圓錐曲線

Li4

March 26, 2021

目錄

前言

這份講義大部分都是自己打爽的。習題就放一些可能會出現在競賽也可能不會出現的東西，但我會想辦法讓他出現 (?

另外，如果你有發現 typo 或錯誤的地方，請寄信到 chjh21005@gmail.com 告訴我。

符號約定

若 X, Y 爲兩點 (不在無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 上)，XY 代表過 X, Y 的直線，$\overline{XY}$ 代表連接 X, Y 的線段 (與 $\mathcal{L}_\infty$ 沒有交點的那個)。若 K, L 爲兩線，$K \cap L$ 代表 K 與 L 的交點，$\angle(K, L)$ 代表 K 與 L 的無向夾角，$\measuredangle(K, L)$ 代表 K 與 L 的有向夾角。

$\odot(XYZ)$ 爲 $\triangle XYZ$ 的外接圓，$\odot(\overline{XY})$ 是以 $\overline{XY}$ 爲直徑的圓，$\odot(X)$ 則是以 X 爲圓心的圓。給定一圓 Γ 及圓上一點 X，我們通常以 $XP \cap \Gamma$ 或 $\Gamma \cap XP$ 代表 XP 與 Γ 的異於 X 的交點 (若 XP 與 Γ 相切則還是 X)。

有時，若有三線 a, b, c，我們會以 $\triangle abc$ 代表以 a, b, c 三線圍成的三角形 $\triangle(b \cap c)(c \cap a)(a \cap b)$。

在沒有特別說明的情況下，我們都是以 $\triangle ABC$ 作爲基本三角形。I, G, O, H 分別爲 $\triangle ABC$ 的內心、重心、外心和垂心。I_X ($X = A, B, C$ 或 a, b, c) 通常會是三個旁心。

我們說 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 與 $\triangle X_2Y_2Z_2$ 正向相似，記爲 $\triangle X_1Y_1Z_1 \stackrel{+}{\sim} \triangle X_2Y_2Z_2$，若 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 與 $\triangle X_2Y_2Z_2$ 相似且

$$\measuredangle Y_1X_1Z_1 = \measuredangle Y_2X_2Z_2,\ \measuredangle Z_1Y_1X_1 = \measuredangle Z_2Y_2X_2,\ \measuredangle X_1Z_1Y_1 = \measuredangle X_2Z_2Y_2.$$

我們說 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 與 $\triangle X_2Y_2Z_2$ 反向相似，記爲 $\triangle X_1Y_1Z_1 \stackrel{-}{\sim} \triangle X_2Y_2Z_2$，若 $\triangle X_1Y_1Z_1$ 與 $\triangle X_2Y_2Z_2$ 相似且

$$\measuredangle Y_1X_1Z_1 = -\measuredangle Y_2X_2Z_2,\ \measuredangle Z_1Y_1X_1 = -\measuredangle Z_2Y_2X_2,\ \measuredangle X_1Z_1Y_1 = -\measuredangle X_2Z_2Y_2.$$

給定 $\triangle ABC$ 與一點 P，我們有：P 關於 $\triangle ABC$ 的

- 西瓦三角形 $\triangle(AP \cap BC)(BP \cap CA)(CP \cap AB)$
- 反西瓦三角形，使得 P 關於其西瓦三角形爲 $\triangle ABC$ (當然我們還不知道存在性與唯一性)
- 佩多 (垂足) 三角形 $\triangle(P\infty_{\perp BC} \cap BC)(P\infty_{\perp CA} \cap CA)(P\infty_{\perp AB} \cap AB)$
- 反佩多三角形 $\triangle(A\infty_{\perp AP})(B\infty_{\perp BP})(C\infty_{\perp CP})$，使得 P 關於其佩多三角形爲 $\triangle ABC$

- 圓西瓦三角形 $\triangle(AP\cap\odot(ABC))(BP\cap\odot(ABC))(CP\cap\odot(ABC))$

其中，西瓦三角形的定義關於 A, B, C, P 四個點是對稱的，所以也被定義爲一個完全四點形的西瓦三角形。

給定 $\triangle ABC$ 與一線 ℓ，我們有：ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的

- 西瓦三角形 $\triangle(A(BC\cap\ell))(B(CA\cap\ell))(C(AB\cap\ell))$
- 反西瓦三角形，使得 ℓ 關於其西瓦三角形爲 $\triangle ABC$ (同樣地我們還不知道存在性與唯一性)

跟點的情形一樣，西瓦三角形的定義也可以延伸至完全四線形 (但一般稱作對角線三角形)。

Chapter 0

基礎圓錐曲線

0.1 定義與基本性質

先介紹高中定義圓錐曲線的方式之一：

Definition 0.1.1. 令 $\odot(O)$ 爲空間中一圓，過 O 作一條直線 ℓ 使其與過 $\odot(O)$ 的平面正交，在 ℓ 上任取一點 $V \neq O$，當動點 $M \in \odot(O)$ 移動時，我們稱 VM 所形成的曲面爲一個直圓錐面 (**Circular Conical Surface**)、$\odot(O)$ 爲其準線 (**Directrix**)、V 爲其頂點 (**Vertex**)。

Definition 0.1.2. 我們稱 $\mathcal{C}$ 爲平面 E 上的一個圓錐曲線 (**Conic**) 若存在一以 V 爲頂點的直圓錐面 $\mathcal{S}$，使得 $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap E$。

之後，在沒有提及空間的情況下，我們皆省略「在平面 E 上」。因爲圓錐曲線的解析式爲二次式的關係，所以又稱爲二次曲線 (但我其實不喜歡這樣叫它們)。

Definition 0.1.3. 令 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線，$\mathcal{L}_\infty$ 爲無窮遠線，則我們稱 $\mathcal{C}$ 爲

(i) 橢圓 (**Ellipse**)，若 $|\mathcal{C} \cap \mathcal{L}_\infty| = 0$；

(ii) 拋物線 (**Parabola**)，若 $|\mathcal{C} \cap \mathcal{L}_\infty| = 1$；

(iii) 雙曲線 (**Hyperbola**)，若 $|\mathcal{C} \cap \mathcal{L}_\infty| = 2$。

之後都以 $\mathcal{L}_\infty$ 簡寫無窮遠線，$\infty_L := L \cap \mathcal{L}_\infty$ 則爲直線 $L \neq \mathcal{L}$ 上的無窮遠點。

以下爲較常看到的圓錐曲線等價定義：

Proposition 0.1.4. 令 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線，則

(i) $\mathcal{C}$ 爲橢圓若且唯若存在兩點 F_1, F_2 及正實數 $a > \overline{F_1F_2}/2$ 使得

$$\mathcal{C} = \{P \mid \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a\}$$

(ii) $\mathcal{C}$ 爲拋物線若且唯若存在一點 F 及一線 L 使得

$$\mathcal{C} = \{P \mid \overline{FP} = \mathrm{d}(L, P)\}$$

(iii) $\mathcal{C}$ 爲雙曲線若且唯若存在兩點 F_1, F_2 及正實數 $a < \overline{F_1F_2}/2$ 使得

$$\mathcal{C} = \{P \mid |\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| = 2a\}$$

並且稱 F_1, F_2 或 F 爲 $\mathcal{C}$ 的焦點 (**Focus**)，L 爲 $\mathcal{C}$ 的準線 (**Diretrix**)。

Proof. 只證明橢圓的情形，其餘類似。由圓錐曲線定義知，存在頂點爲 V 的直圓錐面 s 及平面 E 滿足 $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap E$，令 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ 爲與 $\mathcal{S}$ 及 E 皆相切的兩球，並設 $\odot(O_1) = \mathcal{S} \cap \mathcal{B}_1, \odot(O_2) = \mathcal{S} \cap \mathcal{B}_2$，$F_1 = E \cap \mathcal{B}_1, F_2 = E \cap \mathcal{B}_2$，對於任意一點 $P \in \mathcal{S}$，設 A_1, A_2 分別爲 PV 與 $\odot(O_1), \odot(O_2)$ 的交點，易知 $\overline{A_1A_2}$ 爲定值，取 $a = \overline{A_1A_2}/2$，這時有

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \overline{A_1P} + \overline{A_2P} = \overline{A_1A_2} = 2a$$

故 $\mathcal{C} \subseteq \{P \mid \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a\}$。
若 $P \in \{P \mid \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a\} \setminus \mathcal{C}$，令射線 F_1P 與 $\mathcal{S}$ 交於 $P' \in \mathcal{C}$，則

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a = \overline{F_1P'} + \overline{F_2P'} \implies \overline{F_2P} = \overline{F_2P'} \pm \overline{PP'}$$

即 $F_2 \in PP'$ 且 P, P' 位於 F_2 同向，矛盾。所以 $\mathcal{C} = \{P \mid \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a\}$。 ■

在講下個性質前我們先承認一些事情——所有圓錐曲線都是光滑的，並規定一些記號：

(i) $T\mathcal{C}$ 爲 $\mathcal{C}$ 的所有切線所形成的集合

(ii) $T_P\mathcal{C}$ 爲 P 關於 $\mathcal{C}$ 的切線，其中 $P \in \mathcal{C}$

(iii) $T_\ell\mathcal{C}$ 爲 ℓ 關於 $\mathcal{C}$ 的切點，其中 $\ell\in T\mathcal{C}$

所以我們顯然有 $T\mathcal{C}=\{T_P\mathcal{C}\mid P\in\mathcal{C}\},\ \mathcal{C}=\{T_\ell\mathcal{C}\mid \ell\in T\mathcal{C}\}$。

Proposition 0.1.5. 令 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線，一直線 ℓ 與 $\mathcal{C}$ 只有一個交點若且唯若 $\ell\in T\mathcal{C}$。

Proof. 設 $\mathcal{C}$ 位於平面 E 上且以 $\odot(O)$ 爲準線的直圓錐面 $\mathcal{S}$ 滿足 $\mathcal{C}=\mathcal{S}\cap E$。令 E_1 爲過 $\mathcal{S}$ 的頂點及 ℓ 的平面，E_2 爲 $\odot(O)$ 所在的平面，則

$$1=|\ell\cap\mathcal{C}|=|E\cap E_1\cap\mathcal{S}|\iff 1=|(E_1\cap E_2)\cap\odot(O)|=|E_1\cap E_2\cap\mathcal{S}|$$

因此只需考慮當 $\mathcal{C}$ 爲圓的情況，交給讀者自行驗證。 ■

現在我們可以證明圓錐曲線的光學性質：

Proposition 0.1.6. 令非拋物線的圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 的焦點爲 F_1,F_2，則對於 $\mathcal{C}$ 上任意一點 P，$T_p\mathcal{C}$ 爲 $\angle F_1PF_2$ 的分角線。

Proof. 只證明橢圓的情形，雙曲線則類似。令 T'_P 爲 $\angle F_1PF_2$ 的外角平分線，F'_2 爲 F_2 關於 T'_P 的對稱點，則 F_1,P,F'_2 共線，所以對於任意一點 $Q\in T'_P\setminus\{P\}$

$$\overline{F_1Q}+\overline{F_2Q}=\overline{F_1Q}+\overline{F'_2Q}>\overline{F_1F'_2}=\overline{F_1P}+\overline{F'_2P}=\overline{F_1P}+\overline{F_2P}$$

故 $Q\notin\mathcal{C}$，因此 $T'_P=T_P\mathcal{C}$。 ■

Proposition 0.1.7. 令拋物線 $\mathcal{P}$ 的焦點爲 F，準線爲 L，對於 $\mathcal{P}$ 上任意一點 P，P 關於 L 的垂足爲 K，則 $T_p\mathcal{P}$ 爲 $\angle FPK$ 的內角平分線且爲 $\overline{FK}$ 的中垂線。

Proof. 令 T'_P 爲 $\angle FPK$ 的內角平分線，由 $\overline{FP}=\overline{KP}$ 知 T'_P 爲 $\overline{FK}$ 的中垂線，所以對於任意一點 $Q\in T'_P\setminus\{P\}$，令 K_Q 爲 Q 關於 L 的垂足，我們有

$$\overline{K_QQ}<\overline{KQ}=\overline{FQ}\implies Q\notin\mathcal{P}$$

即 $T'_P=T_p\mathcal{P}$。 ■

Remark. 透過上面這個性質，我們可以將拋物線的另一個焦點視爲垂直於準線方向上的無窮遠點，這樣依舊可以保持光學性質的命題成立。

Definition 0.1.8. 對於任意圓錐曲線 $\mathcal{C}$，令其焦點爲 F_1, F_2，則我們稱 $\overline{F_1F_2}$ 中點 O 爲 $\mathcal{C}$ 的中心。

Proposition 0.1.9. 對於非拋物線的圓錐曲線 $\mathcal{C}$，令 O 爲其中心，則 $\mathcal{C}$ 關於 O 點對稱。

Proof. 由焦點的定義。 ■

習題

Problem 1. 試證明曲線 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線若且唯若 $\mathcal{C}$ 爲一圓或存在一點 F、一線 L 及一實數 $e > 0$ 使得

$$\mathcal{C} = \{P \mid \overline{FP} = e \cdot \mathrm{d}(L, P)\}$$

其中，

(i) 當 $e < 1$ 時，$\mathcal{C}$ 爲橢圓

(ii) 當 $e = 1$ 時，$\mathcal{C}$ 爲拋物線

(iii) 當 $e > 1$ 時，$\mathcal{C}$ 爲雙曲線

我們也可以定義圓爲 $L = \mathcal{L}_\infty, e = 0$ 時的情況，這時候必須假設 $e \cdot \mathrm{d}(L, P)$ 爲常數，則 $\mathcal{C}$ 以 F 爲圓心。

Problem 2. 令 $\mathcal{C}$ 爲一個橢圓，並且 F 爲其中一個焦點。設 Γ 是以 $\mathcal{C}$ 的長軸爲直徑的圓，若 $L \in T\mathcal{C}$，證明：F 關於 L 的垂足位於 Γ 上。

Problem 3. 令 F_1, F_2 爲圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 的兩個焦點，設 $\ell_1, \ell_2 \in T\mathcal{C}$，$A$ 爲 ℓ_1 與 ℓ_2 的交點。證明：$\measuredangle(\ell_1, AF_1) + \measuredangle(\ell_2, AF_2) = 0$。

0.2 交比

交比可以說是研究圓錐曲線的出發點，至於爲什麼我們馬上就會看到了。

Definition 0.2.1. 對於共線四點 $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$

$$(P_i) := (P_1, P_2; P_3, P_4) := \frac{P_1P_3/P_3P_2}{P_1P_4/P_4P_2},$$

稱爲點列 (P_1, P_2, P_3, P_4) 的交比 (**Cross Ratio**)。

這邊定義事實上有點問題，因爲我們並沒有排除 $P_i \in \mathcal{L}_\infty$ 上的情形，不過對於任意兩點 $A, B \notin \mathcal{L}_\infty$，我們可以定義

$$\frac{A\infty_{AB}}{\infty_{AB}B} = -1$$

在這樣的定義下，我們就只剩 $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ 都在無窮遠線上的情形了，我們晚點再回來定義它。先看看這個交比最重要的基礎定理：

Theorem 0.2.2. 給定共點四線 $\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3,\ \ell_4$，若非無窮遠線的直線 $L \not\ni \bigcap \ell_i$ 分別交 ℓ_i 於 P_i，則 (P_i) 爲定值 (與 L 的選取無關)。當 $\bigcap \ell_i \notin \mathcal{L}_\infty$ 時，

$$(P_i) = \frac{\sin\measuredangle(\ell_1, \ell_3)/\sin\measuredangle(\ell_3, \ell_2)}{\sin\measuredangle(\ell_1, \ell_4)/\sin\measuredangle(\ell_4, \ell_2)}$$

(注意到線的方向選取並不會影響其值)

Proof. 令 $L' \not\ni \bigcap \ell_i$ 爲另外一線且分別交 ℓ_i 於 P_i'，若 $\bigcap \ell_i \in \mathcal{L}_\infty$，則顯然有

$$\frac{P_1P_3}{P_3P_2} = \frac{P_1'P_3'}{P_3'P_2'},\ \frac{P_1P_4}{P_4P_2} = \frac{P_1'P_4'}{P_4'P_2'} \implies (P_i) = (P_i')$$

若 $A := \bigcap \ell_i \notin \mathcal{L}_\infty$，並且不失一般性假設 $P_1,\ P_2,\ P_3 \notin \mathcal{L}_\infty$，則由面積公式知

$$\frac{\sin\measuredangle P_1AP_3}{\sin\measuredangle P_3AP_2} = \frac{P_1P_3/P_3P_2}{\overline{AP_1}/\overline{AP_2}}, \quad \frac{\sin\measuredangle P_1AP_4}{\sin\measuredangle P_4AP_2} = \frac{P_1P_4/P_4P_2}{\overline{AP_1}/\overline{AP_2}},$$

(注意到若 $P_4 \in \mathcal{L}_\infty$ 上式仍然成立)。所以結合兩式就有

$$(P_i) = \frac{\sin\measuredangle P_1AP_3/\sin\measuredangle P_3AP_2}{\sin\measuredangle P_1AP_4/\sin\measuredangle P_4AP_2}.$$

同理有

$$(P_i') = \frac{\sin\measuredangle P_1AP_3/\sin\measuredangle P_3AP_2}{\sin\measuredangle P_1AP_4/\sin\measuredangle P_4AP_2} = (P_i),$$

故 (P_i) 的值與 L 的選取無關。 ■

所以我們就可以定義線束的交比：

Definition 0.2.3. 對於共點四線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$，

$$(\ell_i) := (L \cap \ell_i)$$

，其中 $L \not\ni \bigcap \ell_i$ 爲非無窮遠線的直線，稱爲線束 $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ 的交比。

還有所有點都位於無窮遠線上的點交比：

Definition 0.2.4. 對於共線四點 $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{L}_\infty$，

$$(P_i) := \frac{\sin\measuredangle P_1AP_3 / \sin\measuredangle P_3AP_2}{\sin\measuredangle P_1AP_4 / \sin\measuredangle P_4AP_2}$$

，其中 $A \notin \mathcal{L}_\infty$。

由這個定義，(0.2.2) 仍然成立於 $L = \mathcal{L}_\infty$ 時。而交比本身在這樣的定義下我們顯然有任何旋似變換或位似變換 φ 保交比，即 $(\varphi(P_i)) = (P_i)$。在完整的定義完交比後，可以得到你不可不知的交比小性質：

Proposition 0.2.5. 對於共線四點 P_1, P_2, P_3, P_4，若 $(P_i) = \lambda$，則

(i) $(P_2, P_1; P_3, P_4) = (P_1, P_2; P_4, P_3) = \lambda^{-1}$

(ii) $(P_1, P_3; P_2, P_4) = 1 - \lambda$。 ■

當然，把點改成線這一樣是對的。那事實上由這個性質就可以把所有 $(P_{\sigma(i)})$ 都用 (P_i) 來表示了，其中 $\sigma \in S_4$。

Example 0.2.6. 我們說四點 P_1, P_2, P_3, P_4 調和若 $(P_i) = -1$，四線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ 調和若 $(\ell_i) = -1$。由上面的性質，$1, 3$ 交換，$2, 4$ 交換，或 $\{1, 3\}, \{2, 4\}$ 也都是調和的，因此調和的四點或四線可以分成兩組。所以我們有時會說 $\{P_1, P_3\}$ 調和分割 $\{P_2, P_4\}$，那這等價於 $\{P_2, P_4\}$ 調和分割 $\{P_1, P_3\}$。線的情況則同理。

再來這個是交比界中最重要的性質，沒有它你什麼都做不到 (?

Proposition 0.2.7.

(i) 對於共線五點 P_1, P_2, P_3, P_4, P_j，$P_j = P_k$ 若且唯若 $(P_i) = (P_{i'})$,

(ii) 對於共點五線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_j$，$\ell_j = \ell_k$ 若且唯若 $(\ell_i) = (\ell_{i'})$,

其中

$$i' = i + \delta_{ik}(j-i) = \begin{cases} i, & \text{if } i \neq k \\ j, & \text{if } i = k. \end{cases}$$ ■

注意到 (ii) 可以由 (i) 推得，而 (i) 的證明就是將線段長炸開，詳細證明就留給讀者。我們現在定義一些方便的記號：

Definition 0.2.8.

(i) 對於任意五點 P_1, P_2, P_3, P_4, A，

$$A(P_i) := A(P_1, P_2; P_3, P_4) := (AP_1, AP_2; AP_3, AP_4).$$

(ii) 對於任意五線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, L$，

$$L(\ell_i) := L(\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4) := (L \cap \ell_1, L \cap \ell_2; L \cap \ell_3, L \cap \ell_4).$$

如此一來，我們可以用這些記號簡化下面這些證明共線的好方法。

Proposition 0.2.9. 對於共線三點 $P_1, P_2, P_3 \in \ell$ 及 ℓ 外兩點 A, B，若點 P_4 滿足 $P_4 \notin AB$，則 $A(P_i) = B(P_i)$ 若且唯若 $P_4 \in \ell$。

Proof. 證回來不難，留給讀者。令 $P_i' = P_i,\ i = 1, 2, 3$，$P_4' = AP_4 \cap \ell$，則

$$B(P_i') = (P_i') = A(P_i') = A(P_i) = B(P_i),$$

因此 $P_4' \in BP_4$，所以 $P_4' = AP_4 \cap BP_4 = P_4$，即 $P_4 \in \ell$。 ■

Proposition 0.2.10. 對於三點 P_1, P_2, P_3 及兩點 $A, B \notin \bigcup P_iP_j$，

$$A(P_1, P_2; P_3, B) = B(P_1, P_2; P_3, A)$$

若且唯若 P_1, P_2, P_3 共線。

Proof. 證回來一樣不難，留給讀者。令 $P_4 = AB \cap P_2P_3$，則 P_2, P_3, P_4 共線且

$$A(P_1, P_2; P_3, P_4) = A(P_1, P_2; P_3, B) = B(P_1, P_2; P_3, A) = B(P_1, P_2; P_3, P_4),$$

因此 $P_1 \in P_2P_3$。 ■

有了共線之後當然也會有共點的：

Proposition 0.2.11. 對於共點三線 $\ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3 = P$ 及點外兩線 K, L，若線 ℓ_4 滿足 $K \cap L \notin \ell_4$，則 $K(\ell_i) = L(\ell_i)$ 若且唯若 $P \in \ell_4$。

Proposition 0.2.12. 對於三線 $\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3$ 及兩線 $K, L \cap \left(\bigcup \ell_i \cap \ell_j\right) = \varnothing$，

$$K(\ell_1, \ell_2; \ell_3, L) = L(\ell_1, \ell_2; \ell_3, K)$$

若且唯若 $\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3$ 共點。

上面的證明都跟共線的證明類似。這樣就可以證明一個常見的定理：

Theorem 0.2.13 (迪沙格定理/Desargues'). 對於兩個三角形 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$，$B_1C_1 \cap B_2C_2,\ C_1A_1 \cap C_2A_2,\ A_1B_1 \cap A_2B_2$ 共線若且唯若 $A_1A_2,\ B_1B_2,\ C_1C_2$ 共點。

Proof. 令 $X = B_1B_2 \cap C_1C_2,\ P_{BC} = B_1C_1 \cap B_2C_2,\ P_{CA} = C_1A_1 \cap C_2A_2,\ P_{AB} = A_1B_1 \cap A_2B_2$，$A_1A_2$ 分別交 B_iC_i 於 Z_i。注意到 $X \in A_1A_2$ 等價於 $X \in Z_1Z_2$，即

$$(P_{BC}, C_1; B_1, Z_1) \stackrel{X}{=} (P_{BC}, C_2; B_2, Z_2)$$

而 P_{BC}, P_{CA}, P_{AB} 共線則由 (0.2.10) 等價於 (注意到 $A_i \notin \bigcup P_{CA}P_{AB}$)

$$A_1(P_{BC}, P_{CA}; P_{AB}, A_2) = A_2(P_{BC}, P_{CA}; P_{AB}, A_3).$$

因此由

$$A_i(P_{BC}, P_{CA}; P_{AB}, A_{3-i}) = (P_{BC}, C_i; B_i, Z_i),$$

知兩者等價。 ■

接下來我們想要在圓上定義交比，所以我們先觀察到如下的事實：

Proposition 0.2.14. 給定共圓四點 $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4 \in \odot(O)$，若 A 爲 $\odot(O)$ 上異於 P_i 的點，則 $A(P_i)$ 爲定值 (與 A 的選取無關)。

Proof. 令 A' 爲 $\odot(O)$ 上異於 P_i 的點，由圓周角性質知 $\measuredangle P_iAP_j = \measuredangle P_iA'P_j$。因此由 (0.2.2) 知 $A(P_i) = A'(P_i)$，故 $A(P_i)$ 爲定值。 ■

Remark. 在上述性質中，若對於某個 i，$A = P_i$，則我們將 $A(P_i) = (AP_i)$ 中的 AA 視爲 $T_A\odot(O)$，那麼此時命題依舊成立，而這個記號將一直沿用至圓錐曲線的情形。

所以就可以直接定義交比了：

Definition 0.2.15. 對於共圓四點 $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \odot(O)$，

$$(P_i) := (P_1, P_2; P_3, P_4) := A(P_i)$$

其中 $A \in \odot(O)$。

Remark. 如果把平面擴張成 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 而不是 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 的話，那這時候圓及直線上的交比就會跟「直線」$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 的交比定義一樣了，而且四個點的交比是實數若且唯若它們共圓或共直線。

以下這個定理說明了配極變換爲保交比變換，是一個經常使用的技巧。

Theorem 0.2.16. 給定任意一圓 $\odot(O)$，令共點四線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ 分別爲共線四點 P_1, P_2, P_3, P_4 關於 $\odot(O)$ 的極線，則 $(P_i) = (\ell_i)$。

Proof. 若 $O \notin \overline{P_1P_2P_3P_4}$，由配極性質知 $OP_i \perp \ell_i$，因此

$$\measuredangle P_iOP_j = \measuredangle(OP_i, OP_j) = \measuredangle(\ell_i, \ell_j),$$

所以由角度關係知

$$(P_i) = O(P_i) = (\ell_i).$$

若 $O \in \overline{P_1P_2P_3P_4}$，作不過 O 的一線 L，並令 P_i' 爲 P_i 關於 L 的垂足，ℓ_i' 爲 P_i' 關於 $\odot(O)$ 的極線。設 $Q_i = \ell_i \cap \ell_i'$，則 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 共線。所以有

$$(P_i) = (P_i') = (\ell_i') = (Q_i) = (\ell_i). \qquad \blacksquare$$

這定理有個重要的推論——反演變換保交比 (直線上)，這可以說是交比界中第二重要的性質。

Corollary 0.2.17. 給定四線 $\ell_1, \ell_2,, \ell_3, \ell_4 \in T\odot(O)$，若 $L \in T\odot(O)$ 爲異於 ℓ_i 的直線，則 $L(\ell_i)$ 爲定值 (與 L 的選取無關)。

Proof. 若 $L' \in T\odot(O)$ 爲異於 ℓ_i 的直線，則由 (0.2.16) 知

$$L(\ell_i) = T_L\odot(O)(T_{\ell_i}\odot(O)) = T_{L'}\odot(O)(T_{\ell_i}\odot(O)) = L'(\ell_i),$$

故 $L(\ell_i)$ 爲定值。 ■

於是也可以定義切線的交比：

Definition 0.2.18. 對於四線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \in T\odot(O)$，

$$(\ell_i) := (\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4) := L(\ell_i),$$

其中 L 爲切 $\odot(O)$ 的直線。

Remark. 跟點的情況一樣，若對於某個 i，$L = \ell_i$，則我們將 $L(\ell_i) = (L \cap \ell_i)$ 中的 $L \cap L$ 視爲 $T_L\odot(O)$，那麼此時命題依舊成立，而這個記號也將一直沿用至圓錐曲線的情形。

習題

Problem 1. 證明一個完全四線形的其中一個對角線段與另外兩個對角線段的交點調和分割這個對角線段的端點。

Problem 2. 給定線上四點 P_1, P_2, P_3, P_4 及線外一點 A，證明以下兩個命題皆可推得剩餘兩個：

(1) P_1, P_2, P_3, P_4 調和

(2) $\measuredangle P_1AP_2 = 90^\circ$

(3) AP_1 平分 $\angle P_3AP_4$

(4) AP_2 平分 $\angle P_3AP_4$

Problem 3. 令 $\triangle ABC$ 的內切圓 ω 分別切 CA, AB 於 E, F，$P = BC \cap EF$，平行於 BC 且與 ω 相切的直線分別交 CA, AB 於 Y, Z，證明 P 關於 ω 異於 BC 的另一條切線平分 $\overline{YZ}$。

Problem 4. 令 P 爲 $\triangle ABC$ 內任意一點，BP, CP 分別交 CA, AB 於 E, F，EF 交 $\odot(ABC)$ 於 B', C'，$B'P$, $C'P$ 分別交 BC 於 C'', B''，證明 $B'B''$, $C'C''$, $\odot(ABC)$ 共點。

Problem 5. 設 $\triangle DEF$ 爲 $\triangle ABC$ 的內切三角形，X, Y, Z 位於 $\triangle ABC$ 的內切圓 $\odot(DEF)$ 上。證明：AX, BY, CZ 共點若且唯若 DX, EY, FZ 共點或 $DX \cap EF$, $EY \cap FD$, $FZ \cap DE$ 共線。

Problem 6. 令 P_1, P_2, P_3, P_4 爲共線四點，Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 爲另一組共線四點且兩線相異，設 $R_i = P_iQ_{i+1} \cap P_{i+1}Q_i$。證明：$R_1$, R_2, R_3 共線若且唯若 $(P_i) = (Q_i)$。

Problem 7. 給定直線 ℓ 上五點 P_1, P_2, P_3, P_4, P_4'。證明：可以只用直尺在 ℓ 上找到兩點 Q, R 滿足

$$(P_1, P_2; P_3, Q) = (P_1, P_2; P_3, P_4) \cdot (P_1, P_2; P_3, P_4'), \text{ 及}$$
$$(P_1, P_2; P_3, R) = (P_1, P_2; P_3, P_4) + (P_1, P_2; P_3, P_4').$$

0.3 圓錐曲線上的交比

Definition 0.3.1. E_1, E_2 爲空間 $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ 中兩平面，M 爲 $E_1 \cup E_2$ 外一點，令 $\varphi : E_1 \to E_2$ 定義爲

$$\varphi(Q) = MQ \cap E_2 \quad \forall Q \in E_1,$$

則我們稱 φ 爲將 E_1 映射至 E_2 的透視變換 (**Perspective Transformation**)，M 爲其中心。

Proposition 0.3.2. E_1, E_2 爲兩平面，$\varphi : E_1 \to E_2$ 爲一透視變換，則對於 E_1 上任一直線 ℓ，$\varphi(\ell)$ 爲一直線。

Proof. 令 M 爲 φ 的中心，並設 G 爲過 M 與 ℓ 的平面，則

$$\varphi(\ell) = \{\varphi(Q) \mid Q \in \ell\} = \{PQ \cap E_2 \mid Q \in \ell\} = \{PQ \mid Q \in \ell\} \cap E_2 = G \cap E_2,$$

又兩平面的交集爲直線，故 $\varphi(\ell)$ 爲一直線。 ■

Theorem 0.3.3. E_1, E_2 爲兩平面，$\varphi : E_1 \to E_2$ 爲一透視變換，則對於 E_1 上共線四點 P_1, P_2, P_3, P_4，$(P_i) = (\varphi(P_i))$。

Proof. 令 M 爲 φ 的中心，則 $M, \ell, \varphi(\ell)$ 共平面，所以有

$$(P_i) = M(P_i) = M(\varphi(P_i)) = (\varphi(P_i)). \qquad \blacksquare$$

Theorem 0.3.4. E_1, E_2 爲兩平面，$\varphi : E_1 \to E_2$ 爲一透視變換，則對於 E_1 上共點四線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$，$(\ell_i) = (\varphi(\ell_i))$。

Proof. 令 M 爲 φ 的中心，過 M 作任意一不過 $\bigcap \ell_i$ 的平面 E_3，設 $R_i = \ell_i \cap E_3$，則

$$(\ell_i) = (R_i) = (\varphi(R_i)) = (\varphi(\ell_i)). \qquad \blacksquare$$

Proposition 0.3.5. 令 E 爲一平面，對於任意圓錐曲線 $\mathcal{C} \subset E$，存在一平面 E_1、一圓 $\odot(O) \subset E_1$ 及一透視變換 $\varphi : E \to E_1$ 使 $\varphi(\mathcal{C}) = \odot(O)$。 $\blacksquare$

爲了得到下面這個定理，我們得再承認一件事情——五個點決定一個圓錐曲線、五條線決定了一個相切圓錐曲線。另外，在不與其他符號混淆的情況下，有時會用 $(P_1P_2P_3P_4P_5)$ 代表過 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 的圓錐曲線，$(\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4\ell_5)$ 代表切 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5$ 的圓錐曲線。

Theorem 0.3.6 (圓錐曲線基本定理/Fundamental Theorem on Conic Sections)**.** 令 $P_1, P_2, P_3, P_4, A, A'$ 爲平面上六點且任三點不共線，則 $P_1, P_2, P_3, P_4, A, A'$ 共一圓錐曲線若且唯若 $A(P_i) = A'(P_i)$。

Proof. 令 $\mathcal{C} = (P_1P_2P_3AA')$ 且 E 爲 $\mathcal{C}$ 所在平面，則存在一平面 E_1、一圓 $\odot(O)$ 在 E_1 上及一透視變換 $\varphi : E \to E_1$ 使 $\varphi(\mathcal{C}) = \odot(O)$。

$(\Rightarrow)$ 由 $\varphi(P_4) \in \odot(O)$ 知

$$A(P_i) = \varphi(A)(\varphi(P_i)) = \varphi(A')(\varphi(P_i)) = A'(P_i).$$

$(\Leftarrow)$ 令 $P_i' = P_i,\ i = 1, 2, 3$，$P_4' = AP_4 \cap \mathcal{C} \setminus \{A\}$，則由 $(\Rightarrow)$ 知

$$A'(P_i') = A(P_i) = A'(P_i),$$

即 $P_4' = A'P_4 \cap AP_4 = P_4$，故 P_1, P_2, P_3, P_4, A, A' 共圓錐曲線。 ■

那這個定理當然也有其對偶命題：

Theorem 0.3.7. 令 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4, L, L' 爲平面上六線且任三線不共點，則 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4, L, L' 共切圓錐曲線若且唯若 $L(\ell_i) = L'(\ell_i)$。 ■

證明與點的版本類似。於是我們就可以好好的在圓錐曲線上 (或切線) 定義交比了。

Definition 0.3.8. 令 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線，對於四點 P_1, P_2, P_3, $P_4 \in \mathcal{C}$，

$$(P_i)_{\mathcal{C}} := (P_1, P_2; P_3, P_4)_{\mathcal{C}} := A(P_i),$$

其中 $A \in \mathcal{C}$，稱爲 (P_1, P_2, P_3, P_4) 在 $\mathcal{C}$ 上的交比。

Definition 0.3.9. 令 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線，對於四線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, $\ell_4 \in T\mathcal{C}$，

$$(\ell_i)_{\mathcal{C}} := (\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4)_{T\mathcal{C}} := L(\ell_i),$$

其中 $L \in T\mathcal{C}$，稱爲 $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ 在切 $\mathcal{C}$ 的交比。

那麼我們同時也可以把調和這個概念延伸到圓錐曲線上：

Definition 0.3.10. 給定任意圓錐曲線 $\mathcal{C}$，四點 P_1, P_2, P_3, $P_4 \in \mathcal{C}$，則我們稱四邊形 $P_1P_3P_2P_4$ 爲 $\mathcal{C}$ 上的調和四邊形若 $(P_i)_{\mathcal{C}} = -1$。

Proposition 0.3.11. 給定任意圓錐曲線 $\mathcal{C}$，四點 P_1, P_2, P_3, $P_4 \in \mathcal{C}$，令 P_1, P_2 分別關於 $\mathcal{C}$ 的切線交於 A，則 $P_1P_3P_2P_4$ 爲 $\mathcal{C}$ 上的調和四邊形若且唯若 A 在 P_3P_4 上。

Proof. 由

$$(P_i)_{\mathcal{C}} = -1 \iff P_1(P_1, P_2; P_3, P_4) = P_2(P_2, P_1; P_3, P_4),$$

及 (0.2.10) 可得 $P_1P_2P_3P_4$ 爲 $\mathcal{C}$ 上的調和四邊形若且唯若 $A \in P_3P_4$。 ■

0.4 一些定理

在有了圓錐曲線與交比的一些基礎下，就可以拿來證一些常見定理了。

Theorem 0.4.1 (帕斯卡定理/Pascal's). 令 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ 爲任三點不共線的六點，則 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ 共一圓錐曲線若且唯若

$$P_1P_2 \cap P_4P_5,\ P_2P_3 \cap P_5P_6,\ P_3P_4 \cap P_6P_1$$

共線。

Proof. 令 $Q_1 = P_1P_2 \cap P_4P_5, Q_2 = P_2P_3 \cap P_5P_6, Q_3 = P_3P_4 \cap P_6P_1$，則

$$P_1(P_2, P_3; P_4, P_6) = Q_1(P_1, P_3; P_4, Q_3),$$
$$P_5(P_2, P_3; P_4, P_6) = Q_1(P_1, P_3; P_4, Q_2),$$

因此 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ 共一圓錐曲線若且唯若

$$\begin{aligned} & P_1(P_2, P_3; P_4, P_6) = P_5(P_2, P_3; P_4, P_6) \\ \iff\ & Q_1(P_1, P_3; P_4, Q_3) = Q_1(P_1, P_3; P_4, Q_2) \end{aligned}$$

即 Q_1, Q_2, Q_3 共線。 ■

其對偶命題爲：

Theorem 0.4.2 (布里昂雄定理/Brianchon's). 令 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6$ 爲任三線不共點的六線，則 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6$ 切一圓錐曲線若且唯若

$$(\ell_1 \cap \ell_2)(\ell_4 \cap \ell_5),\ (\ell_2 \cap \ell_3)(\ell_5 \cap \ell_6),\ (\ell_3 \cap \ell_4)(\ell_6 \cap \ell_1)$$

共點。 ■

證明與帕斯卡定裡類似。

Remark. 上面這兩個定理其實是可以允許兩點 (線) 重合的，只是兩點連線 (線交點) 就會變成切線 (點)，而反過來就是與該線相切 (切於該點)。

Theorem 0.4.3 (卡諾圓錐曲線定理/Carnot's)**.** 給定任意 $\triangle ABC$，點對們 (D_1, D_2), (E_1, E_2), (F_1, F_2) 分別位於 BC, CA, AB 上，則 D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2 共一圓錐曲線若且唯若 AD_1, AD_2, BE_1, BE_2, CF_1, CF_2 切一圓錐曲線若且唯若

$$\frac{BD_1}{D_1C} \cdot \frac{BD_2}{D_2C} \cdot \frac{CE_1}{E_1A} \cdot \frac{CE_2}{E_2A} \cdot \frac{AF_1}{F_1B} \cdot \frac{AF_2}{F_2B} = 1.$$

Proof. 只證 D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2 共一圓錐曲線若且唯若

$$\frac{BD_1}{D_1C} \cdot \frac{BD_2}{D_2C} \cdot \frac{CE_1}{E_1A} \cdot \frac{CE_2}{E_2A} \cdot \frac{AF_1}{F_1B} \cdot \frac{AF_2}{F_2B} = 1,$$

另一個等價證明類似。令 E_2F_1, F_2D_1, D_2E_1 分別交 BC, CA, AB 於 X, Y, Z，則由孟氏定理可得

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CE_2}{E_2A} \cdot \frac{AF_1}{F_1B} = \frac{BD_1}{D_1C} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AF_2}{F_2B} = \frac{BD_2}{D_2C} \cdot \frac{CE_1}{E_1A} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -1.$$

由帕斯卡定理，D_1, D_2, E_1,, E_2, F_1, F_2 共一圓錐曲線若且唯若 X, Y, Z 共線若且唯若

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -1 \iff \frac{BD_1}{D_1C} \cdot \frac{BD_2}{D_2C} \cdot \frac{CE_1}{E_1A} \cdot \frac{CE_2}{E_2A} \cdot \frac{AF_1}{F_1B} \cdot \frac{AF_2}{F_2B} = 1. \qquad \blacksquare$$

Definition 0.4.4. 給定 $\triangle ABC$，對於任意圓錐曲線 $\mathcal{C}$

(i) 我們說 $\mathcal{C}$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線若 $A, B, C \in \mathcal{C}$，

(ii) 我們說 $\mathcal{C}$ 是 $\triangle ABC$ 的內切圓錐曲線若 $BC, CA, AB \in T\mathcal{C}$。

類似於外接圓，我們有

Definition 0.4.5.

(i) 給定 $\triangle ABC$ 與一外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$，對於任意一點 P，我們定義 P 關於 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{C}$-西瓦三角形爲 $\triangle(AP \cap \mathcal{C})(BP \cap \mathcal{C})(CP \cap \mathcal{C})$。

(ii) 給定 $\triangle ABC$ 與一內切圓錐曲線 $\mathcal{C}$，對於任意一線 ℓ，我們定義 ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{C}$-西瓦三角形爲 $\triangle((BC \cap \ell)\mathcal{C})((CA \cap \ell)\mathcal{C})((AB \cap \ell)\mathcal{C})$。

下面這個定理算是 $n = 3$ 的情況，只是目前來講算是它最好用。

Theorem 0.4.6 (龐色列閉合/Poncelet's Closure Theorem)**.** 設 $\triangle A_1B_1C_1$ 及 $\triangle A_2B_2C_2$ 爲平面上兩個三角形，則 $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ 共一外接圓錐曲線若且唯若 $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$ 共切一內切圓錐曲線。

Proof. 注意到

$$\begin{aligned}A_1(B_1, C_1; B_2, C_2) &= (B_2C_2)(A_1B_1, C_1A_1; A_2B_2, C_2A_2),\\ A_2(B_2, C_2; B_1, C_1) &= (B_1C_1)(A_2B_2, C_2A_2; A_1B_1, C_1A_1),\end{aligned}$$

因此 $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$ 共一外接圓錐曲線若且唯若

$$\begin{aligned}&A_1(B_1, C_1; B_2, C_2) = A_2(B_2, C_2; B_1, C_1)\\ \iff &(B_2C_2)(A_1B_1, C_1A_1; A_2B_2, C_2A_2) = (B_1C_1)(A_1B_1, C_1A_1; A_2B_2, C_2A_2)\end{aligned}$$

若且唯若 $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$ 共切一內切圓錐曲線。 ■

讓我們回憶一下：一個完全四點形 $\mathcal{Q} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ 的西瓦三角形是由

$$P_2P_3 \cap P_1P_4, P_3P_1 \cap P_2P_4, P_1P_2 \cap P_3P_4$$

爲頂點所作出的三角形，這同時也是 P_4 關於 $\triangle P_1P_2P_3$ 的西瓦三角形的定義。類似地，一個完全四線形 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ 的西瓦三角形是由

$$P_2P_3 \cap P_1P_4, P_3P_1 \cap P_2P_4, P_1P_2 \cap P_3P_4$$

爲頂點所作出的三角形，這同時也是 P_4 關於 $\triangle P_1P_2P_3$ 的西瓦三角形的定義。

Theorem 0.4.7 (九點圓錐曲線定理/Nine-Point Conic Theorem)**.** 對於任意完全四點形 $\mathcal{Q} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$，定義 M_{ij} 爲 $\overline{P_iP_j}$ 中點，則六點

$$M_{23},\ M_{14},\ M_{31},\ M_{24},\ M_{12},\ M_{34}$$

共一圓錐曲線且該圓錐曲線爲 $\mathcal{Q}$ 的西瓦三角形的外接圓錐曲線。

事實上他有一個推廣：

Theorem 0.4.8. 對於任意完全四點形 $\mathcal{Q} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$，取一線 ℓ，定義 $Q_{ij} = P_iP_j \cap L$。在 P_iP_j 上取 R_{ij} 使得

$$(P_i, P_j; Q_{ij}, R_{ij}) = -1$$

那麼 R_{23}, R_{14}, R_{31}, R_{24}, R_{12}, R_{34} 共一圓錐曲線且該圓錐曲線爲 $\mathcal{Q}$ 的西瓦三角形的外接圓錐曲線。

Proof. 令 P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 分別交 P_1P_4, P_2P_4, P_3P_4 於 X, Y, Z，由西瓦定理與孟氏定理可得

$$\frac{P_2X}{XP_3}\cdot\frac{P_3Y}{YP_1}\cdot\frac{P_1Z}{ZP_2}\cdot\frac{P_2R_{23}}{R_{23}P_3}\cdot\frac{P_3R_{31}}{R_{31}P_1}\cdot\frac{P_1R_{12}}{R_{12}P_2}=-\frac{P_2Q_{23}}{Q_{23}P_3}\cdot\frac{P_3Q_{31}}{Q_{31}P_1}\cdot\frac{P_1Q_{12}}{Q_{12}P_2}=1,$$

因此由卡諾定理可得 X, Y, Z, R_{23}, R_{31}, R_{12} 共圓錐曲線，令其爲 $\mathcal{C}$。注意到對於所有兩兩相異 i, j, k，Q_{jk}, R_{ij}, R_{ik} 共線，因此

$$R_{31}(Y,Z;R_{23},R_{14})\overset{\ell}{=}Z(Q_{31},R_{31};Q_{12},Q_{34})=(Q_{31},R_{31};P_1,P_3)=-1$$
$$R_{12}(Y,Z;R_{23},R_{14})\overset{\ell}{=}Y(R_{12},Q_{12};Q_{31},Q_{24})=(R_{12},Q_{12};P_1,P_2)=-1$$

知 $R_{14}\in\mathcal{C}$，同理有 R_{24}, $R_{34}\in\mathcal{C}$，因此 R_{23}, R_{14}, R_{31}, R_{24}, R_{12}, R_{34} 共於 $\mathcal{C}$ 且爲 $\triangle XYZ$ 的外接圓錐曲線。 ■

其對偶命題爲：

Theorem 0.4.9. 對於任意完全四線形 $\mathcal{Q}=(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$，取一點 P，定義 $L_{ij}=(\ell_i\cap\ell_j)P$。在 $T(\ell_i\cap\ell_j)$ 中取 K_{ij} 使得

$$(\ell_i,\ell_j;L_{ij},K_{ij})=-1$$

那麼 K_{23}, K_{14}, K_{31}, K_{24}, K_{12}, K_{34} 共切一圓錐曲線且該圓錐曲線爲 $\mathcal{Q}$ 的對角三角形的內切圓錐曲線。

Definition 0.4.10. 給定任意完全四點形 $\mathcal{Q}=(P_1,P_2,P_3,P_4)$，對於一直線 ℓ，我們稱 (0.4.8) 中的圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 爲 ℓ 關於 $\mathcal{Q}$ 的九點圓錐曲線。當 $\ell=\mathcal{L}_\infty$ 時，簡稱爲九點圓錐曲線。

Definition 0.4.11. 給定任意完全四線形 $\mathcal{Q}=(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$，對於一點 P，我們稱 (0.4.9) 中的圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 爲 P 關於 $\mathcal{Q}$ 的九線圓錐曲線。

0.4.1 牛頓三大定理

在競賽中，完全四線形是一個經常出現的圖形，與圓錐曲線最有關的就屬下面三個牛頓定理啦 (?

Theorem 0.4.12 (牛頓一號/Newton's Theorem I). 對於任意完全四線形 $\mathcal{Q}$，其三個對角線段的中點共線。

Proof. 令 $\mathcal{Q}=(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$，$P_{ij}=\ell_i\cap\ell_j$，$\triangle M_1M_2M_3$ 爲 $\triangle P_{23}P_{31}P_{12}$ 的中點三角形，R_1,R_2,R_3 分別爲 $\overline{P_{23}P_{14}},\overline{P_{31}P_{24}},\overline{P_{12}P_{34}}$ 的中點，則由孟氏定理知

$$\frac{M_2R_1}{R_1M_3}\cdot\frac{M_3R_2}{R_2M_1}\cdot\frac{M_1R_3}{R_3M_2}=\frac{P_{12}P_{14}}{P_{14}P_{31}}\cdot\frac{P_{23}P_{24}}{P_{24}P_{12}}\cdot\frac{P_{31}P_{34}}{P_{34}P_{23}}=-1,$$

所以 R_1,R_2,R_3 共線。 ■

Definition 0.4.13 (QL-L1). 對於任意完全四線形 $\mathcal{Q}$，我們稱 $\mathcal{Q}$ 的三個對角線段的中點連線爲 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線 (**Newton Line**)。

Theorem 0.4.14 (牛頓二號/Newton's Theorem II). 對於完全四線形 $\mathcal{Q}$，若圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{Q}$ 中的四線皆相切，則 $\mathcal{C}$ 的中心位於 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線上。反之，若 O 爲 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線上一點，則存在一以 O 爲中心的圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{Q}$ 相切。

Proof. 不妨假設 ℓ_1 不平行於 ℓ_4。令 $\mathcal{Q}=(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$，$P_{ij}=\ell_i\cap\ell_j$，$R_2$, R_3 分別爲 $\overline{P_{31}P_{24}}$, $\overline{P_{12}P_{34}}$ 的中點，O 爲 $\mathcal{C}$ 的中心。作 ℓ_1, ℓ_4 關於 O 的對稱直線 ℓ_1', ℓ_4'，那麼 $P_{14}'=\ell_1'\cap\ell_4'$ 爲 P_{14} 關於 O 的對稱點。令 Q_2, Q_3 分別爲 P_{14} 關於 R_2, R_3 的對稱點，因爲 $\mathcal{Q}$ 與 ℓ_1', ℓ_4' 共切 $\mathcal{C}$，所以

$$\begin{aligned}\infty_{\ell_1}(Q_2,Q_3;P_{14}',\infty_{\ell_4})&=(P_{24},P_{34};\ell_1'\cap\ell_4,\infty_{\ell_4})=(P_{12},P_{31};\infty_{\ell_1},\ell_1\cap\ell_4')\\&=\infty_{\ell_4}(Q_3,Q_2;\infty_{\ell_1},P_{14}')=\infty_{\ell_4}(Q_2,Q_3;P_{14}',\infty_{\ell_1}),\end{aligned}$$

由交比的性質 (0.2.9)，我們有 Q_2, Q_3, P_{14}' 共線，關於 P_{14} 位似 1/2 倍可得 $O\in R_2R_3$。反敘述就把論證反過來就好了。 ■

好啦牛頓三號老實説跟四邊形比較有關。

Theorem 0.4.15 (牛頓三號/Newton's Theorem III). 對於完全四線形 $\mathcal{Q}=(\ell_1$, ℓ_2, ℓ_3, $\ell_4)$，定義 $P_{ij}=\ell_i\cap\ell_j$，若圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 分別與 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 切於 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4，則 Q_1Q_3, Q_2Q_4, $P_{12}P_{34}$, $P_{23}P_{41}$ 共點。

Proof. 考慮六切線組 $(\ell_1\ell_1\ell_2\ell_3\ell_3\ell_4)$ 與 $(\ell_1\ell_2\ell_2\ell_3\ell_4\ell_4)$，由 (0.4.2) 知 Q_1Q_3, $P_{12}P_{34}$, $P_{23}P_{41}$ 與 Q_2Q_4, $P_{12}P_{34}$, $P_{23}P_{41}$ 分別共點，即四線 Q_1Q_3, Q_2Q_4, $P_{12}P_{34}$, $P_{23}P_{41}$ 共

點。 ■

習題

Problem 1. 令 $\triangle S_1S_2S_3$ 爲一個正三角形，P 爲任意一點，令 Q_1 爲 $\overline{PS_1}$ 的中垂線與 S_2S_3 的交點，類似定義 Q_2, Q_3。證明：Q_1, Q_2, Q_3 共線。

Problem 2. 令 $\triangle S_1S_2S_3$ 爲一個正三角形，P 爲任意一點。證明：$\triangle PS_2S_3$, $\triangle PS_3S_1$, $\triangle PS_1S_2$ 的歐拉線共點。

Problem 3. 令 I 爲 $\triangle ABC$ 的內心，D 爲 I 關於 BC 的垂足，M 爲 $\overline{BC}$ 的中點。證明：IM 平分 $\overline{AD}$。

Problem 4. 令 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，P, Q 分別爲 CA, AB 上兩點滿足 P, O, Q 共線，設 M, N 分別爲 $\overline{BP}, \overline{CQ}$ 中點。證明：$\measuredangle BAC = \measuredangle MON$。

Problem 5. 令 AB, AC 爲兩個不同的射線且 ω 爲一個以 O 爲圓心的圓並分別與 AC, AB 切於 E, F。R 爲 EF 上一點，過 O 平行於 EF 的直線交 AB 於 P。令 N 爲 PR 與 AC 的交點且 M 爲 AB 與過 R 平行於 AC 的直線的交點。證明：MN 與 ω 相切。

Problem 6. 設 $ABCD$ 爲一個圓內接四邊形且 P 爲其對角線 AC 與 BD 的交點，令 $M_{AB}, \ldots, M_{DA}$ 分別爲 $\widehat{AB}, \ldots, \widehat{DA}$ 中點，$I_{AB}, \ldots, I_{DA}$ 分別爲 $\triangle PAB$, $\ldots$, $\triangle PDA$ 的內心。證明：$M_{AB}I_{AB}, \ldots, M_{DA}I_{DA}$ 四線共點。

Problem 7. 令 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，M 爲 $\overline{AH}$ 的中點，E, F 分別爲 B, C 關於 CA, AB 的垂足。在 EM 上取點 R 使得 $\measuredangle RBC = 90°$，在 FM 上取點 S 使得 $\measuredangle BCS = 90°$。證明：A, R, S 共線。

Problem 8. 令 $\triangle DEF$ 爲 $\triangle ABC$ 的弧中點三角形、$X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ 爲 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的交點並且以 $D, Z_1, Z_2, E, X_1, X_2, F, Y_1, Y_2, D$ 爲順序，設 $P_{bc} = EY_1 \cap FZ_2$, $P_{cb} = FZ_1 \cap EY_2$，同樣定義 $P_{ca}, P_{ac}, P_{ab}, P_{ba}$，證明 $P_{bc}P_{cb}$, $P_{ca}P_{ac}$, $P_{ab}P_{ba}$ 共點。

Problem 9. 令 I 爲 $\triangle ABC$ 的內心，ℓ 爲其內切圓 ω 一條切線。設 A', B', C' 爲共線三點滿足 $A' \in BC, B' \in CA, C' \in AB$，$A'$ 關於 ω 異於 BC 的切線交 ℓ 於 A^*，類似定義 B^*, C^*。證明：AA^*, BB^*, CC^* 共點。

Problem 10. 令 I 爲 $\triangle ABC$ 的內心，P 爲 I 關於 $\odot(ABC)$ 的反演點，P 關於 $\triangle ABC$ 的內切圓的其中一條切線交 $\odot(ABC)$ 於 X, Y。證明：$\angle XIY = 120°$。

Problem 11. 設 $\triangle ABC$ 的內切圓 ω 分別切 BC, CA, AB 於 D, E, F，AD 交 ω 於 K，作 K 關於 ω 的切線交 FD, DE 於 Y, Z。證明：AD, BZ, CY 共點。

Problem 12. 若平面上有八個點 P_1, P_2, ..., P_8，任三點不共線，$Q_i := P_{i-2}P_{i-1} \cap P_{i+1}P_{i+2}$。證明：$P_1$, P_2, ... , P_8 共圓錐曲線若且唯若 Q_1, Q_2, ... , Q_8 共圓錐曲線。

Chapter 1

配極

1.1 極

在圓上是擁有配極的，而且也有良好的射影定義，因爲圓錐曲線又可以射影打成圓，所以在圓錐曲線上也同樣可以定義極點極線這些東西。

Definition 1.1.1. 給定圓錐曲線 $\mathcal{C}$，P 爲任意一點，過 P 作一動線交 $\mathcal{C}$ 於 M_1, M_2 兩點，取 Q 使得 $(P,Q;M_1,M_2)=-1$，則 Q 的軌跡爲一直線或一線段 ℓ，我們將 ℓ 或其延長 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P)$ 定義爲 P 關於 $\mathcal{C}$ 的極線。

至於爲什麼是直線或線段可以把 $\mathcal{C}$ 打成圓看看，這邊就不證明了。透過我們在圓上的配極知識，以及相同的論證，我們可以把一些常見的性質推廣到圓錐曲線的情形 (從 (1.1.2) 到 (1.1.8))。

Theorem 1.1.2 (極線互反定理)**.** 令 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線、P,Q 爲平面上兩點，則

$$P\in\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(Q)\iff Q\in\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P).$$

Definition 1.1.3. 令 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線，若兩點 P, Q 滿足 P 關於 $\mathcal{C}$ 的極線過 Q，則我們稱 P, Q 關於 $\mathcal{C}$ 共軛 (**Conjugate**)。

Definition 1.1.4. 令 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線、K 爲平面上一線，在 K 上取動點 Q，則 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(Q)$ 過定點 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(K)$，我們稱其爲 K 關於 $\mathcal{C}$ 的極點 (**Pole**)。

Proposition 1.1.5. 令 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線、K, L 爲平面上兩線，則

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(K) \in L \iff \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(L) \in K.$$

Definition 1.1.6. 令 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線，若兩線 K, L 滿足 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(K) \in L$ 上，則我們稱 K, L 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。

Definition 1.1.7. 令 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線，若 $\triangle ABC$ 滿足 A, B, C 兩兩關於 $\mathcal{C}$ 共軛 (等價於 BC, CA, AB 兩兩關於 $\mathcal{C}$ 共軛)，則我們稱 $\triangle ABC$ 爲關於 $\mathcal{C}$ 的自共軛三角形 (**Self-Conjugate Triangle**)。

Proposition 1.1.8. 令 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線、P_1, P_2, P_3, P_4 爲 $\mathcal{C}$ 上四點，設

$$X = P_1P_2 \cap P_3P_4,\ Y = P_1P_3 \cap P_4P_2,\ Z = P_1P_4 \cap P_2P_3,$$

則 $\triangle XYZ$ 爲關於 $\mathcal{C}$ 的自共軛三角形。

Theorem 1.1.9. 令 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線、令五線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4, L 分別爲五點 P_1, P_2, P_3, P_4, A 關於 $\mathcal{C}$ 的極線，則

$$A(P_i) = L(\ell_i).$$

下面的推論則是結合前面的交比得到的結果。

Corollary 1.1.10. 給定圓錐曲線 $\mathcal{C}$，任意六點 P_1, P_2, P_3, P_4, A, B 共一圓錐曲線若且唯若六線 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\{P_1, P_2, P_3, P_4, A, B\})$ 切一圓錐曲線。

Proof. 由

$$A(P_i) = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(A)(\ell_i),\ B(P_i) = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(B)(\ell_i),$$

知 P_1, P_2, P_3, P_4, A, B 共一圓錐曲線若且唯若

$$\begin{aligned} & A(P_i) = B(P_i) \\ \iff\ & \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(A)(\ell_i) = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(B)(\ell_i) \end{aligned}$$

若且唯若 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\{P_1, P_2, P_3, P_4, A, B\})$ 切一圓錐曲線。 ∎

Definition 1.1.11. 令 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線，我們稱兩圓錐曲線 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 關於 $\mathcal{C}$ 共軛，記爲 $\mathcal{C}_2 = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_1)$，若

$$\{\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P) \mid P \in \mathcal{C}_1\} = T\mathcal{C}_2.$$

透過 (1.1.10)，可以保證對於任意 $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1$，存在一個 $\mathcal{C}_2$ 使得 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 關於 $\mathcal{C}$ 共軛，並且有 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 關於 $\mathcal{C}$ 共軛等價於 $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1$ 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。

Proposition 1.1.12. 令 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線，O 爲 $\mathcal{C}$ 的中心，則 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(O) = \mathcal{L}_\infty$。

Proof. 過 O 作兩條與 $\mathcal{C}$ 有交點的直線 ℓ_1 ℓ_2，設其分別交 $\mathcal{C}$ 於 $(P_1, Q_1), (P_2, Q_2)$，則 $\overline{P_1Q_1}, \overline{P_2Q_2}$ 的中點們重合於 O，所以 $\infty_{P_1Q_1}, \infty_{P_2Q_2} \in \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(O)$，因此 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(O) = \mathcal{L}_\infty$。 ■

Corollary 1.1.13 (平行弦定理)**.** 令 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線、O 爲 $\mathcal{C}$ 的中心，P_1, P_2 爲平面上兩點，則 O, P_1, P_2 共線若且唯若 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P_1)$ 平行於 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P_2)$。

Proof. 注意到 O, P_1, P_2 共線若且唯若 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(O) = \mathcal{L}_\infty, \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P_1), \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P_2)$ 共點，即 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P_1)$ 平行於 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P_2)$。 ■

Corollary 1.1.14. 令 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線，O 爲 $\mathcal{C}$ 的中心，$\overline{AB}$ 爲 $\mathcal{C}$ 上的弦，則 $O\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(AB)$ 平分 $\overline{AB}$。

Proof. 令 $T = AB \cap O\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(AB)$，$U = \infty_{AB}$，則 $O\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(AB) = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(U)$，因此由定義有 $(U, T; A, B) = -1$，故 T 爲 $\overline{AB}$ 中點。 ■

Theorem 1.1.15. 給定 $\triangle ABC$，令 P, Q 爲兩點，$\triangle P_aP_bP_c, \triangle Q_aQ_bQ_c$ 分別爲 P, Q 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形，那麼 $P, P_a, P_b, P_c, Q, Q_a, Q_b, Q_c$ 八點共一圓錐曲線。

Proof. 令 $\mathcal{C}$ 爲經過 P, P_a, P_b, P_c, Q 的圓錐曲線，則 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(A), \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(B), \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(C)$ 爲 $\triangle ABC$ 的三邊，令 AQ 與 $\mathcal{C}$ 的另一個交點爲 Q_a' 則

$$(A, AQ \cap BC; Q, Q_a') = -1 = (A, AQ \cap BC; Q, Q_a)$$

故 $Q_a = Q_a'$，因此 $Q_a \in \mathcal{C}$，同理有 $Q_b, Q_c \in \mathcal{C}$。 ■

其對偶命題爲：

Theorem 1.1.16. 令 K, L 爲兩條直線，$\triangle K_aK_bK_c$, $\triangle L_aL_bL_c$ 分別爲 K, L 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形，那麼 K, K_a, K_b, K_c, L, L_a, L_b, L_c 八線切一圓錐曲線。

Proposition 1.1.17. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 及一線 ℓ。令 $\mathcal{C}$ 爲 ℓ 關於 (A, B, C, P) 的九點圓錐曲線。則 ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極點、$\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\ell)$、$P$ 共線。特別地，當 $\ell = \mathcal{L}_\infty$ 時，重心 G、$\mathcal{C}$ 的中心 O、P 共線且此時滿足

$$\frac{PO}{OG} = 3.$$

當 $P = H$ 時，我們有：

Corollary 1.1.18. 令 G, H, N 分別爲 $\triangle ABC$ 的重心、垂心及九點圓圓心，則 G, H, N 共線且

$$\frac{HN}{NG} = 3.$$

我們將此線稱爲 $\triangle ABC$ 的歐拉線 (**Euler Line**)。

習題

Problem 1. 若 $\triangle ABC$ 爲關於圓 Γ 的自共軛三角形，證明：$\triangle ABC$ 的垂心爲 Γ 的圓心。

Problem 2. 設 O 爲圓 Γ 的圓心。證明：對於任意圓 Ω，$\mathfrak{p}_\Gamma(\Omega)$ 是一個以 O 爲焦點的圓錐曲線。

Problem 3. 給定圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 與 $\triangle ABC$。證明：$\triangle \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(BC)\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(CA)\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(AB)$ 與 $\triangle ABC$ 透視。

Problem 4. 給定任意 $\triangle ABC$，P 爲任意一點。設 $\triangle P_aP_bP_c$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，分別在 PP_a, PP_b, PP_c 上取點 D, E, F 使得

$$PP_a \cdot PD = PP_b \cdot PE = PP_c \cdot PF =: k.$$

證明：

(i) $\triangle ABC$ 與 $\triangle P_aP_bP_c$ 透視

(ii) 當 k 變動時，透視中心的軌跡爲經過 A, B, C, P 及 $\triangle ABC$ 的垂心 H 的圓錐曲線。

(iii) 當 k 變動時，透視軸的包絡線爲與 BC, CA, AB 相切的拋物線。

Problem 5 (牛頓二號的推廣). 設完全四線形 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ 與圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 相切，令 $A_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$。若直線 L 與 $\mathcal{Q}$ 的對角線 $A_{ij}A_{kl}$ 於 P_{ij}，在 $A_{ij}A_{kl}$ 取 Q_{ij} 滿足 $(A_{ij}, A_{kl}; P_{ij}, Q_{ij}) = -1$。證明：

(i) Q_{14}, Q_{24}, Q_{34} 共線

(ii) $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(Q_{14}Q_{24}Q_{34}) \in L.$

1.2 交比再現

我們現在知道一些可以定義交比的物體，比方說：直線、過某個點的直線集、圓錐曲線及切某個圓錐曲線的直線集等等，所以在這些東西之間就可以找出一些保持交比不變的變換。我們稱這些集合爲可交比化的集合 (這名字是我亂掰的)。

Example 1.2.1. 這邊有一些可交比化的集合

- 所有的角度，也就是 $S^1/\{\pm 1\}$
- 過兩個定點的圓所形成的集合
- 過四個定點的圓錐曲線所形成的集合
- 與四條定線相切的圓錐曲線所形成的集合

交比的定義方式就是最自然的那個 (從某個點看切線，從某條線看切點)。

以下假設所有形如 $(X_i, ()_{X_i})$ 的都是可交比化集，這邊先默認所有可交比化的集合都可以保交比地雙射到一個直線上。我們曾經定義過 $A(P_i) =$

$A(P_1, P_2; P_3, P_4) = (AP_1, AP_2; AP_3, AP_4) = (AP_i)$，更一般地，如果今天 $\varphi : X_1 \to X_2$ 是一個變換，那麼我們定義

$$\varphi(P_1, P_2; P_3, P_4)_{X_2} = \varphi(P_i)_{X_2} = (\varphi(P_i))_{X_2} = (\varphi(P_1), \varphi(P_2); \varphi(P_3), \varphi(P_4))_{X_2}.$$

Definition 1.2.2. 我們稱一個變換 $\varphi : X_1 \to X_2$ 爲保交比變換若對於所有 $P_i \in X_1$，$(\varphi(P_i))_{X_2} = (P_i)_{X_1}$。

那麼顯然有 φ 是雙射的，爲了方便起見，我們把所有從 X_1 送至 X_2 的保交比變換收集起來，記作 $\mathrm{Hom}(X_1, X_2)$，特別地，$\mathrm{Aut}(X) := \mathrm{Hom}(X, X)$，那麼我們有：

Proposition 1.2.3. 給定集合 X_1, X_2, X_3，若

$$\varphi \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2), \quad \psi \in \mathrm{Hom}(X_2, X_3),$$

那麼 $\psi \circ \varphi \in \mathrm{Hom}(X_1, X_3)$。

Proof. 令 P_1, P_2, P_3, $P_4 \in X_1$，則

$$((\psi \circ \varphi)(P_i))_{X_3} = (\psi(\varphi(P_i)))_{X_3} = (\varphi(P_i))_{X_2} = (P_i)_{X_1}. \qquad \blacksquare$$

Proposition 1.2.4. 給定集合 X_1, X_2 及 $\varphi \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2)$，則存在反函數 $\varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}(X_2, X_1)$。

Proof. 由於 φ 是雙射的，所以 φ^{-1} 存在，對於 $P_1, P_2, P_3, P_4 \in X_2$，

$$(\varphi^{-1}(P_i))_{X_1} = (\varphi(\varphi^{-1}(P_i)))_{X_2} = (P_i)_{X_2},$$

故 $\varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}(X_2, X_1)$。 $\blacksquare$

Proposition 1.2.5. 給定直線 ℓ 及 ℓ 上任意相異三點 P_1, P_2, P_3，若

$$\varphi : \{P_1, P_2, P_3\} \to \ell$$

使得 $\varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3)$ 兩兩相異，那麼存在唯一的一個函數 $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Aut}(\ell)$ 使得 $\tilde{\varphi}(P_i) = \varphi(P_i)$。

Proof. 不妨將 ℓ 想像爲 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$，使其上面有四則運算，若 φ 將 $P_i \mapsto Q_i$，定義 $\tilde{\varphi}: \ell \to \ell$ 爲

$$(Q_1, Q_2; Q_3, \tilde{\varphi}(P)) = (P_1, P_2; P_3, P) \implies \tilde{\varphi}(P) = \frac{aP+b}{cP+d},$$

其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 且 $ad \neq bc$，那麼顯然有 $\tilde{\varphi}(P_i) = \varphi(P_i)$，而 $(\tilde{\varphi}(Q_i)) = (Q_i)$ 則交由讀者自行驗證。 ■

所以說其實

$$\mathrm{Aut}(\ell) = \left\{ \left[p \mapsto \frac{ap+b}{cp+d} \right] \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad \neq bc \right\} \cong \mathrm{PGL}(2, \mathbb{R}).$$

Proposition 1.2.6. 給定集合 X_1, X_2，對於任意相異三點 $P_1, P_2, P_3 \in X_1$，若 $\varphi: \{P_1, P_2, P_3\} \to X_2$ 滿足 $\varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3)$ 兩兩相異，那麼存在唯一的一個函數 $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2)$ 使得 $\tilde{\varphi}(P_i) = \varphi(P_i)$。

Proof. 令 ℓ 爲一直線，取任意 $\psi_j \in \mathrm{Hom}(X_j, \ell)$，由 (1.2.5) 知我們不妨假設 $\psi_1(P_i) = \psi_2(\varphi(P_i)) = i$，那麼 $\tilde{\varphi} := \psi_2^{-1} \circ \psi_1 \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2)$，並且顯然有 $\tilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$。

若存在 $\tilde{\varphi}' \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2)$ 使得 $\tilde{\varphi}'(P_i) = \varphi(P_i)$，那麼 $\Phi := \tilde{\varphi}^{-1}\tilde{\varphi}' \in \mathrm{Aut}(X_1)$，由

$$(P_1, P_2; P_3, \Phi(Q))_{X_1} = (\Phi(P_1), \Phi(P_2); \Phi(P_3), \Phi(Q))_{X_1} = (P_1, P_2; P_3, Q)_{X_1}$$

對於所有 $Q \in X_1$ 知 $\Phi = \mathrm{id}_{X_1}$，所以 $\tilde{\varphi}$ 是唯一的。 ■

Proposition 1.2.7. 對於任意集合 X, X'，$\mathrm{Aut}(X) \cong \mathrm{Aut}(X')$。特別地，若 $X' = \ell$ 爲一直線，則 $\mathrm{Aut}(X) \cong \mathrm{Aut}(\ell) \cong \mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$。

Proof. 取任意 $\varphi: X_1 \to X_2$，則 $\sigma: \mathrm{Aut}(X_1) \to \mathrm{Aut}(X_2) := [\psi \mapsto \varphi\psi\varphi^{-1}]$ 是一個同構。 ■

爲了方便，定義所有經過 P 的直線集爲 TP，即 $TP = \{\ell \mid P \in \ell\}$。講了這麼多，我們來看看有那些基礎性質吧：

Proposition 1.2.8. 令 E 爲一個平面，若雙射函數 $\varphi: E \to E$ 保共線，即

$$P \in QR \iff \varphi(P) \in \varphi(Q)\varphi(R).$$

則 φ 保交比，即 $(\varphi(X_i)) = (X_i)$，對於所有共線四點 X_1, X_2, X_3, X_4。

Proof. 令 P_1, P_2, P_3, P_4 爲共線四點，Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 爲另一組共線四點且兩線相異，設 $R_i = P_iQ_{i+1} \cap P_{i+1}Q_i$，那麼 R_1, R_2, R_3 共線若且唯若 $(P_i) = (Q_i)$。因爲 φ 保共線，所以 $(P_i) = (Q_i)$ 若且唯若 $\varphi(R_1), \varphi(R_2), \varphi(R_3)$ 共線，而這又等價於 $\varphi(P_i) = \varphi(Q_i)$。故我們有個良好定義的雙射函數 $\overline{\varphi} : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，

$$\overline{\varphi}((P_i)) := \varphi(P_i)$$

顯然地，$0, 1, \infty$ 爲 $\overline{\varphi}$ 的不動點。

給定任意兩個實數 x, y，在任一直線 ℓ 上取五點 P_1, P_2, P_3, P_4, P_4' 滿足

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = x \quad \text{及} \quad (P_1, P_2; P_3, P_4') = y,$$

那麼我們可以只用直線在 ℓ 上找到兩點 Q, R 滿足

$$(P_1, P_2; P_3, Q) = xy \quad \text{及} \quad (P_1, P_2; P_3, R) = x + y.$$

例如：取一點 A 及一線 L 使得 $AP_1 \parallel L$ 並考慮變換 $P \mapsto AP \cap L$，那麼我們可以假設 $P_1 = \infty, P_2 = 0, P_3 = 1$。再由 φ 保共線，

$$\begin{aligned} \varphi(P_1, P_2; P_3, Q) &= \varphi(P_1, P_2; P_3, P_4) \cdot \varphi(P_1, P_2; P_3, P_4'), \text{ 及} \\ \varphi(P_1, P_2; P_3, R) &= \varphi(P_1, P_2; P_3, P_4) + \varphi(P_1, P_2; P_3, P_4') \end{aligned}$$

故 $\overline{\varphi}(xy) = \overline{\varphi}(x)\overline{\varphi}(y), \overline{\varphi}(x+y) = \overline{\varphi}(x) + \overline{\varphi}(y)$，而滿足這樣的函數只有 $\overline{\varphi}(x) = x$，所以 φ 保交比。 ■

我們還可以推得以下性質：

Proposition 1.2.9. 如果 A, B, C, D 是任三點不共線的四點並且雙射函數 $\Phi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 保共線，使得 A, B, C, D 爲不動點，那麼 $\Phi = \mathrm{id}$。

Proof. 由 (1.2.8)，對於所有共線四點 X_1, X_2, X_3, X_4，我們有 $(\Phi(X_i)) = (X_i)$。令 $O = AD \cap BC$，則

$$\Phi(O) = \Phi(AD \cap BC) = AD \cap BC = O,$$

所以對於 AD 上任意一點 X

$$\Phi(A, D; O, X) = (A, D; O, X) = (\Phi(A), \Phi(D); \Phi(O), X),$$

即 $\Phi(X)=X$。那麼對於任意一點 Y，

$$\Phi(BY)\cap AD=\Phi(BY\cap AD)=BY\cap AD$$

所以 $\Phi(BY)=BY$，同理有 $\Phi(CY)=CY,\Phi(AY)=AY$，所以

$$\Phi(Y)=\bigcap\Phi(AY)=\bigcap AY=Y,$$

故 $\Phi=\mathrm{id}$。 ■

如同大保交比讓我們可以在許多命題上只需驗三個點，這個性質讓我們可以在許多命題上只需驗四個點。

Remark. 結合 (1.2.8) 及 (1.2.9)，我們可以證明一個變換 φ 是保共線變換等價於其解析式可以寫成

$$\varphi([x:y:z])=[p_{11}x+p_{12}y+p_{13}z:p_{21}x+p_{22}y+p_{23}z:p_{31}x+p_{32}y+p_{33}z],$$

其中 $(p_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ 是一個可逆矩陣，這個定理被稱爲射影幾何基本定理 (**Fundamental Theorem of Projective Geometry**)，這類的變換稱作射影變換 (**Projective Transformation**)。更進一步，對於任三點不共線的四點組們 P_1, P_2, P_3, P_4 與 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4，存在恰一個射影變換 φ，使得 $\varphi(P_i)=Q_i$。

另外，如果我們把 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 改成 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$，那變換

$$\varphi([x:y:z]):=[\overline{x}:\overline{y}:\overline{z}]$$

保共線，但不保交比且解析式也不能寫成上面矩陣的形式，那證明會錯的原因是因爲解了一個 $\mathbb{C}$ 上不會對的函方。

Definition 1.2.10. 我們稱一個射影變換 $\varphi:\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\to\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 是仿射變換若

$$\varphi(\mathcal{L}_\infty)=\mathcal{L}_\infty.$$

換句話說就是限制在 $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ 會打到 $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$，那這時候就會保平行，事實上他就會是旋似變換或位似變換。

Proposition 1.2.11. 給定兩點 P,Q，若 $\varphi\in\mathrm{Hom}(TP,TQ)$，則 $\ell\cap\varphi(\ell)$ 的軌跡爲一圓錐曲線或直線 (我們姑且稱它爲退化的圓錐曲線)，即存在一圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 使得 $\mathcal{C}=\{\ell\cap\varphi(\ell)\mid\ell\in TP\}$。

Proof. 令 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \in TP$，$R_i = \ell_i \cap \varphi(\ell_i)$，則

$$P(R_i) = (\ell_i) = (\varphi(\ell_i)) = Q(R_i),$$

即 $R_4 \in (PQR_1R_2R_3)$，而這對於任意 R_4 都對，所以 $\{\ell \cap \varphi(\ell) \mid \ell \in TP\} \subseteq \mathcal{C}$，而另一邊包含就反過來論述就好了。 ■

Proposition 1.2.12. 給定任意集合 X 與 X 上兩相異元素 P_1, P_2，對於任意實數 k，我們定義一個變換 $\varphi : X \to X$，$Q \in X$ 會送至使得 $(P_1, P_2; Q, R) = k$ 的 R，則 $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$。

Proof. 我們知道只要證明 X 爲線的情形，過 P_1 作一線 $\ell \neq X$，在 X 上取點 R_1, R_2, R_3, R_4，使得 $R_1 = P_1$ 且 $(R_i) = k$，那麼對於任意 Q，R_2P_2, R_3Q, $R_4\varphi(Q)$ 共點。故 $\varphi = [S \mapsto SR_4 \cap X] \circ [Q \mapsto R_3Q \cap R_2P_2] \in \mathrm{Aut}(X)$。 ■

Proposition 1.2.13. 給定圓錐曲線 $\mathcal{C}$、直線 ℓ 及 $\mathcal{C}$ 上一定點 P，過 P 作一動線 L 分別交 $\mathcal{C}, \ell$ 於 Q, R，取 A 使得 $(P, Q; R, A)$ 爲定值 k，則 A 的軌跡爲一圓錐曲線或直線。

Proof. 過 P 作一直線 K，並且 K 上取 P_1, P_2, P_3, P_4 使得 $P_1 = P, P_2 = K \cap \mathcal{C}, P_3 = K \cap \ell$ 且 $(P_i) = k$，則 P_2Q, P_3R, P_4A 共點，考慮變換

$$\varphi := [S \mapsto P_4S] \circ [Q \mapsto P_2Q \cap \ell] \circ [L \mapsto L \cap \mathcal{C}] \in \mathrm{Hom}(TP, TP_4)$$

由 (1.2.11) 知 $A = L \cap \varphi(L)$ 的軌跡爲一圓錐曲線或直線。 ■

Proposition 1.2.14. 給定圓錐曲線 $\mathcal{C}$，$\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ 若且唯若存在一線 ℓ 使得對於所有 $P, Q \in \mathcal{C}$，$P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q \in \ell$。

Proof. 固定 $\mathcal{C}$ 上三點 A, B, C，考慮折線 $(A\varphi(B)C\varphi(A)B\varphi(C))$，由帕斯卡定理知 $B\varphi(C) \cap \varphi(B)C$, $C\varphi(A) \cap \varphi(C)A$, $A\varphi(B) \cap \varphi(A)B$ 共線，令其爲 ℓ'。考慮變換

$$\varphi' := [R \mapsto AR \cap \mathcal{C}] \circ [P \mapsto P\varphi(A) \cap \ell] \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C}),$$

則 A, B, C 爲 $\varphi^{-1} \circ \varphi'$ 的不動點。

($\Rightarrow$) 由 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ 可得 $\varphi' = \varphi$，那麼對於任意 $P, Q \in \mathcal{C}$，我們考慮折線

$$(A\varphi(P)Q\varphi(A)P\varphi(Q)),$$

由帕斯卡定理知 $P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q,\ Q\varphi(A) \cap \varphi(Q)A,\ A\varphi(P) \cap \varphi(A)P$ 共線，即 $P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q \in \ell$

($\Leftarrow$) 若 $P\varphi(A) \cap \varphi(P)A \in \ell$，則 $\varphi'(P) = \varphi(P)$，因此 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$。 ■

Proposition 1.2.15. 給定圓錐曲線 $\mathcal{C}$，若 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$，則存在一圓錐曲線 $\mathcal{C}'$ 使得對於所有 $P \in \mathcal{C}$，$P\varphi(P) \in T\mathcal{C}'$。

Proof. 若 $\varphi = \mathrm{id}$，則 $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$。若 $\varphi \neq \mathrm{id}$，取一點 A 使得 $\varphi(A) \neq A$，由上個性質知存在 ℓ 使得 $A\varphi(P) \cap \varphi(A)P \in \ell,\ \forall P \in \mathcal{C}$。對於 $\mathcal{C}$ 上任意一點 P，由牛頓三號定理知 $A\varphi(P) \cap P\varphi(A),\ AP \cap \varphi(A)\varphi(P),\ \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(A\varphi(A)),\ \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P\varphi(P))$ 共線，並且還有

$$(A\varphi(P) \cap P\varphi(A), AP \cap \varphi(A)\varphi(P); \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(A\varphi(A)), \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P\varphi(P))) = -1$$

注意到 $[AP \mapsto \varphi(A)\varphi(P)] \in \mathrm{Hom}(TA, T\varphi(A))$，所以 $AP \cap \varphi(A)\varphi(P)$ 的軌跡是某個圓錐曲線 $\mathcal{C}^*$，取 $P = A$ 可得 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(A\varphi(A)) \in \mathcal{C}^*$。由 (1.2.13) 知 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P\varphi(P))$ 的軌跡是一個圓錐曲線 $\mathcal{C}^*$，因此 $P\varphi(P) \in T\mathcal{C}'$，其中 $\mathcal{C}' = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}^*)$。 ■

Remark. 值得注意的是並不是所有 $\mathcal{C}'$ 都可以從某個 $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ 裡的元素得到，不過 $\mathcal{C}'$ 退化爲一個點的情形則是下一節主要想討論的東西。

1.3 對合

Definition 1.3.1. 令 X 爲一可交比化的集合，我們稱 $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$ 爲一對合變換若 $\varphi^2 = \mathrm{id}_X$ 且 $\varphi \neq \mathrm{id}_X$。

也就是所有在 $\mathrm{Aut}(X)$ 中階爲 2 的元素。

Example 1.3.2. 若 X 爲一直線，則關於 X 上一點 P 作對稱的變換是一個對合變換。

Example 1.3.3. 若 $X = TP$，$P \notin \mathcal{L}_\infty$ 爲任意一點，則關於 P 旋轉 90° 的旋似變換是一個對合變換。

Proposition 1.3.4. 令 X 爲一可交比化的集合，$\varphi \in \mathrm{Aut}(X) \setminus \{\mathrm{id}_X\}$ 且存在一點 $A \in X$ 使得 $\varphi(A) \neq A, \varphi(\varphi(A)) = A$，則 φ 爲一對合變換。

Proof. 令 $P \in \mathcal{C}$，則

$$(A, \varphi(A); P, \varphi(P)) = (\varphi(A), A; \varphi(P), \varphi(\varphi(P))) = (A, \varphi(A); \varphi^2(P), \varphi(P)).$$

因此 $\varphi^2(P) = P$，故 φ 爲一對合。 ■

Theorem 1.3.5 (迪沙格對合定理/Desargues' Involution Theorem)**.** 給定任意完全四點形 $\mathcal{Q}(P_1, P_2, P_3, P_4)$ 及任意一線

$$\ell \notin \{P_2P_3, P_1P_4, P_3P_1, P_2P_4, P_1P_2, P_3P_4\},$$

定義 $Q_{ij} = P_iP_j \cap \ell$，則

(i) 存在恰一射影對合變換 $\varphi : \ell \to \ell$ 使得

$$(Q_{23}, Q_{14}), (Q_{31}, Q_{24}), (Q_{12}, Q_{34})$$

皆爲 φ 的相互對。

(ii) 對於 ℓ 上兩點 A, B，P_1, P_2, P_3, P_4, A, B 共一圓錐曲線 (含退化) 若且唯若 (A, B) 爲 φ 的相互對。

Proof. 定義 $\varphi : \ell \to \ell$ 爲一射影變換使得 $Q_{23} \mapsto Q_{14}$, $Q_{14} \mapsto Q_{23}$, $Q_{12} \mapsto Q_{34}$，則

(i) 由交比性質知

$$\begin{aligned}(Q_{23}, Q_{14}; Q_{12}, Q_{31}) &= (Q_{23}, P_1P_4 \cap P_2P_3; P_2, P_3) \\ &= (Q_{23}, Q_{14}; Q_{24}, Q_{34}) \\ &= (Q_{14}, Q_{23}; Q_{34}, Q_{24}),\end{aligned}$$

因此 $\varphi(Q_{31}) = Q_{24}$ 且 φ 爲一對合變換，故 (Q_{23}, Q_{14}), (Q_{31}, Q_{24}), (Q_{12}, Q_{34}) 皆爲 φ 的相互對。

(ii) 只證過去，證回來由同一法即可。由交比性質知

$$P_1(A, B; P_2, P_3) = P_1(A, B; Q_{12}, Q_{31}), P_4(A, B; P_2, P_3) = P_4(A, B; Q_{24}, Q_{34})$$

因此由 P_1, P_2, P_3, P_4, A, B 共一圓錐曲線 (含退化) 有

$$P_1(A, B; Q_{12}, Q_{31}) = P_4(A, B; Q_{24}, Q_{34}) = P_4(B, A; Q_{34}, Q_{24})$$

定義 $\varphi' \in \mathrm{Aut}(\ell)$ 使得 $A \mapsto B, B \mapsto A, Q_{12} \mapsto Q_{34}$，則 $Q_{31} \mapsto Q_{24}$ 且 φ' 爲一對合變換，故 $\varphi' = \varphi$，所以 (A, B) 爲 φ 的相互對。 ■

Example 1.3.6. 若取 $\ell = (P_3P_1 \cap P_2P_4)(P_1P_2 \cap P_3P_4)$，那麼這個對合變換的不動點爲 $P_3P_1 \cap P_2P_4$, $P_1P_2 \cap P_3P_4$，所以我們就可以得到完全四線形的調和性質。

而其對偶命題當然也成立：

Theorem 1.3.7. 給定任意完全四線形 $\mathcal{Q}(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ 及任意一點

$$P \notin \{\ell_2 \cap \ell_3, \ell_1 \cap \ell_4, \ell_3 \cap \ell_1, \ell_2 \cap \ell_4, \ell_1 \cap \ell_2, \ell_3 \cap \ell_4\},$$

定義 $L_{ij} = (\ell_i \cap \ell_j)P$，則

(i) 存在恰一對合變換 $\varphi \in \mathrm{Aut}(TP)$ 使得

$$(L_{23}, L_{14}), (L_{31}, L_{24}), (L_{12}, L_{34})$$

皆爲 φ 的相互對。

(ii) 對於過 P 兩線 S, T，ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4, S, T 切一圓錐曲線 (含退化) 若且唯若 (S, T) 爲 φ 的相互對。 ■

還記得九點 (線) 圓錐曲線嗎？那事實上對合其實就是對九點 (線) 圓錐曲線配極 (?

Proposition 1.3.8. 延續迪沙格定理 (1.3.5) 的標號，令 $\mathcal{C}$ 爲 ℓ 關於 $\mathcal{Q}$ 的九點圓錐曲線，那麼 (A, B) 爲關於 φ 的相互對若且唯若 A, B 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。

Proof. 令 $\varphi' = [A \mapsto \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(A) \cap \ell] \in \mathrm{Aut}(\ell)$，取 R_{ij} 使得 $(P_i, P_j; Q_{ij}, R_{ij}) = -1$。那麼我們知道

$$Q_{23} = R_{12}R_{31} \cap R_{24}R_{34}, \quad Q_{14} = R_{12}R_{24} \cap R_{31}R_{34},$$

故 Q_{23}, Q_{14} 關於 $\mathcal{C}$ 共軛，也就是 $\varphi'(Q_{23}) = Q_{14}, \varphi'(Q_{14}) = Q_{23}$。同理有 $\varphi'(Q_{31}) = Q_{24}$，所以 $\varphi = \varphi'$，因此 (A, B) 爲關於 φ 的相互對若且唯若 $\varphi'(A) = B$ 若且唯若 A, B 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。 ■

Proposition 1.3.9. 延續迪沙格定理對偶版本 (1.3.7) 的標號，令 $\mathcal{C}$ 爲 P 關於 $\mathcal{Q}$ 的九線圓錐曲線，那麼 (S, T) 爲關於 φ 的相互對若且唯若 S, T 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。

■

這邊給個推論：

Corollary 1.3.10. 延續迪沙格定理的標號，φ 有不動點若且唯若 $\mathcal{C}$ 與 ℓ 有交點。此時，φ 的不動點爲 $\mathcal{C}$ 與 ℓ 的交點。 ■

Corollary 1.3.11. 延續迪沙格定理對偶版本的標號，φ 有不動線若且唯若 TP 中有 $\mathcal{C}$ 的切線。此時，φ 的不動線爲 TP 中 $\mathcal{C}$ 的切線。

那在確定某個變換爲對合變換時就會有一些好用的性質，或者反過來證明某個變換爲對合變換。

Proposition 1.3.12. 令 ℓ 爲一直線，$\varphi : \ell \to \ell$ 爲一變換，則 φ 爲一對合變換若且唯若 φ 爲反演變換 (這邊視對稱變換爲反演變換)。

Proof. 只證過去，證回來由同一法即可。令 $A = \varphi(\infty_\ell)$，這邊分兩個情形:

(i) $A \neq \infty_\ell$，那麼對於 φ 的任兩對相互對 $(P, P'), (Q, Q')$，我們有

$$\begin{aligned}(A, \infty_\ell; P, Q) = (\infty_\ell, A; P', Q') &\implies \frac{AP}{AQ} = \frac{Q'A}{P'A} \\ &\implies \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'} = \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AQ'},\end{aligned}$$

因此 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'}$ 爲定值，即 φ 爲反演變換。

(ii) $A = \infty_\ell$，由 φ 爲射影對合變換知存在 φ 的一對相互對 (P, P') 使得 $P \neq P'$，那麼對於 φ 的任一對相互對 (Q, Q')，我們有

$$\begin{aligned}(\infty_\ell, P; Q, Q') = (\infty_\ell, P'; Q', Q) &\implies \frac{Q'P}{QP} = \frac{QP'}{Q'P'} \\ &\implies \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q'P'},\end{aligned}$$

因此 $\overline{PP'}$ 中點爲定點，即 φ 爲對稱變換。 ■

Proposition 1.3.13. 令 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線、$\varphi:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 爲一變換，則 φ 爲一對合變換若且唯若存在恰一點 $A\notin\mathcal{C}$ 使得 $\forall P\in\mathcal{C}$，A, P, $\varphi(P)$ 共線。

Proof. 只證過去，證回來由同一法即可。對於 φ 的兩對相互對 (P,P'), (Q,Q')，定義 $A=PP'\cap QQ'$，則對於任意一對相互對 (R,R')，我們有

$$P(P',R;Q,Q')=(P',R;Q,Q')_{\mathcal{C}}=(P,R';Q',Q)_{\mathcal{C}}=P'(P,R';Q',Q),$$

因此 $PR\cap P'R'$, $PQ\cap P'Q'$, $PQ'\cap P'Q$ 共線，即 $PR\cap P'R'$ 在 A 關於 $\mathcal{C}$ 的極線上，所以 A, R, R' 共線。 ■

一個直接的推論是：

Corollary 1.3.14. 反演變換爲保交比變換。 ■

其對偶命題爲：

Proposition 1.3.15. 令 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線，設 $\varphi:T\mathcal{C}\to T\mathcal{C}$ 爲一變換，則 φ 爲一對合變換若且唯若存在恰一線 $K\notin T\mathcal{C}$ 使得 $\forall S\in T\mathcal{C}$，$K$, S, $\varphi(S)$ 共點。 ■

有時要證明在已知圓錐曲線上的六點 (相切的六線) 當中組出的三線 (點) 共點 (線) 時，那麼可以等價於證明其爲對合相互對，所以就可以用保交比變換把要驗的點送到其他地方去驗。

Proposition 1.3.16. 延續 (1.3.5) 的標號。設 F_1, F_2 爲 φ 的不動點，那麼對於任意過 $\mathcal{Q}$ 的圓錐曲線 $\mathcal{C}$，F_1, F_2 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。

Proof. 令 F_1P_1, F_1P_2 分別與 $\mathcal{C}$ 交另一點於 X,Y，定義 X_{ij},Y_{ij} 分別爲 F_1P_1, F_1P_2 與 P_iP_j 的交點，$A=P_1P_4\cap P_2P_3$, $B=P_2P_4\cap P_3P_1$。分別在 F_1P_1, F_1P_2 上取點 X^*,Y^* 與 X^*_{ij},Y^*_{ij} 使得

$$(F_1,X^*;X,P_1)=(F_1,X^*_{ij};X_{ij},P_1)=-1,$$

$$(F_1,Y^*;Y,P_2)=(F_1,Y^*_{ij};Y_{ij},P_2)=-1.$$

由

$$A(F_1, X_{23}^*; X_{23}, P_1) = A(F_1, Y_{14}^*; P_2, Y_{14}) = A(F_1, F_2; Q_{24}, Q_{14}) = -1,$$

可得 X_{23}^*, Y_{14}^*, F_2 共線，同理有 X_{24}^*, Y_{13}^*, F_2 共線。

注意到由 (1.2.12) 可得

$$(X_{23}^*, X_{24}^*; F_1, X^*) = P_2(P_3, P_4; Y, X) = P_1(P_3, P_4; Y, X) = (Y_{13}^*, Y_{14}^*; Y^*, F_1),$$

因此 F_2, X^*, Y^* 共線，即 F_1, F_2 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。 ■

Remark. 這裡提供一個利用射影變換的證明：首先，若 $\mathcal{C}$ 與 ℓ 有交點，則結論顯然。若沒有交點，我們考慮一個射影變換 φ 將 ℓ 送至無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$。這時，由於 $\mathcal{C} \cap \ell = \varnothing$，所以 $\varphi(\mathcal{C})$ 是一個橢圓，所以可以再結合一個仿射變換使得 $\mathcal{C}$ 變成一個圓且 ℓ 依舊是無窮遠線，那麼可以發現不動點會是 $\angle P_2P_1P_3$ 的兩條角平分線上的無窮遠點，所以他們關於 $\mathcal{C}$ 共軛。

Example 1.3.17. 若取 $\ell = (P_3P_1 \cap P_2P_4)(P_1P_2 \cap P_3P_4)$，那麼我們就可以得到配極的基礎性質。

Proposition 1.3.18. 延續 (1.3.7) 的標號。設 F_1, F_2 爲 φ 的不動線，那麼對於任意切 Q 的圓錐曲線 $\mathcal{C}$，F_1, F_2 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。 ■

這兩個性質的應用會在下一節看到。

Proposition 1.3.19. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 及一線 L，

(i) 對於任意一點 Q，在 BC 取點 D 使得

$$(B, C),\ (AP \cap BC, L \cap BC),\ (AQ \cap BC, D)$$

爲某個對合的相互對，類似定義 E, F，則 D, E, F 共線。

(ii) 對於任意一線 K，在 TA 中取線 d 使得

$$(CA, AB),\ (A(L \cap BC), AP),\ (A(K \cap BC), d)$$

爲某個對合的相互對，類似定義 e, f，則 d, e, f 共點。

Definition 1.3.20. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 及一線 L，

(i) 我們將上述性質中 (i) 所共的線稱爲 Q 關於 $\triangle ABC$ 的 P, L-三線性極線，記爲

$$\mathfrak{t}_{P,L}(Q) = \mathfrak{t}_{P,L}(\triangle ABC, Q)$$

(ii) 我們將上述性質中 (ii) 所共的點稱爲 K 關於 $\triangle ABC$ 的 P, L-三線性極點，記爲

$$\mathfrak{t}_{P,L}(K) = \mathfrak{t}_{P,L}(\triangle ABC, K)$$

顯然地，

$$\mathfrak{t}_{P,L}(\mathfrak{t}_{P,L}(Q)) = Q.$$

當 $P = G$, $L = \mathcal{L}_\infty$ 時，我們就有原始的三線性極線與三線性極點，這時候簡記爲 $\mathfrak{t}(\,\cdot\,)$。

習題

Problem 1. 令 $ABCD$ 是一個四邊形且 ℓ 是一條直線，ℓ 分別交 AB, CD, BC, DA, AC, BD 於 X, X', Y, Y', Z, Z'。證明：以 $\overline{XX'}$, $\overline{YY'}$, $\overline{ZZ'}$ 爲直徑的圓們共軸。

Problem 2. 試證明蝴蝶定理。

Problem 3. 給定 $\triangle ABC$ 與三點 P, Q, R，設 D, E, F 分別爲 QR 與 BC, CA, AB 的交點，AP 交 QR 於 A_1，取 A_2 使得

$$(Q, R; F, A_1) = (R, Q; E, A_2),$$

類似定義 B_2, C_2。證明：AA_2, BB_2, CC_2 共點。

Problem 4. 令 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，M_a 爲 $\overline{BC}$ 中點，X_a 爲 AM_a 與 $\odot(ABC)$ 的另一個交點，Y_a 爲 $\overrightarrow{M_aH}$ 與 $\odot(ABC)$ 的交點，同樣定義 X_b, Y_b, X_c, Y_c，證明 X_aY_a, X_bY_b, X_cY_c 共點於 $\triangle ABC$ 的歐拉線上。

Problem 5. 令 $\odot(I_a)$ 爲 A 關於 $\triangle ABC$ 的切圓，$\odot(I_a)$ 與 $\odot(ABC)$ 的公切線交 BC 於 X, Y，證明 AI_a 爲 $\angle XAY$ 的角平分線。

Problem 6. 給定 $\triangle ABC$，令 D 爲邊 BC 上任意一點，I, I_1, I_2 分別爲 $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ADC$ 的內心，M, N 分別爲 $\odot(ABC)$ 與 $\odot(IAI_1)$, $\odot(IAI_2)$ 的另兩個交點。證明：MN 定點。

Problem 7. 令 B, C 關於 $\triangle ABC$ 的旁心分別爲 I_b, I_c，$\odot(I)$ 爲 $\triangle ABC$ 的內切圓，D 爲 $\odot(I)$ 與 BC 的切點，DI_b, DI_c 分別交 $\odot(I)$ 另一點於 X, Y，證明 AD, BX, CY 共點。

Problem 8. 令 $\odot(O)$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓，M 爲 $\overset{\frown}{BC}$ 中點，B', C' 分別位於 CA, AB 上使得 $BB' \parallel CC' \parallel AM$，$MB'$, MC' 分別交 $\odot(O)$ 另一點於 P, Q，$S = PQ \cap BC$，證明 AS 爲 A 關於 $\odot(O)$ 的切線。

Problem 9. 令 I_b, I_c 分別爲 B, C 關於銳角 $\triangle ABC$ 的旁心，$\odot(O)$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓，D 在 $\odot(O)$ 上使得 $AD \perp BC$，DI_b, DI_c 分別交 $\odot(O)$ 另一點於 Y, Z，$X = YZ \cap BC$，證明由 AX, AO, BC 所圍成的三角形爲等腰三角形。

1.4 等共軛變換

下面這兩個定義看起來滿長的，大家也可以先看完下一節再回來看比較抽象的情形。

Definition 1.4.1. 給定任意 $\triangle ABC$，若圓錐曲線族 $\mathscr{F} \neq \varnothing$ 滿足以下性質:

(i) 對於任意 $\mathcal{C} \in \mathscr{F}$，$\triangle ABC$ 爲關於 $\mathcal{C}$ 的自共軛三角形。

(ii) 給定任意一點 $P \notin BC \cup CA \cup AB$，存在恰一點 $\varphi(P) \notin BC \cup CA \cup AB$ 使得對於任意 $\mathcal{C} \in \mathscr{F}$，$P$, $\varphi(P)$ 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。

(iii) 對於任意 $\mathcal{C} \notin \mathscr{F}$，$\mathcal{C}$ 至少不滿足 (i) 與 (ii) 其中一個命題。

則我們稱變換 $P \mapsto \varphi(P)$ 爲 $\triangle ABC$ 上的點等共軛變換 (**Isoconjugation on Points**)。所有 $\mathcal{C} \in \mathscr{F}$ 爲 φ 的對角圓錐曲線 (**Diagonal Conic**)，$\mathscr{F}$ 爲 φ 的對角圓錐曲線族，而 $\varphi(P)$ 爲 P 在此點等共軛變換下的等共軛點 (**Isoconjugate Point**)。我們定義 $\varphi(G)$ 爲此點等共軛變換的極點 (**Pole**)，其中 G 爲 $\triangle ABC$ 的重心。

對偶地，我們定義

Definition 1.4.2. 給定任意 $\triangle ABC$，若圓錐曲線族 $\mathscr{F} = \varnothing$ 滿足以下性質:

(i) 對於任意 $\mathcal{C} \in \mathscr{F}$，$\triangle ABC$ 爲關於 $\mathcal{C}$ 的自共軛三角形。

(ii) 給定任意一線 $\ell \cap \{A, B, C\} = \varnothing$，存在恰一線 $\varphi(\ell) \cap \{A, B, C\} = \varnothing$ 使得對於任意 $\mathcal{C} \in \mathscr{F}$，$\ell, \varphi(\ell)$ 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。

(iii) 對於任意 $\mathcal{C} \notin \mathscr{F}$，$\mathcal{C}$ 至少不滿足 (i) 與 (ii) 其中一個命題。

則我們稱變換 $\ell \mapsto \varphi(\ell)$ 爲 $\triangle ABC$ 上的線等共軛變換 (**Isoconjugation on Lines**)，所有 $\mathcal{C} \in \mathscr{F}$ 爲 φ 的對角圓錐曲線，$\mathscr{F}$ 爲 φ 的對角圓錐曲線族，而 $\varphi(\ell)$ 爲 ℓ 在此線等共軛變換下的等共軛線 (**Isoconjugate Line**)。我們定義 $\varphi(\mathcal{L}_\infty)$ 爲此點等共軛變換的極線 (**Polar**)，其中 $\mathcal{L}_\infty$ 爲無窮遠線。

Remark. 注意到上述定義中點和線是對偶的，因此以下皆只證明點的性質。另外，若以重心坐標的角度來看，我們會知道一個等共軛變換一定是如同

$$[x : y : z] \mapsto \left[\frac{u}{x} : \frac{v}{y} : \frac{w}{z}\right]$$

的形式。我們稱 $P = [u : v : w] = \varphi(G)$ 是這個點等共軛變換的極點 (**Pole**)，其中 G 爲 $\triangle ABC$ 的重心。

Proposition 1.4.3 (等共軛變換基本定理)**.** 給定 $\triangle ABC$，一圓錐曲線族 $\mathscr{F}$ 由其中的兩個相異元素 $\mathcal{C}_0$ 與 $\mathcal{C}_\infty$ 決定。事實上，所有 $\mathscr{F}$ 中的元素皆可寫成

$$\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_0 + t \cdot \mathcal{C}_\infty,$$

也就是說 $\mathscr{F}$ 是一個圓錐曲線束 (**Pencil**)。

Proof. 我們只證明第一部分，也就是對於所有 $P \notin BC \cup CA \cup AB$，$\mathfrak{p}_{\mathcal{C}_0}(P) \neq \mathfrak{p}_{\mathcal{C}_\infty}(P)$。考慮變換 $\varphi(P) = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}_\infty}(\mathfrak{p}_{\mathcal{C}_0}(P))$，並假設存在 $P_0 \notin BC \cup CA \cup AB$ 使得 $\varphi(P_0) = P_0$。由 (1.2.9)，我們有 $\varphi = \mathrm{id}$。因此對於所有 $P \in \mathcal{C}_0$，

$$P = \varphi(P) = \mathfrak{p}_{c_\infty}(\mathfrak{p}_{\mathcal{C}_0}(P)) = \mathfrak{p}_{c_\infty}(T_P\mathcal{C}_0) \implies P \in T_P\mathcal{C}_0 = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}_\infty}(P),$$

所以 $P \in \mathcal{C}_\infty$，這與 $\mathcal{C}_0 \neq \mathcal{C}_\infty$ 矛盾。 ■

那下面這個應該是後面最常用的性質之一。

Proposition 1.4.4. 給定任意 $\triangle ABC$，令 φ 爲一點等共軛變換，ℓ 爲一直線

(i) 若 $\ell \cap \{A, B, C\} = X$，那麼 $\varphi(\ell)$ 爲過 X 的直線。

(ii) 若 $\ell \cap \{A, B, C\} = \varnothing$，那麼 $\varphi(\ell)$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線。

Proof. 令 $\mathscr{F}$ 爲 φ 的對角圓錐曲線族，易知存在兩圓錐曲線 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathscr{F}$ 使得 ℓ 關於 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 的極點 P_1, P_2 不重合，令 $M \in \ell$ 爲一點。

(i) 不妨假設 $\ell \cap \{A, B, C\} = A$，令 ℓ 交 BC 於 D，由配極變換爲保交比變換知

$$P_1(A, P_2; \varphi(\infty_\ell), \varphi(M)) = (D, A; \infty_\ell, M) = P_2(A, P_1; \varphi(\infty_\ell), \varphi(M))$$

因此 $A, \varphi(\infty_\ell), \varphi(M)$ 共線，即 $\varphi(\ell) \subseteq A\varphi(M)$，同理可證明 $A\varphi(M) \subseteq \varphi(\ell)$。

(ii) 令 ℓ 分別交 BC, CA, AB 於 D, E, F，$\mathcal{C}$ 爲通過 A, B, C, P_1, P_2 的圓錐曲線，由配極變換爲保交比變換知

$$P_1(A, B; C, \varphi(M)) = (D, E; F, M) = P_2(A, B; C, \varphi(M))$$

因此 A, B, C, $\varphi(M)$, P_1, P_2 共圓錐曲線，即 $\varphi(\ell) \subseteq \mathcal{C}$，同理可證明 $\mathcal{C} \subseteq \varphi(\ell)$。 ■

Proposition 1.4.5. 給定任意 $\triangle ABC$，令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的點等共軛變換，則對於所有頂點 $X \in \{A, B, C\}$，$[XP \mapsto X\varphi(P)]$ 是一對合變換。

Proof. 易知其階爲 2，因此只要證明它保交比即可。令 $\mathcal{C}$ 爲 φ 的其中一個對角圓錐曲線，O 爲其中心，M 爲一無窮遠點，那麼由配極變換爲保交比變換知

$$(A, B; C, \varphi(M))_{\varphi(\mathcal{L}_\infty)} = O(A, B; C, \varphi(M)) = (\infty_{BC}, \infty_{CA}; \infty_{AB}, M)$$

因此

$$[XP \mapsto X\varphi(P)] = [S \mapsto XS] \circ [R \mapsto \varphi(R)] \circ [XP \mapsto \infty_{XP}]$$

爲一射影變換。 ■

Corollary 1.4.6. 給定任意 $\triangle ABC$，令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的點等共軛變換，對於任兩點 P, Q，令 $R = PQ \cap \varphi(P)\varphi(Q)$, $S = P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q$，則 $S = \varphi(R)$。

Proof. 由上述性質知

$$\begin{aligned} A(P, Q; \varphi(P), S) &= P(A, R; \varphi(P), \varphi(Q)) \\ &= A(P, R; \varphi(P), \varphi(Q)) \\ &= A(P, Q; \varphi(P), \varphi(R)), \end{aligned}$$

故 $AS = A\varphi(R)$，同理有 $BS = B\varphi(R)$, $CS = C\varphi(R)$，因此 $S = \varphi(R)$。 ■

Proposition 1.4.7. 給定任意 $\triangle ABC$，φ 爲 $\triangle ABC$ 上的點等共軛變換。則對於任意一點 P，$\varphi(P)$ 爲 $\triangle ABC$ 與 $\mathfrak{p}_{\varphi(\mathfrak{t}_p)}(\triangle ABC)$ 的透視中心，其中 $\mathfrak{t}_P$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線。

Proof. 由 (1.4.5)，

$$(A\varphi(P), T_A\varphi(\mathfrak{t}_P); AB, AC) = A(P, \mathfrak{t}_P \cap BC; C, B) = -1,$$

所以 $\mathfrak{p}_{\varphi(\mathfrak{t}_P)}(A) = T_A\varphi(\mathfrak{t}_P)$ 爲 $\varphi(P)$ 的反西瓦三角形的邊。同理可得 $\mathfrak{p}_{\varphi(\mathfrak{t}_P)}(B)$, $\mathfrak{p}_{\varphi(\mathfrak{t}_P)}(C)$ 也爲反西瓦三角形的邊，因此 $\varphi(P)$ 爲 $\triangle ABC$ 與 $\mathfrak{p}_{\varphi(\mathfrak{t}_p)}(\triangle ABC)$ 的透視中心。 ■

取 P 爲重心 G 我們得到：

Corollary 1.4.8. 若 φ 爲 $\triangle ABC$ 上以 G^φ 爲極點的點等共軛變換，$\triangle G_a^\varphi G_b^\varphi G_c^\varphi$ 爲 G^φ 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形，則 $\varphi(\mathcal{L}_\infty)$ 是分別切 $\triangle G_a^\varphi G_b^\varphi G_c^\varphi$ 三邊於 A, B, C 的圓錐曲線。

Proposition 1.4.9. 若一變換

$$\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \setminus BC \cup CA \cup AB \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \setminus BC \cup CA \cup AB$$

滿足：對於所有頂點 $X \in \{A, B, C\}$，

$$X, P_1, P_2 \text{ 共線} \implies X, \varphi(P_1), \varphi(P_2) \text{ 共線}$$

且 $[XP \mapsto X\varphi(P)]$ 是一對合變換，則 φ 是點等共軛變換。

Proof. 顯然地，$\varphi^2 = \mathrm{id}$。取任意一點 P_0 使得對於所有頂點 $X \in \{A, B, C\}$，$XP_0 \neq X\varphi(P_0)$，那麼 φ 由 $P_0, \varphi(P_0)$ 決定：

$$X(Y, Z; P_0, P) = X(Z, Y; \varphi(P_0), \varphi(P)), \quad \varphi(P) = B\varphi(P) \cap C\varphi(P).$$

其中 Y, Z 是剩下兩個頂點。由 (1.4.3) 我們只要找到兩個使得 $\triangle ABC$ 爲自共軛三角形的圓錐曲線 $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_\infty$ 使得

$$\varphi(P) = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}_0}(P) \cap \mathfrak{p}_{\mathcal{C}_\infty}(P)$$

即可。因爲 $[XP \mapsto X\varphi(P)]$ 是保交比變換，所以只要滿足

$$\varphi(P_0) = \mathfrak{p}_{\mathcal{C}_0}(P_0) \cap \mathfrak{p}_{\mathcal{C}_\infty}(P_0)$$

即可。取 $\mathcal{C}_0$ 爲過 P_0，與 $P_0\varphi(P_0)$ 相切且使得 $\triangle ABC$ 爲自共軛三角形的圓錐曲線 (1.1.8)。類似地，取 $\mathcal{C}_\infty$ 爲過 $\varphi(P_0)$，與 $P_0\varphi(P_0)$ 相切且使得 $\triangle ABC$ 爲自共軛三角形的圓錐曲線。因爲 $P_0 \neq \varphi(P_0)$，所以 $\mathcal{C}_0 \neq \mathcal{C}_\infty$ 而

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{C}_0}(P_0) \cap \mathfrak{p}_{\mathcal{C}_\infty}(P_0) = P_0\varphi(P_0) \cap \mathfrak{p}_{\mathcal{C}_\infty}(P_0) \ni \varphi(P_0). \qquad \blacksquare$$

Theorem 1.4.10. 給定 $\triangle ABC$，對於任意一不過頂點的直線 $\mathcal{L}$，我們有如下的一一對應：

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \triangle ABC \text{ 上的點等共軛變換} \right\} & \longleftrightarrow & \left\{ \triangle ABC \text{ 的外接圓錐曲線} \right\} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(\mathcal{L}). \end{array}$$

Proof. 若有兩個等共軛變換 φ, ψ 使得 $\varphi(\mathcal{L}) = \psi(\mathcal{L})$。令 P 爲 $\mathcal{L}$ 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極點，由 (1.4.8) 我們知道 $\varphi(P) = \psi(P)$。對於任意一點 Q，

$$A(B, C; \varphi(G), \varphi(Q)) = A(C, B; G, Q) = A(B, C; \psi(G), \psi(Q)),$$

即 $A, \varphi(Q), \psi(Q)$ 共線。同理可得 $B, \varphi(Q), \psi(Q)$ 及 $C, \varphi(Q), \psi(Q)$ 分別共線，因此 $\varphi(Q) = \psi(Q)$。

接著，對於任意外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$，我們構造 φ 使得 $\mathcal{C} = \varphi(\mathcal{L}_\infty)$。對於任意一點 P，令 $\triangle P_AP_BP_C$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{C}$-西瓦三角形，

$$P_A' = P_A(\ell \cap BC) \cap \mathcal{C}, \quad P_B' = P_B(\ell \cap CA) \cap \mathcal{C}, \quad P_C' = P_C(\ell \cap AB) \cap \mathcal{C}.$$

由帕斯卡定理，$P,\ X := \ell \cap BC,\ Y := P'_A P_B \cap CA,\ Z := P'_A P_C \cap AB$ 共線 (見 (6.2.1))，所以

$$\begin{aligned}(A, AP'_A \cap BP'_B; AP'_A \cap BC, P'_A) &\overset{B}{=} (A, P'_B; C, P'_A) \overset{P_B}{=} (A, \ell \cap CA; C, Y)\\ &\overset{X}{=} (A, \ell \cap AB; B, Z) \overset{P_C}{=} (A, P'_C; B, P'_A)\\ &\overset{C}{=} (A, CP'_C \cap AP'_A; AP'_A \cap BC, P'_A),\end{aligned}$$

故 AP'_A, BP'_B, CP'_C 共於一點 $\varphi(P)$。由 (1.3.13)，$[P_A \mapsto P'_A]$ 爲一對合變換，因此

$$[AP \mapsto A\varphi(P)] = [P'_A \mapsto A\varphi(P)] \circ [P_A \mapsto P'_A] \circ [AP \mapsto P_A]$$

也爲對合變換。同理可得 $[BP \mapsto B\varphi(P)], [CP \mapsto C\varphi(P)]$ 也爲對合變換，所以再由 (1.4.9) 可得 φ 爲點等共軛變換。 ■

Definition 1.4.11. 給定 $\triangle ABC$ 與不過頂點的直線 $\mathcal{L}$ 與不在邊上的點 $\wp$。

(i) 對於任意點共軛變換 φ，我們記 $\mathcal{L}^\varphi = \varphi(\mathcal{L})$。

(ii) 對於任意外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$，我們記 $\mathcal{L}_\mathcal{C}$ 爲上述一一對應中 $\mathcal{C}$ 對應到的元素。

(iii) 對於任意線等共軛變換 φ，我們記 $\wp^\varphi$ 爲 $\varphi(T\wp)$ 的包絡線。

(iv) 對於任意內切圓錐曲線 $\mathcal{C}$，我們記 $\wp_\mathcal{C}$ 爲上述一一對應的對偶版本中 $\mathcal{C}$ 對應到的元素。

Proposition 1.4.12. 給定任意 $\triangle ABC$，φ 爲 $\triangle ABC$ 上的點等共軛變換，$\mathscr{F}$ 爲 φ 的對角圓錐曲線族，若 P 爲 φ 的不動點，則

$$P \in \bigcap_{\mathcal{C} \in \mathscr{F}} \mathcal{C}.$$

Proof. 對於任意 $\mathcal{C} \in \mathscr{F}$，由 P, P 關於 $\mathcal{C}$ 共軛知 $P \in \mathcal{C}$。 ■

Proposition 1.4.13. 給定任意 $\triangle ABC$，φ 爲 $\triangle ABC$ 上的點等共軛變換，則 φ 的不動點數量至多爲 4。

Proof. 令 $\mathscr{F}$ 爲 φ 的對角圓錐曲線族。若存在五個不動點 $P_1, \ldots, P_5$，則對於所有 $\mathcal{C} \in \mathscr{F}$，$P_1, \ldots, P_5 \in \mathcal{C}$，而 $|\mathscr{F}| > 1$，矛盾。 ■

Proposition 1.4.14. 給定任意 $\triangle ABC$，令 $P \notin BC \cup CA \cup AB$ 爲任意一點，φ 爲一點等共軛變換，$\mathscr{F}$ 爲 φ 的對角圓錐曲線族，令 $\triangle P_aP_bP_c$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形，若 P 爲 φ 的不動點，則 P_a, P_b, P_c 也爲 φ 的不動點。

Proof. 令 $Q_a = AP \cap BC, \mathcal{C} \in \mathscr{F}$，則 A, Q_a 關於 $\mathcal{C}$ 共軛，因此由

$$(A, Q_a; P, P_a) = -1$$

及 $P \in \mathcal{C}$ 知 $P_a \in \mathcal{C}$，故 P_a, P_a 關於 $\mathcal{C}$ 共軛，即 P_a 也爲 φ 的不動點，同理可知，P_b, P_c 也爲 φ 的不動點。 ■

上面這些性質以解析的角度來看是顯然，可惜我不太喜歡解析。接下來總算有個看起來比較有用的結論了 (O

Proposition 1.4.15. 給定任意 $\triangle ABC$ 及一點 P，令 $\triangle P_aP_bP_c$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形，$\mathscr{F}$ 爲所有經過 P, P_a, P_b, P_c 的圓錐曲線的集合，對於任意一點 $M \notin \{A, B, C\}$，存在一點 M^* 滿足

$$\begin{aligned} -1 &= (AM, AM^*; PP_a, P_bP_c) \\ &= (BM, BM^*; PP_b, P_cP_a) \\ &= (CM, CM^*; PP_c, P_aP_b) \end{aligned}$$

且對於所有 $\mathcal{C} \in \mathscr{F}$，$M, M^*$ 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。

Proof. 取點 M^* 滿足 $(BM, BM^*; PP_b, P_cP_a) = (CM, CM^*; PP_c, P_aP_b) = -1$，考慮完全四點形 (P, P_a, P_b, P_c) 與直線 MM^*，存在一射影對合變換 $\varphi \in \operatorname{Aut}(MM^*)$ 使得

$$(PP_a \cap MM^*, P_bP_c \cap MM^*)$$

及其輪換皆爲 φ 的相互對，易知 M, M^* 爲 φ 的不動點，因此

$$(AM, AM^*; PP_a, P_bP_c) = -1$$

且由 (1.3.16) 知 M, M^* 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。 ■

結合 (1.4.12)，我們就可以得到：

Corollary 1.4.16. 給定任意 $\triangle ABC$，對於一點等共軛變換 φ，令 P, P_a, P_b, P_c 爲 φ 的不動點，則 φ 的對角圓錐曲線族爲

$$\mathscr{F}_\varphi = \{\mathcal{C} \mid P, P_a, P_b, P_c \in \mathcal{C}\}.$$

另一方面，對於一點 P，若 P 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形爲 $\triangle P_aP_bP_c$，那麼存在唯一一個使 $\{\mathcal{C} \mid P, P_a, P_b, P_c \in \mathcal{C}\}$ 爲對角圓錐曲線且 P, P_a, P_b, P_c 爲不動點的點等共軛變換 φ。

Proposition 1.4.17. 給定任意 $\triangle ABC$，令 φ 爲一點等共軛變換且 P, P_a, P_b, P_c 爲 φ 的不動點，那麼對於任意直線 ℓ，$\varphi(\ell)$ 爲 ℓ 關於完全四點形 (P, P_a, P_b, P_c) 的九點圓錐曲線 (0.4.8)。

Proof. 令 $\mathcal{C}$ 爲 ℓ 關於完全四點形 (P, P_a, P_b, P_c) 的九點圓錐曲線，PP_a, PP_b, PP_c, P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b 分別與 ℓ 交於 Q_a, Q_b, Q_c, Q'_a, Q'_b, Q'_c，取 R_a 使得

$$(P, P_a; Q_a, R_a) = -1.$$

類似定義 R_b, R_c, R'_a, R'_b, R'_c，則由 PP_a 爲不動線及 P, P_a 爲不動點知 $R_a = \varphi(Q_a) \in \varphi(\ell)$，同理有 R_b, R_c, R'_a, R'_b, $R'_c \in \varphi(\ell)$，故 $\mathcal{C} = \varphi(\ell)$。 ■

應該說我們一開始也可以這樣定義九點圓錐曲線，這樣證明共圓錐曲線簡單多了。取 $\ell = \mathcal{L}_\infty$ 結合 (1.4.8) 就可以得到 (P, P_a, P_b, P_c) 的九點圓錐曲線是 $\triangle G_a^*G_b^*G_c^*$ 的內切圓錐曲線。這節就以一個等共軛變換的應用來當結尾。

Theorem 1.4.18. 對於任意完全四點形 (P_1, P_2, P_3, P_4)，所有經過 P_1, P_2, P_3, P_4 的圓錐曲線的中心的軌跡爲 (P_1, P_2, P_3, P_4) 的九點圓錐曲線。

那他的推廣是：

Theorem 1.4.19. 對於任意完全四點形 (P_1, P_2, P_3, P_4) 及一線 ℓ，ℓ 關於所有經過 P_1, P_2, P_3, P_4 的圓錐曲線的極點的軌跡爲 ℓ 關於 (P_1, P_2, P_3, P_4) 的九點圓錐曲線。

Proof. 令 $\triangle ABC$ 爲 (P_1, P_2, P_3, P_4) 的西瓦三角形，φ 爲 $\triangle ABC$ 上並且以 P_1, P_2, P_3, P_4 爲不動點的點等共軛變換。

(⇒) 令 $\mathcal{C}$ 爲過 P_1, P_2, P_3, P_4 的圓錐曲線，那麼

$$\varphi(\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\ell)) \in \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\ell)) = \ell,$$

因此由 (1.4.17) 知 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\ell)$ 位於 ℓ 關於 (P_1, P_2, P_3, P_4) 的九點圓錐曲線上。

(⇐) 令 O 爲 (P_1, P_2, P_3, P_4) 的九點圓錐曲線上一點，取 $Q_i \in OP_i$ 使得

$$(Q_i, OP_i \cap \ell; O, P_i) = -1,$$

$\mathcal{C}_i$ 爲過 P_1, P_2, P_3, P_4, Q_i 的圓錐曲線，那麼 O 爲關於 $\mathcal{C}_i$ 的極線經過 $\varphi(O)$ 及 $OP_i \cap \ell$。若 O 皆不爲 ℓ 關於 $\mathcal{C}_i$ 的極點就有 $\varphi(O) = OP_i \cap \ell$，則 O, P_1, P_2, P_3, P_4 共線，矛盾。 ■

上面的推論與性質都有對偶版本，那這邊就省略敘述及證明。

1.5 等角共軛點

等角共軛點是平面幾何非常重要的概念之一，也是數學競賽中經常用到的工具。相信讀到這裡的各位應該已經看過很多次了，不過還是正式的定義一下。

Definition 1.5.1. 給定兩線 ℓ_1, ℓ_2，滿足 $\ell_1 \cap \ell_2 \notin \mathcal{L}_\infty$。那麼我們說過 P 兩線 K, L 爲關於 $\angle(\ell_1, \ell_2)$ 的等角線若

$$\measuredangle(K, \ell_1) + \measuredangle(L, \ell_2) = 0^\circ.$$

Definition 1.5.2. 給定任意完全 n 線形 $\mathcal{N}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$，定義 $A_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$。對於一個點 P，若存在一點 P^*，使得對於所有 $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$，$A_{ij}P$, $A_{ij}P^*$ 爲關於 $\angle(\ell_i, \ell_j)$ 的等角線，那麼我們稱 P^* 爲 P 關於 $\mathcal{N}$ 的等角共軛點 (**Isogonal Conjugate**)，或稱 (P, P^*) 爲關於 $\mathcal{N}$ 的一對等角共軛點對 (注意到 P 也爲 P^* 關於 $\mathcal{N}$ 的等角共軛點)。

Example 1.5.3. 給定 $\triangle ABC$，其外心及垂心爲關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，其內心及三個旁心則爲自己的等角共軛點。

Example 1.5.4. 設 $ABCD$ 爲一圓上的調和四邊形，那麼 $\overline{AC}$ 中點及 $\overline{BD}$ 中點爲關於 (AB, BC, CD, DA) 的等角共軛點對。

Proposition 1.5.5. 給定任意 $\triangle ABC$，則對於任意一點 P，存在一點 P^* 使得 P^* 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。

一般來說，這個性質的證明都是使用角元西瓦或正交三角形來證明，不過我個人還是比較喜歡用角度來證明命題。

Proof. 令 $\triangle P_aP_bP_c$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形，$\triangle DEF$ 爲 P 關於 $\triangle P_aP_bP_c$ 的佩多三角形，則

$$\measuredangle EDF = \measuredangle EDP + \measuredangle PDF = \measuredangle P_aP_cC + \measuredangle BP_bP_c = \measuredangle BAC,$$

同理有 $\measuredangle FED = \measuredangle CBA, \measuredangle DFE = \measuredangle ACB$，所以 $\triangle ABC \overset{+}{\sim} \triangle DEF$，取 P^* 使得 $\triangle ABC \cup P^* \overset{+}{\sim} \triangle DEF \cup P$，則

$$\measuredangle PAB + \measuredangle P^*AC = \measuredangle P_aAB + \measuredangle PDF = \measuredangle P_aP_bB + \measuredangle PP_bF = 0^\circ.$$

同理有其他輪換式子，所以 P^* 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。 ■

Proposition 1.5.6. 給定任意 $\triangle ABC$，則對於任意一點 P，點 Q 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點若且唯若

$$\measuredangle CPA + \measuredangle CQA = \measuredangle CBA \quad 及 \quad \measuredangle APB + \measuredangle AQB = \measuredangle ACB.$$

Proof.

($\Rightarrow$) 簡單的算角度練習。

($\Leftarrow$) 令 P^* 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。熟知滿足 $\measuredangle CPA + \measuredangle CRA = \measuredangle CBA$ 的 R 的軌跡爲 $\odot(CP^*A) \setminus \{C, A\}$，同樣地，滿足 $\measuredangle APB + \measuredangle ARB = \measuredangle ACB$ 的 R 的軌跡爲 $\odot(AP^*B) \setminus \{A, B\}$。因此

$$Q \in (\odot(CP^*A) \setminus \{C, A\}) \cap (\odot(AP^*B) \setminus \{A, B\}) = \{P^*\}$$

即 $Q = P^*$。 ■

Proposition 1.5.7. 對於任意完全 n 線形 $\mathcal{N}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$ 及一點 P，定義 P_i 爲 P 關於 ℓ_i 的垂足，則 P 存在關於 $\mathcal{N}$ 的等角共軛點若且唯若 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 共圓 (佩多圓)。此時，若 P^* 爲 P 關於 $\mathcal{N}$ 的等角共軛點，定義 P_i^* 爲 P^* 關於 ℓ_i 的垂足，則 $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_1^*, P_2^*, \ldots, P_n^*$ 共圓且其圓心爲 $\overline{PP^*}$ 中點。

Proof. 令 $A_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$。

(⇒) 令 P^* 爲 P 關於 $\mathcal{N}$ 的等角共軛點，P_i^* 爲 P^* 關於 ℓ_i 的垂足，則由 $A_{ij}PP_iP_j$ 與 $A_{ij}P^*P_j^*P_i^*$ 負向相似知 P_i, P_j, P_i^*, P_j^* 共圓。因爲 ℓ_i, ℓ_j, ℓ_k 不共點，所以 $P_i, P_j, P_k, P_i^*, P_j^*, P_k^*$ 共圓，故 $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_1^*, P_2^*, \ldots, P_n^*$ 共圓。易知其圓心位於 $\overline{P_iP_i^*}$ 的中垂線上，所以其圓心爲 $\overline{PP^*}$ 中點，這證明了後半部分。

(⇐) 令 P_i^* 爲 $\odot(P_1P_2\ldots P_n)$ 與 ℓ_i 的另一個交點，由 (⇒) 及 P 存在關於 $\triangle A_{jk}A_{ki}A_{ij}$ 的等角共軛點知 P_i^*, P_j^*, P_k^* 分別關於 ℓ_i, ℓ_j, ℓ_k 的垂線交於 P 關於 $\triangle A_{jk}A_{ki}A_{ij}$ 的等角共軛點，故 $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_n^*$ 分別關於 $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ 的垂線交於一點，設其爲 P^*，則 P^* 爲 P 關於 $\mathcal{N}$ 的等角共軛點。 ■

Example 1.5.8. 取 $\mathcal{N} = \triangle ABC$，$P, P^*$ 分別取 $\triangle ABC$ 的外心及垂心，那麼我們就有 $\triangle ABC$ 的垂足三角形與中點三角形共外接圓 (九點圓)。

那等角共軛點跟圓錐曲線有很大的關連，主要原因是因爲下面這個：

Theorem 1.5.9. 對於任意完全 n 線形 $\mathcal{N}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$ 及不在線上的兩點 P, P^*，則 (P, P^*) 爲 $\mathcal{N}$ 的一對等角共軛點對若且唯若存在以 P, P^* 爲焦點的圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 使得 $\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{N}$ 相切。

Proof. 令 $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_n^*$ 分別爲 P^* 關於 $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ 的對稱點。

(⇒) 則 $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_n^*$ 共圓且圓心爲 P，令 T_i 爲 PP_i^* 與 ℓ_i 的交點，則 $\overline{PT_i} \pm \overline{P^*T_i} = \overline{PP_i^*}$ 爲定值，因此存在以 P, P^* 爲焦點的圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 過 T_i，由 ℓ_i 爲 $\angle PT_iP^*$ 的角平分線知 $\mathcal{C}$ 與 ℓ_i 相切，即 $\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{N}$ 相切。

(⇐) 令 $T_i = T_{\ell_i}\mathcal{C}$，則 $\overline{PP_i^*} = \overline{PT_i} \pm \overline{P^*T_i}$ 爲定值，因此 $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_n^*$ 共圓且圓心爲 P，則由該圓在位似變換 $(P^*, 1/2)$ 下的像可得到 (P, P^*) 爲 $\mathcal{N}$ 的一對等角共軛點對。 ■

Corollary 1.5.10. 對於任意完全 n 線形 $\mathcal{N}$，其中 $n \geqslant 5$，至多存在一對 $\mathcal{N}$ 的等角共軛點對 (恰存在一對當 $n = 5$ 時)。

關於四邊形的等角共軛點後面會用一整個章節來講解，這邊先提幾個特別重要的：

Corollary 1.5.11. 對於任意完全四線形 $\mathcal{Q}$，其所有等角共軛點對的中點軌跡爲 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線。

Proof. 結合牛頓第二定理 (0.4.14)。 ■

Proposition 1.5.12. 給定任意完全四線形 $\mathcal{Q} = (AB, BC, CD, DA)$，則對於任意一點 P，P 有關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點若且唯若

$$\measuredangle APB + \measuredangle CPD = 0^\circ.$$

Proof. 令 P 關於 AB, BC, CD, DA 的垂足分別爲 W, X, Y, Z，則 P 有關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點若且唯若 W, X, Y, Z 共圓，等價於

$$\measuredangle WXP + \measuredangle PXY + \measuredangle YZP + \measuredangle PZW = 0^\circ \iff \measuredangle APB + \measuredangle CPD = 0^\circ$$ ■

Theorem 1.5.13. 給定任意完全四線形 $\mathcal{Q}$，令 M 爲 $\mathcal{Q}$ 的密克點，τ 爲 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線，則 (M, ∞_τ) 爲關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點對。

Proof. 令 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$，$M_i$ 爲 M 關於 ℓ_i 的對稱點，則知 M_1, M_2, M_3, M_4 共於垂心線 L 且垂直於 τ，因此以 M 爲焦點，L 爲準線的拋物線與 ℓ_i 相切且另一個焦點爲 ∞_τ，故 (M, ∞_τ) 爲關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點對。 ■

回到三角形的情況，我們有：

Proposition 1.5.14. 給定任意 $\triangle ABC$，將一點 P 映射至其關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 P^* 的變換爲一點等共軛變換 (稱爲等角共軛變換)。

Proof. 令 I, I_a, I_b, I_c 爲 $\triangle ABC$ 的內心與 A, B, C 分別關於 $\triangle ABC$ 的旁心，考慮所有經過 I, I_a, I_b, I_c 的圓錐曲線族定義的點等共軛變換 φ，則由

$$(AP, AP^*; II_a, I_bI_c) = (BP, BP^*; II_b, I_cI_a) = (CP, CP^*; II_a, I_aI_b) = -1,$$

知 $P^* = \varphi(P)$，因此 φ 即爲將一點 P 映射至其等角共軛點 P^* 的變換。 ■

所以說等角共軛變換是以 $\triangle ABC$ 的類似重心 K 爲極點的等共軛變換。在下一章，我們會看到以垂心 H 爲極點的等共軛變換。這邊就拿 (1.4.17) 來得到一個直接推論：

Corollary 1.5.15. 給定任意 $\triangle ABC$，令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的等角共軛變換，則 $\varphi(\odot(ABC)) = \mathcal{L}_\infty$。 ■

這個算角度也是顯然的。

Example 1.5.16. 令 $\mathcal{S}_P$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的西姆松線 (或施坦納線)(6.1.10)，P^* 爲 P 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點，則 $(P^*, \infty_{\mathcal{S}_P})$ 爲關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。

除此之外還有一些基本性質：

Proposition 1.5.17. 給定 $\triangle ABC$，令 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，(P, P^*) 爲關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，$P^{*\prime}$ 爲 P^* 關於 O 的對稱點。令 $\triangle P_aP_bP_c$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，$\triangle P_a^*P_b^*P_c^*$ 爲 P^* 關於 $\triangle ABC$ 的反佩多三角形，那麼：

(i) $(P^*, P^{*\prime})$ 爲關於 $\triangle P_a^*P_b^*P_c^*$ 的等角共軛點對

(ii) $\triangle P_aP_bP_c \cup P \overset{+}{\sim} \triangle P_a^*P_b^*P_c^* \cup P^{*\prime}$

(iii) 令 Q 爲 P 關於 $\triangle P_aP_bP_c$ 的等角共軛點，那麼 $PQ \parallel OP^*$

Proof. 我們依序證明命題 (i), (ii), (iii)。

(i) 注意到 P^* 關於 $\triangle P_a^*P_b^*P_c^*$ 的佩多圓爲 $\odot(ABC)$，所以 P^* 關於 $\triangle P_a^*P_b^*P_c^*$ 的等角共軛點爲 P^* 關於 $\odot(ABC)$ 的圓心的對稱點，即 $P^{*\prime}$。

(ii) 顯然地，$P_b^*P_c^* \perp AP^* \perp P_bP_c,\ P_c^*P^{*\prime} \perp AB \perp P_cP,\ P^{*\prime}P_b^* \perp CA \perp PP_b$，所以 $\triangle PP_bP_c \overset{+}{\sim} \triangle P^{*\prime}P_b^*P_c^*$，同理有

$$\triangle PP_cP_a \overset{+}{\sim} \triangle P^{*\prime}P_c^*P_a^*,\ \triangle PP_aP_b \overset{+}{\sim} \triangle P^{*\prime}P_a^*P_b^*,$$

從而 $\triangle P_aP_bP_c \cup P \overset{+}{\sim} \triangle P_a^*P_b^*P_c^* \cup P^{*\prime}$。

(iii) 因爲 $\triangle P_aP_bP_c \cup P \cup Q \overset{+}{\sim} \triangle P_a^*P_b^*P_c^* \cup P^{*\prime} \cup P^*$，所以 $PQ \parallel P^{*\prime}P^* = OP^*$。 ■

習題

Problem 1. 令 (P, Q) 爲關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，D 爲 BC 上一點。證明：$\measuredangle APB + \measuredangle DPC = 0^\circ$ 若且唯若 $\measuredangle AQC + \measuredangle DQB = 0^\circ$。

Problem 2. 令 X, Y 分別爲 $\triangle ABC$ 的外接圓與內切圓的內位似中心與外位似中心。證明：X, Y 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點分別爲 $\triangle ABC$ 的熱爾岡點 (**Gergonne Point**) Ge 及奈格爾點 (**Nagel Point**) Na。

Problem 3. 令 M 爲 $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}$ 的中點，I_1, I_2 分別爲 $\triangle ABM$, $\triangle AMC$ 的內心。證明：$\odot(AI_1I_2)$ 經過弧 $\widehat{BAC}$ 的中點。

Problem 4. 設 I 爲 $\triangle ABC$ 的內心，M 爲 $\overline{AI}$ 中點，E, F 分別爲 BI, CI 與 $\odot(ABC)$ 的另一個交點。分別在 AE, AF 上取點 X, Y 滿足 $\measuredangle XBC = \measuredangle ABM$ 及 $\measuredangle YCB = \measuredangle ACM$。證明：$I$, X, Y 共線。

Problem 5. 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 的等角共軛變換，設直線 ℓ 不通過 A, B, C 三點。證明：$A(\ell \cap BC)$ 與 $T_A\varphi(\ell)$ 爲關於 $\angle BAC$ 的等角線。

Problem 6. 令 (P, P^*) 爲關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，AP, AP^* 分別交 $\odot(ABC)$ 於 U, V，AP 與 BC 交於 T。證明：

$$\frac{PT}{TU} = \frac{AP^*}{P^*V}.$$

Problem 7. 若 (P, P^*), (Q, Q^*) 爲關於 $\triangle ABC$ 的兩對等角共軛點對滿足 $PP^* \parallel QQ^*$，設 M_P, M_Q 分別爲 $\overline{PP^*}$, $\overline{QQ^*}$ 中點。證明：I, I_a, I_b, I_c, M_P, M_Q 共圓錐曲線。

Problem 8. 令 $\odot(I)$ 爲非等腰三角形 ABC 的內切圓並切邊 BC 於 D，X 在 (不含 A 的弧) $\widehat{BC} \subset \odot(ABC)$ 上使得若 E, F 爲 X 關於 BI, CI 的垂足，則 $\overline{EF}$ 中點位於 $\overline{BC}$ 的中垂線上。證明 $\measuredangle BAD = \measuredangle XAC$。

Problem 9. 跟等角共軛點對偶的可以説是等截共軛線，它的定義如下：給定一個完全 n 點形 $\mathcal{N}(P_1, P_2, \ldots, P_n)$，定義 $\ell_{ij} = P_iP_j$。對於一線 K，若存在一線 L，使得對於所有 $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$，$\ell_{i,j} \cap K$, $\ell_{i,j} \cap L$ 關於 $\overline{P_iP_j}$ 的中點對稱，那麼

我們稱 L 爲 K 關於 $\mathcal{N}$ 的等截共軛線，或稱 (K,L) 爲關於 $\mathcal{N}$ 的一對等截共軛線對。

Chapter 2

等軸雙曲線

2.1 特殊圓錐曲線與龐色列點

人生幾何，人生中總是會碰到一些特殊的人，幾何中總是會碰到一些特殊的圓錐曲線。

Proposition 2.1.1. 令 $\mathcal{P}$ 爲一個以 F 爲焦點、L 爲準線的拋物線，設 $\triangle ABC$ 爲與 $\mathcal{P}$ 相切的三角形，則 $F \in \odot(ABC)$ 且 L 經過 $\triangle ABC$ 的垂心。

Proof. 令 F 關於 BC, CA, AB 的對稱點分別爲 F_a, F_b, F_c，$\mathcal{P}$ 分別與 BC, CA, AB 切於 T_a, T_b, T_c，那麼由拋物線的光學性質可得 F_a, F_b, F_c 分別爲 T_a, T_b, T_c 關於 L 的垂足，因此由 F_a, F_b, F_c 共線於 L 及施坦納定理知 $F \in \odot(ABC)$ 且 L 經過 $\triangle ABC$ 的垂心。 ■

Proposition 2.1.2. 令 $\mathcal{P}$ 爲一個以 F 爲焦點、L 爲準線的拋物線，設 $\triangle ABC$ 爲 $\mathcal{P}$ 的自共軛三角形，則 F 位於 $\triangle ABC$ 的九點圓上且 L 經過 $\triangle ABC$ 的外心。

Proof. 令 U 爲垂直於 L 方向上的無窮遠點，則 $U \in \mathcal{P}$ 且 U 爲 O 的中心，令 M_a, M_b, M_c 分別爲 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 的中點，AU 分別交 BC, M_bM_c 於 P, T，則由 $(A, U; P, T) = -1$ 知 $T \in \mathcal{P}$，由 $M_bM_c \parallel BC$ 及平行弦定理知 M_bM_c 爲 T 關於 $\mathcal{P}$ 的極線，即 M_bM_c 與 $\mathcal{P}$ 相切，同理有 M_cM_a, M_aM_b 與 $\mathcal{P}$ 相切，再由上述性質就有 F 位於 $\triangle ABC$ 的九點圓上且 L 經過 $\triangle ABC$ 的外心。 ■

講完兩個大家該知道的性質之後我們回到標題。

Definition 2.1.3. 對於一個雙曲線 $\mathcal{H}$，我們稱其爲一等軸雙曲線 (**Rectangular Hyperbola**) 若 $\mathcal{H}$ 上的兩個無窮遠點方向垂直。

會叫等軸雙曲線是因爲每個雙曲線都有所謂的貫軸與共軛軸，而等軸雙曲線就是當貫軸與共軛軸等長的時候。

Proposition 2.1.4. 給定任意非直角三角形 $\triangle ABC$，設其垂心爲 H，$\mathcal{H}$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線，則 $H \in \mathcal{H}$ 若且唯若 $\mathcal{H}$ 爲等軸雙曲線。

Proof. 考慮 $\triangle ABC$ 上的等角共軛變換 φ，令 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，則 $H \in \mathcal{H}$ 若且唯若 $O \in \varphi(\mathcal{H})$，設 $\varphi(\mathcal{H})$ 與 $\odot(ABC)$ 交於 X, Y 兩點 (若無交點，則 $\mathcal{H}$ 與 $\mathcal{L}_\infty$ 不相交)，那麼 $O \in \varphi(\mathcal{H})$ 若且唯若 X, Y 爲關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點若且唯若 $\varphi(X), \varphi(Y)$ 的方向垂直，即 $\mathcal{H}$ 爲等軸雙曲線。 ∎

透過解析也是可以很快看出來，假設 $A = (a, a^{-1})$, $B = (b, b^{-1})$, $C = (c, c^{-1})$，那麼 $\triangle ABC$ 的垂心 $H = (-(abc)^{-1}, -abc)$。再來這個可以想成是取極限後的版本。

Proposition 2.1.5. 給定任意直角三角形 $\triangle ABC$，設 BC 爲其斜邊，AD 爲高，$\mathcal{H}$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線，則 AD 與 $\mathcal{H}$ 相切若且唯若 $\mathcal{H}$ 爲等軸雙曲線。

Proof. 考慮 $\triangle ABC$ 上的等角共軛變換 φ，令 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，則 AD 與 $\mathcal{H}$ 相切若且唯若 $\varphi(\mathcal{H}), AO, BC$ 共點若且唯若 $O \in \varphi(\mathcal{H})$。與上述的性質證明相同，$O \in \varphi(\mathcal{H})$ 若且唯若 $\mathcal{H}$ 爲等軸雙曲線。 ∎

Proposition 2.1.6. 令 $\mathcal{H}$ 爲以 O 爲中心的等軸雙曲線，設 $A, B, C \in \mathcal{H}$，則 O 位於 $\triangle ABC$ 的九點圓上。

Proof. 令 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，則 $H \in \mathcal{H}$，因此由 (1.4.18) 知 O 位於完全四點形 (A, B, C, H) 的九點圓錐曲線上，即 $\triangle ABC$ 的九點圓上。 ∎

Proposition 2.1.7. 令 $\mathcal{H}$ 爲以 O 爲中心的等軸雙曲線，則對於任意兩點 P_1, P_2，

$$\measuredangle(\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P_1), \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P_2)) + \measuredangle P_1OP_2 = 0.$$

Proof. 令 $U_i = OP_i \cap \mathcal{L}_\infty, V_i = \ell_{\mathcal{H}}(P_i) \cap \mathcal{L}_\infty$，由平行弦定理知 $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(U_i) \parallel \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P_i)$。令 W_1, W_2 爲 $\mathcal{H}$ 與 $\mathcal{L}_\infty$ 的兩個交點，由 U_i, V_i 關於 $\mathcal{H}$ 共軛知

$$-1 = (U_i, V_i; W_1, W_2) \overset{O}{=} O(P_i, V_i; W_1, W_2).$$

而 $\measuredangle W_1OW_2 = 90^\circ$，所以 $\measuredangle P_iOV_i$ 有分角線 OW_1, OW_2，故

$$\begin{aligned}\measuredangle(\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P_1), \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P_2)) &= \measuredangle V_1OV_2 = \measuredangle V_1OW_1 + \measuredangle W_2OV_2 \\ &= \measuredangle W_1OP_1 + \measuredangle P_2OW_2 = -\measuredangle P_1OP_2.\end{aligned}$$ ■

Corollary 2.1.8. 令 $\mathcal{H}$ 爲以 O 爲中心的等軸雙曲線，設 $\triangle ABC$ 爲 $\mathcal{H}$ 的自共軛三角形，則 $O \in \odot(ABC)$。

Proof. 由 (2.1.7) 可得 $\measuredangle BOC = -\measuredangle(CA, AB) = \measuredangle BAC$，即 $O \in \odot(ABC)$。 ■

Proposition 2.1.9. 令 $\mathcal{H}$ 爲以 O 爲中心的等軸雙曲線，設 $\triangle ABC$ 爲 $\mathcal{H}$ 的自共軛三角形，則 $\triangle ABC$ 的內心與三個旁心 $I, I_a, I_b, I_c \in \mathcal{H}$。

Proof. 令 $P \in \mathcal{H} \setminus \{I, I_a, I_b, I_c\}$，設 $\triangle P_aP_bP_c$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形，因爲 $\triangle ABC$ 爲 $\mathcal{H}$ 的自共軛三角形，所以 $P_a, P_b, P_c \in \mathcal{H}$。由 $\triangle I_aI_bI_c$ 爲 I 關於 $\triangle ABC$ 及 (1.1.15) 知 $P, P_a, P_b, P_c, I, I_a, I_b, I_c$ 共圓錐曲線，但經過 P, P_a, P_b, P_c 的等軸雙曲線是唯一的，所以 $I, I_a, I_b, I_c \in \mathcal{H}$。 ■

Proposition 2.1.10. 若 $\overline{BC}$ 爲一個等軸雙曲線 $\mathcal{H}$ 上的直徑，那麼對於任意 $A \in \mathcal{H}$，A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點 $A^* \in \mathcal{H}$，且 $T_A\mathcal{H}$ 爲 $\triangle ABC$ 的 A-共軛中線。

Proof. 考慮關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛變換 φ，設 $L = \varphi(\mathcal{H}), L' = \varphi(T_A\mathcal{H})$，那麼 $\varphi(L \cap L') \in \mathcal{H} \cap T_A\mathcal{H} = A$，所以 $L \cap L' \in BC$。注意到 $\triangle ABC$ 的垂心 $H \in \mathcal{H}$，故其關於 $\overline{BC}$ 中點的對稱點位於 $\mathcal{H}$ 上，即 A^*。所以由 $\infty_{\perp BC} = \varphi(A^*) \in L$ 知 L 爲 BC 中垂線，故 $T_A\mathcal{H}$ 爲 $L' = A(L \cap BC)$ 關於 $\angle BAC$ 的等角線，即 $\triangle ABC$ 的 A-共軛中線。 ■

Definition 2.1.11. 對於任意不構成垂心組的完全四點形 $\mathcal{Q} = (A, B, C, D)$，令 $\mathcal{H}$ 爲通過 A, B, C, D 的等軸雙曲線，O 爲 $\mathcal{H}$ 的中心，則我們稱 O 爲 $\mathcal{Q}$ 的龐色列點 (**Poncelet Point**)。

Theorem 2.1.12. 令 T 爲完全四點形 $\mathcal{Q}=(P_1,P_2,P_3,P_4)$ 的龐色列點，則 $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$ 的九點圓，P_i 關於 $\triangle P_{i+1}P_{i+2}P_{i+3}$ 的佩多圓及 $\mathcal{Q}$ 的西瓦圓，這九個圓共點，且該點爲 T。

Proof. 令 $\mathcal{H}$ 爲通過 P_1, P_2, P_3, P_4 的等軸雙曲線，$\triangle XYZ$ 爲 $\mathcal{Q}$ 的西瓦三角形，則 $\triangle XYZ$ 爲 $\mathcal{H}$ 的自共軛三角形，因此由上述性質知 T 位於 $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$ 的九點圓上且位於 $\mathcal{Q}$ 的西瓦圓上。令 P_4 關於 $\triangle P_1P_2P_3$ 的佩多三角形爲 $\triangle Q_1Q_2Q_3$，M_{ij} 爲 $\overline{P_iP_j}$ 的中點，由 T 位於 $\odot(M_{14}Q_2M_{31}),\odot(M_{14}Q_3M_{12})$ 上可得

$$\begin{aligned}\measuredangle Q_2TQ_3 &= \measuredangle Q_2TM_{14}+\measuredangle M_{14}TQ_3=\measuredangle Q_2M_{31}M_{14}+\measuredangle M_{14}M_{12}Q_3\\ &=\measuredangle Q_2P_3P_4+\measuredangle P_4P_3Q_3=\measuredangle Q_2Q_1P_4+\measuredangle P_4Q_1Q_3=\measuredangle Q_2Q_1Q_3\end{aligned}$$

即 $T\in\odot(Q_1Q_2Q_3)$，同理有 T 位於其他 P_i 關於 $\triangle P_{i+1}P_{i+2}P_{i+3}$ 的佩多圓上。 ■

Definition 2.1.13. 給定任意 $\triangle ABC$，P 爲非 $\triangle ABC$ 的垂心或其頂點的任意一點，我們稱 P^* 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的 antigonal conjugate 若

$$\measuredangle BPC+\measuredangle BP^*C=\measuredangle CPA+\measuredangle CP^*A=\measuredangle APB+\measuredangle AP^*B=0^\circ.$$

顯然 P^* 是唯一的。

Proposition 2.1.14. 給定任意 $\triangle ABC$，若 P^* 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的 antigonal conjugate，則 $\overline{PP^*}$ 中點 T 爲完全四點形 (A,B,C,P) 的龐色列點。

關於 antigonal conjugate 的更多性質，見 (6.1)。

Proof. 令 P 關於 BC, CA, AB 的對稱點分別爲 P_A, P_B, P_C，則 B, C, P_A, P^* 及其輪換分別共圓。注意到 $\odot(BCP_A)$ 關於 P 位似 1/2 倍的像爲 $\triangle BPC$ 的九點圓 $\odot(N_a)$，所以 $T\in\odot(N_a)$，同理有 $T\in\odot(N_b),\odot(N_c)$。故 $T\in\bigcap\odot(N_a)$，由 $\left|\bigcap\odot(N_a)\right|=1$ 知 T 爲完全四點形 (A,B,C,D) 的龐色列點。 ■

Remark. 證明中的 $\left|\bigcap\odot(N_a)\right|=1$ 其實偷偷用到了 P 不是 $\triangle ABC$ 的垂心這個事實，讀者可以證明看看

$$\left|\bigcap\odot(N_a)\right|>1\implies P\text{ 是垂心}.$$

Proposition 2.1.15. 給定任意 $\triangle ABC$，令 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，對於 $\triangle ABC$ 的任意一對等角共軛點對 (P, Q)，令 T 爲 (A, B, C, P) 的龐色列點，則 T 關於 $\triangle ABC$ 的中點三角形的施坦納線爲 OQ。

Proof. 令 $\triangle M_aM_bM_c$ 爲 $\triangle ABC$ 的中點三角形，$\mathcal{S}$ 爲 T 關於 $\triangle M_aM_bM_c$ 的施坦納線，$\mathcal{H}$ 爲經過 A, B, C, P 的等軸雙曲線，H^* 爲 H 關於 $\mathcal{H}$ 的對徑點，則 $H^* \in \odot(ABC)$，考慮 $\triangle ABC$ 上的等角共軛變換 φ，我們有 $\varphi(H^*) = \infty_{OQ}$，因此由 T 關於 $\odot(M_aM_bM_c)$ 的對徑點關於 $\triangle M_aM_bM_c$ 的等角共軛點爲 $\infty_{\mathcal{S}}$ 知 $\mathcal{S} \parallel OQ$，又 O 爲 $\triangle M_aM_bM_c$ 的垂心，因此 $\mathcal{S} = OQ$。 ■

Proposition 2.1.16. 給定任意 $\triangle ABC$，令 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，對於 $\triangle ABC$ 的任意一對等角共軛點對 (P, Q)，令 T 爲 (A, B, C, P) 的龐色列點，則 T 關於 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形的施坦納線平行於 OQ。

Proof. 令 $\triangle P_aP_bP_c$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，$\triangle M_aM_bM_c$ 爲 $\triangle ABC$ 的中點三角形，由上一個性質知原命題等價於證明 P_aT 關於 $\angle P_bP_aP_c$ 的等角線平行於 M_aT 關於 $\angle M_bM_aM_c$ 的等角線，即

$$\measuredangle P_bP_aT - \measuredangle M_bM_aT = \measuredangle(M_cM_a, P_cP_a).$$

注意到 $\odot(P_aM_aT)$ 爲 $\triangle PBC$ 的九點圓，所以

$$\begin{aligned}\measuredangle P_bP_aT - \measuredangle M_bM_aT &= \measuredangle(P_aP_b, M_aM_b) + \measuredangle M_aPT_a \\ &= \measuredangle(\perp CQ, AB) + \measuredangle PBC + \measuredangle PCB \\ &= \measuredangle(\perp CQ, AB) + \measuredangle ABQ + \measuredangle ACQ \\ &= \measuredangle(CA, \perp BQ) = \measuredangle(M_cM_a, P_cP_a).\end{aligned}$$ ■

事實上，一個點的佩多圓與九點圓的夾角是可以直接算的。

Theorem 2.1.17. 給定任意 $\triangle ABC$ 及一點 P，那麼 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓在 (A, B, C, P) 的龐色列點的夾角爲

$$90^\circ + \measuredangle(BC, AP) + \measuredangle(CA, BP) + \measuredangle(AB, CP).$$

Proof. 令 $\triangle P_aP_bP_c$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，$\triangle M_aM_bM_c$ 爲 $\triangle ABC$ 的中點三角形，T 爲 (A, B, C, P) 的龐色列點，則 T 位於 $\triangle PCA$ 與 $\triangle PAB$ 的九點

圓上。設 L_1, L_2 分別為 T 關於 $\odot(P_aP_bP_c)$, $\odot(M_aM_bM_c)$ 的切線，則

$$\begin{aligned}
\measuredangle(L_1, L_2) &= \measuredangle(L_1, TP_c) + \measuredangle P_cTM_c + \measuredangle(M_cT, L_2) \\
&= \measuredangle TP_bP_c + \measuredangle M_cM_bT + \measuredangle P_cTM_c \\
&= \measuredangle(M_bM_c, P_bP_c) + \measuredangle P_bTM_b + \measuredangle P_cTM_c \\
&= \measuredangle(BC, P_bP_c) + (\measuredangle ACP + \measuredangle CAP) + (\measuredangle BAP + \measuredangle ABP) \\
&= (\measuredangle AP_bP_c + \measuredangle BAP) + \measuredangle(BC, AP) + \measuredangle(CA, BP) + \measuredangle(AB, CP) \\
&= 90^\circ + \measuredangle(BC, AP) + \measuredangle(CA, BP) + \measuredangle(AB, CP).
\end{aligned}$$ ■

那他有個推廣，但又可以說是直接推論：

Theorem 2.1.18. 給定任意 $\triangle ABC$ 與一外接等軸雙曲線 $\mathcal{H}$，令 $P, Q \in \mathcal{H}$，那麼 P, Q 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓在 $\mathcal{H}$ 的中心的夾角為

$$\measuredangle QAP + \measuredangle QBP + \measuredangle QCP.$$

這邊提供另一個看起來沒那麼暴力的證明。

Proof. 令 $\triangle P_aP_bP_c$, $\triangle Q_aQ_bQ_c$ 分別為 P, Q 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，O 為 $\mathcal{H}$ 的中心，P^*, Q^* 分別為 P, Q 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。設 $L_P = T_O\odot(P_aP_bP_c)$, $L_Q = T_O\odot(P_aP_bP_c)$，則

$$\begin{aligned}
\measuredangle(T_P, T_Q) &= \measuredangle(T_P, OP_c) + \measuredangle P_cOQ_c + \measuredangle(OQ_c, T_Q) \\
&= \measuredangle OP_bP_c + \measuredangle Q_cQ_bO + \measuredangle P_cOQ_c \\
&= \measuredangle(P_bP_c, Q_bQ_c) + \measuredangle P_bOQ_b + \measuredangle P_cOQ_c \\
&= \measuredangle(P_bP_c, Q_bQ_c) + \measuredangle(\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P_b), \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(Q_b)) + \measuredangle(\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P_c), \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(Q_c)) \\
&= \measuredangle(P_bP_c, Q_bQ_c) + \measuredangle(P_cP_a, Q_cQ_a) + \measuredangle(P_aP_b, Q_aQ_b) \\
&= \measuredangle P^*AQ^* + \measuredangle P^*BQ^* + \measuredangle P^*CQ^* \\
&= \measuredangle QAP + \measuredangle QBP + \measuredangle QCP.
\end{aligned}$$ ■

2.1.1 封騰定理

跟牛頓定理一樣，封騰定理有三個，但是複雜多了。

Theorem 2.1.19 (封騰一號/Fontené's Theorem I). 令 $\triangle M_aM_bM_c$ 爲 $\triangle ABC$ 的中點三角形。對於任意一對等角共軛點對 (P,Q)，令 T 爲 (A,B,C,P) 的龐色列點，$\triangle Q_aQ_bQ_c$ 爲 Q 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，$R_a = Q_bQ_c \cap M_bM_c$，則 $T \in Q_aR_a$。

Proof. 令 T', Q_a' 分別爲 T, Q_a 關於 M_bM_c 的對稱點，則 $T' \in \odot(\overline{AO})$ 且 $T' \in OQ$，因此有 $\measuredangle AT'Q = 90^\circ$，即 T' 爲完全四線形 (CA, AB, M_bM_c, Q_bQ_c) 的密克點。由

$$\measuredangle R_aT'Q_b = \measuredangle R_aM_bA = \measuredangle Q_a'AQ_b = \measuredangle Q_a'T'Q_b,$$

$T' \in R_aQ_a'$，關於 M_bM_c 對稱後就有 $T \in Q_aR_a$。 ■

Corollary 2.1.20. 同樣定義 R_b, R_c，則 $\triangle R_aR_bR_c$ 的垂心爲 $\triangle Q_aQ_bQ_c$ 的外心，即 $\overline{PQ}$ 中點。

Proof. 注意到 $\triangle R_aR_bR_c$ 爲 T 關於 $\triangle Q_aQ_bQ_c$ 的西瓦三角形，因此 $\triangle R_aR_bR_c$ 爲關於 $\odot(Q_aQ_bQ_c)$ 的自共軛三角形，故 $\triangle R_aR_bR_c$ 的垂心爲 $\odot(Q_aQ_bQ_c)$ 的圓心。 ■

Theorem 2.1.21 (封騰二號/Fontené's Theorem II). 給定任意 $\triangle ABC$，ℓ 爲一個通過 $\triangle ABC$ 的外心的直線，Q 爲 ℓ 上一動點，則 Q 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓過一定點且該定點位於 $\triangle ABC$ 的九點圓上 (該定點即爲 (A,B,C,P) 的龐色列點，其中 P 爲 Q 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點)。

Proof. 令 P 爲 Q 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，那麼 Q 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓，即 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓，經過 (A,B,C,P) 的龐色列點，而其即爲 OQ 關於 $\triangle ABC$ 的中點三角形的反施坦納點，故爲定點。 ■

最後是封騰三號，很多在網路上的證明是錯的，希望下面的證明是對的 (?

Theorem 2.1.22 (封騰三號/Fontené's Theorem III). 給定任意 $\triangle ABC$，(P,Q) 爲 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點對，則 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓相切若且唯若 PQ 通過 $\triangle ABC$ 的外心。

Proof. 令 O, H, N 分別爲 $\triangle ABC$ 的外心、垂心、九點圓圓心，T_1 爲 (A, B, C, P) 的龐色列點，T_2 爲 (A, B, C, Q) 的龐色列點。

($\Rightarrow$) 若 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓相切，那麼切點爲 T_1 也爲 T_2，因此 $T_1 = T_2$，故 P, Q 位於同一個 $\triangle ABC$ 的外接等軸雙曲線上，兩邊取等角共軛變換就有 $O \in PQ$。

($\Leftarrow$) $O \in PQ$，同樣取等角共軛變換有 $T := T_1 = T_2$，而兩圓相切等價於 M, N, T 共線，其中 M 爲 $\overline{PQ}$ 中點。令 H 關於 T 的對稱點爲 T'，$\mathcal{H}$ 爲經過 A, B, C, P, Q 的圓錐曲線，則 $H, T' \in \mathcal{H}$ 且 T 爲 $\mathcal{H}$ 的中心。令 T' 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點爲 T^*，$\mathcal{S}_X$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的施坦納線，那麼 $\mathcal{S}_{T^*} \parallel PQ$，所以

$$T'(A, B; C, O) = (A, B; C, T^*) = (\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B; \mathcal{S}_C, \mathcal{S}_{T^*}) = H(A, B; C, \infty_{PQ})$$

故 $D := H\infty_{PQ} \cap OT' \in \mathcal{H}$。由平行弦定理與其推論知 $\overline{HD}$ 中點位於 TM 上，將直線 OT' 關於 H 位似 $1/2$ 倍則可得 $N \in TM$。 ■

結合 (2.1.17)，我們可以得到下面這個滿強大的結論：

Corollary 2.1.23. 給定 $\triangle ABC$，則對於任意一點 P，下列敘述等價：

(i) $\sum \measuredangle(AP, BC) = 90^\circ$

(ii) P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓相切

(iii) 若 Q 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，PQ 通過 $\triangle ABC$ 的外心 ■

事實上這些 P 的軌跡是一條三次曲線，又稱作 $\triangle ABC$ 的 McCay 三次曲線，未來會再對它有多一點的介紹。

2.2 費爾巴哈雙曲線

這個雙曲線可以說是最常遇到的，費爾巴哈這個名字來自於下面這個定理 (應該啦)：

Theorem 2.2.1 (費爾巴哈定理/Feuerbach's). 給定任意 $\triangle ABC$，其九點圓與內切圓及三個旁切圓相切。

相信大家都看過算角度或者是反演的證明 (這兩個其實是一樣的)，這邊就直接開上一節的定理來證：

Proof. 由2.1.17及 $\sum\measuredangle(AI_X, BC) = 90^\circ$ 就有九點圓與內切圓及三個旁切圓的夾角是 0°，其中 I_X 爲內心或旁心。 ■

費爾巴哈定理有個在三次曲線上的推廣，不過我還不會就是了。

Definition 2.2.2. 對於任意 $\triangle ABC$，我們稱其九點圓與內切圓的切點爲 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈點 (**Feuerbach Point**)。同樣地，對於 $X \in \{A, B, C\}$，我們定義 X-費爾巴哈點爲其九點圓與 X-旁切圓的切點。

Remark. 我們可以相信，在內心上會對的性質，在某旁心上也會對 (?)。所以同樣地，在費爾巴哈點上會對的性質，在某旁費爾巴哈點上也通常會對 (只要不要扯到什麼跟距離相關的不等式之類的)。因此之後看到的定理或性質就只考慮費爾巴哈點與內心它們兩點的情形。

先介紹一些費爾巴哈點的性質，以下假設 I, G, O, H, N, Fe 分別爲 $\triangle ABC$ 的內心、重心、外心、垂心、九點圓圓心及費爾巴哈點。當然，$\odot(I)$, $\odot(O)$, $\odot(N)$ 就分別爲內切圓、外接圓及九點圓。

Proposition 2.2.3. 點 Fe 爲 $\odot(N)$, $\odot(I)$ 的外位似中心，因此有 Fe, N, I 共線。 ■

Proposition 2.2.4. 令 X, Y 分別爲 $\odot(I)$ 及 $\odot(O)$ 的內位似中心、外位似中心，那麼 X, G, Fe 及 Y, H, Fe 分別共線。

Proof. 注意到 G, H 分別爲 $\odot(N)$ 及 $\odot(O)$ 的內位似中心、外位似中心，因此由 Monge 定理知 X, G, Fe 及 Y, H, Fe 分別共線。 ■

Proposition 2.2.5. 令 I^* 爲 I 關於 $\odot(O)$ 的反演點，$\mathcal{E}$ 爲 $\triangle ABC$ 的歐拉線，那麼 $I^*Fe \parallel \mathcal{E}$。

Proof. 令 R, r 分別爲 $\odot(O), \odot(I)$ 的半徑長，注意到

$$\frac{OI^*}{OI} = \frac{R^2}{OI^2} = \frac{R/2}{R/2 - r} = \frac{NFe}{NI}$$

所以 $I^*Fe \parallel ON = \mathcal{E}$。 ■

直接由龐色列點的定義，我們有：

Proposition 2.2.6. 點 Fe 爲 (A, B, C, I) 的龐色列點。 ■

這樣就可以進到我們的主題了。

Definition 2.2.7. 我們稱通過 A, B, C, I 的等軸雙曲線爲 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈雙曲線 $\mathcal{H}_{Fe}$。

注意到等角共軛變換爲等共軛變換，因此有：

Proposition 2.2.8. 集合對 $(\mathcal{H}_{Fe}, OI)$ 爲一對等角共軛集合對。 ■

Corollary 2.2.9. 令 Fe^* 爲 H 關於 Fe 的對稱點，則 (Fe^*, ∞_{OI}) 爲一對等角共軛點對。 ■

Proposition 2.2.10. 令 F_I, F_O 分別爲 I, O 關於 BC 的垂足，$e = OI \cap BC$，若 I_e, O_e 分別爲 e 關於 AI, AO 的垂足，那麼 $Fe = F_I I_e \cap F_O O_e$。

事實上，我們有以下推廣：

Proposition 2.2.11. 令 P 爲任意一點，Q 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，T 爲 (A, B, C, Q) 的龐色列點。設 T_P, T_O 分別爲 P, O 關於 BC 的垂足，e 爲 OP 與 BC 的交點。若 P_e, O_e 分別爲 e 關於 AP, AO 的垂足，那麼

$$\triangle APO \overset{+}{\sim} \triangle TT_PT_O$$

且 $T = T_P P_e \cap T_O O_e$。

Proof. 令 T, T_P, T_O 關於平行於 BC 的中位線的對稱點分別爲 T', T_P', T_O'，則由封騰一號的證明知 $T' \in OP$ 且 A, P, T', T_P' 及 A, O, T', T_O' 分別共圓，故

$$\measuredangle OPA = \measuredangle T'T_P'A = \measuredangle T_OT_PT, \ \measuredangle AOP = \measuredangle AT_O'T' = \measuredangle TT_OT_P$$

因此 $\triangle APO \overset{+}{\sim} \triangle TT_PT_O$。注意到 P, T_P, e, P_e 及 O, T_O, e, O_e 分別共圓，所以

$$\measuredangle TT_Pe = \measuredangle APO = \measuredangle P_ePe = \measuredangle P_eT_Pe$$

所以 $T \in T_PP_e$，同理有 $T \in T_OO_e$ ■

從上方的證明我們還可以看出以下的事實：

Proposition 2.2.12. 令 OP 分別交 BC, CA, AB 於 D, E, F，則

$$\measuredangle ATD = \measuredangle BTE = \measuredangle CTF = 90^\circ.$$

Proof. 同樣令 T 關於平行於 BC 的中位線的對稱點爲 T'，則 T' 爲 A 關於 OP 的垂足，所以 $T' \in \odot(\overline{AD})$，由 $\overline{AD}$ 中點位於平行於 BC 的中位線上知 $T \in \odot(\overline{AD})$，同理有 $T \in \odot(\overline{BE}), \odot(\overline{CF})$。 ■

Definition 2.2.13. 給定 $\triangle ABC$ 與一點 $P \neq A, B, C$，分別在 BC, CA, AB 上取點 D, E, F 使得

$$\measuredangle APD = \measuredangle BPE = \measuredangle CPF = 90^\circ,$$

則 D, E, F 共線，我們稱它是 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線 (**Orthotransversal**)。

關於正交截線的性質詳見[5]，我們會在 6.1 節討論他的推廣。所以說 OP 是 T 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線。換句話說，我們可以大致了解九點圓上的點的正交截線了。由 (2.2.12) 的證明，我們可以直接得到：

Corollary 2.2.14. *HT 爲完全四線形 $\triangle ABC \cup OP$ 的施坦納線 (垂心線)。* ■

我們回到內心的情形，由1.1.16，我們可以得到以下推論：

Corollary 2.2.15. 令 K 爲一條直線，$\triangle K_aK_bK_c$ 爲 K 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形，若 $M_aM_bM_c$ 爲 $\triangle ABC$ 的中點三角形，則

$$K,\ K_a,\ K_b,\ K_c,\ M_bM_c,\ M_cM_a,\ M_aM_b$$

七線切一拋物線。 ■

證明就取其中一線爲無窮遠線即可。直接套在 K 爲 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 的透視軸就有：

Corollary 2.2.16. 令 $\triangle DEF$ 爲切點三角形，X, Y, Z 分別爲

$$EF \cap BC,\ FD \cap CA,\ DE \cap AB,$$

則 $\triangle DEF \cup \overline{XYZ} \cup \triangle M_aM_bM_c$ 共密克點且該點爲 Fe，其垂心線爲 OI。 ■

讓我們再回到費爾巴哈雙曲線，注意到 X, Y(即 $\odot(O), \odot(I)$ 的內位似中心與外位似中心) 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點分別爲 $\triangle ABC$ 的熱爾岡點 (**Gergonne Point**) Ge、奈格爾點 (**Nagel Point**) Na，因此有：

Proposition 2.2.17. 上述兩點 $Ge, Na \in \mathcal{H}_{Fe}$，且

$$(H, I; Na, Ge)_{\mathcal{H}_{Fe}} = -1.$$

Proposition 2.2.18. 直線 OI 與 $\mathcal{H}_{Fe}$ 相切。

這性質有個推廣：

Proposition 2.2.19. 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 的點等共軛變換，且 P 爲 φ 的不動點，那麼對於任意過 A, B, C, P 的 (非退化) 圓錐曲線 $\mathcal{C}$，$T_P\mathcal{C} = \varphi(\mathcal{C})$。

Proof. 假設 $\varphi(\mathcal{C})$ 不與 $\mathcal{C}$ 相切，則有另一個交點 $Q \neq P$，那麼

$$\varphi(Q) \in \varphi(\mathcal{C} \cap \varphi(\mathcal{C})) \subset \varphi(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C} = \{P, Q\}$$

但 $\varphi(P) = P$，所以 $\varphi(Q) = Q$，那麼我們有 PQ 過 $\triangle ABC$ 的某個頂點，這與 $\mathcal{C}$ 是非退化的矛盾。 ■

這個性質的對偶版本當然也是對的。結合兩個性質就有：

Corollary 2.2.20. 令 L 爲 H 關於 O 的對稱點，即 $\triangle ABC$ 的 de Longchamps Point，則 I, Ge, L 共線。

Proof. 注意到 I, Na, G 共線，所以有

$$I(H, O; G, L) = -1 = (H, I; Na, Ge)_{\mathcal{H}_{Fe}} = I(H, O; G, IGe \cap \mathcal{E}),$$

因此 I, Ge, L 共線。 ■

這個推論是第五章的梁-澤利克定理 (5.4.4) 的特例。

習題

Problem 1. 四個費爾巴哈點共圓。

Problem 2. 設 X 爲 $\triangle ABC$ 的 A-偽内切圓與 $\odot(ABC)$ 的切點，Fe 爲 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈點。證明：$AX \perp BC$ 若且唯若 A, Fe, X 共線。

Problem 3. 令 $\triangle DEF$ 爲切點三角形，$\triangle D_tE_tF_t$ 爲 $\triangle DEF$ 在位似變換 (I, t) 下的像。證明：AD_t, BE_t, CF_t 共點，並且當 t 變動時，該點軌跡爲 $\mathcal{H}_{Fe}$。

Problem 4. 給定兩點 O_1, O_2，Ω_1, Ω_2 分別爲以 O_1, O_2 爲圓心，$\overline{O_1O_2}$ 爲半徑的圓。在 Ω_2 外取一點 $A \in \Omega_1$，過 A 作關於 Ω_2 的兩條切線 AT_b, AT_c 分別交 Ω_1 於 B, C 兩點。設 $\triangle ABC$ 的垂心爲 H，H 關於 BC 的對稱點爲 D，OD 交 BC 於 E，若 M, F 分別爲 $\overline{BC}, \overline{AH}$ 的中點，證明：T_bT_c 與 $\odot(DFM)$ 相切。

Problem 5. 設三角形 ABC 的外接圓爲 Γ，外心爲 O，A-旁心爲 I_a。令 $\overline{OI_a}$ 交 Γ 於 K，K 關於 CA, AB 的垂足分別爲 E, F。證明：EF 與 OI_a 交於三角形 ABC 的 A-旁切圓上。

Problem 6. 設三角形 ABC 的内心爲 I，外心爲 O，内切圓分別切 BC, CA, AB 於 D, E, F，令 FD, DE 分別交 CA, AB 於 Y, Z，K 爲 $\triangle DYZ$ 的外心，證明：$\measuredangle AIO = \measuredangle KID$。

Problem 7 (2017 CMO)**.** 令 $\odot(O)$, $\odot(I)$ 分別爲銳角三角形 ABC 的外接圓與内切圓。B, C 關於 $\odot(O)$ 的切線交於 L，$\odot(I)$ 與 BC 切於 D。Y 爲 A 關於 BC 的垂足，AO 與 BC 交於 X，OI 與 $\odot(O)$ 交於 P, Q。證明：P, Q, X, Y 共圓若且唯若 A, D, L 共線。

Problem 8. 令 ℓ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線，$\mathcal{H}$ 爲經過 A, B, C, P 的等軸雙曲線。證明：$T_P\mathcal{H} \perp \ell$。

2.3 Kiepert 雙曲線

在討論這個雙曲線之前，我們先看看下面這兩個點。另外在這章，我們都以同樣的記號表示相同的點，不再重複定義。

Definition 2.3.1. 給定 $\triangle ABC$，分別以 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 爲邊長向 $\triangle ABC$ 外 (內) 側作正三角形 $\triangle A_{1(2)}BC, \triangle B_{1(2)}CA, \triangle C_{1(2)}AB$，則 $AA_{1(2)}, BB_{1(2)}, CC_{1(2)}$ 共於一點 $F_1(F_2)$，稱爲第一 (二) 等角點。

當 $\triangle ABC$ 的內角都小於 120°，第一等角點就是費馬點，這是由下面這個性質得到的。

Proposition 2.3.2. 我們有

(i) $\measuredangle BF_1C = \measuredangle CF_1A = \measuredangle AF_1B = 120^\circ$，

(ii) $\measuredangle BF_2C = \measuredangle CF_2A = \measuredangle AF_2B = 60^\circ$。

因此 $F_i \in \bigcap \odot(A_iBC)$。

Proof. 注意到 $\triangle BAB_i \overset{+}{\sim} \triangle C_iAC$，因此

$$\measuredangle BF_iC = \measuredangle(BB_i, CC_i) = \measuredangle B_iAC = -i \cdot 60^\circ$$

而最後的命題則爲顯然。 ■

Corollary 2.3.3 (Kiepert's). 五點 A, B, C, F_1, F_2 共等軸雙曲線 $\mathcal{H}_K$，且 $\overline{F_1F_2}$ 爲 $\mathcal{H}_K$ 的直徑。

Proof. 注意到 $\measuredangle BF_1C + \measuredangle BF_2C = 0^\circ$ 及其輪換式，所以 F_1, F_2 爲關於 $\triangle ABC$ 的 antigonal conjugate，再由 (2.1.14) 知原命題成立。 ■

當然這個雙曲線就直接稱爲 Kiepert 雙曲線了。在接下來的幾個性質中，我們令 $i \in \{1,2\}$。

Definition 2.3.4. 費馬點 F_i 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，記作 S_i，稱爲第 i 等力點。

Proposition 2.3.5. 等力點 S_i 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形爲正三角形。

Proof. 令 $\triangle S_{ia}S_{ib}S_{ic}$ 爲 S_i 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，則

$$\measuredangle S_{ib}S_{ia}S_{ic} = \measuredangle(\perp CF_i, \perp BF_i) = i \cdot 60^\circ$$

，同理有 $\measuredangle S_{ic}S_{ib}S_{ia} = \measuredangle S_{ia}S_{ic}S_{ib} = i \cdot 60^\circ$，因此 $\triangle S_{ia}S_{ib}S_{ic}$ 爲正三角形。 ∎

Proposition 2.3.6. 等力點們 S_1, S_2 爲 A, B, C-阿波羅尼奥斯圓的兩個交點。

Proof. 令 $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ 分別爲 A, B, C-阿波羅尼奥斯圓，$\triangle S_{ia}S_{ib}S_{ic}$ 爲 S_i 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，則

$$\overline{BS_i} : \overline{S_iC} = \frac{\overline{S_{ic}S_{ia}}}{\sin\angle CBA} : \frac{\overline{S_{ia}S_{ib}}}{\sin\angle ACB} = \sin\angle ACB : \sin\angle CBA = \overline{BA} : \overline{AC}$$

因此 $S_i \in \Gamma_A$，同理有 $S_i \in \Gamma_B, \Gamma_C$，故 $\{S_1, S_2\} = \bigcap \Gamma_A$。 ∎

Corollary 2.3.7. $S_1S_2 = OK$ 且 $(S_1, S_2; O, K) = -1$，其中 O, K 分別爲 $\triangle ABC$ 的外心、共軛重心。

Proof. 令 Γ_A, Γ_B, Γ_C 分別爲 A, B, C-阿波羅尼奥斯圓，注意到 Γ_A, Γ_B, Γ_C 分別與 $\odot(ABC)$ 正交，故

$$AK = \mathfrak{p}_{\Gamma_A}(O),\ BK = \mathfrak{p}_{\Gamma_B}(O),\ CK = \mathfrak{p}_{\Gamma_C}(O),$$

所以 $S_1S_2 = OK$ 且 $(S_1, S_2; O, K) = -1$。 ∎

Corollary 2.3.8. 兩點 S_1, S_2 爲關於 $\odot(ABC)$ 的反演點對。 ∎

其中我們又稱 OK 爲 $\triangle ABC$ 的 Brocard 軸，這件事情告訴我們 $\mathcal{H}_K$ 事實上爲 OK 的等角共軛軌跡。

Proposition 2.3.9. 對於任意角度 θ，分別取 $A_\theta, B_\theta, C_\theta$ 滿足

$$\measuredangle A_\theta BC = \measuredangle BCA_\theta = \measuredangle B_\theta CA = \measuredangle CAB_\theta = \measuredangle C_\theta AB = \measuredangle ABC_\theta = \theta$$

那麼 $AA_\theta, BB_\theta, CC_\theta$ 共點，且一點 $K \in \mathcal{H}_K$ 若且唯若 $K = K_\theta = AA_\theta \cap BB_\theta \cap CC_\theta$ 對於某個 θ。

所以在 Kiepert 雙曲線上，我們其實可以把每個點都用一個角度 (θ) 寫出來，其中 $G = K_{0^\circ}, H = K_{90^\circ}, F_1 = K_{60^\circ}, F_2 = K_{-60^\circ}$，而 G, H 分別爲 $\triangle ABC$ 的重心、垂心。

Proposition 2.3.10. 對於任意 θ，我們有 $(K_\theta, K_{-\theta}; H, G)_{\mathcal{H}_K} = -1$。

Proof. 注意到 A_0 爲 $\overline{BC}$ 中點，所以是 $\overline{A_\theta A_{-\theta}}$ 中點，$A_{90^\circ} = \infty_{\perp BC}$，所以

$$(K_\theta, K_{-\theta}; H, G)_{\mathcal{H}_K} \overset{A}{=} (A_\theta, A_{-\theta}; A_0, A_{90^\circ}) = -1$$ ■

取 $\theta = 60^\circ$ 會有 $F_1 H F_2 G$ 爲 $\mathcal{H}_K$ 上的調和四邊形，此外：

Corollary 2.3.11. F_1F_2 平分 $\overline{GH}$。

Proof. 由於 $F_1 H F_2 G$ 爲 $\mathcal{H}_K$ 上的調和四邊形，所以

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(GH) = T_G\mathcal{H}_K \cap T_H\mathcal{H}_K \in F_1F_2$$

又 F_1F_2 經過 $\mathcal{H}_K$ 的中心，所以由 (1.1.14) 知 F_1F_2 平分 $\overline{GH}$。 ■

再來的性質會用到梁-澤利克定理 (5.4.4)，是第五章的東西，可以等看完那邊再回來補這邊。以下令 $\mathcal{E}$ 爲 $\triangle ABC$ 的歐拉線。

Proposition 2.3.12. 令 $\theta \in [-\pi/2, \pi/2)$，我們有

$$t(A_\theta) = t(B_\theta) = t(C_\theta) = -\frac{1}{2\cos 2\theta}.$$

Proof. 由對稱性知只需證明 A_θ 的情況。令 $\triangle O_aO_bO_c$ 爲 A_θ 關於 $\triangle ABC$ 的卡諾三角形，$\triangle O_AO_BO_C$ 爲 $\triangle O_aO_bO_c$ 關於 A_θ 位似 $-2\cos 2\theta$ 下的像，那麼 O_A 爲 $\triangle A_\theta BC$ 的垂心。由 $O_AO_B \parallel O_aO_b \perp A_\theta C \perp O_AB$ 知 $O_A \in BO_B$，同理有 $O_A \in CO_C$，所以 AO_A, BO_B, CO_C 共點於 O_A，因此

$$t(A_\theta) = -\frac{1}{2\cos 2\theta}.$$ ■

令 A_θ^*, B_θ^*, C_θ^*, K_θ^* 分別爲 A_θ, B_θ, C_θ, K_θ 的等角共軛點，顯然地，我們有 A, A_θ, K_θ、A, B_θ, C_θ^*、A, B_θ^*, C_θ 及 A, A_θ^*, K_θ^* 以及輪換的共 12 組共線，所以有：

Theorem 2.3.13. 同 (2.3.9) 中的標號，我們有

$$t(K_\theta) = -\frac{1}{2\cos 2\theta}$$

Proof. 令 $t_0 = -(2\cos 2\theta)^{-1}$，$T \in \mathcal{E}$ 滿足 $t(T) = t_0$，那麼我們有 $T \in B_\theta B_\theta^* \cap C_\theta C_\theta^*$，注意到 $\triangle BB_\theta^* C_\theta$ 與 $\triangle CC_\theta^* B_\theta$ 的透視軸爲 $AA_\theta^* K_\theta^*$，所以由迪沙格定理知 $BC,\ B_\theta C_\theta,\ B_\theta^* C_\theta^*$ 共點。因爲 $B = K_\theta B_\theta \cap K_\theta^* B_\theta^*,\ C = C_\theta K_\theta \cap C_\theta^* K_\theta^*$，所以由迪沙格定理及 $B_\theta C_\theta,\ B_\theta^* C_\theta^* \in BC$ 知 $\triangle K_\theta B_\theta C_\theta$ 與 $\triangle K_\theta^* B_\theta^* C_\theta^*$ 透視，即 $T \in K_\theta K_\theta^*$，因此

$$t(K_\theta) = -\frac{1}{2\cos 2\theta}$$

■

特別地，$t(F_i) = 1$。

Proposition 2.3.14. 對於任意角度 α, β, γ，$K_\alpha, K_\beta, K_\gamma^*$ 共線若且唯若

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Proof. 令 AK_α^* 交 $\mathcal{H}_K$ 於 K_{α_A}，那麼 $\alpha_A + \alpha = \measuredangle BAC$。同 (2.3.13) 的證明可得 $K_\alpha K_{\alpha_A} \cap K_\alpha^* K_{\alpha_A}^* = K_\alpha K_{\alpha_A} \cap OK \in BC$。我們類似定義 $\alpha_B,\ \alpha_C$，同樣有 $K_\alpha K_{\alpha_B} \cap OK \in CA,\ K_\alpha K_{\alpha_C} \cap OK \in AB$，令 OK 分別與 BC, CA, AB 交於 D, E, F，$K_{\gamma'}^* = K_\alpha K_\beta \cap OK$，那麼

$$\begin{aligned}(D, E; F, K_{\gamma'}^*) &\overset{K_\alpha}{=} (K_{\alpha_A}, K_{\alpha_B}; K_{\alpha_C}, K_\beta) = (A_{\alpha_A}, A_{\alpha_B}; A_{\alpha_C}, A_\beta) \\ &= (A_{-\measuredangle BAC}, A_{-\measuredangle CBA}; A_{-\measuredangle ACB}, A_{-\alpha-\beta}) = (D, E; F, K_{-\alpha-\beta}^*)\end{aligned}$$

所以 $\alpha + \beta + \gamma' = 0$，故 $K_\alpha,\ K_\beta,\ K_\gamma^*$ 共線若且唯若 $\alpha + \beta + \gamma = 0$。 ■

Corollary 2.3.15. $K_\theta K_{-2\theta}^*$ 與 $\mathcal{H}_K$ 相切。

Proof. 取 $\alpha = \beta = \theta, \gamma = -2\theta$。 ■

Corollary 2.3.16. 給定 θ，$K_{-2\theta}^* = \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(K_\theta K_{\theta+90^\circ})$。特別地，$K$ 爲 GH 關於 $\mathcal{H}_K$ 的極點。

換句話說，我們可以知道 OK 上一點關於 $\mathcal{H}_K$ 的極線。結合這些上面性質我們就可以證明下面這個定理了。

Theorem 2.3.17 (Kiepert 雙曲線基本性質)**.** 令 N 為 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心，$T_\theta = \mathcal{E} \cap K_\theta K_\theta^*$, $P_\theta := K_\theta K_{-2\theta}^* \cap K_{-\theta} K_{2\theta}^*$，對於任意 θ，我們有：

(i) $G = K_\theta K_{-\theta}^* \cap K_\theta^* K_{-\theta}$,

(ii) $K = K_\theta K_{-\theta} \cap K_\theta^* K_{-\theta}^*$,

(iii) $N \in K_\theta K_{\theta+90^\circ}$,

(iv) $T_\theta = K_\theta K_\theta^* \cap K_{-\theta} K_{-\theta}^*$,

(v) $P_\theta \in \mathcal{E}$.

Proof. 我們依序證明命題 (i), (ii), (iii), (iv), (v)。

(i) 在 (2.3.14) 中取 $\alpha = 0, \beta = \pm\theta$，那麼 $G \in K_\theta K_{-\theta}^* \cap K_\theta^* K_{-\theta}$。

(ii) 在 (2.3.14) 中取 $\alpha = \pm\theta, \beta = \mp\theta$，那麼 $K \in K_\theta K_{-\theta} \cap K_\theta^* K_{-\theta}^*$。

(iii) 因為 $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(K_\theta K_{\theta+90^\circ}) = K_{2\theta} \in OK$，所以 $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(OK) \in K_\theta K_{\theta+90^\circ}$。取 $\theta = 0$，我們有 $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(OK) \in \mathcal{E}$，而 $O \in \mathcal{E}$，所以

$$(G, H; O, \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(OK)) = -1$$

故 $N = \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(OK)$。

(iv) 注意到

$$t(K_\theta) = -\frac{1}{2\cos(2\theta)} = -\frac{1}{2\cos(-2\theta)} = t(K_{-\theta})$$

所以 $T_\theta = \mathcal{E} \cap K_\theta K_\theta^* \in K_{-\theta} K_{-\theta}^*$。

(v) 因為 $K_{\pm\theta} K_{\mp 2\theta}^* = T_{K_{\pm\theta}} \mathcal{H}_K$，且 $K_\theta H K_{-\theta} G$ 為 $\mathcal{H}_K$ 上的調和四邊形，所以 $P_\theta = \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_K}(K_\theta K_{-\theta}) \in GH$。 ■

Example 2.3.18 (等角等力基本性質)**.** 取 $\theta = \pm 60^\circ$，結合前面的性質，我們有：

(i) $G = F_1 S_2 \cap F_2 S_1, K = F_1 F_2 \cap S_1 S_2$, $F_1 S_1 \parallel F_2 S_2 \parallel \mathcal{E}$

(ii) F_1, F_2, O, N 共圓 (Lester 圓)

(iii) GK 爲 $\triangle GF_1F_2$ 的共軛中線

還可以得到直線 F_iS_i 與 $\mathcal{H}_K$ 相切。

Example 2.3.19. 除了等角點外，$\mathcal{H}_K$ 上重要的還有維田點 ($V_1 = K_{45^\circ}$, $V_2 = K_{-45^\circ}$)，它甚至有出現在 ISL 裡面。我們有：

(i) O 是 V_1V_2 關於 $\mathcal{H}_K$ 的極點

(ii) $V_1V_2 = NK$

(iii) $H = V_1V_1^* \cap V_2V_2^*$

注意到 $[T_\theta \mapsto P_\theta] \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$，所以他的位置其實是可以算的 (?)，事實上我們有：

Proposition 2.3.20. 對於任意 θ，

$$T_\theta G = 2 \cdot GP_\theta,$$

故

$$OP_\theta = 2\cos 2\theta \cdot P_\theta N. \qquad \blacksquare$$

如果定義 $Q_\theta = K_\theta K_{-\theta} \cap \mathcal{E}$，那麼同樣有 $[P_\theta \mapsto Q_\theta] \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$，所以：

Proposition 2.3.21. 對於任意 θ，

$$3 \cdot NQ_\theta = 2\cos 2\theta \cdot Q_\theta O. \qquad \blacksquare$$

習題

Problem 1 (Tau(?)). 在 A, B, C, F_1, F_2 五個點中任取三點，則該三點所形成的三角形的歐拉線過 G。

Problem 2. 令 O_A, O_B, O_C 分別爲 $\triangle S_iBC$, $\triangle AS_iC$, $\triangle ABS_i$ 的外心。證明：AO_A, BO_B, CO_C 共點於 OK 上。

Problem 3. 令 N 爲 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心，I_a, I_b, I_c 爲 $\triangle ABC$ 的三個旁心。證明：N 及 $\overline{F_1S_1}, \overline{F_2S_2}$ 的中點們位在同一個 $\triangle I_aI_bI_c$ 的外接等軸雙曲線上。

Problem 4. 令 $\triangle H_aH_bH_c, \triangle M_aM_bM_c$ 分別爲 $\triangle ABC$ 的垂足三角形及中點三角形。證明：對於任意一點 P，P 關於 $\triangle H_aH_bH_c$ 的等角共軛點位於 P 關於 $\triangle M_aM_bM_c$ 的等角共軛點與等截共軛點的連線上。

Problem 5. 令 K_θ 爲 $\triangle ABC$ 的 Kiepert 雙曲線上一點 (對應的角度是 θ)，$\triangle XYZ$ 爲 P 關於 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形的圓西瓦三角形，那麼 K_θ 位於 $\triangle XYZ$ 的 Kiepert 雙曲線上，而且 K_θ 這時候對應的角度是 $-\theta$。

2.4 Jerabek 雙曲線

我們都知道，如果給定 $\triangle ABC$ 與一個點 P 我們可以定義一些 P 關於 $\triangle ABC$ 的點、線、圓等等的曲線，我們之前已經定義過正交截線了，這邊再定義一個稍微比較有關聯的：

Definition 2.4.1. 給定 $\triangle ABC$ 與一點 P，令 $\triangle DEF$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形，設 $X = BC \cap EF, Y = CA \cap FD, Z = AB \cap DE$，則 X, Y, Z 共線，我們稱它是 P 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 (**Trilinear Polar**)。

Example 2.4.2. $\triangle ABC$ 的重心 G 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線是無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$。

先來看看它有什麼性質吧。

Proposition 2.4.3. 給定 $\triangle ABC$ 與一點 P，令 $\mathcal{O}_P, \mathcal{T}_P$ 分別爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線與三線性極線，$\mathcal{S}_P$ 則爲 P 關於 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓 ω_P 的極線 (即 $\mathfrak{p}_{\omega_P}(P)$)，那麼 $\mathcal{O}_P, \mathcal{T}_P, \mathcal{S}_P$ 共點。

Proof. 令 Ω 爲以 P 爲圓心的任意圓，定義 $A^* = \mathfrak{p}_\Omega(BC)$，類似定義 B^*, C^*。那麼由定義，$\mathfrak{p}_\Omega(\mathcal{O}_P)$ 爲 $\triangle A^*B^*C^*$ 的垂心，$\mathfrak{p}_\Omega(\mathcal{T}_P)$ 爲 $\triangle A^*B^*C^*$ 的重心。注意到 $\omega, \Omega, \odot(A^*B^*C^*)$ 共軸，令 O^* 爲 $\triangle A^*B^*C^*$ 的外心，考慮 OP 分別與 $\omega, \Omega, \odot(A^*B^*C^*)$ 的交點，並注意到反演保調和，所以 $\mathfrak{p}_\Omega(\mathcal{S}_P)$ 爲 $\triangle A^*B^*C^*$ 的外心。

由 $\mathfrak{p}_\Omega(\mathcal{O}_P)$, $\mathfrak{p}_\Omega(\mathcal{T}_P)$, $\mathfrak{p}_\Omega(\mathcal{S}_P)$ 共線知 $\mathcal{O}_P$, $\mathcal{T}_P$, $\mathcal{S}_P$ 共點。 ■

當 P 位於 $\odot(ABC)$ 上時，$\mathcal{S}_P$ 變爲 $\triangle ABC$ 的施坦納線，這時有：

Proposition 2.4.4. 給定 $\triangle ABC$ 與 $\odot(ABC)$ 上一點 P，那麼 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線、三線性極線及施坦納線共點。

對以 P 爲圓心的圓配極，我們還會有一些很美好的性質：

Proposition 2.4.5. 給定 $\triangle ABC$ 與 $\odot(ABC)$ 上一點 P，Ω 是以 P 爲圓心的圓。那麼

(i) $\mathfrak{p}_\Omega(\triangle ABC) \overset{-}{\sim} \triangle ABC$ 且 P 位於其外接圓上。

(ii) 若 (Q, Q^*) 爲關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，取 Q' 使得 $\mathfrak{p}_\Omega(\triangle ABC) \cup Q' \overset{-}{\sim} \triangle ABC \cup Q$，則 $Q^* \in \mathfrak{p}_\Omega(Q^*)$。

Proof. (i) 由簡單的角度計算可輕易得到。關於 (ii)，我們考慮一個對稱變換與旋似變換的合成 φ 使得 $\varphi(A') = A$, $\varphi(B') = B$, $\varphi(C') = C$。令 $\mathcal{C}$ 爲以 P 爲中心的等角共軛變換的對角圓錐曲線 (注意到 $P \in \odot(ABC)$)，$\Phi := \mathfrak{p}_\mathcal{C} \circ \varphi \circ \mathfrak{p}_\Omega$ 爲一個將點送至點的變換，則 A, B, C, P 是 Φ 的不動點，並且 Φ 是一個雙射的保共線變換。因此由 (1.2.9) 可得 $\Phi = \mathrm{id}$，故

$$\varphi(\mathfrak{p}_\Omega(Q^*)) = \mathfrak{p}_\mathcal{C}(Q^*)$$

由等角共軛變換的性質知 $Q \in \mathfrak{p}_\mathcal{C}(Q^*)$，所以 $Q' \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p}_\mathcal{C}(Q^*)) = \mathfrak{p}_\Omega(Q^*)$。 ■

那麼由 (2.4.3) 的證明可以得到：

Corollary 2.4.6. 給定 $\triangle ABC$ 與 $\odot(ABC)$ 上一點 P，那麼 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線、三線性極線及施坦納線分別經過 $\triangle ABC$ 的外心、共軛重心及垂心。

我們考慮所有這些共點的軌跡，就有：

Proposition 2.4.7. 給定 $\triangle ABC$ 與 $\odot(ABC)$ 上一點 P，那麼 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線、三線性極線及施坦納線共的點 Q 所形成的軌跡是一個等軸雙曲線。更進一步地，PQ 經過 $\odot(ABC)$ 上的定點。

Proof. 令 $\triangle ABC$ 的外心及垂心分別爲 O, H，對於任意一點 $P \in \odot(ABC)$，在 BC 上取 D 使得 $\measuredangle APD = 90^\circ$，$A$, P 關於 BC 的對稱點分別爲 A', P'，那麼

$$O(A, B; C, D) = (AO \cap BC, B; C, D) = (A, B; C, P) = H(A', B; C, P')$$

所以 $Q = OD \cap HP' \in \mathcal{H}$，其中 $\mathcal{H}$ 爲經過 A, B, C, O, H 的圓錐曲線。令 H^* 爲 $\mathcal{H}$ 與 $\odot(ABC)$ 異於 A, B, C 的交點，則

$$H^*(A, B; C, P) = H(A', B, C, P') = H(A, B, C, Q) = H^*(A', B, C, Q)$$

所以 $H^* \in PQ$。 ■

Definition 2.4.8. 我們稱 (2.4.7) 中的等軸雙曲線爲 $\triangle ABC$ 的 Jerabek 雙曲線。

我們馬上可以得到下面這個性質：

Proposition 2.4.9. 令 $\mathcal{H}_J$ 爲 $\triangle ABC$ 的 Jerabek 雙曲線，那麼 $\mathcal{H}_J$ 在等角共軛變換下的像爲歐拉線。 ■

Example 2.4.10. 垂心 H 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點 $H' \in \mathcal{H}_J$。

習題

Problem 1. 給定 $\triangle ABC$ 與一點 P，令 $\mathcal{O}_P$, $\mathcal{T}_P$ 分別爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線與三線性極線，$\triangle Q_aQ_bQ_c$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 Q 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形。若 H', G' 分別爲 $\triangle Q_aQ_bQ_c$ 的垂心、重心。證明：

(i) $QH' \perp \mathcal{O}_P$,

(ii) $QG' \perp \mathcal{T}_P$.

Problem 2. 令 P 位於 $\triangle ABC$ 的歐拉線上，H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，若 Q 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，證明：HQ 與經過 A, B, C, H, P 的圓錐曲線相切。

Problem 3. 令 N 爲 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心，Ko 爲 N 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 (**Kosnita Point**)。證明：NKo 過 $\triangle ABC$ 的歐拉線關於 $\triangle ABC$ 的反施坦納點 (**Euler Reflection Point**)。

Chapter 3

完美六邊形與等角共軛軌跡

3.1 完美六邊形

爲了透徹了解等角共軛軌跡在做什麼，我們先引入一個很好用的工具——完美六邊形[6]。完美六邊形是中國的幾何專家葉中豪與單墫發展出來的一套工具，並在最後寫了一首詩：

數學花園大，
幾何算一家，
春日興致好，
請來看小花。

Definition 3.1.1. 在複數平面 $\mathbb{C}$ (或 $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) 上，我們說六邊形 $ABCDEF$ 爲一個完美六邊形若

$$\frac{a-b}{b-c} \cdot \frac{c-d}{d-e} \cdot \frac{e-f}{f-a} = -1$$

其中，$A = a, B = b, C = c, D = d, E = e, F = f$。

定義顯然等價於

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{FA}} = 1 \quad \text{及} \quad \measuredangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \measuredangle(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}) + \measuredangle(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FA}) = 180°,$$

且我們有完美六邊形的存在性及唯一性——給定五點 B, C, D, E, F，存在唯一一點 A 使得 $ABCDEF$ 爲完美六邊形。

Example 3.1.2. 設完全四線形 $\mathcal{Q}=(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$，$P_{ij}:=\ell_i\cap\ell_j$ 爲 $\mathcal{Q}$ 的頂點，那麼由孟氏定理，六邊形 $P_{12}P_{14}P_{31}P_{34}P_{23}P_{24}$ 是一個完美六邊形。

Theorem 3.1.3 (完美六邊形基本定理)**.** 若六邊形 $ABCDEF$ 爲完美六邊形，則 $ACBDFE$, $AECDBF$, $ABFDEC$ 也爲完美六邊形。

Proof. 注意到

$$\frac{a-b}{b-c}\cdot\frac{c-d}{d-e}\cdot\frac{e-f}{f-a}=-1\iff\det\begin{pmatrix}ad & a+d & 1\\ be & b+e & 1\\ cf & c+f & 1\end{pmatrix}=0$$

因此可以將 $\{A,D\},\{B,E\},\{C,F\}$ 兩兩交換而不影響其完美性。 ■

所以我們也會以點對們 $(AD)(BE)(CF)$ 來描述一個完美六邊形。在上面的例子 (3.1.2) 就是完全四線形的三對對頂點 $(P_{23}P_{14})(P_{31}P_{24})(P_{12}P_{34})$。

Proposition 3.1.4. 反演保完美六邊形，意即，若 $ABCDEF$ 爲完美六邊形，那麼對於任意一點 O，$ABCDEF$ 關於 O 點反演下的像 $A^*B^*C^*D^*E^*F^*$ 也是完美六邊形。

Proof. 假設反演變換將一點 X 送至 X^*，注意到

$$\begin{aligned}\frac{a-b}{b-c}\cdot\frac{c-d}{d-e}\cdot\frac{e-f}{f-a}=-1&\iff(A,C;B,D)\cdot(E,A;F,D)=1,\\ \frac{a^*-b^*}{b^*-c^*}\cdot\frac{c^*-d^*}{d^*-e^*}\cdot\frac{e^*-f^*}{f^*-a^*}=-1&\iff(A^*,C^*;B^*,D^*)\cdot(E^*,A^*;F^*,D^*)=1.\end{aligned}$$

而我們有反演保交比 (要取個共軛)，所以

$$(A,C;B,D)\cdot(E,A;F,D)=\overline{(A^*,C^*;B^*,D^*)\cdot(E^*,A^*;F^*,D^*)},$$

故反演保完美六邊形。 ■

Proposition 3.1.5. 若六邊形 $ABCDEF$ 爲完美六邊形，則完全四線形們

$$(BC,CE,EF,FB),\ (CA,AF,FD,DC),\ (AB,BD,DE,EA)$$

有共同密克點 M。

Proof. 令 M 爲 (BC, CE, EF, FB) 的密克點，那麼我們可以旋轉伸縮複數平面 (注意到這些變換保交比) 使得 $be = cf = 1$ 且 $M = 0$，若取 $A^* = 1/d$，則由

$$\frac{1/d - 1/e}{1/e - 1/f} \cdot \frac{1/f - d}{d - e} \cdot \frac{e - f}{f - 1/d} = -1$$

可得 A^*BCDEF 爲完美六邊形，故 $A^* = A$。注意到 M 爲 (CA^*, A^*F, FD, DC), (A^*B, BD, DE, EA^*) 的共同密克點，從而命題成立。 ■

M 被稱爲六邊形 $ABCDEF$ 的密克點。所以我們可以把 $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$ 看作是某種對合。事實上一定可以寫成

(i) $\Phi(z) = \dfrac{1}{z}$ $\qquad (M = 0)$

(ii) $\Psi(z) = -z$ $\qquad (M = \infty)$

的其中一種。這時候如果 (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, n$ 都滿足同一個對合，我們會說

$$(X_1, Y_1),\ \ldots,\ (X_n, Y_n)$$

是完美 $2n$ 點組，且他們都在這個完美體系中。透過複數觀點，我們還可以得到：

Proposition 3.1.6. 六邊形 $ABCDEF$ 爲完美六邊形若且唯若存在兩點 X_1, X_2 使得 AX_1DX_2, BX_1EX_2, CX_1FX_2 皆爲調和四邊形。

Proof.

($\Rightarrow$) 旋轉伸縮複數平面使得 $ad = be = cf = 1$，取 $X_1 = 1, X_2 = -1$ 有

$$(A, D; X_1, X_2) = (B, E; X_1, X_2) = (C, F; X_1, X_2) = -1$$

即 $AX_1DX_2, BX_1EX_2, CX_1FX_2$ 皆爲調和四邊形。

($\Leftarrow$) 旋轉伸縮複數平面使得 $X_1 = 1$, $X_2 = -1$，則 $ad = be = cf = 1$ 若且唯若

$$(A, D; X_1, X_2) = (B, E; X_1, X_2) = (C, F; X_1, X_2) = -1$$

即 $ABCDEF$ 爲完美六邊形。 ■

Example 3.1.7. *$ABCD$ 爲圓內接四邊形，O 是圓心，P 是對角線 AC 與 BD 的交點，則 $(AC)(BD)(OP)$ 是完美六邊形。*

Example 3.1.8. $ABCDEF$ 爲圓內接六邊形，則 $ABCDEF$ 是完美六邊形若且唯若 AD, BE, CF 共點。

Proposition 3.1.9. 若六邊形 $ABCDEF$ 爲完美六邊形且六點不共圓，則

$$\odot(ABC),\ \odot(CDE),\ \odot(EFA),\ \odot(BDF)$$

共點於一點 P 且

$$\odot(DEF),\ \odot(FAB),\ \odot(BCD),\ \odot(ACE)$$

共點於一點 Q。此時，(P,Q) 也在這個完美體系當中。

Proof. 設 $\odot(ABC)$ 交 $\odot(CDE)$ 另一點於 P，考慮以 P 爲中心的反演變換將一點 X 送至 X^*，則 A^*, B^*, C^* 及 C^*, D^*, E^* 分別共線。令 $F' = A^*E^* \cap B^*D^*$，則 $A^*B^*C^*D^*E^*F'$ 爲完美六邊形，因此 $ABCDEF$ 爲完美六邊形若且唯若 $F' = F^*$ 若且唯若 $\odot(EFA), \odot(BDF)$ 也經過 P。

同理，我們有 $ABCDEF$ 爲完美六邊形若且唯若 $\odot(DEF)$, $\odot(FAB)$, $\odot(BCD)$, $\odot(ACE)$ 共點於 Q。設 M 爲 $ABCDEF$ 的密克點，因爲

$$\Phi(\odot(ABC)) = \odot(DEF), \Phi(\odot(CDE)) = \odot(FAB),$$

所以 $\Phi(P) = Q$，也就是 (P,Q) 在這個完美體系當中。 ■

我們將這種完美八點組稱爲共圓完美八點組。

Example 3.1.10. 令 P_A, P_B, P_C 分別爲 P 關於 BC, CA, AB 的對稱點，則 $\odot(BP_AC)$, $\odot(CP_BA)$, $\odot(AP_CB)$, $\odot(P_AP_BP_C)$ 共點於 P 關於 $\triangle ABC$ 的 antigonal conjugate (2.1.13)。

Proposition 3.1.11. 若 (A,D), (B,E), (C,F), (P,Q) 爲共圓完美八點組，那麼 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$, $\overline{PQ}$ 的中點們共圓。

Proof. 設 M 爲 $ABCDEF$ 的密克點，M_1, M_2, M_3, M_4 分別爲 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$, $\overline{PQ}$

的中點，因爲密克點的等角共軛點爲牛頓線上的無窮遠點 (1.5.13)，所以

$$\begin{aligned}\measuredangle M_2M_1M_3 &= \measuredangle(M_2M_1, BA) + \measuredangle BAC + \measuredangle(AC, M_1M_3)\\ &= \measuredangle EAM + \measuredangle BAC + \measuredangle MAF\\ &= \measuredangle EAF + \measuredangle BAC,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\measuredangle M_2M_4M_3 &= \measuredangle(M_2M_4, BP) + \measuredangle BPC + \measuredangle(PC, M_4M_3)\\ &= \measuredangle EPM + \measuredangle BPC + \measuredangle MPF\\ &= \measuredangle EPF + \measuredangle BPC.\end{aligned}$$

再由 A, P, B, C 及 A, P, E, F 分別共圓可得 M_1, M_2, M_3, M_4 共圓。 ■

Example 3.1.12. 在 (3.1.10) 中，該圓圓心爲 N。

Proposition 3.1.13 (破鏡重圓)**.** 令 $ABCDEF$ 爲一個六邊形，設 A, C, E 關於 FB, BD, DF 的對稱點分別爲 A', C', E'，則 $\triangle ACE \overset{-}{\sim} \triangle A'C'E'$ 若且唯若 $ABCDEF$ 爲完美六邊形。

Proof. 設 C^*, E^* 分別爲 C', E' 關於 BF 的對稱點，則 $\triangle AC^*E^* \overset{-}{\sim} \triangle A'C'E'$，因此

$$\triangle ACE \overset{-}{\sim} \triangle A'C'E' \iff \triangle ACE \overset{+}{\sim} \triangle AC^*E^* \iff \triangle ACC^* \overset{+}{\sim} \triangle AEE^*$$

若且唯若

$$\measuredangle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CC^*}) = \measuredangle(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EE^*}) \quad \text{且} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CC^*}}{\overline{EE^*}}.$$

令 B' 爲 B 關於 DF 的對稱點，D' 爲 D 關於 FB 的對稱點，則

$$\triangle BCC^* \overset{+}{\sim} \triangle BDD', \quad \triangle FEE^* \overset{-}{\sim} \triangle FDD',$$

所以可以簡單的得到

$$\begin{aligned}\measuredangle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CC^*}) &= \measuredangle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) + \measuredangle(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DD'}),\\ \measuredangle(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EE^*}) &= \measuredangle(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EF}) + \measuredangle(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DD'}).\end{aligned}$$

而

$$\frac{\overline{CC^*}}{\overline{EE^*}} = \frac{2 \cdot \overline{BC} \cdot |\sin \measuredangle DBF|}{2 \cdot \overline{EF} \cdot |\sin \measuredangle BFD|} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{FD}}{\overline{EF} \cdot \overline{DB}},$$

因此

$$\measuredangle(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CC^*}) = \measuredangle(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{EE^*}) \quad \text{且} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CC^*}}{\overline{EE^*}}$$

等價於

$$\measuredangle(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}) + \measuredangle(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{DF}) + \measuredangle(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{EA}) = 180^\circ \quad \text{且} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}} \cdot \frac{\overline{FE}}{\overline{EA}} = 1$$

若且唯若 $ACBDFE$ 是完美六邊形若且唯若 $ABCDEF$ 是完美六邊形。 ■

Proposition 3.1.14. 若 $ABCDEF$ 爲完美六邊形，則存在一點 P 使得

$$\triangle PCE \overset{+}{\sim} \triangle ABF,\ \triangle PEA \overset{+}{\sim} \triangle CDB,\ \triangle PAC \overset{+}{\sim} \triangle EFD.$$

Proof. 令 M 爲 $ABCDEF$ 的密克點，取 P 使得 $\triangle PCE \overset{+}{\sim} \triangle ABF$，則

$$\triangle MAP \overset{+}{\sim} \triangle MCD,\ \triangle MPE \overset{+}{\sim} \triangle MBC,$$

所以 $\triangle PEA \cup M \overset{+}{\sim} \triangle CDB \cup M$，同理有 $\triangle PAC \cup M \overset{+}{\sim} \triangle EFD \cup M$。 ■

這個點 P 又被稱爲 $\triangle ACE$(關於 $ABCDEF$) 的內點，那當然我們也可以作出剩下七個三角形 (關於 $ABCDEF$) 的內點。

習題

Problem 1. 若 A, B, C, D, E, F 位於一個圓上，證明：$ABCDEF$ 是完美六邊形若且唯若 AD, BE, CF 共點。

Problem 2. 設完美六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的密克點爲 M，M 關於 A_iA_{i+1} 的垂足爲 M_i。證明：M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 共點。

Problem 3. 令 P 爲 $\triangle ACE$ 關於完美六邊形 $ABCDEF$ 的內點，Q 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，A', C', E' 分別爲 A, C, E 關於 FB, BD, DF 的對稱點。證明：$\triangle ACE \cup Q \overset{-}{\sim} \triangle A'C'E' \cup Q$。

3.2 等角共軛點是完美的

那麼我們爲什麼要學完美六邊形呢？

Proposition 3.2.1. 若 (P, Q) 爲關於完全四線形 (AB, BD, DE, EA) 的等角共軛點對，則 $ABPDEQ$ 爲完美六邊形。

Proof. 取 Q^* 使得 $ABPDEQ^*$ 爲完美六邊形，M 爲其密克點，令 C 爲 BD 與 EA 的交點，F 爲 AB 與 DE 的交點，則 $ABCDEF$ 爲完美六邊形，因此 (A, D), (B, E), (C, F), (P, Q^*) 爲完美八點組。因爲 P 有關於 (AB, BD, DE, EA) 的等角共軛點 Q，所以有 $\measuredangle APC + \measuredangle DPF = \measuredangle BPC + \measuredangle EPF = 0^\circ$ (1.5.12)，由 AQ^*CDPF 及 BQ^*CEPF 皆爲完美六邊形可得

$$\measuredangle APC + \measuredangle AQ^*C = \measuredangle FPD + \measuredangle PDF + \measuredangle AFP = \measuredangle ABC$$
$$\measuredangle BPC + \measuredangle BQ^*C = \measuredangle FPE + \measuredangle PEC + \measuredangle BFP = \measuredangle BAC$$

因此 Q^* 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，所以 $Q^* = Q$，故 $ABPDEQ$ 爲完美六邊形。 ■

Proposition 3.2.2. 若 (P, Q) 爲關於完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點對，則 $\overline{PQ}$ 中點位於該完全四線形的牛頓線上。

Proof. 令 $\mathcal{C}$ 爲以 P, Q 爲焦點且與 $\mathcal{Q}$ 中四線皆相切的圓錐曲線，則 $\overline{PQ}$ 中點爲 $\mathcal{C}$ 的中心。由牛頓第二定理 (0.4.14)，$\mathcal{C}$ 的中心位於 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線上，即 $\overline{PQ}$ 中點位於 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線上。 ■

所以說如果 (P, Q) 是一對等角共軛點對，那他就會滿足上述兩個性質。事實上，當 $ABDE$ 足夠一般的時候，這也是充分條件。

Proposition 3.2.3. 令 $ABDE$ 爲一個非平行四邊形，若 $ABPDEQ$ 爲完美六邊形，且 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{PQ}$ 的中點們共線，那麼 (P, Q) 爲關於完全四線形 $(AB,\ BD,\ DE,\ EA)$ 的等角共軛點對。

Proof. 假設 (P, Q) 不爲關於 $\mathcal{Q} = (AB, BD, DE, EA)$ 的等角共軛點對。因爲 $\overline{PQ}$ 中點位於 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線上，由 (1.5.11)，存在關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點對 (P^*, Q^*) 使得 $\overline{PQ}$ 中點爲 $\overline{P^*Q^*}$ 中點。這時候我們有 ABP^*DEQ^* 爲完美六邊形，因此

$$(A, D),\ (B, E),\ (P, Q),\ (P^*, Q^*)$$

爲完美八點組。設 M 爲 $\mathcal{Q}$ 的密克點，則 M 爲完全四線形 (PP^*, P^*Q, QQ^*, Q^*P) 的密克點。但 PP^*Q^*Q 爲平行四邊形，因此 M 爲無窮遠點，從而得到 $AB \parallel DE$ 及 $BD \parallel EA$，故 $ABDE$ 爲平行四邊形，矛盾。 ■

所以說 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛軌跡 $\mathcal{K}$ 完全由它的 Φ 以及牛頓線決定，寫出來就是：

Theorem 3.2.4 (QL-Cu1). 令 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線爲 τ，將對角線頂點送至對方的對合爲 Φ，則 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛軌跡爲

$$\mathcal{K} := \left\{ P \;\middle|\; \frac{P + \Phi(P)}{2} \in \tau \right\}. \qquad \blacksquare$$

Proposition 3.2.5. $\mathcal{K}$ 是一條三次曲線。 ■

顯然地，$\mathcal{K}$ 通過 $\mathcal{Q}$ 的六個頂點、密克點以及牛頓線上的無窮遠點。這個「將對角線頂點送至對方的對合」又被稱爲是 $\mathcal{Q}$ 的 Clawson-Schmidte 共軛變換，簡稱 C-S 共軛變換。如果遇到 $ABDE$ 爲平行四邊形時的情形，我們就會需要特判：

Proposition 3.2.6. 若四邊形 $ABDE$ 爲一個平行四邊形，則完全四線形 (AB, BD, DE, EA) 的等角共軛軌跡 $\mathcal{K}$ 爲經過 A, B, D, E 的等軸雙曲線 $\mathcal{H}$ 與無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$ 的聯集。

Proof. 顯然有 $\mathcal{L}_\infty \subseteq \mathcal{K}$，只要證明 $P \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}_\infty \iff P \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{L}_\infty$ 即可，而

$$P \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}_\infty \iff \measuredangle APB + \measuredangle DPE = 0^\circ$$

取 Q 使得 $\triangle ABQ \overset{+}{\sim} \triangle EDP$，則 $BQ \parallel DP$，而

$$\begin{aligned} \measuredangle APB + \measuredangle DPE = 0^\circ &\iff \measuredangle APB + \measuredangle BQA = 0^\circ \\ &\iff Q \in \odot(ABP) \\ &\iff \measuredangle BDP = \measuredangle PQB = \measuredangle PAB. \end{aligned}$$

由 (2.1.10)，這等價於 P 位於以 $\overline{AD}$ 中點爲中心，經過 A, B, D 的圓錐曲線，即爲 $\mathcal{H}$。 ■

Definition 3.2.7. 對於一個完全四線形 $\mathcal{Q}$，我們定義 $\mathcal{K}(\mathcal{Q})$ 爲所有存在關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點的 P 的軌跡 (等角共軛軌跡)。類似地，我們定義 $\tau(\mathcal{Q})$ 爲 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線，$\Phi_{\mathcal{Q}}$ 爲 $\mathcal{Q}$ 的 C-S 共軛變換。

下面這個性質可以推論出許多等角共軛點的小引理。

Proposition 3.2.8. 若 (P,Q), (R,S) 爲關於完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點對，則 $\mathcal{K}(\mathcal{Q})=\mathcal{K}(PR,RQ,QS,SP)$。

Proof. 設 $ABDE$ 爲 $\mathcal{Q}$ 中的一個四邊形，則 $ABPDEQ$ 及 $ABRDES$ 皆爲完美六邊形，所以 (A,D), (B,E), (P,Q), (R,S) 爲完美八點組，因此 (P,Q), (R,S) 爲兩組 C-S 共軛點對。注意到 $\overline{PQ},\overline{RS}$ 的中點們皆位於 $\tau(\mathcal{Q})$ 上，所以由 (3.2.4)，我們有 $\mathcal{K}(\mathcal{Q})=\mathcal{K}(PR,RQ,QS,SP)$。 ■

Corollary 3.2.9. 令 (P,Q), (R,S) 爲關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，若 (U,V) 爲關於完全四線形 (PR,RQ,QS,SP) 的等角共軛點對，則 (U,V) 也爲關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對。

Proof. 因爲 (P,Q), (R,S) 爲關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，所以存在以 P,Q 爲焦點的圓錐曲線 $\mathcal{C}_1$ 及以 R,S 爲焦點的圓錐曲線 $\mathcal{C}_2$ 使得 $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$ 皆與 $\triangle ABC$ 相切。設 ℓ 爲 $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$ 的第四條公切線，則 (P,Q), (R,S) 皆爲完全四線形 $\triangle ABC\cup\ell$ 的等角共軛點對，所以 (U,V) 爲關於 $\triangle ABC\cup\ell$ 的等角共軛點對。特別地，(U,V) 爲關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對。 ■

Remark. 證明當中的「取第四條公切線」是一個常用的技巧，因爲一般來說題目都是一個三角形，所以需要這條線來輔助變成完全四線形。

Corollary 3.2.10. 令 (P,Q), (R,S) 爲關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，則 $(PR\cap QS,RQ\cap SP)$ 也爲關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對。

Proof. 在上述推論中取 $(U,V)=(PR\cap QS,RQ\cap SP)$ 即得證。 ■

Corollary 3.2.11. 令 (P,Q), (R,S) 爲關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，則完全四線形 $\mathcal{Q}=(PR,RQ,QS,SP)$ 的密克點 M 位於 $\odot(ABC)$ 上，且其關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點爲 $\infty_{\tau(\mathcal{Q})}$。

Proof. 在上述推論中取 $(U,V)=(M,\infty_{\tau(\mathcal{Q})})$ 就有 $(M,\infty_{\tau(\mathcal{Q})})$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對。因爲 $\infty_{\tau(\mathcal{Q})}\in\mathcal{L}_\infty$，所以 $M\in\odot(ABC)$。 ■

Corollary 3.2.12. 令 (P,Q) 爲關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，I 爲 $\triangle ABC$ 的內心或旁心，則存在一點 $M \in \odot(ABC)$ 使得 $\triangle MPI \overset{+}{\sim} \triangle MIQ$。若 N 爲 $\overline{PQ}$ 中點，則 M 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點爲 ∞_{IN}。

Proof. 在上述推論中取 $(R,S)=(I,I)$，設 M 爲 $\mathcal{Q}=(PI,IQ,QI,IP)$ 的密克點，則 $\triangle MPI \overset{+}{\sim} \triangle MIQ$。因爲其牛頓線爲 IN，故 M 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點爲 ∞_{IN}。 ∎

還記得之前的共圓完美八點組嗎，把它套到等角共軛點上就有：

Proposition 3.2.13. 設 (P,Q) 爲關於完全四線形 (AB,BD,DE,EA) 的等角共軛點對，設

$$R = \odot(ABP) \cap \odot(PDE) \cap \odot(EQA) \cap \odot(BDQ),$$
$$S = \odot(DEQ) \cap \odot(QAB) \cap \odot(BPD) \cap \odot(EAP),$$

則 (R,S) 爲關於 (AB,BD,DE,EA) 的等角共軛點對。

Proof. 由 (3.1.9)，我們有 (A,D), (B,E), (P,Q), (R,S) 爲完美八點組，所以只要證明 $\overline{RS}$ 中點位於 (AB,BD,DE,EA) 的牛頓線 τ 上即可。注意到 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$ 的中點們共圓，而 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{PQ}$ 的中點們共線於 τ，所以 $\overline{RS}$ 中點也在 τ 上。 ∎

透過這個性質，我們有：

Proposition 3.2.14. 令 (P,Q) 爲完全四線形 (AB,BD,DE,EA) 的等角共軛點對，O_1, O_2, O_3, O_4 分別爲

$$\triangle APB,\ \triangle BPD,\ \triangle DPE,\ \triangle EPF$$

的外心，O_1', O_2', O_3', O_4' 分別爲

$$\triangle AQB,\ \triangle BQD,\ \triangle DQE,\ \triangle EQF$$

的外心。則 (O_1,O_3'), (O_2,O_4'), (O_3,O_1'), (O_4,O_2') 構成完美八點組，且四點組們 O_i, O_i', O_{i+1}, O_{i+1}'、O_1, O_2, O_3, O_4、O_1', O_2', O_3', O_4'、O_1, O_2', O_3, O_4' 及 O_1', O_2, O_3', O_4 一共八組分別共圓。

Proof. 設 $\odot(O_1), \odot(O_2'), \odot(O_3), \odot(O_4')$ 共點於 R，$\odot(O_1'), \odot(O_2), \odot(O_3'), \odot(O_4)$ 共點於 S，則 (R, S) 爲關於 (AB, BD, DE, EA) 的等角共軛點對。由 $O_1O_1' \perp AB$, $O_1'O_2 \perp BS$, $O_2O_2' \perp BD$, $O_2'O_1 \perp BR$，我們有

$$\measuredangle O_1O_1'O_2 = \measuredangle ABS = \measuredangle RBD = \measuredangle O_1O_2'O_2$$

即 O_1, O_1', O_2, O_2' 共圓，同理 O_i, O_i', O_{i+1}, O_{i+1}' 共圓 $\forall i$，其中標號模四。由 $O_1O_2 \perp BP$, $O_2O_3 \perp DP$, $O_3O_4 \perp EP$, $O_4O_1 \perp AP$，我們有

$$\measuredangle O_1O_2O_3 = \measuredangle BPD = \measuredangle APE = \measuredangle O_1O_4O_3$$

即 O_1, O_2, O_3, O_4 共圓，同理 O_1', O_2', O_3', O_4'、O_1, O_2', O_3, O_4' 及 O_1', O_2, O_3', O_4 分別共圓。因此我們有 $O_1O_2O_3O_3'O_4'O_1'$ 爲完美六邊形，而 (O_4, O_2') 也在這個完美體系中。 ■

上面這個性質把圖畫出來其實還滿漂亮的 (?)。接下來這個好像跟完美六邊形沒什麼關係，不過就稍微提一下吧。

Proposition 3.2.15. 令 (P, Q) 爲完全四線形 (AB, BD, DE, EA) 的等角共軛點對，則 $\triangle APB, \triangle BQD, \triangle DPE, \triangle EQA$ 的垂心們 H_1, H_2, H_3, H_4 共線且垂直於 (AB, BD, DE, EA) 的牛頓線 τ。

Proof. 由對稱性，我們只要證明 H_1H_2 垂直於 τ 即可。將 $\triangle APB$ 平移，使得

$$A \mapsto Q,\ P \mapsto P^*,\ B \mapsto B^*,$$

過 Q 分別作垂直於 QP^*, DQ 的直線分別交 $\odot(QP^*B^*), \odot(BQD)$ 於 X_1, X_2，則 BH_1QX_1, BH_2QX_2 皆爲平行四邊形，因此 $X_1X_2 \parallel H_1H_2$。由

$$\measuredangle QX_1P^* = \measuredangle QB^*P^* = \measuredangle ABP = \measuredangle QBD = \measuredangle QX_2D$$

可得 $\triangle QX_1P^* \overset{+}{\sim} \triangle QX_2D$，因此 $X_1X_2 \perp P^*D$。而 $\overline{AP^*}, \overline{AD}$ 的中點們皆位於 τ 上，所以 $H_1H_2 \perp \tau$。 ■

這時候我們可以看另外四個三角形，就會有另一組四點共線，那這時候你可能會好奇什麼時候這八點共線，其實他有個等價條件：

Proposition 3.2.16. 令 (P,Q) 爲完全四線形 (AB,BD,DE,EA) 的等角共軛點對，則

$$\triangle APB, \triangle AQB, \triangle BPD, \triangle BQD, \triangle DPE, \triangle DQE, \triangle EPA, \triangle EQA$$

的垂心們共於一線 ℓ 若且唯若 AD, BE, PQ 共於一點 X。此時，$X \in \ell$。

我們先證明以下引理：

Lemma 3.2.17. 設 (P,Q) 爲關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點對，H_P, H_Q 分別爲 $\triangle BPC$, $\triangle BQC$ 的垂心。以 P, Q 爲焦點並與 $\triangle ABC$ 相切的圓錐曲線分別切 CA, AB 於 E, F，則 PQ, EF, H_PH_Q 共點。

Proof. 令 X 爲 PQ 與 H_PH_Q 的交點，由 $PH_P \parallel QH_Q$，

$$\frac{PX}{QX} = \frac{\overrightarrow{PH_P}}{\overrightarrow{QH_Q}} = \frac{\overline{BC}\cot\measuredangle BPC}{\overline{BC}\cot\measuredangle BPC} = \frac{\cot\measuredangle APF}{\cot\measuredangle AQF}.$$

注意到 A 爲完全四線形 (PE,QE,PF,QF) 的切圓 ω 的圓心。設 S, T 分別爲 ω 與 PE, QF 的切點，U 爲 PE 與 QF 的交點。由牛頓第三定理 (0.4.15)，PQ, EF, ST 共點，最後，由

$$\frac{PX}{XQ} \cdot \frac{QT}{TU} \cdot \frac{US}{SP} = -\frac{\cot\measuredangle APF}{\cot\measuredangle AQF} \cdot \frac{\overline{QT}}{\overline{PS}} = -1$$

及孟氏定理知 X, T, S 共線。 ■

回到原命題：

Proof. 由 (3.2.15)，那八個垂心們共線若且唯若 $\triangle APB$ 的垂心 H_P 與 $\triangle AQB$ 的垂心 H_Q 連線 ℓ 垂直於牛頓線。因此，當我們固定 A, B, P, Q 時 (這時候 DE 構成以 P, Q 爲焦點並與 AB 相切的圓錐曲線的包絡線)，D, E 是被唯一決定的 (除非 $ABDE$ 是平行四邊形，但這時結論顯然)。所以我們只需證明 $(\Leftarrow)$ 與

(♠) A, B, P, Q 時，存在 D, E 使得 (P,Q) 爲完全四線形 (AB,BD,DE,EA) 的等角共軛點對且 AD, BE, PQ 共點。

我們先構造 (♠)，令 $\mathcal{C}$ 是以 P, Q 爲焦點並與 AB 相切的圓錐曲線，分別作 A, B 關於 $\mathcal{C}$ 的另一條切線 T_A, T_B 並分別切 $\mathcal{C}$ 於 U, V。設 $X = PQ \cap UV$, $D = BX \cap T_A$, $E = AX \cap T_B$。由牛頓第三定理 (0.4.15)，DE 與 $\mathcal{C}$ 相切，故 (P,Q) 爲關於 (AB,BD,DE,EA) 的等角共軛點對。

(⇐) 我們證明 H_P, H_Q, X 共線，剩下的則同理。同樣地，由牛頓第三定理 (0.4.15)，若 U, V 分別爲 AE, BD 與 $\mathcal{C}$ 的切點，則 AD, BE, PQ, UV 共點於 X。由 (3.2.17)，PQ, UV, H_PH_Q 共點，證畢。 ■

3.2.1 馴服巨龍

讓我們回來看看等角共軛軌跡 $\mathcal{K}$，因爲我們知道只要是 $\mathcal{K}$ 裡面任兩對等角共軛點所圍成的完全四線形會有同一個等角共軛軌跡，所以乾脆就先把完全四線形 $\mathcal{Q}$ 拋掉 (?)，那這樣當然也還是可以定義牛頓線、等角共軛變換 (分別記爲 $\tau(\mathcal{K}), \Phi_{\mathcal{K}}$)、密克點、等角共軛點等等。跟著對岸的用詞 (我沒有被洗腦) 我們定義：

Definition 3.2.18. 一個三次曲線 $\mathcal{K}$ 被稱爲巨龍若存在一個完全四線形 $\mathcal{Q}$ 使得 $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{Q})$。

那我們關心的第一件事情是可以對它上面的點反演：

Proposition 3.2.19. 令 A 爲巨龍 $\mathcal{K}$ 上一點，則 $\mathcal{K}$ 關於以 A 爲中心的反演變換下的像 $\mathcal{K}^*$ 也是巨龍。更進一步地，如果 (P, Q) 爲關於 $\mathcal{K}$ 的等角共軛點對，則 (P, Q) 關於以 A 爲中心的反演變換下的像 (P^*, Q^*) 也爲關於 $\mathcal{K}^*$ 的等角共軛點對。

Proof. 令 (B, E) 爲任一對關於 $\mathcal{K}$ 的等角共軛點對，D 爲 A 關於 $\mathcal{K}$ 的等角共軛點，C 爲 BD 與 EA 的交點，F 爲 AB 與 DE 的交點，則 (C, F) 爲關於 $\mathcal{K}$ 的等角共軛點對。而

$$P \in \mathcal{K} \iff \measuredangle BPF + \measuredangle EPC = \measuredangle BPA + \measuredangle APF + \measuredangle EPA + \measuredangle APC = 0^\circ.$$

設以 A 爲中心的反演變換將一點 X 送至 X^*，則

$$\begin{aligned} P^* \in \mathcal{K}^* &\iff \measuredangle AB^*P^* + \measuredangle P^*F^*A + \measuredangle AE^*P^* + \measuredangle P^*C^*A = 0^\circ \\ &\iff \measuredangle F^*P^*B^* + \measuredangle C^*P^*E^* = 0^\circ, \end{aligned}$$

這等價於 P^* 有關於完全四線形 $(B^*C^*, C^*E^*, E^*F^*, F^*B^*)$ 的等角共軛點，故 $\mathcal{K}^*$ 爲 $\mathcal{Q} := (B^*C^*, C^*E^*, E^*F^*, F^*B^*)$ 的等角共軛軌跡。

令 Q 為 P 關於 $\mathcal{K}$ 的等角共軛點，我們有

$$\measuredangle APE + \measuredangle AQE = \measuredangle AFE \implies \measuredangle P^*F^*A + \measuredangle Q^*E^*A = \measuredangle F^*E^*A,$$

即 E^*P^*, E^*Q^* 為關於 $\angle F^*E^*A^*$ 的等角線，同理有 B^*P^*, B^*Q^* 為關於 $\angle A^*B^*C^*$ 的等角線，因此 Q^* 為 P^* 關於 $\mathcal{Q}^*$ 的等角共軛點。 ■

還有一件我們沒有用過的事情就是 $\mathcal{K}$ 是一個三次曲線，所以我們有一個常用的定理——Cayley-Bacharach 定理，直接套上去就有：

Proposition 3.2.20. 對於完全四線形 $\mathcal{Q} = (AB, BD, DE, EA)$，令 C 為 BD 與 EA 的交點，F 為 AB 與 DE 的交點。若 $P, Q, R \in \mathcal{K}(\mathcal{Q})$ 且 A, B, C, P, Q, R 共圓錐曲線，則 A, E, F, P, Q, R、D, B, F, P, Q, R 及 D, E, C, P, Q, R 分別共圓錐曲線，且 $\mathcal{K}(\mathcal{Q})$ 在關於 $\triangle PQR$ 的等角共軛變換下的像仍然為 $\mathcal{K}(\mathcal{Q})$。

這東西其實不用開那個定理，所以就證一下吧。

Proof. 令 P^*, Q^*, R^* 分別為 P, Q, R 關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點，則由 A, B, C, P, Q, R 共圓錐曲線知 P^*, Q^*, R^* 共線 (考慮關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛變換)，因此 A, E, F, P, Q, R、D, B, F, P, Q, R 及 D, E, C, P, Q, R 分別共圓錐曲線 (考慮關於 $\triangle AEF, \triangle DBF$ 及 $\triangle DEC$ 的等角共軛變換)。由於 $PQ \cap P^*Q^* \in \mathcal{K}$，$P, Q, R^*$ 共線，而 R 為 $PQ \cap P^*Q^*$ 關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點，所以 $PQ^* \cap P^*Q = R$，因此 $\mathcal{K}$ 為完全四線形 (PQ, QP^*, P^*Q^*, Q^*P) 的等角共軛軌跡，故 $\mathcal{K}(\mathcal{Q})$ 在關於 $\triangle PQR$ 的等角共軛變換下的像仍然為 $\mathcal{K}(\mathcal{Q})$。 ■

其實三次曲線上也是可以配極的，只是有極圓錐曲線跟極線兩種，見第五章。主要是有一天閒閒沒事作密克點關於巨龍的極圓錐曲線，然後就發現了這個：

Proposition 3.2.21. 令 M 為巨龍 $\mathcal{K}$ 的密克點，過 M 作動線 ℓ 並交 $\mathcal{K}$ 於 R, S 兩點，取 M' 使得 $(R, S; M, M') = -1$，則 M' 的軌跡為一圓。

Proof. 令 R^*, S^* 分別為 R, S 關於 $\mathcal{K}$ 的等角共軛點。則 $\Phi_{\mathcal{K}}(M')$ 為 $\overline{R^*S^*}$ 中點，由於 RS 交 R^*S^* 於 M，因此 RS^* 交 R^*S 於 $\infty_{\tau(\mathcal{K})}$，即 $RS^* \parallel R^*S \parallel \tau = \tau(\mathcal{K})$。而 $\overline{RR^*}, \overline{SS^*}$ 的中點們皆位於 τ 上，所以 $\overline{R^*S^*}$ 中點位於 τ 上，因此 M' 的軌跡為 $\Phi_{\mathcal{K}}(\tau)$。 ■

事實上，∞_τ 的極圓錐曲線是個等軸雙曲線，但這邊不打算證明。有了上面這個性質就可以證明下面這個：

Theorem 3.2.22 (Telv Cohl/老封的猜想)**.** 令 M 爲巨龍 $\mathcal{K}$ 的密克點，過 M 作動線 ℓ 並交 $\mathcal{K}$ 於 R, S 兩點，則以 $\overline{RS}$ 爲直徑的圓們共軸。

Proof. 延續上個性質的標號，在上個性質中，我們證明了 $\overline{RS}$ 的中點皆位於 τ 上，所以只須證明存在一點非無窮遠的點爲它們的根心。當 $M \in \tau$ 時，其實全部的圓都以 M 爲圓心，所以根軸就是無窮遠線。當 $M \notin \tau$ 時，令 O 爲 $\Phi_{\mathcal{K}}(\tau)$ 的圓心，由 $M, M' \in \Phi_{\mathcal{K}}(\tau)$ 知 $\Phi_{\mathcal{K}}(\tau)$ 與 $\odot(\overline{RS})$ 正交，因此 O 關於 $\odot(\overline{RS})$ 的冪爲 $\Phi_{\mathcal{K}}(\tau)$ 的半徑，而其爲定值，所以過 O 垂直 τ 的直線爲它們的根軸。 ■

我們在這邊就把那個軸稱爲 $\mathcal{K}$ 的老封軸。這時候如果所有這些圓都交老封軸在兩個點的話 (當然不是所有完全四線形都有，好像在等角共軛軌跡分成兩部分的時候才會有)，那這兩個點有個想像得到的性質：

Proposition 3.2.23. 延續 (3.2.22) 的標號，令 U, V 爲所有 $\odot(\overline{RS})$ 的共同交點，則 $U, V \in \mathcal{K}(\mathcal{Q})$ 且 (U, V) 爲關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點對。

Proof. 令 R^*, S^* 分別爲 R, S 關於 $\mathcal{K}$ 的等角共軛點，則

$$\measuredangle RUS + \measuredangle R^*US^* = 90^\circ + 90^\circ = 0^\circ,$$

因此 $U \in \mathcal{K}$，同理 $V \in \mathcal{K}$。由

$$\measuredangle RUS + \measuredangle RVS = 90^\circ + 90^\circ = 0^\circ = \measuredangle R\infty_\tau S,$$
$$\measuredangle R^*US^* + \measuredangle R^*VS^* = 90^\circ + 90^\circ = 0^\circ = \measuredangle R^*\infty_\tau S^*,$$

可得 (U, V) 爲關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點對。 ■

Proposition 3.2.24. 令 $M, \mathcal{I}$ 分別爲巨龍 $\mathcal{K}$ 的密克點、老封軸，則 M 關於 $\mathcal{I}$ 的垂足 T 位於 $\mathcal{K}$ 上。

Proof. 設 $M\infty_{\tau(\mathcal{K})}$ 交 $\mathcal{K}$ 另一點於 T'，則以 $\overline{T'\infty_{\tau(\mathcal{K})}}$ 爲直徑的圓也跟其它 $\odot(\overline{RS})$ 共軸，但 $\odot(\overline{T'\infty_{\tau(\mathcal{K})}})$ 就是過 T' 垂直 $\tau(\mathcal{K})$ 的直線，又 $\mathcal{I} \perp \tau$，$T = T' \in \mathcal{K}$。 ■

我們稱上個性質所定義出來的 T 爲 $\mathcal{K}$ 的影消點。

Proposition 3.2.25. 令 T 爲巨龍 $\mathcal{K}$ 的影消點，Y 爲 T 關於 $\mathcal{K}$ 的牛頓線 τ 的垂足，則對於任意 $P, Q \in \mathcal{K}$，(P, Q) 爲關於 $\mathcal{K}$ 的等角共軛點對若且唯若 $\triangle PTY$, $\triangle QTY$ 的垂心關於 τ 對稱。

習題

Problem 1. 設三角形 ABC 的內心爲 I，D 爲 A 關於 BC 的垂線，A^* 爲 A 關於 $\odot(ABC)$ 的對徑點。證明：$\measuredangle BID = \measuredangle A^*IC$。

Problem 2. 設三角形 ABC 的內心爲 I，ℓ 爲線段 $\overline{AI}$ 的中垂線。令 P 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓上一點，Q 爲 AP 與 ℓ 的交點，R 位於 ℓ 上使得 $\angle IPR = 90^\circ$。設 IQ 與 $\triangle ABC$ 的中位線 (平行於 BC) 交於 M。證明：$\angle AMR = 90^\circ$。

Problem 3. 設三角形 ABC 的內心爲 I，A-旁心爲 J。令 $\overline{AA'}$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓的直徑，H_1, H_2 分別爲 $\triangle BIA', \triangle CJA'$ 的垂心。證明：H_1H_2 平行於 BC。

Problem 4 (Tau)**.** 設 I, O, N 分別爲三角形 ABC 的內心、外心及九點圓圓心。證明：若 $IN \parallel BC$，則 $\angle AIO = 135^\circ$。

Problem 5. 令 $\odot(I)$ 爲 $\triangle ABC$ 的內切圓，P 位於 $\odot(I)$ 上使其關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 Q 位於 $\odot(I)$ 外，令 $\triangle QEF$ 爲 Q 關於 $\odot(I)$ 的兩條切線與 P 關於 $\odot(I)$ 的切線所圍成的三角形並假設 $\odot(I)$ 爲其內切圓，證明：$\triangle QEF$ 的 Q-偽內切圓切點 $S \in \odot(ABC)$。

3.3 當不動點遇上牛頓線

當一個完全四線形有內切圓 (或旁切圓) 的時候，通常會有一些美好的性質，放在完美六邊形內也不例外，來看看有什麼優秀的東西吧。

Proposition 3.3.1. 設完全四線形 $\mathcal{Q}$ 有切圓 $\odot(I)$，關於 $\mathcal{Q}$ 的 C-S 共軛變換爲 Φ，則 I 爲 Φ 的不動點。

Proof. 顯然地，(I, I) 爲關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點對，因此 $\Phi(I) = I$。 ■

也就是說 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線 τ 上有不動點 I。

Proposition 3.3.2. 令 M 爲有切圓 $\odot(I)$ 的完全四線形 (AB, BD, DE, EA) 的密克點，J 爲 I 關於 M 的對稱點，則 $IAJD, IBJE$ 爲調和四邊形。

Proof. C-S 共軛變換 Φ 的不動點爲 I, J，因此 $IAJD$, $IBJE$ 爲調和四邊形。 ■

Proposition 3.3.3. 設完全四線形 $\mathcal{Q}$ 有切圓 $\odot(I)$，則其等角共軛軌跡 $\mathcal{K}$ 在關於 $\odot(I)$ 的反演變換下的像 $\mathcal{K}^*$ 爲一個等軸雙曲線 $\mathcal{H}$(聯集無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$)。

Proof. 設 $ABDE$ 爲 $\mathcal{Q}$ 中的一個四邊形。令關於 $\odot(I)$ 的反演變換將一點 X 送至 X^*，由 I 有關於 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛點知

$$\begin{aligned} P \in K &\iff \measuredangle APB + \measuredangle DPE = 0 \\ &\iff \measuredangle IA^*P^* + \measuredangle P^*B^*I + \measuredangle ID^*P^* + \measuredangle P^*E^*I = 0 \\ &\iff \measuredangle B^*P^*A^* + \measuredangle E^*P^*D^* = 0 \end{aligned}$$

即等價於 P^* 位於完全四線形 $(A^*B^*, B^*D^*, D^*E^*, E^*A^*)$ 的等角共軛軌跡上，注意到 $A^*B^*D^*E^*$ 爲平行四邊形，因此 $\mathcal{K}^*$ 爲經過 A^*, B^*, D^*, E^* 的等軸雙曲線 (聯集無窮遠線)。 ■

這時候 $\mathcal{K}$ 被稱爲一個斜環索線，切圓圓心 I 則被稱爲 $\mathcal{K}$ 的內心。

Corollary 3.3.4. 令 (P, Q) 爲關於 $\triangle ABC$ 的一組等角共軛點對，$\odot(I)$ 爲 $\triangle ABC$ 的內切圓。令關於 $\odot(I)$ 的反演變換將一點 X 送至 X^*，則六點

$$A^*, B^*, C^*, P^*, Q^*, I$$

共等軸雙曲線。

Proof. 令 $\mathcal{C}$ 爲以 P, Q 爲焦點且與 $\triangle ABC$ 相切的圓錐曲線，ℓ 爲 $\mathcal{C}$ 與 $\odot(I)$ 的第四條切線，則 $(P, Q), (I, I)$ 爲關於 $\mathcal{Q} = \triangle ABC \cup \ell$ 的等角共軛點對，因此 $\mathcal{K}(\mathcal{Q})$ 關於 $\odot(I)$ 的反演下的像爲一個等軸雙曲線 $\mathcal{H}$，而 $A^*, B^*, C^*, P^*, Q^*, I$ 共於 $\mathcal{H}$。 ■

Corollary 3.3.5. 令 M 爲 $\mathcal{K}$ 的密克點，過 M 作一條直線 ℓ 交 $\mathcal{K}$ 於 R, S 兩點，則 $\measuredangle RIS = 90^\circ$。

Proof. 顯然地，R^*, S^* 爲 $\mathcal{H}$ 上兩點滿足 I, M^*, R^*, S^* 共圓，而 I, M 爲 $\mathcal{H}$ 的一組對徑點，故 $\overline{R^*S^*}$ 爲 $\odot(IM^*R^*S^*)$ 的直徑，即 $\measuredangle RIS = 90^\circ$。 ■

還記得老封的猜想嗎，那這時候其實就是 $(U, V) = (I, I)$ 的情形，也就是：

Proposition 3.3.6. 令 M, τ 分別爲斜環索線 $\mathcal{K}$ 的密克點、牛頓線，過 M 作動線 ℓ 並交 $\mathcal{K}$ 於 R, S 兩點，則以 $\overline{RS}$ 爲直徑的圓們共軸於 I 關於 τ 的垂線，且其爲 I 關於 $\odot(\overline{RS})$ 的切線。

Proof. 由 (3.2.22) 知只須證明該垂線與 $\odot(\overline{RS})$ 相切，而 $\overline{RS}$ 中點 N 位於 τ 上，所以 $NI \parallel \tau$，因此該垂線與 $\odot(\overline{RS})$ 相切。 ■

Proposition 3.3.7. 延續 (3.3.3) 的標號，對於任意 $\mathcal{K}$ 的等角共軛點對 (P, Q)，P, Q 在關於 $\mathcal{K}$ 的內心 I 的反演變換下的像 P^*, Q^* 爲 $\mathcal{H}$ 的一組對徑點。

Proof. 令 M 爲 $\mathcal{K}$ 的密克點，固定 $\mathcal{K}$ 上兩對等角共軛點對 $(A, D), (B, E)$，J 爲 I 關於 M 的對稱點，則 $IAJD, IBJE, IPJQ$ 爲調和四邊形，所以 J^* 爲線段們 $\overline{A^*D^*}, \overline{B^*E^*}, \overline{P^*Q^*}$ 的共同中點，即 J^* 爲 $\mathcal{C}$ 的中心，並且 P^*, Q^* 爲 $\mathcal{C}$ 的一組對徑點。 ■

Corollary 3.3.8. 若 PQ 交 $\mathcal{K}$ 於 T，則 $IT \perp PQ$。

Proof. 顯然地，P^*, Q^* 爲 $\mathcal{H}$ 上兩點滿足 I, P^*, Q^*, T^* 共圓，而 P^*, Q^* 爲 $\mathcal{H}$ 的一組對徑點，故 $\overline{I^*T^*}$ 爲 $\odot(IP^*Q^*T^*)$ 的直徑，即 $IT \perp PQ$。 ■

那巨龍反演是巨龍，所以斜環索線反演當然也是斜環索線 (?

Proposition 3.3.9. 令 A 爲斜環索線 $\mathcal{K}$ 上非內心的一點，則 $\mathcal{K}$ 關於以 A 爲中心的反演變換下的像仍然爲斜環索線。

Proof. 令 I 爲 $\mathcal{K}$ 的內心，$\mathcal{K}^*, I^*$ 分別爲 $\mathcal{K}, I$ 關於以 A 爲中心的反演變換下的像，則 $\mathcal{K}^*$ 關於以 I^* 爲中心的反演下的像是 $\mathcal{K}$ 關於以 I 爲中心的反演變換合成一個

對稱變換下的像，即等軸雙曲線，所以 $\mathcal{K}^*$ 爲斜環索線。 ■

其實還可以發現有以下操作：

Proposition 3.3.10. 令斜環索線 $\mathcal{K}$ 的內心爲 I，(P,Q) 爲 $\mathcal{K}$ 上的等角共軛點對，令 Γ 爲某個以 I 爲圓心的圓使得 P,Q 位於 Γ 外，作 P 關於 Γ 的兩條切線 K_1,K_2，Q 關於 Γ 的兩條切線 L_1,L_2，則 $\mathcal{K}=\mathcal{K}(K_1,K_2,L_1,L_2)$。

Proof. 由對稱性，只要證明 $K_1\cap L_1\in\mathcal{K}$ 即可。設 $K_1,L_1,K_1\cap L_1$ 在關於 Γ 的反演變換下的像爲 K_1^*,L_1^*,U，且 K_1^*,L_1^* 分別切 Γ 於 S,T，則易知 S,T,U 共線。由

$$\measuredangle UP^*I=\measuredangle USI=\measuredangle ITU=\measuredangle IQ^*U,$$

U 位於過 P^*,Q^*,I 且以 $\overline{P^*Q^*}$ 中點爲中心的等軸雙曲線上，故 $K_1\cap L_1\in\mathcal{K}$。 ■

習題

Problem 1. 設點 M 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓上一動點。自 M 點引對 $\triangle ABC$ 的內切圓相切的兩條直線，分別交 BC 於 X_1,X_2 兩點。證明：$\odot(MX_1X_2)$ 過定點。

Problem 2. 令斜環索線 $\mathcal{K}$ 的內心爲 I，若 $P\in\mathcal{K}(\mathcal{Q})$，令過 P 且垂直 PI 的直線爲 ℓ_P。證明：ℓ_P 的包絡線是一個圓錐曲線。

Problem 3. 設四邊形 $ABCD$ 有內切圓 $\odot(I)$，AB 交 CD 於 E，AD 交 BC 於 F，AC 交 BD 於 T。設 $\odot(ATB)$ 與 $\odot(CTD)$ 再交於 P，$\odot(ATD)$ 與 $\odot(BTC)$ 再交於 Q。證明：若 E,F,P,Q 共圓，則 I 也在這個圓上。

Chapter 4

完全四線形的心

第四章當然就是要講完全四線形啊。

4.1 基礎的心

給定一個完全四線形 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$，定義

- 六個頂點：$A_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$
- 四個三角形：$\triangle_i := \triangle \ell_{i+1}\ell_{i+2}\ell_{i+3}$
- 三個對角線段與對頂點：$\overline{A_{ij}A_{kl}}$ 與 (A_{ij}, A_{kl})
- 三個四邊形：$A_{ij}A_{jk}A_{kl}A_{li}$，其中有凸四邊形、凹四邊形以及折四邊形 (就圖形上來看)
- 對角線三角形 (西瓦三角形)：δ，由三個對角線段延長所圍成的三角形

那有些「心」我相信大家已經聽過，或者在之前的章節有出現過，比方說：

Proposition 4.1.1 (QL-P1, 密克點). 四個三角形 $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ 的外接圓們共於一點 M。

Proposition 4.1.2 (QL-L1, 牛頓線). 三條對角線 $\overline{A_{23}A_{14}}, \overline{A_{31}A_{24}}, \overline{A_{12}A_{34}}$ 的中點們共於一直線 $\tau(\mathcal{Q})$。

Proposition 4.1.3 (QL-Ci3, 密克圓). 五點 M, O_1, O_2, O_3, O_4 共於一圓，其中 O_i 爲 $\triangle_i$ 的外心。

Proposition 4.1.4 (QL-L2, 垂心線, 施坦納線). 令 H_i 爲 $\triangle_i$ 的垂心，則四點 H_1, H_2, H_3, H_4 共於一線 $\mathcal{S}$。

Proposition 4.1.5 (Gauss-Bodenmiller 定理). 三圓 $\odot(\overline{A_{23}A_{14}}), \odot(\overline{A_{31}A_{24}}), \odot(\overline{A_{12}A_{34}})$ 共軸且 $\mathcal{S}$ 爲他們的根軸。

Proposition 4.1.6 (QL-Co1). 令 $\mathcal{P}$ 是以密克點 M 爲焦點、垂心線 $\mathcal{S}$ 爲準線的抛物線，則 $\mathcal{P}$ 與 $\mathcal{Q}$ 中的四線相切。

Proposition 4.1.7 (QL-Tf1, Clawson-Schmidt Conjugate). 存在唯一一個由反演與對稱合成的變換 $\Phi_{\mathcal{Q}}$ 使得 $A_{23} \leftrightarrow A_{14}, A_{31} \leftrightarrow A_{24}, A_{12} \leftrightarrow A_{34}$。

不要懷疑，一個變換也可以稱作是心。

Theorem 4.1.8 (QL-Cu1). 完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的等角共軛軌跡爲

$$\mathcal{K} := \left\{ P \;\middle|\; \frac{P + \Phi_{\mathcal{Q}}(P)}{2} \in \tau(\mathcal{Q}) \right\}$$

4.2 三尖瓣線

爲了能夠透徹的理解某些心在做什麼，這邊引進這個常用工具：

Definition 4.2.1. 三尖瓣線 (**Deltoid**) 是一個圓繞著直徑爲其三倍的圓內側純滾動時，圓上一點產生的軌跡。

爲了讓讀者有點概念等等要幹嘛，這邊先提一個重要結論，一個三角形的所有西姆松線 (6.1.10) 的包絡線是三尖瓣線。

Proposition 4.2.2. 令 $\triangle ABC$ 爲一個正三角形，$\odot(I)$ 爲其內切圓，則 $\odot(I)$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡爲以 A, B, C 爲頂點的三尖瓣線。

Proof. 令 P 爲 $\odot(I)$ 上一點，P 關於 I 位似 $-2/3, -4/3, -2$ 倍的點分別爲

P_1, P_2, P_3，A, B, C 關於 I 位似 $2/3$ 倍的點分別爲 A', B', C'。設 $\mathcal{S}$ 爲 P_2 關於 $\triangle A'B'C'$ 的西姆松線。

Claim. P_3 關於 $\mathcal{S}$ 的垂足 Q 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。

Proof of Claim. 令 P 關於 AI 的對稱點爲 T，則由對稱性只須證明 A, T, Q 共線。設 M, N 分別爲 $\overline{BC}, \overline{AI}$ 中點，P_2 關於 $B'C'$ 的對稱點爲 U，P_3 關於 BC 的對稱點爲 V，則 I, U, V 共線且其爲 P_2 關於 $\triangle A'B'C'$ 的施坦納線。令 X, Y 分別爲 P_2U, P_3V 與 $\mathcal{S}$ 的交點，Z 爲 P_3 關於 AI 的對稱點，則 I 爲 $\triangle AVZ$ 的重心，因此 T 爲 $\overline{AV}$ 中點。顯然有 $\triangle P_3QY$ 與 $\triangle MTN$ 位似，因此由

$$P_3Y : YV = 2P_2X : XU = 2 : 1 = MN : NA$$

可得 $VQ \parallel AT$，即 A, T, Q 共線。 □

回到原命題，Q 位於 $\odot(\overline{P_1P_3})$ 上 (其半徑爲 $\odot(I)$ 的半徑的 $1/3$)。設 I' 爲 I 關於 BC 的對稱點，則

$$\measuredangle P_3P_1Q = \measuredangle P_3IA + \measuredangle I'IV = 3\measuredangle P_3I'A$$

因此 Q 位於以 A, B, C 爲頂點的三尖瓣線上。 ■

當然還要證明以 A, B, C 爲頂點的三尖瓣線上的每個點的等角共軛點在內切圓上，不過其實用上面的證明就可以簡單作論證了。

Proposition 4.2.3. 令 $\triangle ABC$ 爲一個正三角形，$\odot(I)$ 爲其內切圓，P 爲 $\odot(I)$ 上一點，Q 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。若 A, B, C 關於 I 位似 $2/3$ 倍的點分別爲 A', B', C'，P 關於 I 位似 $-4/3$ 倍的點爲 P'，則 P' 關於 $\triangle A'B'C'$ 的西姆松線爲 Q 關於以 A, B, C 爲頂點的三尖瓣線的切線。

Proof. 由上個性質的證明，Q 位於 P' 關於 $\triangle A'B'C'$ 的西姆松線 $\mathcal{S}$ 上，因此只要證明 $\mathcal{S}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡與 $\odot(I)$ 於 P 點相切即可。令 P 關於 I 位似 2 倍的點爲 P^*，則 P^* 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點位於 $\mathcal{S}$ 上，因此 $\mathcal{S}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡爲經過 A, B, C, P, P^* 的圓錐曲線 $\mathcal{C}$。令 AP, P^*P 分別交 $\odot(ABC)$ 另一點於 U, V，P 關於 $\odot(I)$ 的切線交 BC 於 W，M 爲 $\overline{BC}$ 中點，I' 爲 I 關於 BC 的對稱點，則由

$$\measuredangle P^*WP = \measuredangle PWI = \measuredangle PMI = \measuredangle P^*I'A = \measuredangle P^*UP$$

知 P, P^*, U, W 共圓，因此

$$\measuredangle VUW = \measuredangle VUP^* + \measuredangle P^*UW = 180^\circ$$

即 U, V, W 共線。設 AP 交 BC 於 X，則由

$$P(A, B; C, W) = (X, B; C, W) = U(A, B; C, V) = P^*(A, B; C, P)$$

可得 PW 爲 P 關於 $\mathcal{C}$ 的切線。 ■

Corollary 4.2.4. 令 ω 爲一圓，對於 ω 上任意一點 P，作一線 $\ell_P \in TP$，使得

$$\measuredangle(\ell_{P_1}, \ell_{P_2}) = -\measuredangle P_1AP_2,\ \forall A, P_1, P_2 \in \omega$$

則 $\{\ell_P \mid P \in \omega\}$ 的包絡線爲一個三尖瓣線。

Proof. 令 Ω 爲 ω 關於 ω 的圓心 O 位似 2 倍的像，在 ω 上取一點 A 使得 $\ell_A = OA$，A' 爲 O 關於 A 的對稱點，並取 $B', C' \in \Omega$ 使得 $\triangle A'B'C'$ 是正三角形。對於 Ω 上任意一點 P'，令 $\mathcal{S}'_P$ 爲 P' 關於 $\triangle A'B'C$ 的西姆松線，則 $\mathcal{S}'_P$ 經過 $\overline{OP'}$ 中點 P，注意到 OA 爲 A' 關於 $\triangle A'B'C'$ 的西姆松線，所以

$$\measuredangle(\mathcal{S}'_P, \ell_P) = \measuredangle(\mathcal{S}'_P, \mathcal{S}_A) + \measuredangle(\ell'_A, \ell_P) = \measuredangle A'B'P' + \measuredangle PBA = 0^\circ$$

其中 B 爲 $\overline{OB'}$ 中點。即 $\mathcal{S}'_P = \ell_P$，因此由 (4.2.3) 知 $\{\ell_P \mid P \in \omega\}$ 的包絡線爲一個三尖瓣線。 ■

有了這些性質之後，這個定理就變得很簡單了。

Theorem 4.2.5 (施坦納三尖瓣線定理)**.** 給定任意 $\triangle ABC$，對於任意一點 $P \in \odot(ABC)$，令 $\mathcal{S}_P$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的西姆松線，則 $\{\mathcal{S}_P \mid P \in \odot(ABC)\}$ 的包絡線爲一個三尖瓣線。

Proof. 令 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，$\odot(N)$ 爲 $\triangle ABC$ 的九點圓，對於任意兩點 $P_1, P_2 \in \odot(N)$，令 P'_i 爲 H 關於 P_i 的對稱點，則 $P_i \in \mathcal{S}_{P'_i}$ 且

$$\measuredangle(\mathcal{S}_{P'_1}, \mathcal{S}_{P'_2}) = \measuredangle P'_2AP'_1 = -\measuredangle P_1XP_2$$

其中 $X \in \odot(N)$。所以由 (4.2.4) 可得 $\{\mathcal{S}_P \mid P \in \odot(ABC)\}$ 的包絡線爲一個三尖瓣線。 ■

Definition 4.2.6. 同上述定理的標號，我們稱該三尖瓣線 $\mathcal{D}$ 為 $\triangle ABC$ 的施坦納三尖瓣線 (**Steiner Deltoid**)，$\mathcal{D}$ 中三個頂點的外接圓稱為 $\triangle ABC$ 的施坦納圓 (**Steiner Circle**)。

藉由上面的證明，我們可以歸納出以下結果

Proposition 4.2.7. 給定任意 $\triangle ABC$，$H, \odot(N), \mathcal{D}$ 分別為 $\triangle ABC$ 的垂心、九點圓及施坦納三尖瓣線。令 P 為 $\odot(ABC)$ 上一點，M 為 $\overline{HP}$ 中點，P 關於 $\triangle ABC$ 的西姆松線 $\mathcal{S}$ 與 $\odot(N)$ 交於 $Q \neq M$，則 $\mathcal{S}$ 與 $\mathcal{D}$ 於 Q 關於 M 的對稱點相切。

The proof is trivial and left as an exercise to the reader. ■

4.2.1 轉一下

我們上面證明西姆松線的包絡線是一個三尖瓣線，那事實上我們可以定義 α-西姆松線 (我亂取的)：

Definition 4.2.8. 給定任意 $\triangle ABC$ 與一角 α，對於任意一點 $P \in \odot(ABC)$，分別在 BC, CA, AB 上取點 D, E, F 使得

$$\measuredangle(PD, BC) = \measuredangle(PE, CA) = \measuredangle(PF, AB) = \alpha.$$

則 D, E, F 共線 (6.1.9)，並稱其為 P 關於 $\triangle ABC$ 的 α-西姆松線，記為 $\mathcal{S}_{P,\alpha}$。

顯然地，當固定 P 時，$\mathcal{S}_{P,\alpha}$ 的包絡線是以 P 為焦點的拋物線，而 $\alpha = 0°$ 時，$\mathcal{S}_{P,\alpha}$ 為無窮遠線。類似於原本的西姆松線，我們有以下角度關係：

Proposition 4.2.9. 給定任意 $\triangle ABC$ 與兩角 α_1, $\alpha_2 \neq 0$，則對於任意兩點 P_1, $P_2 \in \odot(ABC)$，

$$\measuredangle(\mathcal{S}_{P_1,\alpha_1}, \mathcal{S}_{P_2,\alpha_2}) = \alpha_1 - \alpha_2 - \measuredangle P_1AP_2.$$

Proof. 簡單的算角度。事實上，

$$\measuredangle(\mathcal{S}_{P_1,\alpha_1}, \mathcal{S}_{P_2,\alpha_2}) = \measuredangle(\mathcal{S}_{P_1,\alpha_1}, \mathcal{S}_{P_1,\alpha_2}) + \measuredangle(\mathcal{S}_{P_1,\alpha_2}, \mathcal{S}_{P_2,\alpha_2}) = (\alpha_1 - \alpha_2) - \measuredangle P_1AP_2.$$ ■

看一下這節的標題，你就會想所有的 α-西姆松線的包絡線是不是也是三尖瓣線。當然，當 $\alpha = 0^\circ$ 時，所有的 α-西姆松線都重合於無窮遠線，所以我們不考慮這個情形。

Theorem 4.2.10. 給定任意 $\triangle ABC$ 與一角 $\alpha \neq 0^\circ$，則 $\{\mathcal{S}_{P,\alpha} \mid P \in \odot(ABC)\}$ 的包絡線爲一個三尖瓣線。

不過很可惜的是，我們不能直接套 (4.2.4)，因爲我們沒有施坦納定理。所以我們需要以下推廣：

Proposition 4.2.11. 給定任意 $\triangle ABC$ 與一角 $\alpha \neq 0$，令 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，則存在一圓 $\odot(N')$ 與一以 H 爲中心的旋似變換 φ 使得 $\varphi(\odot(ABC)) = \odot(N')$ 且對於任意一點 $P \in \odot(ABC)$，$\varphi(P)$ 在 P 關於 $\triangle ABC$ 的 α-西姆松線上。

Proof. 令 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心。分別在 BC, CA, AB 上取點 R_A, R_B, R_C 使得

$$\measuredangle(OR_A, BC) = \measuredangle(OR_B, CA) = \measuredangle(OR_C, AB) = \alpha.$$

易得 $\triangle R_AR_BR_C \cup O \overset{+}{\sim} \triangle ABC \cup H$。令 $\odot(N') = \odot(R_AR_BR_C)$，對於任意一點 P，我們定義 $\varphi(P)$ 爲使 $\triangle HPQ \overset{+}{\sim} \triangle HON'$ 的 Q，以下證明這會滿足我們的要求。

令 O_A, O_B, O_C 分別爲 O 關於 BC, CA, AB 的對稱點。注意到 H 爲 $\triangle O_AO_BO_C$ 的外心且

$$\triangle OO_AR_A \overset{+}{\sim} \triangle OO_BR_B \overset{+}{\sim} \triangle OO_CR_C \overset{+}{\sim} \triangle OHN',$$

所以 $\triangle O_AO_BO_C \cup H \overset{+}{\sim} \triangle R_AR_BR_C \cup N'$，且 N' 位於 $\overline{OH}$ 的中垂線上。對於任意一點 $P \in \odot(ABC)$，令 $Q = \varphi(P)$，由 $\triangle HPQ \overset{+}{\sim} \triangle HON'$，我們有

$$\frac{\overline{N'Q}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{HN'}}{\overline{HO}} = \frac{\overline{ON'}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{N'R_A}}{\overline{HO_A}}.$$

而 $\odot(ABC)$ 與 $\odot(O_AO_BO_C)$ 等大，所以 $\overline{N'Q} = \overline{N'R_A}$，即 $Q \in \odot(N')$。因此我們有 $\varphi(\odot(ABC)) = \odot(N')$。

令 $\mathcal{S}_{P,\alpha}$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的 α-西姆松線，D, E, F 分別爲 $\mathcal{S}_{P,\alpha}$ 與 BC, CA, AB 的交點，P_A, P_B, P_C 分別爲 P 關於 BC, CA, AB 的對稱點。則由施坦納定理知 P_A, P_B, P_C 共線且過 H，由

$$\triangle PDP_A \overset{+}{\sim} \triangle PEP_B \overset{+}{\sim} \triangle PFP_C \overset{+}{\sim} \triangle OR_AO_A \overset{+}{\sim} \triangle ON'H \overset{+}{\sim} \triangle PQH,$$

我們有 $P_AP_BP_CH \overset{+}{\sim} DEFQ$，所以 $Q \in \mathcal{S}_{P,\alpha}$。 ■

在有了這個性質之後，(4.2.10) 就跟原定理 (4.2.5) 的證明一樣了。那麼我們類似地定義：

Definition 4.2.12. 同上述定理的標號，我們稱該三尖瓣線 $\mathcal{D}_\alpha$ 爲 $\triangle ABC$ 的 α-施坦納三尖瓣線。

顯然地，所有與 $\triangle ABC$ 相切的所有三尖瓣線一定是某個 α-施坦納三尖瓣線，那現在的問題就是如果我們有一個三尖瓣線上的任三條切線，要怎麼得到 α。爲了解決這個問題，我們得再更深入 (4.2.11) 的證明。

Proposition 4.2.13. 同 (4.2.11) 的證明的標號，令 S 爲 $\infty_{\mathcal{S}_{P,\alpha}}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，則

$$\triangle ABC \cup S \overset{+}{\sim} \triangle R_AR_BR_C \cup \varphi(P),$$

且旋似角爲 $90° + \alpha$。

Proof. 簡單的算角度。事實上，令 $A^* = \varphi^{-1}(R_A)$, $B^* = \varphi^{-1}(R_B)$，則

$$\measuredangle R_BR_A\varphi(P) = \measuredangle B^*A^*P = -\measuredangle(\mathcal{S}_{B^*,\alpha}, \mathcal{S}_{P,\alpha}) = \measuredangle(\mathcal{S}_{P,\alpha}, CA) = \measuredangle BAS,$$

且

$$\measuredangle(R_BR_C, BC) = \measuredangle(\perp OR_A, BC) = 90° + \alpha.$$ ■

最後，我們證明本小節最重要的定理：

Theorem 4.2.14. 給定 $\triangle ABC$ 與一角 $\alpha \neq 0$，設 $\mathcal{D}_\alpha$ 爲 $\triangle ABC$ 的 α-施坦納三尖瓣線。令 P_1, P_2, P_3 爲 $\odot(ABC)$ 上三點，$\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_{P_i,\alpha}$。若

$$\beta = \measuredangle(AP_1, BC) + \measuredangle(BP_2, CA) + \measuredangle(CP_3, AB) - 2\alpha,$$

(i) 當 $\beta = 0°$ 時，$\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ 共點。

(ii) 當 $\beta \neq 0°$ 時，$\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ 不共點，且 $\mathcal{D}_\alpha$ 是由 $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ 所圍成的三角形的 β-施坦納三尖瓣線。

Proof. 同 (4.2.11) 的證明的標號，並令 S_i 爲 $\infty_{\mathcal{S}_i}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，T_i 爲 $\mathcal{S}_{i-1}$ 與 $\mathcal{S}_{i+1}$ 的交點，H' 爲 $\varphi(\triangle P_1P_2P_3)$ 的垂心。我們有

$$\begin{aligned}\beta &= \sum \measuredangle(AP_1, BC) - 2\alpha = \sum \measuredangle(\mathcal{S}_{A,\alpha}, \mathcal{S}_{P_1,\alpha}) - 2\alpha \\ &= \sum \measuredangle(BC, \mathcal{S}_{P_1,\alpha}) + \alpha = \sum \measuredangle Q_1Q_2R_A + \alpha \\ &= \measuredangle Q_1Q_2R_A + \measuredangle(Q_2Q_3, R_BR_C) + \alpha \\ &= \measuredangle S_1S_2A + \measuredangle(Q_2Q_3, BC) + 90^\circ \\ &= \measuredangle(BC, \mathcal{S}_1) + \measuredangle(\perp Q_2Q_3, BC) = \measuredangle(\perp Q_2Q_3, \mathcal{S}_1).\end{aligned}$$

注意到

$$\measuredangle P_{i-1}T_iP_{i+1} = \measuredangle(\mathcal{S}_{i-1}, \mathcal{S}_{i+1}) = -\measuredangle P_{i-1}P_iP_{i+1},$$

所以 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ 共點若且唯若 $T_1 = T_2 = T_3 = H'$ 若且唯若 $H' \in \mathcal{S}_1$，這又等價於

$$\beta = \measuredangle(\perp Q_2Q_3, \mathcal{S}_1) = 0,$$

這證明了 (i)，以下證明 (ii)。已經有 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ 不共點。設 $\mathcal{D}_\alpha$ 爲 $\triangle T_1T_2T_3$ 的 β'-施坦納三尖瓣線，那麼由 (4.2.11) 的證明，H' 爲 $\triangle T_1T_2T_3$ 的外心，且 $\beta' = \measuredangle(H'Q_1, \mathcal{S}_1)$。所以

$$\beta' = \measuredangle(\perp Q_2Q_3, \mathcal{S}_1) = \beta. \qquad \blacksquare$$

取 $\alpha = 90^\circ$ 就有這個常見的小推論：

Corollary 4.2.15. 給定任意 $\triangle ABC$，P_1, P_2, P_3 爲 $\odot(ABC)$ 上三點，$\mathcal{S}_i$ 爲 P_i 關於 $\triangle ABC$ 的西姆松線，則 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ 共點若且唯若

$$\measuredangle ABP_1 + \measuredangle BCP_2 + \measuredangle CAP_3 = 0^\circ.$$

這邊給個比較初等的證明：

Proof. 令 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，$\mathcal{S}_i'$ 爲 $\mathcal{S}_i$ 關於 H 位似 2 倍的線，則 $P_i \in \mathcal{S}_i'\ \forall i \in \{1,2,3\}$ 且 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ 共點若且唯若 $\mathcal{S}_1', \mathcal{S}_2', \mathcal{S}_3'$ 共點。

$(\Leftarrow)$ 令 P_1^* 爲 P_1 關於 O 的對稱點，則 P_1^* 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 $Q = \infty_{\mathcal{S}_1'}$，

因此

$$\begin{aligned}\measuredangle(\mathcal{S}_1', P_1P_2) &= \measuredangle QBA + \measuredangle ABP_1 + \measuredangle BP_1P_2 \\ &= \measuredangle CBP_1^* - \measuredangle CAP_3 \\ &= \measuredangle CP_1O - \measuredangle CP_1P_3 = \measuredangle P_3P_1O,\end{aligned}$$

即 $\mathcal{S}_1'$, P_1O 爲關於 $\angle P_2P_1P_3$ 的等角線，同理 $\mathcal{S}_2'$, P_2O 及 $\mathcal{S}_3'$, P_3O 分別爲關於 $\angle P_3P_2P_1$, $\angle P_1P_3P_2$ 的等角線，因此 $\mathcal{S}_1'$, $\mathcal{S}_2'$, $\mathcal{S}_3'$ 共點於 O 關於 $\triangle P_1P_2P_3$ 的等角共軛點。

($\Rightarrow$) 設 $\mathcal{S}_1'$, $\mathcal{S}_2'$, $\mathcal{S}_3'$ 共點於 U，V 爲 U 關於 $\triangle P_1P_2P_3$ 的等角共軛點。取 P_1' 滿足

$$\measuredangle ABP_1' + \measuredangle BCP_2 + \measuredangle CAP_3 = 0^\circ,$$

則由 ($\Leftarrow$) 知 U 關於 $\triangle P_1'P_2P_3$ 的等角共軛點爲 O，由 $P_1' \in \odot(P_1P_2P_3)$ 可得 $V \in \odot(OP_2P_3)$。同理有 $V \in \odot(OP_3P_1)$, $V \in \odot(OP_1P_2)$，所以 $V = O$。注意到 P_1P_2, P_2P_3 爲關於 $\angle UP_2O$ 的等角線，所以 $P_1P_2 = P_1'P_2$，即 $P_1 = P_1'$，故原命題成立。 ■

習題

Problem 1. 試用角元西瓦定理證明 (4.2.15)。

Problem 2. 設 $\triangle ABC$ 的施坦納三尖瓣線分別切 BC, CA, AB 於 D, E, F，則 AD, BE, CF 交於 $\triangle ABC$ 的垂心關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點。

Problem 3. 令 S_1, S_2, S_3 爲 $\triangle ABC$ 的施坦納三尖瓣線的頂點。證明：

$$3 \cdot \measuredangle(S_1S_2, BC) = \measuredangle ABC + \measuredangle ACB$$

4.3 Hervey 的心

都看完施坦納的三尖瓣了，還不把一個完全四線形塞進去 (?)

Proposition 4.3.1. 令完全四線形 $\mathcal{Q} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ 的四個外心爲 O_1, O_2, O_3, O_4，H_i' 爲 $\triangle O_{i+1}O_{i+2}O_{i+3}$ 的垂心，則 O_i, H_i' 們共圓錐曲線且 $H_i' \in \ell_i$。

Proof. 令 $\mathcal{Q}$ 的密克點爲 M，注意到 ℓ_i 爲 M 關於 $\triangle O_{i+1}O_{i+2}O_{i+3}$ 的施坦納線，因此 $H_i' \in \ell_i$。而 O_i, H_i' 們位於經過 O_1, O_2, O_3, O_4 的等軸雙曲線上。 ■

Corollary 4.3.2 (QL-P5, Clawson 中心). 線段 $\overline{O_iH_i'}$ 的中點們重合。

Proof. 即重合於 $O_1O_2O_3O_4$ 的龐色列點 T。 ■

Corollary 4.3.3 (QL-Ci4, Hervey 圓). 四點 H_1', H_2', H_3', H_4' 共於一圓。

Proof. 將密克圓 $\odot(O_1O_2O_3O_4)$ 關於 $O_1O_2O_3O_4$ 的龐色列點對稱，則 H_1', H_2', H_3', H_4' 皆位於該圓上。 ■

Theorem 4.3.4 (QL-Qu2, Kantor-Hervey 三尖瓣線). 存在一個三尖瓣線 Δ 與 $\mathcal{Q}$ 中四線相切。

當然，這可以由 α-施坦納三尖瓣線得到，不過這邊給個直接構造的證明：

Proof. 考慮一變換 φ，爲關於 T 的對稱變換合成 $\mathcal{Q}$ 的 C-S 共軛變換，對於一點 $P \in \odot(H_1'H_2'H_3'H_4')$，定義 L_P 爲 P 關於 $M\varphi(P)$ 的垂線，則由簡單的角度計算及 (4.2.4) 知 L_P 的包絡線爲一個三尖瓣線 Δ。注意到 $\ell_i = L_{H_i'}$，因此 Δ 與 $\mathcal{Q}$ 中四線相切。 ■

那顯然這個三尖瓣線是唯一的。

Lemma 4.3.5. 給定 $\triangle ABC$，若兩點 X, Y 滿足

$$\triangle ABX \stackrel{-}{\sim} \triangle ACY \quad \text{且} \quad \measuredangle AXB = \measuredangle AYC = 90^\circ,$$

則 $\overline{BC}$ 中點 M 位於 $\overline{XY}$ 的中垂線上且 $\odot(MXY)$ 經過 A 關於 BC 的垂足。

Proposition 4.3.6 (QL-P3, Kantor-Hervey 點). 令 Δ 的中心爲 ϕ，則 ϕ 位於 $\mathcal{Q}$ 中三角形的歐拉線段 (外心與垂心的連線段) 的中垂線上。

Proof. 只需證 ϕ 位於 $\overline{O_4H_4}$ 的中垂線上。取一線 ℓ 使得 Δ 爲由 ℓ, ℓ_2, ℓ_3 所圍成的三角形 $\triangle LL_2L_3$(點的標號對應邊) 的施坦納三尖瓣線，則 $\mathcal{Q}$ 的 Hervey 圓爲 $\triangle LL_2L_3$ 的九點圓，且由 Δ 的構造知 H_2', H_3' 分別爲 $\overline{L_3L}, \overline{LL_2}$ 的中點 (因爲是對

徑點的西姆松線)。由

$$\measuredangle LH_2'O_4 = \measuredangle(\ell_2, \perp O_3O_1) = \measuredangle(\ell_3, \perp O_1O_2) = \measuredangle LH_3'O_4,$$

知 $O_4 \in \odot(LH_2'H_3') = \odot(LO')$，其中 O', H' 分別爲 $\triangle LL_2L_3$ 的外心及垂心。故 $\triangle LH'H_4 \overset{+}{\sim} \triangle LO'O_4$ 且 $\measuredangle LH_4H' = \measuredangle LO_4O'$，由 (4.3.5) 知 $\overline{O'H'}$ 中點 $\ominus$ 位於 $\overline{O_4H_4}$ 的中垂線上。 ■

Proposition 4.3.7 (QL-P2, 莫利點). 令 M' 爲 $\ominus$ 關於垂心線 $\mathcal{S}$ 的垂足，$\mathcal{Q}$ 中四個三角形的九點圓圓心分別爲 N_1, N_2, N_3, N_4，則過 N_i 且垂直 ℓ_i 的直線經過 M'。

Proof. 延續上個性質證明用的標號，注意到 $\ominus N_4 \perp O_4H_4$，所以有 $\ominus, H_4, N_4, M'$ 共圓，由 (4.3.5) 知 L 關於 $O'H'$ 的垂足 H_L 位於 $\odot(\ominus O_4H_4)$ 及 $\odot(AO')$ 上，所以

$$\begin{aligned}\measuredangle N_4M'\ominus = \measuredangle N_4H_4\ominus = \measuredangle O_4H_L\ominus = \measuredangle O_4LO' = \measuredangle(\ell, \ell_1)\\ = \measuredangle(O_2O_3, \ell_1) = \measuredangle(\perp M(\ell_1 \cap \ell_4), \ell_1) = \measuredangle(\perp \ell_4, \tau)\end{aligned}$$

其中 $\tau = \tau(\mathcal{Q})$ 爲 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線，所以 $N_4M' \perp \ell_4$。 ■

當然這些東西還是可以避開三尖瓣線來證明。

習題

Problem 1. 證明 (4.3.5)。

Problem 2 (QL-L4, 莫利線). 令 O_M 爲完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的密克圓的圓心 (QL-P4)，證明：O_M 位於 $\mathcal{Q}$ 的莫利點與 Kantor-Hervey 點的連線上。

Problem 3. 令 ℓ 爲一個完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線關於其密克點的對稱線。證明：ℓ 與 $\mathcal{Q}$ 的 Kantor-Hervey 三尖瓣線相切。

4.4 莫利與他的心臟線

是說講了這麼久的三尖瓣了，大家總該對心臟有點興趣了吧。

Definition 4.4.1. 一顆心臟線 (**Cardoid**) $\mathbb{K}$ 是一個圓 Γ' 沿著另一個半徑相同的圓 Γ 純滾動時，圓上一點產生的軌跡。我們稱 Γ 的圓心爲它的中心，$\mathbb{K}$ 唯一的尖點爲 $\mathbb{K}$ 的尖點。

看著這個定義應該是不能做一些太有用的事，所以可能要先用這個性質轉掉命題

Proposition 4.4.2. 一顆心臟線關於其尖點反演下的像爲一個拋物線，並且尖點是它的焦點。

Proof. 設 $\mathbb{K}$ 爲一圓 Γ' 繞著 Γ 純滾動時，圓上一點產生的軌跡，若 Y 爲其尖點，則不難發現 $\mathbb{K}$ 上的每個點與 Y 的中垂線爲 Γ 的切線，反之 Y 關於 Γ 的一條切線的對稱點位於 $\mathbb{K}$ 上，將這個性質關於 O 反演後可得 $\mathbb{K}^*$ 上每個點是過 Y 與一直線 Γ^* 相切的某個圓的圓心，因此 $\mathbb{K}^*$ 爲以 Y 爲焦點，L 爲準線的拋物線。 ■

Proposition 4.4.3. 若以 Y 爲尖點的心臟線 $\mathbb{K}$ 爲一圓 Γ' 繞著 Γ 純滾動時，圓上一點產生的軌跡，設 $P \in \mathbb{K}$ 且 $\overline{YP}$ 的中垂線與 Γ 切於 T，則 P 關於 $\mathbb{K}$ 的切線爲過 P 並垂直於 PT 的直線。

來看一個大家熟悉的莫利角三分線定理：

Theorem 4.4.4 (Morley's). 對於任意 $\triangle ABC$(以逆時針旋轉標號)，過 A 作角三分線 $\ell_A^{Bi},\ i = -1, 0, 1$，滿足 ℓ_A^{B0} 位於 $\angle BAC$ 內且

$$\measuredangle(\ell_A^{Bi}, CA) = 2\measuredangle(AB, \ell_A^{Bi}),\ \measuredangle(\ell_A^{Bi}, \ell_A^{Bj}) = (j - i) \cdot 60^\circ$$

ℓ_A^{Ci} 定爲 ℓ_A^{Bi} 關於 $\angle BAC$ 的等角線，類似定義 $\ell_B^{Ci}, \ell_B^{Ai}, \ell_C^{Ai}, \ell_C^{Bi}$，定義 $a_{ij} = \ell_B^{Ci} \cap \ell_C^{Bj}$，類似定義 b_{ij}, c_{ij}。那麼對於所有 $(i, j, k) \in \{-1, 0, 1\}^3$ 滿足 $3 \nmid 1 + i + j + k$，$\triangle a_{jk} b_{ki} c_{ij}$ 是一個正三角形，且

$$\measuredangle\left(b_{ki} c_{ij}, BC\right) = \measuredangle a_{jk} BC + \measuredangle a_{jk} CB$$

剩下的則輪換。 ■

回憶一下之前的施坦納三尖瓣線，直接算角度會有 $\triangle a_{jk} b_{ki} c_{ij}$ 與施坦納三尖瓣線的頂點位似，另一個很簡單的觀察如下：

Proposition 4.4.5. 同 (4.4.4) 的標號，對於所有 $(i,j)\in\{-1,0,1\}^2$，

$$\triangle a_{ij}a_{(i+1)(j-1)}a_{(i-1)(j+1)}$$

爲正三角形且 $B,C\in\odot(a_{ij}a_{(i+1)(j-1)}a_{(i-1)(j+1)})$。 ■

我們把 (4.4.4) 中的 18 個正三角形與上述性質的 9 個三角形稱作 $\triangle ABC$ 的莫利三角形 (**Morley Triangle**)，那事實上我們只要找其中三個就好了，因爲

Proposition 4.4.6. 同 (4.4.4) 的標號，我們有對於所有滿足

$$3\mid 1+i+j+k$$

的點對 $(i,j,k)\in\{-1,0,1\}^3$，六點

$$a_{(j+1)(k-1)},\ a_{(j-1)(k+1)},\ b_{(k+1)(i-1)},\ b_{(k-1)(i+1)},\ c_{(i+1)(j-1)},\ c_{(i-1)(j+1)}$$

共線。 ■

所以說這些正三角形的邊其實都是由 $\triangle_i:=\triangle a_{ii}b_{ii}c_{ii}$ 們的邊所構成，我們定義

$$\Lambda^{\triangle ABC}=\bigcup(b_{ii}c_{ii}\cup c_{ii}a_{ii}\cup a_{ii}b_{ii})$$

爲所有邊的聯集，而

$$\lambda_A^{\triangle ABC}=\left\{a_{ij}\mid (i,j)\in\{-1,0,1\}^2\right\}$$

則爲頂點們，類似定義 $\lambda_B^{\triangle ABC},\lambda_C^{\triangle ABC}$，$\lambda:=\bigcup\lambda_A$ 爲所有頂點。

Theorem 4.4.7. 給定完全四線形 $\mathcal{Q}=(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$，$\mathcal{Q}$ 中的四個三角形爲 $\triangle_1,\triangle_2,\triangle_3,\triangle_4$，設 $\Lambda_i=\Lambda^{\triangle_i}$，$A_{ij}=\ell_i\cap\ell_j$，若 $L_i\subset\Lambda_i,L_j\subset\Lambda_j$ 爲兩條直線滿足 $L_i\cap\lambda_{A_{jk}}^{\triangle_i}=\{P_i,Q_i\}$ 與 $L_j\cap\lambda_{A_{ki}}^{\triangle_j}=\{P_j,Q_j\}$ 關於 A_{kl} 透視，則

$$L_i\cap L_j\in(A_{jl}P_i\cap A_{il}P_j)(A_{jl}Q_i\cap A_{il}Q_j)\cap(A_{jk}P_i\cap A_{ik}P_j)(A_{jk}Q_i\cap A_{ik}Q_j)$$

，其中 i,j,k,l 兩兩相異。特別地，$L_i\cap L_j\in\bigcap\Lambda_m$。

Proof. 我們有

$$(A_{jl}P_i\cap A_{il}P_j)(A_{jl}Q_i\cap A_{il}Q_j)\subset\Lambda_k,$$

因爲三角形們 $\triangle A_{jl}P_iQ_i$ 與 $\triangle A_{il}P_jQ_j$ 關於 A_{kl} 透視，由迪沙格定理，

$$L_i \cap L_j \in (A_{jl}P_i \cap A_{il}P_j)(A_{jl}Q_i \cap A_{il}Q_j) \subset \Lambda_k,$$

同理有

$$L_i \cap L_j \in (A_{jk}P_i \cap A_{ik}P_j)(A_{jk}Q_i \cap A_{ik}Q_j) \subset \Lambda_l,$$

所以 $L_i \cap L_j \in \bigcap \Lambda_m$。 ■

Corollary 4.4.8. 延續 (4.4.7) 的標號，$\left|\bigcap \Lambda_i\right| \geq 27$(重根重複計算)。

Proof. 我們知道滿足 $\{P_i, Q_i\}$ 與 $\{P_j, Q_j\}$ 關於 A_{kl} 透視的 (L_i, L_j) 的組合共有 27 種 (在給定 i, j, k, l 的情況下)，所以 $\left|\bigcap \Lambda_i\right| \geq 27$。 ■

介紹完這兩個看似沒關聯的東西之後就是要把他們合在一起 (?

Proposition 4.4.9. 若 $\triangle ABC$ 的三邊與一顆心臟線 $\mathbb{K}$ 相切，且 $\mathbb{K}$ 與 BC 切於兩點，則 $\mathbb{K}$ 的中心 $P \in \lambda_A$。反之，若 $P \in \lambda_A$，則存在唯一一顆以 P 爲中心的心臟線 $\mathbb{K}$ 與 $\triangle ABC$ 的三邊相切，且 $\mathbb{K}$ 與 BC 切於兩點。

Proof. 設 $\mathbb{K}$ 與 BC 切於 T_1, T_2 兩點，與 AB 切於 T，則存在一點 S 位於以 P 爲圓心並經過 $\mathbb{K}$ 的尖點 Y 的圓 Γ 上，且 $\triangle PT_1T_2$ 是以 Y 爲中心正三角形，作 P 關於 S 位似 -2 倍的點 P'，則 $P'T = AB$，令 $\overline{PP'}$ 的中垂線交 $P'T$ 於 B'，若 M, M', N 分別爲 $\overline{T_1T_2}, \overline{PP'}, \overline{SP'}$ 的中點，注意到

$$\measuredangle MPB' = \measuredangle YPS + \measuredangle P'PB' = \measuredangle SNT + \measuredangle TP'S = \measuredangle B'PP'$$

所以 $\triangle B'PM \overset{-}{\sim} \triangle B'PM'$，故 $\measuredangle B'MP = 90^\circ$，因此 $B' = B$ 且

$$3 \cdot \measuredangle CBP = \measuredangle CBP + \measuredangle PBM' + \measuredangle M'BP' = \measuredangle CBA$$

同理有 $3 \cdot \measuredangle PCB = \measuredangle ACB$，所以 $P \in \lambda_A$。
若 $P \in \lambda_A$，取 BC 上兩點 T_1, T_2 使得 $\triangle PT_1T_2$ 是正三角形，再把上面著證明反過來寫就可以了，唯一性則是因爲 P 與尖點 Y 是唯一的。 ■

接下來的這個定理我目前沒有找到什麼很簡短的證明，希望大家能夠找到一個更短的給我 (?)，雖然證明看起來很長，但事實上想法並不難。

Theorem 4.4.10. 若 $\triangle ABC$ 與一顆心臟線 $\mathbb{K}$ 相切，則 $\mathbb{K}$ 的中心位於 $\Lambda^{\triangle ABC}$ 上。反之，若 P 位於 $\Lambda^{\triangle ABC}$ 上，則存在唯一一顆以 P 爲中心的心臟線與 $\triangle ABC$ 的三邊相切。

Proof. 令 L 爲 $\mathbb{K}$ 的切線並且切 $\mathbb{K}$ 於兩點，D, E, F 分別爲 L 與 BC, CA, AB 的交點，則由 (4.4.9) 知 $P \in \lambda_A^{\triangle AEF} \cap \lambda_B^{\triangle BFD} \cap \lambda_C^{\triangle CDE}$，分別在兩圓 $\odot(PFD), \odot(PDE)$ 上取點 U, V 使得 $\measuredangle UDP = \measuredangle VDP = 60^\circ$，那麼 $PU \subset \Lambda^{\triangle BFD}, PV \subset \Lambda^{\triangle CDE}$ 且 D, U, V 共線，所以由 (4.4.7) 知 $P \in \Lambda^{\triangle ABC}$。
相反地，若 $P \in \Lambda^{\triangle ABC}$，假設 $P \in \ell \subset \Lambda^{\triangle ABC}$，令

$$\{U_1, U_2\} = \ell \cap \lambda_B^{\triangle ABC},\ \{V_1, V_2\} = \ell \cap \lambda_C^{\triangle ABC},$$

使得 (AU_i, AV_i) 爲關於 $\angle BAC$ 的角三分線。分別在 AU_1, AV_1 上取兩點 S_1, T_1 使得 $\triangle PS_1T_1$ 爲正三角形且 $\measuredangle PS_1T_1 = \measuredangle U_1AU_2$，令

$$S_2 = PT_1 \cap AU_2,\ T_2 = PS_1 \cap AV_2,$$

那麼顯然有 $S_2, T_2 \in \odot(AS_1T_1)$，故 $\triangle PS_2T_2$ 也爲正三角形。令

$$E = CA \cap S_1S_2,\ F = AB \cap T_1T_2,$$

易知 $\odot(AS_1T_1)$ 分別與 CA, AB 的另一個交點 G, H 分別是 P 關於 S_1S_2, T_1T_2 的對稱點，因此 ES_1, FT_1 分別爲 $\angle AEP, \angle PFA$ 的角平分線，所以 $\triangle PS_1T_1$ 是 $\triangle AEF$ 的莫利三角形，同理，$\triangle PS_2T_2$ 也是 $\triangle AEF$ 的莫利三角形。設 D 爲 EF 與 BC 的交點，$W = PS_1 \cap AS_2, X = PT_1 \cap AT_2$，注意到 $P \in \Lambda^{\triangle ABC} \cap \Lambda^{\triangle AEF}$ 且

$$P = U_1U_2 \cap S_1W = V_1V_2 \cap T_1X, A = U_1S_1 \cap U_2W = V_1T_1 \cap V_2X$$

由 (4.4.7) 知 $P \in \lambda_B^{\triangle BFD} \cap \lambda_C^{\triangle CDE}$，再由 (4.4.9) 知存在以 P 爲中心的心臟線們 $\mathbb{K}_A, \mathbb{K}_B, \mathbb{K}_C$ 使得 $\mathbb{K}_A$ 與 $\triangle AEF$ 三邊相切並且與 EF 切於兩點，$\mathbb{K}_B, \mathbb{K}_C$ 則輪換，由於 D, E, F 共線，所以 $\mathbb{K}_A = \mathbb{K}_B = \mathbb{K}_C$，並且其與 $\triangle ABC$ 三邊相切。
最後，若存在兩個以 P 爲中心並且與 $\triangle ABC$ 的三邊相切的心臟線 $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$，令 L_i 爲 $\mathbb{K}_i$ 的切線並且切 $\mathbb{K}_i$ 於兩點，E_i, F_i 分別爲 L_i 與 CA, AB 的交點，那麼

$$P \in \lambda_A^{\triangle AE_1F_1} \cap \lambda_A^{\triangle AE_2F_2}.$$

分別在 AU_1, AV_1 取 Y_i, Z_i 使得 $\triangle AY_iZ_i$ 是 $\triangle AE_iF_i$ 的莫利三角形，注意到

$$\triangle PY_1Z_1 \overset{+}{\sim} \triangle PY_2Z_2,$$

所以 $\triangle PY_1Z_1 = \triangle PY_2Z_2$，故 $E_1 = E_2, F_1 = F_2$。因此 $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_2$，這證明了唯一性。 ■

所以說我們有與三邊相切的心臟線跟 Λ 的一一對應。

Proposition 4.4.11 (QL-27Qu1, 莫利多重心臟線)**.** 存在 (至少) 27 個心臟線與 $\mathcal{Q}$ 中四線相切 (重根重複計算)。

Proof. 由 (4.4.8) 知 $\left|\bigcap \Lambda_i\right| \geq 27$(重根重複計算)，令 $P \in \bigcap \Lambda_i$，則由 (4.4.10) 可得存在以 P 爲中心的心臟線 $\mathbb{K}_i$ 與 $\triangle_i$ 相切。對於任意相異 i, j，由 (4.4.10) 證明的最後一部份可以得到 $\mathbb{K}_i = \mathbb{K}_j$，所以存在唯一一個以 P 爲中心的心臟線 $\mathbb{K}$ 與 $\mathcal{Q}$ 中四線相切。 ■

習題

Problem 1. 令 $\mathbb{K}$ 爲一個心臟線並且有尖點 Y，設 L 爲一過 Y 的動線並交 $\mathbb{K}$ 於 A, B。證明：$\overline{AB}$ 中點的軌跡是一個圓。

Problem 2. 同 (4.4.4) 的標號，證明：對於所有 $(i, j, k) \in \{-1, 0, 1\}^3$ 滿足 $3 \nmid 1 + i + j + k$，

(i) $\triangle a_{jk}b_{ki}c_{ij}$ 與 $\triangle a_{(j-1)(k-1)}b_{(k-1)(i-1)}c_{(i-1)(j-1)}$ 透視於一點 P_{ijk}(注意到不是所有的正三角形都是正向相似)

(ii) P_{ijk} 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點爲 $\triangle a_{jk}b_{ki}c_{ij}$ 與 $\triangle ABC$ 的透視中心。

Problem 3 (Bobson(?))**.** 同 (4.4.4) 的標號，證明：

(i) 對於所有 $i \in \{-1, 0, 1\}$, $A \in \odot(a_{ii}a_{(i+1)(i+2)}a_{(i+2)(i+1)})$，

(ii) $\odot(a_{11}a_{23}a_{32}), \odot(a_{22}a_{31}a_{13}), \odot(a_{33}a_{12}a_{21})$ 共軸。

Problem 4 (QL-Qu1, 莫利單心臟線)**.** 令完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的密克點爲 M，密克圓爲 $\mathbb{M}$。考慮所有經過 M 且圓心位於 $\mathbb{M}$ 上的圓，證明：這些圓的包絡線爲一顆心臟線 $\mathbb{K}$。

Problem 5 (QL-Cu2)**.** 令完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的四個三角形爲 $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \triangle_4$，證明：由 (4.4.7) 所定義出來的 Λ_i 的 27 個共同交點位於同一個三次曲線上。

Problem 6. 證明 $\triangle ABC$ 的莫利三角形與其施坦納三尖瓣線的頂點位似。

Chapter 5

基礎三次曲線與梁-澤利克定理

在講這章之前先定義一下三次曲線：

Definition 5.0.1. 在平面上 ($\mathbb{P}^2\mathbb{R}$) 一個齊次三次方程 $F(x, y, z)$ 的根 $[x : y : z]$ 所定義出來的曲線 $\mathcal{K}$ 被稱爲是一個三次曲線，$\mathcal{K}$ 是非退化的若 $F(x, y, z)$ 是不可約的 (也就是說，$\mathcal{K}$ 不是三條直線或一條直線與一條圓錐曲線的聯集)。

那因爲是三次曲線嘛，所以內容有一部分是靠解析的，在這邊就省略證明了。

5.1 非奇異三次曲線的群運算

爲了講群運算，必須用個講到三次曲線就不可不提的定理：

Theorem 5.1.1 (Cayley -Bacharach)**.** 若兩個三次曲線 $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$(含退化) 交於 $P_1, \ldots, P_9$，那麼對於所有經過 $P_1, \ldots, P_8$ 的三次曲線 $\mathcal{K}_3$(含退化)，$P_9 \in \mathcal{K}_3$。

那他有個推廣：

Theorem 5.1.2. 若 m 次曲線 X_1 與 n 次曲線 X_2 交於 $P_1, \ldots, P_{mn}$，那麼對於所有經過 $P_1, \ldots, P_{mn-1}$ 的 $m + n - 3$ 次曲線 X_3，$P_{mn} \in X_3$。

所以可以由一條三次曲線上已知的點構造出其他點，經常使用到的一件事是三條直線是三次曲線。這還有以下推論：

Theorem 5.1.3 (三圓錐曲線定理/Three Conics Theorem)**.** 設三個非退化的圓錐曲線 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ 交於兩點 P, Q，若 $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j$ 交於另外兩點 A_{ij}, B_{ij}，那麼 $A_{23}B_{23}, A_{31}B_{31}, A_{12}B_{12}$ 共點。

Proof. 設 $R = A_{31}B_{31} \cap A_{12}B_{12}$，則注意到 $\mathcal{C}_2 \cup A_{31}B_{31}$ 與 $\mathcal{C}_3 \cup A_{12}B_{12}$ 都經過 $A_{23}, A_{31}, A_{12}, B_{23}, B_{31}, B_{12}, P, Q, R$ 九點，而 $\mathcal{C}_1 \cup A_{23}B_{23}$ 經過那九個點中扣掉 R 的八個點，所以 $R \in \mathcal{C}_1 \cup A_{23}B_{23}$。若 $R \in \mathcal{C}_1$，那麼 $R \in \{A_{31}, B_{31}\} \cap \{A_{12}, B_{12}\}$，無論如何都有 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ 交於除了 P, Q 以外的另一點 R，所以 $R \in A_{23}B_{23}$。 ■

當然這個命題可以單純用交比證明。我們回到群運算。

Definition 5.1.4. 給定一個非奇異三次曲線 $\mathcal{K}$ 與其上一點 $\mathcal{O}$，我們定義 $\mathcal{K}$ 上的點的加法如下：對於任兩點 $P, Q \in \mathcal{K}$，令 X 爲 PQ 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點，我們將 $P + Q$ 定爲 $\mathcal{O}X$ 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點 (這之中若有重合則直線改爲切線，且交點數爲重根數)。

這個加法的單位元是 $\mathcal{O}$ 並且顯然有交換律。令 T 爲 $\mathcal{O}$ 關於 $\mathcal{K}$ 的切線與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點 (注意到因爲是切線，所以 $\mathcal{O}$ 要算兩次)，那麼一點 $P \in \mathcal{K}$ 的加法反元素就是 PT 與 $\mathcal{K}$ 異於 P, T 的交點。

我們現在來證明結合律：令 $P, Q, R \in \mathcal{K}$，X, Y, Z 分別爲 $PQ, QR, (P{+}Q)R$ 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點，那麼 $\mathcal{O}, X, P + Q$、$\mathcal{O}, Y, Q + R$ 及 $\mathcal{O}, Z, (P + Q) + R$ 分別共線。考慮 $PQ \cup \mathcal{O}Y \cup (P + Q)R$ 與 $\mathcal{K}$ 的九個交點，分別爲

$$P,\ Q,\ X,\ \mathcal{O},\ Y,\ Q + R,\ (P + Q),\ R,\ Z,$$

注意到 $QR \cup \mathcal{O}X \cup (Q + R)P$ 經過了除了 Z 以外的八個點，所以由 Cayley -Bacharach 定理，它也經過了第九個。換句話說，Z 是 $(Q + R)P$ 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點，故 $P + (Q + R)$ 是 $\mathcal{O}Z$ 與 $\mathcal{K}$ 的第三個交點，即 $(P + Q) + R$。

另外，這邊需要假設 $\mathcal{K}$ 是非奇異的，這樣才能保證切線的存在性與唯一性。

習題

Problem 1. 試用 Cayley-Bacharach 定理證明帕斯卡定理。

Problem 2 (Four Conics Theorem). 設 $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3$ 爲三個圓錐曲線，令 A_{ij}, B_{ij}, P_{ij}, Q_{ij} 爲 $\mathcal{C}_i,\mathcal{C}_j$ 的交點，若 P_{23}, P_{31}, P_{12}, Q_{23}, Q_{31}, Q_{12} 共圓錐曲線，證明：$A_{23}A_{23}$, $A_{31}A_{31}$, $A_{12}A_{12}$ 共點。

Problem 3. 令 $\mathcal{K}$ 爲一個三次曲線，$A\in\mathcal{K}$ 對 $\mathcal{K}$ 做兩條切線分別切 $\mathcal{K}$ 於 B, C，S 爲 BC 與 $\mathcal{K}$ 的另一個交點。證明：A, S 分別關於 $\mathcal{K}$ 的切線交於 $\mathcal{K}$ 上。

5.2 配極之路

還記得我們在圓錐曲線上是怎麼配極的嗎？在這邊想要把那個定義從二次曲線推廣至三次曲線，那之前是調和嘛，所以滿足

$$\frac{2}{PQ}=\frac{1}{PM_1}+\frac{1}{PM_2}\iff\frac{2}{PQ}=\frac{1}{M_1Q}+\frac{1}{M_2Q}.$$

如果想推廣到三次會遇到一個困難，就是

$$\frac{3}{PQ}=\frac{1}{PM_1}+\frac{1}{PM_2}+\frac{1}{PM_3}\;\not\Longleftrightarrow\;\frac{3}{PQ}=\frac{1}{M_1Q}+\frac{1}{M_2Q}+\frac{1}{M_3Q},$$

所以就沒有極線互反了 (甚至我們還不知道是不是直線)。爲了解決這個問題，我們就乾脆定義兩種配極，那兩個就會直接互反。

Definition 5.2.1. 給定一個三次曲線 $\mathcal{K}$，P 爲任意一點，過 P 作一動線交 $\mathcal{K}$ 於 M_1, M_2, M_3，取 Q, R_1, R_2 使得

$$\frac{3}{PQ}=\frac{1}{PM_1}+\frac{1}{PM_2}+\frac{1}{PM_3},\quad\frac{3}{PR_i}=\frac{1}{M_1R_i}+\frac{1}{M_2R_i}+\frac{1}{M_3R_i},$$

那麼 Q 的軌跡是一條直線 (或線段)，R_1, R_2 的軌跡聯集是一條圓錐曲線 (或其片段)，我們稱 Q 的軌跡或其延長爲 P 關於 $\mathcal{K}$ 的極線，記爲 $\mathfrak{p}^1_{\mathcal{K}}(P)$，$R_1, R_2$ 的軌跡聯集或其延長爲 P 關於 $\mathcal{K}$ 的極圓錐曲線 (**Polar Conic**)，記爲 $\mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}}(P)$。

至於爲什麼是直線跟圓錐曲線呢，解析仔可以告訴你。之前證明老封軸也是透過觀察極圓錐曲線，所以其實滿有用的 (?)。注意到

$$\frac{3}{PQ}=\frac{1}{PM_1}+\frac{1}{PM_2}+\frac{1}{PM_3}\iff(P,Q;M_1,M_2)+(P,Q;M_1,M_3)=-1,$$
$$\frac{3}{PR_i}=\frac{1}{M_1R_i}+\frac{1}{M_2R_i}+\frac{1}{M_3R_i}\iff(R_i,P;M_1,M_2)+(R_i,P;M_1,M_3)=-1,$$

所以我們知道：

Proposition 5.2.2. 給定一個三次曲線 $\mathcal{K}$ 及一個射影變換 φ，我們有 $\varphi(\mathcal{K})$ 也是三次曲線，且對於任意一點 P，

$$\varphi(\mathfrak{p}^1_{\mathcal{K}}(P)) = \mathfrak{p}^1_{\varphi(\mathcal{K})}(\varphi(P)),\ \varphi(\mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}}(P)) = \mathfrak{p}^2_{\varphi(\mathcal{K})}(\varphi(P))$$

或者說 $\varphi \circ \mathfrak{p}^1_{\mathcal{K}} = \mathfrak{p}^1_{\varphi(\mathcal{K})} \circ \varphi,\ \varphi \circ \mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}} = \mathfrak{p}^2_{\varphi(\mathcal{K})} \circ \varphi$。

Proof. 我們可以把 φ 寫成一個可逆矩陣，所以 $\varphi(\mathcal{K})$ 也是三次曲線，後面的部分則由上面兩條式子即可得證。 ■

那由定義，我們一樣會有互反定理：

Theorem 5.2.3. 給定一個三次曲線 $\mathcal{K}$，P, Q 爲任意兩點，則

$$P \in \mathfrak{p}^1_{\mathcal{K}}(Q) \iff Q \in \mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}}(P)$$ ■

除了這個以外，因爲有圓錐曲線的關係，所以我們甚至有：

Proposition 5.2.4. 給定一個三次曲線 $\mathcal{K}$，則對於任意一點 P，

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}}(P)}(P) = \mathfrak{p}^1_{\mathcal{K}}(P)$$

Proof. 過 P 作一直線 ℓ 交 $\mathcal{K}$ 於 M_1, M_2, M_3 三點，令 $Q = \mathfrak{p}^1_{\mathcal{K}}(P) \cap \ell$，$\{R_1, R_2\} = \mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}}(P) \cap \ell$，那麼由定義，

$$\frac{3}{PQ} = \frac{1}{PM_1} + \frac{1}{PM_2} + \frac{1}{PM_3},\ \frac{3}{PR_i} = \frac{1}{M_1R_i} + \frac{1}{M_2R_i} + \frac{1}{M_3R_i}$$

所以由韋達定理，

$$\frac{1}{PR_1} + \frac{1}{PR_2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{PM_1} + \frac{1}{PM_2} + \frac{1}{PM_3}\right) = \frac{2}{PQ}$$

因此 $Q \in \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}}(P)}(P)$，所以動 ℓ 就有 $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}}(P)}(P) = \mathfrak{p}^1_{\mathcal{K}}(P)$。 ■

跟圓錐曲線的情況一樣，我們現在會想要定義類似極點的東西，於是：

Definition 5.2.5. 給定一個三次曲線 $\mathcal{K}$，K 爲任意一線，在 ℓ 上取動點 Q，則 $\mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}}(Q)$ 過四個定點 P_1, P_2, P_3, P_4(可能是複數)，記爲 $\mathfrak{p}^0_{\mathcal{K}}(K)$，稱爲 K 關於 $\mathcal{K}$ 的極點。

那麼顯然有：

Proposition 5.2.6. 給定一個三次曲線 $\mathcal{K}$，那麼對於任意一線 K 及一點 P，

$$P \in \mathfrak{p}^0_{\mathcal{K}}(K) \iff K = \mathfrak{p}^1_{\mathcal{K}}(P)$$

Definition 5.2.7. 給定一個三次曲線 $\mathcal{K}$，K 爲任意一線，在 K 上取動點 Q，則 $\mathfrak{p}^1_{\mathcal{K}}(Q)$ 的包絡線是一個圓錐曲線，記爲 $\mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}}(K)$，稱爲 K 關於 $\mathcal{K}$ 的極圓錐曲線 (**Poloconic**)。

記得這邊是線的極圓錐曲線，不要跟點的搞混。

Proposition 5.2.8. 給定一個三次曲線 $\mathcal{K}$，K 爲任意一線，那麼存在 $\triangle ABC$ 及其上的某個等共軛變換 φ 使得 $\{\mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}}(P) \mid P \in K\}$ 爲 φ 的對角圓錐曲線族，且 $\mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}}(K) = \varphi(K)$。

Proposition 5.2.9. 給定一個三次曲線 $\mathcal{K}$，K 爲任意一線，那麼 $\mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}}(K)$ 爲 K 關於 $\mathfrak{p}^0_{\mathcal{K}}(K)$ 的九點圓錐曲線。

習題

Problem 1. 令 τ 爲完全四線形 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線，證明：$\mathfrak{p}^2_{\mathcal{K}(\mathcal{Q})}(\infty_\tau)$ 是一個等軸雙曲線。

5.3 等三次曲線

我們曾經在完美六邊形中看過一個完全四線形的等角共軛軌跡 (巨龍)，它是個三次曲線。在三角形中，當然也有一些很重要的三次曲線，我們這邊來定義幾個：

Definition 5.3.1. 給定一個等共軛變換 φ，我們稱一個三次曲線 $\mathcal{K}$ 是一個 φ 不變的等三次曲線 (**Isocubic**) 若 $\varphi(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$。

所以這個時候我們可能會想知道他的解析式長怎樣，假設

$$\varphi[x:y:z]=\left[\frac{p}{x}:\frac{q}{y}:\frac{r}{z}\right],$$

大家可以驗證 $\mathcal{K}$ 有下列兩種形式：

$$ux(ry^2-qz^2)+vy(pz^2-rx^2)+wz(qx^2-py^2)=0 \qquad (p\mathcal{K}),$$

$$ux(ry^2+qz^2)+vy(pz^2+rx^2)+wz(qx^2+py^2)+kxyz=0 \qquad (n\mathcal{K}).$$

其中 k 是一個常數。我們先來定義第一種 $(p\mathcal{K})$：

Definition 5.3.2. 給定 $\triangle ABC$ 與一個等共軛變換 φ，那麼對於任一點 P，那麼我們定義以 P 爲中心 (**Pivot**) 的等三次曲線 $\mathcal{K}^p_\varphi(P)=\{Q\mid P,Q,\varphi(Q)\text{共線}\}$，這時 $\mathcal{K}^p_\varphi(P)$ 被稱爲可中心化的 (**Pivotal**)。

這個時候 $P=[u:v:w]$。顯然地，我們有：

Proposition 5.3.3. 對於任意一點 P，A, B, C, P, $\varphi(P)$, $F_x\in\mathcal{K}^p_\varphi(P)$，其中 F, F_a, F_b, F_c 爲 φ 的不動點 (如果有的話)。 ■

Definition 5.3.4. 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 的等角共軛變換，$\mathcal{E}$ 爲 $\triangle ABC$ 的歐拉線，G, O, N, $L\in\mathcal{E}$ 分別爲 $\triangle ABC$ 的重心、外心、九點圓圓心及 de Longchamps 點。我們定義

$$\mathcal{K}^p_\varphi(\infty_\mathcal{E}),\ \mathcal{K}^p_\varphi(G),\ \mathcal{K}^p_\varphi(O),\ \mathcal{K}^p_\varphi(N),\ \mathcal{K}^p_\varphi(L)$$

分別爲 $\triangle ABC$ 的 Neuberg, Thomson, McCay, Napolean-Feurerbach, Darboux 三次曲線。

所以我們之前在封騰三號的那個等價其實就是 McCay 三次曲線。我們來看第二種 $(n\mathcal{K})$，注意到我們可以把解析式寫成

$$\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{z}{w}\right)\left(\frac{p}{ux}+\frac{q}{vy}+\frac{r}{wz}\right)=\frac{p}{u^2}+\frac{q}{v^2}+\frac{r}{w^2}-\frac{k}{uvw},$$

並且 $x/u+y/v+z/w=0$ 是 $P=[u:v:w]$ 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線，所以我們有：

Proposition 5.3.5. 令 P 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線分別交 BC, CA, AB 於 D, E, F，那麼 D, E, $F\in n\mathcal{K}$。 ■

我們把這個 P 稱爲這個等三次曲線的根 (儘管 P 有極高機率不在上面)。

Theorem 5.3.6. 給定 $\triangle ABC$ 與一個等共軛變換 φ，那麼對於任意 $n\mathcal{K}$，存在一個圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 使得 $P \in n\mathcal{K}$ 若且唯若滿足 $P, \varphi(P)$ 關於 $\mathcal{C}$ 共軛。 ■

那可以發現這個 $\mathcal{C}$ 不是唯一的，甚至我們可以直接取 $\mathcal{C}$ 是一個圓 Γ(有可能是廣義圓或虛圓)，或者等價於所有 $\odot\left(\overline{Q\varphi(Q)}\right)$ 共根心於 Γ 的中心，這時我們把 $n\mathcal{K}$ 記爲 $\mathcal{K}_\varphi^n(\Gamma)$。不過 Γ 也不一定是唯一的，比方說 $\odot\left(\overline{Q\varphi(Q)}\right)$ 們根本共軸。那事實上，

Proposition 5.3.7. 延續上述標號，$\mathfrak{p}_\mathcal{C}(A)$, $\mathfrak{p}_\mathcal{C}(B)$, $\mathfrak{p}_\mathcal{C}(C)$ 分別與 BC, CA, AB 交於 D, E, F。 ■

那這當然是因爲 $A, B, C \in n\mathcal{K}$。注意到 $n\mathcal{K}$ 的解析式中有個常數 k，可以想像 k 在動的時候會產出一整坨經過 A, B, C, D, E, F 的等三次曲線。

關於 $n\mathcal{K}$ 有個很好想像的例子是 $\mathcal{K}(\triangle ABC \cup \ell)$ (即巨龍)，注意到它沒有中心，可是關於等角共軛變換不變。這時，D, E, F 共線於 ℓ，我們發現對於所有等角共軛點對 (P, Q)，$\odot(\overline{PQ})$ 們的圓心都在牛頓線 τ 上，所以根心就是 $\infty_{\perp\tau}$，而 $\Gamma = \tau$。那跟巨龍一樣，我們有：

Proposition 5.3.8. 給定 $\triangle ABC$、一個等共軛變換 φ 及一圓 Γ，若 P, Q 爲 $\mathcal{K}_\varphi^n(\Gamma)$ 上兩點，則 $R = PQ \cap \varphi(P)\varphi(Q) \in \mathcal{K}_\varphi^n(\Gamma)$。

Proof. 由 (1.4.6) 知 $\varphi(R) = P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q$，因此我們有三圓 $\omega_P := \odot(\overline{P\varphi(P)})$, $\omega_Q := \odot(\overline{Q\varphi(Q)})$, $\omega_R := \odot(\overline{R\varphi(R)})$ 共軸於其垂心線，而 Γ 的中心位於 ω_P, ω_Q 的根軸上，所以也位於 ω_P, ω_R 的根軸上，故 $R \in \mathcal{K}_\varphi^n(\Gamma)$。 ■

當 φ 是等角共軛變換時，事情還會再更美好，我們先來看一個定理：

Theorem 5.3.9. 給定 $\triangle ABC$，$(P, P^*), (Q, Q^*)$ 爲關於 $\triangle ABC$ 的兩對等角共軛點對，令 $\omega_P = \odot(\overline{PP^*}), \omega_Q = \odot(\overline{QQ^*})$，$\Omega_P, \Omega_Q$ 分別是 P, Q 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓。那麼 ω_P, ω_Q 的根軸爲 Ω_P, Ω_Q 的根軸關於 $\triangle ABC$ 的垂心位似 2 倍下的像。

Corollary 5.3.10. 給定 $\triangle ABC$，$(P, P^*), (Q, Q^*)$ 爲關於 $\triangle ABC$ 的兩對等角共

軛點對，令 $R = PQ \cap P^*Q^*$，則 P, Q, R 分別關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓們共軸。 ■

那麼我們可以把 $n\mathcal{K}$ 換成以下定義：

Proposition 5.3.11. 給定 $\triangle ABC$ 與及一圓 $\Gamma \not\supseteq \mathcal{L}_\infty$，令 φ 爲 $\triangle ABC$ 的等角共軛變換，Γ' 爲 Γ 關於 $\triangle ABC$ 的垂心位似 1/2 倍的像，那麼 $P \in \mathcal{K}_\varphi^n(\Gamma)$ 若且唯若 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 Γ' 正交。 ■

那我們之前有算過一個點的佩多圓跟九點圓的夾角嘛，所以我們有

Corollary 5.3.12. 對於任意 $\triangle ABC$，令 φ 爲 $\triangle ABC$ 的等角共軛變換，則對於任意一點 P，下列敘述等價：

(i) $P \in \mathcal{K}_\varphi^n(\odot(ABC))$

(ii) P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓正交

(iii) $\sum \measuredangle(AP, BC) = 0°$ ■

$\mathcal{K}_\varphi^n(\odot(ABC))$ 被稱爲 Kjp 三次曲線。滿足 $\sum \measuredangle(AP, BC) = 90°$ 的軌跡是 McCay 三次曲線，事實上，滿足 $\sum \measuredangle(AP, BC) = \theta$ 的軌跡也是一個三次曲線 $\mathcal{K}_\theta$，並且顯然有 $\varphi(\mathcal{K}_\theta) = \mathcal{K}_{-\theta}$。

習題

Problem 1. 給定 $\triangle ABC$ 及一角 θ。證明：滿足 $\sum \measuredangle BAP = \theta$ 的軌跡是一條三次曲線。

5.4 梁-澤利克定理

所以這個定理眞的有助於理解星際旅行嗎？詳見[1]。另外因爲有證明的關係，所以我也不打算再證一次。那這節最重要的就是 t 值。

Definition 5.4.1. 給定 $\triangle ABC$，O, H 爲 $\triangle ABC$ 的外心、垂心。對於任意一點

P，令 Q 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，我們定義

$$t(P) = t(P, \triangle ABC) = \frac{TO}{TH},$$

其中 $T = PQ \cap OH$。

所以可以看出有些點是不能定義 t 值的，大概就是 A, B, C, I_x, O, H 這些點，其中 I_x 是 $\triangle ABC$ 的內心或旁心。顯然我們直接有：

Proposition 5.4.2. 令 Q 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，那麼 $t(P) = t(Q)$。

若 φ 爲 $\triangle ABC$ 的等角共軛變換，那對於任意一個 $t = t_0$，我們知道滿足 $t(P) = t_0$ 的點的軌跡是 $\mathcal{K}_{\varphi}^{p}(T)$，其中 T 在 $\triangle ABC$ 的歐拉線 OH 上並滿足 $t(T) = t_0$。

Definition 5.4.3 (廣義歐拉線). 給定 $\triangle ABC$、一點 P 及一個常數 x，我們定義 $\triangle ABC$ 的 (x, P)-歐拉線爲 $\triangle ABC$ 的垂心 H 與 $\triangle ABC$ 的外心 O 在關於 P 位似 $1/x$ 倍下的像 O' 的連線 $(O'H)$。

Theorem 5.4.4 (Liang-Zelich). 給定 $\triangle ABC$ 及一常數 $t_0 \neq 0, \infty$，P 爲任意一點，令 P_a, P_b, P_c 分別爲 P 關於 BC, CA, AB 的對稱點，O_a, O_b, O_c 分別爲 $\triangle BPC, \triangle CPA, \triangle APB$ 的外心，那麼下列敘述等價

(i) $t(P) = t_0$。

(ii) $\triangle P_aP_bP_c$ 在關於 P 位似 t_0 倍的像與 $\triangle ABC$ 透視。

(iii) $\triangle O_aO_bO_c$(又稱爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的卡諾三角形 (**Carnot Triangle**)) 在關於 P 位似 $1/t_0$ 倍的像與 $\triangle ABC$ 透視。

(iv) $\triangle ABC, \triangle BPC, \triangle CPA, \triangle APB$ 的 (t_0, P) 歐拉線共點。

當 $t_0 = 0$ 時，(i), (iii), (iv) 等價。當 $t_0 = \infty$ 時，(i), (ii) 等價。

這定理可以推論出以下這些事：

Proposition 5.4.5. 給定 $\triangle ABC$ 與一點 P，那麼對於下列三角形 XYZ，$t(P, \triangle XYZ) = t(P, \triangle ABC)$：

(i) P 關於 $\triangle ABC$ 的卡諾三角形

(ii) P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形

(iii) P 關於 $\triangle ABC$ 的反佩多三角形

(iv) P 關於 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形

Proof. 我們依序證明命題 (i), (ii), (iii), (iv)。

(i) 令 $t_0 = t(P, \triangle ABC)$，$\triangle O_aO_bO_c$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的卡諾三角形。注意到 $\triangle O_aO_bO_c$ 關於 P 位似 $1/t_0$ 倍的像與 $\triangle ABC$ 透視，所以 P 關於 $\triangle O_aO_bO_c$ 三邊對稱所形成的三角形 $\triangle ABC$ 關於 P 位似 t_0 倍的像與 $\triangle O_aO_bO_c$ 透視，故 $t(P, \triangle O_aO_bO_c) = t_0$。

(ii) 令 Q 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，$\triangle O'_aO'_bO'_c$ 爲 Q 關於 $\triangle ABC$ 的卡諾三角形，$\triangle P_aP_bP_c$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形。因爲 $\triangle P_aP_bP_c \cup P \overset{+}{\sim} \triangle O'_aO'_bO'_c \cup O$，其中 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，所以由 (i)，

$$\begin{aligned} t(P, \triangle P_aP_bP_c) &= t(O, \triangle O'_aO'_bO'_c) = t(Q, \triangle O'_aO'_bO'_c) \\ &= t(Q, \triangle ABC) = t(P, \triangle ABC) \end{aligned}$$

(iii) 令 $\triangle P_AP_BP_C$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，那麼由 (ii)，

$$t(P, \triangle P_AP_BP_C) = t(P, \triangle ABC)$$

(iv) 令 $\triangle DEF$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形，$\triangle Q_aQ_bQ_c$ 爲 Q 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，Q^* 爲 Q 關於 $\triangle Q_aQ_bQ_c$ 的等角共軛點，那麼算角度有 $\triangle DEF \cup P \overset{+}{\sim} \triangle Q_aQ_bQ_c \cup Q^*$，所以由 (ii)，

$$\begin{aligned} t(P, \triangle DEF) &= t(Q^*, \triangle Q_aQ_bQ_c) = t(Q, \triangle Q_aQ_bQ_c) \\ &= t(Q, \triangle ABC) = t(P, \triangle ABC) \end{aligned}$$

■

Remark. 一般來說好像會把 (ii) 稱作梁-澤利克定理，不過我這邊把他當推論。此外，取圓西瓦三角形可以視爲反演，也就是說對 P 反演保 t 值。

講完基本定理了，那在證明這個定理的過程中有一些有趣的定理被使用了，我們來看一個比較重要的：

Theorem 5.4.6 (Strong Sondat's Theorem)**.** 給定一線 L，對於任意兩個透視軸不爲 L 的三角形 $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$，滿足 $A_2(L\cap A_1P)$, $B_2(L\cap B_1P)$, $C_2(L\cap C_1P)$ 共點的 P 的軌跡是某個 $\triangle A_1B_1C_1$ 的外接圓錐曲線與 L 的聯集。

Proof. 令 $X_1 = B_1(A_2B_2\cap L)\cap C_1(A_2C_2\cap L)$，類似地定義 Y_1, Z_1。注意到

$$B_1Y_1\cap C_1Z_1,\ C_1X_1\cap A_1Z_1,\ A_Y\cap BX\in L,$$

所以由逆帕斯卡定理 (0.4.1)，我們知道 A_1, B_1, C_1, X_1, Y_1, Z_1 共一個圓錐曲線 $\mathcal{C}_1$。我們類似地定義 $\mathcal{C}_2$, X_2, Y_2, Z_2。

對 $A_1A_1C_1X_1B_1Z_1$ 開帕斯卡定理，我們可以得到如果

$$A_1^*=T_{A_1}\mathcal{C}_1\cap B_1X_1,\ C_1^*=A_1C_1\cap B_1Z_1,$$

則 $\triangle A_1^*B_1C_1^*$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 的透視軸爲 L。我們考慮透視變換 φ 使得

$$A_1^*\mapsto A_2,\ B_1\mapsto B_2,\ C_1^*\mapsto C_2.$$

由 $A_1C_1^*\cap X_2C_2, A_1B_1\cap X_2B_2\in L$，我們知道

$$\varphi(A_1)=X_2,$$

所以

$$\varphi(T_{A_1}\mathcal{C}_1)=\varphi(A_1A_1^*)=A_2X_2$$

取 P 爲 $\mathcal{C}_1$ 上一點，令 $Q_A=A_1P\cap L$，類似地定義 Q_B, Q_C，那麼

$$A_1(P,X_1;Y_1,Z_1)=A_2(Q_A,A_2;B_2,C_2).$$

故

$$A_2(Q_A,A_2;B_2,C_2)=B_2(Q_B,A_2;B_2,C_2)=C_2(Q_C,A_2;B_2,C_2).$$

所以 A_2Q_A, B_2Q_B, C_2Q_C 共點於 $Q\in\mathcal{C}_2$。

我們現在來證明所有滿足條件的 P 一定在 $\mathcal{C}_1\cup L$ 上。考慮一點 $P'\in AP$，類似地定義 Q'_A, Q'_B, Q'_C，那麼 $B_2Q'_B\mapsto C_2Q'_C$ 是一個保交比變換。由於 $\triangle A_1B_1C_1$

與 $\triangle A_2B_2C_2$ 不會透視於 L，$B_2Q'_B \cap C_2Q'_C$ 是一個非退化圓錐曲線並交 $A_2Q'_A = A_2Q_A$ 於兩個點，也就是當 $A_2Q'_A$, $B_2Q'_B$, $C_2Q'_C$ 共點時。當 $P' = Q_A$ 時，顯然 $A_2Q'_A, B_2Q'_B, C_2Q'_C$ 共點於 Q_A。所以當 $P' \neq Q_A$ 時，我們必有 $P' = P$。 ■

一般而言會取 L 是無窮遠線 $\mathcal{L}_\infty$，也就是：

Corollary 5.4.7. 對於任意兩個不位似的三角形 $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$，滿足過 A_2 平行 A_1P 的直線, 過 B_2 平行 B_1P 的直線, 過 C_2 平行 C_1P 的直線共點的 P 的軌跡是某個 $\triangle A_1B_1C_1$ 的外接圓錐曲線與 $\mathcal{L}_\infty$ 的聯集。

那直接推論有：

Corollary 5.4.8 (Sondat's Theorem)**.** 若 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 正交且透視，那麼它們的透視中心位於兩個正交中心的連線上。

Proof. 若 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 位似，則命題顯然，後面假設 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 不位似。令 Q 爲 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 的透視中心，P_i 爲 $\triangle A_iB_iC_i$ 關於 $\triangle A_{3-i}B_{3-i}C_{3-i}$ 的正交中心 ($A_iP_i \perp B_{3-i}C_{3-i}$，及其輪換)。令 $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{L}_\infty$ 爲滿足 $A_{3-i}\infty_{A_iP}, B_{3-i}\infty_{B_iP}, C_{3-i}\infty_{C_iP}$ 共點的 P 的軌跡，那麼 $Q \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$，由強 Sondat 定理的構造證明中可以看到 $D := B_1\infty_{A_2B_2} \cap C_1\infty_{C_2A_2} \in \mathcal{C}_1$，並且 D 爲 $\triangle P_1B_1C_1$ 的垂心。所以由 $A_1D \parallel T_{A_2}\mathcal{C}_2$ 知

$$Q(A_1, B_1; C_1, P_1) = D(A_1, B_1; C_1, P_1) = A_2(A_2, B_2; C_2, P_2) = Q(A_2, B_2; C_2, P_2)$$

因此 $QP_1 = QP_2$，或 $Q \in P_1P_2$。 ■

Corollary 5.4.9. 延續上述推論的標號，若 P_1, P_2 爲兩個透視中心，則 P_1P_2 垂直於 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 的透視軸。

我們回來看看有哪些點落在 $\mathcal{K}_{t_0} := \mathcal{K}_\varphi(T)$ 上。由 (5.3.3) 我們知道 $T, \varphi(T)$、内心及三個旁心在上面。除此之外，由梁-澤利克定理與性質，可以得到：

Proposition 5.4.10. 給定 $\triangle ABC$ 及一常數 t_0，令 $\triangle DEF$ 爲 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，在 AD 上取一點 H_a 使得 $AH_a/DH_a = 2t_0$，類似定義 H_b, H_c，那麼 H_a, H_b, $H_c \in \mathcal{K}_{t_0}$。

Proof. 令 H_a 關於 BC, CA, AB 的對稱點分別爲 H_{aa}, H_{ab}, H_{ac}，那麼我們知道 H_{aa} 關於 H_a 位似 t_0 倍下的像爲 A，所以 $\triangle H_{aa}H_{ab}H_{ac}$ 關於 H_a 位似 t_0 倍下的像與 $\triangle ABC$ 透視，由梁-澤利克定理的 (ii)，$H_a \in \mathcal{K}_{t_0}$。同理有 H_b, $H_c \in \mathcal{K}_{t_0}$。 ■

如果想把上面這個證明類似地應用在梁-澤利克定理的 (iii)，會發現其中一個點是 T，而另外兩個點則不一定存在。

Proposition 5.4.11. 令 $\mathcal{K}_\varphi^p(L)$ 爲 $\triangle ABC$ 的 Darboux 三次曲線，則 $\mathcal{K}_\varphi^p(L)$ 關於 $\triangle ABC$ 的外心 O 對稱。

Proof. 注意到 $t(L) = 1/2$，所以由 (5.4.4) 中 (i) 與 (ii) 的等價性，一點 $P \in \mathcal{K}_\varphi^p(L)$ 若且唯若 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形與 $\triangle ABC$ 透視。令 $P \in \mathcal{K}_\varphi^p(L)$，$P'$ 爲 P 關於 O 的對稱點, 設 $\triangle P_aP_bP_c$, $\triangle P'_aP'_bP'_c$ 分別爲 P, P' 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，那麼他們的對應頂點關於三邊中點對稱，因此 $\triangle P'_aP'_bP'_c$ 與 $\triangle ABC$ 透視於 $\triangle P_aP_bP_c$ 與 $\triangle ABC$ 的透視中心關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點 (以重心 G 爲極點的點等共軛變換)，所以 $P' \in \mathcal{K}_\varphi^p(L)$。 ■

習題

Problem 1. 給定 $\triangle ABC$，令 A_1 爲 A 關於 BC 的對稱點，類似定義 B_1, C_1，設 $A_2 = BC_1 \cap CB_1$。證明：A_1A_2 平行於 $\triangle ABC$ 的歐拉線。

Problem 2. 給定任意三角形 $\triangle ABC$，令 B^*, C^* 分別爲 B, C 關於 CA, AB 的對稱點，I_b, I_c 分別爲 B, C 關於 $\triangle ABC$ 的旁心，$P = I_bC^* \cap I_cB^*$，A', B', C' 分別爲 P 關於 BC, CA, AB 的對稱點。證明：AA', BB', CC' 共點。

Problem 3 (Telv Cohl)**.** 平面上有一個三角形 ABC，其外接圓爲 Γ，設點 A' 是點 A 在 Γ 上的對徑點。作正三角形 BCD，使得 A, D 兩點位於 BC 的異側。設過 A' 且與 $A'D$ 垂直的直線分別與直線 CA, AB 交於 E, F 兩點。以 EF 爲底，作底角爲 30° 的等腰三角形 ETF，並使 A, T 兩點位於 EF 的異側。證明：AT 經過三角形 ABC 的九點圓圓心 N。

Problem 4. 令銳角 $\triangle ABC$ 是非等腰的且 P 爲其內部一點。A_1, B_1, C_1 分別爲

P 關於 BC, CA, AB 的垂足。試找出所有點 P 使得 AA_1, BB_1, CC_1 共點且

$$\angle PAB + \angle PBC + \angle PCA = 90^\circ.$$

Chapter 6

特殊截線

6.1 共軛圓錐曲線

Proposition 6.1.1. 給定 $\triangle ABC$，一點 $P \notin \{A, B, C\}$ 與三角 α, β, γ，滿足

$$(\alpha, \beta, \gamma) \neq (\measuredangle(BC, AP),\ \measuredangle(CA, BP),\ \measuredangle(AB, CP)),$$

則存在一 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}$ 使得以下命題成立：

對於任意一點 $Q \notin \mathcal{L}_\infty$，分別在 BC, CA, AB 上取 D, E, F 使得

$$\measuredangle(QD, AP) = \alpha,\ \measuredangle(QE, BP) = \beta,\ \measuredangle(QF, CP) = \gamma,$$

則 $Q \in \mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}$ 若且唯若 D, E, F 共於一線 L。

Proof. 取 $\triangle XYZ$ 使得 P 爲 $\triangle ABC$ 關於 $\triangle XYZ$ 的密克點且

$$\measuredangle(YZ, AP) = \alpha,\ \measuredangle(ZX, BP) = \beta, \measuredangle(XY, CP) = \gamma.$$

取點 U 使得 $BXCU$ 是平行四邊形。類似地定義 V, W。注意到

$$BW \cap CV,\ CU \cap AW,\ AV \cap BU \in \mathcal{L}_\infty.$$

由帕斯卡逆定理，A, B, C, U, V, W 共圓錐曲線。

Claim. 過 A, B, C, U, V, W 的圓錐曲線 $\mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}$ 滿足條件。

Proof of Claim. 令 $Q \in \mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}$，分別在 BC, CA, AB 上取 D, E, F 使得

$$\measuredangle(QD, AP) = \alpha,\ \measuredangle(QE, BP) = \beta,\ \measuredangle(QF, CP) = \gamma,$$

則 $QD \parallel YZ$, $QE \parallel ZX$, $QF \parallel XY$。在 $\mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}$ 上取 D' 使得 Q, D, D' 共線，類似地定義 E', F'。由帕斯卡定理 (0.4.1)，E, F, $BE' \cap CF'$ 共線，類似地有另外兩共線，所以我們只需證明 AD', BE', CF' 共點。我們知道當 $Q = U, V, W$ 時此命題 $\mathscr{P}$ 成立 (都共點於 $\mathcal{L}_\infty$)，由於 $Q \mapsto D'$, E', F' 是保交比變換 (1.3.13)，$\mathscr{P}$ 是圓錐曲線 $\mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}$ 上的射影命題，故對於任意 $Q \in \mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}$，$\mathscr{P}$ 成立。

假設 $Q \notin \mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}$，但 D, E, F 共線。對於任意一過 Q 的弦 $\overline{RS}$，其中 $R, S \in \mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}$，我們有 D, E, F，D_R, E_R, F_R，D_S, E_S, F_S 分別共線。因此對於任意 $T \in RS$，D_T, E_T, F_T 共線。由於 $\overline{RS}$ 是任意的，對於所有 T，D_T, E_T, F_T 共線，但這在 A 附近是錯的 (當 $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (\measuredangle(BC, AP),\ \measuredangle(CA, BP),\ \measuredangle(AB, CP))$ 時，D_T 在一個小範圍內，E_TF_T 的斜率爲任意)。 ■

Definition 6.1.2. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與三角 α, β, γ 滿足 (6.1.1) 的條件。

(i) 我們稱上述性質所定義的圓錐曲線 $\mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的 α, β, γ-共軛圓錐曲線。

(ii) 若 $Q \in \mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}$，我們稱上述性質所定義的直線 L，記爲 $\mathcal{T}_Q(\triangle ABC, P, \alpha, \beta, \gamma)$，爲 Q 關於 $\triangle ABC$ 的 $(P, \alpha, \beta, \gamma)$-截線。

(iii) 若 $\alpha = \beta = \gamma$，我們簡記 $\mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\alpha,\alpha}$ 爲 $\mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha}$，爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的 α-共軛圓錐曲線。

(iv) 當 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ 時，記 $\mathcal{T}_Q(\triangle ABC, P, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ)$ 爲 $\mathcal{O}_Q(\triangle ABC, P)$，爲 Q 關於 $\triangle ABC$ 的 P-正交截線。

(v) 當 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ 且 $P = Q$ 時，記 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC, P)$ 爲 $\mathcal{O}(\triangle ABC, P)$，爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線。

除此之外，我們還有反共軛曲線：

Definition 6.1.3. 給定 $\triangle ABC$，一點 Q 與三角 α, β, γ，我們定義

$$\mathcal{C}^{\flat}_{Q,\alpha,\beta,\gamma} := \{P \mid Q \in \mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha,\beta,\gamma}\}$$

爲 Q 關於 $\triangle ABC$ 的 α, β, γ-反共軛曲線。

但反共軛曲線不見得是圓錐曲線，不過我們還是有：

Proposition 6.1.4. 給定 $\triangle ABC$，一點 $Q \notin \{A, B, C\}$ 與一角 α，其中 $(Q, \alpha) \neq (H, 90^\circ)$，$H$ 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，則

$$\mathcal{C}^\flat_{Q,\alpha} = \mathcal{C}^\flat_{Q,\alpha,\alpha,\alpha} = \mathcal{C}^\sharp_{Q,-\alpha}.$$

Proof. 取點 U 使得 $BQCU$ 是平行四邊形。類似地定義 V, W。取點 X 使得

$$\measuredangle UBX = \measuredangle UCX = \alpha.$$

類似地定義 Y, Z。由 $\mathcal{C}^\sharp_{Q,-\alpha}$ 的構造，A, B, C, X, Y, Z 共於 $\mathcal{C}^\sharp_{Q,-\alpha}$。

Claim. 過 A, B, C, X, Y, Z 的圓錐曲線 $\mathcal{C}^\flat_{Q,\alpha} = \mathcal{C}^\sharp_{Q,-\alpha}$ 滿足條件。

Proof of Claim. 令 $P \in \mathcal{C}^\flat_{Q,\alpha}$，我們希望證明 $Q \in \mathcal{C}^\sharp_{P,\alpha}$。我們回憶一下 $\mathcal{C}^\sharp_{P,\alpha}$ 的構造，取 $\triangle X'Y'Z'$ 使得 P 爲 $\triangle ABC$ 關於 $\triangle X'Y'Z'$ 的密克點且

$$\measuredangle(Y'Z', AP) = \measuredangle(Z'X', BP) = \measuredangle(X'Y', CP) = \alpha.$$

取點 U' 使得 $BX'CU'$ 是平行四邊形。類似地定義 V', W'，則 $\mathcal{C}^\sharp_{P,\alpha}$ 是通過 A, B, C, U', V', W' 的圓錐曲線。注意到 $[BP \mapsto BX']$, $[CP \mapsto CX']$ 是保交比變換，所以 X' 在定圓錐曲線上移動，因此 U' 也在定圓錐曲線 $\mathcal{C}_U$ 上移動。類似地定義 $\mathcal{C}_V, \mathcal{C}_W$。當 $P = X$ 時，$U' = Q$，所以 $Q \in \mathcal{C}_U$，同理，$Q \in \mathcal{C}_V$, $Q \in \mathcal{C}_W$。由帕斯卡定理，$Q \in \mathcal{C}^\sharp_{P,\alpha}$ 若且唯若

$$BW' \cap CV',\ CQ \cap AW',\ AV' \cap BQ$$

共線。我們知道當 $P = X, Y, Z$ 時此命題 $\mathscr{P}$ 成立。注意到 $BW' \cap CV' \in \mathcal{L}_\infty$，

$$[P \mapsto (CQ \cap AW')(AV' \cap BQ)]$$

是一個從 $\mathcal{C}^\flat_{Q,\alpha}$ 至某個與 BQ, CQ 相切的圓錐曲線 $\mathcal{C}'$ 的所有切線的保交比變換，取 $P = X$ 可得 $\mathcal{C}'$ 與 $\mathcal{L}_\infty$ 相切，故對於任意 $P \in \mathcal{C}^\flat_{Q,\alpha}$，$\mathscr{P}$ 成立。

假設 $P \notin \mathcal{C}^\flat_{Q,\alpha}$，但 $Q \in \mathcal{C}^\sharp_{P,\alpha}$。對於任意一過 P 的弦 $\overline{RS}$，其中 $R, S \in \mathcal{C}^\flat_{Q,\alpha}$，我們有 $Q \in \mathcal{C}^\sharp_{P,\alpha} \cap \mathcal{C}^\sharp_{R,\alpha} \cap \mathcal{C}^\sharp_{S,\alpha}$。因此對於任意 $T \in RS$，$Q \in \mathcal{C}^\sharp_{T,\alpha}$。由於 $\overline{RS}$ 是任意的，對於所有 T，$Q \in \mathcal{C}^\sharp_{T,\alpha}$。分別取 $T \in BC$, CA, AB，我們可以得到

$$\measuredangle(BC, AQ) = \measuredangle(CA, BQ) = \measuredangle(AB, CQ) = \alpha$$

但這只會在 $(Q, \alpha) = (H, 90^\circ)$ 時發生。 ■

Remark. 從證明中可以看出，如果取 X, Y, Z 滿足

$$\measuredangle VAY = \measuredangle WAZ = \alpha,\ \measuredangle WBZ = \measuredangle UBX = \beta,\ \measuredangle UCX = \measuredangle VCY = \gamma,$$

且 A, B, C, X, Y, Z 共圓錐曲線 (等價於

$$BZ \cap CY,\ CX \cap AZ,\ AY \cap BX$$

共線)，則 $\mathcal{C}^{\flat}_{Q,\alpha,\beta,\gamma}$ 也為圓錐曲線。但這時候我們並沒有與 $\mathcal{C}^{\sharp}$ 之間的關係。

對於 $\mathcal{C}^{\sharp}$ 及 $\mathcal{C}^{\flat}$ 我們有如下的刻畫：

Proposition 6.1.5. 對於任意一點 $P \notin \{A, B, C, H\}$，

(i) 對於任意一角 α，$\mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha} = \mathcal{C}^{\flat}_{P,-\alpha}$。

(ii) 若 P^* 是 P 關於 $\triangle ABC$ 的 antigonal conjugate，則

$$\{A, B, C, P^*\} = \left(\bigcap_{\alpha} \mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha}\right) \cap \left(\bigcap_{\alpha} \mathcal{C}^{\flat}_{P,\alpha}\right).$$

(iii) $[\alpha \mapsto \mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha}]$ 是一個從所有的角度 $S^1/\{\pm 1\}$ 至所有通過 A, B, C, P^* 的圓錐曲線集 $\mathscr{F}$ 的保交比變換。

Proof. 對於 (ii) 和 (iii)，同 (6.1.1) 中 $\mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha}$ 的構造，我們有以下的保交比變換

$$\alpha \leftrightarrow X \in \odot(BPC) \leftrightarrow Y \in \odot(CPA) \leftrightarrow Z \in \odot(APB)$$

對於任意 α，$P^* \in \mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha}$ 若且唯若

$$BW \cap CV,\ CP^* \cap AW,\ AV \cap BP^*$$

共線。當 $\alpha = \measuredangle(BP^*, CP)$ 時，此命題 $\mathscr{P}$ 成立 (三點都位於 $\mathcal{L}_\infty$ 上)。由對稱性，當 $\alpha = \measuredangle(CP^*, AP), \measuredangle(AP^*, BP)$ 時，$P^* \in \mathcal{C}^{\sharp}_{P,\alpha}$，因此此時 $\mathscr{P}$ 也成立。注意到 $BW \cap CV \in \mathcal{L}_\infty$，

$$[\alpha \mapsto (CP^* \cap AW)(AV \cap BP^*)]$$

是一個從所有角度 $S^1/\{\pm 1\}$ 至某個與 BP^*, CP^* 相切的拋物線 $\mathcal{P}$ (由 $\alpha = \measuredangle(BP^*, CP)$) 的所有切線的保交比變換，故對於任意角 α，$\mathscr{P}$ 成立。這證明了 (ii) 和 (iii)。 ∎

意外地得到了 Riem 的推廣：

Corollary 6.1.6. 令兩圓 Ω_1, Ω_2 交於 A, B，X_i, $Y_i \in \Omega_i$，則 A, B, X_1, Y_1, X_2, Y_2 共圓錐曲線若且唯若 $X_1Y_1 \parallel X_2Y_2$。

Proposition 6.1.7. 給定 $\triangle ABC$ 與一點 $P \notin \{A, B, C, H\}$。若 P^* 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的 antigonal conjugate，Q^* 爲 P^* 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，則以 P^*, Q^* 爲焦點且與 $\triangle ABC$ 相切圓錐曲線是 $\mathcal{T}_{P^*}(\triangle ABC, P, \alpha)$ 的包絡線。

Proof. 令 E, F 分別爲 $\mathcal{T}_{P^*}(\triangle ABC, P, \alpha)$ 與 CA, AB 的交點，則

$$\measuredangle EP^*F = \measuredangle(P^*E, BP) + \measuredangle BPC + \measuredangle(CP, P^*F) = \measuredangle CP^*B$$

所以存在 P^* 關於 (BC, CE, EF, FA) 的等角共軛點 (1.5.12)，因此以 P^*, Q^* 爲焦點且與 $\triangle ABC$ 相切圓錐曲線與 EF 相切。 ■

事實上，也可以透過這個證明來得到 (6.1.5) 的 (ii)。我們來看 $\mathcal{C}^\sharp$ 與 $\mathcal{C}^\flat$ 在特殊點或特殊角的時候有什麼性質。

(1) $\alpha = 0°$：

Proposition 6.1.8. 對於任意一點 P，$\mathcal{C}^\sharp_{P,0} = \mathcal{C}^\flat_{P,0}$ 是 P 關於 $\triangle ABC$ 的九點圓錐曲線 $\mathcal{C}$ (0.4.7) 關於 P 位似 2 倍下的像。特別地，若 $\triangle P_AP_BP_C$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形，$\triangle P'_AP'_BP'_C$ 爲 $\triangle P_AP_BP_C$ 關於 P 位似 2 倍下的像，則 P'_A, P'_B, $P'_C \in \mathcal{C}^\sharp_{P,0} = \mathcal{C}^\flat_{P,0}$。

(2) $P = H$：

Proposition 6.1.9. 給定 $\triangle ABC$ 及一角 $\alpha \neq 90°$，令 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，則 $\mathcal{C}^\sharp_{H,\alpha} = \odot(ABC)$。

Corollary 6.1.10 (西姆松定理/Simson's)**.** 給定 $\triangle ABC$，對於任意一點 P，$P \in \odot(ABC)$ 若且唯若 P 關於 $\triangle ABC$ 三邊的垂足共線，稱爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的西姆松線。

這些當然都只是簡單的算角度。

(3) $\alpha = 90^\circ$：由等軸雙曲線的性質 (2.1.4) 與 $\mathcal{C}^\sharp_{P,90^\circ}$ 的構造，我們可以得到：

Proposition 6.1.11. 對於任意一點 P，$\mathcal{C}^\sharp_{P,90^\circ} = \mathcal{C}^\flat_{P,90^\circ}$ 是通過 P 的等軸雙曲線且對於任意 $Q \in \mathcal{C}^\sharp_{P,90^\circ} = \mathcal{C}^\flat_{P,90^\circ}$，$PQ \perp \mathcal{O}_Q(\triangle ABC, P)$。

Proof. 同 (6.1.1) 證明中的標號，我們有 U, V, W 分別爲 $\triangle PBC, \triangle PCA, \triangle PAB$ 的垂心，因此通過 P 的等軸雙曲線 $\mathcal{H}_P$ 也通過 U, V, W，故 $\mathcal{C}^\sharp_{P,90^\circ} = \mathcal{H}_P$。這同時也得到 $\mathcal{C}^\flat_{P,90^\circ} = \mathcal{H}_P$。

令 $Q \in \mathcal{C}^\sharp_{P,90^\circ}$，$H_B$, H_C 分別爲 $\triangle BPQ$, $\triangle CPQ$ 的垂心。由帕斯卡定理 (0.4.1)，

$$H_BQ \cap CA,\ H_CQ \cap AB,\ BH_B \cap CH_C$$

共線，又 $BH_B \parallel CH_C \perp PQ$，我們有 $\mathcal{O}_Q(\triangle ABC, P) = EF \perp PQ$。 ■

Corollary 6.1.12. 一點 P 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線垂直於 P 關於等軸雙曲線 $(ABCHP)$ 的切線，其中 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心。

6.1.1 正交共軛點

在有了以上設定之後，我們來看看正交共軛點，它是等共軛變換的另一個例子。這是個好例子，因爲他不一定有不動點。

Definition 6.1.13. 給定 $\triangle ABC$ 與一點 P，我們定義其正交共軛點 P° 爲 $\mathcal{O}_H(\triangle ABC, P)$ 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極點，其中 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心。

由於 H 會在 $\mathcal{C}^\sharp_{P,90^\circ}$ 上 (6.1.11)，所以這個定義是好的。由 (6.1.11)，我們可以輕易得到：

Proposition 6.1.14. 對於任意一點 P，HP 垂直 P° 的三線性極線。 ■

Proposition 6.1.15. 變換 $P \mapsto P^\circ$ 是以垂心 H 爲極點的等共軛變換。

Proof. 由 (1.4.9) 及極點的定義，我們需要證明 $P \mapsto P^\circ$ 滿足：

(i) $H^\circ = G$，其中 G 是 $\triangle ABC$ 的重心。

(ii) $P \notin BC \cup CA \cup AB \implies P^\circ \notin BC \cup CA \cup AB$，

(iii) 對於所有頂點 $X \in \{A, B, C\}$，

$$X, P_1, P_2 \text{ 共線} \implies X, P_1^\circ, P_2^\circ \text{ 共線},$$

(iv) 對於所有頂點 $X \in \{A, B, C\}$，$[XP \mapsto XP^\circ]$ 是一對合變換，

(i)：$\mathcal{O}_H(\triangle ABC, H) = \mathcal{L}_\infty$，而 $\mathcal{L}_\infty$ 的三線性極點爲 G。

(ii)：若 $P^\circ \in BC \cup CA \cup AB$，不妨假設 $P^\circ \in BC$，則 P° 的三線性極線 $\mathcal{T}$ 爲 BC。但這代表 $BP \perp CH, CP \perp BH$，即 $P = A$。

(iii)：若 A, P_1, P_2 共線，則 $\mathcal{O}_H(\triangle ABC, P_1)$ 與 $\mathcal{O}_H(\triangle ABC, P_2)$ 交於 $D \in BC$ 上，所以 P_1°, P_2° 滿足

$$A(P_1^\circ, D; B, C) = -1 = A(P_2^\circ, D; B, C),$$

即 A, P_1°, P_2° 共線。

(iv)：我們先觀察到此變換保交比：

$$(P_i) = X(P_i) = H(\mathcal{O}_H(\triangle ABC, P_i) \cap YZ) = (\mathcal{O}_H(\triangle ABC, P_i) \cap YZ) = X(P_i^\circ)$$

最後用到了關於 YZ 中點反演是一個保交比變換 (1.3.12)。再來要說明他對合，事實上，我們有 $XY \mapsto XZ$, $XZ \mapsto XY$。 ■

直接把等共軛變換的性質與推論套上去就有：

Corollary 6.1.16.

(i) 變換 $P \mapsto P^\circ$ 會將不過頂點的直線送至 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線。

(ii) 因爲 $G \leftrightarrow H$，所以歐拉線 $\mathcal{E}$ 的像 $\mathcal{E}^\circ$ 是 $\triangle ABC$ 的 Kiepert 雙曲線 (2.3.3)。

(iii) 令 $\triangle H_aH_bH_c$ 爲 H 關於 $\triangle ABC$ 的反西瓦三角形，則 $\varphi(\mathcal{L}_\infty)$ 爲 $\triangle H_aH_bH_c$ 的內切圓錐曲線。 ■

6.2 張志煥截線

張志煥截線是幾何王子張志煥在計算共圓時經常使用到的工具。

Proposition 6.2.1. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$，令 $\triangle P_AP_BP_C$ 爲 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{C}$-西瓦三角形。對於 $\mathcal{C}$ 上一點 X，令 $X_A = XP_A \cap BC$, $X_B = XP_B \cap CA$, $X_C = XP_C \cap AB$，則 P, X_A, X_B, X_C 共線。

Proof. 考慮 $\mathcal{C}$ 上的六折線們 BCP_CXP_AA, CAP_AXP_BB，由帕斯卡定理即可得 P, X_A, X_B, X_C 共線。 ■

我們稱上述所共的直線 $PX_AX_BX_C$ 爲 X 關於 $(\triangle ABC, \mathcal{C})$ 的張志煥 P-截線，記爲 $\mathcal{S}_{\otimes,\mathcal{C},P}(X)$。

Proposition 6.2.2. 給定 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。對於任意兩點 P, Q 與任意一點 $X \in \mathcal{C}$，

$$\mathcal{S}_{\otimes,\mathcal{C},P}(X) \cap \mathcal{S}_{\otimes,\mathcal{C},Q}(X) \in (ABCPQ).$$

Proof. 令 $P_A = AP \cap \mathcal{C}$, $Q_A = AQ \cap \mathcal{C}$, $Z = \mathcal{S}_{\otimes,\mathcal{C},P}(X) \cap \mathcal{S}_{\otimes,\mathcal{C},Q}(X)$，我們有

$$\begin{aligned} P(A, Z; B, C) &= (AP \cap BC, XP_A \cap BC; B, C) \overset{P_A}{=} (A, X; B, C)_{\mathcal{C}} \\ &\overset{Q_A}{=} (AQ \cap BC, XQ_A \cap BC; B, C) = Q(A, Z; B, C) \end{aligned}$$

因此由圓錐曲線基本定理可得 $Z \in (ABCPQ)$。 ■

我們記 $\mathfrak{Z}_{\mathcal{C},P,Q}(X) = \mathcal{S}_{\otimes,\mathcal{C},P}(X) \cap \mathcal{S}_{\otimes,\mathcal{C},Q}(X)$。

Proposition 6.2.3. 延續上述性質的標號，令 T 爲 $\mathcal{C}$ 與 $(ABCPQ)$ 的第四個交點，則 T, X, $\mathfrak{Z}_{\mathcal{C},P,Q}(X)$ 共線。

Proof. 令 $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_{\mathcal{C},P,Q}(X)$。由上述性質的證明及結論，我們有

$$T(A, \mathfrak{Z}; B, C) = P(A, \mathfrak{Z}; B, C) = (A, X; B, C) = T(A, X; B, C),$$

即 T, X, $\mathfrak{Z}$ 共線。 ■

對於任意不過頂點的直線 $\mathcal{L}$，我們知道 $\triangle ABC$ 上的等共軛變換與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線有個一一對應 (見 (1.4.10))，即 $\varphi \mapsto \varphi(\mathcal{L})$。以下簡記 $\varphi(\mathcal{L})$ 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ (見 (1.4.11))，特別地，當 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$, φ 爲等角共軛變換 $(\cdot)^*$，$\mathcal{L}_\infty^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓 Ω。

Proposition 6.2.4. 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的一個等共軛變換，且 $X \in \mathcal{L}^\varphi$。對於任意點 P，設 $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_{\mathcal{L}^\varphi, P, \varphi(P)}(X)$，則

$$P\varphi(P) = \mathcal{S}_{\otimes, \mathcal{L}^\varphi, \varphi(\mathfrak{Z})}(X).$$

Proof. 設 $D = P\varphi(P) \cap BC$，則

$$\begin{aligned} X(B, C; D, P\mathfrak{Z} \cap BC) &= P(B, C; \varphi(P), \mathfrak{Z}) \\ &= A(B, C; \varphi(P), \mathfrak{Z}) \\ &\overset{\varphi}{=} A(C, B; P, \varphi(\mathfrak{Z})) \\ &= A(B, C; \varphi(\mathfrak{Z}), P) \end{aligned}$$

因此 XD 和 $A\varphi(\mathfrak{Z})$ 交於 $\mathcal{L}^\varphi$，即 $P\varphi(P) = \mathcal{S}_{\otimes, \mathcal{L}^\varphi, \varphi(\mathfrak{Z})}(X)$。 ■

Proposition 6.2.5. 令 φ, ψ 爲 $\triangle ABC$ 上的兩個等共軛變換。設 X 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ 和 $\mathcal{L}^\psi$ 的第四個交點，P 爲任意一點，則

(i) X, $A\varphi(P) \cap \mathcal{L}^\varphi$, $A\psi P \cap \mathcal{L}^\psi$ 共線。

(ii) $\varphi(P)\psi(P) = \mathcal{S}_{\otimes, \mathcal{L}^\varphi, \varphi(P)}(X) = \mathcal{S}_{\otimes, \mathcal{L}^\psi, \psi(P)}(X)$。

Proof. (i) 設 $A\varphi(P)$, $A\psi(P)$ 分別交 $\mathcal{L}^\varphi$, $\mathcal{L}^\psi$ 於 $\varphi(P)_A$, $\psi(P)_A$。簡單地觀察到

$$\begin{aligned} X(A, \varphi(P)_A; B, C) = A(A, \varphi(P)_A; B, C)_{\mathcal{L}^\varphi} &\overset{\varphi}{=} A(\infty_{BC}, P; B, C) \\ &\overset{\psi}{=} A(A, \psi(P)_A; B, C)_{\mathcal{L}^\psi} = X(A, \psi(P)_A; B, C). \end{aligned}$$

(ii) 設 $X\varphi(P)_A\psi(P)_A$ 交 BC 於 X_A，我們有

$$X_A\varphi(P) = \mathcal{S}_{\otimes, \mathcal{L}^\varphi, \varphi(P)}(X) = \mathcal{S}_{\otimes, \mathcal{L}^\psi, \psi(P)}(X) = X_A\psi(P),$$

故

$$\varphi(P)\psi(P) = \mathcal{S}_{\otimes, \mathcal{L}^\varphi, \varphi(P)}(X) = \mathcal{S}_{\otimes, \mathcal{L}^\psi, \psi(P)}(X).$$ ■

現在假設 $\mathcal{C}$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓 $\Omega = \odot(ABC)$，那麼某些張志煥截線就會是一我們平常熟悉的線。

Example 6.2.6. 令 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，則對於任意一點 $X \in \Omega$，$\mathcal{S}_{\otimes,\Omega,O}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線 $\mathcal{O}(X)$。

Example 6.2.7. 令 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，則對於任意一點 $X \in \Omega$，$\mathcal{S}_{\otimes,\Omega,H}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的施坦納線 $\mathcal{S}_X$。

Example 6.2.8. 令 K 爲 $\triangle ABC$ 的共軛重心，則對於任意一點 $X \in \Omega$，$\mathcal{S}_{\otimes,\Omega,K}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

我們簡記 $\mathcal{S}_{\otimes,\Omega,P}(X)$ 爲 $\mathcal{S}_{\otimes,P}(X)$，爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的 P-張志煥截線。事實上，我們對於 $\mathcal{S}_{\otimes,P}(X)$ 的角度有一些刻畫。

Proposition 6.2.9. 設 P, P^* 爲 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點，X 爲外接圓 Ω 上任意點，則

$$\measuredangle(\mathcal{S}_{\otimes,P}(X), BC) = \measuredangle AXP^*$$

Proof. 令 $P_A = AP \cap \Omega,\ P_A^* = AP^* \cap \Omega,\ D = AP \cap BC,\ X_A = XP_A \cap BC$。由 $P_AP_A^* \parallel BC$，我們易得 $\triangle X_AP_AD \overset{-}{\sim} \triangle AYX$。在 P_AX_A 上取點 E 使得

$$DE \parallel PX_A = \mathcal{S}_{\otimes,P}(X).$$

由 1.5 節的習題 6，我們有

$$\frac{AP^*}{P^*P_A^*} = \frac{PD}{DP_A} = \frac{X_AE}{EP_A}.$$

因此我們有 $\triangle X_AED \overset{-}{\sim} \triangle AP^*X$，最後由算角度可得

$$\measuredangle AXP^* = \measuredangle EDX_A = \measuredangle(PX_A, BC) = \measuredangle(\mathcal{S}_{\otimes,P}(X), BC).$$ ■

以下假設 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$ 無窮遠線。

Theorem 6.2.10. 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓。對於任意等共軛變換 φ，設 X 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ 與 Ω 的第四個交點。對於任意點 P，設 T 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ 與 $(ABCP\varphi(P))$ 的第四個交點，$Z = TX \cap (ABCP\varphi(P))$。則 $P, \varphi(P), X, Z$ 四點共圓。

Proof. 由 (6.2.3)，我們有 $Z = \mathfrak{Z}_{\mathcal{L}^\varphi, P, Q}$。考慮 $P, \varphi(P)$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 $P^*, \varphi(P)^*$。注意到 $X \in \mathcal{L}^\varphi \cap \mathcal{L}^*$，因此由 (6.2.5) 的 (ii) 及 (6.2.9)，

$$\begin{aligned}\measuredangle PZ\varphi(P) &= \measuredangle(\mathcal{S}_{\otimes,\mathcal{L}^\varphi,P}(X), \mathcal{S}_{\otimes,\mathcal{L}^\varphi,\varphi(P)}(X)) = \measuredangle(P\varphi(P)^*, \varphi(P)P^*) \\ &= \measuredangle(\mathcal{S}_{\otimes,\varphi(P)^*}(X), \mathcal{S}_{\otimes,P^*}(X)) = \measuredangle AX\varphi(P) + \measuredangle PXA = \measuredangle PX\varphi(P),\end{aligned}$$

即 $P, \varphi(P), X, Z$ 共圓。 ■

事實上，(6.2.8) 有如下的推廣：

Proposition 6.2.11. 若 X 位於 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 上，P 爲 $\triangle ABC$ 與 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\triangle ABC)$ 的透視中心，則 $\mathcal{S}_{\otimes,\mathcal{C},P}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

Proof. 令 $\triangle P_AP_BP_C$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{C}$-西瓦三角形，則 ABP_AC 爲 $\mathcal{C}$ 上的調和四邊形，因此

$$(B, C; AX \cap BC, \mathcal{S}_{\otimes,\mathcal{C},P}(X) \cap BC) \overset{X}{=} (B, C; A, P_A)_{\mathcal{C}} = -1.$$

同理有

$$(C, A; BX \cap CA, \mathcal{S}_{\otimes,\mathcal{C},P}(X) \cap CA) = (A, B; CX \cap AB, \mathcal{S}_{\otimes,\mathcal{C},P}(X) \cap AB) = -1,$$

故 $\mathcal{S}_{\otimes,\mathcal{C},P}(X) = \mathfrak{t}_X$。 ■

Example 6.2.12. 令 $\mathcal{S}\boldsymbol{t}$ 爲三角形 $\triangle ABC$ 的斯坦那外接橢圓，則重心 G 爲透視中心，因此 $\mathcal{S}_{\otimes,\mathcal{S}\boldsymbol{t},G}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

Example 6.2.13. 設 $\mathcal{L}^\circ$ 爲 $\mathcal{L}_\infty$ 的正交共軛軌跡，則垂心 H 爲透視中心，因此 $\mathcal{S}_{\otimes,\mathcal{L}^\circ,H}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

參考資料

[1] Ivan Zelich and Xuming Liang (2015). *Generalisations of the Properties of the Neuberg Cubic to the Euler Pencil of Isopivotal Cubics.*
`https://ijgeometry.com/wp-content/uploads/2015/10/1.pdf`

[2] *Desargues' Involution Theorem.*
`https://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/63.pdf`

[3] Chris van Tienhoven. *Encyclopedia of Quadri-Figures.*
`https://chrisvantienhoven.nl/`

[4] Jean-Pierre Ehrmann and Bernard Gibert (2015). *Special Isocubics in the Triangle Plane*
`http://bernard.gibert.pagesperso-orange.fr/files/Resources/SITP.pdf`

[5] 張志煥。*正交截線*

[6] dqzy800. *完美六邊形研究綜述*
`https://bbs.cnool.net/5443327.html`

[7] 鄭容濤。*等角共軛點與完美六邊形初論*