2022年数学新高考I卷

一、单选题（本大题共8小题，共40分）

1. 若集合$M=\{x|\sqrt{x}<4\}$，$N=\{x|3x\geq 1\}$，则$M\cap N=(\quad)$

   A. $\{x|0\leq x<2\}$　B. $\{x|\frac{1}{3}\leq x<2\}$　C. $\{x|3\leq x<16\}$　D. $\{x|\frac{1}{3}\leq x<16\}$

2. 若$i(1-z)=1$，则$z+\bar{z}=(\quad)$

   A. -2　B. -1　C. 1　D. 2

3. 在$\triangle ABC$中，点D在边AB上，$BD=2DA$.记$\overrightarrow{CA}=\vec{m}$，$\overrightarrow{CD}=\vec{n}$，则$\overrightarrow{CB}=(\quad)$

   A. $3\vec{m}-2\vec{n}$　B. $-2\vec{m}+3\vec{n}$　C. $3\vec{m}+2\vec{n}$　D. $2\vec{m}+3\vec{n}$

4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库.已知该水库水位为海拔148.5m时，相应水面的面积为$140.0\,\mathrm{km}^2$;水位为海拔157.5m时，相应水面的面积为$180.0\,\mathrm{km}^2$.将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔$148.5\,\mathrm{m}$上升到$157.5\,\mathrm{m}$时，增加的水量约为$(\sqrt{7}\approx 2.65)(\quad)$

   A. $1.0\times 10^9\,m^3$　B. $1.2\times 10^9\,m^3$　C. $1.4\times 10^9\,m^3$　D. $1.6\times 10^9\,m^3$

5. 从2至8的7个整数中随机取2个不同的数，则这2个数互质的概率为$(\quad)$

   A. $\frac{1}{6}$　B. $\frac{1}{3}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{2}{3}$

6. 记函数$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})+b\,(\omega>0)$的最小正周期为$T$.若$\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，且$y=f(x)$的图像关于点$(\frac{3\pi}{2},2)$中心对称，则$f(\frac{\pi}{2})=(\quad)$

   A. 1　B. $\frac{3}{2}$　C. $\frac{5}{2}$　D. 3

7. 设$a=0.1e^{0.1}$，$b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则$(\quad)$

   A. $a<b<c$　B. $c<b<a$　C. $c<a<b$　D. $a<c<b$

8. 已知正四棱锥的侧棱长为l，其各顶点都在同一个球面上，若该球的体积为36π，且$3\leq l\leq 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是$(\quad)$

   A. $[18,\frac{81}{4}]$　B. $[\frac{27}{4},\frac{81}{4}]$　C. $[\frac{27}{4},\frac{64}{3}]$　D. $[18,27]$

二、多选题（本大题共4小题，共20分）

9. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则$(\quad)$

   A. 直线BC_1与DA_1所成的角为$90°$

   B. 直线BC_1与CA_1所成的角为$90°$

   C. 直线BC_1与平面BB_1D_1D所成的角为$45°$

   D. 直线BC_1与平面$ABCD$所成的角为$45°$

10. 已知函数$f(x)=x^3-x+1$，则(　　)

A. $f(x)$有两个极值点

B. $f(x)$有三个零点

C. 点$(0,1)$是曲线$y=f(x)$的对称中心

D. 直线$y=2x$是曲线$y=f(x)$的切线

11. 已知O为坐标原点，点$A(1,1)$在抛物线C: $x^2=2py\,(p>0)$上，过点$B(0,-1)$的直线交C于P，Q两点，则(　　)

A. C的准线为$y=-1$

B. 直线AB与C相切

C. $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$

D. $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

12. 已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域为R，记$g(x)=f'(x)$.若$f(\frac{3}{2}-2x)$，$g(2+x)$均为偶函数，则(　　)

A. $f(0)=0$　　B. $g(-\frac{1}{2})=0$　　C. $f(-1)=f(4)$　　D. $g(-1)=g(2)$

三、填空题（本大题共4小题，共20分）

13. $(1-\frac{y}{x})(x+y)^8$的展开式中x^2y^6的系数为__________（用数字作答).

14. 写出与圆$x^2+y^2=1$和$(x-3)^2+(y-4)^2=16$都相切的一条直线的方程__________.

15. 若曲线$y=(x+a)e^x$有两条过坐标原点的切线，则a的取值范围是__________.

16. 已知椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，$C$的上顶点为$A$，两个焦点为$F_1$，$F_2$，离心率为$\frac{1}{2}$，过$F_1$且垂直于$AF_2$的直线与$C$交于$D$，$E$两点，$|DE|=6$，则$\triangle$的周长是__________.

四、解答题（本大题共6小题，共70分）

17. 记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_1=1$，$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式; (2)证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$.

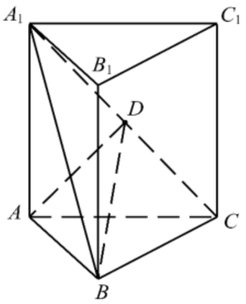
18. 记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

(1)若$C=\frac{2\pi}{3}$，求B; (2)求$\frac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值.

19. 如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积为4，$\triangle A_1BC$的面积为$2\sqrt{2}$.

(1)求A到平面A_1BC的距离;

(2)设D为A_1C的中点，$AA_1=AB$，平面$A_1BC\perp$平面ABB_1A_1，求二面角$A-BD-C$的正弦值.



20. 一支医疗团队研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯(卫生习惯分为良好和不够良好两类)的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了100例(称为病例组)，同时在未患该疾病的人群中随机调查了100人(称为对照组)，得到如下数据:

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1)能否有99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异.

(2)从该地的人群中任选一人，A表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”，B表示事件“选到的人患有该疾病”，$\frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$与$\frac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}$的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为R.

(i)证明：$R=\frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)}\cdot\frac{\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}|\bar{\mathrm{B}})}{\mathrm{P}(\mathrm{A}|\bar{\mathrm{B}})}$;

(ii)利用该调查数据，给出$P(A|B)$，$P(A|\bar{B})$的估计值，并利用(i)的结果给出R的估计值.

附：$K^2=\frac{n\,(a\,d-b\,c)^2}{(a+b)\,(c+d)\,(a+c)\,(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

21. 已知点$A\,(2,1)$在双曲线C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-1}=1\,(a>1)$上， 直线$l$交$C$于$P$， Q两点， 直线$A\,P$，$A\,Q$的斜率之和为0.

(1)求l的斜率; (2)若$\tan\angle P\,A\,Q=2\sqrt{2}$，求$\triangle P\,A\,Q$的面积.

22. 已知函数$f(x)=e^x-a\,x$和$g(x)=a\,x-\ln x$有相同的最小值.

(1)求a;

(2)证明：存在$y=b$直线，其与两条曲线$y=f(x)$和$y=g(x)$共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.