

幾何引理維基

$\mathcal{Li}4 + \mathcal{S}_{\otimes} +$ 和輝 (?)

April 6, 2021

目錄

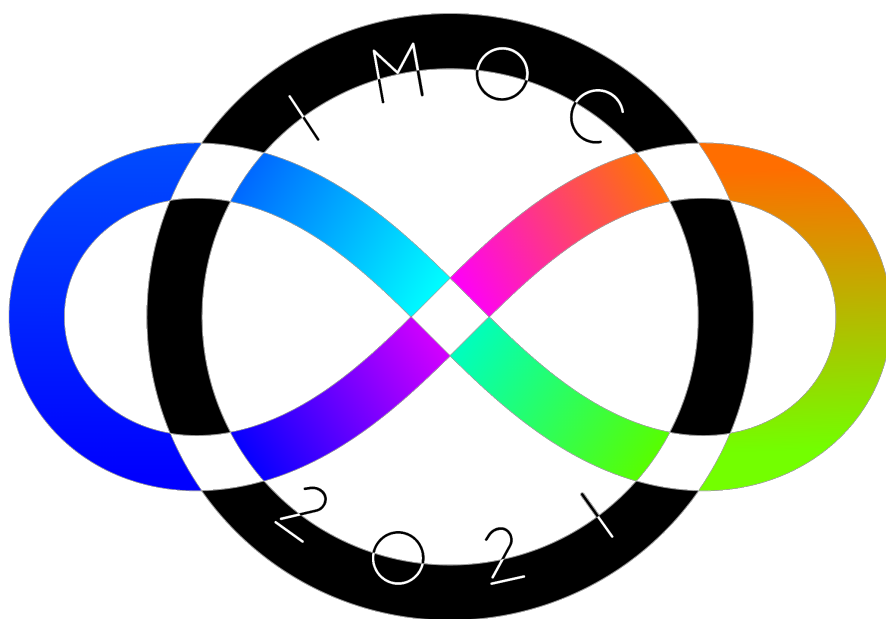
前言	i
0 基本性質與記號	1
0.1 記號	1
0.2 一般引理	6
0.3 等角共軛點	11
1 內心	16
1.1 $\triangle BIC$ 的垂心	22
1.2 偽內切圓	24
1.3 費爾巴哈雙曲線	28
2 歐拉線	35
2.1 Jerabek 雙曲線	43
3 布洛卡軸	46
3.1 Kiepert 雙曲線	49
4 完全四線形	52
4.1 共圓四線形	54
參考資料	57

前言

曾經證明過的引理不可能忘記，只不過是想不起而已。

這份講義的內容會以作者們有印象的幾何引理為主，如果讀者有任何想加進來的引理或者哪裡出現了 typo 都可以私訊我們或寄信到 chjh21005@gmail.com 告訴我。

另外，如果讀者是國高中生的話還可以報名今年的 IMOC。
詳情請見：<http://imocamp.wikidot.com>.



Chapter 0

基本性質與記號

0.1 記號

我們以 \mathcal{L}_∞ 代表無窮遠線。若直線 $L \neq \mathcal{L}_\infty$ ，我們以 $\infty_L = L \cap \mathcal{L}_\infty$ 代表 L 上的無窮遠點。若 X, Y 為兩點 (不在無窮遠線 \mathcal{L}_∞ 上)，

- XY 代表過 X, Y 的直線
- \overline{XY} 代表連接 X, Y 的線段 (與 \mathcal{L}_∞ 沒有交點的那個)

若 K, L 為兩線，

- $K \cap L$ 代表 K 與 L 的交點
- $\angle(K, L)$ 代表 K 與 L 的有向夾角
- $\angle(K, L) = |\angle(K, L)|$ 代表 K 與 L 的無向夾角

對於三點 X, O, Y ，

- 有向角 $\angle XOY = \angle(OX, OY)$
- 無向角 $\angle XOY = \angle(OX, OY)$

這邊給出一些有向角的性質，

- (i) 對於任意兩線 K, L ，

$$\angle(K, L) + \angle(L, K) = 0^\circ.$$

(ii) 若四線 K, K', L, L' 滿足 $K \parallel K', L \parallel L'$ ，則

$$\angle(K, K') = \angle(L, L').$$

(iii) 對於任意四線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ ，

$$\angle(\ell_1, \ell_2) + \angle(\ell_3, \ell_4) = \angle(\ell_1, \ell_4) + \angle(\ell_3, \ell_2).$$

(iv) X, Y, Z 三點共線若且唯若存在另一點 O 使得

$$\angle YXO = \angle Z XO.$$

(v) P, Q, X, Y 四點共圓若且唯若

$$\angle XPY = \angle XQY.$$

有時，若有三線 a, b, c ，我們會以 $\triangle abc$ 代表以 a, b, c 三線圍成的三角形 $\triangle(b \cap c)(c \cap a)(a \cap b)$ 。

我們說 $\triangle X_1 Y_1 Z_1$ 與 $\triangle X_2 Y_2 Z_2$ 正 (反/負) 向相似，記為

$$\triangle X_1 Y_1 Z_1 \stackrel{+}{\sim} (\sim) \triangle X_2 Y_2 Z_2,$$

若 $\triangle X_1 Y_1 Z_1$ 與 $\triangle X_2 Y_2 Z_2$ 相似且

$$\begin{cases} \angle Y_1 X_1 Z_1 = \pm \angle Y_2 X_2 Z_2, \\ \angle Z_1 Y_1 X_1 = \pm \angle Z_2 Y_2 X_2, \\ \angle X_1 Z_1 Y_1 = \pm \angle X_2 Z_2 Y_2. \end{cases}$$

我們記

- $\odot(XYZ)$ 為 $\triangle XYZ$ 的外接圓
- $\odot(\overline{XY})$ 是以 \overline{XY} 為直徑的圓
- $\odot(X)$ 是以 X 為圓心的圓
- $\mathcal{H}(WXYZ)$ 為過 W, X, Y, Z 的等軸雙曲線

給定一圓 Γ ，

- 對於任意一點 P ，我們定義 $\mathbf{Pow}_\Gamma(P)$ 為 P 關於 Γ 的幂

給定任意圓錐曲線 \mathcal{C} ，

- 對於 \mathcal{C} 上一點 X ，我們定義 $T_X\mathcal{C}$ 為 X 關於 \mathcal{C} 的切線
- 對於 \mathcal{C} 上一點 X ，我們通常以 $XP \cap \mathcal{C}$ 或 $\mathcal{C} \cap XP$ 代表 XP 與 \mathcal{C} 的異於 X 的交點 (若 XP 與 \mathcal{C} 相切則還是 X)
- 對於任意一點 P ，我們定義 $\mathfrak{p}_\mathcal{C}(P)$ 為 P 關於 \mathcal{C} 的極線
- 對於任意一線 ℓ ，我們定義 $\mathfrak{p}_\mathcal{C}(\ell)$ 為 ℓ 關於 \mathcal{C} 的極點
- 對於任意 $\triangle ABC$ ，我們定義

$$\mathfrak{p}_\mathcal{C}(\triangle ABC) = \triangle \mathfrak{p}_\mathcal{C}(A)\mathfrak{p}_\mathcal{C}(B)\mathfrak{p}_\mathcal{C}(C) = \triangle \mathfrak{p}_\mathcal{C}(BC)\mathfrak{p}_\mathcal{C}(CA)\mathfrak{p}_\mathcal{C}(AB).$$

- 對於任意圓錐曲線 \mathcal{C}' ，我們定義

$$\mathfrak{p}_\mathcal{C}(\mathcal{C}') = \{\mathfrak{p}_\mathcal{C}(T_P\mathcal{C}') \mid P \in \mathcal{C}'\},$$

同時也是集合 $\{\mathfrak{p}_\mathcal{C}(P) \mid P \in \mathcal{C}'\}$ 的包絡線。

0.1.1 三角形與一點一線

給定 $\triangle ABC$ 與一點 P ，我們有： P 關於 $\triangle ABC$ 的

- 西瓦三角形 $\triangle(AP \cap BC)(BP \cap CA)(CP \cap AB)$
- 反西瓦三角形，使得 P 關於其西瓦三角形為 $\triangle ABC$ (存在性與唯一性詳見 [1])
- 佩多 (垂足) 三角形 $\triangle(P \infty_{\perp BC} \cap BC)(P \infty_{\perp CA} \cap CA)(P \infty_{\perp AB} \cap AB)$
- 反佩多三角形 $\triangle(A \infty_{\perp AP})(B \infty_{\perp BP})(C \infty_{\perp CP})$ ，使得 P 關於其佩多三角形為 $\triangle ABC$
- 圓西瓦三角形 $\triangle(AP \cap \odot(ABC))(BP \cap \odot(ABC))(CP \cap \odot(ABC))$

其中，西瓦三角形的定義關於 A, B, C, P 四個點是對稱的，所以也被定義為一個完全四點形的西瓦三角形。

給定 $\triangle ABC$ 與一線 ℓ ，我們有： ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的

- 西瓦三角形 $\triangle(A(BC \cap \ell))(B(CA \cap \ell))(C(AB \cap \ell))$
- 反西瓦三角形，使得 ℓ 關於其西瓦三角形為 $\triangle ABC$ (同樣地存在性與唯一性詳見 [1])

跟點的情形一樣，西瓦三角形的定義也可以延伸至完全四線形 (但一般稱作對角線三角形)。

0.1.2 三角形的特殊點

當我們給定三角形 ABC ，在不特別說明的情況下我們默認

- I, G, O, H 分別為內心、重心、外心及垂心
- I_x 為 X -旁心
- $\triangle DEF$ 為切點三角形，即 I 的佩多三角形
- $\triangle D_x E_x F_x$ 為 X -切點三角形，即 I_x 的佩多三角形
- $\triangle D' E' F' = \triangle D_a E_b F_c$ 為旁切點三角形
- $\triangle M_a M_b M_c$ 為中點三角形
- $\triangle N_a N_b N_c$ 為弧中點三角形，即 I 的圓西瓦三角形
- $\triangle N'_a N'_b N'_c$ 為上弧中點三角形，即 $\triangle N_a N_b N_c$ 關於 O 對稱後的像
- $\triangle H_a H_b H_c$ 為垂足三角形，即 H 的佩多三角形
- N 為九點圓圓心
- K 為共軛重心，即 G 的等角共軛點
- Ge 為熱爾岡點，即 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 的透視中心
- Na 為納格爾點，即 $\triangle ABC$ 與 $\triangle D' E' F'$ 的透視中心

- Fe 為費爾巴哈點，即內切圓 $\odot(I)$ 與九點圓 $\odot(N)$ 的切點
- 若一個形心 Y 具有「旁」的定義，例如：熱爾岡點、納格爾點、費爾巴哈點等等，我們會記 Y_x 為 X - Y 點。舉例來說：
 - Ge_a 為 A -熱爾岡點，即 $\triangle ABC$ 與 $\triangle D_aE_aF_a$ 的透視中心
 - Na_b 為 B -納格爾點，即 $\triangle ABC$ 與 $\triangle D_cEF_a$ 的透視中心
 - Fe_c 為 C -費爾巴哈點，即 C -旁切圓 $\odot(I_c)$ 與九點圓 $\odot(N)$ 的切點

當然我們有時會重新定義把上面的默認蓋掉。

0.2 一般引理

Lemma 0.2.1. 若兩圓 Ω, ω 相切於 T , \overline{AB} 爲 Ω 上一弦與 ω 相切於 U , 則 TU 爲 $\angle ATB$ 的角平分線。

Proof. 令 A', B' 分別爲 TA, TB 與 ω 異於 T 的交點, 則

$$\angle BAT = \angle(BT, T_T\Omega) = \angle(B'T, T_T\omega) = \angle B'A'T,$$

即 $AB \parallel A'B'$ 。所以

$$\angle ATU = \angle A'TU = \angle A'UA = \angle UA'B' = \angle UTB. \quad \blacksquare$$

Lemma 0.2.2. 若兩個三角形 $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ 位似 (即 $BC \parallel B'C', CA \parallel C'A', AB \parallel A'B'$), 則 AA', BB', CC' 共點。

Proof 1. 令 $O = AA' \cap BB', OC \cap B'C' = C''$ 。則由平行線截比例線段知

$$\frac{BC}{B'C''} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

。又因爲 ABC 和 $A'B'C'$ 兩兩對邊平行, 他們是相似的。故

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'}$$

由唯一性知 $C'' = C'$ 。 ■

Proof 2. 迪沙格定理。 ■

Lemma 0.2.3. 給定三角形 $\triangle_1 = \triangle A_1B_1C_1, \triangle_2 = \triangle A_2B_2C_2, \triangle_3 = \triangle A_3B_3C_3$, 則 $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$ 共透視軸若且唯若 $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$ 兩兩透視中心共線。

Proof. ■

Lemma 0.2.4 (旋似判定法). 給定完全四線形 $(AD)(BE)(CF)$ 、其密克點 M 和點 X, Y 分別在 EF, BC 上, 則 $\triangle MFB (\sphericalangle \triangle MEC) \sphericalangle \triangle MXY$ 若且唯若 $\frac{FX}{XE} = \frac{BY}{YC}$ 。

Proof. 由密克點定理知 $\triangle MFB \stackrel{+}{\sim} \triangle MXY$ 和 $\triangle MFX \stackrel{+}{\sim} \triangle MBY$ 等價。從已知的 $\triangle MFE \stackrel{+}{\sim} \triangle MBC$ 能得出 $\angle MFE = \angle MBC$ 且 $\frac{MF}{MB} = \frac{FE}{BC}$ 。故 $\triangle MFX \stackrel{+}{\sim} \triangle MBY$ 等價於 $\frac{FX}{BY} = \frac{MF}{MB}$ 。由於後者和 $\frac{FE}{BC}$ 相等，證明完畢。 ■

Lemma 0.2.5. 對任意兩點 P, Q 和圓 Γ ，令 M 為 P, Q 中點，則

$$\mathbf{Pow}_{\Gamma}(M) = \frac{\mathbf{Pow}_{\Gamma}(P) + \mathbf{Pow}_{\Gamma}(Q)}{2}$$

Proof. 令 O 為 Γ 之圓心， r 為 Γ 之半徑。對 $\triangle OPQ$ 使用中線定理得

$$\overline{OM}^2 + \overline{PM}^2 = \frac{\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2}{2} - \frac{\overline{PQ}^2}{4}$$

則

$$\mathbf{Pow}_{\Gamma}(M) = \overline{MO}^2 - r^2 = \frac{\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2}{2} - r^2 - \overline{PM}^2 = \frac{\mathbf{Pow}_{\Gamma}(P) + \mathbf{Pow}_{\Gamma}(Q)}{2} - \frac{\overline{PQ}^2}{4}$$

■

Lemma 0.2.6. 若 P, Q 為兩點滿足 $BPCQ$ 為平行四邊形，則 $\angle BAP = \angle QAC$ 若且唯若 $\angle ABP = \angle PCA$ 。

Proof 1. 取 A' 使得 $\triangle ABP \stackrel{+}{\cong} \triangle A'QC$ ，則

$$\angle BAP = \angle QAC \iff \angle QA'C = \angle QAC$$

$$\iff A, A', Q, C \text{ 共圓}$$

$$\iff \angle A'QC = \angle A'AC$$

$$\iff \angle ABP = \angle PCA.$$

■

Lemma 0.2.7. 若 D_1, D_2 位於 BC 上， E_1, E_2 位於 CA 上， F_1, F_2 位於 AB 上，滿足 E_1, E_2, F_1, F_2 、 F_1, F_2, D_1, D_2 、 D_1, D_2, E_1, E_2 分別共圓，則 $D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$ 共圓。

Proof. 令 $\omega_A = \odot(E_1E_2F_1F_2)$ ， $\omega_B = \odot(F_1F_2D_1D_2)$ ， $\omega_C = \odot(D_1D_2E_1E_2)$ 。若六點不共圓，則 $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ 兩兩相異，而他們之間的根軸為 $\triangle ABC$ 三邊，但我們知道三根軸共點於根心，矛盾。 ■

Lemma 0.2.8 (等截共軛線). 設直線 ℓ 交 $\triangle ABC$ 三邊於 D, E, F ，並設 D' 為 D 關於 M_a 的對稱點，類似地在 CA, AB 上定義 E', F' ，則 D', E', F' 三點共線且平行於 $\triangle ABC \cup \ell$ 的牛頓線。

Proof. 設 G 為 $\triangle ABC$ 的重心。對於任意點 P ，考慮以 A 為中心比例為 2 的位似變換合成上以 M_A 為中心比例為 -1 的位似變換將 P 送至 P° 。則由孟氏定理知道此變換把 P 送至 P 的反補點，即 $\overline{P^\circ G} = 2\overline{GP}$ ，故對於三頂點此變換皆相同。設 T_E, T_F 為 BE, CF 中點，則 $T_E T_F$ 為 $\triangle ABC \cup \ell$ 的牛頓線，且由上面的討論容易發現 T_E, T_F 的反補點為 E', F' ，故反補變換將 $\triangle ABC \cup \ell$ 的牛頓線送至 $D^\circ, E^\circ, F^\circ$ ，因此三點共線且平行牛頓線。 ■

Lemma 0.2.9. 設 X, Y 為一圓錐曲線 C 上的兩點， X, Y 關於 C 的切線交於 P ，則對於任意過 P 並交 C 於 A, B 兩點的直線，皆有

$$(X, Y; A, B)_C = -1.$$

Lemma 0.2.10. 設 C 為三角形 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線， X 為任意點，且設 AX, BX, CX 交 C 於 X_A, X_B, X_C ， P 為 C 上一點，設 PX_A, PX_B, PX_C 交 BC, CA, AB 於 P_A, P_B, P_C ，則 P_A, P_B, P_C, X 共線。

Proof. 設考慮 C 上六點 $BACX_CPX_B$ ，則由帕斯卡定理 $BA \cap PX_C, AC \cap PX_B, CX_C \cap BX_C$ 共點，即 P_C, P_B, X 共點，同理可證 P_A 也在此線上，故得證。 ■

Lemma 0.2.11. 給定一個以 F 為焦點 ℓ 為準線的拋物線 C ，對於準線上任意點 P ，考慮以 P 為圓心過 F 的圓 $\odot(P)$ ，則 C 的包絡線的對 $\odot(P)$ 極點軌跡為一以 F 為中心過並和 ℓ 相切於 P 點的等軸雙曲線。

Lemma 0.2.12 (正交截線). 給定 $\triangle ABC$ ，設 P 為任意點，考慮 BC, CA, AB 上的三點 D, E, F 滿足

$$AP \perp PD, \quad BP \perp PE, \quad CP \perp PF$$

則 D, E, F 三點共線。

Proof 1. 考慮一以 P 為圓心的圓 $\odot(P)$ ，則我們想證明 $p_{\odot(P)}(D), p_{\odot(P)}(E),$

$\mathbf{p}_{\odot(P)}(F)$ 三點共線，注意到 $\angle(\mathbf{p}_{\odot(P)}(D), \mathbf{p}_{\odot(P)}(A)) = \angle DPA = 90^\circ$ 故 $\mathbf{p}_{\odot(P)}(D)$, $\mathbf{p}_{\odot(P)}(E)$, $\mathbf{p}_{\odot(P)}(F)$ 為 $\mathbf{p}_{\odot(P)}(\triangle ABC)$ 的高，故共點。 ■

Proof 2. 令 $D' = BC \cap EF$ 。考慮完全四線形 $\triangle ABC \cup EF$ ，我們知道三個直徑圓 $\odot(\overline{AD'})$, $\odot(\overline{BE})$, $\odot(\overline{CF})$ 共軸。注意到 P 在 $\odot(\overline{BE})$ 與 $\odot(\overline{CF})$ 上，因此 P 也在 $\odot(\overline{AD'})$ 上，故

$$\angle APD' = 90^\circ = \angle APD,$$

即 D, E, F 共線。 ■

Lemma 0.2.13. 三角形 $\triangle ABC$ ， P 為任意點，則 $\mathcal{O}_{\triangle ABC}(P)$ 垂直 P 關於 $\mathcal{H}(ABCP)$ 的切線。

Proof 1. 考慮一以 P 為圓心的圓 $\odot(P)$ ，則由 (0.2.11) 知道 $\mathbf{p}_{\odot(P)}(A)$, $\mathbf{p}_{\odot(P)}(B)$, $\mathbf{p}_{\odot(P)}(C)$ 會切一個以 $T_P \mathcal{H}$ 為準線的拋物線，故 $\mathbf{p}_{\odot(P)}(\triangle ABC)$ 的垂心在 T_P 上。但由 (0.2.12) 知道 $\mathbf{p}_{\odot(P)}(\triangle ABC)$ 的垂心就是 $\mathbf{p}_{\odot(P)}(\mathcal{O}_{\triangle ABC}(P))$ ，故原命題由極線垂直極點連圓心得證。 ■

Proof 2. ■

Lemma 0.2.14 (八點圓錐曲線定理). 三角形 ABC ，其中 U, V 為任意兩點，設 $\triangle U_A U_B U_C$, $\triangle V_A V_B V_C$ 為 U, V 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形，則

$$U_A, U_B, U_C, U, V_A, V_B, V_C, V \text{ 八點共圓錐曲線。}$$

Proof 1. 考慮過 U_A, U_B, U_C, U, V 的圓錐曲線 \mathcal{C} ，則我們只須證明 $V_A \in \mathcal{C}$ 。注意到 $\mathbf{p}_{\mathcal{C}}(A) = BC$ ，考慮 AV 和 BC, \mathcal{C} 的交點 X, V'_A ，則我們有

$$(A, X; V, V'_A) = -1 = (A, X; V, V_A).$$

故 $V_A \in \mathcal{C}$ 。 ■

Lemma 0.2.15. 給定一拋物線 \mathcal{P} ，其中焦點和準線為 F, ℓ ，則對於任意關於 \mathcal{P} 的自共軛三角形 $\triangle ABC$ ， $\mathcal{O}_{\triangle ABC}(P) = \ell$ 。

Proof. 考慮一以 F 為圓心的圓 $\odot(F)$ ，則 \mathcal{P} 的包絡線對 $\odot(F)$ 的極點軌跡為一以 $\mathbf{p}_{\odot(F)}(\ell)$ 為圓心的圓 Γ 。注意到配極保交比，所以 $\mathbf{p}_{\odot(P)}(\triangle ABC)$ 為 Γ 的自共軛三角形，因此其垂心為 $\mathbf{p}_{\odot(F)}(\ell)$ 故得證。 ■

Lemma 0.2.16. 設 \mathcal{H} 為一等軸雙曲線，且 P, P' 為一對對徑點， X 為 \mathcal{H} 上任意點，則

$$\angle(T_P \mathcal{H}, PX) = \angle XP'P.$$

Proof. 注意到 \mathcal{H} 是 $\overline{PP'}$ 的中垂線關於 $\triangle XPP'$ 的等角共軛軌跡，故得證。 ■

Lemma 0.2.17. 設 $\triangle XYZ$ 為完全四點形 (A, B, C, D) 的西瓦三角形，則對於任意過 A, B, C, D 的圓錐曲線 \mathcal{C} ， $\triangle XYZ$ 為關於 \mathcal{C} 的自共軛三角形，即

$$\mathbf{p}_{\mathcal{C}}(\triangle XYZ) = \triangle XYZ.$$

特別地，當 \mathcal{C} 為一圓 $\odot(O)$ ，我們可得 O 為 $\triangle XYZ$ 的垂心。

Proof. 令 $P = AD \cap YZ, Q = BC \cap YZ$ 。由 (4.0.8)，

$$(A, D; P, X) = (B, C; Q, X) = -1,$$

因此 X 關於 \mathcal{C} 的極線為 $PQ = YZ$ 。同理有 $\mathbf{p}_{\mathcal{C}}(Y) = ZX, \mathbf{p}_{\mathcal{C}}(Z) = XY$ 。

若 \mathcal{C} 為一圓 $\odot(O)$ ，則 $OX \perp YZ, OY \perp ZX, OZ \perp XY$ ，因此 O 為 $\triangle XYZ$ 的垂心。 ■

Lemma 0.2.18. 給定兩點 P, Q 。設 P 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形為 $\triangle P_a P_b P_c$ ， AQ, BQ, CQ 分別與 $P_b P_c, P_c P_a, P_a P_b$ 交於 X, Y, Z 。則 $\triangle P_a P_b P_c$ 與 $\triangle XYZ$ 透視，且透視中心為直線 PQ 關於 $(ABCPQ)$ 的極點，稱為 $\{P, Q\}$ 關於 $\triangle ABC$ 的交叉點 (Cross point)。注意到交叉點關於 P, Q 是對稱的，因此還有另外三條線過它。

Proof. 令 $\mathcal{C} = (ABCPQ)$ ，我們證明 $P_a X$ 過 $R := \mathbf{p}_{\mathcal{C}}(PQ)$ ，這等價於證明 $\mathbf{p}_{\mathcal{C}}(P_a), \mathbf{p}_{\mathcal{C}}(X), \mathbf{p}_{\mathcal{C}}(R) = PQ$ 共點。分別在 AP, AQ 上取 U, V 使得

$$(A, P; U, P_a) = (A, Q; X, V) = -1,$$

則 PQ, UX, P_aV 共點。注意到 $U \in \mathfrak{p}_C(P_a)$ 且由 (0.2.17), $\mathfrak{p}_C(P_a) = P_bP_c \ni X$, 因此 $\mathfrak{p}_C(P_a) = UX$ 。注意到 $V \in \mathfrak{p}_C(X)$ 且由 $X \in P_bP_c = \mathfrak{p}_C(P_a)$ 可得 $P_a \in \mathfrak{p}_C(X)$, 因此 $\mathfrak{p}_C(X) = P_aV$, 故 $\mathfrak{p}_C(P_a), \mathfrak{p}_C(X), \mathfrak{p}_C(R) = PQ$ 共點。 ■

Lemma 0.2.19. 若一圓錐曲線 C 上四點 $ABCD$ 是一個平行四邊形, 則 $AC \cap BD$ 是 C 的中心。

0.3 等角共軛點

Lemma 0.3.1. 給定 $\triangle ABC$ 和一點 P , 設 P 關於 CA, AB 的垂足為 P_B, P_C 。設 AQ 為 AP 關於 $\angle BAC$ 的等角線, 則 $AQ \perp P_BP_C$ 。

Proof. 設 $AQ \cap P_BP_C = D$, 則 A, P_B, P_C, P 四點共圓, 故

$$\angle AP_BD = \angle AP_BP_C = \angle APP_C, \angle P_CAP = \angle BAP = \angle DAP_B.$$

因此 $\triangle AP_BD \stackrel{+}{\sim} \triangle APP_C$, 故 $\angle ADP_B = 90^\circ$, 即 $AQ \perp P_BP_C$ 。 ■

Lemma 0.3.2 (等角共軛點). 給定三角形 $\triangle ABC$ 和一點 P , 則存在一點 P^* 滿足

$$\angle BAP + \angle CAP^* = \angle CBP + \angle ABP^* = \angle ACP + \angle BCP^* = 0^\circ.$$

Proof 1. 考慮 P 的佩多三角形 $\triangle P_AP_BP_C$, 注意到 $\triangle ABC$ 和 $\triangle P_AP_BP_C$ 正交, 因此 A 關於 P_BP_C, B 關於 P_CP_A, C 關於 P_AP_B 的垂線共點, 因此由 (0.3.1) 知道所共的點 P^* 滿足

$$\angle BAP + \angle CAP^* = \angle CBP + \angle ABP^* = \angle ACP + \angle BCP^* = 0^\circ. \quad \blacksquare$$

Proof 2. 令 $\triangle XYZ$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形, $\triangle P_xP_yP_z$ 為 P 關於 $\triangle XYZ$ 的佩多三角形。我們有

$$\angle P_yP_xP_z = \angle P_yP_xP + \angle PP_xP_z = \angle XZC + \angle BYX = \angle BAC.$$

同理有 $\angle P_zP_yP_x = \angle CBA, \angle P_xP_zP_y = \angle ACB$, 因此 $\triangle P_xP_yP_z \stackrel{+}{\sim} \triangle ABC$ 。取 P^* 使得 $\triangle ABC \cup P^* \stackrel{+}{\sim} \triangle P_xP_yP_z \cup P$, 則

$$\angle BAP + \angle CAP^* = \angle BAP + \angle P_zP_xP = \angle BAP + \angle PAB = 0^\circ. \quad \blacksquare$$

Lemma 0.3.3. 給定 $\triangle ABC$ 中的一對等角共軛點 P, P^* ，設 P, P^* 的佩多三角形分別為 $\triangle P_A P_B P_C, \triangle P_A^* P_B^* P_C^*$ ，則 $P_A, P_B, P_C, P_A^*, P_B^*, P_C^*$ 六點共圓。

Proof. 見 [1], 1.5 節。 ■

Proof. 注意到 A, P_B, P_C, P 四點共圓， A, P_B^*, P_C^*, P^* 四點共圓，因此

$$\angle P_C^* P_C P_B = \angle A P_C P_B = \angle A P P_B = \angle P_C^* P^* A = \angle P_C^* P_B^* A = \angle P_C^* P_B^* P_B$$

故 P_C^*, P_B^*, P_B, P_C 四點共圓，同理 P_A^*, P_C^*, P_C, P_A 四點共圓， P_B^*, P_A^*, P_A, P_B 四點共圓，因此由 (0.2.7)， $P_A, P_B, P_C, P_A^*, P_B^*, P_C^*$ 六點共圓。 ■

Lemma 0.3.4. 設 P, P^* 為 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點對，則存在一圓錐曲線以 P, P^* 為焦點和 BC, CA, AB 相切。

Proof. 見 [1], 1.5 節。 ■

Lemma 0.3.5. 設 P, Q 為 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點，且 AP, AQ 交 $\odot(ABC)$ 於 U, V ， AQ 交 BC 於 R ，則

$$\frac{AP}{PU} = \frac{QR}{RV}.$$

Proof 1.

$$\frac{AP}{UP} = (A, U; P, \infty) = (R, \infty; Q, V) = \frac{RQ}{RV}. \quad \blacksquare$$

Proof 2. 考慮等角共軛點對 $(P, Q), (U, \infty_{AV})$ ，我們有 $A = PU \cap Q\infty_{AV}$ ， $X := P\infty_{AV} \cap QU$ 為等角共軛點對，因此 $P\infty_{AV}, QU, BC$ 共點。故

$$\frac{AP}{PU} = \frac{QX}{XU} = \frac{QR}{RV}. \quad \blacksquare$$

Lemma 0.3.6. 設 P 為任意點， X 為 $\triangle ABC$ 外接圓上任意點， AP 交 $\triangle ABC$ 外接圓於 P_A ，再作 XP_A 交 BC 於 X_A ，類似定義 X_B, X_C 。則 X, X_A, X_B, X_C 四點共於一線 $\ell_X(P)$ 。

Lemma 0.3.7. 設 P, P^* 為 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點， X 為外接圓 $\odot(ABC)$ 上任意點。設 $AP \cap (ABC) = P_A$ ， $XP_A \cap BC = X_A$ ，則

$$\angle(PX_A, BC) = \angle AXP^*$$

Proof. 設 $AP^* \cap (ABC) = Y$, $AP \cap BC = D$, 作 E 在 $P_A X_A$ 上使得 $DE \parallel PX_A$, 注意到

$$\angle X_A P_A D = \angle XYA, \quad \angle DX_A P_A = \angle Y P_A X = \angle YAX,$$

因此 $\triangle X_A P_A D \sim \triangle AYX$ 。由 (0.3.5),

$$\frac{AP^*}{P^*Y} = \frac{PD}{DP_A} = \frac{X_A E}{EP_A}.$$

因此我們有 $\triangle X_A E D \sim \triangle AP^* X$, 最後由算角度可得

$$\angle AXP^* = \angle EDX_A = \angle(XP_A, BC). \quad \blacksquare$$

Lemma 0.3.8. 設 P, P^* 為 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點對。令 O_A, O_A^* 分別為 $\triangle BPC, \triangle BP^*C$ 的外心, 則 AO_A, AO_A^* 為關於 $\angle BAC$ 的等角線。

Proof. 令 B', C' 分別為 $\odot(BPC)$ 與 CA, AB 異於 C, B 的交點, 則 $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$ 且

$$\angle AB'P = \angle CBP = \angle P^*BA, \quad \angle PC'A = \angle PCB = \angle ACP^*,$$

因此 $\triangle ABC \cup P^* \sim \triangle AB'C' \cup P$ 。由 O_A 及 O_A^* 的定義我們可得 $\triangle ABC \cup P^* \cup O_A^* \sim \triangle AB'C'P \cup O_A$, 故 AO_A, AO_A^* 為關於 $\angle BAC$ 的等角線。 \blacksquare

Lemma 0.3.9. 設 P, Q 為 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點對, 則對於任意過 I, I_a, I_b, I_c 的圓錐曲線 C , P, Q 關於 C 共軛。

Proof. 見 [1], 1.4 節及 1.5 節。 \blacksquare

Lemma 0.3.10. 設 P, Q 為 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點, $\triangle P_A P_B P_C$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形, 則 PQ 和 $\mathcal{H}(PP_A P_B P_C)$ 相切。

Proof 1. 由 (0.2.14), $I, I_a, I_b, I_c, P, P_a, P_b, P_c$ 共於一圓錐曲線 \mathcal{H} 。由於 \mathcal{H} 與 $\mathcal{H}(PP_A P_B P_C)$ 皆為等軸雙曲線, 因此 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(PP_A P_B P_C)$ 。再由 (0.3.9) 可得 P 關於 \mathcal{H} 的極線, 即 $T_P \mathcal{H}$, 過 Q 。 \blacksquare

Proof 2. 考慮一以 P 為圓心的圓 $\odot(P)$, 設 C 是以 P, Q 為焦點和 BC, CA, AB 相切的圓錐曲線。則 C 的包絡線對 $\odot(P)$ 的極點軌跡為 $\mathbf{p}_{\odot(P)}(\triangle ABC)$ 的外接圓,

故 $\mathbf{p}_{\odot(P)}(\triangle ABC)$ 外心在 PQ 連線上。注意到 $\mathbf{p}_{\odot(P)}(\triangle P_AP_BP_C)$ 為 $\mathbf{p}_{\odot(P)}(\triangle ABC)$ 的中點三角形，所以 $\mathbf{p}_{\odot(P)}(\mathcal{O}_{\triangle P_AP_BP_C}(P))$ 在 PQ 上，因此 PQ 和 $\mathcal{H}(PP_AP_BP_C)$ 相切。 ■

Lemma 0.3.11. 設 $\triangle H_aH_bH_c$ 為 $\triangle ABC$ 的垂足三角形， P, P^* 為 $\triangle H_aH_bH_c$ 的等角共軛點對，則 $P^* \in T_P\mathcal{H}(ABCP)$

Proof. 考慮 $\triangle ABC$ 的垂心 H ，設 $\triangle P_AP_BP_C$ 為 P 關於 $\triangle H_aH_bH_c$ 的反西瓦三角形，則由 (0.2.14) 知道 $P, P_A, P_B, P_C, A, B, C, H$ 共圓錐曲線，再由 (0.3.10) 知道

$$P^* \in T_P\mathcal{H}(DEFP) = T_P\mathcal{H}(ABCP). \quad \blacksquare$$

Lemma 0.3.12.

Lemma 0.3.13. P, P^* 是三角形 $\triangle ABC$ 的一組等角共軛點對。對 PP^* 上任意點 Q ， PQ^* 切 $(ABCPQ)$ ，其中 Q^* 是 Q 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。

Proof. 令 PP^* 分別交 BC, CA, AB 於 D, E, F ， AQ 交 BC 於 Q_A 。上述命題等價於證明

$$P(P^*, A; B, C) = (P, A; B, C)_{(ABCPQ)}.$$

注意到前者等價 $(Q^*, A; B, C)_{(ABCP^*P)}$ ，取等角共軛變換即為

$$\begin{aligned} X(Q, A, B, C) &= (Q, A, B, C)_{(ABCP^*P)} \\ &= (P, D, E, F) && \text{(等角共軛變換)} \\ &= A(P_a, D, C, B) \\ &= (D, P_a, B, C) \\ &= P(X, A, B, C) \\ &= (Q, A, B, C)_{(ABCP^*P)} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Lemma 0.3.14. 設 P, P^* 為 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點對， $\mathcal{C} = (ABCP^*P)$ 。令 T 為 \mathcal{C} 和 $\odot(ABC)$ 的第四個交點， X 為 $\odot(ABC)$ 上任意點， Z 為 XT 和 \mathcal{C} 異於 T 的交點。則 P, P^*, X, Z 四點共圓。

Proof. 令 $\triangle P_AP_BP_C$, $\triangle P_A^*P_B^*P_C^*$ 分別為 P , P^* 關於 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形, X_A, X_A^* 分別為 XP_A, XP_A^* 和 BC 的交點。類似地定義 X_B, X_B^*, X_C, X_C^* , 由 (0.3.6) 我們知道 P, X_A, X_B, X_C 及 P^*, X_A^*, X_B^*, X_C^* 分別共於兩線 ℓ, ℓ^* 。作 ℓ, ℓ^* 的交點 Z' , 則由 (0.3.7) 我們有

$$\angle PZ'P^* = \angle(\ell, BC) + \angle(BC, \ell^*) = \angle AXP^* + \angle PXA = \angle PXP^*$$

即 P, P^*, X, Z' 四點共圓。

接著我們證明 $Z' \in \mathcal{C}$ 。設 $D = BP \cap P^*C$ 。考慮 $\triangle ABC$ 外接圓上的六折線 $ABP_BP_C^*C$, 由帕斯卡定理我們有 X_B, X_C^*, D 共線。考慮六折線 ABP_ZP^*C , 由帕斯卡逆定理可得 A, P, Z', P^*, C, B 六點共圓錐曲線, 即 $Z' \in \mathcal{C}$ 。

最後, 我們證明 T, Z', X 三點共線。注意到

$$\begin{aligned} T(A, B; C, Z') &\stackrel{\mathcal{C}}{=} P(A, B; C, Z') = (AP \cap BC, B; C, X_A) \\ &= P_A(A, B; C, X) = T(A, B; C, X), \end{aligned}$$

故 T, Z', X 三點共線。 ■

Chapter 1

內心

Lemma 1.0.1. 我們有

$$\angle BIC = 90^\circ + \angle BAI = 90^\circ + \angle IAC.$$

Proof. 注意到 AI, BI, CI 分別垂直 EF, FD, DE ，所以

$$\angle BIC = \angle FDE = \angle AFE = 90^\circ + \angle BAI = 90^\circ + \angle IAC. \quad \blacksquare$$

Lemma 1.0.2 (雞爪圓). 設 N_a 為 \widehat{BC} 弧中點，則 B, I_a, C, I 共圓且圓心為 N_a 。

Proof. 注意到

$$\angle BIN_a = \angle BIA = \angle BAI + \angle IBA = \angle N_aAC + \angle IBA = \angle N_aBI$$

故 $\overline{N_aI} = \overline{N_aB}$ ，同理有 $\overline{N_aI} = \overline{N_aC} = \overline{N_aI_a}$ 。 ■

Lemma 1.0.3. 設 $\triangle ABC$ 中 A -旁切圓切 BC 於 D' ，則 \overline{BC} 中點 M_a 為 $\overline{DD'}$ 中點。

Proof 1. 令 I_a 為 A -旁心，由 (1.0.2)， $\overline{II_a}$ 的中點為 \widehat{BC} 中點 N_a ，故

$$\frac{DM_a}{M_aD'} = \frac{IN_a}{N_aI_a} = 1. \quad \blacksquare$$

Lemma 1.0.4. 設 $\triangle ABC$ 中 A -旁切圓切 BC 於 D' ， M_a 為 \overline{BC} 中點，則 $IM_a \parallel AD'$ 。

Proof. 令 D^* 為 D 關於 $\odot(I)$ 的對徑點，過 D^* 作平行於 BC 的直線分別交 AB, AC 於 XY ，則 $\triangle AXY$ 與 $\triangle ABC$ 位似。因此 A, D^*, D' 共線。由 (1.0.3)， IM_a 為 $\triangle DD'D^*$ 的 D -中位線，故 $IM_a \parallel D^*D' = AD'$ 。 ■

Lemma 1.0.5 (熱爾岡點). 直線 AD, BE, CF 共於一點 Ge 。

Proof 1. 由西瓦定理及

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = 1. \quad \blacksquare$$

Proof 2. 考慮六折線 $BDCEAF$ ，由於其與內切圓 $\odot(I)$ 相切，由布里昂雄定理得證。 ■

Proof 3. 由 Sondat 定理， $\triangle DEF$ 與 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(\triangle DEF)$ 透視，而我們顯然有

$$\mathfrak{p}_{\odot(I)}(\triangle DEF) = \triangle ABC. \quad \blacksquare$$

Lemma 1.0.6 (納格爾點). 直線 AD', BE', CF' 共於一點 Na 。

Proof 1. 由西瓦定理及

$$\frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} \cdot \frac{AF'}{F'B} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} = 1. \quad \blacksquare$$

Lemma 1.0.7. 我們有 I, G, Na 共線且

$$\frac{NaG}{GI} = 2.$$

Proof. 由 (1.0.4)， $M_aI \parallel ANa$ 。同理有 $M_bI \parallel BNa, M_cI \parallel CNa$ 。又 $\triangle ABC$ 與 $\triangle M_aM_bM_c$ 位似且位似比為 -2 ，因此由 $\triangle ABC \cup Na \overset{+}{\sim} \triangle M_aM_bM_c \cup I$ 可得

$$\frac{NaG}{GI} = 2. \quad \blacksquare$$

Lemma 1.0.8. 直線 HN_a 平行於 OI 。

Proof. 由 (1.0.7) 及 (2.0.6)，

$$\frac{HG}{GO} = 2 = \frac{NaG}{GI},$$

因此 $HN_a \parallel OI$ 。 ■

Lemma 1.0.9. 設 $\odot(AEF) = \odot(\overline{AI})$ 和 $\odot(ABC)$ 異於 A 的交點為 X ，則 D , X , \widehat{BC} 弧中點 N_a 共線。

Proof 1. 注意到 X 是 $\triangle ABC \cup EF$ 的密克點，故 $\triangle XBF \simeq \triangle XCE$ ，因此

$$\frac{XB}{XC} = \frac{FB}{EC} = \frac{DB}{DC}.$$

故 $\angle BXD = \angle DXC$ 。因為 A, X 位於 BC 同側且 D 位於 \overline{BC} 內，因此 XD 為 $\angle BXC$ 的內角平分線且 X, D, N_a 共線。 ■

Proof 2. 注意到 X 是 $\triangle ABC \cup EF$ 的密克點。令 N'_a 為 N_a 關於外接圓的對徑點， Y 為 EF 和 BC 的交點，則我們有 X, Y, F, B 共圓，因此

$$\angle YXN'_a = \angle YXB + \angle BXN'_a = \angle YFB + \angle BAN'_a = \angle EFB + \angle BAN'_a = 0^\circ.$$

故 X, Y, N'_a 共線，因此

$$(N_a, N'_a; B, C) = -1 = (D, Y; B, C) = X(D, Y; B, C),$$

故 X, D, N_a 共線。 ■

Lemma 1.0.10. 標號同 (1.0.9)，設 I 關於垂線 AH 的垂足為 T ，則直線 XDN_a 也經過 T 與外接圓與內切圓的外位似中心 X_{56} 。

Proof. 注意到 $T \in \odot(AIX)$ ，所以

$$\angle AXT = \angle AIT = \angle(AI, BC) = \angle AXN_a,$$

即 X, T, N_a 共線。令 $\triangle A'B'C'$ 為 $\triangle DEF$ 的垂心關於 $\triangle DEF$ 的圓西瓦三角形，則 $\triangle A'B'C'$ 與 $\triangle ABC$ 位似且位似比為正。由 $\triangle A'B'C' \cup D \simeq \triangle ABC \cup N_a$ 可得 DN_a 過 $\odot(A'B'C')$ 與 $\odot(ABC)$ 的外位似中心 X_{56} 。 ■

Lemma 1.0.11. 標號同 (1.0.9)，設 IX 交 EF 於 T ，則 $DT \perp EF$ 。

Proof 1. 注意到 I 是 $\odot(AEF)$ 上 \widehat{EF} 的弧中點，故

$$\frac{TF}{TE} = \frac{XF}{XE} = \frac{XB}{XC} = \frac{DB}{DC},$$

所以 $\triangle XTD \simeq \triangle XFB$ 因此

$$\angle XN_aA = \angle XBA = \angle XBF = \angle XDT \implies DT \parallel N_aA \perp EF. \quad \blacksquare$$

Proof 2. 觀察出

$$\frac{TF}{TE} = \frac{DB}{DC},$$

後，也可令 T' 為 E 對 EF 的垂足。由算 tangent 比例可以發現

$$\frac{T'F}{T'E} = \frac{DB}{DC}$$

故由單比的唯一性知， $T = T'$ 。

■

Lemma 1.0.12. 令 H, I 分別為 $\triangle ABC$ 的垂心和內心，則 H, I 為 $\triangle DEF$ 的垂足三角形的一對等角共軛點。

Proof. 令 H_d 為 D 關於 EF 的垂足，我們只需要證明 $\angle HH_dD = \angle DH_dI$ ，其他兩邊同理。由 (1.0.11)， X 是完全五線形 $\triangle ABC \cup EF \cup DH_d$ 的密克點，由 (4.0.3) 可得 $\triangle AEF, \triangle ABC$ 的垂心和 H_d 共線。注意到 $\triangle AEF$ 垂心是 I 關於 EF 的對稱點 I' ，所以

$$\angle HH_dD = \angle I'H_dD = \angle DH_dI.$$

■

Lemma 1.0.13. 設 EF 與 BC 交於 X ，則 $(B, C; D, X) = -1$ 。

Proof 1. 由孟氏定理，

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

因此

$$\frac{BD/DC}{BX/XC} = -\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1.$$

■

Proof 2. 由 (1.0.5) 及完全四線形 (CA, AB, BE, CF) 的調和分割性質 (4.0.8)。

■

Lemma 1.0.14. 設 ID 交 EF 於 T ，則 AT 平分 \overline{BC} 。

Proof 1. 過 T 作平行於 BC 的直線交 CA, AB 於 X, Y ，則 I 關於 XY, YA, AX 的垂足 T, E, F 共線。由西姆松定理， $I \in \odot(AXY)$ ，由 $\triangle AXY \cup I$ 與 $\triangle ABC \cup N_a$ 位似可得 A, T, M_a 共線。

■

Proof 2. 過 A 作平行於 BC 的直線交 EF 於 S ，則 $ST = \mathbf{p}_{\odot(I)}(A)$ 。由於 $IT \perp AS$ ，所以 $\mathbf{p}_{\odot(I)}(T) = AS$ ，故

$$A(B, C; T, \infty_{BC}) = (F, E; T, S) = -1,$$

即 AT 平分 BC 。 ■

Lemma 1.0.15. 設 J 為 C 關於 BI 的垂足，則 J 為 C -中位線與 EF 的交點。

Proof 1. 由

$$\angle(M_a J, AB) = \angle M_a J B + \angle J B A = \angle I B C + \angle C B I = 0,$$

我們知道 J 位於 C -中位線上。注意到 C, E, J, I 共圓，所以由 (1.0.1)，

$$\angle J E C = \angle B I C = 90^\circ + \angle I A E = \angle F E C,$$

即 $J \in EF$ 。 ■

Proof 2. J 位於 C -中位線同上面的算角度證明。由於 $\triangle DEF$ 為熱爾岡點 Ge 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形且 Ge 位於費爾巴哈雙曲線 \mathcal{H}_{Fe} 上，因此 $EF = \mathbf{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(D)$ 。注意到 D, J 為 $\triangle IBC$ 的垂足三角形的兩個頂點且 $I \in \mathcal{H}_{Fe}$ ，所以 $J \in \mathbf{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(D) = EF$ 。 ■

Lemma 1.0.16. 令 X 為 AI 與 BC 的交點，則

$$(A, X; I, I_a) = -1.$$

Proof. 我們有

$$\frac{AI}{IX} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BX}} = -\frac{AI_a}{I_a X}. \quad \blacksquare$$

Lemma 1.0.17. 設 H_a 為 A 關於 BC 的垂足， X 為 AI 與 BC 的交點，則

$$(H_a, X; D, D') = -1.$$

Proof. 由 (1.0.16)，

$$(A, AI \cap BC; I, I_a) = -1,$$

將其關於 BC 投影即可得到

$$(H_a, X; D, D') = -1. \quad \blacksquare$$

Lemma 1.0.18. 令 H_a 為 A 關於 BC 的垂足，則 DI_a 平分 $\overline{AH_a}$ 。

Proof. 由 (1.0.16)，我們有

$$(A, H_a; DI_a \cap \infty_{AH_a}, AH_a) = D(A, AI \cap BC; I, I_a) = -1,$$

即 DI_a 平分 $\overline{AH_a}$ 。 ■

Lemma 1.0.19. 三角形 DEF 的歐拉線是 OI 。

Proof. 注意到 $\triangle DEF$ 與 $\triangle I_a I_b I_c$ 位似， $\triangle I_a I_b I_c$ 的歐拉線是 OI ，且 I 在 $\triangle DEF$ 的歐拉線上，因此他們的歐拉線重合，故 $\triangle DEF$ 的歐拉線是 OI 。 ■

Lemma 1.0.20. 內心 I 關於外心 O 的對稱點 $Be =: X_{40}$ 為 $\triangle I_a I_b I_c$ 的外心。

Proof 1. 由 (1.0.3)， Be 關於 BC 的垂足為 D' ，即 $I_a Be$ 垂直於 BC 。令 O_I 為 $\triangle I_a I_b I_c$ 的外心，由 (1.0.1) 的旁心版本可得

$$\angle I_b I_a O_I = 90^\circ - \angle I_a I_c I_b = 90^\circ - \angle I_a C B = \angle I_b I_a B e,$$

即 I_a, O_I, Be 共線。同理可得 I_b, O_I, Be 及 I_c, O_I, Be 分別共線，故 $Be = O_I$ 。 ■

Proof 2. 注意到 I, O 分別為 $\triangle I_a I_b I_c$ 的垂心及九點圓圓心，由 (2.0.8) 可得 Be 為 $\triangle I_a I_b I_c$ 的外心 ■

Lemma 1.0.21. 設 BI, CI 分別與 CA, AB 交於 Y, Z ， YZ 與 $\odot(ABC)$ 交於 P, Q 兩點，則 I, I_b, I_c, P, Q 共圓。

Proof. 由 Y 位於 $\odot(ACPQ)$ 及 $\odot(ACII_b)$ 的根軸上知 I, I_b, P, Q 共圓。同理有 I, I_c, P, Q 共圓。 ■

Lemma 1.0.22. 我們有 I 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $t(I)$ 垂直 OI ，類似地，有 I_x 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $t(I_x)$ 垂直 OI_x ，意即，若 BI, CI 分別與 CA, AB 交於 Y, Z ，則 $OI_a \perp YZ$ 。

Proof 1. 我們證明 $OI_a \perp YZ$ ，其餘情況類似。由 (1.0.2)，

$$YI \cdot YI_b = YC \cdot YA, \quad ZI \cdot ZI_c = ZA \cdot ZB,$$

因此 YZ 為 $\odot(ABC)$ 與 $\odot(II_bI_c)$ 根軸，故垂直 O 與 $\triangle II_bI_c$ 的外心 O' 的連線。注意到 I_a, O 分別為 $\triangle II_bI_c$ 的垂心及九點圓圓心 (由 (2.0.11))，由 (2.0.8)， O', I_a, O 共於 $\triangle II_bI_c$ 的歐拉線，故 $OI_a \perp YZ$ 。 ■

Proof 2. 注意到 OI 與費爾巴哈雙曲線 \mathcal{H}_{Fe} 相切，故 I 的正交截線垂直 OI ，且注意到 I 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線，正交截線，及 I 關於 $\odot(DEF)$ 的極線共點，故 I 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線及正交截線平行，因此 I 的三線性極線垂直 OI 。 ■

Lemma 1.0.23. 設 D 關於 EF 的對稱點為 D' ，則 AD', BC, OI 共點。

Proof 1. 注意到由 (0.2.18) 我們有 $\triangle DEF$ 的重心 G_I 是 I, Ge 關於 \mathcal{H}_{Fe} 的極點，考慮 D 對 \overline{EF} 中點 M_D 的對稱點 D'' ，則由 $A(I, Ge; G_I, D'')_{\mathcal{H}_{Fe}} = -1$ ，因此 AD'' 切 \mathcal{H}_{Fe} ，即 AD'' 的等角線 AD' 和 BC, OI 共點。 ■

Proof 2. 考慮 IB, IC 上的兩點 U, V 滿足 $AU \perp AC, AV \perp AB$ 則發現到 $UV = \mathcal{O}_A(\triangle BIC)$ ，因此 A 在 $(ABCIH)$ 上的切線垂直 UV ，注意到我們同時得到 AEF 和 IUV 正交，考慮 D 關於 EF 中點的對稱點為 D'' ，則 AD', AD'' 為等角線，由 AEF 和 IUV 正交我們知道 AD'' 垂直 UV ，因此我們知道 AD'' 是 A 在 $(ABCIH)$ 上的切線，故 AD' 過 BC 和 OI 的交點。 ■

Proof 3. ■

1.1 $\triangle BIC$ 的垂心

以下設 H_A, H_B, H_C 分別為 $\triangle BIC, \triangle CIA, \triangle AIB$ 的垂心。

Lemma 1.1.1. 令 $S = ID \cap EF$ ，則

$$(D, S; I, H_A) = -1.$$

Proof 1. 設 $BI \cap EF = J, DI \cap EF = S, BC \cap EF = X$ ，則 C, J, H_A 共線，故

$$J(D, S; I, H_A) = (D, X; B, C) = -1. \quad \blacksquare$$

Proof 2. 由於 $\triangle DEF$ 為熱爾岡點 Ge 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形且 Ge 位於費爾巴哈雙曲線 \mathcal{H}_{Fe} 上，因此 $EF = \mathbf{p}_{\odot(I)}(D)$ ，故原命題由調和性質顯然。 ■

Lemma 1.1.2. 標號同 (1.1.1)，則 $\mathbf{p}_{\odot(I)}(H_A)$ 為 $\triangle ABC$ 的 A -中位線。

Proof. 注意到 $S \in EF = \mathbf{p}_{\odot(I)}(A)$ ，因此 $A \in \mathbf{p}_{\odot(I)}(S)$ 且 $\mathbf{p}_{\odot(I)}(S) \perp IS \perp BC$ ，故 $\mathbf{p}_{\odot(I)}(S)$ 過 A 且平行 BC ，因此由配極保交比

$$(BC, \mathbf{p}_{\odot(I)}(S); \mathcal{L}_{\infty}, \mathbf{p}_{\odot(I)}(H_A)) = (D, S; I, H_A) = -1.$$

故 $\mathbf{p}_{\odot(I)}(H_A)$ 為 A -中位線。 ■

Lemma 1.1.3. 內心 I 關於 $\triangle H_A H_B H_C$ 的西瓦三角形為切點三角形 $\triangle DEF$ 。

Proof 1. 由 (1.1.1) 及西瓦三角形的性質。 ■

Proof 2. 我們證明 D, H_B, H_C 共線。由 (1.1.2)，將此命題關於 $\odot(I)$ 配極後等價於 BC, B -中位線, C -中位線共點，即 \overline{BC} 中點。 ■

Lemma 1.1.4. 直線 $H_A Ge$ 過 \overline{EF} 中點 M_d 。

Proof. 標號同 (1.1.1)，考慮 AD 和 EF 的交點 U ，則

$$M_d(D, U; A, Ge) = -1 = M_d(D, S; I, H_A).$$

故 Ge, M_d, H_A 共線。 ■

Lemma 1.1.5. 直線 $H_A Na$ 平行於 AI 。

Proof. 注意到 H_A 關於 \overline{BC} 中點 M_a 的對稱點為 I_a 。令 Na' 為 N_a 關於 M_a 的對稱點，我們只需證明 $Na' \in AI$ 。由 (1.0.7)，

$$\frac{NaI}{IG} \cdot \frac{GA}{AM_a} \cdot \frac{M_a Na'}{Na' Na} = (-3) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1,$$

因此 A, I, Na' 共線。 ■

Lemma 1.1.6. 直線 $H_A H$ 過 D 關於 EF 的垂足 H_d 與 I 關於 EF 的對稱點 I' 。

Proof. 由 (1.0.12), H, H_d, I' 共線, 因此我們只需證明 H_A 也在此線上。由 (1.1.1), 令 $S = ID \cap EF$, M_d 爲 \overline{EF} 中點, 我們有

$$H_d(D, S; I, H_A) = -1 = H_d(\infty_{AI}, M_d; I, I').$$

因此 H_d, H_A, I' 共線。 ■

Lemma 1.1.7. 令 Fe 爲 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈點, 則 AH_A, BC, Fe 關於 $\odot(I)$ 的切線交於一點。

1.2 偽內切圓

Lemma 1.2.1 (偽內切圓). 設圓 ω_A 分別與 CA, AB 相切於 E_A, F_A , 且與 $\odot(ABC)$ 內切, 稱 ω_A 爲 $\triangle ABC$ 的 A -偽內切圓。則 I, E_A, F_A 共線, 意即, $I \in \mathfrak{p}_{\omega_A}(A)$ 。

Proof 1. 令 T_A 爲 ω_A 與 $\odot(ABC)$ 的切點。由 (0.2.1) 可得 $T_A E_A$ 爲 $\angle C T_A A$ 的角平分線, 由 E_A 位於 \overline{CA} 內及 T_A, N_b 位於 CA 異側可得 T_A, E_A, N_b 共線。由 $\angle C T_A N_b = \angle C A N_b = \angle N_b C E_A$, 我們知道 $\triangle N_b E_A C \sim \triangle N_b C T_A$ 。令 $I' = BN_b \cap E_A F_A$, 則

$$\angle T_A F_A I' = \angle T_A F_A E_A = \angle T_A E_A C = \angle T_A C N_b = \angle T_A B I',$$

因此 B, T_A, I', F_A 共圓。由

$$\angle T_A I' N_b = \angle T_A F_A B = \angle T_A E_A F_A = \angle N_b E_A I'$$

我們可得 $\triangle N_b E_A I' \sim \triangle N_b I' T_A$, 故

$$N_b I'^2 = N_b E_A \cdot N_b T_A = N_b C^2.$$

所以由 (1.0.2) 及 I, I' 在 BN_b 上位於 N_b 同側可得 $I' = I$ 。 ■

Proof 2. 考慮關於 A 的反演命題, 我們只要證明:

若 A -旁切圓分別與 CA, AB 相切於 E_a, F_a , 則 A, I_a, E_a, F_a 共圓。

而這顯然是對的。 ■

Proof 3. 同 *Proof 1.*，我們有 T_A, E_A, N_b 共線，同理有 T_A, F_A, N_c 共線。考慮六折線 $ABN_bT_AN_cC$ ，由於其頂點皆位於 $\odot(ABC)$ 上，所以由帕斯卡定理， $E_A, F_A, I = BN_b \cap CN_c$ 共線。 ■

Lemma 1.2.2. 設圓 ω 與 CA 相切於 \overline{CA} 內，且與 $\odot(ABC)$ 內切。設 P 為 CA 上一點使得 BP 與 ω 相切，則 $I \in \mathfrak{p}_\omega(A)$ 。

Proof 1. 證明類似於 (1.2.1) 的 *Proof 1.*。令 T 為 ω 與 $\odot(ABC)$ 的切點， E, F 分別為 ω 與 CP, PB 的切點。由 (0.2.1) 可得 TE 為 $\angle CTA$ 的角平分線，由 E 位於 \overline{CA} 內及 T, N_b 位於 CA 異側可得 T, E, N_b 共線。由 $\angle CTN_b = \angle CAN_b = \angle N_bCE$ ，我們知道 $\triangle N_bEC \sim \triangle N_bCT$ 。令 $I' = BN_b \cap EF$ ，則

$$\angle TFI' = \angle TFE = \angle TEC = \angle TCN_b = \angle TBI',$$

因此 B, T, I', F 共圓。由

$$\angle TI'N_b = \angle TFB = \angle TEF = \angle N_bEI'$$

我們可得 $\triangle N_bEI' \sim \triangle N_bI'T$ ，故

$$N_bI'^2 = N_bE \cdot N_bT = N_bC^2.$$

所以由 (1.0.2) 及 I, I' 在 BN_b 上位於 N_b 同側可得 $I' = I$ 。 ■

Proof 2. ■

Lemma 1.2.3. 標號同 (1.2.1)，令 T_A 為 ω_A 與 $\odot(ABC)$ 的切點，則 B, T_A, I, F_A 及 C, T_A, I, E_A 分別共圓。

Proof. 由 (1.2.1) 的 *Proof 1.* 可以直接看出。如果在假設 (1.2.1) 是對的情況下，我們有 I, E_A, F_A 共線。由於 BI 與 T_AE_A 交於 N_b ，

$$\angle T_AF_AI = \angle(T_AN_b, CA) = \angle N_bT_AC + \angle T_ACA = \angle ABN_b + \angle T_ABA = \angle T_ABI,$$

即 B, T_A, I, F_A 共圓。同理有 C, T_A, I, E_A 共圓。 ■

Lemma 1.2.4. 標號同 (1.2.3)，我們有

$$(A, T_A; N_b, N_c) = -1.$$

Proof. 由 (0.2.9) ,

$$(T_A, AT_A \cap \omega_A; E_A, F_A) = -1.$$

由於 ω_A 與 $\odot(ABC)$ 相切於 T_A , 因此關於 T_A 位似即可得

$$(T_A, A; N_b, N_c) = (T_A, AT_A \cap \omega_A; E_A, F_A),$$

因此

$$(A, T_A; N_b, N_c) = -1. \quad \blacksquare$$

Lemma 1.2.5. 標號同 (1.2.3) , 令 N'_a 爲 \widehat{BAC} 中點 , 則 I, N'_a, T_A 共線。

Proof 1. 由 (1.2.3) 及 $AI \perp E_A F_A$,

$$\angle IT_A B = \angle IF_A B = \angle IAB + 90^\circ = \angle N'_a AB = \angle N'_a T_A B,$$

所以 I, N'_a, T_A 共線。 ■

Proof 2. 由 (1.2.4) ,

$$(A, T_A; N_b, N_c) = -1.$$

考慮以 I 爲中心 , 反演幂爲 $\mathcal{P}(\odot(ABC), I)$ 的反演變換 , 則

$$-1 = (A, T_A; N_b, N_c) = (N_a, T_A I \cap \odot(ABC); B, C),$$

因此 $T_A I \cap \odot(ABC) = N'_a$ 。 ■

Lemma 1.2.6. 標號同 (1.2.3) , 類似定義 T_B, T_C , 則 AT_A, BT_B, CT_C 共點於 $\odot(ABC)$ 與 $\odot(I)$ 的外位似中心 X_{56} 。

Proof. 由 Monge 定理 , 我們有 AT_A 過 $\odot(ABC), \odot(I)$ 的外位似中心 X_{56} 。同理 , BT_B, CT_C 也過 X_{56} 。 ■

Lemma 1.2.7. 內切圓 $\odot(I)$ 和外接圓 $\odot(O)$ 的內、外位似中心分別爲 Ge, Na 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 Ge^*, Na^* 。

Proof. 我們只證明外位似中心的情況 , 內位似中心的證明類似 , 標號同 (1.2.1)。
由 (1.2.6) , AT_A 過 $\odot(ABC), \odot(DEF)$ 的外位似中心 , 且透過對 A 反演可以得到 ANa , AT_A 爲等角線。對於 B, C 我們有同樣的結論。 ■

Lemma 1.2.8. 標號同 (1.2.3)，若 P 爲 $\odot(ABC)$ 上任一點， Q 爲 AP 與 BC 的交點，則 $T_A \in \odot(APQ)$ 。

Proof. 由 Reim 定理及 $DQ = BC$ ，這等價於證明 T_AD 與過 A 平行於 BC 的直線交於 $\odot(ABC)$ 。將此命題關於 BC 中垂線對稱，我們需要證明 A, D', U_A 共線，其中 $U_A \in \odot(ABC)$ 滿足 $T_A U_A \parallel BC$ 。由 (1.2.7) 我們知道 $AT_A, AD' = AN_a$ 是關於 $\angle BAC$ 的等角線，因此 A, D', U_A 共線。 ■

Lemma 1.2.9. 標號同 (1.2.3)，令 X 爲 (1.0.9) 中的 X ，我們有 $E_A F_A, BC, N_a T_A$ 共於一點 S 。

Proof. 考慮四圓 $\odot(ABC), \odot(IT_A N_a), \odot(BIC), \odot(AXI)$ 。由 (1.2.5)， $\odot(IT_A N_a)$ 與 $\odot(BIC), \odot(AXI)$ 相切於 I ，故此四圓有共同的根心。而上述四線皆爲其中某兩圓的根軸，因此共點。 ■

Lemma 1.2.10. 若 P 爲 \widehat{BC} 上任一點， J_b, J_c 分別爲 $\triangle CAP, \triangle ABP$ 的內心，則 P, T_A, J_b, J_c 共圓。

Proof. 我們證明 $\triangle T_A N_b J_b \stackrel{+}{\sim} \triangle T_A N_c J_c$ 。注意到

$$\angle T_A N_b J_b = \angle T_A N_b P = \angle T_A N_c P = \angle T_A N_c J_c,$$

由 (1.2.4) 及 (1.0.2)，

$$\frac{\overline{T_A N_b}}{\overline{T_A N_c}} = \frac{\overline{AN_b}}{\overline{AN_c}} = \frac{\overline{J_b N_b}}{\overline{J_c N_c}},$$

所以 $\triangle T_A N_b J_b \stackrel{+}{\sim} \triangle T_A N_c J_c$ 。 ■

Lemma 1.2.11. 設 D 爲 $\triangle ABC$ 的內切圓與 BC 的切點。若 P 爲 \overline{BC} 內一點， J_b, J_c 分別爲 $\triangle CAP, \triangle ABP$ 的內心，則 P, D, J_b, J_c 共圓。

Proof 1. ■

Proof 2. 此爲 (1.2.10) 的旁心命題關於 A 的反演命題。 ■

Lemma 1.2.12. 標號同 (1.2.3)，令 I' 爲 I 關於 T_A 的對稱點，則 $AN'_a, BC, I_a I'$ 共點。

Proof. 由於 N'_a, I, I' 共線且 $I' \in \odot(BI_aCI)$,

$$\angle N'_aAI_a = 90^\circ = \angle N'_aI'I_a,$$

即 A, I', I_a, N'_a 共圓。而此三線為三圓 $\odot(ABC), \odot(BI_aCI), \odot(AI'I_aN'_a)$ 兩兩之間的根軸。 ■

Lemma 1.2.13. 標號同 (1.2.3), 令 A^+ 為 AT_A 與 E_AF_A 的交點, A^- 為 IT_A 與 BC 的交點, 則 $A^+A^- \parallel AI$ 。

Proof. 注意到 I 關於 $\triangle N'_aBC$ 的等角共軛點 I^* 為 I 關於 \overline{BC} 的中垂線的對稱點, 所以由 (0.3.5) 可得

$$\frac{IA^-}{A^-T_A} = \frac{N_aI^*}{I^*U} = \frac{N_aI}{IT_A},$$

其中 U 為 N_aI^* 與 $\odot(ABC)$ 異於 N_a 的交點。故

$$\frac{AA^+}{A^+T_A} = \frac{N_aI}{IT_A} = \frac{IA^-}{A^-T_A},$$

即 $A^+A^- \parallel AI$ 。 ■

1.3 費爾巴哈雙曲線

Lemma 1.3.1 (費爾巴哈). 九點圓 $\odot(N)$ 與內切圓 $\odot(I)$ 及三個旁切圓 $\odot(I_a), \odot(I_b), \odot(I_c)$ 相切。分別記 Fe, Fe_a, Fe_b, Fe_c 為他們之間的切點。

Proof 1. 我們證明 $\odot(N)$ 與 $\odot(I)$ 相切。令 $X = AI \cap BC$, Y 為 D 關於 AI 的對稱點, 則 Y 位於 $\odot(I)$ 上。定義 Fe 為 YM_a 與 $\odot(I)$ 異於 Y 的交點, 以下證明 $\odot(N)$ 與 $\odot(I)$ 相切於 Fe 。由 (1.0.17),

$$M_aH_a \cdot M_aX = M_aD^2 = M_aY \cdot M_aFe,$$

所以 H_a, X, Y, Fe 共圓。令 E_A 為 \overline{AH} 中點, 則

$$\begin{aligned} \angle H_aFeM_a &= \angle H_aFeY = \angle H_aXY = 2 \cdot \angle DXA \\ &= 2 \cdot \angle H_aAI = \angle HAO = \angle H_aE_AM_a. \end{aligned}$$

即 $Fe \in \odot(H_a M_a E_A) = \odot(N)$ 。而

$$\begin{aligned}\angle(T_{Fe}\odot(N), T_{Fe}\odot(I)) &= \angle(T_{Fe}\odot(N), FeM_a) + \angle(FeY, T_{Fe}\odot(I)) \\ &= \angle FeH_a M_a + \angle XYFe = 0^\circ. \quad (H_a, X, Y, Fe \text{ 共圓})\end{aligned}$$

故 $\odot(N)$ 與 $\odot(I)$ 相切於 Fe 。 ■

Proof 2. 我們知道 I 的佩多圓與九點圓在 (A, B, C, I) 的龐色列點的夾角為

$$90^\circ + \angle(BC, AP) + \angle(CA, BP) + \angle(AB, CP) = 0^\circ,$$

(見 [1], 2.1 節)，因此兩圓相切。 ■

Lemma 1.3.2. 費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe} = (ABCIH)$ 為 OI 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡。

Proof. 這是因為 $(I, I), (O, H)$ 是 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，而直線的等角共軛軌跡是一條外接圓錐曲線。 ■

Lemma 1.3.3. 費爾巴哈雙曲線 \mathcal{H}_{Fe} 的中心是費爾巴哈點 Fe 。

Proof. 見 [1], 2.1 節。 ■

Lemma 1.3.4. 直線 OI 與 \mathcal{H}_{Fe} 相切。

Proof. 若 OI 不與 \mathcal{H}_{Fe} 相切，則 OI 與 \mathcal{H}_{Fe} 交於兩相異點 I, X 。令 X^* 為 X 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，則

$$X \in OI \cap \mathcal{H}_{Fe} \implies X^* \in \mathcal{H}_{Fe} \cap OI = \{I, X\}.$$

又 $X^* = I$ 會得到 $X = I$ ，因此 $X^* = X$ ，那麼 $X^* = I_x$ 為某個旁心。由 O, I, I_x 共線可得 $\triangle ABC$ 是以 X 為頂角的等腰三角形 $\triangle XYZ$ ，此時 OI 已與 $\mathcal{H}_{Fe} = OI \cup YZ$ 相切，矛盾。所以 OI 與 \mathcal{H}_{Fe} 相切。 ■

Lemma 1.3.5. 令 L 為 H 關於 O 的對稱點，則 I, Ge, L 共線。

Proof. 注意到在費爾巴哈雙曲線 \mathcal{H}_{Fe} 上我們有

$$-1 = (I, H; Na, Ge)_{\mathcal{H}_{Fe}} = I(I, H; Na, Ge) = I(O, H; G, Ge)$$

另一方面我們在歐拉線上有

$$(O, H; G, L) = 1$$

因此 I, Ge, L 共線。 ■

Lemma 1.3.6. 令 I^* 為 I 關於 $\odot(ABC)$ 的反演點，則 I^*Fe 平行於歐拉線 \mathcal{E} 。

Proof. 由 $OI^2 = R^2 - 2Rr$ ，可得

$$\frac{FeN}{IN} = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R}{2} - r} = \frac{R^2}{R^2 - 2Rr} = \frac{R^2}{OI^2} = \frac{OI^*}{OI},$$

因此 $I^*Fe \parallel ON = \mathcal{E}$ 。 ■

Lemma 1.3.7. 給定任意 $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ，考慮以 I 為中心且位似比為 t 的位似變換將 $\triangle DEF$ 送至 $\triangle D_tE_tF_t$ ，則 AD_t, BE_t, CF_t 共於一點 P_t ，且 P_t 在 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈雙曲線 \mathcal{H}_{Fe} 上。

Proof. 由 (1.2.7)， Na 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點在 OI 上，故 $Na \in \mathcal{H}_{Fe}$ ，且由 (1.0.3) 知道 BNa, CNa 分別過 E, F 在 $\odot(DEF)$ 上的對徑點，因此

$$B(E_t, Na; I, H) = t = C(F_t, Na; I, H) \implies BE_t \cap CF_t \in \mathcal{H}_{Fe}.$$

同理可證 AD_t, BE_t, CF_t 共點在 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈雙曲線上。 ■

Lemma 1.3.8. 標號同 (1.3.7)， P_{-2} 是 I 在費爾巴哈雙曲線 \mathcal{H}_{Fe} 上的對徑點 X_{80} 。

Proof. 由 G 的 -2 倍位似知 OI 平行 HN_a ，又因為 OI 是 I 在費爾巴哈雙曲線上的切線，由 (0.2.9) 知 $(I, X_{80}; H, Na)_{\mathcal{H}_{Fe}} = -1$ 。又 $I = P_0, H = P_\infty, Na = P_{-1}$ ，故 $X_{80} = P_{-2}$ 。 ■

Lemma 1.3.9. $(A, B; C, I)_{\mathcal{H}_{Fe}} = (D, E; F, Fe)_{\odot(I)}$ 。

Proof. 令 D' 為 D 關於內切圓的對徑點，由 (1.3.8) 知 AX_{80} 過 I 關於 D' 的對稱點。對 I 位似 $1/2$ 倍得 AX_{80} 和 $D'Fe$ 平行，故和 DFe 垂直。而 Fe 在內切圓上的切線垂直 IFe ，故

$$(A, B; C, I)_{\mathcal{H}_{Fe}} = X_{80}(A, B; C, I) = Fe(D, E; F, Fe) = (D, E, F, Fe)_{\odot(I)}. \quad \blacksquare$$

Lemma 1.3.10. 費爾巴哈點 Fe 是 $\triangle DEF$ 的歐拉反射點 X_{110} 。一個三角形的歐拉反射點指的是垂直其歐拉線方向的無窮遠點的等角共軛點，以常用記號來表示即 $\infty_{\mathcal{E}}^*$ 。

Proof 1. 令過 F 且垂直 OI 的線關於 $\angle DFE$ 的等角線與內切圓的另一個交點為 F' 。由 (1.3.9) 知

$$\begin{aligned}
 (D, E; F, Fe)_{\odot(I)} &= (A, B; C, I)_{\mathcal{H}_{Fe}} \\
 &= I(A, B; C, I) \\
 &= \mathcal{L}_{\infty}(EF, DF; DE, \perp OI) && (\text{轉 } 90^\circ) \\
 &= F(E, D; \infty_{DE}, \infty_{\perp OI}) \\
 &= F(D, E; \infty_{BC}, F') && (\text{對 } \angle DFE \text{ 取等角線}) \\
 &= (D, E; F, F')_{\odot(I)}.
 \end{aligned}$$

因此 $Fe = F'$ 。 ■

Proof 2. 將命題對 $\odot(DEF)$ 配極，則由 (0.2.11)， $\mathbf{p}_{\odot(DEF)}(\mathcal{H}_{Fe})$ 的軌跡切以 Fe 為焦點 OI 為準線的拋物線。特別地， $\mathbf{p}_{\odot(DEF)}(\triangle ABC) = \triangle DEF$ ，故 Fe 關於 $\triangle DEF$ 的施坦納線為 OI 。 ■

Lemma 1.3.11. 費爾巴哈點 Fe 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線 $\mathcal{O}_{\triangle ABC}(Fe)$ 是 OI 。

Proof. 將命題對 $\odot(DEF)$ 配極。由 (0.2.15)，我們只需證明 $\triangle ABC$ 為關於 $\mathbf{p}_{\odot(DEF)}(\mathcal{H}_{Fe})$ 的自共軛三角形，但注意到 $\triangle DEF$ 為 \mathcal{H}_{Fe} 的自共軛三角形，故得證。 ■

Lemma 1.3.12. 直線 IH 是 Fe 關於 $\triangle DEF$ 的正交截線。

Proof 1. 令 D' 為 D 關於內切圓的對徑點，我們只需證明 $D'Fe, IH, EF$ 共點。

$$\begin{aligned}
 (A, B; C, I)_{\mathcal{H}_{Fe}} &= (HA, HB; HC, HI) \\
 &= (ID, IE; IF, IH) \\
 &= (ID \cap EF, E; F, IH \cap EF).
 \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}(D, E; F, Fe)_{\odot(I)} &= D'(D, E; F, Fe) \\ &= (D'D \cap EF, E; F, D'Fe \cap EF).\end{aligned}$$

由 (1.3.9) 即知 $D'Fe$ 和 IH 交在 EF 上。 ■

Proof 2. 同 *Proof 1.*，我們證明 $D'Fe, IH, EF$ 共點。注意到上述交點即為 D 關於 EF 的垂線關於 \mathcal{H}_{Fe} 的極點 $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(D\infty_{\perp EF})$ 。 ■

Proof 3. 由 (1.0.12)， H, I 是 $\triangle DEF$ 的垂足三角形的等角共軛點對，因此由 (0.3.10) 我們知道 IH 和 $\triangle DEF$ 的 \mathcal{H}_J 相切，故由 (2.1.13) 得證。 ■

Lemma 1.3.13. 三角形 DEF 的垂心 $T =: X_{65}$ 是 IH 關於費爾巴哈雙曲線 \mathcal{H}_{Fe} 的極點。特別地， T 在 OI 上。

Proof. 令 D' 為 D 關於內切圓的對徑點，由 (1.3.12) 可知 $FeD' \cap EF$ 在 IH 上，由熱爾岡點的定義知 $Ge = P_1 \in \mathcal{H}_{Fe}$ (cf.(1.3.7))。注意到 $\triangle DEF$ 是 Ge 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形，故 $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(EF) = D$ 。由於 FeD' 過 \mathcal{H}_{Fe} 的中心 Fe ，故其極點必在 \mathcal{L}_{∞} 上。注意到根據 (1.3.8)， $D'Fe$ 過 AI 中點，故 $D'Fe$ 的極點就是 ∞_{AI} 。由於 AI 垂直 EF ，因此 $FeD' \cap EF$ 關於費爾巴哈雙曲線 \mathcal{H}_{Fe} 的極線就是 D 對 EF 的垂線。對 E, F 做一樣的論述即得到 IH 關於 \mathcal{H}_{Fe} 的極點是 $\triangle DEF$ 垂心 T 。 ■

Lemma 1.3.14. 標號同 (1.3.7)。令 T 為 $\triangle DEF$ 垂心，則對所有 $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ， T, P_t, P_{-t} 共線。特別地， T, Ge, Na 共線。

Proof. 令 $TP_t \cap \mathcal{H}_{Fe} = P_s$ ，則由 (0.2.9) 知

$$\begin{aligned}-1 &= (I, H; P_t, P_s)_{\mathcal{H}_{Fe}} \\ &= (P_0, P_{\infty}, P_t, P_s)_{\mathcal{H}_{Fe}} \\ &= (P_0, P_{\infty}, P_t, P_s) \\ &= (0, \infty, t, s).\end{aligned}$$

因此 $s = -t$ 。 ■

Lemma 1.3.15. 令 X_{80} 為 I 關於 Fe 的對稱點，即 I 關於費爾巴哈雙曲線的對徑點，則四點 $O, N, X_{65} = Sc^*, X_{80}$ 共圓。

Proof. 令 Y 為 IH 與 $T_{X_{80}}\mathcal{H}_{Fe}$ 的交點，取 Z 使得 $IYX_{80}Z$ 為平行四邊形，則 IZ 與 \mathcal{H}_{Fe} 相切，因此 I, O, Z 共線。由 N, Fe 分別為 $\overline{OH}, \overline{YZ}$ 中點且 N, I, Fe 共線可得 YZ 平行於 $OH = \mathcal{E}$ 。注意到 $X_{65}X_{80}$ 關於 \mathcal{H}_{Fe} 的極點為 Y ， IX_{80} 關於 \mathcal{H}_{Fe} 的極點為 ∞_{OI} ，因此由等軸雙曲線的配極算角可得

$$\angle X_{65}X_{80}N = \angle X_{65}X_{80}I = \angle \infty_{OI}FeY = \angle X_{65}ON,$$

即 O, N, X_{65}, X_{80} 共圓。 ■

Lemma 1.3.16 (Mittenpunkt). 旁心三角形 $\triangle I_a I_b I_c$ 與 $\triangle ABC$ 的中點三角形 $\triangle M_a M_b M_c$ 透視，且透視中心 $Mt =: X_9$ 位於 GGe 上並滿足

$$\frac{GeG}{GMt} = 2.$$

Proof. 由 (1.0.4) 的旁心版本， $I_a M_a \parallel AD$ ，同理有 $I_b M_b \parallel BE, I_c M_c \parallel CF$ 。由 AD, BE, CF 共點於 Ge 可得 $I_a M_a, I_b M_b, I_c M_c$ 共點於 $\triangle M_a M_b M_c$ 的熱爾岡點。故 Mt 位於 GGe 上並滿足

$$\frac{GeG}{GMt} = 2. \quad \blacksquare$$

Lemma 1.3.17. 點 Mt 為 $\triangle I_a I_b I_c$ 的共軛重心 K_I 。

Proof. 由於 $\triangle I_a I_b I_c \sim \triangle I_a BC$ ，因此 $I_a Mt$ 為 I_a 與 $\overline{I_b I_c}$ 中點連線關於 $\angle I_b I_a I_c$ 的等角線。因此 $I_a Mt$ 過 $\triangle I_a I_b I_c$ 的共軛重心 K_I ，同理有 $I_b Mt, I_c Mt$ 過 K_I ，故 $Mt = K_I$ 。 ■

Lemma 1.3.18. 三點 I, K, Mt 共線。

Proof 2. 注意到 G 為 I, Mt 關於 $\triangle I_a I_b I_c$ 的交叉點。因此 G 關於 $(I_a I_b I_c IMt)$ 的極線為 IMt 。由 (0.3.9)， G 關於 $(I_a I_b I_c IMt)$ 的極線過 G 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 K ，即 I, K, Mt 共線。 ■

Lemma 1.3.19. 三點 $H, Mt, Sp = X_{10}$ 共線。

Proof. 等價於證明反補點們 $L = H^\circ$, $Ge = Mt^\circ$, $I = Sp^\circ$ 共線，即 (1.3.5)。 ■

Lemma 1.3.20. 旁心三角形 $\triangle I_a I_b I_c$ 與切點三角形 $\triangle DEF$ 位似，且位似中心 X_{57} 與 G, Ge, Mt 共線。

Proof. 兩三角形位似是顯然的。由 (1.3.16)， G, Ge, Mt 共線。注意到 Mt, Ge 分別為 $\triangle I_a I_b I_c, \triangle DEF$ 的共軛重心，因此 X_{57}, Mt, Ge 共線。 ■

Lemma 1.3.21. 點 X_{57} 為 Mt 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 Mt^* 。

Proof. 令 $\triangle H_d H_e H_f$ 為 $\triangle DEF$ 的垂足三角形，則 $\triangle I_a I_b I_c \cup \triangle ABC \cup Mt \hat{=} \triangle DEF \cup \triangle H_d H_e H_f \cup Ge$ ，因此 A, H_d, X_{57} 共線且 $AMt \parallel H_d Ge$ 。注意到

$$H_d(D, EF \cap BC; Ge, X_{57}) = (D, EF \cap AD; Ge, A) = -1,$$

由於 $DH_d \perp EF$ ，所以

$$\angle Mt^* AI = \angle IAMt = \angle DH_d Ge = \angle X_{57} H_d D = \angle X_{57} AI,$$

即 A, Mt^*, X_{57} 共線。同理可得 B, Mt^*, X_{57} 及 C, Mt^*, X_{57} 分別共線，故 $Mt^* = X_{57}$ 。 ■

Proof 3. 考慮切點三角形 $\triangle DEF$ ， BC 弧中點 N_A ， $\triangle BIC$ 垂心 H_A ，熟知 $H_A N_A \parallel II_a$ ，因此我們有

$$H_A(I, X_9; Sc, Na) = -1 = D(I, X_{57}; X_{65}, X_{56})$$

故 X_9 在費爾巴哈雙曲線上且等角共軛點為 X_{57} 。 ■

Corollary 1.3.22. 點 Mt 位於費爾巴哈雙曲線 \mathcal{H}_{Fe} 上。

Proof. 由於 Mt^* 為 $\triangle I_a I_b I_c$ 與 $\triangle DEF$ 的位似中心，因此位於兩者的外心 Be 與 I 的連線上。而 Be 為 I 關於 O 的對稱點，因此 $Mt^* \in OI$ ，故 $Mt \in \mathcal{H}_{Fe}$ 。 ■

Chapter 2

歐拉線

Lemma 2.0.1. 設 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，則

$$\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC.$$

Proof. 由於 BH, CH 分別於 CA, AB 垂直，所以

$$\angle BHC = \angle CAB = 180^\circ - \angle BAC. \quad \blacksquare$$

Lemma 2.0.2. 設 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，則

(i) $\angle BAC = 90^\circ - \angle CBO,$

(ii) $\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC.$

Proof.

(i) 令 A^* 為 A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點。我們有

$$\angle BAC = \angle BA^*C = 90^\circ - \angle CBA^* = 90^\circ - \angle CBA.$$

(ii) 由於 $\triangle COA, \triangle AOB$ 為等腰三角形，所以

$$\begin{aligned} \angle BOC &= \angle OBA + \angle BAC + \angle ACO \\ &= \angle BAO + \angle BAC + \angle OAC = 2 \cdot \angle BAC. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Lemma 2.0.3. 設 H_A 為 H 關於 BC 的對稱點，則 $H_A \in \odot(ABC)$ 。

Proof. 由 (2.0.1),

$$\angle BH_A C = -\angle BHC = \angle BAC,$$

即 A, B, C, H_A 共圓。 ■

Lemma 2.0.4. 設 M_a 爲 \overline{BC} 中點, A^* 爲 A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點, 則 M_a 爲 $\overline{HA^*}$ 中點。

Proof. 注意到

$$BH \perp CA \perp A^*C \implies BH \parallel A^*C$$

$$CH \perp AB \perp A^*B \implies CH \parallel A^*B,$$

所以 BA^*CH 爲平行四邊形, 因此 M_a 爲 $\overline{HA^*}$ 中點。 ■

Lemma 2.0.5. 設 M_a 爲 \overline{BC} 中點, 則

$$AH = 2 \cdot OM.$$

Proof. 令 A^* 爲 A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點。由 (2.0.4), M_a 爲 $\overline{HA^*}$ 中點, 故 OM 爲 $\triangle AHA^*$ 的 A^* -中位線。 ■

Lemma 2.0.6. 重心 G , 外心 O , 垂心 H 三點共線且

$$\frac{HG}{GO} = 2.$$

Proof. 令 M_b, M_c 分別爲 $\overline{CA}, \overline{AB}$ 中點, 注意到 $\triangle BHC$ 與 $\triangle M_bOM_c$ 位似, 所以 BM_b, CM_c, HO 共點, 即 G, O, H 共線。由 (2.0.5), 我們知道位似比爲 -2 , 所以

$$\frac{HG}{GO} = 2. \quad \blacksquare$$

Lemma 2.0.7. 外心 O 與垂心 H 爲 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點。

Proof. 由 (2.0.2) 及 $AH \perp BC$,

$$\angle BAO = 90^\circ - \angle ACB = \angle HAC.$$

同理有 $\angle CBO = \angle HBA, \angle ACO = \angle HCB$ 。 ■

Lemma 2.0.8. 令 $\triangle M_a M_b M_c$, $\triangle H_a H_b H_c$ 分別為 $\triangle ABC$ 的中點三角形及垂足三角形, E_A, E_B, E_C 分別為 $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH}$ 的中點。則 $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, E_A, E_B, E_C$ 共圓且圓心 N 為 \overline{OH} 中點。

Proof. 由 (2.0.3) 及 (2.0.4), H 關於 $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, E_A, E_B, E_C$ 的對稱點 $A^*, B^*, C^*, H_A, H_B, H_C, A, B, C$ 皆位於 $\odot(ABC)$ 上, 所以這九點共圓且圓心 N 為 \overline{OH} 中點。 ■

Lemma 2.0.9. 設 O 關於 BC 的對稱點為 O'_A , 則 N 為 $\overline{AO'_A}$ 中點。

Proof. 由 (2.0.5), $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OO'_A}$, 所以結合 (2.0.8) 可得 $\overline{AO'_A}$ 中點為 \overline{OH} 中點 N 。 ■

Lemma 2.0.10. 九點圓 $\odot(N)$ 也是 $\triangle BHC, \triangle CHA, \triangle AHB$ 的九點圓。

Proof. 九點圓為垂足三角形的外接圓, 而 $\triangle ABC, \triangle BHC, \triangle CHA, \triangle AHB$ 有著同樣的垂足三角形。 ■

Lemma 2.0.11. 外接圓 $\odot(O)$ 為 $\triangle I_a I_b I_c$ 的九點圓。

Proof. 注意到 $\triangle ABC$ 為 $\triangle I_a I_b I_c$ 的垂足三角形。 ■

Lemma 2.0.12 (共軛重心). 令 T_a 為 B, C 關於 $\odot(ABC)$ 的切線的交點, 類似定義 T_b, T_c 。則 AT_a, BT_b, CT_c 交於 G 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 $K =: X_6$ 。

Proof. 我們證明 AT_a, AM_a 為關於 $\angle BAC$ 的等角線。令 N_a, N'_a 分別為 \widehat{BC} 弧中點與上弧中點, 則

$$A(T_a, M_a; N_a, N'_a) = (T_a, M_a; N_a, N'_a) \stackrel{B}{=} (B, C; N_a, N'_a) = -1.$$

由 $AN_a \perp AN'_a$ 可得 AT_a, AM_a 關於 AN_a 對稱, 即 AT_a, AM_a 為關於 $\angle BAC$ 的等角線。 ■

Lemma 2.0.13. 設 K 為 $\triangle ABC$ 的共軛重心, H_a 為 A 關於 BC 的垂足, 則 $M_a K$ 平分 $\overline{AH_a}$ 。

Proof. 令 T_a 為 B, C 關於 $\odot(ABC)$ 的切線的交點，則 A, K, T 共線且 $M_a T_a$ 垂直於 BC 。因此

$$\begin{aligned} (A, H_a; M_a K \cap BC, \infty_{AH_a}) &\stackrel{M_a}{=} (A, AK \cap BC; K, T_a) \\ &\stackrel{B}{=} (A, C; BK \cap \odot(ABC), B) = -1, \end{aligned}$$

即 $M_a K$ 平分 $\overline{AH_a}$ 。 ■

Lemma 2.0.14. 對於外接圓上任意一點 X ， X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $t(X)$ 過 K 。

Proof. 令 $\triangle X_a X_b X_c$ 為 X 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形。分別在 CA, AB 上取 X_b^*, X_c^* 使得

$$(C, A; X_b, X_b^*) = (A, B; X_c, X_c^*) = -1,$$

則 $t(X) = X_b^* X_c^*$ 。由

$$(C, A; B, XX_b^* \cap \odot(ABC)) = (C, A; X_b, X_b^*) = -1 = (C, A; B, BK \cap \odot(ABC)),$$

可得 $K_B := XX_b^* \cap BK \in \odot(ABC)$ ，同理有 $K_C := XX_c^* \cap CK \in \odot(ABC)$ 。考慮 $\odot(ABC)$ 上的六折線 $ABK_B X K_C C$ ，由帕斯卡定理可得 K, X_b^*, X_c^* 共線，即 $K \in t(X)$ 。 ■

Lemma 2.0.15. 垂心 H 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點 H' 為共軛重心 K 的反補點 X_{69} 。

Lemma 2.0.16. 對於任意一點 P ，令 $\triangle P_A P_B P_C$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形，則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle P_A P_B P_C$ 的共軛重心的連線過 P 。

Lemma 2.0.17. 設 O_A, O_B, O_C 分別為 $\triangle BOC, \triangle COA, \triangle AOB$ 的外心，則 AO_A, BO_B, CO_C 共點於九點圓圓心 N 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 $K_O =: X_{54}$ 。

Proof. 令 O'_A 為 O 關於 \overline{BC} 的對稱點，則由 (2.0.9) 知 A, N, O'_A 共線，因此我們只須證明 AO_A, AO'_A 為關於 $\angle BAC$ 的等角線，剩下的證明同 (0.3.8)。 ■

Lemma 2.0.18. 令 B', C' 分別為 B, C 關於 CA, AB 的對稱點，則 $AK_O \perp B'C'$ 。

Proof 1. 設 A^* 爲 A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點， B, C 關於外接圓的切線交於 D ，則我們只須證明 XD 垂直 $B'C'$ ，注意到

$$\frac{B'C}{CD} = \frac{XO}{OD} = \frac{C'B}{BD}, \quad \angle B'CD = \angle XOD = \angle C'BD.$$

故 D 是 $\triangle B'XC' \sim \triangle COB$ 的旋似中心。 ■

Proof 2. 設 N 爲 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心， N_B, N_C 爲 N 在 AC, AB 邊上的垂足，則由 (0.3.1)，我們有 $AKO \perp N_B N_C$ ，考慮 B, C 在 AC, AB 上的垂足 $H_B H_C$ 和 $\overline{AC}, \overline{AB}$ 中點 M_B, M_C ，我們有

$$\frac{M_B G}{GB} \cdot \frac{BB'}{B'H_B} \cdot \frac{H_B M_B}{M_B N_B} = -1 \implies B', N_B, G \text{ 共線。} \quad \blacksquare$$

Lemma 2.0.19. 九點圓圓心 N 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線 $\mathcal{O}_{\triangle ABC}(N)$ 垂直 OKO 。

Proof 1. 取點 U 在 BC 上使得 $AN \perp NU$ 。設 O 關於 BC 的對稱點爲 O'_A ， A 關於 BC 的對稱點爲 A' ，則 A, O, O'_A, A' 共圓且由 (2.0.9) 知道其外接圓圓心爲 U 。考慮 $\odot(AOO_A), \odot(ABC)$ 異於 A 的交點 X ，則對 A 反演可以知道 X 的反演點是 BC 和 $A'O$ 的交點，故 AX 過 KO ，因此 KO 在兩圓的根軸上。可以類似地證明 KO 對 $\odot(AOO'_A), \odot(BOO'_B), \odot(COO'_C)$ 圓幂相等，故三個圓共軸於 OKO ，而三圓圓心連線即爲 N 的正交截線。 ■

Lemma 2.0.20. 三角形 ABC 的垂足三角形的歐拉線是 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心 N 關於 $\mathcal{H}(ABCN)$ 的切線。

Proof. 設 $\triangle H_a H_b H_c$ 爲 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，我們知道 N 關於 $\triangle H_a H_b H_c$ 的等角共軛點 N^* 爲 $\triangle H_a H_b H_c$ 的外心，因此 NN^* 爲 $\triangle H_a H_b H_c$ 的歐拉線，因此由 (0.3.11)，知道 $NN^* = T_N \mathcal{H}(ABCN)$ 。 ■

Lemma 2.0.21 (西弗點). 四個三角形 $\triangle ABC, \triangle BIC, \triangle CIA, \triangle AIB$ 的歐拉線交於一點 $S_c =: X_{21}$ 。

Proof 1. 令 $\mathcal{E}, \mathcal{E}_A$ 分別爲 $\triangle ABC, \triangle BIC$ 的歐拉線， $X = \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_A$ 。

Claim. 若 R, r 分別爲 $\odot(ABC), \odot(I)$ 的半徑長，則

$$t(X) := \frac{XO}{XH} = -\frac{R}{2R + 2r}.$$

Proof of Claim. 我就懶 □

由於這個值關於 A, B, C 是對稱的，我們可得四個歐拉線共於一點。 ■

Proof 2. 考慮 $\triangle ABC$ 的弧中點三角形 $\triangle N_a N_b N_c$ ， N_a 為 $\triangle BIC$ 的外心。考慮 BC 中點 M_a 和 IM_a 中點 V ， $\triangle BIC$ 的重心 G_A ，則

$$N_a(V, M_a; G_A, I) = -1.$$

由 $N_a V$ 過 $\triangle N_a N_b N_c$ 的共軛重心， $N_a M_a$ 過 $\triangle N_a N_b N_c$ 的外心， $N_a I$ 過 $\triangle N_a N_b N_c$ 的垂心，因此我們由調和知道 $N_a G_A$ 過 $\triangle N_a N_b N_c$ 的 Kosnita 點 K_{O_N} ，所以 $\triangle BIC, \triangle CIA, \triangle AIB$ 的歐拉線共點在 OK_{O_N} 上。注意到我們有 (2.0.19)，且由 (0.2.13)， $\triangle N_a N_b N_c$ 的九點圓圓心 N_N 關於 $\triangle N_a N_b N_c$ 的正交截線垂直於 $T_{N_N} \mathcal{H}(N_a N_b N_c N_N)$ ，再由 (2.0.20) 知道 $T_{N_N} \mathcal{H}(N_a N_b N_c N_N)$ 就是歐拉線。因此 OK_{O_N} 即為 $\triangle ABC$ 的歐拉線。 ■

Proof 3. 我們證明 OH 與 $\triangle BIC$ 的歐拉線 \mathcal{E}_A 的交點 S_C 位於費爾巴哈雙曲線 \mathcal{H}_{Fe} 上。令 $H_A \in \mathcal{H}_{Fe}$ 為 $\triangle BIC$ 的垂心，則 $\mathcal{E}_A = H_A N_a$ 。令 M_d 為 \overline{EF} 中點，由 (1.1.5) 及 (1.1.6)，

$$H_A(H, I; S_C, N_a) = (I', I; N_a, \infty_{AI}).$$

令 T 為 $\triangle DEF$ 的垂心。由 (1.3.13) 及 (1.0.8)，我們知道

$$(H, I; S_C, N_a)_{\mathcal{H}_{Fe}} = H(T, I; O, \infty_{OI}).$$

所以我們只剩下證明 $I'T \parallel ON_a \perp BC$ ，但由 (2.0.9)， $I'TDI$ 為平行四邊形。 ■

Proof 4. ■

Lemma 2.0.22. 西弗點 S_C 位於費爾巴哈雙曲線 \mathcal{H}_{Fe} 上。

Proof. 見 (2.0.21) 的 *Proof 3*. ■

Lemma 2.0.23. 西弗點 $S_C = X_{21}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點為切點三角形 $\triangle DEF$ 的垂心 $T = X_{65}$ 。

Proof 1. 同 (2.0.21) 的 *Proof 3.* 的標號。令 Na^* 為 Na 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，由 (1.2.7)，我們知道 Na^* 為外接圓與內切圓的外位似中心。注意到 I 為弧中點三角形 $\triangle N_a N_b N_c$ 的垂心，因此

$$\frac{Na^*T}{Na^*I} = \frac{Na^*I}{Na^*O}.$$

令 Sc^* 為 Sc 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，則

$$\begin{aligned} (O, I; T, Na^*) &= (T, I; O, \infty) && (\text{以 } Na^* \text{ 為中心反演}) \\ &= (H, I; Sc, Na)_{\mathcal{H}_{Fe}} && (\text{由 (1.0.8)}) \\ &= (O, I; Sc^*, Na^*), && (\text{等角共軛變換}) \end{aligned}$$

因此 $T = Sc^*$ 。 ■

Proof 2. 在 (0.3.13) 中取 $X = H, P = Sc$ 即得證。 ■

Lemma 2.0.24. 令 $X_{55} = Ge^*, X_{56} = Na^*$ 分別為 Ge, Na 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，則

- (i) $GeNa \cap Ge^*Na^* = X_{65} = Sc^*$
- (ii) $GeNa^* \cap Ge^*Na = X_{21} = Sc$

Lemma 2.0.25. 定義三角形 $\triangle ABC$ 的 Spieker 點 $S = X_{10}$ 為其中點三角形的內心， $T = X_{65}$ 為切點三角形的垂心，則

$$ISc \parallel TS.$$

Proof. 我們由西弗點的存在性 (2.0.21) 知道 $H_A N_a, H_B N_b, H_C N_c$ 共點於 Sc ，因此對內切圓配極可得 $\mathbf{p}_{\odot(I)}(\triangle H_A H_B H_C)$ 和 $\mathbf{p}_{\odot(I)}(\triangle N_a N_b N_c)$ 透視且透視軸為 $\mathbf{p}_{\odot(I)}(Sc)$ ，故 $\mathbf{p}_{\odot(I)}(\triangle H_A H_B H_C)$ 和 $\mathbf{p}_{\odot(I)}(\triangle N_a N_b N_c)$ 的透視軸垂直 ISc 。由 (1.1.2)， $\mathbf{p}_{\odot(I)}(\triangle H_A H_B H_C)$ 為 $\triangle ABC$ 的中點三角形 $M_a M_b M_c$ ，而 $N_b N_c$ 為 I 關於 $\triangle AEF$ 的正交截線，故 $\mathbf{p}_{\odot(I)} N_b N_c$ 為 $\triangle AEF$ 垂心，即 I 關於 EF 的對稱點 I_D 。類似定義 I_E, I_F ，可得 $\mathbf{p}_{\odot(I)}(\triangle N_a N_b N_c) = \triangle I_D I_E I_F$ 。此時注意到 $I_D I_E I_F$ 和 $M_a M_b M_c$ 的正交中心為 T, S ，由 Sondat's 定理我們知道正交軸垂直透視軸，即 $TS \perp \mathbf{p}_{\odot(I)}(Sc) \perp ISc$ ，故

$$ISc \parallel TS. \quad \blacksquare$$

Lemma 2.0.26. 設 G 關於 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形為 $\triangle G_A G_B G_C$ ， $\triangle T_a T_b T_c$ 為 $\triangle ABC$ 的外切三角形，則 $\triangle G_A G_B G_C$ 和 $\triangle T_a T_b T_c$ 透視且透視中心在歐拉線上。我們定義這個點為 $\triangle ABC$ 的埃克塞特點 (Exeter point) $=: X_{22}$ 。

Proof. 注意到

$$\angle G_B G_C M_c = \angle G_B G_C C = \angle G_B B C = \angle G_B M_b M_c,$$

因此 G_B, G_C, M_b, M_c 四點共圓。考慮三圓 $\odot(ABC), \odot(AM_b M_c), \odot(G_B G_C M_b M_c)$ ，即由根心的存在性知道 $T_b T_c, G_B G_C, M_b M_c$ 共點。我們有 $\triangle G_A G_B G_C$ 和 $\triangle M_a M_b M_c$ 透視於 $\triangle ABC$ 重心 G ，因此由 (0.2.3) 知道 $\triangle G_A G_B G_C$ 和 $\triangle T_a T_b T_c$ 透視且透視中心在 G 以及 $\triangle T_a T_b T_c$ 和 $\triangle M_a M_b M_c$ 的透視中心 O 的連線上，即歐拉線上。 ■

Lemma 2.0.27. 我們有

$$(Na, Sc; Mt, I)_{\mathcal{H}_{Fe}} = -1.$$

Proof. 注意到

$$(Na, Sc; Mt, I)_{\mathcal{H}_{Fe}} = H(Na, Sc; Mt, I) = (Na, G; Sp, I) = -1. \quad \blacksquare$$

Lemma 2.0.28. 兩點 I, O 關於 $\triangle I_a I_b I_c$ 的交叉點為 Sc 。

Proof. 由對稱性，我們只需證明 ASc, OI_a, BC 共點。由 (1.0.23)，等價於證明 A, Sc 及 D_a 關於 $E_a F_a$ 的對稱點 D'_a 共線。令 H_{D_a} 為 D_a 關於 $E_a F_a$ 的垂足，由 (1.3.21) 的 *Proof* 可得 AH_{D_a} 過 $Mt_a^* = X_{57,a}$ 。因此結合 (2.0.27) 可得

$$A(D_a, D'_a; Mt_a^*, I_a) = -1 = (Na, Sc; Mt, I)_{\mathcal{H}_{Fe}}.$$

所以證明 A, Sc, D'_a 共線等價於證明 A, Mt_a^*, Mt 共線，或 AMt, AMt_a 為關於 $\angle BAC$ 的等角線，而這可由 $Mt = I_b M_b \cap I_c M_c, Mt_a = I_b M_c \cap I_c M_b$ 及迪沙格對合得到。 ■

Lemma 2.0.29. 設 P 為三角形 ABC 的歐拉線上一點， Q, R 分別為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，反補點。證明： QR 垂直 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線。

2.1 Jerabek 雙曲線

Lemma 2.1.1. 我們定義歐拉線 \mathcal{E} 上無窮遠點 $\infty_{\mathcal{E}} = X_{30}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點為 X_{74} ，則 $X_{74} \in \odot(ABC) \cap \mathcal{H}_{\mathcal{J}}$ 。

Proof. 由 $\odot(ABC)$ 和 \mathcal{L}_{∞} 為等角共軛點對顯然。 ■

Lemma 2.1.2. 我們定義三角形 ABC 的 Jerabek 雙曲線 $\mathcal{H}_{\mathcal{J}}$ 的中心為 X_{125} ，則 $\overline{HX_{74}}$ 的中點為 X_{125} 。

Proof. 注意到由過 $\triangle ABC$ 的等軸雙曲線中心在 $\triangle ABC$ 九點圓上，因此 $\overline{HX_{74}}$ 中點為 X_{125} 。 ■

Lemma 2.1.3. 設 X 為 $\triangle ABC$ 外接圓上任意點， XX_{74} 交 $\mathcal{H}_{\mathcal{J}}$ 於 Z_X ，則 HZ_X ， OZ_X ， KZ_X 分別為 X 關於 $\triangle ABC$ 的施坦納線、正交截線、三線性極線。

Proof. 在 (0.3.14) 中取 $\mathcal{C} = \mathcal{H}_{\mathcal{J}}$ ，則顯然有 HZ_X ， OZ_X ， KZ_X 分別為 X 關於 $\triangle ABC$ 的施坦納線、正交截線、三線性極線。 ■

Lemma 2.1.4. 令 X_{182} 為 \overline{OK} 中點，則 G ， X_{125} ， X_{182} 三點共線。

Proof. 設 O 關於 G 的對稱點，即 \overline{GH} 中點，為 M ，則我們等價要證明 MK 過 O 的 antigonal conjugate $O_{\mathcal{J}}^*$ ，注意到

$$O_{\mathcal{J}}^*(X_{74}, K; H, O)_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}} = (\mathcal{E}_{\infty}, G; O, H) = (\mathcal{E}_{\infty}, M; H, O) = O_{\mathcal{J}}^*(X_{74}, M; H, O),$$

所以 $O_{\mathcal{J}}^*$ ， M ， K 共線。 ■

Lemma 2.1.5. 垂心 H 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點 $H' = X_{69}$ 位於 Jerabek 雙曲線 $\mathcal{H}_{\mathcal{J}}$ 上。

Proof. 由 (2.0.15)，我們知道 $OK \parallel HH'$ ，且由 (2.1.4)， HH' 中點過圓錐曲線中心，故由平行弦定理 $H' \in \mathcal{H}_{\mathcal{J}}$ 。 ■

Lemma 2.1.6. 令 \mathcal{S}_G 為過 A ， B ， C 並以 G 為中心的圓錐曲線， X_{99} 為 \mathcal{S} 和 $\odot(ABC)$ 的第四個交點。則 X_{99} 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線為 GK 。

Proof. 注意到 S_G 為三線性極線通過 $\triangle ABC$ 重心的軌跡。由 (2.1.3)，我們有 X_{99} 的三線性極線為 GK 。 ■

Lemma 2.1.7. 三點 G, X_{110}, X_{125} 共線。

Proof. ■

Lemma 2.1.8. 三點 X_{69}, X_{74}, X_{99} 共線。

Proof. 由 (2.1.3) 及 (2.1.5) 我們可以得到 $X_{69} = KG \cap \mathcal{H}_J$, X_{74}, X_{99} 共線。 ■

Lemma 2.1.9. 四點 O, H, X_{69}, X_{99} 四點共圓。

Proof. 在 (0.3.14) 中取 $X = X_{99}, P = O$ ，則由 (2.1.8)，即得到 O, H, X_{69}, X_{99} 四點共圓。 ■

Lemma 2.1.10. $X_{69}X_{99}$ 過 G 關於 O 的對稱點。

Proof. 我們等價要證明 X_{99} 關於 O 的對稱點在 GX_{110} 上，但注意到 X_{99} 的對徑點為 OK 上無窮遠點的等角共軛點，即 Kiepert 雙曲線和外接圓的第四個交點，且注意到 X_{110} 的施坦納線為 GH ，故由 (0.3.14)， GX_{110} 過 X_{99} 的對徑點 ■

Lemma 2.1.11. 圓 $\odot(GX_{69}X_{99})$ 和歐拉線 \mathcal{E} 相切。

Proof. 設 $X_{69}X_{99}$ 交 OH 於 T ，則由 (2.1.9) 和 (2.1.10) 我們即得到

$$TX_{69} \cdot TX_{99} = TO \cdot TH = TG^2. \quad \blacksquare$$

Lemma 2.1.12. 三點 N, X_{54}, X_{110} 共線。

Lemma 2.1.13. 歐拉反射點 X_{110} 的正交截線 $\mathcal{O}_{\triangle ABC}(X_{110})$ 和 $\triangle ABC$ 的 Jerabek 雙曲線 \mathcal{H}_J 相切。

Proof 1. 考慮歐拉線 \mathcal{E} 上無窮遠點的等角共軛點 X_{74} 和 \mathcal{H}_J 的中心 X_{125} 以及 O

關於 $\mathcal{H}_{\mathcal{J}}$ 的對徑點 O' ，我們有

$$\begin{aligned}
 \angle(\mathcal{O}_{\triangle ABC}(X_{110}), \mathcal{E}) &= \angle(\mathcal{O}_{\triangle ABC}(X_{110}), BC) + \angle(BC, \mathcal{E}) \\
 &= \angle AX_{110}H + \angle(BC, \mathcal{E}) \\
 &= \angle AX_{110}H + \angle X_{74}X_{110}A \\
 &= \angle X_{74}X_{110}H = \angle X_{74}OX_{125} \\
 &= \angle X_{74}OO' = \angle OO'H.
 \end{aligned} \tag{0.3.7}$$

由等軸雙曲線算角知道 $\mathcal{O}_{\triangle ABC}(X_{110})$ 切 $\mathcal{H}_{\mathcal{J}}$ 於 O 。 ■

Proof 2. 由 (2.1.3)，我們知道 O 連 X_{74} 和 X_{110} 的交點為 X_{110} 對 $\triangle ABC$ 的正交截線，但 O 是 $\overline{X_{74}X_{110}}$ 中點，故得證。 ■

Lemma 2.1.14. 設 $\triangle XYZ$ 為 I 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形， H_I 為 $\triangle XYZ$ 垂心，則 IH_I 平行於歐拉線 OH 。

Chapter 3

布洛卡軸

Lemma 3.0.1. 分別以 \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AB} 為邊長向 $\triangle ABC$ 外 (內) 側作正三角形 $\triangle A_{1(2)}BC$, $\triangle AB_{1(2)}C$, $\triangle ABC_{1(2)}$, 則三線 $AA_{1(2)}$, $BB_{1(2)}$, $CC_{1(2)}$ 共點於 $F_1 =: X_{13}(F_2 =: X_{14})$, 稱為第一 (二) 等角點。

Proof. 我們證明 AA_1 , BB_1 , CC_1 共點。令 $F_1 = BB_1 \cap CC_1$, 注意到

$$\triangle AB_1C \stackrel{\pm}{\sim} \triangle ABC_1 \implies \triangle ABB_1 \stackrel{\pm}{\sim} \triangle AC_1C,$$

所以

$$\angle BF_1C = 120^\circ = \angle BA_1C = \angle B_1AC = \angle BAC_1,$$

即 $F_1 \in \odot(A_1BC) \cap \odot(AB_1C) \cap \odot(ABC_1)$ 。因此

$$\angle AF_1A_1 = \angle AF_1B + \angle BF_1A_1 = \angle AC_1B + \angle BCA_1 = -60^\circ + 60^\circ = 0^\circ. \quad \blacksquare$$

Lemma 3.0.2. 令 F_1 , F_2 分別為 $\triangle ABC$ 第一等角點與第二等角點, 則

$$\angle BF_iC = \angle CF_iA = \angle AF_iB = 180^\circ - i \cdot 60^\circ.$$

Proof. 見 (3.0.1) 的 *Proof*. \blacksquare

Lemma 3.0.3. 令 Ω_A 為 $\{B, C\}$ 的 A -阿波羅尼奧斯圓, 即

$$\Omega_A = \{P \mid \overline{PB} : \overline{PC} = \overline{AB} : \overline{AC}\},$$

則 AO 與 Ω_A 相切。

Proof. 令 A' 為 A 關於 BC 的對稱點， X, Y 分別為 $\angle BAC$ 的內外角平分線與 BC 的交點。則 $\Omega_A = \odot(AA'XY)$ 。由 AA', AO 為關於 $\angle BAC$ 的等角線可得

$$A(A', O; X, Y) = -1 = (A, A'; X, Y)_{\Omega_A},$$

因此 AO 與 AA' 相切。 ■

Lemma 3.0.4. 在 $\odot(ABC)$ 內 (外) 存在一點 $S_1(S_2)$ 滿足

$$\overline{AS_i} : \overline{BS_i} : \overline{CS_i} = \frac{1}{\overline{BC}} : \frac{1}{\overline{CA}} : \frac{1}{\overline{AB}},$$

且 S_1, S_2 位於布洛卡軸 OK 上為關於 $\odot(O)$ 的反演點對，稱為第一 (二) 等力點。

Proof. 令 Ω_A 為 $\{B, C\}$ 的 A -阿波羅尼奧斯圓，類似定義 Ω_B, Ω_C 。在 $\odot(O)$ 上取 D, E, F 使得

$$(B, C; A, D) = (C, A; B, E) = (A, B; C, F) = -1.$$

由 XO 與 Ω_X 相切可得 O 關於 Ω_X 的幂為外接圓半徑的平方 R^2 。因此 O 位於 $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$ 兩兩之間的根軸上。由於 $K = AD \cap BE \cap CF$ 關於 $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$ 的幂皆為

$$KA \cdot KD = KB \cdot KE = KC \cdot KF = \mathbf{Pow}_{\odot(O)}(K),$$

因此 $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$ 共軸於 OK 。令 S_1, S_2 為 $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$ 的兩個交點，由於 $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$ 在關於 $\odot(O)$ 的反演下不變，因此 S_1, S_2 為關於 $\odot(O)$ 的反演點對，我們取 S_1 位於 $\odot(O)$ 內，則 S_2 位於 $\odot(O)$ 外。我們有

$$\begin{aligned} S_i \in \Omega_A &\implies \overline{BS_i} : \overline{CS_i} = \overline{AB} : \overline{CA} = \frac{1}{\overline{CA}} : \frac{1}{\overline{AB}}, \\ S_i \in \Omega_B &\implies \overline{CS_i} : \overline{AS_i} = \overline{BC} : \overline{AB} = \frac{1}{\overline{AB}} : \frac{1}{\overline{BC}}, \\ S_i \in \Omega_C &\implies \overline{AS_i} : \overline{BS_i} = \overline{CA} : \overline{BC} = \frac{1}{\overline{BC}} : \frac{1}{\overline{CA}}, \end{aligned}$$

故

$$\overline{AS_i} : \overline{BS_i} : \overline{CS_i} = \frac{1}{\overline{BC}} : \frac{1}{\overline{CA}} : \frac{1}{\overline{AB}}. \quad \blacksquare$$

Corollary 3.0.5. 我們有

$$(O, K; S_1, S_2) = -1.$$

Proof. 由於 Ω_A 與 $\odot(O)$ 正交，因此 O 關於 Ω_A 的極線 $\mathbf{p}_{\Omega_A}(O)$ 為 Ω_A 與 $\odot(O)$ 的根軸，因此過 K 。由 $S_1, S_2 \in OK \cap \Omega_A$ 可得

$$(O, K; S_1, S_2) = -1. \quad \blacksquare$$

以下假設 F_1, F_2 分別為 $\triangle ABC$ 的第一等角點與第二等角點， S_1, S_2 分別為 $\triangle ABC$ 的第一等力點與第二等力點。

Lemma 3.0.6. 點對 F_i, S_i 為關於 $\triangle ABC$ 的一組等角共軛點。

Proof. 令 Ω_A 為 $\{B, C\}$ 的 A -阿波羅尼奧斯圓， S_i^* 為 S_i 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。由於 $S_i \in \Omega_A$ ，因此

$$\angle BCS_i + \angle S_i AB = \angle CAS_i + \angle S_i BC,$$

故

$$\angle CS_i^* A = \angle S_i^* CA + \angle CAS_i^* = \angle S_i^* AB + \angle ABS_i^* = \angle AS_i^* B.$$

同理可得

$$\theta := \angle BS_i^* C = \angle CS_i^* A = \angle AS_i^* B \implies \theta = 60^\circ \text{ or } 120^\circ.$$

因此由 (3.0.2)， $\{F_1, F_2\} = \{S_1^*, S_2^*\}$ 。

為了確定 $F_i = S_i^*$ ，我們證明 F_2 的等角共軛點 F_2^* 位於 $\odot(O)$ 外。我們假設 $\triangle ABC$ 不是正三角形（否則 F_2 無法唯一決定），並不失一般性假設

$$\angle BAC \leq \angle CBA \leq \angle ACB.$$

同 (3.0.1) 的標號，我們知道 F_2 為 BB_2 與 CC_2 的交點。當 $\angle CBA \geq 60^\circ$ ， B_2 位於 $\angle CBA$ 且 C_2 位於 $\angle ACB$ 外，因此 A, F_2 位於 BC 異側且 F_2 位於 $\angle BAC$ 內，故 F_2^* 位於 $\odot(O)$ 外。當 $\angle CBA \leq 60^\circ$ ， A_2 位於 $\angle BAC$ 且 B_2 位於 $\angle CBA$ 外，因此 C, F_2 位於 AB 異側且 F_2 位於 $\angle ACB$ 內，故 F_2^* 位於 $\odot(O)$ 外。 \blacksquare

Lemma 3.0.7 (等角等力基本性質 I). 我們有

$$(i) \ G = F_1 S_2 \cap F_2 S_1$$

$$(ii) \ K = F_1 F_2 \cap S_1 S_2$$

(iii) $X_{30} := \infty_{\mathcal{E}} = F_1S_1 \cap F_2S_2$

Proof. ■

Lemma 3.0.8 (等角等力基本性質 II). 四點 F_1, F_2, O, N 共圓，稱為 Lester 圓。

Proof. ■

Lemma 3.0.9 (等角等力基本性質 III). GK 為 $\triangle GF_1F_2$ 的共軛中線。

Proof. ■

Lemma 3.0.10. 設 $\triangle D_xE_xF_x$ 為 $\triangle ABC$ 的 X -切點三角形， L 為 $\triangle ABC$ 的 de Longchamps 點，則 I_xL 為 $\triangle D_xE_xF_x$ 的布洛卡軸。

Proof. 我們證明 $I_x = I$ 為內心的情形。注意到 $\triangle DEF$ 的外心及共軛重心分別為 $\triangle ABC$ 的內心 I 及熱爾岡點 Ge 。而由 (1.3.5) 我們知道 I, Ge, L 共線。 ■

3.1 Kiepert 雙曲線

Lemma 3.1.1. 設 L 為 $\triangle ABC$ 的 de Longchamps 點， L^*, L' 分別為 L 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點、等截共軛點，則 L, L^*, L' 三點共線。

Proof. 考慮 $\triangle ABC$ 的 Kiepert 雙曲線 $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$ 的反補 $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}^{\complement}$ ，則我們有 $L \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}}^{\complement}$ ，因此由等共軛變換 L^*, L' 位於 $T_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}^{\complement}}L$ 上，故共線。 ■

Lemma 3.1.2. 設 P 為 $\triangle ABC$ 的 Kiepert 雙曲線 $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$ 上一點，則 P 的三線性極線垂直 $\triangle ABC$ 的歐拉線。

Proof. ■

Lemma 3.1.3. 設 ℓ 為任意垂直歐拉線 \mathcal{E} 的直線，則 $\triangle ABC \cup \ell$ 的垂心線 (見 (4.0.2), (4.0.3)) 過 ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極點。

Lemma 3.1.4. 設 $\triangle ABC$ 的 de Longchamps 點為 L ， $\triangle I_aI_bI_c$ 為旁心三角形，

且 S_a 為 $\triangle IBC$ 的施坦納點 X_{99} ，則我們有

$$\angle IS_a L = 90^\circ.$$

Proof. 設 $\triangle D_a E_a F_a$ 為 $\triangle ABC$ 的 A -切點三角形。由 (3.1.2)， $I_a L$ 為 $\triangle D_a E_a F_a$ 的布洛卡軸，並且注意到

$$\angle(IB, D_a F_a) = \angle(IB, BI_a) + \angle(BI_a, D_a F_a) = 90^\circ + 90^\circ = 0^\circ \implies IB \parallel D_a F_a,$$

同理可得 $IC \parallel D_a E_a$ 。由

$$\angle ICB = \angle E_a D_a C = \angle E_a F_a D_a, \quad \angle IBC = \angle F_a D_a B = \angle F_a B_a D_a,$$

我們得到 $\triangle IBC \sim \triangle D_a E_a F_a$ 。注意到 S_a 對 $\triangle IBC$ 的施坦納線為 $\triangle IBC$ 的布洛卡軸，因此 $\triangle IBC \sim \triangle D_a E_a F_a$ 。由 S_a 關於 $\triangle IBC$ 的施坦納線和 $I_a L$ 為 $\angle BIC$ 的等角線，我們有 $I_a L \perp IS_a$ 。注意到 $S_a \in \odot(IBC)$ ，我們有 $S_a \in I_a L$ ，故 $\angle IS_a L = 90^\circ$ 。 ■

Lemma 3.1.5. 設 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，則 $\triangle ABC$, $\triangle BIC$, $\triangle CIA$, $\triangle AIB$ 的布洛卡軸四線共點。

Proof. 沿用 (3.1.4) 的標號，考慮 L 關於 $\triangle I_a I_b I_c$ 的等角共軛點 L^* ，則

$$\angle(BI, I_a L^*) = \angle(BI, BI_a) + \angle(BI_a, I_a L^*) = 90^\circ + \angle(I_a L, I_a C) = \angle(I_a L, IC).$$

故我們知道 $I_a L^*$ 平行 $\triangle BIC$ 的布洛卡軸，此時考慮 $\overline{L^* I}$ 中點 T ，則我們有 $N_a T$ 平行於 $\triangle BIC$ 的布洛卡軸，故 $\triangle BIC$, $\triangle CIA$, $\triangle AIB$ 的布洛卡軸共點於 T 。

接著我們證明 $\triangle ABC$ 的布洛卡軸過 T ，考慮 $\triangle ABC$ 的 Kiepert 雙曲線的反補 \mathcal{K}^\natural ，則我們知道 $I, I_a, I_b, I_c \in \mathcal{K}^\natural$ ，設 $\triangle ABC$ 的施坦那點為 St ，則我們有 St 為 \mathcal{K}^\natural 的中心。注意到 St 關於 $\triangle ABC$ 的施坦納線平行於 $\triangle ABC$ 的布洛卡軸，因此 \mathcal{K}^\natural 關於 $\triangle I_a I_b I_c$ 的等角共軛軌跡平行於 $\triangle ABC$ 的布洛卡軸，考慮 $\triangle ABC$ 的 Bevan 點 Be 我們有 Be 為 $\triangle I_a I_b I_c$ 的外心，因此 $L^* Be$ 平行 $\triangle ABC$ 的布洛卡軸，由 $L^* Be \parallel TO$ 易知 $\triangle ABC$ 的布洛卡軸過 T 。 ■

Lemma 3.1.6. 完全四線形 $\mathcal{Q}_K = (F_1 F_2, F_2 S_1, S_1 S_2, S_2 F_1)$ 的密克點為 $\infty_{GK} =: X_{524}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 $\infty_{GK}^* =: X_{111}$ 。

Proof. 由 (3.0.7), $F_1S_1 \parallel F_2S_2$, 所以完全四線形 \mathcal{Q}_K 的牛頓線為 GK 。由於 $(F_1, S_1), (F_2, S_2)$ 為等角共軛點對, 因此 ∞_{GK} 的等角共軛點 ∞_{GK}^* 為 \mathcal{Q}_K 的密克點 (見 [1], 3.2 節)。 ■

Lemma 3.1.7. 三點 $K, X_{110}, X_{111} = \infty_{GK}^*$ 共線。

Proof. 令 Z 為 X_{110} 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $t(X_{110}) = OK$ 與直線 $X_{110}X_{111}$ 的交點, 則 $Z \in (ABCGK)$ 。由於 GK 與 \mathcal{H}_K 相切, 將其等角共軛變換後可得 OK 與 $(ABCGK)$ 相切, 因此 Z 與 K 重合, 故 K, X_{110}, X_{111} 共線。 ■

Lemma 3.1.8. 五點 $G, S_1, S_2, X_{110}, X_{111} = \infty_{GK}^*$ 共圓。

Proof. 由 (3.1.6), X_{111} 位於 $\odot(GS_1S_2)$ 上。由 (3.0.5) 及 (3.1.7),

$$KX_{110} \cdot KX_{111} = \mathbf{Pow}_{\odot(O)}(K) = KS_1 \cdot KS_2,$$

因此 $S_1, S_2, X_{110}, X_{111}$ 共圓。 ■

Lemma 3.1.9. 三點 $G, X_{99} = St, X_{111} = \infty_{GK}^*$ 共線。

Proof. 令 Z 為 X_{99} 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $t(X_{99}) = GK$ 與直線 $X_{99}X_{111}$ 的交點, 則 $Z \in (ABCGK)$ 。因此 G, X_{99}, X_{111} 共線。 ■

Chapter 4

完全四線形

以下給定完全四線形 $Q = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4) = \triangle ABC \cup \ell_4$ ，其中 $\ell_1 = BC$, $\ell_2 = CA$, $\ell_3 = AB$ ， ℓ_4 分別交 BC, CA, AB 於 D, E, F 。令 $\triangle_i = \triangle \ell_{i+1} \ell_{i+2} \ell_{i+3}$ 。

Lemma 4.0.1. 三個對角線 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 的中點們共線。

Proof 1. 見 [1], 0.4 節。 ■

Proof 2. 由 (4.0.5)， $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 的中點們共於一線 τ 。 ■

Lemma 4.0.2 (施坦納線). 設 M 為 Q 的密克點，則 M 關於四線 ℓ_i 的對稱點 M_i 共於一線 S 。

Proof. M 位於 \triangle_1 的外接圓上。由西姆松定理， M 關於三線 ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 的對稱點 M_2, M_3, M_4 共線。同理， M_1, M_2, M_3 共線。因此 M_1, M_2, M_3, M_4 共線。 ■

Lemma 4.0.3. 同 (4.0.2) 的標號。四個三角形 \triangle_i 的垂心 H_i 皆位於 S 上，因此 S 又被稱為垂心線。

Proof. 由施坦納定理， H_i 位於直線 $M_{i+1}M_{i+2}M_{i+3} = S$ 上。 ■

Lemma 4.0.4 (密克圓). 四個三角形 \triangle_i 的外心 O_i 與密克點 M 共圓。

Proof 1. 我們證明 M, O_1, O_2, O_3 共圓。由 O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 分別為 $\overline{MD}, \overline{ME},$

\overline{MF} 的中垂線可得

$$\begin{aligned}\angle O_2 O_1 O_3 &= \angle FME = \angle FMD + \angle DME \\ &= (90^\circ - \angle O_2 DF) + (90^\circ - \angle EDO_3) \\ &= \angle O_3 DO_2 = \angle O_2 MO_3,\end{aligned}$$

即 M, O_1, O_2, O_3 共圓。 ■

Proof 2. 此命題關於 M 的反演命題即為 (4.0.2)。 ■

Lemma 4.0.5 (Gauss-Bodenmiller). 三個直徑圓 $\odot(\overline{AD}), \odot(\overline{BE}), \odot(\overline{CF})$ 共軸於 \mathcal{S} 。

Proof. 令 $\triangle XYZ$ 為 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，則 H_1 為三圓 $\odot(CAZX), \odot(\overline{CF}), \odot(\overline{AD})$ 的根心。同理， H_1 為三圓 $\odot(ABXY), \odot(\overline{AD}), \odot(\overline{BE})$ 的根心，因此 H_1 位於 $\odot(\overline{AD}), \odot(\overline{BE}), \odot(\overline{CF})$ 兩兩之間的根軸上。同理， H_i 位於 $\odot(\overline{AD}), \odot(\overline{BE}), \odot(\overline{CF})$ 兩兩之間的根軸上。因為 H_i 不全相等，因此 $\odot(\overline{AD}), \odot(\overline{BE}), \odot(\overline{CF})$ 共軸於 \mathcal{S} 。 ■

Lemma 4.0.6. 垂心線 \mathcal{S} 與牛頓線 τ 垂直。

Proof. 由 (4.0.5)，並注意到圓心連線垂直於根軸。 ■

Lemma 4.0.7. 密克點 M 為牛頓線 τ 上的無窮遠點 ∞_τ 關於 \mathcal{Q} 的等角共軛點。

Proof 1. 我們需要證明 $\angle BAM = \angle(\tau, CA)$ 。設 E' 為 E 關於 M_b 的對稱點， F' 為 F 關於 M_c 的對稱點。由 (0.2.8)， $E'F' \parallel \tau$ 。注意到

$$\frac{\overline{ME}}{\overline{MF}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{AE'}}{\overline{AF'}}$$

及 $\angle EMF = \angle E'AF'$ ，所以 $\triangle MEF \stackrel{\pm}{\sim} \triangle AE'F'$ ，故

$$\angle BAM = \angle FAM = \angle FEM = \angle F'E'A = \angle(\tau, CA). \quad \blacksquare$$

Proof 2. 同樣地由 (4.0.2)， M 關於 $\triangle ABC$ 的施坦納線為 \mathcal{S} 。因此由 (4.0.6)，

$$\angle BAM = \angle(\mathcal{S}, \perp CA) = \angle(\tau, CA). \quad \blacksquare$$

Lemma 4.0.8. 令 $X = BE \cap CF$, $Y = CF \cap AD$, $Z = AD \cap BE$, 則

$$(A, D; Y, Z) = (B, E; Z, X) = (C, F; X, Y) = -1.$$

Proof. 只證明 $(A, D; Y, Z) = -1$, 其餘類似。我們有

$$(A, D; Y, Z) \stackrel{B}{=} (F, C; Y, X) \stackrel{E}{=} (D, A; Y, Z) = (A, D; Y, Z)^{-1}.$$

由於 $A \neq D$, $Y \neq Z$, 所以

$$(A, D; Y, Z) \neq 1 \implies (A, D; Y, Z) = -1. \quad \blacksquare$$

Lemma 4.0.9. 令 $X = BE \cap CF$, $Y = CF \cap AD$, $Z = AD \cap BE$, 則 M 位於 $\triangle XYZ$ 的九點圓上。

Proof. 由八點圓錐曲線定理 (見 [1], 1.1 節), $\triangle XYZ$ 的兩組反西瓦三角形共切圓錐曲線。注意到 ℓ 關於 $\triangle XYZ$ 的反西瓦三角形為 $\triangle ABC$, 而 $BC, CA, AB, \ell, \mathcal{L}_\infty$ 切以 M 為焦點的拋物線, 因此 \mathcal{L}_∞ 關於 $\triangle XYZ$ 的反西瓦三角形, 即 $\triangle XYZ$ 的中點三角形 $\triangle M_x M_y M_z$ 也切此拋物線, 故由施坦納逆定理知 $M \in \odot(M_x M_y M_z)$, 即 $\triangle XYZ$ 的九點圓。 \blacksquare

4.1 共圓四線形

以下假設 B, C, E, F 共於一圓 $\odot(O)$, $X = BE \cap CF$ 。

Lemma 4.1.1. 密克點 M 位於 AD 上。

Proof. 注意到 A 為 $\odot(DBFM)$, $\odot(DECM)$, $\odot(BCEF)$ 的根軸, 因此 A, D, M 共線。 \blacksquare

Lemma 4.1.2. 我們有 O, M, B, E 及 O, M, C, F 分別共圓。

Proof. 由 B, C, E, F 共於圓 $\odot(O)$,

$$\angle BOE = \angle BCE + \angle BFE = \angle BMD + \angle DME = \angle BME,$$

因此 O, M, B, E 共圓。同理有 O, M, C, F 共圓。 \blacksquare

Lemma 4.1.3. 圓心 O 關於 AD 的垂足為 M 。

Proof. 令 T 為 AO 與 DX 的交點，由 (0.2.17) 知 $\angle ATD = 90^\circ$ 且 $AT \cdot AO$ 為 A 關於 $\odot(O)$ 的幂。由 (4.1.1) 知 M 位於 AD 上且

$$AT \cdot AO = \mathbf{Pow}_{\odot(O)}(A) = AB \cdot AF = AD \cdot AM,$$

因此 D, M, O, T 共圓，故

$$\angle DMO = \angle DTO = 90^\circ. \quad \blacksquare$$

Lemma 4.1.4. 三點 O, M, X 共線。

Proof. 由 (4.1.3)， OM 垂直於 AD 。由 (0.2.17)， $\mathbf{p}_{\odot(O)}(X) = AD$ ，因此 $OX \perp AD$ ，故 O, M, X 共線。 \blacksquare

Lemma 4.1.5. 點 X 位於完全四線形 Q 的垂心線 S 上。

Proof. 注意到 X 為三圓 $\odot(O), \odot(\overline{BE}), \odot(\overline{CF})$ 的根心，因此 X 位於 $\odot(\overline{BE}), \odot(\overline{CF})$ 的根軸 S 上。 \blacksquare

Lemma 4.1.6. 點 O 位於 Q 的密克圓上。

Proof. 由 $OO_2 \perp AB, OO_3 \perp CA$ 及 (4.0.4) 的計算，我們有

$$\angle O_2OO_3 = \angle BAC = \angle BMC = \angle O_2MO_3,$$

因此 $O \in \odot(MO_2O_3) = \odot(O_1O_2O_3O_4M)$ 。 \blacksquare

Lemma 4.1.7. 設 M_A, M_B, M_C 分別為 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 中點，則 M_A 關於 $\odot(O)$ 的幂

$$\mathbf{Pow}_{\odot(O)}(M_A) = M_AM_B \cdot M_AM_C.$$

Proof. 由 (4.0.1)， M_A, M_B, M_C 共線。注意到 M_B, M_C 位於 $\odot(\overline{OX})$ 上，因此

$$\mathbf{Pow}_{\odot(\overline{OX})}(M_A) = M_AM_B \cdot M_AM_C,$$

故我們需要證明 M_A 位於 $\odot(O)$ 與 $\odot(\overline{OX})$ 的根軸上。由 $\mathbf{p}_{\odot(O)}(X) = AD$ 知 $\odot(O)$ 與 $\odot(\overline{OX})$ 的根軸為 AD ，而 M_A 位於 AD 上。 \blacksquare

Lemma 4.1.8. 同 (4.1.7) 的標號，設 $Y = CF \cap AD$, $Z = AD \cap BE$ ，則 M_B , M_C , Y , Z 共圓。

Proof. 由 (4.0.8)，

$$(B, E; Z, X) = (C, F; X, Y) = -1,$$

結合 B, C, E, F 共圓可得

$$XZ \cdot XM_B = XB \cdot XE = XC \cdot XF = XY \cdot XM_C,$$

因此 M_B, M_C, Y, Z 共圓。 ■

Lemma 4.1.9. 令 A^*, A_D^* 分別為 A 關於 $\odot(ABC)$, $\odot(AEF)$ 的對徑點，則 A^*, A_D^* 位於 OM 上。

參考資料

[1] *Li4*. 圓錐曲線

<https://Lii4.github.io/Conic.pdf>