幾何引理維基

$\mathcal{L}i4 + \mathcal{S}_{\otimes}+$

February 19, 2021

目錄

Chapter 0

記號

若 X, Y 爲兩點 (不在無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 上)，XY 代表過 X, Y 的直線，$\overline{XY}$ 代表連接 X, Y 的線段 (與 $\mathcal{L}_\infty$ 沒有交點的那個)。若 K, L 爲兩線，$K \cap L$ 代表 K 與 L 的交點，$\angle(K, L)$ 代表 K 與 L 的無向夾角，$\measuredangle(K, L)$ 代表 K 與 L 的有向夾角。

$\odot(XYZ)$ 爲 $\triangle XYZ$ 的外接圓，$\odot(\overline{XY})$ 是以 $\overline{XY}$ 爲直徑的圓，$\odot(X)$ 則是以 X 爲圓心的圓。給定一圓 Γ 及圓上一點 X，我們通常以 $XP \cap \Gamma$ 或 $\Gamma \cap XP$ 代表 XP 與 Γ 的異於 X 的交點 (若 XP 與 Γ 相切則還是 X)。

有時，若有三線 a, b, c，我們會以 $\triangle abc$ 代表以 a, b, c 三線圍成的三角形 $\triangle(b \cap c)(c \cap a)(a \cap b)$。

在沒有特別說明的情況下，我們都是以 $\triangle ABC$ 作爲基本三角形。I, G, O, H 分別爲 $\triangle ABC$ 的內心、重心、外心和垂心。I_X ($X = A, B, C$ 或 a, b, c) 通常會是三個旁心。

我們說 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 與 $\triangle X_2Y_2Z_2$ 正向相似，記爲 $\triangle X_1Y_1Z_1 \overset{+}{\sim} \triangle X_2Y_2Z_2$，若 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 與 $\triangle X_2Y_2Z_2$ 相似且

$$\measuredangle Y_1X_1Z_1 = \measuredangle Y_2X_2Z_2,\ \measuredangle Z_1Y_1X_1 = \measuredangle Z_2Y_2X_2,\ \measuredangle X_1Z_1Y_1 = \measuredangle X_2Z_2Y_2.$$

我們說 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 與 $\triangle X_2Y_2Z_2$ 反向相似，記爲 $\triangle X_1Y_1Z_1 \overset{-}{\sim} \triangle X_2Y_2Z_2$，若 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 與 $\triangle X_2Y_2Z_2$ 相似且

$$\measuredangle Y_1X_1Z_1 = -\measuredangle Y_2X_2Z_2,\ \measuredangle Z_1Y_1X_1 = -\measuredangle Z_2Y_2X_2,\ \measuredangle X_1Z_1Y_1 = -\measuredangle X_2Z_2Y_2.$$

給定 $\triangle ABC$ 與一點 P，我們有：P 關於 $\triangle ABC$ 的

- 西瓦三角形 $\triangle(AP\cap BC)(BP\cap CA)(CP\cap AB)$

- 反西瓦三角形，使得 P 關於其西瓦三角形爲 $\triangle ABC$ (當然我們還不知道存在性與唯一性)

- 佩多 (垂足) 三角形 $\triangle(P\infty_{\perp BC}\cap BC)(P\infty_{\perp CA}\cap CA)(P\infty_{\perp AB}\cap AB)$

- 反佩多三角形 $\triangle(A\infty_{\perp AP})(B\infty_{\perp BP})(C\infty_{\perp CP})$，使得 P 關於其佩多三角形爲 $\triangle ABC$

- 圓西瓦三角形 $\triangle(AP\cap\odot(ABC))(BP\cap\odot(ABC))(CP\cap\odot(ABC))$

其中，西瓦三角形的定義關於 A, B, C, P 四個點是對稱的，所以也被定義爲一個完全四點形的西瓦三角形。

給定 $\triangle ABC$ 與一線 ℓ，我們有：ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的

- 西瓦三角形 $\triangle(A(BC\cap\ell))(B(CA\cap\ell))(C(AB\cap\ell))$

- 反西瓦三角形，使得 ℓ 關於其西瓦三角形爲 $\triangle ABC$ (同樣地我們還不知道存在性與唯一性)

跟點的情形一樣，西瓦三角形的定義也可以延伸至完全四線形 (但一般稱作對角線三角形)。

當我們給定三角形 ABC，在不特別說明的情況下我們令

- I, G, O, H 分別爲內心、重心、外心及垂心

- I_x 爲 X-旁心

- $\triangle DEF$ 爲切點三角形，即 I 的佩多三角形

- $\triangle D_xE_xF_x$ 爲 X-切點三角形，即 I_x 的佩多三角形

- $\triangle D'E'F' = \triangle D_aE_bF_c$ 爲旁切點三角形

- $\triangle M_aM_bM_c$ 爲中點三角形

- $\triangle N_aN_bN_c$ 爲弧中點三角形

Chapter 1

內心

為了方便，在內心這個章節中我們一律假設 I 是 $\triangle ABC$ 的內心且 DEF 為切點三角形。

Lemma 1.1. 我們有

$$\measuredangle BIC = 90^\circ + \measuredangle BAI = 90^\circ + \measuredangle IAC.$$

Proof. 注意到 AI, BI, CI 分別垂直 EF, FD, DE，所以

$$\measuredangle BIC = \measuredangle FDE = \measuredangle AFE = 90^\circ + \measuredangle BAI = 90^\circ + \measuredangle IAC. \qquad \blacksquare$$

Lemma 1.2 (雞爪圓)**.** 設 N_a 為 $\widehat{BC}$ 弧中點，則 B, I_a, C, I 共圓且圓心為 N_a。

Proof. 注意到

$$\measuredangle BIN_a = \measuredangle BIA = \measuredangle BAI + \measuredangle IBA = \measuredangle N_aAC + \measuredangle IBA = \measuredangle N_aBI$$

故 $\overline{N_aI} = \overline{N_aB}$，同理有 $\overline{N_aI} = \overline{N_aC} = \overline{N_aI_a}$。 $\blacksquare$

Lemma 1.3. 設 $\triangle ABC$ 中 A-旁切圓切 BC 於 D'，則 $\overline{BC}$ 中點 M_a 為 $\overline{DD'}$ 中點。

Proof. 令 I_a 為 A-旁心，由 (1.2)，$\overline{II_a}$ 的中點為 $\widehat{BC}$ 中點 N_a，故

$$\frac{DM_a}{M_aD'} = \frac{IN_a}{N_aI_a} = 1. \qquad \blacksquare$$

Lemma 1.4. 設 $\triangle ABC$ 中 A-旁切圓切 BC 於 D'，M_a 爲 $\overline{BC}$ 中點，則 $IM_a \parallel AD'$。

Proof. 令 D^* 爲 D 關於 $\odot(I)$ 的對徑點，過 D^* 作平行於 BC 的直線分別交 AB, AC 於 XY，則 $\triangle AXY$ 與 $\triangle ABC$ 位似。因此 A, D^*, D' 共線。由 (1.3)，IM_a 爲 $\triangle DD'D^*$ 的 D-中位線，故 $IM_a \parallel D^*D' = AD'$。 ∎

Lemma 1.5. 設 $\odot(AEF)$ 和 $\odot(ABC)$ 交於 A, X，則 XD 過 $\widehat{BC}$ 弧中點 N_a。

Proof. 注意到 X 是 $\triangle ABC \cup EF$ 的密克點，故 $\triangle XBF \overset{+}{\sim} \triangle XCE$，因此

$$\frac{XB}{XC} = \frac{FB}{EC} = \frac{DB}{DC}$$

故 $\measuredangle BXD = \measuredangle DXC$。因爲 A, X 位於 BC 同側且 D 位於 $\overline{BC}$ 內，因此 XD 爲 $\angle BXC$ 的內角平分線且 X, D, N_a 共線。 ∎

Lemma 1.6. 沿用 (1.5) 的標號，設 AI 交 EF 於 T，則 $DT \perp EF$。

Proof. 注意到 I 是 $\odot(AEF)$ 上 $\widehat{EF}$ 的弧中點，故

$$\frac{TF}{TE} = \frac{XF}{XE} = \frac{XB}{XC} = \frac{DB}{DC}$$

故 $\triangle XTD \sim \triangle XFB$，因此

$$\measuredangle XN_aA = \measuredangle XBA = \measuredangle XBF = \measuredangle XDT \implies DT \parallel N_aA \perp EF$$ ∎

Lemma 1.7. 令 $\triangle ABC$ 的垂心和內心分別爲 H, I，則 (H, I) 爲 $\triangle DEF$ 的垂足三角形的一對等角共軛點。

Proof. 考慮 D 對 EF 的垂足 T，我們只需要證明 $\measuredangle HTD = \measuredangle DTI$ 則其他兩邊也同理，由 (1.6)，X 是 $\triangle ABC \cup EF \cup DT$ 的密克點，故 $\triangle AEF, \triangle ABC$ 的垂心和 T 共線，注意到 AEF 垂心是 I 對 EF 的對稱點，故 $\measuredangle HTD = \measuredangle DTI$ ∎

Lemma 1.8 (熱爾岡點)**.** 直線 AD, BE, CF 共於一點 Ge。

Proof 1. 由西瓦定理及

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = 1.$$ ∎

Proof 2. 考慮六折線 $BDCEAF$，由於其與內切圓 $\odot(I)$ 相切，由布里昂雄定理得證。 ∎

Proof 3. 由 Sondat 定理，$\triangle DEF$ 與 $\triangle \mathfrak{p}_{\odot(I)}(D)\mathfrak{p}_{\odot(I)}(E)\mathfrak{p}_{\odot(I)}(F)$ 透視，而我們顯然有

$$\triangle \mathfrak{p}_{\odot(I)}(D)\mathfrak{p}_{\odot(I)}(E)\mathfrak{p}_{\odot(I)}(F) = \triangle ABC.$$ ∎

Lemma 1.9. 設 EF 與 BC 交於 X，則 $(B,C;D,X)=-1$。

Proof 1. 由孟氏定理，

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

因此

$$\frac{BD/DC}{BX/XC}=-\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=-1.$$ ∎

Proof 2. 由完全四線形 (CA,AB,BE,CF) 的調和分割性質。 ∎

Lemma 1.10. 設 ID 交 EF 於 T，則 AT 平分 $\overline{BC}$。

Proof 1. 過 T 作平行於 BC 的直線交 CA, AB 於 X, Y，則 I 關於 XY, YA, AX 共線。由西姆松定理，$I\in\odot(AXY)$，由 $\triangle AXY\cup I$ 與 $\triangle ABC\cup N_a$ 位似可得 A, T, M_a 共線。 ∎

Proof 2. 過 A 作平行於 BC 的直線交 EF 於 S，則 $ST=\mathfrak{p}_{\odot(I)}(A)$。由於 $IT\perp AS$，所以 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(T)=AS$，故

$$A(B,C;T,\infty_{BC})=(F,E;T,S)=-1,$$

即 AT 平分 BC。 ∎

Lemma 1.11. 設 J 爲 C 關於 BI 的垂足，則 J 爲 C-中位線與 EF 的交點。

Proof 1. 由

$$\measuredangle(M_aJ,AB)=\measuredangle M_aJB+\measuredangle JBA=\measuredangle IBC+\measuredangle CBI=0,$$

我們知道 J 位於 C-中位線上。注意到 C, E, J, I 共圓，所以由 (1.1)，

$$\measuredangle JEC=\measuredangle BIC=90^\circ+\measuredangle IAE=\measuredangle FEC,$$

即 $J \in EF$。 ■

Proof 2. J 位於 C-中位線同上面的算角度證明。由於 $\triangle DEF$ 爲熱爾岡點 Ge 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形且 Ge 位於費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上，因此 $EF = \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(D)$。注意到 D, J 爲 $\triangle IBC$ 的垂足三角形的兩個頂點且 $I \in \mathcal{H}_{Fe}$，所以 $J \in \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(D) = EF$。 ■

Lemma 1.12. 設 H_A 爲 BIC 垂心，$ID \cap EF = S$，則 $(D, S; I, H_A) = -1$

Proof. 設 $BI \cap EF = J, DI \cap EF = S, BC \cap EF = X$，則 C, J, H' 共線，故

$$J(D, S; I, H_A) = (D, X; B, C) = -1$$ ■

Lemma 1.13. 設 $\overline{EF}$ 中點爲 M，H_A 爲 BIC 垂心，則 Ge, M, H_A 共線。

Proof. 標號沿用 (1.12)，考慮 D 對 EF 的垂足 T，和 DT 中點 Y，則 S ■

Lemma 1.14 (僞內切圓). 設圓 ω_A 分別與 CA, AB 相切於 E_A, F_A，且與 $\odot(ABC)$ 內切，則 I, E_A, F_A 共線。

Proof 1. ■

Proof 2. 考慮關於 A 的反演命題，我們只要證明若 A-旁切圓分別與 CA, AB 相切於 E_a, F_a，則 A, I_a, E_a, F_a 共圓，而這顯然是對的。 ■

Proof 3. ■