2021年北京市高考数学试题

一、单选题

1．已知集合$A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|0\le x\le 2\}$，则$A\cup B=$（   ）

A．$\{x|-1<x<2\}$　　B．$\{x|-1<x\le 2\}$
C．$\{x|0\le x<1\}$　　D．$\{x|0\le x\le 2\}$

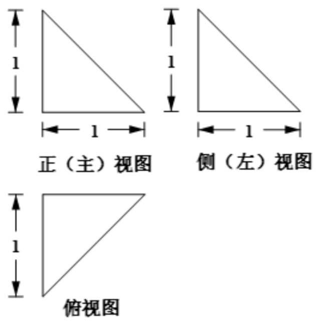
2．在复平面内，复数z满足$(1-i)\,z=2$，则$z=$（   ）

A．$-1-i$　　B．$-1+i$　　C．$1-i$　　D．$1+i$

3．已知$f(x)$是定义在上$[0,1]$的函数，那么“函数$f(x)$在$[0,1]$上单调递增”是“函数$f(x)$在$[0,1]$上的最大值为$f(1)$”的（   ）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件
C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．某四面体的三视图如图所示，该四面体的表面积为（   ）



A．$\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$3+\sqrt{3}$　　C．$\frac{3}{2}+\sqrt{3}$　　D．$3+\frac{\sqrt{3}}{2}$

5．若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$离心率为$2$，过点$(\sqrt{2},\sqrt{3})$，则该双曲线的方程为（   ）

A．$2x^2-y^2=1$ B．$x^2-\frac{y^2}{3}=1$ C．$5x^2-3y^2=1$ D．$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$

6．《中国共产党党旗党徽制作和使用的若干规定》指出，中国共产党党旗为旗面缀有金黄色党徽图案的红旗，通用规格有五种.这五种规格党旗的长a_1,a_2,a_3,a_4,a_5（单位:cm)成等差数列，对应的宽为b_1,b_2,b_3,b_4,b_5（单位: cm)，且长与宽之比都相等，已知$a_1=288$，$a_5=96$，$b_1=192$，则$b_3=$（   ）

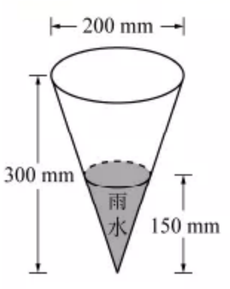
A．64　　B．96　　C．128　　D．160

7．函数$f(x)=\cos x-\cos 2x$是（   ）

A．奇函数，且最大值为2　　B．偶函数，且最大值为2
C．奇函数，且最大值为$\frac{9}{8}$　　D．偶函数，且最大值为$\frac{9}{8}$

8．某一时间段内，从天空降落到地面上的雨水，未经蒸发、渗漏、流失而在水平面上积聚的深度，称为这个时段的降雨量（单位：mm）．24h降雨量的等级划分如下：

等级	24h降雨量（精确到0.1）
……	……
小雨	0.1～9.9
中雨	10.0～24.9
大雨	25.0～49.9
暴雨	50.0～99.9
…..	……



在综合实践活动中，某小组自制了一个底面直径为200 mm，高为300 mm的圆锥形雨量器.若一次降雨过程中，该雨量器收集的24h的雨水高度是150 mm（如图所示），则这24h降雨量的等级是（　）

A．小雨　　B．中雨　　C．大雨　　D．暴雨

9．已知直线$y=kx+m$（m为常数）与圆$x^2+y^2=4$交于点M，N，当k变化时，若$|MN|$的最小值为2，则$m=$（　）

A．±1　　B．$\pm\sqrt{2}$　　C．$\pm\sqrt{3}$　　D．±2

10．已知$\{a_n\}$是各项均为整数的递增数列，且$a_1\geq3$，若$a_1+a_2+\cdots+a_n=100$，则n的最大值为（　）

A．9　　B．10　　C．11　　D．12

二、填空题

11．在$(x^3-\frac{1}{x})^4$的展开式中，常数项为__________.

12．若点A $(\cos\ \theta,\sin\ \theta)$关于$y$轴对称点为$B$ $(\cos\ (\theta+\frac{\pi}{6}),\sin\ (\theta+\frac{\pi}{6}))$，写出$\theta$的一个取值为__________.

13．已知函数$f(x)=|\lg x|-kx-2$，给出下列四个结论：

①若$k=0$，$f(x)$恰 有2个零点；

②存在负数k，使得$f(x)$恰有个1零点；

③存在负数k，使得$f(x)$恰有个3零点；

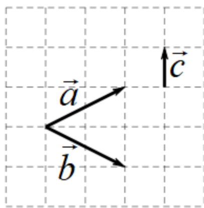
④存在正数k，使得$f(x)$恰有个3零点.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、双空题

14．已知抛物线$y^2=4x$的焦点为F，点M在抛物线上，MN垂直x轴与于点N.若$|MF|=6$，则点M的横坐标为__________；$\triangle MNF$的面积为__________.

15．已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$在正方形网格中的位置如图所示．若网格纸上小正方形的边长为1，则$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=$__________；$\vec{a}\cdot\vec{b}=$__________.



四、解答题

16．在$\triangle ABC$中，$c=2b\cos B$，$C=\frac{2\pi}{3}$.

（1）求$\angle B$；

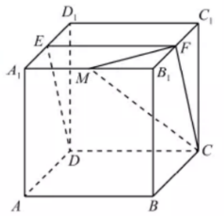
（2）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在且唯一确定，求BC边上中线的长.

条件①：$c=\sqrt{2}\,b$；

条件②：$\triangle ABC$的周长为$4+2\sqrt{3}$；

条件③：$\triangle ABC$的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$；

17．如图：在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为A_1D_1中点，B_1C_1与平面CDE交于点F.



（1）求证：F为B_1C_1的中点；

（2）点M是棱A_1B_1上一点，且二面角$M-FC-E$的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{3}$，求$\frac{A_1M}{A_1B_1}$的值.

18．在核酸检测中，"k合1"混采核酸检测是指：先将k个人的样本混合在一起进行1次检测,如果这k个人都没有感染新冠病毒，则检测结果为阴性，得到每人的检测结果都为阴性，检测结束:如果这k个人中有人感染新冠病毒，则检测结果为阳性，此时需对每人再进行1次检测,得到每人的检测结果，检测结束.

现对100人进行核酸检测，假设其中只有2人感染新冠病毒，并假设每次检测结果准确.

(I)将这100人随机分成10组，每组10人，且对每组都采用"10合1"混采核酸检测.

(i)如果感染新冠病毒的2人在同一组，求检测的总次数；

(ii)已知感染新冠病毒的2人分在同一组的概率为$\frac{1}{11}$.设X是检测的总次数，求X的

分布列与数学期望$E(X)$.

(II)将这100人随机分成20组，每组5人，且对每组都采用"5合1"混采核酸检测.设Y是检测的总次数，试判断数学期望$E(Y)$与(I)中$E(X)$的大小.(结论不要求证明)

19．已知函数$f(x)=\frac{3-2x}{x^2+a}$.

（1）若$a=0$，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（2）若$f(x)$在$x=-1$处取得极值，求$f(x)$的单调区间，以及其最大值与最小值.

20．已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$一个顶 点$A(0,-2)$，以椭圆$E$的四个顶点为顶点的四边形面积为$4\sqrt{5}$.

（1）求椭圆E的方程；

（2）过点$P(0,-3)$的直线l斜率为k的直线与椭圆E交于不同的两点B，C，直线AB，AC分别与直线交$y=-3$交于点$M,\ N$，当$|PM|+|PN|\leq 15$时，求k的取值范围.

21．设p为实数.若无穷数列$\{a_n\}$满足如下三个性质，则称$\{a_n\}$为R_p数列:

①$a_1+p\geq 0$，且$a_2+p=0$；

②$a_{4n-1}<a_{4n},(n=1,2,\cdots)$；

③$a_{m+n}\in\{a_m+a_n+p,a_m+a_n+p+1\}$，$(m,n=1,2,\cdots)$.

（1）如果数列$\{a_n\}$的前4项为$2,-2,-2,-1$，那么$\{a_n\}$是否可能为R_2数列？说明理由；

（2）若数列$\{a_n\}$是R_0数列，求a_5；

（3）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.是否存在R_p数列$\{a_n\}$，使得$S_n\geq S_{10}$恒成立？如果存在，求出所有的p；如果不存在，说明理由.