幾何引理維基

$\mathcal{L}i4 + \mathcal{S}_{\otimes} +$ 和輝 (?)

February 23, 2021

目錄

前言

曾經證明過的引理不可能忘記，只不過是想不起而已。

這份講義的內容會以作者們有印象的幾何引理爲主，如果讀者有任何想加進來的引理或者哪裡出現了 typo 都可以私訊我們或寄信到 chjh21005@gmail.com 告訴我。

Chapter 0

基本性質與記號

0.1 記號

若 X, Y 爲兩點 (不在無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 上)，XY 代表過 X, Y 的直線，$\overline{XY}$ 代表連接 X, Y 的線段 (與 $\mathcal{L}_\infty$ 沒有交點的那個)。若 K, L 爲兩線，$K \cap L$ 代表 K 與 L 的交點，$\angle(K, L)$ 代表 K 與 L 的無向夾角，$\measuredangle(K, L)$ 代表 K 與 L 的有向夾角。

$\odot(XYZ)$ 爲 $\triangle XYZ$ 的外接圓，$\odot(\overline{XY})$ 是以 $\overline{XY}$ 爲直徑的圓，$\odot(X)$ 則是以 X 爲圓心的圓。給定一圓 Γ 及圓上一點 X，我們通常以 $XP \cap \Gamma$ 或 $\Gamma \cap XP$ 代表 XP 與 Γ 的異於 X 的交點 (若 XP 與 Γ 相切則還是 X)。

有時，若有三線 a, b, c，我們會以 $\triangle abc$ 代表以 a, b, c 三線圍成的三角形 $\triangle(b \cap c)(c \cap a)(a \cap b)$。

我們說 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 與 $\triangle X_2Y_2Z_2$ 正向相似，記爲 $\triangle X_1Y_1Z_1 \overset{+}{\sim} \triangle X_2Y_2Z_2$，若 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 與 $\triangle X_2Y_2Z_2$ 相似且

$$\measuredangle Y_1X_1Z_1 = \measuredangle Y_2X_2Z_2,\ \measuredangle Z_1Y_1X_1 = \measuredangle Z_2Y_2X_2,\ \measuredangle X_1Z_1Y_1 = \measuredangle X_2Z_2Y_2.$$

我們說 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 與 $\triangle X_2Y_2Z_2$ 反向相似，記爲 $\triangle X_1Y_1Z_1 \overset{-}{\sim} \triangle X_2Y_2Z_2$，若 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 與 $\triangle X_2Y_2Z_2$ 相似且

$$\measuredangle Y_1X_1Z_1 = -\measuredangle Y_2X_2Z_2,\ \measuredangle Z_1Y_1X_1 = -\measuredangle Z_2Y_2X_2,\ \measuredangle X_1Z_1Y_1 = -\measuredangle X_2Z_2Y_2.$$

給定 $\triangle ABC$ 與一點 P，我們有：P 關於 $\triangle ABC$ 的

- 西瓦三角形 $\triangle(AP \cap BC)(BP \cap CA)(CP \cap AB)$

- 反西瓦三角形，使得 P 關於其西瓦三角形爲 $\triangle ABC$ (存在性與唯一性詳見[1])
- 佩多 (垂足) 三角形 $\triangle(P\infty_{\perp BC} \cap BC)(P\infty_{\perp CA} \cap CA)(P\infty_{\perp AB} \cap AB)$
- 反佩多三角形 $\triangle(A\infty_{\perp AP})(B\infty_{\perp BP})(C\infty_{\perp CP})$，使得 P 關於其佩多三角形爲 $\triangle ABC$
- 圓西瓦三角形 $\triangle(AP \cap \odot(ABC))(BP \cap \odot(ABC))(CP \cap \odot(ABC))$

其中，西瓦三角形的定義關於 A, B, C, P 四個點是對稱的，所以也被定義爲一個完全四點形的西瓦三角形。

給定 $\triangle ABC$ 與一線 ℓ，我們有：ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的

- 西瓦三角形 $\triangle(A(BC \cap \ell))(B(CA \cap \ell))(C(AB \cap \ell))$
- 反西瓦三角形，使得 ℓ 關於其西瓦三角形爲 $\triangle ABC$ (同樣地存在性與唯一性詳見[1])

跟點的情形一樣，西瓦三角形的定義也可以延伸至完全四線形 (但一般稱作對角線三角形)。

當我們給定三角形 ABC，在不特別說明的情況下我們默認

- I, G, O, H 分別爲內心、重心、外心及垂心
- I_x 爲 X-旁心
- $\triangle DEF$ 爲切點三角形，即 I 的佩多三角形
- $\triangle D_xE_xF_x$ 爲 X-切點三角形，即 I_x 的佩多三角形
- $\triangle D'E'F' = \triangle D_aE_bF_c$ 爲旁切點三角形
- $\triangle M_aM_bM_c$ 爲中點三角形
- $\triangle N_aN_bN_c$ 爲弧中點三角形

當然我們有時會重新定義把上面的默認蓋掉。

0.2 一般引理

Lemma 0.2.1. 若兩圓 Ω, ω 相切於 T，$\overline{AB}$ 爲 Ω 上一弦與 ω 相切於 U，則 TU 爲 $\angle ATB$ 的角平分線。

Proof. 令 A', B' 分別爲 TA, TB 與 ω 異於 T 的交點，則

$$\measuredangle BAT = \measuredangle(BT, T_T\Omega) = \measuredangle(B'T, T_T\omega) = \measuredangle B'A'T,$$

即 $AB \parallel A'B'$。所以

$$\measuredangle ATU = \measuredangle A'TU = \measuredangle A'UA = \measuredangle UA'B' = \measuredangle UTB. \qquad \blacksquare$$

Lemma 0.2.2. 若兩個三角形 $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ 位似 (即 $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$, $AB \parallel A'B'$)，則 AA', BB', CC' 共點。

Proof. 迪沙格定理。 $\blacksquare$

Lemma 0.2.3. 若 P, Q 爲兩點滿足 $BPCQ$ 爲平行四邊形，則 $\measuredangle BAP = \measuredangle QAC$ 若且唯若 $\measuredangle ABP = \measuredangle PCA$。

Proof 1. 取 A' 使得 $\triangle ABP \overset{+}{\cong} \triangle A'QC$，則

$$\begin{aligned} \measuredangle BAP = \measuredangle QAC &\iff \measuredangle QA'C = \measuredangle QAC \\ &\iff A, A', Q, C \text{ 共圓} \\ &\iff \measuredangle A'QC = \measuredangle A'AC \\ &\iff \measuredangle ABP = \measuredangle PCA. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Lemma 0.2.4 (等截共軛線)**.** 設直線 ℓ 交 $\triangle ABC$ 三邊於 D, E, F，並設 D' 爲 D 關於 M_a 的對稱點，類似地在 CA, AB 上定義 E', F'，則 D', E', F' 三點共線且平行於 $\triangle ABC \cup \ell$ 的牛頓線。

Proof. 設 G 爲 $\triangle ABC$ 的重心，對於任意點 P，考慮以 A 爲中心比例爲 2 的位似變換合成上以 M_A 爲中心比例爲 -1 的位似變換將 P 送至 P^c，則由孟氏定理知道此變換把 P 送至 P 的反補點，即 $\overline{P^cG} = 2\overline{GP}$，故對於三頂點此變換皆相

同，設 T_E, T_F 爲 BE, CF 中點，則 $T_E T_F$ 爲 $\triangle ABC \cup \ell$ 的牛頓線，且由上面的討論容易發現 T_E, T_F 的反補點爲 E', F' 故反補變換將 $\triangle ABC \cup \ell$ 的牛頓線送至 D^c, E^c, F^c，因此三點共線且平行牛頓線。 ■

Lemma 0.2.5. 設 X, Y 爲一圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 上的兩點，X, Y 關於 $\mathcal{C}$ 的切線交於 P，則對於任意過 P 並交 $\mathcal{C}$ 於 A, B 兩點的直線，皆有

$$(X, Y; A, B)_{\mathcal{C}} = -1.$$

Lemma 0.2.6. 設 $\mathcal{C}$ 爲三角形 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線，X 爲任意點，且設 AX, BX, CX 交 $\mathcal{C}$ 於 X_A, X_B, X_C，P 爲 $\mathcal{C}$ 上一點，設 PX_A, PX_B, PX_C 交 BC, CA, AB 於 P_A, P_B, P_C，則 P_A, P_B, P_C, X 共線。

Proof. 設考慮 $\mathcal{C}$ 上六點 $BACX_CPX_B$，則由帕斯卡定理 $BA \cap PX_C$, $AC \cap PX_B$, $CX_C \cap BX_C$ 共點，即 P_C, P_B, X 共點，同理可證 P_A 也在此線上，故得證。 ■

Lemma 0.2.7. 設 P, Q 爲 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點，且 AP, AQ 交 (ABC) 於 U, V，AQ 交 BC 於 R，則

$$\frac{AP}{PU} = \frac{QR}{RV}$$

Proof 1.

$$\frac{AP}{UP} = (A, U; P, \infty) = (R, \infty; Q, V) = \frac{RQ}{RV}.$$ ■

Proof 2. 考慮等角共軛點對 (P, Q), (U, ∞_{AV})，我們有 $A = PU \cap Q\infty_{AV}$, $X := P\infty_{AV} \cap QU$ 爲等角共軛點對，因此 $P\infty_{AV}$, QU, BC 共點。故

$$\frac{AP}{PU} = \frac{QX}{XU} = \frac{QR}{RV}.$$ ■

Lemma 0.2.8. 設 X, Y 爲 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點，P 爲外接圓 $\odot(ABC)$ 上任意點。設 $AX \cap (ABC) = X_A$，$PX_A \cap BC = P_A$，則

$$\measuredangle(XP_A, BC) = \measuredangle APY$$

Proof. 設 $AY \cap (ABC) = R$, $AX \cap BC = D$，做 E 在 X_AP_A 上使得 $DE \parallel XP_A$，注意到

$$\measuredangle P_AX_AD = \measuredangle PRA, \quad \measuredangle DP_AX_A = \measuredangle RX_AP_A = \measuredangle RX_AP = \measuredangle RAP,$$

因此 $\triangle P_AX_AD \overset{-}{\sim} \triangle ARP$。由 (0.2.7)，

$$\frac{AY}{YR} = \frac{XD}{DX_A} = \frac{P_AE}{EX_A}.$$

因此我們有 $\triangle P_AED \overset{-}{\sim} \triangle AYP$，最後由算角度

$$\measuredangle APY = \measuredangle EDP_A = \measuredangle XP_AD = \measuredangle(XP_A, BC). \qquad \blacksquare$$

Chapter 1

内心

Lemma 1.0.1. 我們有

$$\measuredangle BIC = 90^\circ + \measuredangle BAI = 90^\circ + \measuredangle IAC.$$

Proof. 注意到 AI, BI, CI 分別垂直 EF, FD, DE，所以

$$\measuredangle BIC = \measuredangle FDE = \measuredangle AFE = 90^\circ + \measuredangle BAI = 90^\circ + \measuredangle IAC. \qquad \blacksquare$$

Lemma 1.0.2 (雞爪圓)**.** 設 N_a 爲 $\widehat{BC}$ 弧中點，則 B, I_a, C, I 共圓且圓心爲 N_a。

Proof. 注意到

$$\measuredangle BIN_a = \measuredangle BIA = \measuredangle BAI + \measuredangle IBA = \measuredangle N_aAC + \measuredangle IBA = \measuredangle N_aBI$$

故 $\overline{N_aI} = \overline{N_aB}$，同理有 $\overline{N_aI} = \overline{N_aC} = \overline{N_aI_a}$。 $\blacksquare$

Lemma 1.0.3. 設 $\triangle ABC$ 中 A-旁切圓切 BC 於 D'，則 $\overline{BC}$ 中點 M_a 爲 $\overline{DD'}$ 中點。

Proof 1. 令 I_a 爲 A-旁心，由 (1.0.2)，$\overline{II_a}$ 的中點爲 $\widehat{BC}$ 中點 N_a，故

$$\frac{DM_a}{M_aD'} = \frac{IN_a}{N_aI_a} = 1. \qquad \blacksquare$$

Lemma 1.0.4. 設 $\triangle ABC$ 中 A-旁切圓切 BC 於 D'，M_a 爲 $\overline{BC}$ 中點，則 $IM_a \parallel AD'$。

Proof. 令 D^* 爲 D 關於 $\odot(I)$ 的對徑點，過 D^* 作平行於 BC 的直線分別交 AB, AC 於 XY，則 $\triangle AXY$ 與 $\triangle ABC$ 位似。因此 A, D^*, D' 共線。由 (1.0.3)，IM_a 爲 $\triangle DD'D^*$ 的 D-中位線，故 $IM_a \parallel D^*D' = AD'$。 ■

Lemma 1.0.5. 設 $\odot(AEF)$ 和 $\odot(ABC)$ 交於 A, X，則 XD 過 $\widehat{BC}$ 弧中點 N_a。

Proof 1. 注意到 X 是 $\triangle ABC \cup EF$ 的密克點，故 $\triangle XBF \overset{+}{\sim} \triangle XCE$，因此

$$\frac{XB}{XC} = \frac{FB}{EC} = \frac{DB}{DC}.$$

故 $\measuredangle BXD = \measuredangle DXC$。因爲 A, X 位於 BC 同側且 D 位於 $\overline{BC}$ 內，因此 XD 爲 $\angle BXC$ 的內角平分線且 X, D, N_a 共線。 ■

Proof 2. 設 N_a' 爲 N_a 對外接圓的對徑點，注意到 X 是 $\triangle ABC \cup EF$ 的密克點，考慮 EF 和 BC 的交點 Y，則我們有 $XYFB$ 共圓，因此由算角度

$$\measuredangle YXN_a' = \measuredangle YXB + \measuredangle BXN_a' = \measuredangle YFB + \measuredangle BAN_a' = \measuredangle EFB + \measuredangle BAN_a' = 0^\circ.$$

故 X, Y, N_a' 共線，因此

$$(N_a, N_a'; B, C) = -1 = (D, Y; B, C) = X(D, Y; B, C)$$

故 X, D, N_a 共線。 ■

Lemma 1.0.6. 沿用 (1.0.5) 的標號，設 IX 交 EF 於 T，則 $DT \perp EF$。

Proof. 注意到 I 是 $\odot(AEF)$ 上 $\widehat{EF}$ 的弧中點，故

$$\frac{TF}{TE} = \frac{XF}{XE} = \frac{XB}{XC} = \frac{DB}{DC},$$

所以 $\triangle XTD \overset{+}{\sim} \triangle XFB$，因此

$$\measuredangle XN_aA = \measuredangle XBA = \measuredangle XBF = \measuredangle XDT \implies DT \parallel N_aA \perp EF.$$ ■

Lemma 1.0.7. 令 H, I 分別爲 $\triangle ABC$ 的垂心和內心，則 (H, I) 爲 $\triangle DEF$ 的垂足三角形的一對等角共軛點。

Proof. 考慮 D 對 EF 的垂足 T，我們只需要證明 $\measuredangle HTD = \measuredangle DTI$ 則其他兩邊也同理，由 (1.0.6)，X 是 $\triangle ABC \cup EF \cup DT$ 的密克點，故 $\triangle AEF$, $\triangle ABC$ 的垂心和 T 共線，注意到 $\triangle AEF$ 垂心是 I 對 EF 的對稱點，故 $\measuredangle HTD = \measuredangle DTI$。 ■

Lemma 1.0.8 (熱爾岡點)**.** 直線 AD, BE, CF 共於一點 Ge。

Proof 1. 由西瓦定理及

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = 1.$$ ■

Proof 2. 考慮六折線 $BDCEAF$，由於其與內切圓 $\odot(I)$ 相切，由布里昂雄定理得證。 ■

Proof 3. 由 Sondat 定理，$\triangle DEF$ 與 $\triangle \mathfrak{p}_{\odot(I)}(D)\mathfrak{p}_{\odot(I)}(E)\mathfrak{p}_{\odot(I)}(F)$ 透視，而我們顯然有

$$\triangle \mathfrak{p}_{\odot(I)}(D)\mathfrak{p}_{\odot(I)}(E)\mathfrak{p}_{\odot(I)}(F) = \triangle ABC.$$ ■

Lemma 1.0.9. 設 EF 與 BC 交於 X，則 $(B, C; D, X) = -1$。

Proof 1. 由孟氏定理，

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

因此

$$\frac{BD/DC}{BX/XC} = -\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1.$$ ■

Proof 2. 由 (1.0.8) 及完全四線形 (CA, AB, BE, CF) 的調和分割性質。 ■

Lemma 1.0.10. 設 ID 交 EF 於 T，則 AT 平分 $\overline{BC}$。

Proof 1. 過 T 作平行於 BC 的直線交 CA, AB 於 X, Y，則 I 關於 XY, YA, AX 的垂足 T, E, F 共線。由西姆松定理，$I \in \odot(AXY)$，由 $\triangle AXY \cup I$ 與 $\triangle ABC \cup N_a$ 位似可得 A, T, M_a 共線。 ■

Proof 2. 過 A 作平行於 BC 的直線交 EF 於 S，則 $ST = \mathfrak{p}_{\odot(I)}(A)$。由於 $IT \perp AS$，所以 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(T) = AS$，故

$$A(B, C; T, \infty_{BC}) = (F, E; T, S) = -1,$$

即 AT 平分 BC。 ■

Lemma 1.0.11. 設 J 為 C 關於 BI 的垂足，則 J 為 C-中位線與 EF 的交點。

Proof 1. 由

$$\measuredangle(M_aJ, AB) = \measuredangle M_aJB + \measuredangle JBA = \measuredangle IBC + \measuredangle CBI = 0,$$

我們知道 J 位於 C-中位線上。注意到 C, E, J, I 共圓，所以由 (1.0.1)，

$$\measuredangle JEC = \measuredangle BIC = 90^\circ + \measuredangle IAE = \measuredangle FEC,$$

即 $J \in EF$。 ■

Proof 2. J 位於 C-中位線同上面的算角度證明。由於 $\triangle DEF$ 爲熱爾岡點 Ge 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形且 Ge 位於費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上，因此 $EF = \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(D)$。注意到 D, J 爲 $\triangle IBC$ 的垂足三角形的兩個頂點且 $I \in \mathcal{H}_{Fe}$，所以 $J \in \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(D) = EF$。 ■

Lemma 1.0.12. 設 H_a 爲 A 關於 BC 的垂足，X 爲 AI 與 BC 的交點，則

$$(H_a, X; D, D') = -1.$$

Proof. 注意到

$$(A, AI \cap BC; I, I_a) = -1,$$

將其關於 BC 投影即可得到

$$(H_a, X; D, D') = -1.$$ ■

Lemma 1.0.13. 設 H_A 爲 $\triangle BIC$ 垂心，$ID \cap EF = S$，則

$$(D, S; I, H_A) = -1.$$

Proof 1. 設 $BI \cap EF = J, DI \cap EF = S, BC \cap EF = X$，則 C, J, H' 共線，故

$$J(D, S; I, H_A) = (D, X; B, C) = -1.$$ ■

Proof 2. 由於 $\triangle DEF$ 爲熱爾岡點 Ge 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形且 Ge 位於費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上，因此 $EF = \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(D)$，故原命題由調和性質顯然。 ■

Lemma 1.0.14. 標號沿用 (1.0.13)，則 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(H_A)$ 爲 A-中位線。

Proof. 注意到 $S \in EF = \mathfrak{p}_{\odot(I)}(A)$，因此 $A \in \mathfrak{p}_{\odot(I)}(S)$ 且 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(S) \perp IS \perp BC$，故 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(S)$ 過 A 且平行 BC，因此由配極保交比

$$(BC, \mathfrak{p}_{\odot(I)}(S); \mathcal{L}_\infty, \mathfrak{p}_{\odot(I)}(H_A)) = (D, S; I, H_A) = -1.$$

故 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(H_A)$ 爲 A-中位線。 ■

Lemma 1.0.15. 設 $\overline{EF}$ 中點爲 M，H_A 爲 $\triangle BIC$ 垂心，則 Ge, M, H_A 共線。

Proof. 標號沿用 (1.0.13)，考慮 AD 和 EF 的交點 U，則

$$M(D, U; A, Ge) = -1 = M(D, S; I, H_A).$$

故 M, Ge, H_A 共線。 ■

Lemma 1.0.16. 三角形 DEF 的歐拉線是 OI。

Proof. 注意到 $\triangle DEF$ 與 $\triangle I_aI_bI_c$ 位似，$\triangle I_aI_bI_c$ 的歐拉線是 OI，且 I 在 $\triangle DEF$ 的歐拉線上，因此他們的歐拉線重合，故 $\triangle DEF$ 的歐拉線是 OI。 ■

Lemma 1.0.17. 設 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈雙曲線爲 $\mathcal{H}_{Fe}$，則 OI 和 $\mathcal{H}_{Fe}$ 相切。

Proof. 注意到 $\mathcal{H}_{Fe}$ 是 OI 的等角共軛軌跡，且 $I \in \mathcal{H}_{Fe}$，若 OI 和 $\mathcal{H}_{Fe}$ 有第二個交點 X，則 X 的等角共軛點也會在費爾巴哈雙曲線上但這就和它是二次曲線矛盾，因此只有一個交點。 ■

Lemma 1.0.18. 設 BI, CI 分別與 CA, AB 交於 Y, Z，YZ 與 $\odot(ABC)$ 交於 P, Q 兩點，則 I, I_b, I_c, P, Q 共圓。

Proof. 由 Y 位於 $\odot(ACPQ)$ 及 $\odot(ACII_b)$ 的根軸上知 I, I_b, P, Q 共圓。同理有 I, I_c, P, Q 共圓。 ■

Lemma 1.0.19. 我們有 I 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}(I)$ 垂直 OI，類似地，有 I_x 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}(I_x)$ 垂直 OI_x。

Proof 1. ■

Proof 2. 注意到 OI 與費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$，故 I 的正交截線垂直 OI，且注意到 I 對 ABC 的三線性極線，正交截線，I 對 (DEF) 的極線共點，故 I 對 ABC 的三線性極線，正交截線平行，故 I 的三線性極線垂直 OI。 ■

1.1 僞内切圓

Lemma 1.1.1 (僞内切圓)**.** 設圓 ω_A 分別與 CA, AB 相切於 E_A, F_A，且與 $\odot(ABC)$ 内切，稱 ω_A 爲 $\triangle ABC$ 的 A-僞内切圓。則 I, E_A, F_A 共線，意即，$I \in \mathfrak{p}_{\omega_A}(A)$。

Proof 1. 令 T_A 爲 ω_A 與 $\odot(ABC)$ 的切點。由 (0.2.1) 可得 T_AE_A 爲 $\angle CT_AA$ 的角平分線，由 E_A 位於 $\overline{CA}$ 内及 T_A, N_b 位於 CA 異側可得 T_A, E_A, N_b 共線。由 $\measuredangle CT_AN_b = \measuredangle CAN_b = \measuredangle N_bCE_A$，我們知道 $\triangle N_bE_AC \overset{-}{\sim} \triangle N_bCT_A$。令 $I' = BN_b \cap E_AF_A$，則

$$\measuredangle T_AF_AI' = \measuredangle T_AF_AE_A = \measuredangle T_AE_AC = \measuredangle T_ACN_b = \measuredangle T_ABI',$$

因此 B, T_A, I', F_A 共圓。由

$$\measuredangle T_AI'N_b = \measuredangle T_AF_AB = \measuredangle T_AE_AF_A = \measuredangle N_bE_AI'$$

我們可得 $\triangle N_bE_AI' \overset{-}{\sim} \triangle N_bI'T_A$，故

$$N_bI'^2 = N_bE_A \cdot N_bT_A = N_bC^2.$$

所以由 (1.0.2) 及 I, I' 在 BN_b 上位於 N_b 同側可得 $I' = I$。 ■

Proof 2. 考慮關於 A 的反演命題，我們只要證明：

> 若 A-旁切圓分別與 CA, AB 相切於 E_a, F_a，則 A, I_a, E_a, F_a 共圓。

而這顯然是對的。 ■

Proof 3. 同 *Proof 1.*，我們有 T_A, E_A, N_b 共線，同理有 T_A, F_A, N_c 共線。考慮六折線 $ABN_bT_AN_cC$，由於其頂點皆位於 $\odot(ABC)$ 上，所以 $E_A, F_A, I = BN_b \cap CN_c$ 共線。 ■

Lemma 1.1.2. 設圓 ω 與 CA 相切於 $\overline{CA}$ 内，且與 $\odot(ABC)$ 内切。設 P 爲 CA 上一點使得 BP 與 ω 相切，則 $I \in \mathfrak{p}_\omega(A)$。

Proof 1. 證明類似於 (1.1.1) 的 *Proof 1.*。令 T 爲 ω 與 $\odot(ABC)$ 的切點，E, F 分別爲 ω 與 CP, PB 的切點。由 (0.2.1) 可得 TE 爲 $\angle CTA$ 的角平分線，由 E 位於 $\overline{CA}$ 内及 T, N_b 位於 CA 異側可得 T, E, N_b 共線。由 $\measuredangle CTN_b = \measuredangle CAN_b = \measuredangle N_bCE$，我們知道 $\triangle N_bEC \overset{-}{\sim} \triangle N_bCT$。令 $I' = BN_b \cap EF$，則

$$\measuredangle TFI' = \measuredangle TFE = \measuredangle TEC = \measuredangle TCN_b = \measuredangle TBI',$$

因此 B, T, I', F 共圓。由

$$\measuredangle TI'N_b = \measuredangle TFB = \measuredangle TEF = \measuredangle N_bEI'$$

我們可得 $\triangle N_bEI' \overset{-}{\sim} \triangle N_bI'T$，故

$$N_bI'^2 = N_bE \cdot N_bT = N_bC^2.$$

所以由 (1.0.2) 及 I, I' 在 BN_b 上位於 N_b 同側可得 $I' = I$。 ■

Proof 2. ■

Lemma 1.1.3. 標號同 (1.1.1)，令 T_A 爲 ω_A 與 $\odot(ABC)$ 的切點，則 B, T_A, I, F_A 及 C, T_A, I, E_A 分別共圓。

Proof. 由 (1.1.1) 的 *Proof 1.* 可以直接看出。如果在假設 (1.1.1) 是對的情況下，我們有 I, E_A, F_A 共線。由於 BI 與 T_AE_A 交於 N_b，

$$\measuredangle T_AF_AI = \measuredangle(T_AN_b, CA) = \measuredangle N_bT_AC + \measuredangle T_ACA = \measuredangle ABN_b + \measuredangle T_ABA = \measuredangle T_ABI,$$

即 B, T_A, I, F_A 共圓。同理有 C, T_A, I, E_A 共圓。 ■

Lemma 1.1.4. 標號同 (1.1.3)，我們有

$$(A, T_A; N_b, N_c) = -1.$$

Proof. 由 (0.2.5)，

$$(T_A, AT_A \cap \omega_A; E_A, F_A) = -1.$$

由於 ω_A 與 $\odot(ABC)$ 相切於 T_A，因此關於 T_A 位似即可得

$$(T_A, A; N_b, N_c) = (T_A, AT_A \cap \omega_A; E_A, F_A),$$

因此

$$(A, T_A; N_b, N_c) = -1. \qquad \blacksquare$$

Lemma 1.1.5. 標號同 (1.1.3)，令 N'_a 爲 $\widehat{BAC}$ 中點，則 I, N'_a, T_A 共線。

Proof 1. 由 (1.1.3) 及 $AI \perp E_AF_A$，

$$\measuredangle IT_AB = \measuredangle IF_AB = \measuredangle IAB + 90^\circ = \measuredangle N'_aAB = \measuredangle N'_aT_AB,$$

所以 I, N'_a, T_A 共線。 $\blacksquare$

Proof 2. 由 (1.1.4)，

$$(A, T_A; N_b, N_c) = -1.$$

考慮以 I 爲中心，反演冪爲 $\mathcal{P}(\odot(ABC), I)$ 的反演變換，則

$$-1 = (A, T_A; N_b, N_c) = (N_a, T_AI \cap \odot(ABC); B, C),$$

因此 $T_AI \cap \odot(ABC) = N'_a$。 $\blacksquare$

Lemma 1.1.6. 標號同 (1.1.3)，類似定義 T_B, T_C，則 AT_A, BT_B, CT_C 共點於 $\odot(ABC)$ 與 $\odot(I)$ 的外位似中心 X_{56}。

Proof. 由 Monge 定理，我們有 AT_A 過 $\odot(ABC)$, $\odot(I)$ 的外位似中心 X_{56}。同理，BT_B, CT_C 也過 X_{56}。 $\blacksquare$

Lemma 1.1.7. 內切圓 $\odot(I)$ 和外接圓 $\odot(O)$ 的外、內位似中心分別爲 Na, Ge 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。

Proof. 我們只證明外位似中心的情況，內位似中心的證明類似，標號同 (1.1.1)。由 (1.1.6)，AT_A 過 $\odot(ABC)$, $\odot(DEF)$ 的外位似中心，且透過對 A 反演可以得到 ANa, AT_A 爲等角線。對於 B, C 我們有同樣的結論。 $\blacksquare$

Lemma 1.1.8. 標號同 (1.1.3)，若 P 爲 $\odot(ABC)$ 上任一點，Q 爲 AP 與 BC 的交點，則 $T_A \in \odot(APQ)$。

Proof. 由 Reim 定理及 $DQ = BC$，這等價於證明 T_AD 與過 A 平行於 BC 的直線交於 $\odot(ABC)$。將此命題關於 BC 中垂線對稱，我們需要證明 A, D', U_A 共線，其中 $U_A \in \odot(ABC)$ 滿足 $T_AU_A \parallel BC$。由 (1.1.7) 我們知道 $AT_A, AD' = ANa$ 是關於 $\angle BAC$ 的等角線，因此 A, D', U_A 共線。 ■

Lemma 1.1.9. 標號同 (1.1.3)，令 X 爲 (1.0.5) 中的 X，我們有 E_AF_A, BC, N_aT_A 共於一點 S。

Proof. 考慮四圓 $\odot(ABC), \odot(IT_AN_a), \odot(BIC), \odot(AXI)$。由 (1.1.5)，$\odot(IT_AN_a)$ 與 $\odot(BIC), \odot(AXI)$ 相切於 I，故此四圓有共同的根心。而上述四線皆爲其中某兩圓的根軸，因此共點。 ■

Lemma 1.1.10. 若 P 爲 $\widehat{BC}$ 上任一點，J_b, J_c 分別爲 $\triangle CAP, \triangle ABP$ 的內心，則 P, T_A, J_b, J_c 共圓。

Proof. 我們證明 $\triangle T_AN_bJ_b \overset{+}{\sim} \triangle T_AN_cJ_c$。注意到

$$\measuredangle T_AN_bJ_b = \measuredangle T_AN_bP = \measuredangle T_AN_cP = \measuredangle T_AN_cJ_c,$$

由 (1.1.4) 及 (1.0.2)，

$$\frac{\overline{T_AN_b}}{\overline{T_AN_c}} = \frac{\overline{AN_b}}{\overline{AN_c}} = \frac{\overline{J_bN_b}}{\overline{J_cN_c}},$$

所以 $\triangle T_AN_bJ_b \overset{+}{\sim} \triangle T_AN_cJ_c$。 ■

Lemma 1.1.11. 設 D 爲 $\triangle ABC$ 的內切圓與 BC 的切點。若 P 爲 $\overline{BC}$ 內一點，J_b, J_c 分別爲 $\triangle CAP, \triangle ABP$ 的內心，則 P, D, J_b, J_c 共圓。

Proof 1. ■

Proof 2. 此爲 (1.1.10) 的旁心命題關於 A 的反演命題。 ■

Lemma 1.1.12. 標號同 (1.1.3)，令 I' 爲 I 關於 T_A 的對稱點，則 AN'_a, BC, I_aI' 共點。

Proof. 由於 N'_a, I, I' 共線且 $I' \in \odot(BI_aCI)$,

$$\measuredangle N'_aAI_a = 90^\circ = \measuredangle N'_aI'I_a,$$

即 A, I', I_a, N'_a 共圓。而此三線為三圓 $\odot(ABC), \odot(BI_aCI), \odot(AI'I_aN'_a)$ 兩兩之間的根軸。 ■

Lemma 1.1.13. 標號同 (1.1.3)，令 A^+ 為 AT_A 與 E_AF_A 的交點，A^- 為 IT_A 與 BC 的交點，則 $A^+A^- \parallel AI$。

Proof. 注意到 I 關於 $\triangle N'_aBC$ 的等角共軛點 I^* 為 I 關於 $\overline{BC}$ 的中垂線的對稱點，所以由 (0.2.7) 可得

$$\frac{IA^-}{A^-T_A} = \frac{N_aI^*}{I^*U} = \frac{N_aI}{IT_A},$$

其中 U 為 N_aI^* 與 $\odot(ABC)$ 異於 N_a 的交點。故

$$\frac{AA^+}{A^+T_A} = \frac{N_aI}{IT_A} = \frac{IA^-}{A^-T_A},$$

即 $A^+A^- \parallel AI$。 ■

1.2 費爾巴哈雙曲線

Lemma 1.2.1 (費爾巴哈)**.** 九點圓 $\odot(N)$ 與內切圓 $\odot(I)$ 及三個旁切圓 $\odot(I_a)$, $\odot(I_b)$, $\odot(I_c)$ 相切。分別記 Fe, Fe_a, Fe_b, Fe_c 為他們之間的切點。

Proof 1. 我們證明 $\odot(N)$ 與 $\odot(I)$ 相切。令 $X = AI \cap BC$，Y 為 D 關於 AI 的對稱點，則 Y 位於 $\odot(I)$ 上。定義 Fe 為 YM_a 與 $\odot(I)$ 異於 Y 的交點，以下證明 $\odot(N)$ 與 $\odot(I)$ 相切於 Fe。由 (1.0.12)，

$$M_aH_a \cdot M_aX = M_aD^2 = M_aY \cdot M_aFe,$$

所以 H_a, X, Y, Fe 共圓。令 E_A 為 $\overline{AH}$ 中點，則

$$\begin{aligned}\measuredangle H_aFeM_a = \measuredangle H_aFeY = \measuredangle H_aXY &= 2 \cdot \measuredangle DXA \\ &= 2 \cdot \measuredangle H_aAI = \measuredangle HAO = \measuredangle H_aE_AM_a.\end{aligned}$$

即 $Fe \in \odot(H_aM_aE_A) = \odot(N)$。而

$$\begin{aligned}\measuredangle(T_{Fe}\odot(N), T_{Fe}\odot(I)) &= \measuredangle(T_{Fe}\odot(N), FeM_a) + \measuredangle(FeY, T_{Fe}\odot(I)) \\ &= \measuredangle FeH_aM_a + \measuredangle XYFe = 0^\circ. \qquad (H_a, X, Y, Fe \text{ 共圓})\end{aligned}$$

故 $\odot(N)$ 與 $\odot(I)$ 相切於 Fe。 ■

Proof 2. 我們知道 I 的佩多圓與九點圓在 (A, B, C, I) 的龐色列點的夾角爲

$$90^\circ + \measuredangle(BC, AP) + \measuredangle(CA, BP) + \measuredangle(AB, CP) = 0^\circ.$$

因此兩圓相切。 ■

Lemma 1.2.2. 費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe} = (ABCIH)$ 爲 OI 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡。

Proof. 這是因爲 (I, I), (O, H) 是 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，而直線的等角共軛軌跡是一條圓錐曲線。 ■

Lemma 1.2.3. 費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的中心是費爾巴哈點 Fe。

Proof. ■

Lemma 1.2.4. 給定任意 $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，考慮以 I 爲中心且位似比爲 t 的位似變換將 $\triangle DEF$ 送至 $\triangle D_tE_tF_t$，則 AD_t, BE_t, CF_t 共於一點 P_t，且 P_t 在 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上。

Proof. 由 (1.1.7)，Na 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點在 OI 上，故 $Na \in \mathcal{H}_{Fe}$，且由 (1.0.3) 知道 BNa, CNa 分別過 E, F 在 $\odot(DEF)$ 上的對徑點，因此

$$B(E_t, Na; I, H) = t = C(F_t, Na; I, H) \implies BE_t \cap CF_t \in \mathcal{H}_{Fe}.$$

同理可證 AD_t, BE_t, CF_t 共點在 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈雙曲線上。 ■

Lemma 1.2.5. 標號沿用 (1.2.4)，P_{-2} 是 I 在費爾巴哈雙曲線上的對徑點 X_{80}。

Proof. 由 G 的 -2 倍位似知 OI 平行 HNa，又因爲 OI 是 I 在費爾巴哈雙曲線上的切線，由 (0.2.5) 知 $(I, X_{80}; H, Na)_{\mathcal{H}_{Fe}} = -1$。又 $I = P_0$, $H = P_\infty$, $Na = P_{-1}$，故 $X_{80} = P_{-2}$。 ■

Lemma 1.2.6. $(A, B; C, I)_{\mathcal{H}_{Fe}} = (D, E, F, Fe)_{\odot(I)}$。

Proof. 令 D' 爲 D 在內切圓上的對鏡點，由 (1.2.5) 知 AX_{80} 過 I 對 D' 的對稱點。對 I 位似 1/2 倍得 AX_{80} 和 $D'Fe$ 平行，故和 DFe 垂直。而 Fe 在內切圓上

的切線當然垂直 IFe，故

$$(A,B;C,I)_{\mathcal{H}_{Fe}} = X_{80}(A,B;C,I) = Fe(D,E;F,Fe) = (D,E,F,Fe)_{\odot(I)}. \qquad \blacksquare$$

Lemma 1.2.7. 費爾巴哈點 Fe 是 $\triangle DEF$ 的歐拉反射點 X_{110}。一個三角形的歐拉反射點指的是垂直其歐拉線方向的無窮遠點的等角共軛點。

Proof. 令過 F 垂直 OI 的線和內切圓對 $\angle DFE$ 的等角線和內切圓的另一個交點爲 F'。由 (1.2.6) 知

$$\begin{aligned}
(D,E;F,Fe)_{\odot(I)} &= (A,B;C,I)_{\mathcal{H}_{Fe}} \\
&= I(A,B;C,I) \\
&= \mathcal{L}_\infty(EF,DF;DE,\perp OI) && (\text{轉 } 90^\circ) \\
&= F(E,D;\infty_{DE},\infty_{\perp OI}) \\
&= F(D,E;\infty_{BC},F') && (\text{對 } \angle DFE \text{ 取等角線}) \\
&= (D,E;F,F')_{\odot(I)}.
\end{aligned}$$

因此 $Fe = F'$。 $\blacksquare$

Lemma 1.2.8. 直線 IH 是 Fe 對 $\triangle DEF$ 的正交截線。

Proof 1. 令 D' 爲 D 在內切圓上的對鏡點，只需證 $D'Fe$, IH, EF 共點。

$$\begin{aligned}
(A,B;C,I)_{\mathcal{H}_{Fe}} &= (HA,HB;HC,HI) \\
&= (ID,IE;IF,IH) \\
&= (ID\cap EF,E;F,IH\cap EF).
\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}
(D,E;F,Fe)_{\odot(I)} &= D'(D,E;F,Fe) \\
&= (D'D\cap EF,E;F,D'Fe\cap EF).
\end{aligned}$$

由 (1.2.6) 即知 $D'Fe$ 和 IH 交在 EF 上。 $\blacksquare$

Proof 2. 同 *Proof 1.*，我們證明 $D'Fe$, IH, EF 共點。注意到上述交點即爲 D 對 EF 的垂線對費爾巴哈的極點。 $\blacksquare$

Proof 3. 注意到 H, I 是 DEF 的垂足三角形的等角共軛點對，因此 IH 和 $\triangle DEF$ 的 $\mathcal{H}_J$ 相切，故由 (2.0.13) 得證。 ■

Lemma 1.2.9. $\triangle DEF$ 的垂心 $T =: X_{65}$ 是 IH 對費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的極點。特別地，T 在 OI 上。

Proof. 令 D' 爲 D 在內切圓上的對鏡點，由 (1.2.8) 可知 $FeD' \cap EF$ 在 IH 上，由熱爾岡點的定義知 $Ge = P_1 \in \mathcal{H}_{Fe}$ (cf.(1.2.4))。注意到 $\triangle DEF$ 是 Ge 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形，故 $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(EF) = D$。由於 FeD' 過 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的中心 Fe，故其極點必在 $\mathcal{L}_\infty$ 上。注意到根據 (1.2.5)，$D'Fe$ 過 AI 中點，故 $D'Fe$ 的極點就是 ∞_{AI}。由於 AI 垂直 EF，因此 $FeD' \cap EF$ 對費爾巴哈雙曲線的極線就是 D 對 EF 的垂線。對 E, F 做一樣的論述即得到 IH 對 $\mathcal{H}_{Fe}$ 的極點是 $\triangle DEF$ 垂心。 ■

Lemma 1.2.10. 標號沿用 (1.2.4)。令 T 爲 $\triangle DEF$ 垂心，則對所有 $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，$T, P_t, P_{-t}$ 共線。特別地，T, Ge, Na 共線。

Proof. 令 $TP_t \cap \mathcal{H}_{Fe} = P_s$，則由 (0.2.5) 知

$$\begin{aligned} -1 &= (I, H; P_t, P_s)_{\mathcal{H}_{Fe}} \\ &= (P_0, P_\infty, P_t, P_s)_{\mathcal{H}_{Fe}} \\ &= (P_0, P_\infty, P_t, P_s) \\ &= (0, \infty, t, s). \end{aligned}$$

因此 $s = -t$。 ■

Chapter 2

歐拉線

Lemma 2.0.1. 設 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，則

$$\measuredangle BHC = 180^\circ - \measuredangle BAC.$$

Proof. 由於 BH, CH 分別於 CA, AB 垂直，所以

$$\measuredangle BHC = \measuredangle CAB = 180^\circ - \measuredangle BAC. \qquad \blacksquare$$

Lemma 2.0.2. 設 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，則

$$\measuredangle BOC = 2 \cdot \measuredangle BAC.$$

Proof. 由於 $\triangle COA, \triangle AOB$ 為等腰三角形，所以

$$\begin{aligned}\measuredangle BOC &= \measuredangle OBA + \measuredangle BAC + \measuredangle ACO \\ &= \measuredangle BAO + \measuredangle BAC + \measuredangle OAC = 2 \cdot \measuredangle BAC.\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Lemma 2.0.3. 設 H_A 為 H 關於 BC 的對稱點，則 $H_A \in \odot(ABC)$。

Proof. 由 (2.0.1)，

$$\measuredangle BH_AC = -\measuredangle BHC = \measuredangle BAC,$$

即 A, B, C, H_A 共圓。 $\blacksquare$

Lemma 2.0.4. 設 M_a 為 $\overline{BC}$ 中點，A^* 為 A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點，則 M_a 為 $\overline{HA^*}$ 中點。

Proof. 注意到

$$BH \perp CA \perp A^*C \implies BH \parallel A^*C$$
$$CH \perp AB \perp A^*B \implies CH \parallel A^*B,$$

所以 BA^*CH 爲平行四邊形，因此 M_a 爲 $\overline{HA^*}$ 中點。 ■

Lemma 2.0.5. 設 M_a 爲 $\overline{BC}$ 中點，則

$$AH = 2 \cdot OM.$$

Proof. 令 A^* 爲 A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點。由 (2.0.4)，M_a 爲 $\overline{HA^*}$ 中點，故 OM 爲 $\triangle AHA^*$ 的 A^*-中位線。 ■

Lemma 2.0.6. 重心 G, 外心 O, 垂心 H 三點共線且

$$\frac{HG}{GO} = 2.$$

Proof. 令 M_b, M_c 分別爲 $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 中點，注意到 $\triangle BHC$ 與 $\triangle M_bOM_c$ 位似，所以 BM_b, CM_c, HO 共點，即 G, O, H 共線。由 (2.0.5)，我們知道位似比爲 -2，所以

$$\frac{HG}{GO} = 2.$$ ■

Lemma 2.0.7. 令 $\triangle M_aM_bM_c$, $\triangle H_aH_bH_c$ 分別爲 $\triangle ABC$ 的中點三角形及垂足三角形，E_A, E_B, E_C 分別爲 $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$ 的中點。則 M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, E_A, E_B, E_C 共圓且圓心 N 爲 $\overline{OH}$ 中點。

Proof. 由 (2.0.4) 及 (2.0.3)，H 關於 M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, E_A, E_B, E_C 的對稱點 A^*, B^*, C^*, H_A, H_B, H_C, A, B, C 皆位於 $\odot(ABC)$ 上，所以這九點共圓且圓心 N 爲 $\overline{OH}$ 中點。 ■

Lemma 2.0.8. 設 O 關於 BC 的對稱點爲 O'_A，則 N 爲 $\overline{AO'_A}$ 中點。

Proof. 由 (2.0.5)，$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OO'_A}$，所以結合 (2.0.7) 可得 $\overline{AO'_A}$ 中點爲 $\overline{OH}$ 中點 N。 ■

Lemma 2.0.9. 設 O_A, O_B, O_C 分別爲 $\triangle BOC, \triangle COA, \triangle AOB$ 的外心，則 AO_A, BO_B, CO_C 共點於九點圓圓心 N 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 $Ko =: X_{54}$。

Lemma 2.0.10. 令 B', C' 分別爲 B, C 關於 CA, AB 的對稱點，則 $AKo \perp B'C'$。

Proof 1. 設 A^* 爲 A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點，B, C 關於外接圓的切線交於 D，則我們只須證明 XD 垂直 $B'C'$，注意到

$$\frac{B'C}{CD} = \frac{XO}{OD} = \frac{C'B}{BD}, \quad \measuredangle B'CD = \measuredangle XOD = \measuredangle C'BD.$$

故 D 是 $\triangle B'XC' \overset{+}{\sim} \triangle COB$ 的旋似中心。 ■

Proof 2. ■

Lemma 2.0.11. 九點圓圓心對 $\triangle ABC$ 的正交截線垂直 OKo。

Proof 1. 取點 U 在 BC 上使得 $AN \perp NU$。設 O 關於 BC 的對稱點爲 O'_A，A 關於 BC 的對稱點爲 A'，則 A, O, O'_A, A' 共圓且由 (2.0.8) 知道其外接圓圓心爲 U。考慮 $\odot(AOO_A), \odot(ABC)$ 異於 A 的交點 X，則對 A 反演可以知道 X 的反演點是 BC 和 $A'O$ 的交點，故 AX 過 Ko，因此 Ko 在兩圓的根軸上。可以類似地證明 Ko 對 $\odot(AOO'_A), \odot(BOO'_B), \odot(COO'_C)$ 圓冪相等，故三個圓共軸於 OKo，而三圓圓心連線即爲 N 的正交截線。 ■

Proof 2. ■

Lemma 2.0.12. 四個三角形 $\triangle ABC, \triangle BIC, \triangle CIA, \triangle AIB$ 的歐拉線交於一點 X_{21}。

Proof 1. 令 $\mathcal{E}, \mathcal{E}_A$ 分別爲 $\triangle ABC, \triangle BIC$ 的歐拉線，$X = \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_A$。
Claim. 若 R, r 分別爲 $\odot(ABC), \odot(I)$ 的半徑長，則

$$t(X) := \frac{XO}{XH} = -\frac{R}{2R+2r}.$$

Proof of Claim. 我就懶 □
由於這個值關於 A, B, C 是對稱的，我們可得四個歐拉線共於一點。 ■

Proof 2. 考慮 $\triangle ABC$ 的弧中點三角形 $\triangle N_aN_bN_c$，A 爲 $\triangle IN_bN_c$ 的外心。考慮 BC 中點 M_A 和 IM_A 中點 V，$\triangle IBC$ 的重心 G_A，則

$$N_a(V, M_A; G_A, I) = -1.$$

故 N_aG_A 過 $\triangle N_aN_bN_c$ 的 X_{54}，所以 $\triangle BIC$, $\triangle CIA$, $\triangle AIB$ 歐拉線共點在 $\triangle N_aN_bN_c$ 的 OKo 上。注意到我們有 (2.0.11)，且 N 的正交截線垂直 N 在過 A, B, C, N 的等軸雙曲線上的切線，再由等共軛變換知道 N 在 $(ABCNH)$ 上的切線就是歐拉線。因此 OKo 即爲 $\triangle N_aN_bN_c$ 的歐拉線。 ■

Lemma 2.0.13. 歐拉反射點 X_{110} 的正交截線和 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{H}_J$ 相切。

Proof. 考慮歐拉線 $\mathcal{E}$ 上無窮遠點的等角共軛點 X_{74} 和 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{H}_J$ 中心 X_{125} 以及 O 在 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{H}_J$ 上的對徑點 O'，則

$$\begin{aligned}
\measuredangle(\mathcal{O}_{\triangle ABC}(X_{110}), \mathcal{E}) &= \measuredangle(\mathcal{O}_{\triangle ABC}(X_{110}), BC) + \measuredangle(BC, \mathcal{E}) \\
&= \measuredangle AX_{110}H + \measuredangle(BC, \mathcal{E}) \qquad (0.2.8) \\
&= \measuredangle AX_{110}H + \measuredangle X_{74}X_{110}A \\
&= \measuredangle X_{74}X_{110}H = \measuredangle X_{74}OX_{125} \\
&= \measuredangle X_{74}OO' = \measuredangle OO'H.
\end{aligned}$$

故由等軸雙曲線算角知道 $\mathcal{O}_{\triangle ABC}(X_{110})$ 切 $\mathcal{H}_J$。 ■

參考資料

[1] *Li4. 圓錐曲線*

https://Lii4.github.io/Conic.pdf