幾何引理維基

$\mathcal{L}i4 + \mathcal{S}_{\otimes}+$

February 20, 2021

目錄

Chapter 0

基本性質與記號

0.1 記號

若 X, Y 爲兩點 (不在無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 上)，XY 代表過 X, Y 的直線，$\overline{XY}$ 代表連接 X, Y 的線段 (與 $\mathcal{L}_\infty$ 沒有交點的那個)。若 K, L 爲兩線，$K \cap L$ 代表 K 與 L 的交點，$\angle(K, L)$ 代表 K 與 L 的無向夾角，$\measuredangle(K, L)$ 代表 K 與 L 的有向夾角。

$\odot(XYZ)$ 爲 $\triangle XYZ$ 的外接圓，$\odot(\overline{XY})$ 是以 $\overline{XY}$ 爲直徑的圓，$\odot(X)$ 則是以 X 爲圓心的圓。給定一圓 Γ 及圓上一點 X，我們通常以 $XP \cap \Gamma$ 或 $\Gamma \cap XP$ 代表 XP 與 Γ 的異於 X 的交點 (若 XP 與 Γ 相切則還是 X)。

有時，若有三線 a, b, c，我們會以 $\triangle abc$ 代表以 a, b, c 三線圍成的三角形 $\triangle(b \cap c)(c \cap a)(a \cap b)$。

我們說 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 與 $\triangle X_2Y_2Z_2$ 正向相似，記爲 $\triangle X_1Y_1Z_1 \overset{+}{\sim} \triangle X_2Y_2Z_2$，若 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 與 $\triangle X_2Y_2Z_2$ 相似且

$$\measuredangle Y_1X_1Z_1 = \measuredangle Y_2X_2Z_2,\ \measuredangle Z_1Y_1X_1 = \measuredangle Z_2Y_2X_2,\ \measuredangle X_1Z_1Y_1 = \measuredangle X_2Z_2Y_2.$$

我們說 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 與 $\triangle X_2Y_2Z_2$ 反向相似，記爲 $\triangle X_1Y_1Z_1 \overset{-}{\sim} \triangle X_2Y_2Z_2$，若 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 與 $\triangle X_2Y_2Z_2$ 相似且

$$\measuredangle Y_1X_1Z_1 = -\measuredangle Y_2X_2Z_2,\ \measuredangle Z_1Y_1X_1 = -\measuredangle Z_2Y_2X_2,\ \measuredangle X_1Z_1Y_1 = -\measuredangle X_2Z_2Y_2.$$

給定 $\triangle ABC$ 與一點 P，我們有：P 關於 $\triangle ABC$ 的

- 西瓦三角形 $\triangle(AP \cap BC)(BP \cap CA)(CP \cap AB)$

- 反西瓦三角形，使得 P 關於其西瓦三角形爲 $\triangle ABC$ (當然我們還不知道存在性與唯一性)
- 佩多 (垂足) 三角形 $\triangle(P\infty_{\perp BC}\cap BC)(P\infty_{\perp CA}\cap CA)(P\infty_{\perp AB}\cap AB)$
- 反佩多三角形 $\triangle(A\infty_{\perp AP})(B\infty_{\perp BP})(C\infty_{\perp CP})$，使得 P 關於其佩多三角形爲 $\triangle ABC$
- 圓西瓦三角形 $\triangle(AP\cap\odot(ABC))(BP\cap\odot(ABC))(CP\cap\odot(ABC))$

其中，西瓦三角形的定義關於 A, B, C, P 四個點是對稱的，所以也被定義爲一個完全四點形的西瓦三角形。

給定 $\triangle ABC$ 與一線 ℓ，我們有：ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的

- 西瓦三角形 $\triangle(A(BC\cap\ell))(B(CA\cap\ell))(C(AB\cap\ell))$
- 反西瓦三角形，使得 ℓ 關於其西瓦三角形爲 $\triangle ABC$ (同樣地我們還不知道存在性與唯一性)

跟點的情形一樣，西瓦三角形的定義也可以延伸至完全四線形 (但一般稱作對角線三角形)。

當我們給定三角形 ABC，在不特別說明的情況下我們令

- I, G, O, H 分別爲內心、重心、外心及垂心
- I_x 爲 X-旁心
- $\triangle DEF$ 爲切點三角形，即 I 的佩多三角形
- $\triangle D_xE_xF_x$ 爲 X-切點三角形，即 I_x 的佩多三角形
- $\triangle D'E'F'=\triangle D_aE_bF_c$ 爲旁切點三角形
- $\triangle M_aM_bM_c$ 爲中點三角形
- $\triangle N_aN_bN_c$ 爲弧中點三角形

0.2 一般引理

Lemma 0.1. 若兩圓 Ω, ω 相切於 T，$\overline{AB}$ 爲 Ω 上一弦與 ω 相切於 U，則 TU 爲 $\angle ATB$ 的角平分線。

Proof. 令 A', B' 分別爲 TA, TB 與 ω 異於 T 的交點，則

$$\measuredangle BAT = \measuredangle(BT, T_T\Omega) = \measuredangle(B'T, T_T\omega) = \measuredangle B'A'T,$$

即 $AB \parallel A'B'$。所以

$$\measuredangle ATU = \measuredangle A'TU = \measuredangle A'UA = \measuredangle UA'B' = \measuredangle UTB. \qquad \blacksquare$$

Lemma 0.2 (等截共軛線). 設直線 ℓ 交 $\triangle ABC$ 三邊於 D, E, F，並設 D' 爲 D 關於 M_a 的對稱點，類似地在 CA, AB 上定義 E', F'，則 D', E', F' 三點共線且平行於 $\triangle ABC \cup \ell$ 的牛頓線。

Proof. 設 G 爲 $\triangle ABC$ 的重心，對於任意點 P，考慮以 A 爲中心比例爲 2 的位似變換合成上以 M_A 爲中心比例爲 -1 的位似變換將 P 送至 P^c，則由孟氏定理知道此變換把 P 送至 P 的反補點，即 $\overline{P^cG} = 2\overline{GP}$，故對於三頂點此變換皆相同，設 T_E, T_F 爲 BE, CF 中點，則 T_ET_F 爲 $\triangle ABC \cup \ell$ 的牛頓線，且由上面的討論容易發現 T_E, T_F 的反補點爲 E', F' 故反補變換將 $\triangle ABC \cup \ell$ 的牛頓線送至 D^c, E^c, F^c，因此三點共線且平行牛頓線。 $\blacksquare$

Lemma 0.3. 設 X, Y 爲一圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 上的兩點，X, Y 關於 $\mathcal{C}$ 的切線交於 P，則對於任意過 P 並交 $\mathcal{C}$ 於 A, B 兩點的直線，皆有

$$(X, Y; A, B)_{\mathcal{C}} = -1.$$

Chapter 1

內心

爲了方便，在內心這個章節中我們一律假設 I 是 $\triangle ABC$ 的內心且 DEF 爲切點三角形。

Lemma 1.1. 我們有

$$\measuredangle BIC = 90^\circ + \measuredangle BAI = 90^\circ + \measuredangle IAC.$$

Proof. 注意到 AI, BI, CI 分別垂直 EF, FD, DE，所以

$$\measuredangle BIC = \measuredangle FDE = \measuredangle AFE = 90^\circ + \measuredangle BAI = 90^\circ + \measuredangle IAC. \qquad \blacksquare$$

Lemma 1.2 (雞爪圓)**.** 設 N_a 爲 $\widehat{BC}$ 弧中點，則 B, I_a, C, I 共圓且圓心爲 N_a。

Proof. 注意到

$$\measuredangle BIN_a = \measuredangle BIA = \measuredangle BAI + \measuredangle IBA = \measuredangle N_aAC + \measuredangle IBA = \measuredangle N_aBI$$

故 $\overline{N_aI} = \overline{N_aB}$，同理有 $\overline{N_aI} = \overline{N_aC} = \overline{N_aI_a}$。 $\blacksquare$

Lemma 1.3. 設 $\triangle ABC$ 中 A-旁切圓切 BC 於 D'，則 $\overline{BC}$ 中點 M_a 爲 $\overline{DD'}$ 中點。

Proof 1. 令 I_a 爲 A-旁心，由 (1.2)，$\overline{II_a}$ 的中點爲 $\widehat{BC}$ 中點 N_a，故

$$\frac{DM_a}{M_aD'} = \frac{IN_a}{N_aI_a} = 1. \qquad \blacksquare$$

Proof 2. 考慮 D 在 (DEF) 上的對徑點 X 則由位似知道 A, X, D 共線，令 $U = XE \cap DF, V = XF \cap DE$，則由帕斯卡定理知道 A, U, V 共線，且注意到我們有 $UVEF$ 共圓，因此

$$\measuredangle FUV = \measuredangle FEV = \measuredangle FED \measuredangle FDB \implies UV \parallel BC$$

考慮迪沙格對合定理，則 $(AU, AV), (AB, AC), (AD, AD')$ 是射影對合變換的相互對，且由 (AU, AV) 和 BC 的交點是 ∞_{BC} 知道 $\overline{DD'}$ 中點和 $\overline{BC}$ 中點重合。 ■

Lemma 1.4. 設 $\triangle ABC$ 中 A-旁切圓切 BC 於 D'，M_a 爲 $\overline{BC}$ 中點，則 $IM_a \parallel AD'$。

Proof. 令 D^* 爲 D 關於 $\odot(I)$ 的對徑點，過 D^* 作平行於 BC 的直線分別交 AB, AC 於 XY，則 $\triangle AXY$ 與 $\triangle ABC$ 位似。因此 A, D^*, D' 共線。由 (1.3)，IM_a 爲 $\triangle DD'D^*$ 的 D-中位線，故 $IM_a \parallel D^*D' = AD'$。 ■

Lemma 1.5. 設 $\odot(AEF)$ 和 $\odot(ABC)$ 交於 A, X，則 XD 過 $\widehat{BC}$ 弧中點 N_a。

Proof 1. 注意到 X 是 $\triangle ABC \cup EF$ 的密克點，故 $\triangle XBF \overset{+}{\sim} \triangle XCE$，因此

$$\frac{XB}{XC} = \frac{FB}{EC} = \frac{DB}{DC}$$

故 $\measuredangle BXD = \measuredangle DXC$。因爲 A, X 位於 BC 同側且 D 位於 $\overline{BC}$ 內，因此 XD 爲 $\angle BXC$ 的內角平分線且 X, D, N_a 共線。 ■

Proof 2. 設 N'_a 爲 N_a 對外接圓的對徑點，注意到 X 是 $\triangle ABC \cup EF$ 的密克點，考慮 EF 和 BC 的交點 Y，則我們有 $XYFB$ 共圓，因此由算角度

$$\measuredangle YXN'_a = \measuredangle YXB + \measuredangle BXN'_a = \measuredangle YFB + \measuredangle BAN'_a = \measuredangle EFB + \measuredangle BAN'_a = 0^\circ$$

故 X, Y, N'_a 共線，因此

$$(N_a, N'_a; B, C) = -1 = (D, Y; B, C) = X(D, Y; B, C)$$

故 X, D, N_a 共線 ■

Lemma 1.6. 沿用 (1.5) 的標號，設 AI 交 EF 於 T，則 $DT \perp EF$。

Proof. 注意到 I 是 $\odot(AEF)$ 上 $\overset{\frown}{EF}$ 的弧中點，故

$$\frac{TF}{TE}=\frac{XF}{XE}=\frac{XB}{XC}=\frac{DB}{DC}$$

故 $\triangle XTD\overset{+}{\sim}\triangle XFB$，因此

$$\measuredangle XN_aA=\measuredangle XBA=\measuredangle XBF=\measuredangle XDT\implies DT\parallel N_aA\perp EF \qquad \blacksquare$$

Lemma 1.7. 令 $\triangle ABC$ 的垂心和內心分別爲 H, I，則 (H,I) 爲 $\triangle DEF$ 的垂足三角形的一對等角共軛點。

Proof. 考慮 D 對 EF 的垂足 T，我們只需要證明 $\measuredangle HTD=\measuredangle DTI$ 則其他兩邊也同理，由 (1.6)，X 是 $\triangle ABC\cup EF\cup DT$ 的密克點，故 $\triangle AEF,\triangle ABC$ 的垂心和 T 共線，注意到 AEF 垂心是 I 對 EF 的對稱點，故 $\measuredangle HTD=\measuredangle DTI$ $\blacksquare$

Lemma 1.8 (熱爾岡點)**.** 直線 AD, BE, CF 共於一點 Ge。

Proof 1. 由西瓦定理及

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{\overline{AF}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}}=1. \qquad \blacksquare$$

Proof 2. 考慮六折線 $BDCEAF$，由於其與內切圓 $\odot(I)$ 相切，由布里昂雄定理得證。 $\blacksquare$

Proof 3. 由 Sondat 定理，$\triangle DEF$ 與 $\triangle\mathfrak{p}_{\odot(I)}(D)\mathfrak{p}_{\odot(I)}(E)\mathfrak{p}_{\odot(I)}(F)$ 透視，而我們顯然有

$$\triangle\mathfrak{p}_{\odot(I)}(D)\mathfrak{p}_{\odot(I)}(E)\mathfrak{p}_{\odot(I)}(F)=\triangle ABC. \qquad \blacksquare$$

Lemma 1.9. 設 EF 與 BC 交於 X，則 $(B,C;D,X)=-1$。

Proof 1. 由孟氏定理，

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

因此

$$\frac{BD/DC}{BX/XC}=-\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=-1. \qquad \blacksquare$$

Proof 2. 由完全四線形 (CA,AB,BE,CF) 的調和分割性質。 $\blacksquare$

Lemma 1.10. 設 ID 交 EF 於 T，則 AT 平分 $\overline{BC}$。

Proof 1. 過 T 作平行於 BC 的直線交 CA, AB 於 X, Y，則 I 關於 XY, YA, AX 共線。由西姆松定理，$I \in \odot(AXY)$，由 $\triangle AXY \cup I$ 與 $\triangle ABC \cup N_a$ 位似可得 A, T, M_a 共線。 ∎

Proof 2. 過 A 作平行於 BC 的直線交 EF 於 S，則 $ST = \mathfrak{p}_{\odot(I)}(A)$。由於 $IT \perp AS$，所以 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(T) = AS$，故

$$A(B, C; T, \infty_{BC}) = (F, E; T, S) = -1,$$

即 AT 平分 BC。 ∎

Lemma 1.11. 設 J 為 C 關於 BI 的垂足，則 J 為 C-中位線與 EF 的交點。

Proof 1. 由

$$\measuredangle(M_aJ, AB) = \measuredangle M_aJB + \measuredangle JBA = \measuredangle IBC + \measuredangle CBI = 0,$$

我們知道 J 位於 C-中位線上。注意到 C, E, J, I 共圓，所以由 (1.1)，

$$\measuredangle JEC = \measuredangle BIC = 90^\circ + \measuredangle IAE = \measuredangle FEC,$$

即 $J \in EF$。 ∎

Proof 2. J 位於 C-中位線同上面的算角度證明。由於 $\triangle DEF$ 為熱爾岡點 Ge 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形且 Ge 位於費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上，因此 $EF = \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(D)$。注意到 D, J 為 $\triangle IBC$ 的垂足三角形的兩個頂點且 $I \in \mathcal{H}_{Fe}$，所以 $J \in \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(D) = EF$。 ∎

Lemma 1.12. 設 H_A 為 BIC 垂心，$ID \cap EF = S$，則 $(D, S; I, H_A) = -1$

Proof 1. 設 $BI \cap EF = J, DI \cap EF = S, BC \cap EF = X$，則 C, J, H' 共線，故

$$J(D, S; I, H_A) = (D, X; B, C) = -1. \quad ∎$$

Proof 2. 由於 $\triangle DEF$ 為熱爾岡點 Ge 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形且 Ge 位於費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上，因此 $EF = \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{Fe}}(D)$，故原命題由調和性質顯然。 ∎

Lemma 1.13. 標號沿用 (1.12)，則 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(H_A)$ 爲 A-中位線。

Proof. 注意到 $S \in EF = \mathfrak{p}_{\odot(I)}(A)$，因此 $A \in \mathfrak{p}_{\odot(I)}(S)$ 且 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(S) \perp IS \perp BC$，故 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(S)$ 過 A 且平行 BC，因此由配極保交比

$$(BC, \mathfrak{p}_{\odot(I)}(S); \mathcal{L}_\infty, \mathfrak{p}_{\odot(I)}(H_A)) = (D, S; I, H_A) = -1.$$

故 $\mathfrak{p}_{\odot(I)}(H_A)$ 爲 A-中位線。 ■

Lemma 1.14. 設 $\overline{EF}$ 中點爲 M，H_A 爲 BIC 垂心，則 Ge, M, H_A 共線。

Proof. 標號沿用 (1.12)，考慮 AD 和 EF 的交點 U，則

$$M(D, U; A, Ge) = -1 = M(D, S; I, H_A).$$

故 M, Ge, H_A 共線。 ■

Lemma 1.15. 三角形 DEF 的歐拉線是 OI。

Proof. 注意到 $\triangle DEF$ 與 $\triangle I_aI_bI_c$ 位似，$\triangle I_aI_bI_c$ 的歐拉線是 OI，且 I 在 $\triangle DEF$ 的歐拉線上，因此他們的歐拉線重合，故 $\triangle DEF$ 的歐拉線是 OI。 ■

Lemma 1.16. 設 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈雙曲線爲 $\mathcal{H}_{Fe}$，則 OI 和 $\mathcal{H}_{Fe}$ 相切。

Proof. 注意到 $\mathcal{H}_{Fe}$ 是 OI 的等角共軛軌跡，且 $I \in \mathcal{H}_{Fe}$，若 OI 和 $\mathcal{H}_{Fe}$ 有第二個交點 X，則 X 的等角共軛點也會在費爾巴哈雙曲線上但這就和它是二次曲線矛盾，因此只有一個交點。 ■

Lemma 1.17. 設 BI, CI 分別與 CA, AB 交於 Y, Z，YZ 與 $\odot(ABC)$ 交於 P, Q 兩點，則 P, $Q \in \odot(II_bI_c)$。

Lemma 1.18. 我們有 I 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線垂直 OI，類似地，有 I_x 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線垂直 OI_x。

Proof 1. ■

Proof 2. 注意到 OI 切 $(ABCIH)$，故 I 的正交截線垂直 OI，且注意到 I 對

ABC 的三線性極線，正交截線，I 對 (DEF) 的極線共點，故 I 對 ABC 的三線性極線，正交截線平行，故 I 的三線性極線垂直 OI。 ■

Lemma 1.19 (僞内切圓)**.** 設圓 ω_A 分別與 CA, AB 相切於 E_A, F_A，且與 $\odot(ABC)$ 内切，則 I, E_A, F_A 共線。

Proof 1. 令 T_A 爲 ω_A 與 $\odot(ABC)$ 的切點。由 (0.1) 可得 T_AE_A 爲 CT_AA 的角平分線，由 E_A 位於 $\overline{CA}$ 内及 T_A, N_b 位於 CA 異側可得 T_A, E_A, N_b 共線。同理有 T_A, F_A, N_c 共線。由 (1.2) 及 $\measuredangle CT_AN_b = \measuredangle CAN_b = \measuredangle N_bCE_A$，

$$N_bI^2 = N_bC^2 = N_bE_A \cdot N_bT_A,$$

所以

$$\measuredangle E_AT_AI = \measuredangle E_AIN_b = \measuredangle$$

■

Proof 2. 考慮關於 A 的反演命題，我們只要證明若 A-旁切圓分別與 CA, AB 相切於 E_a, F_a，則 A, I_a, E_a, F_a 共圓，而這顯然是對的。 ■

Proof 3. 同 *Proof 1.*，我們有 T_A, E_A, N_b 共線及 T_A, F_A, N_c 共線。考慮六折線 $ABN_bT_AN_cC$，由於其頂點皆位於 $\odot(ABC)$ 上，所以 E_A, F_A, $BN_b \cap CN_c$ 共線。 ■

Lemma 1.20. 内切圓和外接圓的外、内位似中心爲 Na, Ge 的等角共軛點。

Proof. 我們只證明外位似中心的情況，内位似中心的證明類似，標號同 (1.19)，注意到由 Monge's Theorem 我們有 AT_A 過 $(ABC), (DEF)$ 的外位似中心，且由對 A 反演知道 ANa, AT_A 爲等角線，故得證。 ■

Lemma 1.21. 給定一實數 t，考慮以 I 爲中心的位似變換將 $\triangle DEF$ 送至 $\triangle D_tE_tF_t$，則 AD_t, BE_t, CF_t 共於一點 P_t，則 P_t 在 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上。

Proof. 注意到 Na 的等角共軛點在 OI 上，故 $Na \in \mathcal{H}_{Fe}$，且由 (1.3) 知道 BNa,

CNa 分別過 E, F 在 $\odot(DEF)$ 上的對徑點，因此

$$B(E_t, Na; I, H) = t = C(F_t, Na; I, H) \implies BE_t \cap CF_t \in \mathcal{H}_{Fe}.$$

同理可證 AD_t, BE_t, CF_t 共點在 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈雙曲線上。 ■

Lemma 1.22. 標號沿用 (1.21)，P_{-2} 是 I 在費爾巴哈雙曲線上的對徑點 X_{80}。

Proof. 由 G 的 -2 倍位似知 OI 平行 HNa，又因爲 OI 是 I 在費爾巴哈雙曲線上的切線，由 (0.3) 知 $(I, X_{80}; H, Na)_{\mathcal{H}_{Fe}} = -1$。又 $I = P_0, H = P_\infty, Na = P_{-1}$，故 $X_{80} = P_{-2}$。 ■

Lemma 1.23. $(A, B; C, I)_{\mathcal{H}_{Fe}} = (D, E, F, Fe)_{\odot(I)}$。

Proof. 令 D' 爲 D 在內切圓上的對鏡點，由 (1.22) 知 AX_{80} 過 I 對 D' 的對稱點。對 I 爲似 1/2 倍得 AX_{80} 和 $D'Fe$ 平行，故和 DFe 垂直。而 Fe 在內切圓上的切線當然垂直 IFe，故

$$(A, B; C, I)_{\mathcal{H}_{Fe}} = X_{80}(A, B; C, I) = Fe(D, E; F, Fe) = (D, E, F, Fe)_{\odot(I)}.$$ ■

Lemma 1.24. 費爾巴哈點 Fe 是 $\triangle DEF$ 的歐拉反射點 X_{110}。一個三角形的歐拉反射點指的是垂直其歐拉線方向的無窮遠點的等角共軛點。

Proof. 令過 F 垂直 OI 的線和內切圓對角 DFE 的等角線和內切圓的另一個交點爲 F'。由 (1.23) 知

$$\begin{aligned}
(D, E; F, Fe)_{\odot(I)} &= (A, B; C, I)_{\mathcal{H}_{Fe}} \\
&= I(A, B; C, I) \\
&= \mathcal{L}_\infty(EF, DF; DE, \perp OI) && \text{(轉 } 90^\circ\text{)} \\
&= F(E, D; \infty_{DE}, \infty_{\perp OI}) \\
&= F(D, E; \infty_{BC}, F') && \text{(對 } \angle DFE \text{ 取等角線)} \\
&= (D, E; F, F')_{\odot(I)}.
\end{aligned}$$

因此 $Fe = F'$。 ■