2021年全国新高考Ⅰ卷数学试题

一、单选题

1．设集合$A=\{x\,|-2<x<4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则$A\cap B=$（　）

A．$\{2\}$　　B．$\{2,3\}$　　C．$\{3,4\}$　　D．$\{2,3,4\}$

2．已知$z=2-i$，则$z\,(\bar{z}+i)=$（　）

A．$6-2i$　　B．$4-2i$　　C．$6+2i$　　D．$4+2i$

3．已知圆锥的底面半径为$\sqrt{2}$，其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的母线长为（　）

A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．4　　D．$4\sqrt{2}$

4．下列区间中，函数$f(x)=7\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$单调递增的区间是（　）

A．$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　　B．$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$　　C．$\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$　　D．$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

5．已知F_1，F_2是椭圆C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的两个焦点，点$M$在$C$上，则$|MF_1|\cdot|MF_2|$（　）

A．13　　B．12　　C．9　　D．6

6．若$\tan\theta=-2$，则$\frac{\sin\theta\,(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=$（　）

A．$-\frac{6}{5}$　　B．$-\frac{2}{5}$　　C．$\frac{2}{5}$　　D．$\frac{6}{5}$

7．若过点(a,b)可以作曲线$y=e^x$的两条切线，则（　）

A．$e^b<a$　　B．$e^a<b$　　C．$0<a<e^b$　　D．$0<b<e^a$

8．有6个相同的球，分别标有数字1，2，3，4，5，6，从中有放回的随机取两次，每次取1个球，甲表示事件“第一次取出的球的数字是1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是8”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是7”，则（　）

A．甲与丙相互独立　　B．甲与丁相互独立
C．乙与丙相互独立　　D．丙与丁相互独立

二、多选题

9．有一组样本数据x_1，x_2，…，x_n，由这组数据得到新样本数据y_1，y_2，…，y_n，其中$y_i=x_i+c$ $(i=1,2,\cdots,n)$, c为非零常数，则（　）

A．两组样本数据的样本平均数相同

B．两组样本数据的样本中位数相同

C．两组样本数据的样本标准差相同

D．两组样数据的样本极差相同

10．已知O为坐标原点，点$P_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$P_2(\cos\beta,-\sin\beta)$，$P_3(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$，$A(1,0)$，则（　）

A．$|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|$　　B．$|\overrightarrow{AP_1}|=|\overrightarrow{AP_2}|$
C．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$　　D．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}$

11．已知点P在圆$(x-5)^2+(y-5)^2=16$上，点$A\,(4,0)$、$B\,(0,2)$，则（　）

A．点P到直线$A\,B$的距离小于10

B．点P到直线$A\,B$的距离大于2

C．当$\angle P\,B\,A$最小时，$|P\,B|=3\sqrt{2}$

D．当$\angle P\,B\,A$最大时，$|P\,B|=3\sqrt{2}$

12．在正三棱柱$A\,B\,C-A_1\,B_1\,C_1$中，$A\,B=A\,A_1=1$，点P满足$\overrightarrow{B\,P}=\lambda\overrightarrow{B\,C}+\mu\overrightarrow{B\,B_1}$，其中$\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，则（　）

A．当$\lambda=1$时，$\triangle A\,B_1\,P$的周长为定值

B．当$\mu=1$时，三棱锥$P-A_1\,B\,C$的体积为定值

C．当$\lambda=\frac{1}{2}$时，有且仅有一个点P，使得$A_1\,P\perp B\,P$

D．当$\mu=\frac{1}{2}$时，有且仅有一个点P，使得$A_1\,B\perp$平面$A\,B_1\,P$

三、填空题

13．已知函数$f(x)=x^3\,(a\cdot 2^x-2^{-x})$是偶函数，则$a=$__________.

14．已知O为坐标原点，抛物线C：$y^2=2\,p\,x\ (p>0)$的焦点为F，P为C上一点，$P\,F$与x轴垂直，Q为x轴上一点，且$P\,Q\perp O\,P$，若$|F\,Q|=6$，则C的准线方程为__________.

15．函数$f(x)=|2\,x-1|-2\ln x$的最小值为__________.

四、双空题

16．某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折，规格为$20\mathrm{dm}\times12\mathrm{dm}$的长方形纸，对折$1$次共可以得到$10\mathrm{dm}\times12\mathrm{dm}$，$20\mathrm{dm}\times6\mathrm{dm}$两种规格的图形，它们的面积之和$S_1=240\mathrm{dm}^2$，对折$2$次共可以得到$5\mathrm{dm}\times12\mathrm{dm}$，$10\mathrm{dm}\times6\mathrm{dm}$，$20\mathrm{dm}\times3\mathrm{dm}$三种规格的图形，它们的面积之和$S_2=180\mathrm{dm}^2$，以此类推，则对折$4$次共可以得到不同规格图形的种数为__________；如果对折n次，那么$\sum_{k=1}^{n}S_k=$__________dm^2.

五、解答题

17．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}\mathrm{a_n}+1,\mathrm{n}\text{为奇数},\\ \mathrm{a_n}+2,\mathrm{n}\text{为偶数}.\end{cases}$

（1）记$b_n=a_{2n}$，写出b_1，b_2，并求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求$\{a_n\}$的前20项和.

18．某学校组织“一带一路”知识竞赛，有A，B两类问题，每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答，若回答错误则该同学比赛结束；若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，该同学比赛结束.A类问题中的每个问题回答正确得20分，否则得0分；B类问题中的每个问题回答正确得80分，否则得0分，已知小明能正确回答A类问题的概率为0.8，能正确回答B类问题的概率为0.6，且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

（1）若小明先回答A类问题，记X为小明的累计得分，求X的分布列；

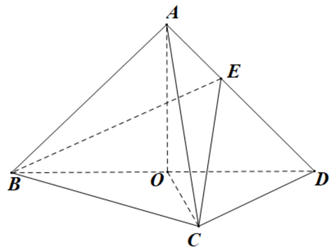
（2）为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由.

19．记$\triangle ABC$是内角A，B，C的对边分别为a， b， c．已知$b^2=ac$， 点D在边AC上，$BD\sin\angle ABC=a\sin C$.

（1）证明：$BD=b$；

（2）若$AD=2DC$，求$\cos\angle ABC$.

20．如图，在三棱锥$A-BCD$中，平面$ABD\perp$平面BCD，$AB=AD$，O为BD的中点.



（1）证明：$OA\perp CD$；

（2）若$\triangle OCD$是边长为1的等边三角形，点E在棱AD上，$DE=2EA$，且二面角$E-BC-D$的大小为$45°$，求三棱锥$A-BCD$的体积.

21．在平面直角坐标系xOy中，已知点$F_1(-\sqrt{17},0)$、$F_2(\sqrt{17},0)$，$|MF_1|-|MF_2|=2$，点M的轨迹为C.

（1）求C的方程；

（2）设点T在直线$x=\frac{1}{2}$上，过T的两条直线分别交C于A、B两点和P，Q两点，且$|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，求直线$AB$的斜率与直线$PQ$的斜率之和.

22．已知函数$f(x)=x(1-\ln x)$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）设a，b为两个不相等的正数，且$b\ln a-a\ln b=a-b$，证明：$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$.