

# Constructive Approximation

李信操

24212792

2025-11-19

# 目录

<b>第一章 Properties of polynomials</b>	<b>2</b>
1.1 Divided difference . . . . .	2
<b>第二章 Splines</b>	<b>4</b>
2.1 Definition and Simple properties . . . . .	4
2.2 B-样条 . . . . .	6
2.3 B-Spline Series . . . . .	8

# 第一章 Properties of polynomials

## 1.1 Divided difference

对于一个函数  $f$  和点列  $X : x_0, \dots, x_n$  (不要求按  $\leq$  排序), 我们定义  $f$  的  $n$  阶差商为

$$[x_0, \dots, x_n]f := A_n$$

其中  $A_n$  是插值多项式  $P_n(f, X; x)$  的最高次项  $x^n$  的系数。

**n-阶差商满足的性质:**

1. 若  $f$  高阶可微, 则  $[x_0, \dots, x_n]f$  是  $f^{(k)}(x_i)$ , ( $0 \leq k \leq m_i - 1$ ) 的线性组合, 其中  $m_i$  是  $x_i$  的重数;
2.  $[x_0, \dots, x_n]f$  是一个常数, 若  $f$  是一个多项式, 更进一步, 若多项式的次数  $< n$ , 则  $n$ -阶差商是 0;
3.  $[x_0, \dots, x_0]f = f^{(n)}(x_0)/n!$ .
4. 牛顿型插值公式:

$$P_n(f, X; x) = \sum_{k=0}^n (x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) [x_0, \dots, x_k]f;$$

5. 若  $f \in C^n[a, b]$ , 根据 Rolle 定理

$$[x_0, \dots, x_n]f = f^{(n)}(\xi)/n! \quad \text{for some } a \leq \xi \leq b;$$

6. 若  $x_i$  互异, 则

$$\begin{aligned} [x_0, \dots, x_n]f &= \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\Omega'(x_k)} \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

7.

$$\Delta_h^n f(x) = n! h^n [x, x + h, \dots, x + nh]f;$$

8.

$$[x_0, \dots, x_n](gh) = \sum_{k=0}^n ([x_0, \dots, x_k](g)) ([x_k, \dots, x_n](h))$$

9.

$$[x_0, \dots, x_n]f = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(x_0 + (x_1 - x_0)t_1 + \cdots + (x_n - x_{n-1})t_n) dt_n$$

**Peano 核** 设  $\lambda(f) := \int_a^b f d\mu$  是  $C[a, b]$  上的连续线性泛函，并且与所有次数  $\leq n - 1$  的多项式正交，即  $\lambda(P_{n-1}) = 0$ ，则对任意  $f \in C^n[a, b]$ ，有

$$\lambda(f) = \int_a^b f^{(n)}(t) \lambda \left[ \frac{(\cdot - t)_+^{n-1}}{(n-1)!} \right] dt$$

我们把由与多项式正交的泛函诱导出来的表达式

$$\lambda(f) = \int_a^b f^{(n)}(t) K(t) dt$$

中的  $K$  称做 Peano 核.

当  $x_0, \dots, x_n$  互不相同时，差商运算作为一个泛函是连续的，因此可以诱导 Peano 核：

$$[x_0, \dots, x_n]f = \int_a^b f^{(n)}(t) [x_0, \dots, x_n] \left[ \frac{(\cdot - t)_+^{n-1}}{(n-1)!} dt \right]. \quad (1.1.2)$$

## 第二章 Splines

### 2.1 Definition and Simple properties

**样条定义** 令  $T^* := (t_i^*)_1^s$  或  $T^* := (t_i^*)_{-\infty}^\infty$  是  $\mathbb{R}$  上严格递增的有限序列或双无穷序列，在第二种情况下，假定  $|t_i^*| \rightarrow \infty, i \rightarrow \infty$ . 若在每个区间  $(t_i^*, t_{i+1}^*)$  上，函数  $S$  是一个次数  $\leq m = r - 1$  的多项式，且至少有一个区间上次数恰为  $m$ ，则称  $S$  是  $r$  阶且断点为  $T^*$  的样条.

**样条在断点处光滑度** 样条在断点  $t_i^*$  处的光滑度  $m_i$  定义如下：

- 若  $S$  在  $t_i^*$  处不连续，则令  $m_i = 0$ ；
- 否则， $m_i$  是满足  $0 < m_i \leq r$  的最大整数，使得  $S$  在  $t_i^*$  的某个邻域内属于  $C^{(m_i-1)}$ ，也就是说  $S$  的各阶导数直到  $m_i - 1$  阶都连续.

**样条空间** 给定区间  $A = [a, b]$  或  $A = \mathbb{R}$ ，以及断点序列  $T^*$ ，可以在  $A$  上构造样条空间. 记  $S_r^*(A)$  表示  $A$  上所有阶数  $\leq r$  的样条构成的空间； $S_r^*(T^*, A)$  表示  $A$  上所有阶数  $\leq r$  且断点都包含在  $T^*$  中都样条构成的空间.

**Schoenberg 空间** 给定断点集  $T^*$  和一系列  $m_i (0 \leq m_i < r)$ ，我们定义  $A$  上的 Schoenberg 空间：他由所有阶数  $\leq r$ 、断点包含在  $T^*$  中，并且  $t_i^*$  处的光滑度至少为  $m_i$  的样条  $S$  组成. 不过，通常不是直接使用  $m_i$ ，而是使用所谓的亏格 (defect)

$$k_i := r - m_i,$$

因为  $k_i$  更好的描述了  $S$  在  $t_i^*$  处自由度的个数. 这个 Schoenberg 空间记作

$$S_r := S_r(R^*, \mathbf{k}, A), \quad \mathbf{k} := (k_i).$$

Schoenberg 空间有如下性质

1.  $S_r(T^*, \mathbf{1}, A)$  是任意其他 Schoenberg 空间  $S_r(T^*, \mathbf{k}, A)$  的子空间；

2. 若  $S \in S_r(T^*, \mathbf{k}, A)$ , 则其任意原函数  $S_1 \in S_{r+1}(T^*, \mathbf{k}, A)$ , 其中亏格  $\mathbf{k}$  相同;
3.  $S_r(T^*, \mathbf{k}, A)$  总包含所有次数  $\leq r-1$  的多项式  $P_{r-1}$ , 另一方面, 他又是  $S_r(T^*, \mathbf{r}, A)$  的子空间 (即没有任何光滑性要求, 只是分段多项式) .

**样条空间的基** 在情形  $A = [a, b]$  下, 可以借助截断幂构造  $Y = S_r(T^*, \mathbf{k}, A)$  的一个自然基. 通常可以按以下方式找到一组基. 设  $\dim(Y) = N$ , 我们在  $Y$  中找到元素  $S_1, \dots, S_N$  以及线性泛函  $a_1, \dots, a_N$ , 满足

1.

$$a_j(S_i) = 0, \quad i \neq j; \quad a_j(S_j) = 1,$$

2.

$$a_j(S) = 0, \quad j = 1, \dots, N \Rightarrow S = 0,$$

在这种情形下有

$$S = \sum_{j=1}^N a_j(S) S_j, \tag{2.1.1}$$

其中  $a_j$  称为  $S_j$  的对偶泛函.

**定理 2.1.1** (样条空间的基). 若区间  $A = [a, b]$  有限, 则空间  $S_r(T^*, \mathbf{k}, I)$  具有如下基

$$S_{-j}(x) := \frac{(x-a)^j}{j!}, \quad j = 0, \dots, r-1, \tag{2.1.2}$$

$$S_{i,j}(x) := \frac{(x-t_i^*)_+^j}{j!}, \quad j = r-k_i, \dots, r-1, \quad i = 1, \dots, s, \tag{2.1.3}$$

其对应的对偶泛函为

$$a_{-j}(S) := S^{(j)}(a), \quad j = 0, \dots, r-1, \tag{2.1.4}$$

$$a_{i,j}(S) := S^{(j)}(t_i^{*+}) - S^{(j)}(t_i^{*-}), \quad j = r-k_i, \dots, r-1, \quad i = 1, \dots, s. \tag{2.1.5}$$

特别地, 有

$$\dim S_r(T^*, \mathbf{k}, A) = n + r, \quad n := \sum_{i=1}^r k_i. \tag{1.5}$$

证明. 令  $S \in S_r(T^*, \mathbf{k}, I)$ . 若对所有  $i = 1, \dots, s$  以及  $j = r-k_i, \dots, r-1$  都有  $a_{i,j}(S) = 0$ , 则

$$S, \dots, S^{(r-1)}$$

在每个  $t_i^*$  处连续, 因此  $S^{(r-1)}$  为常数. 于是  $S^{(r)} \equiv 0$ , 从而  $S$  在  $A$  上必为次数  $< r$  的多项式. 若再对  $j = 0, \dots, r-1$  都有  $a_{-j}(S) = 0$ , 则该多项式所有阶导数在  $a$  处均为零, 只能是零函数, 即  $S \equiv 0$ . 其余部分显然成立.  $\square$

注:  $k_i$  表示每个节点处的自由度, 对于多项式空间来说, 基的个数谁  $r$ , 样条空间每个节点  $k_i$  个自由度, 也就是  $k_i$  个基.

根据定理2.1.1,  $S \in S_r$ , 可以被写成

$$S(x) = P_{r-1}(x) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{k_i} c_{i,j} (x - t_i^*)_+^{r-j}$$

**样条基本不等式** 样条满足一些与多项式类似的基本不等式. 这里我们只给出 Nikol'skii 与 Markov 不等式在 Schoenberg 空间

$$S_r(T^*, \mathbf{k}, A), \quad A = [a, b],$$

中的变形, 其中断点集合为

$$T^* := \{t_j^*\}_{j=1}^s.$$

我们约定

$$t_0^* := a, \quad t_{s+1}^* := b.$$

**定理 2.1.2.** 若断点  $T^*$  满足

$$\delta_0 \leq |t_{j+1}^* - t_j^*| \leq \delta, \quad j = 0, \dots, s, \quad (2.1.6)$$

则对任意

$$S \in S_r(T^*, \mathbf{k}, A), \quad A = [a, b],$$

有

$$\|S\|_p \leq C \delta^{1/q-1/p} \|S\|_q, \quad p_0 \leq q \leq p \leq \infty, \quad (2.1.7)$$

其中常数  $C = C(p_0, r)$ ; 并且当  $k = 1, \dots, r-1$  时, 还有

$$\|S^{(k)}\|_p \leq C \delta_0^{-k} \|S\|_p, \quad 0 < p \leq \infty, \quad (2.1.8)$$

这里的常数  $C = C(r)$ .

## 2.2 B-样条

定理2.1.1中, 把样条表示成若干截断幂级数之和, 从一般观点看其实并不好用, 因为截断幂级数的支撑集很大. 因此需要引入另一组基, 这就是 B-样条 (Basic splines).

**B-样条定义** 我们记  $[x_0, \dots, x_n]f$  表示  $f$  在这些点的  $n$  阶差商，我们定义 B-样条为

$$M(x) := M(x; x_0, \dots, x_r) := r[x_0, \dots, x_r](\cdot - x)_+^{r-1}$$

其中的点  $\{x_0, \dots, x_r\}$  称为  $M$  的结点.

根据式(1.1.2)可知，对任意  $f \in W_1^r$ ,

$$[x_0, \dots, x_r]f = \frac{1}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t) M(t) dt.$$

令  $f(t) = t^r$ , 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} M(t) dt = 1.$$

当  $r = 1$  时,

$$M(x; x_0, x_1) = \frac{1}{x_1 - x_0} \mathcal{X}_{(x_0, x_1)}(x), \quad x \neq x_0, x_1.$$

### B-样条性质

1.  $M(x) > 0, \quad x \in (x_0, x_r); \quad M(x) = 0, \quad x \notin [x_0, x_r]$
2.  $\begin{cases} M(x) \sim (x - x_0)^{r-k_0}, & x \rightarrow x_0^+; \\ M(x) \sim (x - x_r)^{r-k_r}, & x \rightarrow x_r^- \end{cases}$  (其中  $k_0, k_r$  是  $x_0, x_r$  的重数.)
3.  $M(x) \leq C_r / (x_r - x_0), \quad x \in \mathbb{R},$
4. 递推公式:

$$M(x; x_0, \dots, x_r) = \frac{r}{r-1} \left[ \frac{x - x_0}{x_r - x_0} M(x; x_0, \dots, x_{r-1}) + \frac{x_r - x}{x_r - x_0} M(x; x_1, \dots, x_r) \right]$$

注: 递推公式 4 可以由对  $(\cdot - x)_+^{r-1} = (\cdot - x)(\cdot - x)_+^{r-2}$  两侧使用差分的莱布尼茨公式得到.

我们得到一个  $M$  的变体, 使得其具有更简单的递推公式, 并且, 其导数也是容易计算的:

$$N(x; x_0, \dots, x_r) := \frac{1}{r}(x_r - x_0)M(x; x_0, \dots, x_r) = (x_r - x_0)[x_0, \dots, x_r](\cdot - x)_+^{r-1}. \quad (2.2.1)$$

则有

$$\begin{aligned} N(x; x_0, \dots, x_r) &= \frac{x - x_0}{x_{r-1} - x_0} N(x; x_0, \dots, x_{r-1}) + \frac{x_r - x}{x_r - x_1} N(x; x_1, \dots, x_r), \\ N'(x; x_0, \dots, x_r) &= -(r-1) \left( [x_1, \dots, x_r] - [x_0, \dots, x_{r-1}] \right) (\cdot - x)_+^{r-2} \\ &= (r-1) \left( \frac{N(x; x_0, \dots, x_{r-1})}{x_{r-1} - x_0} - \frac{N(x; x_1, \dots, x_r)}{x_r - x_1} \right) \end{aligned}$$

根据(1.1.1), 差分运算实际上是关于  $f(x_k)$  的线性组合. 因此差分运算与求导运算可以交换顺序! 除此之外  $(t - x)_+^{r-1}$  对于  $x = t$  点是  $r-2$  阶连续可微的.

**整数节点 B-样条** 特别重要的一种  $B-$  样条是整数节点的 B-样条. 此时  $M_1(x) = \mathcal{X}_I(x)$ , 其中  $I = [0, 1]$ , 并且  $N_r = M_r := M(x; 0, \dots, r)$  可以通过卷积得到:

$$M_r = M_{r-1} * \mathcal{X}_I = \mathcal{X}_I * \cdots * \mathcal{X}_I,$$

并且

$$M'_r(x) = N'_r(x) = N_r(x) - N_r(x-1).$$

### 样条函数随节点的变化

**引理 2.2.1.** 假设向量  $(y_0, \dots, y_r)$  在  $\mathbb{R}^{r+1}$  中收敛到  $(x_0, \dots, x_r)$ , 并且  $A \subset \mathbb{R}$  是紧集. 则有:

- (i) 若  $x_0, \dots, x_r$  都是实数点, 且其中属于集合  $A$  的点中, 任意时刻至多有  $r-1$  个两两重合, 则

$$M(x; y_0, \dots, y_r) \xrightarrow[y \rightarrow x]{} M(x; x_0, \dots, x_r)$$

在  $x \in A$  上一致收敛. 函数  $N(x; y_0, \dots, y_r)$  也有同样的结论.

- (ii) 若  $0 < q < \infty$ , 则

$$N(x; y_0, \dots, y_r) \xrightarrow[y \rightarrow x]{} N(x; x_0, \dots, x_r)$$

在空间  $L_q(A)$  的度量下收敛.

## 2.3 B-Spline Series

Schoenberg 空间  $S_r(T^*, \mathbf{k}, A)$  在定理2.1.1给出的基中相当简单, 也能给出系数的简单公式. 然而, 这种基有一些明显的缺点: 计算样条  $S$  的系数时, 需要知道  $S$  在所有断点  $t_i^*$  处的值. 对于大多数逼近或插值问题来说, 一个局部的基更实用-B-样条基. 他只需要利用  $S$  在靠近  $x$  的  $r+1$  个点上的数据, 就可以计算  $S(x)$ .

我们调整记号  $S_r(T^*, \mathbf{k}, A)$ , 其中  $\mathbf{k}$  表示断点  $t_i^*$  的重数, 得到一个单调不减的序列

$$T = (t_i),$$

我们称  $T$  为 Schoenberg 空间的基点序列., 并把该空间记为

$$S_r := S_r(T, A).$$

当  $A = \mathbb{R}$  时, 若  $|i| \rightarrow \infty$ , 则  $|t_i| \rightarrow \infty$ . 在所有情况下 (因为  $k_i \leq r$ ), 都有

$$t_i < t_{i+r}, \quad \forall i.$$

若  $A = [a, b]$ , 我们还需要辅助结点

$$t_{-r+1} \leq \dots \leq t_0 \leq a, \quad t_{n+r} \geq \dots \geq t_{n+1} \geq b.$$

满足  $k_i = 1$  的结点为简单节点.

按第一节的定义, 空间  $S_r(T, A)$  由所有阶数  $\leq r$  的样条  $S$  组成, 这些样条在每个重数为  $k_i$  的基本结点处, 都具有阶数  $< r - k_i$  的连续导数. 基本结点完全决定了空间  $S_r(T, A)$ ; 辅助结点只是在构造 B-样条基时需要.

### $S_r$ 的基

**定理 2.3.1.**  $N_j(x) := N_{j,r}(x) := N(x; t_j, \dots, t_{j+r})$ , ( $j \in \Lambda$ ) 是  $S_r(T, A)$  的一组基, 其中

$$\Lambda := \begin{cases} \{-r + 1, \dots, n\}, & A = [a, b]; \\ \mathbb{Z}, & A = \mathbb{R}. \end{cases}$$

$N_j(x)$  定义见(2.2.1).

此外, 对任意  $S \in S_r(T, A)$ , 可以被唯一写成

$$S(x) = \sum_{j \in \Lambda} c_j(S) N_j(x),$$

其中,

$$g_{j,r}(x) = \begin{cases} 1, & r = 1, \\ \frac{1}{(r-1)!} \prod_{\ell=1}^{r-1} (x - t_{j+\ell}), & r \geq 2, \end{cases}$$

并约定  $g_j := g_{j,r}$ .

$$c_j(S) := \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu g_j^{(r-\nu-1)}(\xi_j) S^{(\nu)}(\xi_j), \quad S \in S_r(T, A),$$

其中  $\xi_j \in (t_j, t_{j+r}) \cap A$ .