

2022年数学全国乙卷（文科）

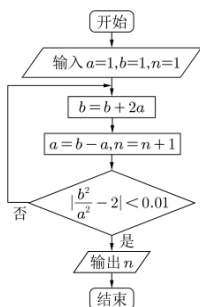
一、单选题（本大题共12小题，共60分）

- 集合 $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $N = \{x | -1 < x < 6\}$, 则 $M \cap N =$
 A. $\{2, 4\}$ B. $\{2, 4, 6\}$ C. $\{2, 4, 6, 8\}$ D. $\{2, 4, 6, 8, 10\}$
- 设 $(1+2i)a+b=2i$, 其中 a, b 为实数, 则
 A. $a=1, b=-2$ B. $a=-1, b=2$
 C. $a=1, b=2$ D. $a=-1, b=-2$
- 已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-2, 4)$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| =$
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
- 分别统计了甲、乙两位同学16周的各周课外体育运动时长(单位: h), 得如下茎叶图:

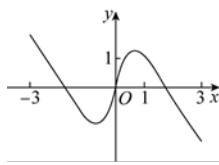
甲	乙
6 1	5.
8 5 3 0	6. 3
7 5 3 2	7. 4 6
6 4 2 1	8. 1 2 2 5 6 6 6 6
4 2	9. 0 2 3 8
	10. 1

则下列结论中错误的是

- 甲同学周课外体育运动时长的样本中位数为7.4
 - 乙同学周课外体育运动时长的样本平均数大于8
 - 甲同学周课外体育运动时长大于8的概率的估计值大于0.4
 - 乙同学周课外体育运动时长大于8的概率的估计值大于0.6
- 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq 2, \\ x+2y \leq 4, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最大值是
 A. -2 B. 4 C. 8 D. 12
 - 设 F 为抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点, 点 A 在 C 上, 点 $B(3,0)$, 若 $|AF|=|BF|$, 则 $|AB|=$
 A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $3\sqrt{2}$
 - 执行右边的程序框图, 输出的 $n =$



- 3 B. 4 C. 5 D. 6
- 右图是下列四个函数中的某个函数在区间 $[-3, 3]$ 的大致图像, 则该函数是



- A. $y = \frac{-x^3 + 3x}{x^2 + 1}$ B. $y = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$ C. $y = \frac{2x \cos x}{x^2 + 1}$ D. $y = \frac{2 \sin x}{x^2 + 1}$

9. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 AB, BC 的中点, 则
 A. 平面 $B_1EF \perp$ 平面 $BD D_1$ B. 平面 $B_1EF \perp$ 平面 A_1BD
 C. 平面 $B_1EF //$ 平面 A_1AC D. 平面 $B_1EF //$ 平面 A_1C_1D
10. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和为 168, $a_2 - a_5 = 42$, 则 $a_6 =$
 A. 14 B. 12 C. 6 D. 3
11. 函数 $f(x) = \cos x + (x+1)\sin x + 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 的最小值, 最大值分别为
 A. $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ B. $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ C. $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2$ D. $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2$
12. 已知球 O 的半径为 1, 四棱锥的顶点为 O , 底面的四个顶点均在球 O 的球面上, 则当该四棱锥的体积最大时, 其高为
 A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20 分)

13. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $2S_3 = 3S_2 + 6$, 则公差 $d =$ _____.
14. 从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作, 则甲、乙都入选的概率为 _____.
15. 过四点 $(0,0), (4,0), (-1,1), (4,2)$ 中的三点的一个圆的方程为 _____.
16. 若 $f(x) = \ln|a + \frac{1}{1-x}| + b$ 是奇函数, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 80.0 分)

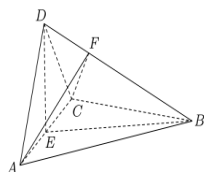
(一) 必考题: 共 60 分.

17. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin C \sin(A-B) = \sin B \sin(C-A)$.
 (1) 若 $A = 2B$, 求 C :
 (2) 证明: $2a^2 = b^2 + c^2$.

18. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, $AD \perp CD$, $AD = CD$, $\angle ADB = \angle BDC$, E 为 AC 的中点.

(1)证明：平面 $BED \perp$ 平面 ACD ;

(2)设 $AB=BD=2$, $\angle ACB=60^\circ$, 点 F 在 BD 上, 当 $\triangle AFC$ 的面积最小时, 求 CF 与平面 ABD 所成角的正弦值.



19. 某地经过多年的环境治理, 已将荒山改造成了绿水青山. 为估计一林区某种树木的总材积量, 随机选取了10棵这种树木, 测量每棵树的根部横截面积(单位: m^2)和材积量(m^3), 得到如下数据:

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积 x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得 $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 0.038$, $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 1.6158$, $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 0.2474$.

(1)估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量;

(2)求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数(精确到0.01);

(3)现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积, 并得到所有这种树木的根部横截面积总和为 $186m^2$. 已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比. 利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值.

附: 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$, $\sqrt{1.896} \approx 1.377$.

20. 已知函数 $f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1)\ln x$.

(1)当 $a=0$ 时, 求 $f(x)$ 的最大值;

(2) 若 $f(x)$ 恰有一个零点, 求 a 的取值范围.

21. 已知椭圆 E 的中心为坐标原点, 对称轴为 x 轴, y 轴, 且过 $A(0, -2)$, $B(\frac{3}{2}, -1)$ 两点

(1) 求 E 的方程;

(2) 设过点 $P(1, -2)$ 的直线交 E 于 M, N 两点, 过 M 且平行于 x 的直线与线段 AB 交于点 T , 点 H 满足 $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$, 证明: 直线 HN 过定点.

(二) 选考题: 共 10 分

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos 2t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点,

x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) + m = 0$.

(1) 写出 l 的直角坐标方程:

(2) 若 l 与 C 有公共点, 求 m 的取值范围.

23. 已知 a, b, c 为正数, 且 $a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}} = 1$, 证明:

$$(1) \, a \, b \, c \leq \frac{1}{9};$$

$$(2) \, \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{1}{2\sqrt{a \, b \, c}}.$$