

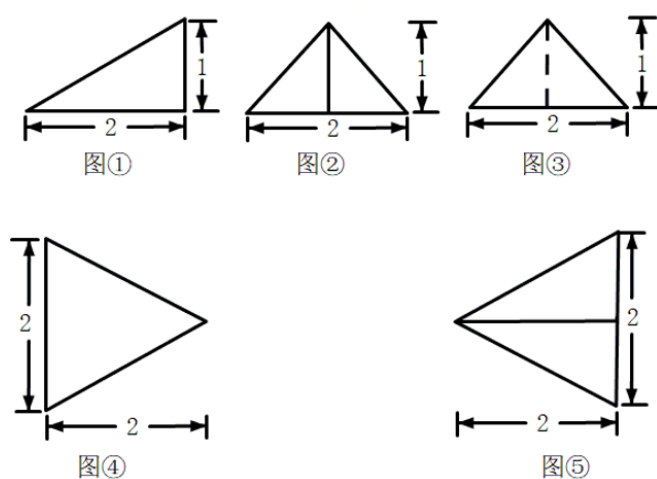
2021年全国高考乙卷数学（文）试卷

一、单选题

1. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $M = \{1, 2\}$, $N = \{3, 4\}$, 则 $C_U(M \cup N) =$ ____
A. $\{5\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{3, 4\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$
2. 设 $iz = 4 + 3i$, 则 $z =$ ____
A. $-3 - 4i$ B. $-3 + 4i$ C. $3 - 4i$ D. $3 + 4i$
3. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbb{R}, \sin x < 1$; 命题 $q: \forall x \in \mathbb{R}, e^{|x|} \geq 1$, 则下列命题中为真命题的是 ____
A. $p \wedge q$ B. $\neg p \wedge q$ C. $p \wedge \neg q$ D. $\neg(p \vee q)$
4. 函数 $f(x) = \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3}$ 的最小正周期和最大值分别是 ____
A. 3π 和 $\sqrt{2}$ B. 3π 和 2 C. 6π 和 $\sqrt{2}$ D. 6π 和 2
5. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \geq 4, \\ x - y \leq 2, \\ y \leq 3, \end{cases}$ 则 $z = 3x + y$ 的最小值为 ____
A. 18 B. 10 C. 6 D. 4
6. $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{5\pi}{12} =$ ____
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
7. 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 随机取 1 个数, 则取到的数小于 $\frac{1}{3}$ 的概率为 ____
A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$
8. 下列函数中最小值为 4 的是 ____
A. $y = x^2 + 2x + 4$ B. $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$
C. $y = 2^x + 2^{2-x}$ D. $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$
9. 设函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中为奇函数的是 ____.
A. $f(x-1) - 1$ B. $f(x-1) + 1$ C. $f(x+1) - 1$ D. $f(x+1) + 1$
10. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 B_1D_1 的中点, 则直线 PB 与 AD_1 所成的角为 ____
A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$
11. 设 B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 的上顶点, 点 P 在 C 上, 则 $|PB|$ 的最大值为 ____
A. $\frac{5}{2}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\sqrt{5}$ D. 2
12. 设 $a \neq 0$, 若 $x = a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 则 ____
A. $a < b$ B. $a > b$ C. $ab < a^2$ D. $ab > a^2$

二、填空题

13. 已知向量 $\vec{a} = (2, 5)$, $\vec{b} = (\lambda, 4)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.
14. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的右焦点到直线 $x + 2y - 8 = 0$ 的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 面积为 $\sqrt{3}$, $B = 60^\circ$, $a^2 + c^2 = 3ac$, 则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.
16. 以图①为正视图, 在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图, 组成某个三棱锥的三视图, 则所选侧视图和俯视图的编号依次为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (写出符合要求的一组答案即可).



三、解答题

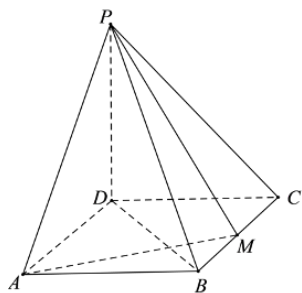
17. 某厂研制了一种生产高精产品的设备, 为检验新设备生产产品的某项指标有无提高, 用一台旧设备和一台新设备各生产了10件产品, 得到各件产品该项指标数据如下:

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为 \bar{x} 和 \bar{y} , 样本方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2 .

- (1) 求 $\bar{x}, \bar{y}, s_1^2, s_2^2$;
- (2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高 (如果 $\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}}$, 则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高, 否则不认为有显著提高).

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, M 为 BC 的中点, 且 $PB \perp AM$.



- (1) 证明: 平面PAM \perp 平面PBD;
- (2) 若PD = DC = 1, 求四棱锥P - ABCD的体积.
19. 设 $\{a_n\}$ 是首项为1的等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{n a_n}{3}$. 已知 $a_1, 3 a_2, 9 a_3$ 成等差数列.
- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 记 S_n 和 T_n 分别为 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 证明: $T_n < \frac{S_n}{2}$.
20. 已知抛物线 $C: y^2 = 2 p x (p > 0)$ 的焦点 F 到准线的距离为2.
- (1) 求 C 的方程;
- (2) 已知 O 为坐标原点, 点 P 在 C 上, 点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ} = 9\overrightarrow{QF}$, 求直线OQ斜率的最大值.
21. 已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 + a x + 1$.
- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 求曲线 $y = f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y = f(x)$ 的公共点的坐标.
22. 在直角坐标系 $x O y$ 中, $\odot C$ 的圆心为 $C(2, 1)$, 半径为1.
- (1) 写出 $\odot C$ 的一个参数方程;
- (2) 过点 $F(4, 1)$ 作 $\odot C$ 的两条切线, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求这两条切线的极坐标方程.
23. 已知函数 $\frac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{4} \times 2 \sin \alpha (\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha) = \frac{1}{4} \left[2 \sin \left(2 \alpha - \frac{\pi}{6} \right) + 1 \right]$.
- (1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 6$ 的解集;
- (2) 若 $f(x) > -\alpha$, 求 a 的取值范围.