2022年数学全国乙卷（理科）

一、单选题（本大题共12小题，共60分）

1. 设全集$U=\{1,2,3,4,5\}$，集合M满足$\complement_U M=\{1,3\}$，则

   A. $2\in M$　　B. $3\in M$　　C. $4\notin M$　　D. $5\notin M$

2. 已知$z=1-2i$，且$z+a\bar{z}+b=0$，其中a，b为实数，则

   A. $a=1$，$b=-2$　　B. $a=-1$，$b=2$
   C. $a=1$，$b=2$　　D. $a=-1$，$b=-2$

3. 已知向量a，b满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=3$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$

   A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

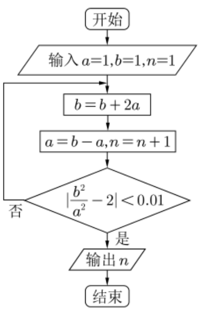
4. 嫦娥二号卫星在完成探月任务后，继续进行深空探测，成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造行星.为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值，用到数列$\{b_n\}$: $b_1=1+\frac{1}{\alpha_1}$，$b_2=1+\frac{1}{\alpha_1+\frac{1}{\alpha_2}}$，$b_3=1+\frac{1}{\alpha_1+\frac{1}{\alpha_2+\frac{1}{\alpha_3}}}$，$\cdots$，依此类推，其中$\alpha_k\in N^*(k=1,2,\cdots)$.则

   A. $b_1<b_5$　　B. $b_3<b_s$　　C. $b_6<b_2$　　D. $b_4<b_7$

5. 设F为抛物线C: $y^2=4x$的焦点，点A在C上，点$B(3,0)$，若$|AF|=|BF|$，则$|AB|=$

   A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. $3\sqrt{2}$

6. 执行右边的程序框图，输出的$n=$



   A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

7. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F分别为AB，BC的中点，则

   A. 平面$B_1EF\perp$平面BDD_1　　B. 平面$B_1EF\perp$平面A_1BD
   C. 平面$B_1EF//$平面A_1AC　　D. 平面$B_1EF//$平面A_1C_1D

8. 已知等比数列$\{a_n\}$的前3项和为168，$a_2-a_5=42$，则$a_6=$

   A. 14　　B. 12　　C. 6　　D. 3

9. 已知球O的半径为1，四棱锥的顶点为O，底面的四个顶点均在球O的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为

   A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘，各盘比赛结果相互独立. 已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为p_1，p_2，p_3，且$p_3>p_2>p_1>0$.记该棋手连胜两盘的概率为p，则

A. p与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序无关

B. 该棋手在第二盘与甲比赛，p最大

C. 该棋手在第二盘与乙比赛，p最大

D. 该棋手在第二盘与丙比赛，p最大

11. 对曲线C的两个焦点为F_1，F_2，以C的实轴为直径的圆记为D，过F_1作D的切线与C交于M，N两点，且$\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$，则$C$的离心率为

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$

12. 已知函数$f(x)$，$g(x)$的定义域均为R，且$f(x)+g(2-x)=5$，$g(x)-f(x-4)=7$，若$y=g(x)$的图像关于直线$x=2$对称，$g(2)=4$，则$\sum_{k=1}^{22}f(k)=$

A. -21　　B. -22　　C. -23　　D. -24

二、填空题（本大题共4小题，共20.0分）

13. 从甲、乙等5名同学中随机选3名参加社区服务工作，则甲、乙都入选的概率为__________.

14. 过四点$(0,0)$，$(4,0)$，$(-1,1)$，$(4,2)$中的三点的一个圆的方程为__________.

15. 记函数$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0, 0<\varphi<\pi)$的最小正周期为$T$，若$f(T)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\frac{\pi}{9}$为$f(x)$的零点，则$\omega$的最小值为__________.

16. 已知$x=x_1$和$x=x_2$分别是函数$f(x)=2a^x-ex^2(a>0$且$a\neq 1)$的极小值点和极大值点，若$x_1<x_2$，则a的取值范围是__________.

三、解答题（本大题共7小题，共80分）

（一）必考题：共 60 分.

17. 记ΔABC的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，已知$\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$.

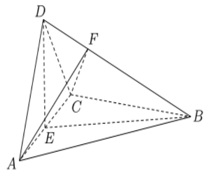
(1)证明：$2a^2=b^2+c^2$;

(2)若$a=5$，$\cos A=\frac{25}{31}$，求ΔABC的周长.

18. 如图，四面体$ABCD$中$AD\perp CD$，$AD=CD$，$\angle ADB=\angle BDC$，E为AC中点.

(1)证明：平面$BED\perp$平面ACD;

(2)设$AB=BD=2$，$\angle ACB=60°$，点F在BD上，当$\triangle AFC$的面积最小时，求CF与平面ABD所成角的正弦值.



19. 某地经过多年的环填治理， 已将就山改造成了绿水青山. 为估计一林区某种树木的总材积量，随机选取了10棵这种村木，测量每棵村的根部横截而积(心位：m^2)和材积量(m^3)，得到如下数据：

样本号i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得$\sum_{i=1}^{10}x_i^2=0.038$，$\sum_{i=1}^{10}y_i^2=1.6158$，$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=0.2474$.

(1)估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量:

(2)求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数(精确到0.01);

(3)现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积， 并得到所有这种树木的根部横截面积总和为$186m^2$.已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比.利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值.

附：相关系数$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，$\sqrt{1.896}\approx1.377$.

20. 已知椭圆E的中心为坐标原点，对称轴为x轴，y轴，且过$A(0,-2)$，$B(\frac{3}{2},-1)$ 两点.

(1)求E的方程;

(2)设过点$P(1,-2)$的直线交E于M，N两点，过M且平行于x的直线与线段AB交于点T，点H满足$\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$，证明：直线$HN$过定点.

21. 已知函数$f(x)=\ln(1+x)+axe^{-x}$.

(1)当$a=1$时，求曲线$f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程:

(2)若$f(x)$在区间$(-1,0)$，$(0,+\infty)$各恰有一个零点，求a的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分

22. 在直角坐标系xOy中，曲线C的方程为$\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos 2t \\ y=2\sin t \end{cases}$ (t为参数). 以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线l的极坐标方程为$\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{3})+m=0$.

(1)写出l的直角坐标方程:

(2)若l与C有公共点，求m的取值范围.

23. 已知$a.b.c$为正数，且$a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}=1$，证明:

(1) $abc\le\frac{1}{9}$;

(2)$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\le\frac{1}{2\sqrt{abc}}$.