

Constructive Approximation

李佶操

24212792

2025-11-19

目录

第一章	Propperties of polynomials	2
1.1	Divided difference	2
第二章	Splines	4
2.1	Definition and Simple properties	4
2.2	B-样条	6
2.3	B-Spline Series	8

第一章 Properties of polynomials

1.1 Divided difference

对于一个函数 f 和点列 $X: x_0, \dots, x_n$ (不要求按 \leq 排序), 我们定义 f 的 n 阶差商为

$$[x_0, \dots, x_n]f := A_n$$

其中 A_n 是插值多项式 $P_n(f, X; x)$ 的最高次项 x^n 的系数。

n-阶差商满足的性质:

1. 若 f 高阶可微, 则 $[x_0, \dots, x_n]f$ 是 $f^{(k)}(x_i), (0 \leq k \leq m_i - 1)$ 的线性组合, 其中 m_i 是 x_i 的重数;
2. $[x_0, \dots, x_n]f$ 是一个常数, 若 f 是一个多项式, 更进一步, 若多项式的次数 $< n$, 则 n -阶差商是 0;
3. $[x_0, \dots, x_0]f = f^{(n)}(x_0)/n!$.
4. 牛顿型插值公式:

$$P_n(f, X; x) = \sum_{k=0}^n (x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) [x_0, \dots, x_k]f;$$

5. 若 $f \in C^n[a, b]$, 根据 Rolle 定理

$$[x_0, \dots, x_n]f = f^{(n)}(\xi)/n! \text{ for some } a \leq \xi \leq b;$$

6. 若 x_i 互异, 则

$$\begin{aligned} [x_0, \dots, x_n]f &= \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\Omega'(x_k)} \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

- 7.

$$\Delta_h^n f(x) = n! h^n [x, x+h, \dots, x+nh]f;$$

8.

$$[x_0, \dots, x_n](gh) = \sum_{k=0}^n ([x_0, \dots, x_k](g)) ([x_k, \dots, x_n](h))$$

9.

$$[x_0, \dots, x_n]f = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(x_0 + (x_1 - x_0)t_1 + \cdots + (x_n - x_{n-1})t_n) dt_n$$

Peano 核 设 $\lambda(f) := \int_a^b f d\mu$ 是 $C[a, b]$ 上的连续线性泛函, 并且与所有次数 $\leq n-1$ 的多项式正交, 即 $\lambda(P_{n-1}) = 0$, 则对任意 $f \in C^n[a, b]$, 有

$$\lambda(f) = \int_a^b f^{(n)}(t) \lambda \left[\frac{(\cdot - t)_+^{n-1}}{(n-1)!} \right] dt$$

我们把由与多项式正交的泛函诱导出来的表达式

$$\lambda(f) = \int_a^b f^{(n)}(t) K(t) dt$$

中的 K 称做 Peano 核.

当 x_0, \dots, x_n 互不相同时, 差商运算作为一个泛函是连续的, 因此可以诱导 Peano 核:

$$[x_0, \dots, x_n]f = \int_a^b f^{(n)}(t) [x_0, \dots, x_n] \left[\frac{(\cdot - t)_+^{n-1}}{(n-1)!} dt \right]. \quad (1.1.2)$$

第二章 Splines

2.1 Definition and Simple properties

样条定义 令 $T^* := (t_i^*)_1^s$ 或 $T^* := (t_i^*)_{-\infty}^\infty$ 是 \mathbb{R} 上严格递增的有限序列或双无穷序列, 在第二种情况下, 假定 $|t_i^*| \rightarrow \infty, i \rightarrow \infty$. 若在每个区间 (t_i^*, t_{i+1}^*) 上, 函数 S 是一个次数 $\leq m = r - 1$ 的多项式, 且至少有一个区间上次数恰为 m , 则称 S 是 r 阶且断点为 T^* 的样条.

样条在断点处光滑度 样条在断点 t_i^* 处的光滑度 m_i 定义如下:

- 若 S 在 t_i^* 处不连续, 则令 $m_i = 0$;
- 否则, m_i 是满足 $0 < m_i \leq r$ 的最大整数, 使得 S 在 t_i^* 的某个邻域内属于 $C^{(m_i-1)}$, 也就是说 S 的各阶导数直到 $m_i - 1$ 阶都连续.

样条空间 给定区间 $A = [a, b]$ 或 $A = \mathbb{R}$, 以及断点序列 T^* , 可以在 A 上构造样条空间. 记: $S_r^*(A)$ 表示 A 上所有阶数 $\leq r$ 的样条构成的空间; $S_r^*(T^*, A)$ 表示 A 上所有阶数 $\leq r$ 且断点都包含在 T^* 中都样条构成的空间.

Schoenberg 空间 给定断点集 T^* 和一系列 $m_i (0 \leq m_i < r)$, 我们定义 A 上的 Schoenberg 空间: 他由所有阶数 $\leq r$ 、断点包含在 T^* 中, 并且 t_i^* 处的光滑度至少为 m_i 的样条 S 组成. 不过, 通常不是直接使用 m_i , 而是使用所谓的亏格 (defect)

$$k_i := r - m_i,$$

因为 k_i 更好的描述了 S 在 t_i^* 处自由度的个数. 这个 Schoenberg 空间记作

$$S_r := S_r(R^*, \mathbf{k}, A), \quad \mathbf{k} := (k_i).$$

Schoenberg 空间有如下性质

1. $S_r(T^*, \mathbf{1}, A)$ 是任意其他 Schoenberg 空间 $S_r(T^*, \mathbf{k}, A)$ 的子空间;

2. 若 $S \in S_r(T^*, \mathbf{k}, A)$, 则其任意原函数 $S_1 \in S_{r+1}(T^*, \mathbf{k}, A)$, 其中亏格 \mathbf{k} 相同;
3. $S_r(T^*, \mathbf{k}, A)$ 总包含所有次数 $\leq r-1$ 的多项式 P_{r-1} , 另一方面, 他又是 $S_r(T^*, \mathbf{r}, A)$ 的子空间 (即没有任何光滑性要求, 只是分段多项式) .

样条空间的基 在情形 $A = [a, b]$ 下, 可以借助截断幂构造 $Y = S_r(T^*, \mathbf{k}, A)$ 的一个自然基. 通常可以按以下方式找到一组基. 设 $\dim(Y) = N$, 我们在 Y 中找到元素 S_1, \dots, S_N 以及线性泛函 a_1, \dots, a_N , 满足

1.

$$a_j(S_i) = 0, \quad i \neq j; \quad a_j(S_j) = 1,$$

2.

$$a_j(S) = 0, \quad j = 1, \dots, N \Rightarrow S = 0,$$

在这种情形下有

$$S = \sum_{j=1}^N a_j(S) S_j, \quad (2.1.1)$$

其中 a_j 称为 S_j 的对偶泛函.

定理 2.1.1 (样条空间的基). 若区间 $A = [a, b]$ 有限, 则空间 $S_r(T^*, \mathbf{k}, I)$ 具有如下基

$$S_{-j}(x) := \frac{(x-a)^j}{j!}, \quad j = 0, \dots, r-1, \quad (2.1.2)$$

$$S_{i,j}(x) := \frac{(x-t_i^*)^j_+}{j!}, \quad j = r-k_i, \dots, r-1, \quad i = 1, \dots, s, \quad (2.1.3)$$

其对应的对偶泛函为

$$a_{-j}(S) := S^{(j)}(a), \quad j = 0, \dots, r-1, \quad (2.1.4)$$

$$a_{i,j}(S) := S^{(j)}(t_i^{*+}) - S^{(j)}(t_i^{*-}), \quad j = r-k_i, \dots, r-1, \quad i = 1, \dots, s. \quad (2.1.5)$$

特别地, 有

$$\dim S_r(T^*, \mathbf{k}, A) = n + r, \quad n := \sum_{i=1}^r k_i. \quad (1.5)$$

证明. 令 $S \in S_r(T^*, \mathbf{k}, I)$. 若对所有 $i = 1, \dots, S$ 以及 $j = r-k_i, \dots, r-1$ 都有 $a_{i,j}(S) = 0$, 则

$$S, \dots, S^{(r-1)}$$

在每个 t_i^* 处连续, 因此 $S^{(r-1)}$ 为常数. 于是 $S^{(r)} \equiv 0$, 从而 S 在 A 上必为次数 $< r$ 的多项式. 若再对 $j = 0, \dots, r-1$ 都有 $a_{-j}(S) = 0$, 则该多项式所有阶导数在 a 处均为零, 只能是零函数, 即 $S \equiv 0$. 其余部分显然成立. \square

注: k_i 表示每个节点处的自由度, 对于多项式空间来说, 基的个数是 r , 样条空间每个节点 k_i 个自由度, 也就是 k_i 个基.

根据定理2.1.1, $S \in S_r$, 可以被写成

$$S(x) = P_{r-1}(x) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{k_i} c_{i,j} (x - t_i^*)_+^{r-j}$$

样条基本不等式 样条满足一些与多项式类似的基本不等式. 这里我们只给出 Nikol'skii 与 Markov 不等式在 Schoenberg 空间

$$S_r(T^*, \mathbf{k}, A), \quad A = [a, b],$$

中的变形, 其中断点集合为

$$T^* := \{t_j^*\}_{j=1}^s.$$

我们约定

$$t_0^* := a, \quad t_{s+1}^* := b.$$

定理 2.1.2. 若断点 T^* 满足

$$\delta_0 \leq |t_{j+1}^* - t_j^*| \leq \delta, \quad j = 0, \dots, s, \quad (2.1.6)$$

则对任意

$$S \in S_r(T^*, \mathbf{k}, A), \quad A = [a, b],$$

有

$$\|S\|_p \leq C \delta^{1/q-1/p} \|S\|_q, \quad p_0 \leq q \leq p \leq \infty, \quad (2.1.7)$$

其中常数 $C = C(p_0, r)$; 并且当 $k = 1, \dots, r-1$ 时, 还有

$$\|S^{(k)}\|_p \leq C \delta_0^{-k} \|S\|_p, \quad 0 < p \leq \infty, \quad (2.1.8)$$

这里的常数 $C = C(r)$.

2.2 B-样条

定理2.1.1中, 把样条表示成若干截断幂级数之和, 从一般观点看其实并不好用, 因为截断幂级数的支撑集很大. 因此需要引入另一组基, 这就是 B-样条 (Basic splines).

B-样条定义 我们记 $[x_0, \dots, x_n]f$ 表示 f 在这些点的 n 阶差商, 我们定义 B-样条为

$$M(x) := M(x; x_0, \dots, x_r) := r[x_0, \dots, x_r](\cdot - x)_+^{r-1}$$

其中的点 $\{x_0, \dots, x_r\}$ 称为 M 的结点.

根据式(1.1.2)可知, 对任意 $f \in W_1^r$,

$$[x_0, \dots, x_r]f = \frac{1}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t)M(t)dt.$$

令 $f(t) = t^r$, 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} M(t)dt = 1.$$

当 $r = 1$ 时,

$$M(x; x_0, x_1) = \frac{1}{x_1 - x_0} \mathcal{X}_{(x_0, x_1)}(x), \quad x \neq x_0, x_1.$$

B-样条性质

1. $M(x) > 0, \quad x \in (x_0, x_r); \quad M(x) = 0, \quad x \notin [x_0, x_r]$
2.
$$\begin{cases} M(x) \sim (x - x_0)^{r-k_0}, & x \rightarrow x_0^+; \\ M(x) \sim (x - x_r)^{r-k_r}, & x \rightarrow x_r^- \end{cases} \quad (\text{其中 } k_0, k_r \text{ 是 } x_0, x_r \text{ 的重数.})$$
3. $M(x) \leq C_r/(x_r - x_0), \quad x \in \mathbb{R},$
4. 递推公式:

$$M(x; x_0, \dots, x_r) = \frac{r}{r-1} \left[\frac{x - x_0}{x_r - x_0} M(x; x_0, \dots, x_{r-1}) + \frac{x_r - x}{x_r - x_1} M(x; x_1, \dots, x_r) \right]$$

注: 递推公式 4 可以由对 $(\cdot - x)_+^{r-1} = (\cdot - x)(\cdot - x)_+^{r-2}$ 两侧使用差分的莱布尼茨公式得到.

我们得到一个 M 的变体, 使得其具有更简单的递推公式, 并且, 其导数也是容易计算的:

$$N(x; x_0, \dots, x_r) := \frac{1}{r}(x_r - x_0)M(x; x_0, \dots, x_r) = (x_r - x_0)[x_0, \dots, x_r](\cdot - x)_+^{r-1}. \quad (2.2.1)$$

则有

$$\begin{aligned} N(x; x_0, \dots, x_r) &= \frac{x - x_0}{x_{r-1} - x_0} N(x; x_0, \dots, x_{r-1}) + \frac{x_r - x}{x_r - x_1} N(x; x_1, \dots, x_r), \\ N'(x; x_0, \dots, x_r) &= -(r-1) \left([x_1, \dots, x_r] - [x_0, \dots, x_{r-1}] \right) (\cdot - x)_+^{r-2} \\ &= (r-1) \left(\frac{N(x; x_0, \dots, x_{r-1})}{x_{r-1} - x_0} - \frac{N(x; x_1, \dots, x_r)}{x_r - x_1} \right) \end{aligned}$$

根据(1.1.1), 差分运算实际上是关于 $f(x_k)$ 的线性组合. 因此差分运算与求导运算可以交换顺序! 除此之外 $(t - x)_+^{r-1}$ 对于 $x = t$ 点是 $r-2$ 阶连续可微的.

整数节点 B-样条 特别重要的一种 B-样条是整数节点的 B-样条. 此时 $M_1(x) = \mathcal{X}_I(x)$, 其中 $I = [0, 1]$, 并且 $N_r = M_r := M(x; 0, \dots, r)$ 可以通过卷积得到:

$$M_r = M_{r-1} * \mathcal{X}_I = \mathcal{X}_I * \dots * \mathcal{X}_I,$$

并且

$$M'_r(x) = N'_r(x) = N_r(x) - N_r(x-1).$$

样条函数随节点的变化

引理 2.2.1. 假设向量 (y_0, \dots, y_r) 在 \mathbb{R}^{r+1} 中收敛到 (x_0, \dots, x_r) , 并且 $A \subset \mathbb{R}$ 是紧集. 则有:

- (i) 若 x_0, \dots, x_r 都是实数点, 且其中属于集合 A 的点中, 任意时刻至多有 $r-1$ 个两两重合, 则

$$M(x; y_0, \dots, y_r) \xrightarrow{y \rightarrow x} M(x; x_0, \dots, x_r)$$

在 $x \in A$ 上一致收敛. 函数 $N(x; y_0, \dots, y_r)$ 也有同样的结论.

- (ii) 若 $0 < q < \infty$, 则

$$N(x; y_0, \dots, y_r) \xrightarrow{y \rightarrow x} N(x; x_0, \dots, x_r)$$

在空间 $L_q(A)$ 的度量下收敛.

2.3 B-Spline Series

Schoenberg 空间 $S_r(T^*, \mathbf{k}, A)$ 在定理2.1.1给出的基中相当简单, 也能给出系数的简单公式. 然而, 这种基有一些明显的缺点: 计算样条 S 的系数时, 需要知道 S 在所有断点 t_i^* 处的值. 对于大多数逼近或插值问题来说, 一个局部的基更实用-B-样条基. 他只需要利用 S 在靠近 x 的 $r+1$ 个点上的数据, 就可以计算 $S(x)$.

我们调整记号 $S_r(T^*, \mathbf{k}, A)$, 其中 \mathbf{k} 表示断点 t_i^* 的重数, 得到一个单调不减的序列

$$T = (t_i),$$

我们称 T 为 Schoenberg 空间的基本结点序列., 并把该空间记为

$$S_r := S_r(T, A).$$

当 $A = \mathbb{R}$ 时, 若 $|i| \rightarrow \infty$, 则 $|t_i| \rightarrow \infty$. 在所有情况下 (因为 $k_i \leq r$), 都有

$$t_i < t_{i+r}, \quad \forall i.$$

若 $A = [a, b]$, 我们还需要辅助结点

$$t_{-r+1} \leq \dots \leq t_0 \leq a, \quad t_{n+r} \geq \dots \geq t_{n+1} \geq b.$$

满足 $k_i = 1$ 的结点为简单结点.

按第一节的定义, 空间 $S_r(T, A)$ 由所有阶数 $\leq r$ 的样条 S 组成, 这些样条在每个重数为 k_i 的基本结点处, 都具有阶数 $< r - k_i$ 的连续导数. 基本结点完全决定了空间 $S_r(T, A)$; 辅助结点只是在构造 B-样条基时需要.

S_r 的基

定理 2.3.1. $N_j(x) := N_{j,r}(x) := N(x; t_j, \dots, t_{j+r})$, ($j \in \Lambda$) 是 $S_r(T, A)$ 的一组基, 其中

$$\Lambda := \begin{cases} \{-r+1, \dots, n\}, & A = [a, b]; \\ \mathbb{Z}, & A = \mathbb{R}. \end{cases}$$

$N_j(x)$ 定义见(2.2.1).

此外, 对任意 $S \in S_r(T, A)$, 可以被唯一写成

$$S(x) = \sum_{j \in \Lambda} c_j(S) N_j(x),$$

其中,

$$g_{j,r}(x) = \begin{cases} 1, & r = 1, \\ \frac{1}{(r-1)!} \prod_{\ell=1}^{r-1} (x - t_{j+\ell}), & r \geq 2, \end{cases}$$

并约定 $g_j := g_{j,r}$.

$$c_j(S) := \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu g_j^{(r-\nu-1)}(\xi_j) S^{(\nu)}(\xi_j), \quad S \in S_r(T, A),$$

其中 $\xi_j \in (t_j, t_{j+r}) \cap A$.