2021年全国高考乙卷数学（理）试卷

一、单选题

1. 设$2(z+\bar{z})+3(z-\bar{z})=4+6i$，则$z=$______

A. $1-2i$　　B. $1+2i$　　C. $1+i$　　D. $1-i$

2. 已知集合$S=\{s|s=2n+1,n\in\boldsymbol{Z}\}$，$T=\{t|t=4n+1,n\in\boldsymbol{Z}\}$，则$S\cap T=$______

A. $\emptyset$　　B. S　　C. T　　D. $\boldsymbol{Z}$

3. 已知命题p：$\exists x\in\mathbb{R},\sin x<1$；命题$q$：$\forall x\in\mathbb{R},e^{|x|}\geqslant 1$，则下列命题中为真命题的是______

A. $p\wedge q$　　B. $\neg p\wedge q$　　C. $p\wedge\neg q$　　D. $\neg(p\vee q)$

4. 设函数$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，则下列函数中为奇函数的是______

A. $f(x-1)-1$　　B. $f(x-1)+1$　　C. $f(x+1)-1$　　D. $f(x+1)+1$

5. 在正方体ABCD$-A_1B_1C_1D_1$中，P为B_1D_1的中点，则直线PB与AD$_1$所成的角为______

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

6. 将5名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶4个项目进行培训，每名志愿者只分配到1个项目，每个项目至少分配1名志愿者，则不同的分配方案共有______

A. 60种　　B. 120种　　C. 240种　　D. 480种

7. 把函数$y=f(x)$图像上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，再把所得曲线向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，得到函数$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图像，则$f(x)=$______

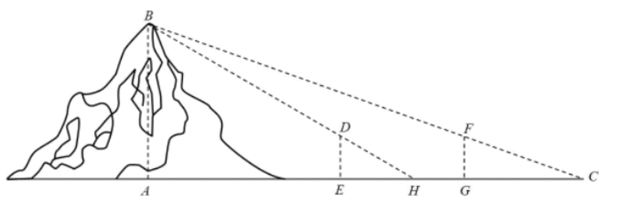
A. $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{12}\right)$　　B. $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$

C. $\sin\left(2x-\frac{7\pi}{12}\right)$　　D. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)$

8. 在区间$(0,1)$与$(1,2)$中各随机取1个数，则两数之和大于$\frac{7}{4}$的概率为______

A. $\frac{7}{9}$　　B. $\frac{23}{32}$　　C. $\frac{9}{32}$　　D. $\frac{2}{9}$

9. 魏晋时刘徽撰写的《海岛算经》是有关测量的数学著作，其中第一题是测海岛的高．如图，点E，H，G在水平线AC上，DE和FG是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度，称为“表高”，EG称为“表距”，GC和EH都称为“表目距”，GC与EH的差称为“表目距的差”则海岛的高AB＝______



A. $\frac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}+$表高　　B. $\frac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}-$表高

C. $\frac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}+$表距　　D. $\frac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}-$表距

10. 设$a\neq 0$，若$x=a$为函数$f(x)=a(x-a)^2(x-b)$的极大值点，则______

A. $a<b$　　B. $a>b$　　C. $ab<a^2$　　D. $ab>a^2$

11. 设B是椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上顶点，若$C$上的任意一点$P$都满足$|\mathrm{PB}|\leqslant 2b$，则$C$的离心率的取值范围是______

A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　B. $\left[\frac{1}{2},1\right)$　　C. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　D. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$

12. 设$a=2\ln 1.01$，$b=\ln 1.02$，$c=\sqrt{1.04}-1$. 则______

A. $a<b<c$　　B. $b<c<a$　　C. $b<a<c$　　D. $c<a<b$

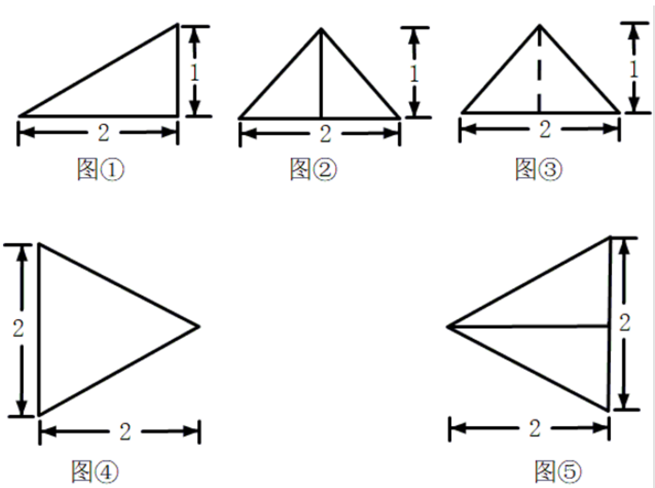
二、填空题

13. 已知双曲线C: $\frac{x^2}{m}-y^2=1(m>0)$的一条渐近线为$\sqrt{3}x+my=0$，则C的焦距为______.

14. 已知向量$\vec{a}=(1,3),\vec{b}=(3,4)$，若$(\vec{a}-\lambda\vec{b})\perp\vec{b}$，则$\lambda=$______.

15. 记△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，面积为$\sqrt{3}$，$B=60°$，$a^2+c^2=3ac$，则$b=$______.

16. 以图①为正视图，在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图，组成某个三棱锥的三视图，则所选侧视图和俯视图的编号依次为______（写出符合要求的一组答案即可）.



三、解答题

17. 某厂研制了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了10件产品，得到各件产品该项指标数据如下：

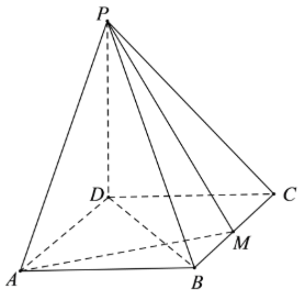
旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为和，样本方差分别记为和.

（1）求$\bar{x},\bar{y},s_1^2,s_2^2$;

（2） 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高（如果$\bar{y}-\bar{x}\geqslant 2\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{10}}$，则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高，否则不认为有显著提高）.

18. 如图，四棱锥$P-$ABCD的底面是矩形，PD$\perp$底面ABCD，M为BC的中点，且PB$\perp$AM.



（1）求BC；

（2）求二面角A-PM-B的正弦值.

19. 设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，b_n为数列$\{S_n\}$的前n项积，已知$\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$.

（1）证明：数列$\{b_n\}$是等差数列；

（2）求$\{a_n\}$的通项公式.

20. 设函数$f(x)=\ln(a-x)$，已知$x=0$是函数$y=x\,f(x)$的极值点.

（1）求a；

（2）设函数$g(x)=\frac{x+f(x)}{x\,f(x)}$. 证明：$g(x)<1$.

21. 已知抛物线C: $x^2=2\,p\,y(p>0)$的焦点为F，且F与圆M: $x^2+(y+4)^2=1$上点的距离的最小值为4.

（1）求p；

（2）若点P在M上，PA，PB是C的两条切线，A,B是切点，求△PAB面积的最大值.

22. 在直角坐标系$x\,O\,y$中，$\odot C$的圆心为$C(2,1)$，半径为1.

（1）写出$\odot C$的一个参数方程；

（2）过点$F(4,1)$作$\odot C$的两条切线. 以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，求这两条切线的极坐标方程.

23. 已知函数$\frac{|\mathrm{OB}|}{|\mathrm{OA}|}=\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{1}{4}\times 2\sin\alpha(\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha)=\frac{1}{4}\left[2\sin\left(2\,\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+1\right]$.

（1）当$a=1$时，求不等式$f(x)\geqslant 6$的解集；

（2）若$f(x)>-\alpha$，求a的取值范围.