_C = \measuredangle APP_C,\ \measuredangle P_CAP = \measuredangle BAP = \measuredangle DAP_B.$$

因此 $\triangle AP_BD \overset{+}{\sim} \triangle APP_C$，故 $\measuredangle ADP_B = 90^\circ$，即 $AQ \perp P_BP_C$。 ■

Lemma 0.2.7 (等角共軛點)**.** 給定三角形 $\triangle ABC$ 和一點 P，則存在一點 P^* 滿足

$$\measuredangle BAP + \measuredangle CAP^* = \measuredangle CBP + \measuredangle ABP^* = \measuredangle ACP + \measuredangle BCP^* = 0^\circ.$$

Proof 1. 考慮 P 的佩多三角形 $\triangle P_AP_BP_C$，注意到 $\triangle ABC$ 和 $\triangle P_AP_BP_C$ 正交，因此 A 關於 P_BP_C, B 關於 P_CP_A, C 關於 P_AP_B 的垂線共點，因此由 (0.2.6) 知道所共的點 P^* 滿足

$$\measuredangle BAP + \measuredangle CAP^* = \measuredangle CBP + \measuredangle ABP^* = \measuredangle ACP + \measuredangle BCP^* = 0^\circ. \quad ■$$

Proof 2. 令 $\triangle XYZ$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形，$\triangle P_xP_yP_z$ 爲 P 關於 $\triangle XYZ$ 的佩多三角形。我們有

$$\measuredangle P_yP_xP_z = \measuredangle P_yP_xP + \measuredangle PP_xP_z = \measuredangle XZC + \measuredangle BYX = \measuredangle BAC.$$

同理有 $\measuredangle P_zP_yP_x = \measuredangle CBA$, $\measuredangle P_xP_zP_y = \measuredangle ACB$，因此 $\triangle P_xP_yP_z \overset{+}{\sim} \triangle ABC$。取 P^* 使得 $\triangle ABC \cup P^* \overset{+}{\sim} \triangle P_xP_yP_z \cup P$，則

$$\measuredangle BAP + \measuredangle CAP^* = \measuredangle BAP + \measuredangle P_zP_xP = \measuredangle BAP + \measuredangle PAB = 0^\circ. \quad ■$$

Lemma 0.2.8. 給定 $\triangle ABC$ 中的一對等角共軛點 P, P^*，設 P, P^* 的佩多三角形分別爲 $\triangle P_AP_BP_C$, $\triangle P_A^*P_B^*P_C^*$，則 P_A, P_B, P_C, P_A^*, P_B^*, P_C^* 六點共圓。

Proof. 見 [1], 1.5 節。 ■

Proof. 注意到 A, P_B, P_C, P 四點共圓，A, P_B^*, P_C^*, P^* 四點共圓，因此

$$\measuredangle P_C^*P_CP_B = \measuredangle AP_CP_B = \measuredangle APP_B = \measuredangle P_C^*P^*A = \measuredangle P_C^*P_B^*A = \measuredangle P_C^*P_B^*P_B$$

故 P_C^*, P_B^*, P_B ,P_C 四點共圓，同理 P_A^*, P_C^*, P_C ,P_A 四點共圓，P_B^*, P_A^*, P_A ,P_B 四點共圓，因此由 (0.2.5)，$P_A, P_B, P_C, P_A^*, P_B^*, P_C^*$ 六點共圓。 ■

Lemma 0.2.9. 設 P, P^* 為 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點對，則存在一圓錐曲線以 P, P^* 為焦點和 BC, CA, AB 相切。

Proof. 見 [1], 1.5 節。 ■

Lemma 0.2.10 (等截共軛線)**.** 設直線 ℓ 交 $\triangle ABC$ 三邊於 D, E, F，並設 D' 為 D 關於 M_a 的對稱點，類似地在 CA, AB 上定義 E', F'，則 D', E', F' 三點共線且平行於 $\triangle ABC \cup \ell$ 的牛頓線。

Proof. 設 G 為 $\triangle ABC$ 的重心。對於任意點 P，考慮以 A 為中心比例為 2 的位似變換合成上以 M_A 為中心比例為 -1 的位似變換將 P 送至 P^c。則由孟氏定理知道此變換把 P 送至 P 的反補點，即 $\overline{P^cG} = 2\overline{GP}$，故對於三頂點此變換皆相同。設 T_E, T_F 為 BE, CF 中點，則 T_ET_F 為 $\triangle ABC \cup \ell$ 的牛頓線，且由上面的討論容易發現 T_E, T_F 的反補點為 E', F'，故反補變換將 $\triangle ABC \cup \ell$ 的牛頓線送至 D^c, E^c, F^c，因此三點共線且平行牛頓線。 ■

Lemma 0.2.11. 設 X, Y 為一圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 上的兩點，X, Y 關於 $\mathcal{C}$ 的切線交於 P，則對於任意過 P 並交 $\mathcal{C}$ 於 A, B 兩點的直線，皆有

$$(X, Y; A, B)_{\mathcal{C}} = -1.$$

Lemma 0.2.12. 設 $\mathcal{C}$ 為三角形 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線，X 為任意點，且設 AX, BX, CX 交 $\mathcal{C}$ 於 X_A, X_B, X_C，P 為 $\mathcal{C}$ 上一點，設 PX_A, PX_B, PX_C 交 BC, CA, AB 於 P_A, P_B, P_C，則 P_A, P_B, P_C, X 共線。

Proof. 設考慮 $\mathcal{C}$ 上六點 $BACX_CPX_B$，則由帕斯卡定理 $BA \cap PX_C$, $AC \cap PX_B$, $CX_C \cap BX_C$ 共點，即 P_C, P_B, X 共點，同理可證 P_A 也在此線上，故得證。 ■

Lemma 0.2.13. 設 P, Q 爲 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點，且 AP, AQ 交 $\odot(ABC)$ 於 U, V，AQ 交 BC 於 R，則

$$\frac{AP}{PU} = \frac{QR}{RV}.$$

Proof 1.

$$\frac{AP}{UP} = (A, U; P, \infty) = (R, \infty; Q, V) = \frac{RQ}{RV}. \qquad \blacksquare$$

Proof 2. 考慮等角共軛點對 (P, Q), (U, ∞_{AV})，我們有 $A = PU \cap Q\infty_{AV}$, $X := P\infty_{AV} \cap QU$ 爲等角共軛點對，因此 $P\infty_{AV}$, QU, BC 共點。故

$$\frac{AP}{PU} = \frac{QX}{XU} = \frac{QR}{RV}. \qquad \blacksquare$$

Lemma 0.2.14. 設 X, Y 爲 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點，P 爲外接圓 $\odot(ABC)$ 上任意點。設 $AX \cap (ABC) = X_A$，$PX_A \cap BC = P_A$，則

$$\measuredangle(XP_A, BC) = \measuredangle APY$$

Proof. 設 $AY \cap (ABC) = R$, $AX \cap BC = D$，做 E 在 X_AP_A 上使得 $DE \parallel XP_A$，注意到

$$\measuredangle P_AX_AD = \measuredangle PRA, \quad \measuredangle DP_AX_A = \measuredangle RX_AP_A = \measuredangle RX_AP = \measuredangle RAP,$$

因此 $\triangle P_AX_AD \overset{-}{\sim} \triangle ARP$。由 (0.2.13)，

$$\frac{AY}{YR} = \frac{XD}{DX_A} = \frac{P_AE}{EX_A}.$$

因此我們有 $\triangle P_AED \overset{-}{\sim} \triangle AYP$，最後由算角度

$$\measuredangle APY = \measuredangle EDP_A = \measuredangle XP_AD = \measuredangle(XP_A, BC). \qquad \blacksquare$$

Lemma 0.2.15. 給定一個以 F 爲焦點 ℓ 爲準線的拋物線 $\mathcal{C}$，對於準線上任意點 P，考慮以 P 爲圓心過 F 的圓 $\odot(P)$，則 $\mathcal{C}$ 的包絡線的對 $\odot(P)$ 極點軌跡爲一以 F 爲中心過並和 ℓ 相切於 P 點的等軸雙曲線。

Lemma 0.2.16 (正交截線)**.** 給定 $\triangle ABC$，設 P 爲任意點，考慮 BC, CA, AB 上的三點 D, E, F 滿足

$$AP \perp PD, \quad BP \perp PE, \quad CP \perp PF$$

則 D, E, F 三點共線。

Proof 1. 考慮一以 P 爲圓心的圓 $\odot(P)$，則我們想證明 $\mathfrak{p}_{\odot(P)}(D)$, $\mathfrak{p}_{\odot(P)}(E)$, $\mathfrak{p}_{\odot(P)}(F)$ 三點共線，注意到 $\measuredangle(\mathfrak{p}_{\odot(P)}(D), \mathfrak{p}_{\odot(P)}(A)) = \measuredangle DPA = 90^\circ$ 故 $\mathfrak{p}_{\odot(P)}(D)$, $\mathfrak{p}_{\odot(P)}(E)$, $\mathfrak{p}_{\odot(P)}(F)$ 爲 $\mathfrak{p}_{\odot(P)}(\triangle ABC)$ 的高，故共點。 ■

Proof 2. 令 $D' = BC \cap EF$。考慮完全四線形 $\triangle ABC \cup EF$，我們知道三個直徑圓 $\odot(\overline{AD'})$, $\odot(\overline{BE})$, $\odot(\overline{CF})$ 共軸。注意到 P 在 $\odot(\overline{BE})$ 與 $\odot(\overline{CF})$ 上，因此 P 也在 $\odot(\overline{AD'})$ 上，故

$$\measuredangle APD' = 90^\circ = \measuredangle APD,$$

即 D, E, F 共線。 ■

Lemma 0.2.17. 三角形 $\triangle ABC$，P 爲任意點，則 $\mathcal{O}_{\triangle ABC}(P)$ 垂直 P 關於 $\mathcal{H}(ABCP)$ 的切線。

Proof 1. 考慮一以 P 爲圓心的圓 $\odot(P)$，則由 (0.2.15) 知道 $\mathfrak{p}_{\odot(P)}(A)$, $\mathfrak{p}_{\odot(P)}(B)$, $\mathfrak{p}_{\odot(P)}(C)$ 會切一個以 $T_P\mathcal{H}$ 爲準線的拋物線，故 $\mathfrak{p}_{\odot(P)}(\triangle ABC)$ 的垂心在 T_P 上，但由 (0.2.16) 知道 $\mathfrak{p}_{\odot(P)}(\triangle ABC)$ 的垂心就是 $\mathfrak{p}_{\odot(P)}(\mathcal{O}_{\triangle ABC}(P))$ 故原命題由極線垂直極點連圓心得證。 ■

Proof 2. ■

Lemma 0.2.18. 設 P, Q 爲 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點，$\triangle DEF$ 爲 P 的反西瓦三角形，則 PQ 和 $\mathcal{H}(DEFP)$ 相切。

Proof 1. 考慮一以 P 爲圓心的圓 $\odot(P)$，設 $\mathcal{C}$ 是以 P, Q 爲焦點和 BC, CA, AB 相切的圓錐曲線。則 $\mathcal{C}$ 的包絡線對 $\odot(P)$ 的極點軌跡爲 $\mathfrak{p}_{\odot(P)}(\triangle ABC)$ 的外接圓，故 $\mathfrak{p}_{\odot(P)}(\triangle ABC)$ 外心在 PQ 連線上。注意到 $\mathfrak{p}_{\odot(P)}(\triangle DEF)$ 爲 $\mathfrak{p}_{\odot(P)}(\triangle ABC)$ 的中點三角形，所以 $\mathfrak{p}_{\odot(P)}(\mathcal{O}_{\triangle DEF}(P))$ 在 PQ 上，因此 PQ 和 $\mathcal{H}(DEFP)$ 相切。 ■

Lemma 0.2.19 (八點錐線定理)**.** 三角形 ABC，其中 U, V 爲任意兩點，設 $\triangle U_AU_BU_C$, $\triangle V_AV_BV_C$ 爲 U, V 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形，則

$$U_A, U_B, U_C, U, V_A, V_B, V_C, V \text{ 八點共圓錐曲線。}$$

Proof 1. 考慮過 U_A, U_B, U_C, U, V 的圓錐曲線 $\mathcal{C}$，則我們只須證明 $V_A \in \mathcal{C}$。注意到 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(A) = BC$，考慮 AV 和 BC,$\mathcal{C}$ 的交點 X,V_A'，則我們有

$$(A, X; V, V_A') = -1 = (A, X; V, V_A).$$

故 $V_A \in \mathcal{C}$。 ■

Lemma 0.2.20. 三角形 ABC，設 $\triangle H_aH_bH_C$ 爲 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，設 P, P^* 爲 $\triangle H_aH_bH_C$ 的等角共軛點對則 $P^* \in T_P\mathcal{H}(ABCP)$

Proof. 考慮 $\triangle ABC$ 的垂心 H，設 DEF 爲 P 對 $H_aH_bH_c$ 的反西瓦三角形，則由 (0.2.19) 知道 D, E, F, P, A, B, C, H 共圓錐曲線，再由 (0.2.18) 知道

$$P^* \in T_P\mathcal{H}(DEFP) = T_P\mathcal{H}(ABCP)$$ ■

Lemma 0.2.21. 給定一拋物線 $\mathcal{P}$，其中焦點和準線爲 F, ℓ，則對於任意關於 $\mathcal{P}$ 的自共軛三角形 $\triangle ABC$，$\mathcal{O}_{\triangle ABC}(P) = \ell$。

Proof. 考慮一以 F 爲圓心的圓 $\odot(F)$，則 $\mathcal{P}$ 的包絡線對 $\odot(F)$ 的極點軌跡爲一以 $\mathfrak{p}_{\odot(F)}(\ell)$ 爲圓心的圓 Γ。注意到配極保交比，所以 $\mathfrak{p}_{\odot(P)}(\triangle ABC)$ 爲 Γ 的自共軛三角形，因此其垂心爲 $\mathfrak{p}_{\odot(F)}(\ell)$ 故得證。 ■

Lemma 0.2.22. 設 $\mathcal{H}$ 爲一等軸雙曲線，且 P, P' 爲一對對徑點，X 爲 $\mathcal{H}$ 上任意點，則

$$\measuredangle(T_P\mathcal{H}, PX) = \measuredangle XP'P.$$

Proof. 注意到 $\mathcal{H}$ 是 $\overline{PP'}$ 的中垂線關於 $\triangle XPP'$ 的等角共軛軌跡，故得證。 ■

Lemma 0.2.23. 設 $\triangle XYZ$ 爲完全四點形 (A, B, C, D) 的西瓦三角形，則對於任意過 A, B, C, D 的圓錐曲線 $\mathcal{C}$，$\triangle XYZ$ 爲關於 $\mathcal{C}$ 的自共軛三角形，即

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\triangle XYZ) = \triangle XYZ.$$

特別地，當 $\mathcal{C}$ 爲一圓 $\odot(O)$，我們可得 O 爲 $\triangle XYZ$ 的垂心。

Lemma 0.2.24.

Lemma 0.2.25. 若一錐線 $\mathcal{C}$ 上四點 $ABCD$ 是一個平行四邊形，則 $AC \cap BD$ 是 $\mathcal{C}$ 的中心。

Lemma 0.2.26. X, Y 是三角形 $\triangle ABC$ 的一組等角共軛點對。對 XY 上任意點 P，XQ 切 $(ABCXP)$。其中 Q 是 P 對 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。

Proof. 令 XY 分別交 BC, CA, AB 於 D, E, F，PA 交 BC 於 P_A。上述命題等價要證明

$$X(Q, A, B, C) = (X, A, B, C)_{(ABCXP)}$$

注意到前者等價 $(Q, A, B, C)_{(ABCXY)}$，取等角共軛變換即爲

$$\begin{aligned}
X(Q, A, B, C) &= (Q, A, B, C)_{(ABCXY)} \\
&= (P, D, E, F) && \text{(等角共軛變換)} \\
&= A(P_a, D, C, B) \\
&= (D, P_a, B, C) \\
&= P(X, A, B, C) \\
&= (Q, A, B, C)_{(ABCXY)}
\end{aligned}$$

■

Chapter 1

内心

Lemma 1.0.1. 我們有

$$\measuredangle BIC = 90^\circ + \measuredangle BAI = 90^\circ + \measuredangle IAC.$$

Proof. 注意到 AI, BI, CI 分別垂直 EF, FD, DE，所以

$$\measuredangle BIC = \measuredangle FDE = \measuredangle AFE = 90^\circ + \measuredangle BAI = 90^\circ + \measuredangle IAC. \qquad \blacksquare$$

Lemma 1.0.2 (雞爪圓). 設 N_a 為 $\widehat{BC}$ 弧中點，則 B, I_a, C, I 共圓且圓心為 N_a。

Proof. 注意到

$$\measuredangle BIN_a = \measuredangle BIA = \measuredangle BAI + \measuredangle IBA = \measuredangle N_aAC + \measuredangle IBA = \measuredangle N_aBI$$

故 $\overline{N_aI} = \overline{N_aB}$，同理有 $\overline{N_aI} = \overline{N_aC} = \overline{N_aI_a}$。 $\blacksquare$

Lemma 1.0.3. 設 $\triangle ABC$ 中 A-旁切圓切 BC 於 D'，則 $\overline{BC}$ 中點 M_a 為 $\overline{DD'}$ 中點。

Proof 1. 令 I_a 為 A-旁心，由 (1.0.2)，$\overline{II_a}$ 的中點為 $\widehat{BC}$ 中點 N_a，故

$$\frac{DM_a}{M_aD'} = \frac{IN_a}{N_aI_a} = 1. \qquad \blacksquare$$

Lemma 1.0.4. 設 $\triangle ABC$ 中 A-旁切圓切 BC 於 D'，M_a 為 $\overline{BC}$ 中點，則 $IM_a \parallel AD'$。

Proof. 令 D^* 爲 D 關於 $\odot(I)$ 的對徑點，過 D^* 作平行於 BC 的直線分別交 AB, AC 於 XY，則 $\triangle AXY$ 與 $\triangle ABC$ 位似。因此 A, D^*, D' 共線。由 (1.0.3)，IM_a 爲 $\triangle DD'D^*$ 的 D-中位線，故 $IM_a \parallel D^*D' = AD'$。 ■

Lemma 1.0.5 (熱爾岡點)**.** 直線 AD, BE, CF 共於一點 Ge。

Proof 1. 由西瓦定理及

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = 1.$$ ■

Proof 2. 考慮六折線 $BDCEAF$，由於其與內切圓 $\odot(I)$ 相切，由布里昂雄定理得證。 ■

Proof 3. 由 Sondat 定理，$\triangle DEF$ 與 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(\triangle DEF)$ 透視，而我們顯然有

$$\mathfrak{p}_{\odot(I)}(\triangle DEF) = \triangle ABC.$$ ■

Lemma 1.0.6 (納格爾點)**.** 直線 AD', BE', CF' 共於一點 Na。

Proof 1. 由西瓦定理及

$$\frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} \cdot \frac{AF'}{F'B} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} = 1.$$ ■

Lemma 1.0.7. 我們有 I, G, Na 共線且

$$\frac{NaG}{GI} = 2.$$

Proof. 由 (1.0.4)，$M_aI \parallel ANa$。同理有 $M_bI \parallel BNa$, $M_cI \parallel CNa$。又 $\triangle ABC$ 與 $\triangle M_aM_bM_c$ 位似且位似比爲 -2，因此由 $\triangle ABC \cup Na \overset{+}{\sim} \triangle M_aM_bM_c \cup I$ 可得

$$\frac{NaG}{GI} = 2.$$ ■

Lemma 1.0.8. 直線 HNa 平行於 OI。

Proof. 由 (1.0.7) 及 (2.0.6)，

$$\frac{HG}{GO} = 2 = \frac{NaG}{GI},$$

因此 $HNa \parallel OI$。 ■

Lemma 1.0.9. 設 $\odot(AEF)=\odot(\overline{AI})$ 和 $\odot(ABC)$ 異於 A 的交點爲 X，則 D, X, $\widehat{BC}$ 弧中點 N_a 共線。

Proof 1. 注意到 X 是 $\triangle ABC\cup EF$ 的密克點，故 $\triangle XBF\overset{+}{\sim}\triangle XCE$，因此

$$\frac{XB}{XC}=\frac{FB}{EC}=\frac{DB}{DC}.$$

故 $\measuredangle BXD=\measuredangle DXC$。因爲 A, X 位於 BC 同側且 D 位於 $\overline{BC}$ 內，因此 XD 爲 $\angle BXC$ 的內角平分線且 X, D, N_a 共線。 ■

Proof 2. 注意到 X 是 $\triangle ABC\cup EF$ 的密克點。令 N_a' 爲 N_a 關於外接圓的對徑點，Y 爲 EF 和 BC 的交點，則我們有 X, Y, F, B 共圓，因此

$$\measuredangle YXN_a'=\measuredangle YXB+\measuredangle BXN_a'=\measuredangle YFB+\measuredangle BAN_a'=\measuredangle EFB+\measuredangle BAN_a'=0^\circ.$$

故 X, Y, N_a' 共線，因此

$$(N_a,N_a';B,C)=-1=(D,Y;B,C)=X(D,Y;B,C),$$

故 X, D, N_a 共線。 ■

Lemma 1.0.10. 標號同 (1.0.9)，設 I 關於垂線 AH 的垂足爲 T，則直線 XDN_a 也經過 T 與外接圓與內切圓的外位似中心 X_{56}。

Proof. 注意到 $T\in\odot(AIX)$，所以

$$\measuredangle AXT=\measuredangle AIT=\measuredangle(AI,BC)=\measuredangle AXN_a,$$

即 X,T,N_a 共線。令 $\triangle A'B'C'$ 爲 $\triangle DEF$ 的垂心關於 $\triangle DEF$ 的圓西瓦三角形，則 $\triangle A'B'C'$ 與 $\triangle ABC$ 位似且位似比爲正。由 $\triangle A'B'C'\cup D\overset{+}{\sim}\triangle ABC\cup N_a$ 可得 DN_a 過 $\odot(A'B'C')$ 與 $\odot(ABC)$ 的外位似中心 X_{56}。 ■

Lemma 1.0.11. 標號同 (1.0.9)，設 IX 交 EF 於 T，則 $DT\perp EF$。

Proof. 注意到 I 是 $\odot(AEF)$ 上 $\widehat{EF}$ 的弧中點，故

$$\frac{TF}{TE}=\frac{XF}{XE}=\frac{XB}{XC}=\frac{DB}{DC},$$

所以 $\triangle XTD\overset{+}{\sim}\triangle XFB$，因此

$$\measuredangle XN_aA=\measuredangle XBA=\measuredangle XBF=\measuredangle XDT\implies DT\parallel N_aA\perp EF.$$ ■

Lemma 1.0.12. 令 H, I 分別爲 $\triangle ABC$ 的垂心和內心，則 H, I 爲 $\triangle DEF$ 的垂足三角形的一對等角共軛點。

Proof. 令 H_d 爲 D 關於 EF 的垂足，我們只需要證明 $\measuredangle HH_dD = \measuredangle DH_dI$，其他兩邊同理。由 (1.0.11)，$X$ 是完全五線形 $\triangle ABC \cup EF \cup DH_d$ 的密克點，由 (4.0.3) 可得 $\triangle AEF$, $\triangle ABC$ 的垂心和 H_d 共線。注意到 $\triangle AEF$ 垂心是 I 關於 EF 的對稱點 I'，所以

$$\measuredangle HH_dD = \measuredangle I'H_dD = \measuredangle DH_dI. \quad \blacksquare$$

Lemma 1.0.13. 設 EF 與 BC 交於 X，則 $(B, C; D, X) = -1$。

Proof 1. 由孟氏定理，

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

因此

$$\frac{BD/DC}{BX/XC} = -\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1. \quad \blacksquare$$

Proof 2. 由 (1.0.5) 及完全四線形 (CA, AB, BE, CF) 的調和分割性質 (4.0.8)。 ■

Lemma 1.0.14. 設 ID 交 EF 於 T，則 AT 平分 $\overline{BC}$。

Proof 1. 過 T 作平行於 BC 的直線交 CA, AB 於 X, Y，則 I 關於 XY, YA, AX 的垂足 T, E, F 共線。由西姆松定理，$I \in \odot(AXY)$，由 $\triangle AXY \cup I$ 與 $\triangle ABC \cup N_a$ 位似可得 A, T, M_a 共線。 ■

Proof 2. 過 A 作平行於 BC 的直線交 EF 於 S，則 $ST = \mathfrak{p}_{\odot(I)}(A)$。由於 $IT \perp AS$，所以 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(T) = AS$，故

$$A(B, C; T, \infty_{BC}) = (F, E; T, S) = -1,$$

即 AT 平分 BC。 ■

Lemma 1.0.15. 設 J 爲 C 關於 BI 的垂足，則 J 爲 C-中位線與 EF 的交點。

Proof 1. 由

$$\measuredangle(M_aJ, AB) = \measuredangle M_aJB + \measuredangle JBA = \measuredangle IBC + \measuredangle CBI = 0,$$

我們知道 J 位於 C-中位線上。注意到 C, E, J, I 共圓，所以由 (1.0.1)，

$$\measuredangle JEC = \measuredangle BIC = 90^\circ + \measuredangle IAE = \measuredangle FEC,$$

即 $J \in EF$。 ■

Proof 2. J 位於 C-中位線同上面的算角度證明。由於 $\triangle DEF$ 爲熱爾岡點 Ge 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形且 Ge 位於費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上，因此 $EF = \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(D)$。注意到 D, J 爲 $\triangle IBC$ 的垂足三角形的兩個頂點且 $I \in \mathcal{H}_{Fe}$，所以 $J \in \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(D) = EF$。 ■

Lemma 1.0.16. 令 X 爲 AI 與 BC 的交點，則

$$(A, X; I, I_a) = -1.$$

Proof. 我們有

$$\frac{AI}{IX} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BX}} = -\frac{AI_a}{I_aX}.$$ ■

Lemma 1.0.17. 設 H_a 爲 A 關於 BC 的垂足，X 爲 AI 與 BC 的交點，則

$$(H_a, X; D, D') = -1.$$

Proof. 由 (1.0.16)，

$$(A, AI \cap BC; I, I_a) = -1,$$

將其關於 BC 投影即可得到

$$(H_a, X; D, D') = -1.$$ ■

Lemma 1.0.18. 令 H_a 爲 A 關於 BC 的垂足，則 DI_a 平分 $\overline{AH_a}$。

Proof. 由 (1.0.16)，我們有

$$(A, H_a; DI_a \cap \infty_{AH_a}, AH_a) = D(A, AI \cap BC; I, I_a) = -1,$$

即 DI_a 平分 $\overline{AH_a}$。 ■

Lemma 1.0.19. 三角形 DEF 的歐拉線是 OI。

Proof. 注意到 $\triangle DEF$ 與 $\triangle I_aI_bI_c$ 位似，$\triangle I_aI_bI_c$ 的歐拉線是 OI，且 I 在 $\triangle DEF$ 的歐拉線上，因此他們的歐拉線重合，故 $\triangle DEF$ 的歐拉線是 OI。 ■

Lemma 1.0.20. 設 BI, CI 分別與 CA, AB 交於 Y, Z，YZ 與 $\odot(ABC)$ 交於 P, Q 兩點，則 I, I_b, I_c, P, Q 共圓。

Proof. 由 Y 位於 $\odot(ACPQ)$ 及 $\odot(ACII_b)$ 的根軸上知 I, I_b, P, Q 共圓。同理有 I, I_c, P, Q 共圓。 ■

Lemma 1.0.21. 我們有 I 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}(I)$ 垂直 OI，類似地，有 I_x 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}(I_x)$ 垂直 OI_x，意即，若 BI, CI 分別與 CA, AB 交於 Y, Z，則 $OI_a \perp YZ$。

Proof 1. 我們證明 $OI_a \perp YZ$，其餘情況類似。由 (1.0.2)，

$$YI \cdot YI_b = YC \cdot YA, \quad ZI \cdot ZI_c = ZA \cdot ZB,$$

因此 YZ 為 $\odot(ABC)$ 與 $\odot(II_bI_c)$ 根軸，故垂直 O 與 $\triangle II_bI_c$ 的外心 O' 的連線。注意到 I_a, O 分別為 $\triangle II_bI_c$ 的垂心及九點圓圓心 (由 (2.0.11))，由 (2.0.8)，O', I_a, O 共於 $\triangle II_bI_c$ 的歐拉線，故 $OI_a \perp YZ$。 ■

Proof 2. 注意到 OI 與費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 相切，故 I 的正交截線垂直 OI，且注意到 I 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線，正交截線，及 I 關於 $\odot(DEF)$ 的極線共點，故 I 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線及正交截線平行，因此 I 的三線性極線垂直 OI。 ■

Lemma 1.0.22. 設 D 關於 EF 的對稱點為 D'，則 AD', BC, OI 共點。

1.1 $\triangle BIC$ 的垂心

以下設 H_A, H_B, H_C 分別為 $\triangle BIC, \triangle CIA, \triangle AIB$ 的垂心。

Lemma 1.1.1. 令 $S = ID \cap EF$，則

$$(D, S; I, H_A) = -1.$$

Proof 1. 設 $BI \cap EF = J$, $DI \cap EF = S$, $BC \cap EF = X$，則 C, J, H_A 共線，故

$$J(D, S; I, H_A) = (D, X; B, C) = -1.$$ ■

Proof 2. 由於 $\triangle DEF$ 爲熱爾岡點 Ge 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形且 Ge 位於費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上，因此 $EF = \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(D)$，故原命題由調和性質顯然。 ■

Lemma 1.1.2. 標號同 (1.1.1)，則 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(H_A)$ 爲 $\triangle ABC$ 的 A-中位線。

Proof. 注意到 $S \in EF = \mathfrak{p}_{\odot(I)}(A)$，因此 $A \in \mathfrak{p}_{\odot(I)}(S)$ 且 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(S) \perp IS \perp BC$，故 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(S)$ 過 A 且平行 BC，因此由配極保交比

$$(BC, \mathfrak{p}_{\odot(I)}(S); \mathcal{L}_\infty, \mathfrak{p}_{\odot(I)}(H_A)) = (D, S; I, H_A) = -1.$$

故 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(H_A)$ 爲 A-中位線。 ■

Lemma 1.1.3. 內心 I 關於 $\triangle H_A H_B H_C$ 的西瓦三角形爲切點三角形 $\triangle DEF$。

Proof 1. 由 (1.1.1) 及西瓦三角形的性質。 ■

Proof 2. 我們證明 D, H_B, H_C 共線。由 (1.1.2)，將此命題關於 $\odot(I)$ 配極後等價於 BC, B-中位線, C-中位線共點，即 $\overline{BC}$ 中點。 ■

Lemma 1.1.4. 直線 $H_A Ge$ 過 $\overline{EF}$ 中點 M_d。

Proof. 標號同 (1.1.1)，考慮 AD 和 EF 的交點 U，則

$$M_d(D, U; A, Ge) = -1 = M_d(D, S; I, H_A).$$

故 Ge, M_d, H_A 共線。 ■

Lemma 1.1.5. 直線 $H_A Na$ 平行於 AI。

Proof. 注意到 H_A 關於 $\overline{BC}$ 中點 M_a 的對稱點爲 I_a。令 Na' 爲 N_a 關於 M_a 的對稱點，我們只需證明 $Na' \in AI$。由 (1.0.7)，

$$\frac{NaI}{IG} \cdot \frac{GA}{AM_a} \cdot \frac{M_a Na'}{Na' Na} = (-3) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1,$$

因此 A, I, Na' 共線。 ■

Lemma 1.1.6. 直線 H_AH 過 D 關於 EF 的垂足 H_d 與 I 關於 EF 的對稱點 I'。

Proof. 由 (1.0.12)，H, H_d, I' 共線，因此我們只需證明 H_A 也在此線上。由 (1.1.1)，令 $S = ID \cap EF$, M_d 爲 $\overline{EF}$ 中點，我們有

$$H_d(D, S; I, H_A) = -1 = H_d(\infty_{AI}, M_d; I, I').$$

因此 H_d, H_A, I' 共線。 ■

Lemma 1.1.7. 令 Fe 爲 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈點，則 AH_A, BC, Fe 關於 $\odot(I)$ 的切線交於一點。

1.2 僞內切圓

Lemma 1.2.1 (僞內切圓)**.** 設圓 ω_A 分別與 CA, AB 相切於 E_A, F_A，且與 $\odot(ABC)$ 內切，稱 ω_A 爲 $\triangle ABC$ 的 A-僞內切圓。則 I, E_A, F_A 共線，意即，$I \in \mathfrak{p}_{\omega_A}(A)$。

Proof 1. 令 T_A 爲 ω_A 與 $\odot(ABC)$ 的切點。由 (0.2.1) 可得 T_AE_A 爲 $\angle CT_AA$ 的角平分線，由 E_A 位於 $\overline{CA}$ 內及 T_A, N_b 位於 CA 異側可得 T_A, E_A, N_b 共線。由 $\measuredangle CT_AN_b = \measuredangle CAN_b = \measuredangle N_bCE_A$，我們知道 $\triangle N_bE_AC \overset{-}{\sim} \triangle N_bCT_A$。令 $I' = BN_b \cap E_AF_A$，則

$$\measuredangle T_AF_AI' = \measuredangle T_AF_AE_A = \measuredangle T_AE_AC = \measuredangle T_ACN_b = \measuredangle T_ABI',$$

因此 B, T_A, I', F_A 共圓。由

$$\measuredangle T_AI'N_b = \measuredangle T_AF_AB = \measuredangle T_AE_AF_A = \measuredangle N_bE_AI'$$

我們可得 $\triangle N_bE_AI' \overset{-}{\sim} \triangle N_bI'T_A$，故

$$N_bI'^2 = N_bE_A \cdot N_bT_A = N_bC^2.$$

所以由 (1.0.2) 及 I, I' 在 BN_b 上位於 N_b 同側可得 $I' = I$。 ■

Proof 2. 考慮關於 A 的反演命題，我們只要證明：

若 A-旁切圓分別與 CA, AB 相切於 E_a, F_a，則 A, I_a, E_a, F_a 共圓。

而這顯然是對的。 ■

Proof 3. 同 *Proof 1.*，我們有 T_A, E_A, N_b 共線，同理有 T_A, F_A, N_c 共線。考慮六折線 $ABN_bT_AN_cC$，由於其頂點皆位於 $\odot(ABC)$ 上，所以由帕斯卡定理，E_A, F_A, $I = BN_b \cap CN_c$ 共線。 ■

Lemma 1.2.2. 設圓 ω 與 CA 相切於 $\overline{CA}$ 内，且與 $\odot(ABC)$ 内切。設 P 爲 CA 上一點使得 BP 與 ω 相切，則 $I \in \mathfrak{p}_\omega(A)$。

Proof 1. 證明類似於 (1.2.1) 的 *Proof 1.*。令 T 爲 ω 與 $\odot(ABC)$ 的切點，E, F 分別爲 ω 與 CP, PB 的切點。由 (0.2.1) 可得 TE 爲 $\angle CTA$ 的角平分線，由 E 位於 $\overline{CA}$ 内及 T, N_b 位於 CA 異側可得 T, E, N_b 共線。由 $\measuredangle CTN_b = \measuredangle CAN_b = \measuredangle N_bCE$，我們知道 $\triangle N_bEC \overset{-}{\sim} \triangle N_bCT$。令 $I' = BN_b \cap EF$，則

$$\measuredangle TFI' = \measuredangle TFE = \measuredangle TEC = \measuredangle TCN_b = \measuredangle TBI',$$

因此 B, T, I', F 共圓。由

$$\measuredangle TI'N_b = \measuredangle TFB = \measuredangle TEF = \measuredangle N_bEI'$$

我們可得 $\triangle N_bEI' \overset{-}{\sim} \triangle N_bI'T$，故

$$N_bI'^2 = N_bE \cdot N_bT = N_bC^2.$$

所以由 (1.0.2) 及 I, I' 在 BN_b 上位於 N_b 同側可得 $I' = I$。 ■

Proof 2. ■

Lemma 1.2.3. 標號同 (1.2.1)，令 T_A 爲 ω_A 與 $\odot(ABC)$ 的切點，則 B, T_A, I, F_A 及 C, T_A, I, E_A 分別共圓。

Proof. 由 (1.2.1) 的 *Proof 1.* 可以直接看出。如果在假設 (1.2.1) 是對的情況下，我們有 I, E_A, F_A 共線。由於 BI 與 T_AE_A 交於 N_b，

$$\measuredangle T_AF_AI = \measuredangle(T_AN_b, CA) = \measuredangle N_bT_AC + \measuredangle T_ACA = \measuredangle ABN_b + \measuredangle T_ABA = \measuredangle T_ABI,$$

即 B, T_A, I, F_A 共圓。同理有 C, T_A, I, E_A 共圓。 ■

Lemma 1.2.4. 標號同 (1.2.3)，我們有

$$(A, T_A; N_b, N_c) = -1.$$

Proof. 由 (0.2.11)，

$$(T_A, AT_A \cap \omega_A; E_A, F_A) = -1.$$

由於 ω_A 與 $\odot(ABC)$ 相切於 T_A，因此關於 T_A 位似即可得

$$(T_A, A; N_b, N_c) = (T_A, AT_A \cap \omega_A; E_A, F_A),$$

因此

$$(A, T_A; N_b, N_c) = -1. \qquad \blacksquare$$

Lemma 1.2.5. 標號同 (1.2.3)，令 N_a' 爲 $\widehat{BAC}$ 中點，則 I, N_a', T_A 共線。

Proof 1. 由 (1.2.3) 及 $AI \perp E_AF_A$，

$$\measuredangle IT_AB = \measuredangle IF_AB = \measuredangle IAB + 90^\circ = \measuredangle N_a'AB = \measuredangle N_a'T_AB,$$

所以 I, N_a', T_A 共線。 $\blacksquare$

Proof 2. 由 (1.2.4)，

$$(A, T_A; N_b, N_c) = -1.$$

考慮以 I 爲中心，反演冪爲 $\mathcal{P}(\odot(ABC), I)$ 的反演變換，則

$$-1 = (A, T_A; N_b, N_c) = (N_a, T_AI \cap \odot(ABC); B, C),$$

因此 $T_AI \cap \odot(ABC) = N_a'$。 $\blacksquare$

Lemma 1.2.6. 標號同 (1.2.3)，類似定義 T_B, T_C，則 AT_A, BT_B, CT_C 共點於 $\odot(ABC)$ 與 $\odot(I)$ 的外位似中心 X_{56}。

Proof. 由 Monge 定理，我們有 AT_A 過 $\odot(ABC)$, $\odot(I)$ 的外位似中心 X_{56}。同理，BT_B, CT_C 也過 X_{56}。 $\blacksquare$

Lemma 1.2.7. 內切圓 $\odot(I)$ 和外接圓 $\odot(O)$ 的外、內位似中心分別爲 Na, Ge 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。

Proof. 我們只證明外位似中心的情況，內位似中心的證明類似，標號同 (1.2.1)。由 (1.2.6)，AT_A 過 $\odot(ABC)$, $\odot(DEF)$ 的外位似中心，且透過對 A 反演可以得到 ANa, AT_A 爲等角線。對於 B, C 我們有同樣的結論。 ■

Lemma 1.2.8. 標號同 (1.2.3)，若 P 爲 $\odot(ABC)$ 上任一點，Q 爲 AP 與 BC 的交點，則 $T_A \in \odot(APQ)$。

Proof. 由 Reim 定理及 $DQ = BC$，這等價於證明 T_AD 與過 A 平行於 BC 的直線交於 $\odot(ABC)$。將此命題關於 BC 中垂線對稱，我們需要證明 A, D', U_A 共線，其中 $U_A \in \odot(ABC)$ 滿足 $T_AU_A \parallel BC$。由 (1.2.7) 我們知道 AT_A, $AD' = ANa$ 是關於 $\angle BAC$ 的等角線，因此 A, D', U_A 共線。 ■

Lemma 1.2.9. 標號同 (1.2.3)，令 X 爲 (1.0.9) 中的 X，我們有 E_AF_A, BC, N_aT_A 共於一點 S。

Proof. 考慮四圓 $\odot(ABC)$, $\odot(IT_AN_a)$, $\odot(BIC)$, $\odot(AXI)$。由 (1.2.5)，$\odot(IT_AN_a)$ 與 $\odot(BIC)$, $\odot(AXI)$ 相切於 I，故此四圓有共同的根心。而上述四線皆爲其中某兩圓的根軸，因此共點。 ■

Lemma 1.2.10. 若 P 爲 $\widehat{BC}$ 上任一點，J_b, J_c 分別爲 $\triangle CAP$, $\triangle ABP$ 的內心，則 P, T_A, J_b, J_c 共圓。

Proof. 我們證明 $\triangle T_AN_bJ_b \overset{+}{\sim} \triangle T_AN_cJ_c$。注意到

$$\measuredangle T_AN_bJ_b = \measuredangle T_AN_bP = \measuredangle T_AN_cP = \measuredangle T_AN_cJ_c,$$

由 (1.2.4) 及 (1.0.2)，

$$\frac{\overline{T_AN_b}}{\overline{T_AN_c}} = \frac{\overline{AN_b}}{\overline{AN_c}} = \frac{\overline{J_bN_b}}{\overline{J_cN_c}},$$

所以 $\triangle T_AN_bJ_b \overset{+}{\sim} \triangle T_AN_cJ_c$。 ■

Lemma 1.2.11. 設 D 爲 $\triangle ABC$ 的內切圓與 BC 的切點。若 P 爲 $\overline{BC}$ 內一點，J_b, J_c 分別爲 $\triangle CAP$, $\triangle ABP$ 的內心，則 P, D, J_b, J_c 共圓。

Proof 1. ■

Proof 2. 此爲 (1.2.10) 的旁心命題關於 A 的反演命題。 ■

Lemma 1.2.12. 標號同 (1.2.3)，令 I' 爲 I 關於 T_A 的對稱點，則 AN'_a, BC, I_aI' 共點。

Proof. 由於 N'_a, I, I' 共線且 $I' \in \odot(BI_aCI)$,

$$\measuredangle N'_aAI_a = 90^\circ = \measuredangle N'_aI'I_a,$$

即 A, I', I_a, N'_a 共圓。而此三線爲三圓 $\odot(ABC)$, $\odot(BI_aCI)$, $\odot(AI'I_aN'_a)$ 兩兩之間的根軸。 ■

Lemma 1.2.13. 標號同 (1.2.3)，令 A^+ 爲 AT_A 與 E_AF_A 的交點，A^- 爲 IT_A 與 BC 的交點，則 $A^+A^- \parallel AI$。

Proof. 注意到 I 關於 $\triangle N'_aBC$ 的等角共軛點 I^* 爲 I 關於 $\overline{BC}$ 的中垂線的對稱點，所以由 (0.2.13) 可得

$$\frac{IA^-}{A^-T_A} = \frac{N_aI^*}{I^*U} = \frac{N_aI}{IT_A},$$

其中 U 爲 N_aI^* 與 $\odot(ABC)$ 異於 N_a 的交點。故

$$\frac{AA^+}{A^+T_A} = \frac{N_aI}{IT_A} = \frac{IA^-}{A^-T_A},$$

即 $A^+A^- \parallel AI$。 ■

1.3 費爾巴哈雙曲線

Lemma 1.3.1 (費爾巴哈). 九點圓 $\odot(N)$ 與內切圓 $\odot(I)$ 及三個旁切圓 $\odot(I_a)$, $\odot(I_b)$, $\odot(I_c)$ 相切。分別記 Fe, Fe_a, Fe_b, Fe_c 爲他們之間的切點。

Proof 1. 我們證明 $\odot(N)$ 與 $\odot(I)$ 相切。令 $X = AI \cap BC$，Y 爲 D 關於 AI 的對稱點，則 Y 位於 $\odot(I)$ 上。定義 Fe 爲 YM_a 與 $\odot(I)$ 異於 Y 的交點，以下證明 $\odot(N)$ 與 $\odot(I)$ 相切於 Fe。由 (1.0.17)，

$$M_aH_a \cdot M_aX = M_aD^2 = M_aY \cdot M_aFe,$$

所以 H_a, X, Y, Fe 共圓。令 E_A 爲 $\overline{AH}$ 中點，則

$$\begin{aligned}\measuredangle H_aFeM_a = \measuredangle H_aFeY = \measuredangle H_aXY &= 2\cdot\measuredangle DXA\\ &= 2\cdot\measuredangle H_aAI = \measuredangle HAO = \measuredangle H_aE_AM_a.\end{aligned}$$

即 $Fe \in \odot(H_aM_aE_A) = \odot(N)$。而

$$\begin{aligned}\measuredangle(T_{Fe}\odot(N), T_{Fe}\odot(I)) &= \measuredangle(T_{Fe}\odot(N), FeM_a) + \measuredangle(FeY, T_{Fe}\odot(I))\\ &= \measuredangle FeH_aM_a + \measuredangle XYFe = 0^\circ. \qquad (H_a,\ X,\ Y,\ Fe \text{ 共圓})\end{aligned}$$

故 $\odot(N)$ 與 $\odot(I)$ 相切於 Fe。 ■

Proof 2. 我們知道 I 的佩多圓與九點圓在 (A, B, C, I) 的龐色列點的夾角爲

$$90^\circ + \measuredangle(BC, AP) + \measuredangle(CA, BP) + \measuredangle(AB, CP) = 0^\circ,$$

(見 [1], 2.1 節)，因此兩圓相切。 ■

Lemma 1.3.2. 費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe} = (ABCIH)$ 爲 OI 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡。

Proof. 這是因爲 (I, I), (O, H) 是 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，而直線的等角共軛軌跡是一條圓錐曲線。 ■

Lemma 1.3.3. 費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的中心是費爾巴哈點 Fe。

Proof. 見 [1], 2.1 節。 ■

Lemma 1.3.4. 直線 OI 與 $\mathcal{H}_{Fe}$ 相切。

Proof. 若 OI 不與 $\mathcal{H}_{Fe}$ 相切，則 OI 與 $\mathcal{H}_{Fe}$ 交於兩相異點 I, X。令 X^* 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，則

$$X \in OI \cap \mathcal{H}_{Fe} \implies X^* \in \mathcal{H}_{Fe} \cap OI = \{I, X\}.$$

又 $X^* = I$ 會得到 $X = I$，因此 $X^* = X$，那麼 $X^* = I_x$ 爲某個旁心。由 O, I, I_x 共線可得 $\triangle ABC$ 是以 X 爲頂角的等腰三角形 $\triangle XYZ$，此時 OI 已與 $\mathcal{H}_{Fe} = OI \cup YZ$ 相切，矛盾。所以 OI 與 $\mathcal{H}_{Fe}$ 相切。 ■

Lemma 1.3.5. 令 L 為 H 關於 O 的對稱點，則 I, Ge, L 共線。

Proof. 注意到在費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上我們有

$$-1 = (I, H; Na, Ge)_{\mathcal{H}_{Fe}} = I(I, H; Na, Ge) = I(O, H; G, Ge)$$

另一方面我們在歐拉線上有

$$(O, H; G, L) = 1$$

因此 I, Ge, L 共線。 ■

Lemma 1.3.6. 給定任意 $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，考慮以 I 為中心且位似比為 t 的位似變換將 $\triangle DEF$ 送至 $\triangle D_tE_tF_t$，則 AD_t, BE_t, CF_t 共於一點 P_t，且 P_t 在 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上。

Proof. 由 (1.2.7)，Na 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點在 OI 上，故 $Na \in \mathcal{H}_{Fe}$，且由 (1.0.3) 知道 BNa, CNa 分別過 E, F 在 $\odot(DEF)$ 上的對徑點，因此

$$B(E_t, Na; I, H) = t = C(F_t, Na; I, H) \implies BE_t \cap CF_t \in \mathcal{H}_{Fe}.$$

同理可證 AD_t, BE_t, CF_t 共點在 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈雙曲線上。 ■

Lemma 1.3.7. 標號同 (1.3.6)，P_{-2} 是 I 在費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上的對徑點 X_{80}。

Proof. 由 G 的 -2 倍位似知 OI 平行 HNa，又因為 OI 是 I 在費爾巴哈雙曲線上的切線，由 (0.2.11) 知 $(I, X_{80}; H, Na)_{\mathcal{H}_{Fe}} = -1$。又 $I = P_0$, $H = P_\infty$, $Na = P_{-1}$，故 $X_{80} = P_{-2}$。 ■

Lemma 1.3.8. $(A, B; C, I)_{\mathcal{H}_{Fe}} = (D, E; F, Fe)_{\odot(I)}$。

Proof. 令 D' 為 D 關於內切圓的對徑點，由 (1.3.7) 知 AX_{80} 過 I 關於 D' 的對稱點。對 I 位似 1/2 倍得 AX_{80} 和 $D'Fe$ 平行，故和 DFe 垂直。而 Fe 在內切圓上的切線垂直 IFe，故

$$(A, B; C, I)_{\mathcal{H}_{Fe}} = X_{80}(A, B; C, I) = Fe(D, E; F, Fe) = (D, E, F, Fe)_{\odot(I)}.$$ ■

Lemma 1.3.9. 費爾巴哈點 Fe 是 $\triangle DEF$ 的歐拉反射點 X_{110}。一個三角形的歐拉反射點指的是垂直其歐拉線方向的無窮遠點的等角共軛點，以常用記號來表示即 $\infty_{\mathcal{E}}^{*}$。

Proof 1. 令過 F 且垂直 OI 的線關於 $\angle DFE$ 的等角線與內切圓的另一個交點爲 F'。由 (1.3.8) 知

$$\begin{aligned}
(D,E;F,Fe)_{\odot(I)} &= (A,B;C,I)_{\mathcal{H}_{Fe}} \\
&= I(A,B;C,I) \\
&= \mathcal{L}_{\infty}(EF,DF;DE,\perp OI) && (\text{轉 } 90^\circ) \\
&= F(E,D;\infty_{DE},\infty_{\perp OI}) \\
&= F(D,E;\infty_{BC},F') && (\text{對 } \angle DFE \text{ 取等角線}) \\
&= (D,E;F,F')_{\odot(I)}.
\end{aligned}$$

因此 $Fe = F'$。 ■

Proof 2. 將命題對 $\odot(DEF)$ 配極，則由 (0.2.15)，$\mathfrak{p}_{\odot(DEF)}(\mathcal{H}_{Fe})$ 的軌跡切以 Fe 爲焦點 OI 爲準線的拋物線。特別地，$\mathfrak{p}_{\odot(DEF)}(\triangle ABC) = \triangle DEF$，故 Fe 關於 $\triangle DEF$ 的施坦納線爲 OI。 ■

Lemma 1.3.10. 費爾巴哈點 Fe 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線 $\mathcal{O}_{\triangle ABC}(Fe)$ 是 OI。

Proof. 將命題對 $\odot(DEF)$ 配極。由 (0.2.21)，我們只需證明 $\triangle ABC$ 爲關於 $\mathfrak{p}_{\odot(DEF)}(\mathcal{H}_{Fe})$ 的自共軛三角形，但注意到 $\triangle DEF$ 爲 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的自共軛三角形，故得證。 ■

Lemma 1.3.11. 直線 IH 是 Fe 關於 $\triangle DEF$ 的正交截線。

Proof 1. 令 D' 爲 D 關於內切圓的對徑點，我們只需證明 $D'Fe$, IH, EF 共點。

$$\begin{aligned}
(A,B;C,I)_{\mathcal{H}_{Fe}} &= (HA,HB;HC,HI) \\
&= (ID,IE;IF,IH) \\
&= (ID\cap EF,E;F,IH\cap EF).
\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}(D,E;F,Fe)_{\odot(I)} &= D'(D,E;F,Fe)\\ &= (D'D\cap EF,E;F,D'Fe\cap EF).\end{aligned}$$

由 (1.3.8) 即知 $D'Fe$ 和 IH 交在 EF 上。 ■

Proof 2. 同 *Proof 1.*，我們證明 $D'Fe$, IH, EF 共點。注意到上述交點即爲 D 關於 EF 的垂線關於 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的極點 $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(D\infty_{\perp EF})$。 ■

Proof 3. 由 (1.0.12)，H, I 是 $\triangle DEF$ 的垂足三角形的等角共軛點對，因此由 (0.2.18) 我們知道 IH 和 $\triangle DEF$ 的 $\mathcal{H}_J$ 相切，故由 (2.1.10) 得證。 ■

Lemma 1.3.12. 三角形 DEF 的垂心 $T =: X_{65}$ 是 IH 關於費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的極點。特別地，T 在 OI 上。

Proof. 令 D' 爲 D 關於內切圓的對徑點，由 (1.3.11) 可知 $FeD'\cap EF$ 在 IH 上，由熱爾岡點的定義知 $Ge = P_1 \in \mathcal{H}_{Fe}$ (cf.(1.3.6))。注意到 $\triangle DEF$ 是 Ge 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形，故 $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(EF) = D$。由於 FeD' 過 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的中心 Fe，故其極點必在 $\mathcal{L}_\infty$ 上。注意到根據 (1.3.7)，$D'Fe$ 過 AI 中點，故 $D'Fe$ 的極點就是 ∞_{AI}。由於 AI 垂直 EF，因此 $FeD'\cap EF$ 關於費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的極線就是 D 對 EF 的垂線。對 E, F 做一樣的論述即得到 IH 關於 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的極點是 $\triangle DEF$ 垂心 T。 ■

Lemma 1.3.13. 標號同 (1.3.6)。令 T 爲 $\triangle DEF$ 垂心，則對所有 $t\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$，$T$, P_t, P_{-t} 共線。特別地，T, Ge, Na 共線。

Proof. 令 $TP_t\cap\mathcal{H}_{Fe} = P_s$，則由 (0.2.11) 知

$$\begin{aligned}-1 &= (I,H;P_t,P_s)_{\mathcal{H}_{Fe}}\\ &= (P_0,P_\infty,P_t,P_s)_{\mathcal{H}_{Fe}}\\ &= (P_0,P_\infty,P_t,P_s)\\ &= (0,\infty,t,s).\end{aligned}$$

因此 $s=-t$。 ■

Lemma 1.3.14. 旁心三角形 $\triangle I_aI_bI_c$ 與 $\triangle ABC$ 的中點三角形 $\triangle M_aM_bM_c$ 的透視中心 Mt 位於 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上。

Chapter 2

歐拉線

Lemma 2.0.1. 設 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，則

$$\measuredangle BHC = 180^\circ - \measuredangle BAC.$$

Proof. 由於 BH, CH 分別於 CA, AB 垂直，所以

$$\measuredangle BHC = \measuredangle CAB = 180^\circ - \measuredangle BAC. \qquad \blacksquare$$

Lemma 2.0.2. 設 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，則

(i) $\measuredangle BAC = 90^\circ - \measuredangle CBO$,

(ii) $\measuredangle BOC = 2 \cdot \measuredangle BAC$.

Proof.

(i) 令 A^* 爲 A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點。我們有

$$\measuredangle BAC = \measuredangle BA^*C = 90^\circ - \measuredangle CBA^* = 90^\circ - \measuredangle CBA.$$

(ii) 由於 $\triangle COA, \triangle AOB$ 爲等腰三角形，所以

$$\begin{aligned}\measuredangle BOC &= \measuredangle OBA + \measuredangle BAC + \measuredangle ACO \\ &= \measuredangle BAO + \measuredangle BAC + \measuredangle OAC = 2 \cdot \measuredangle BAC.\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Lemma 2.0.3. 設 H_A 爲 H 關於 BC 的對稱點，則 $H_A \in \odot(ABC)$。

Proof. 由 (2.0.1)，

$$\measuredangle BH_AC = -\measuredangle BHC = \measuredangle BAC,$$

即 A, B, C, H_A 共圓。 ■

Lemma 2.0.4. 設 M_a 爲 $\overline{BC}$ 中點，A^* 爲 A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點，則 M_a 爲 $\overline{HA^*}$ 中點。

Proof. 注意到

$$BH \perp CA \perp A^*C \implies BH \parallel A^*C$$
$$CH \perp AB \perp A^*B \implies CH \parallel A^*B,$$

所以 BA^*CH 爲平行四邊形，因此 M_a 爲 $\overline{HA^*}$ 中點。 ■

Lemma 2.0.5. 設 M_a 爲 $\overline{BC}$ 中點，則

$$AH = 2 \cdot OM.$$

Proof. 令 A^* 爲 A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點。由 (2.0.4)，M_a 爲 $\overline{HA^*}$ 中點，故 OM 爲 $\triangle AHA^*$ 的 A^*-中位線。 ■

Lemma 2.0.6. 重心 G, 外心 O, 垂心 H 三點共線且

$$\frac{HG}{GO} = 2.$$

Proof. 令 M_b, M_c 分別爲 $\overline{CA}, \overline{AB}$ 中點，注意到 $\triangle BHC$ 與 $\triangle M_bOM_c$ 位似，所以 BM_b, CM_c, HO 共點，即 G, O, H 共線。由 (2.0.5)，我們知道位似比爲 -2，所以

$$\frac{HG}{GO} = 2.$$ ■

Lemma 2.0.7. 外心 O 與垂心 H 爲 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點。

Proof. 由 (2.0.2) 及 $AH \perp BC$，

$$\measuredangle BAO = 90^\circ - \measuredangle ACB = \measuredangle HAC.$$

同理有 $\measuredangle CBO = \measuredangle HBA, \measuredangle ACO = \measuredangle HCB$。 ■

Lemma 2.0.8. 令 $\triangle M_aM_bM_c$, $\triangle H_aH_bH_c$ 分別爲 $\triangle ABC$ 的中點三角形及垂足三角形，E_A, E_B, E_C 分別爲 $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$ 的中點。則 M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, E_A, E_B, E_C 共圓且圓心 N 爲 $\overline{OH}$ 中點。

Proof. 由 (2.0.3) 及 (2.0.4)，H 關於 M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, E_A, E_B, E_C 的對稱點 A^*, B^*, C^*, H_A, H_B, H_C, A, B, C 皆位於 $\odot(ABC)$ 上，所以這九點共圓且圓心 N 爲 $\overline{OH}$ 中點。 ■

Lemma 2.0.9. 設 O 關於 BC 的對稱點爲 O'_A，則 N 爲 $\overline{AO'_A}$ 中點。

Proof. 由 (2.0.5)，$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OO'_A}$，所以結合 (2.0.8) 可得 $\overline{AO'_A}$ 中點爲 $\overline{OH}$ 中點 N。 ■

Lemma 2.0.10. 九點圓 $\odot(N)$ 也是 $\triangle BHC$, $\triangle CHA$, $\triangle AHB$ 的九點圓。

Proof. 九點圓爲垂足三角形的外接圓，而 $\triangle ABC$, $\triangle BHC$, $\triangle CHA$, $\triangle AHB$ 有著同樣的垂足三角形。 ■

Lemma 2.0.11. 外接圓 $\odot(O)$ 爲 $\triangle I_xI_yI_z$ 的九點圓。

Proof. 注意到 $\triangle ABC$ 爲 $\triangle I_xI_yI_z$ 的垂足三角形。 ■

Lemma 2.0.12 (共軛重心)**.** 令 T_a 爲 B, C 關於 $\odot(ABC)$ 的切線的交點，類似定義 T_b, T_c。則 AT_a, BT_b, CT_c 交於 G 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 $K =: X_6$。

Proof. 我們證明 AT_a, AM_a 爲關於 $\angle BAC$ 的等角線。 ■

Lemma 2.0.13. 設 K 爲 $\triangle ABC$ 的共軛重心，H_a 爲 A 關於 BC 的垂足，則 M_aK 平分 $\overline{AH_a}$。

Lemma 2.0.14. 垂心 H 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點 H' 爲共軛重心 K 的反補點 X_{69}。

Lemma 2.0.15. 對於任意一點 P，令 $\triangle P_AP_BP_C$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形，則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle P_AP_BP_C$ 的共軛重心的連線過 P。

Lemma 2.0.16.

Lemma 2.0.17. 設 O_A, O_B, O_C 分別爲 $\triangle BOC$, $\triangle COA$, $\triangle AOB$ 的外心，則 AO_A, BO_B, CO_C 共點於九點圓圓心 N 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 $Ko =: X_{54}$。

Lemma 2.0.18. 令 B', C' 分別爲 B, C 關於 CA, AB 的對稱點，則 $AKo \perp B'C'$。

Proof 1. 設 A^* 爲 A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點，B, C 關於外接圓的切線交於 D，則我們只須證明 XD 垂直 $B'C'$，注意到

$$\frac{B'C}{CD} = \frac{XO}{OD} = \frac{C'B}{BD}, \quad \measuredangle B'CD = \measuredangle XOD = \measuredangle C'BD.$$

故 D 是 $\triangle B'XC' \overset{+}{\sim} \triangle COB$ 的旋似中心。 ■

Proof 2. 設 N 爲 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心，N_B, N_C 爲 N 在 AC, AB 邊上的垂足，則由 (0.2.6)，我們有 $AKo \perp N_BN_C$，考慮 B, C 在 AC, AB 上的垂足 H_BH_C 和 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 中點 M_B,M_C，我們有

$$\frac{M_BG}{GB} \cdot \frac{BB'}{B'H_B} \cdot \frac{H_BM_B}{M_BN_B} = -1 \implies B', N_B, G \text{ 共線}$$

■

Lemma 2.0.19. 九點圓圓心 N 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線 $\mathcal{O}_{\triangle ABC}(N)$ 垂直 OKo。

Proof 1. 取點 U 在 BC 上使得 $AN \perp NU$。設 O 關於 BC 的對稱點爲 O'_A，A 關於 BC 的對稱點爲 A'，則 A, O, O'_A, A' 共圓且由 (2.0.9) 知道其外接圓圓心爲 U。考慮 $\odot(AOO_A)$, $\odot(ABC)$ 異於 A 的交點 X，則對 A 反演可以知道 X 的反演點是 BC 和 $A'O$ 的交點，故 AX 過 Ko，因此 Ko 在兩圓的根軸上。可以類似地證明 Ko 對 $\odot(AOO'_A)$, $\odot(BOO'_B)$, $\odot(COO'_C)$ 圓冪相等，故三個圓共軸於 OKo，而三圓圓心連線即爲 N 的正交截線。 ■

Lemma 2.0.20. 三角形 ABC 的垂足三角形的歐拉線是 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心 N 關於 $\mathcal{H}(ABCN)$ 的切線。

Proof. 設 $\triangle H_aH_bH_c$ 爲 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，我們知道 N 關於 $\triangle H_aH_bH_c$ 的等

角共軛點 N^* 爲 $\triangle H_aH_bH_c$ 的外心，因此 NN^* 爲 $\triangle H_aH_bH_c$ 的歐拉線，因此由 (0.2.20)，知道 $NN^* = T_N\mathcal{H}(ABCN)$。 ■

Lemma 2.0.21 (西弗點)**.** 四個三角形 $\triangle ABC, \triangle BIC, \triangle CIA, \triangle AIB$ 的歐拉線交於一點 $Sc =: X_{21}$。

Proof 1. 令 $\mathcal{E}, \mathcal{E}_A$ 分別爲 $\triangle ABC, \triangle BIC$ 的歐拉線，$X = \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_A$。

Claim. 若 R, r 分別爲 $\odot(ABC), \odot(I)$ 的半徑長，則

$$t(X) := \frac{XO}{XH} = -\frac{R}{2R+2r}.$$

Proof of Claim. 我就懶 □

由於這個值關於 A, B, C 是對稱的，我們可得四個歐拉線共於一點。 ■

Proof 2. 考慮 $\triangle ABC$ 的弧中點三角形 $\triangle N_aN_bN_c$，N_a 爲 $\triangle BIC$ 的外心。考慮 BC 中點 M_a 和 IM_a 中點 V，$\triangle BIC$ 的重心 G_A，則

$$N_a(V, M_a; G_A, I) = -1.$$

由 N_aV 過 $\triangle N_aN_bN_c$ 的共軛重心，N_aM_a 過 $\triangle N_aN_bN_c$ 的外心，N_aI 過 $\triangle N_aN_bN_c$ 的垂心，因此我們由調和知道 N_aG_A 過 $\triangle N_aN_bN_c$ 的 Kosnita 點 Ko_N，所以 $\triangle BIC, \triangle CIA, \triangle AIB$ 的歐拉線共點在 OKo_N 上。注意到我們有 (2.0.19)，且由 (0.2.17)，$\triangle N_aN_bN_c$ 的九點圓圓心 N_N 關於 $\triangle N_aN_bN_c$ 的正交截線垂直於 $T_{N_N}\mathcal{H}(N_aN_bN_cN_N)$，再由 (2.0.20) 知道 $T_{N_N}\mathcal{H}(N_aN_bN_cN_N)$ 就是歐拉線。因此 OKo_N 即爲 $\triangle ABC$ 的歐拉線。 ■

Proof 3. 我們證明 OH 與 $\triangle BIC$ 的歐拉線 $\mathcal{E}_A$ 的交點 Sc 位於費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上。令 $H_A \in \mathcal{H}_{Fe}$ 爲 $\triangle BIC$ 的垂心，則 $\mathcal{E}_A = H_AN_a$。令 M_d 爲 $\overline{EF}$ 中點，由 (1.1.5) 及 (1.1.6)，

$$H_A(H, I; Sc, Na) = (I', I; N_a, \infty_{AI}).$$

令 T 爲 $\triangle DEF$ 的垂心。由 (1.3.12) 及 (1.0.8)，我們知道

$$(H, I; Sc, Na)_{\mathcal{H}_{Fe}} = H(T, I; O, \infty_{OI}).$$

所以我們只剩下證明 $I'T \parallel ON_a \perp BC$，但由 (2.0.9)，$I'TDI$ 爲平行四邊形。 ■

Proof 4. ■

Lemma 2.0.22. 西弗點 Sc 位於費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上。

Proof. 見 (2.0.21) 的 *Proof 3.* ■

Lemma 2.0.23. 西弗點 $Sc = X_{21}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點爲切點三角形 $\triangle DEF$ 的垂心 $T = X_{65}$。

Proof 1. 同 (2.0.21) 的 *Proof 3.* 的標號。令 Na^* 爲 Na 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，由 (1.2.7)，我們知道 Na^* 爲外接圓與內切圓的外位似中心。注意到 I 爲弧中點三角形 $\triangle N_aN_bN_c$ 的垂心，因此

$$\frac{Na^*T}{Na^*I} = \frac{Na^*I}{Na^*O}.$$

令 Sc^* 爲 Sc 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，則

$$\begin{aligned}
(O, I; T, Na^*) &= (T, I; O, \infty) && (\text{以 } Na^* \text{ 爲中心反演}) \\
&= (H, I; Sc, Na)_{\mathcal{H}_{Fe}} && (\text{由 } (1.0.8)) \\
&= (O, I; Sc^*, Na^*), && (\text{等角共軛變換})
\end{aligned}$$

因此 $T = Sc^*$。 ■

Proof 2. 在 (0.2.26) 中取 $X = H$，$P = Sc$ 即得證。

Corollary 2.0.24.

■

Lemma 2.0.25. 定義三角形 $\triangle ABC$ 的 Spieker 點 $S = X_{10}$ 爲其中點三角形的內心，T 爲切點三角形的垂心，則

$$ISc \parallel TS.$$

Proof. 我們由西弗點的存在性 (2.0.21) 知道 H_AN_a, H_BN_b, H_CN_c 共點於 Sc，因此對內切圓配極可得 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(\triangle H_AH_BH_C)$ 和 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(\triangle N_aN_bN_c)$ 透視且透視軸爲 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(Sc)$，故 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(\triangle H_AH_BH_C)$ 和 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(\triangle N_aN_bN_c)$ 的透視軸垂直 ISc。由

(1.1.2)，$\mathfrak{p}_{\odot(I)}(\triangle H_AH_BH_C)$ 爲 $\triangle ABC$ 的中點三角形 $M_aM_cM_c$，而 N_bN_c 爲 I 關於 $\triangle AEF$ 的正交截線，故 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}N_bN_c$ 爲 $\triangle AEF$ 垂心，即 I 關於 EF 的對稱點 I_D。類似定義 I_E, I_F，可得 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(\triangle N_aN_bN_c) = \triangle I_DI_EI_F$。此時注意到 $I_DI_EI_F$ 和 $M_aM_bM_c$ 的正交中心爲 T, S，由 Sondat's 定理我們知道正交軸垂直透視軸，即 $TS \perp \mathfrak{p}_{\odot(I)}(Sc) \perp ISc$，故

$$ISc \parallel TS. \qquad \blacksquare$$

Lemma 2.0.26. 設 G 關於 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形爲 $\triangle G_AG_BG_C$，$\triangle T_aT_bT_c$ 爲 $\triangle ABC$ 的外切三角形，則 $\triangle G_AG_BG_C$ 和 $\triangle T_aT_bT_c$ 透視且透視中心在歐拉線上。我們定義這個點爲 $\triangle ABC$ 的埃克塞特點 (Exeter point)=:X_{22}。

Proof. 注意到

$$\measuredangle G_BG_CM_c = \measuredangle G_BG_CC = \measuredangle G_BBC = \measuredangle G_BM_bM_c,$$

因此 G_B, G_C, M_b, M_c 四點共圓。考慮三圓 $\odot(ABC), \odot(AM_bM_c), \odot(G_BG_CM_bM_c)$，即由根心的存在性知道 T_bT_c, G_BG_C, M_bM_c 共點。我們有 $\triangle G_AG_BG_C$ 和 $\triangle M_aM_bM_c$ 透視於 $\triangle ABC$ 重心 G，因此由 (0.2.3) 知道 $\triangle G_AG_BG_C$ 和 $\triangle T_aT_bT_c$ 透視且透視中心在 G 以及 $\triangle T_aT_bT_c$ 和 $\triangle M_aM_bM_c$ 的透視中心 O 的連線上，即歐拉線上。 ■

Lemma 2.0.27. 設 P 爲三角形 ABC 的歐拉線上一點，Q, R 分別爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點, 反補點。證明: QR 垂直 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線.

2.1 Jerabek 雙曲線

Lemma 2.1.1. 我們定義歐拉線 $\mathcal{E}$ 上無窮遠點 $\infty_{\mathcal{E}} = X_{30}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點爲 X_{74}，則 $X_{74} \in \odot(ABC) \cap \mathcal{H}_{\mathcal{J}}$。

Proof. 由 $\odot(ABC)$ 和 $\mathcal{L}_\infty$ 爲等角共軛對顯然。 ■

Lemma 2.1.2. 我們定義三角形 ABC 的 Jerabek 雙曲線 $\mathcal{H}_{\mathcal{J}}$ 的中心爲 X_{125}，則 $\overline{HX_{74}}$ 的中點爲 X_{125}。

Proof. 注意到由過 $\triangle ABC$ 的等軸雙曲線中心在 $\triangle ABC$ 九點圓上，因此 $\overline{HX_{74}}$ 中點爲 X_{125}。 ∎

Lemma 2.1.3. 設 P 爲 $\triangle ABC$ 外接圓上任意點，PX_{74} 交 $\mathcal{H}_{\mathcal{J}}$ 於 Z_P，則 HZ_P, OZ_P, KZ_P 分別爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的施坦納線、正交截線、三線性極線。

Lemma 2.1.4. 令 X_{182} 爲 $\overline{OK}$ 中點，則 G, X_{125}, X_{182} 三點共線。

Proof. 設 G 關於 O 的 2 倍位似爲 G'，則我們等價要證明 $G'K$ 過 O 的 antigonal conjugate O'，注意到

$$O'(X_{74}, K; H, O)_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}} = (\mathcal{E}_\infty, G; O, H) = (\mathcal{E}_\infty, G'; H, O) = O'(X_{74}, G'; H, O)_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}}$$

故得證。 ∎

Lemma 2.1.5. 垂心 H 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點 $H' = X_{69}$ 位於 Jerabek 雙曲線 $\mathcal{H}_J$ 上。

Proof. 由 (2.0.14)，我們知道 $OK \parallel HH'$，且由 (2.1.4)，HH' 中點過錐線中心，故由平行弦定理 $H' \in \mathcal{H}_{\mathcal{J}}$ ∎

Lemma 2.1.6. 令 $\mathcal{S}$ 爲過 A, B, C 並以 G 爲中心的圓錐曲線，X_{99} 爲 $\mathcal{S}$ 和 $\odot(ABC)$ 的第四個交點。則 X_{99} 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線爲 GK。

Proof. 注意到 $\mathcal{S}$ 爲三線性極線通過 $\triangle ABC$ 重心的軌跡，故 $\odot$ 由 (2.1.3)，我們有 X_{99} 的三線性極線爲 GK。 ∎

Lemma 2.1.7. 三點 G, X_{110}, X_{125} 共線。

Proof. ∎

Lemma 2.1.8. 三點 X_{69}, X_{74} ,X_{99} 共線。

Proof. 由 (2.1.5) 以及 (2.1.3) 我們可以得到 X_{99}, X_{74}, X_{69} 共線。 ∎

Lemma 2.1.9. 三點 N, X_{54}, X_{110} 共線。

Lemma 2.1.10. 歐拉反射點 X_{110} 的正交截線 $\mathcal{O}_{\triangle ABC}(X_{110})$ 和 $\triangle ABC$ 的 Jerabek 雙曲線 $\mathcal{H}_J$ 相切。

Proof 1. 考慮歐拉線 $\mathcal{E}$ 上無窮遠點的等角共軛點 X_{74} 和 $\mathcal{H}_J$ 的中心 X_{125} 以及 O 關於 $\mathcal{H}_J$ 的對徑點 O'，我們有

$$\begin{aligned}
\measuredangle(\mathcal{O}_{\triangle ABC}(X_{110}), \mathcal{E}) &= \measuredangle(\mathcal{O}_{\triangle ABC}(X_{110}), BC) + \measuredangle(BC, \mathcal{E}) \\
&= \measuredangle AX_{110}H + \measuredangle(BC, \mathcal{E}) \qquad (0.2.14) \\
&= \measuredangle AX_{110}H + \measuredangle X_{74}X_{110}A \\
&= \measuredangle X_{74}X_{110}H = \measuredangle X_{74}OX_{125} \\
&= \measuredangle X_{74}OO' = \measuredangle OO'H.
\end{aligned}$$

由等軸雙曲線算角知道 $\mathcal{O}_{\triangle ABC}(X_{110})$ 切 $\mathcal{H}_J$ 於 O。 ■

Proof 2. 由 (2.1.3)，我們知道 O 連 X_{74} 和 X_{110} 的交點為 X_{110} 對 $\triangle ABC$ 的正交截線，但 O 是 $\overline{X_{74}X_{110}}$ 中點，故得證。 ■

Lemma 2.1.11. 設 $\triangle XYZ$ 為 I 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形，H_I 為 $\triangle XYZ$ 垂心，則

$$IH_I \parallel OH.$$

Chapter 3

布洛卡軸

Lemma 3.0.1. 分別以 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{CA}$ 爲邊長向 $\triangle ABC$ 外 (內) 側作正三角形 $\triangle A_{1(2)}BC$, $\triangle AB_{1(2)}C$, $\triangle ABC_{1(2)}$，則三線 $AA_{1(2)}$, $BB_{1(2)}$, $CC_{1(2)}$ 共點於 $F_1 =: X_{13}(F_2 =: X_{14})$，稱爲第一 (二) 等角點。

Proof. 我們證明 AA_1, BB_1, CC_1 共點。令 $F_1 = BB_1 \cap CC_1$，注意到

$$\triangle AB_1C \overset{+}{\sim} ABC_1 \implies \triangle ABB_1 \overset{+}{\sim} \triangle AC_1C,$$

所以

$$\measuredangle BF_1C = 120^\circ = \measuredangle BA_1C = \measuredangle B_1AC = \measuredangle BAC_1,$$

即 $F_1 \in \odot(A_1BC) \cap \odot(AB_1C) \cap \odot(ABC_1)$。因此

$$\measuredangle AF_1A_1 = \measuredangle AF_1B + \measuredangle BF_1A_1 = \measuredangle AC_1B + BCA_1 = -60^\circ + 60^\circ = 0^\circ. \qquad \blacksquare$$

Lemma 3.0.2. 令 F_1, F_2 分別爲 $\triangle ABC$ 第一等角點與第二等角點，則

$$\measuredangle BF_iC = \measuredangle CF_iA = \measuredangle AF_iB = 180^\circ - i \cdot 60^\circ.$$

Proof. 見 (3.0.1) 的 *Proof.* $\blacksquare$

Lemma 3.0.3. 令 Ω_A 爲 $\{B, C\}$ 的 A-阿波羅尼奥斯圓，即

$$\Omega_A = \left\{P \mid \overline{PB} : \overline{PC} = \overline{AB} : \overline{AC}\right\},$$

則 AO 與 Ω_A 相切。

Proof. 令 A' 爲 A 關於 BC 的對稱點，X, Y 分別爲 $\angle BAC$ 的内外角平分線與 BC 的交點。則 $\Omega_A = \odot(AA'XY)$。由 AA', AO 爲關於 $\angle BAC$ 的等角線可得

$$A(A', O; X, Y) = -1 = (A, A'; X, Y)_{\Omega_A},$$

因此 AO 與 AA' 相切。 ■

Lemma 3.0.4. 在 $\odot(ABC)$ 內 (外) 存在一點 $S_1(S_2)$ 滿足

$$\overline{AS_i} : \overline{BS_i} : \overline{CS_i} = \frac{1}{\overline{BC}} : \frac{1}{\overline{CA}} : \frac{1}{\overline{AB}},$$

且 S_1, S_2 位於布洛卡軸 OK 上，稱爲第一 (二) 等力點。

Proof. 令 Ω_A 爲 $\{B, C\}$ 的 A-阿波羅尼奧斯圓，類似定義 Ω_B, Ω_C。在 $\odot(O)$ 上取 D, E, F 使得

$$(B, C; A, D) = (C, A; B, E) = (A, B; C, F) = -1.$$

由 XO 與 Ω_X 相切可得 O 關於 Ω_X 的冪爲外接圓半徑的平方 R^2。因此 O 位於 Ω_A, Ω_B, Ω_C 兩兩之間的根軸上。由於 $K = AD \cap BE \cap CF$ 關於 Ω_A, Ω_B, Ω_C 的冪皆爲

$$KA \cdot KD = KB \cdot KE = KC \cdot KF = \mathbf{Pow}_{\odot(O)}(K),$$

因此 Ω_A, Ω_B, Ω_C 共軸於 OK。令 S_1, S_2 爲 Ω_A, Ω_B, Ω_C 的兩個交點，由於 Ω_A, Ω_B, Ω_C 在關於 $\odot(O)$ 的反演下不變，因此 S_1, S_2 爲關於 $\odot(O)$ 的反演點對，我們取 S_1 位於 $\odot(O)$ 內，則 S_2 位於 $\odot(O)$ 外。我們有

$$\begin{aligned}
S_i \in \Omega_A &\implies \overline{BS_i} : \overline{CS_i} = \overline{AB} : \overline{CA} = \frac{1}{\overline{CA}} : \frac{1}{\overline{AB}}, \\
S_i \in \Omega_B &\implies \overline{CS_i} : \overline{AS_i} = \overline{BC} : \overline{AB} = \frac{1}{\overline{AB}} : \frac{1}{\overline{BC}}, \\
S_i \in \Omega_C &\implies \overline{AS_i} : \overline{BS_i} = \overline{CA} : \overline{BC} = \frac{1}{\overline{BC}} : \frac{1}{\overline{CA}},
\end{aligned}$$

故

$$\overline{AS_i} : \overline{BS_i} : \overline{CS_i} = \frac{1}{\overline{BC}} : \frac{1}{\overline{CA}} : \frac{1}{\overline{AB}}.$$ ■

以下假設 F_1, F_2 分別爲 $\triangle ABC$ 的第一等角點與第二等角點，S_1, S_2 分別爲 $\triangle ABC$ 的第一等力點與第二等力點。

Lemma 3.0.5. 點對 F_i, S_i 爲關於 $\triangle ABC$ 的一組等角共軛點。

Proof. 令 Ω_A 爲 $\{B, C\}$ 的 A-阿波羅尼奧斯圓，S_i^* 爲 S_i 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。由於 $S_i \in \Omega_A$，因此

$$\measuredangle BCS_i + \measuredangle S_iAB = \measuredangle CAS_i + \measuredangle S_iBC,$$

故

$$\measuredangle CS_i^*A = \measuredangle S_i^*CA + \measuredangle CAS_i^* = \measuredangle S_i^*AB + \measuredangle ABS_i^* = \measuredangle AS_i^*B.$$

同理可得

$$\theta := \measuredangle BS_i^*C = \measuredangle CS_i^*A = \measuredangle AS_i^*B \implies \theta = 60^\circ \text{ or } 120^\circ.$$

因此由 (3.0.2)，$\{F_1, F_2\} = \{S_1^*, S_2^*\}$。 ■

Lemma 3.0.6. 設 $\triangle D_xE_xF_x$ 爲 $\triangle ABC$ 的 X-切點三角形，L 爲 $\triangle ABC$ 的 de Longchamps 點，則 I_xL 爲 $\triangle D_xE_xF_x$ 的布洛卡軸。

Proof. 我們證明 $I_x = I$ 爲內心的情形。注意到 $\triangle DEF$ 的外心及共軛重心分別爲 $\triangle ABC$ 的內心 I 及熱爾岡點 Ge。而由 (1.3.5) 我們知道 I, Ge, L 共線。 ■

3.1 Kiepert 雙曲線

Lemma 3.1.1. 設 L 爲 $\triangle ABC$ 的 de Longchamps 點，L^*, L' 分別爲 L 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點、等截共軛點，則 L, L^*, L' 三點共線。

Proof. 考慮 $\triangle ABC$ 的 Kiepert 雙曲線的反補 $\mathcal{K}^c$，則我們有 $L \in \mathcal{K}^c$，因此由等共軛變換 L^*, L' 位於 $T_{\mathcal{K}^c}L$ 上，故共線。 ■

Lemma 3.1.2. 設 P 爲 $\triangle ABC$ 的 Kiepert 雙曲線 $\mathcal{H}_K$ 上一點，則 P 的三線性極線垂直 $\triangle ABC$ 的歐拉線。

Proof. ■

Lemma 3.1.3. 設 ℓ 爲任意垂直歐拉線 $\mathcal{E}$ 的直線，則 $\triangle ABC \cup \ell$ 的垂心線 (見 (4.0.2), (4.0.3)) 過 ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極點。

Lemma 3.1.4. 設 $\triangle ABC$ 的 de Longchamps 點爲 L，$\triangle I_aI_bI_c$ 爲旁心三角形，且 S_a 爲 $\triangle IBC$ 的斯坦那點 X_{99}，則我們有

$$\measuredangle IS_aL = 90^\circ$$

Proof. 設 $\triangle D_aE_aF_a$ 爲 $\triangle ABC$ 的 A-切點三角形。由 (3.1.2)，I_aL 爲 $\triangle D_aE_aF_a$ 的布洛卡軸，並且注意到

$$\measuredangle(IB, D_aF_a) = \measuredangle(IB, BI_a) + \measuredangle(BI_a, D_aF_a) = 90^\circ + 90^\circ = 0^\circ \implies IB \parallel D_aF_a,$$

同理可得 $IC \parallel D_aE_a$。由

$$\measuredangle ICB = \measuredangle E_aD_aC = \measuredangle E_aF_aD_a, \quad \measuredangle IBC = \measuredangle F_aD_aB = \measuredangle F_aB_aD_a,$$

我們得到 $\triangle IBC \overset{-}{\sim} \triangle D_aE_aF_a$。注意到 S_a 對 $\triangle IBC$ 的施坦納線爲 $\triangle IBC$ 的布洛卡軸，因此 $\triangle IBC \overset{-}{\sim} \triangle D_aE_aF_a$。由 S_a 關於 $\triangle IBC$ 的施坦納線和 I_aL 爲 $\angle BIC$ 的等角線，我們有 $I_aL \perp IS_a$。注意到 $S_a \in \odot(IBC)$，我們有 $S_a \in I_aL$，故 $\measuredangle IS_aL = 90^\circ$。 ■

Lemma 3.1.5. 設 I 爲 $\triangle ABC$ 的內心，則 $\triangle ABC$, $\triangle BIC$, $\triangle CIA$, $\triangle AIB$ 的布洛卡軸四線共點。

Proof. 沿用 (3.1.4) 的標號，考慮 L 關於 $\triangle I_aI_bI_c$ 的等角共軛點 L^*，則

$$\measuredangle(BI, I_aL^*) = \measuredangle(BI, BI_a) + \measuredangle(BI_a, I_aL^*) = 90^\circ + \measuredangle(I_aL, I_aC) = \measuredangle(I_aL, IC).$$

故我們知道 I_aL^* 平行 $\triangle BIC$ 的布洛卡軸，此時考慮 $\overline{L^*I}$ 中點 T，則我們有 N_aT 平行於 $\triangle BIC$ 的布洛卡軸，故 $\triangle BIC$, $\triangle CIA$, $\triangle AIB$ 的布洛卡軸共點於 T。

接著我們證明 $\triangle ABC$ 的布洛卡軸過 T，考慮 $\triangle ABC$ 的 Kiepert 雙曲線的反補 $\mathcal{K}^c$，則我們知道 I, I_a, I_b, $I_c \in \mathcal{K}^c$，設 $\triangle ABC$ 的斯坦那點爲 S，則我們有 S 爲 $\mathcal{K}^c$ 的中心。注意到 S 關於 $\triangle ABC$ 的施坦納線平行於 $\triangle ABC$ 的布洛卡軸，因此 $\mathcal{K}^c$ 關於 $\triangle I_aI_bI_c$ 的等角共軛軌跡平行於 $\triangle ABC$ 的布洛卡軸，考慮 $\triangle ABC$ 的 Bevan 點 Be 我們有 Be 爲 $\triangle I_aI_bI_c$ 的外心，因此 L^*Be 平行 $\triangle ABC$ 的布洛卡軸，由 $L^*Be \parallel TO$ 易知 $\triangle ABC$ 的布洛卡軸過 T。 ■

Chapter 4

完全四線形

以下給定完全四線形 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4) = \triangle ABC \cup \ell_4$，其中 $\ell_1 = BC$, $\ell_2 = CA$, $\ell_3 = AB$，ℓ_4 分別交 BC, CA, AB 於 D, E, F。令 $\triangle_i = \triangle \ell_{i+1}\ell_{i+2}\ell_{i+3}$。

Lemma 4.0.1. 三個對角線 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ 的中點們共線。

Proof 1. 見 [1], 0.4 節。 ■

Proof 2. 由 (4.0.5)，$\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ 的中點們共於一線 τ。 ■

Lemma 4.0.2 (施坦納線). 設 M 爲 $\mathcal{Q}$ 的密克點，則 M 關於四線 ℓ_i 的對稱點 M_i 共於一線 $\mathcal{S}$。

Proof. M 位於 $\triangle_1$ 的外接圓上。由西姆松定理，M 關於三線 ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 的對稱點 M_2, M_3, M_4 共線。同理，M_1, M_2, M_3 共線。因此 M_1, M_2, M_3, M_4 共線。 ■

Lemma 4.0.3. 同 (4.0.2) 的標號。四個三角形 $\triangle_i$ 的垂心 H_i 皆位於 $\mathcal{S}$ 上，因此 $\mathcal{S}$ 又被稱爲垂心線。

Proof. 由施坦納定理，H_i 位於直線 $M_{i+1}M_{i+2}M_{i+3} = \mathcal{S}$ 上。 ■

Lemma 4.0.4 (密克圓). 四個三角形 $\triangle_i$ 的外心 O_i 與密克點 M 共圓。

Proof 1. 我們證明 M, O_1, O_2, O_3 共圓。由 O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 分別爲 $\overline{MD}$, $\overline{ME}$,

$\overline{MF}$ 的中垂線可得

$$\begin{aligned}\measuredangle O_2O_1O_3 &= \measuredangle FME = \measuredangle FMD + \measuredangle DME \\ &= (90^\circ - \measuredangle O_2DF) + (90^\circ - \measuredangle EDO_3) \\ &= \measuredangle O_3DO_2 = \measuredangle O_2MO_3,\end{aligned}$$

即 M, O_1, O_2, O_3 共圓。 ■

Proof 2. 此命題關於 M 的反演命題即爲 (4.0.2)。 ■

Lemma 4.0.5 (Gauss-Bodenmiller)**.** 三個直徑圓 $\odot(\overline{AD}), \odot(\overline{BE}), \odot(\overline{CF})$ 共軸於 $\mathcal{S}$。

Proof. 令 $\triangle XYZ$ 爲 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，則 H_1 爲三圓 $\odot(CAZX), \odot(\overline{CF}), \odot(\overline{AD})$ 的根心。同理，H_1 爲三圓 $\odot(ABXY), \odot(\overline{AD}), \odot(\overline{BE})$ 的根心，因此 H_1 位於 $\odot(\overline{AD}), \odot(\overline{BE}), \odot(\overline{CF})$ 兩兩之間的根軸上。同理，H_i 位於 $\odot(\overline{AD}), \odot(\overline{BE}), \odot(\overline{CF})$ 兩兩之間的根軸上。因爲 H_i 不全相等，因此 $\odot(\overline{AD}), \odot(\overline{BE}), \odot(\overline{CF})$ 共軸於 $\mathcal{S}$。 ■

Lemma 4.0.6. 垂心線 $\mathcal{S}$ 與牛頓線 τ 垂直。

Proof. 由 (4.0.5)，並注意到圓心連線垂直於根軸。 ■

Lemma 4.0.7. 密克點 M 爲牛頓線 τ 上的無窮遠點 ∞_τ 關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點。

Proof 1. 我們需要證明 $\measuredangle BAM = \measuredangle(\tau, CA)$。設 E' 爲 E 關於 M_b 的對稱點，F' 爲 F 關於 M_c 的對稱點。由 (0.2.10)，$E'F' \parallel \tau$。注意到

$$\frac{\overline{ME}}{\overline{MF}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{AE'}}{\overline{AF'}}$$

及 $\measuredangle EMF = \measuredangle E'AF'$，所以 $\triangle MEF \overset{+}{\sim} \triangle AE'F'$，故

$$\measuredangle BAM = \measuredangle FAM = \measuredangle FEM = \measuredangle F'E'A = \measuredangle(\tau, CA).$$ ■

Proof 2. 同樣地由 (4.0.2)，M 關於 $\triangle ABC$ 的施坦納線爲 $\mathcal{S}$。因此由 (4.0.6)，

$$\measuredangle BAM = \measuredangle(\mathcal{S}, \perp CA) = \measuredangle(\tau, CA).$$ ■

Lemma 4.0.8. 令 $X = BE \cap CF$, $Y = CF \cap AD$, $Z = AD \cap BE$，則

$$(A, D; Y, Z) = (B, E; Z, X) = (C, F; X, Y) = -1.$$

Proof. 只證明 $(A, D; Y, Z) = -1$，其餘類似。我們有

$$(A, D; Y, Z) \overset{B}{=} (F, C; Y, X) \overset{E}{=} (D, A; Y, Z) = (A, D; Y, Z)^{-1}.$$

由於 $A \neq D$, $Y \neq Z$，所以

$$(A, D; Y, Z) \neq 1 \implies (A, D; Y, Z) = -1. \qquad \blacksquare$$

Lemma 4.0.9. 令 $X = BE \cap CF$, $Y = CF \cap AD$, $Z = AD \cap BE$，則 M 位於 $\triangle XYZ$ 的九點圓上。

Proof. 由八點圓錐曲線定理 (見 [1], 1.1 節)，$\triangle XYZ$ 的兩組反西瓦三角形共切圓錐曲線。注意到 ℓ 關於 $\triangle XYZ$ 的反西瓦三角形為 $\triangle ABC$，而 BC, CA, AB, ℓ, $\mathcal{L}_\infty$ 切以 M 為焦點的拋物線，因此 $\mathcal{L}_\infty$ 關於 $\triangle XYZ$ 的反西瓦三角形，即 $\triangle XYZ$ 的中點三角形 $\triangle M_xM_yM_z$ 也切此拋物線，故由施坦納逆定理知 $M \in \odot(M_xM_yM_z)$，即 $\triangle XYZ$ 的九點圓。 $\blacksquare$

4.1 共圓四線形

以下假設 B, C, E, F 共於一圓 $\odot(O)$，$X = BE \cap CF$。

Lemma 4.1.1. 密克點 M 位於 AD 上。

Proof. 注意到 A 為 $\odot(DBFM)$, $\odot(DECM)$, $\odot(BCEF)$ 的根軸，因此 A, D, M 共線。 $\blacksquare$

Lemma 4.1.2. 我們有 O, M, B, E 及 O, M, C, F 分別共圓。

Proof. 由 B, C, E, F 共於圓 $\odot(O)$，

$$\measuredangle BOE = \measuredangle BCE + \measuredangle BFE = \measuredangle BMD + \measuredangle DME = \measuredangle BME,$$

因此 O, M, B, E 共圓。同理有 O, M, C, F 共圓。 $\blacksquare$

Lemma 4.1.3. 圓心 O 關於 AD 的垂足爲 M。

Proof. 令 T 爲 AO 與 DX 的交點，由 (0.2.23) 知 $\measuredangle ATD = 90^\circ$ 且 $AT \cdot AO$ 爲 A 關於 $\odot(O)$ 的冪。由 (4.1.1) 知 M 位於 AD 上且

$$AT \cdot AO = \mathbf{Pow}_{\odot(O)}(A) = AB \cdot AF = AD \cdot AM,$$

因此 D, M, O, T 共圓，故

$$\measuredangle DMO = \measuredangle DTO = 90^\circ. \qquad \blacksquare$$

Lemma 4.1.4. 三點 O, M, X 共線。

Proof. 由 (4.1.3)，OM 垂直於 AD。由 (0.2.23)，$\mathfrak{p}_{\odot(O)}(X) = AD$，因此 $OX \perp AD$，故 O, M, X 共線。 $\blacksquare$

Lemma 4.1.5. 點 X 位於完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的垂心線 $\mathcal{S}$ 上。

Proof. 注意到 X 爲三圓 $\odot(O), \odot(\overline{BE}), \odot(\overline{CF})$ 的根心，因此 X 位於 $\odot(\overline{BE}), \odot(\overline{CF})$ 的根軸 $\mathcal{S}$ 上。 $\blacksquare$

Lemma 4.1.6. 點 O 位於 $\mathcal{Q}$ 的密克圓上。

Proof. 由 $OO_2 \perp AB$, $OO_3 \perp CA$ 及 (4.0.4) 的計算，我們有

$$\measuredangle O_2OO_3 = \measuredangle BAC = \measuredangle BMC = \measuredangle O_2MO_3,$$

因此 $O \in \odot(MO_2O_3) = \odot(O_1O_2O_3O_4M)$。 $\blacksquare$

Lemma 4.1.7. 設 M_A, M_B, M_C 分別爲 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 中點，則 M_A 關於 $\odot(O)$ 的冪

$$\mathbf{Pow}_{\odot(O)}(M_A) = M_AM_B \cdot M_AM_C.$$

Proof. 由 (4.0.1)，M_A, M_B, M_C 共線。注意到 M_B, M_C 位於 $\odot(\overline{OX})$ 上，因此

$$\mathbf{Pow}_{\odot(\overline{OX})}(M_A) = M_AM_B \cdot M_AM_C,$$

故我們需要證明 M_A 位於 $\odot(O)$ 與 $\odot(\overline{OX})$ 的根軸上。由 $\mathfrak{p}_{\odot(O)}(X) = AD$ 知 $\odot(O)$ 與 $\odot(\overline{OX})$ 的根軸爲 AD，而 M_A 位於 AD 上。 $\blacksquare$

Lemma 4.1.8. 同 (4.1.7) 的標號，設 $Y = CF \cap AD$, $Z = AD \cap BE$，則 M_B, M_C, Y, Z 共圓。

Proof. 由

$$(B, E; Z, X) = (C, F; X, Y) = -1,$$

及 B, C, E, F 共圓可得

$$XZ \cdot XM_B = XB \cdot XE = XC \cdot XF = XY \cdot XM_C,$$

因此 M_B, M_C, Y, Z 共圓。 ■

Lemma 4.1.9. 令 A^*, A^*_D 分別爲 A 關於 $\odot(ABC)$, $\odot(AEF)$ 的對徑點，則 A^*, A^*_D 位於 OM 上。

参考資料

[1] *Li4*. *圓錐曲線*

https://Lii4.github.io/Conic.pdf