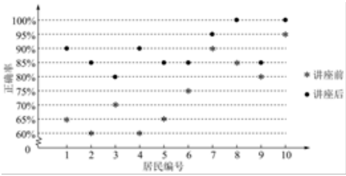
2022年数学全国甲卷（理科）

一、单选题（本大题共12小题，共60分）

1. 若$z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，则$\frac{z}{z\bar{z}-1}=$

   A. $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　B. $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$　　C. $-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$　　D. $-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$

2. 某社区通过公益讲座以普及社区居民的垃圾分类知识．为了解讲座效果，随机抽取10位社区居民，让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷，这10位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图：



   则

   A. 讲座前问卷答题的正确率的中位数小于70%

   B. 讲座后问卷答题的正确率的平均数大于85%

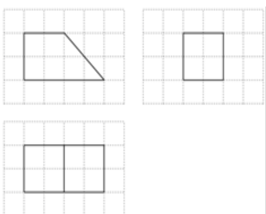
   C. 讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差

   D. 讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

3. 设全集$U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合$A=\{-1,2\},B=\{x|\,x^2-4x+3=0\}$，则$\complement_U(A\cup B)=$

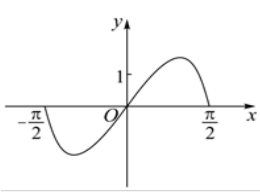
   A. $\{1,3\}$　　B. $\{0,3\}$　　C. $\{-2,1\}$　　D. $\{-2,0\}$

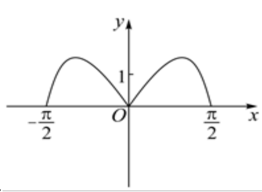
4. 如图，网格纸上绘制的是一个多面体的三视图，网格小正方形的边长为1，则该多面体的体积为

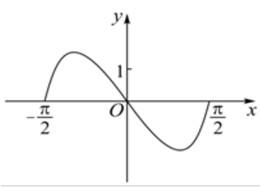


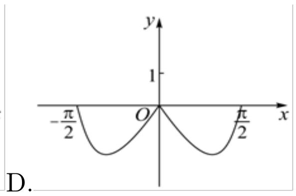
   A. 8　　B. 12　　C. 16　　D. 20

5. 函数$y=(3^x-3^{-x})\cos x$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的图象大致为

A. 

B. 

C. 

D. 

6. 当$x=1$时，函数$f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}$取得最大值-2，则$f'(2)=$

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

7. 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知B_1D与平面$ABCD$和平面AA_1B_1B所成的角均为$30°$，则

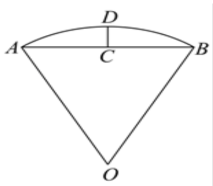
A. $AB=2AD$

B. AB与平面AB_1C_1D所成的角为$30°$

C. $AC=CB_1$

D. B_1D与平面BB_1C_1C所成的角为$45°$

8. 沈括的《梦溪笔谈》是中国古代科技史上的杰作，其中收录了计算圆弧长度的‘‘会圆术”，如图，$\overset{\frown}{AB}$是以O为圆心，OA为半径的圆弧，C是的AB中点，D在$\overset{\frown}{AB}$上，‘‘会圆术”给出$\overset{\frown}{AB}$的弧长的近似值s的计算公式：$s=AB+\frac{CD^2}{OA}$.当$OA=2,\angle AOB=60°$时，$s=$



A. $\frac{11-3\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{11-4\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{9-4\sqrt{3}}{2}$

9. 甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为2π，侧面积分别为$S_{甲}$和$S_{乙}$，体积分别为$V_{甲}$和$V_{乙}$.若$\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=2$，则$\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=$

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{10}$　　D. $\frac{5\sqrt{10}}{4}$

10. 椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的左顶点为$A$，点$P$，$Q$均在$C$上，且关于$y$轴对称．若直线$AP,AQ$的斜率之积为$\frac{1}{4}$，则$C$的离心率为

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

11. 设函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$在区间$(0,\pi)$恰有三个极值点、两个零点，则$\omega$的取值范围是

A. $\left[\frac{5}{3},\frac{13}{6}\right)$　　B. $\left[\frac{5}{3},\frac{19}{6}\right)$　　C. $\left(\frac{13}{6},\frac{8}{3}\right]$　　D. $\left(\frac{13}{6},\frac{19}{6}\right]$

12. 已知$a=\frac{31}{32},b=\cos\frac{1}{4},c=4\sin\frac{1}{4}$，则

A. $c>b>a$　　B. $b>a>c$　　C. $a>b>c$　　D. $a>c>b$

二、填空题（本大题共4小题，共20分）

13. 设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角的余弦值为$\frac{1}{3}$，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{a}|=3$，则$\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=$__________.

14. 若双曲线$y^2-\frac{x^2}{m^2}=1\,(m>0)$的渐近线与圆$x^2+y^2-4\,y+3=0$相切，则$m=$__________.

15. 从正方体的8个顶点中任选4个，则这4个点在同一个平面的概率为 __________.

16. 已知$\triangle ABC$中，点D在边BC上，$\angle ADB=120°, AD=2, CD=2\,BD$.当$\frac{AC}{AB}$取得最小值时，$BD=$__________.

三、解答题（本大题共7小题，共80分）

（一） 必考题：共 60 分.

17. 记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和．已知$\frac{2\,S_n}{n}+n=2\,a_n+1$.

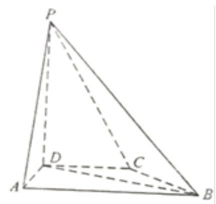
(1)证明：$\{a_n\}$是等差数列；

(2)若a_4, a_7, a_9成等比数列，求S_n的最小值.

18. 在四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$底面$ABCD, CD//AB, AD=DC=CB=1, AB=2, DP=\sqrt{3}$.

(1)证明：$BD\perp PA$;

(2)求PD与平面PAB所成的角的正弦值.



19. 甲、乙两个学校进行体育比赛，比赛共设三个项目，每个项目胜方得10分，负方得0分，没有平局．三个项目比赛结束后，总得分高的学校获得冠军．已知甲学校在三个项目中获胜的概率分别为5，0.4，0.8，各项目的比赛结果相互独立.

(1)求甲学校获得冠军的概率；

(2)用X表示乙学校的总得分，求X的分布列与期望.

20. 设抛物线$C: y^2 = 2px\,(p > 0)$的焦点为F，点$D(p, 0)$，过F的直线交C于M，N两点．当直线MD垂直于x轴时，$|MF| = 3$.

(1)求C的方程；

(2)设直线MD, ND与C的另一个交点分别为A，B，记直线MN, AB的倾斜角分别为α, β. 当$\alpha - \beta$取得最大值时，求直线AB的方程.

21. 已知函数$f(x) = \frac{e^x}{x} - \ln x + x - a$.

(1)若$f(x) \geq 0$，求a的取值范围；

(2)证明：若$f(x)$有两个零点x_1, x_2，则$x_1 x_2 < 1$.

(二) 选考题：共 10 分

22. 在直角坐标系xOy中，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases} x = \frac{2+t}{6} \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$ (t为参数)，曲线C_2的参数方程为$\begin{cases} x = -\frac{2+s}{6} \\ y = -\sqrt{s} \end{cases}$ (s为参数).

(1)写出C_1的普通方程；

(2)以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C_3的极坐标方程为$2\cos\theta-\sin\theta=0$，求C_3与C_1交点的直角坐标，及C_3与C_2交点的直角坐标.

23. 已知a，b，c均为正数，且$a^2+b^2+4c^2=3$，证明：

(1)$a+b+2c\leq3$；

(2)若$b=2c$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\geq3$.