Constructive Approximation

李信操

24212792

2025-11-19

目录

第一章　Propperties of polynomials

1.1　Divided difference

对于一个函数 f 和点列 $X : x_0, \ldots, x_n$ (不要求按 $\leq$ 排序)，我们定义 f 的 n 阶差商为

$$[x_0, \ldots, x_n]f := A_n$$

其中 A_n 是插值多项式 $P_n(f, X; x)$ 的最高次项 x^n 的系数。

n-阶差商满足的性质：

1. 若 f 高阶可微，则 $[x_0, \ldots, x_n]f$ 是 $f^{(k)}(x_i), (0 \leq k \leq m_i - 1)$ 的线性组合，其中 m_i 是 x_i 的重数；
2. $[x_0, \ldots, x_n]f$ 是一个常数，若 f 是一个多项式，更进一步，若多项式的次数 $< n$，则 $n-$ 阶差商是 0;
3. $[x_0, \ldots, x_0]f = f^{(n)}(x_0)/n!$.
4. 牛顿型插值公式：
$$P_n(f, X; x) = \sum_{k=0}^{n} (x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})[x_0, \ldots, x_k]f;$$
5. 若 $f \in C^n[a, b]$，根据 Rolle 定理
$$[x_0, \ldots, x_n]f = f^{(n)}(\xi)/n! \ \text{ for some } a \leq \xi \leq b;$$
6. 若 x_i 互异，则
$$\begin{aligned}[x_0, \ldots, x_n]f &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\Omega'(x_k)} \qquad (1.1.1)\end{aligned}$$
7.
$$\Delta_h^n f(x) = n! h^n [x, x + h, \ldots, x + nh]f;$$

8.

$$[x_0,\dots,x_n](gh)=\sum_{k=0}^{n}\left([x_0,\dots,x_k](g)\right)\left([x_k,\dots,x_n](h)\right)$$

9.

$$[x_0,\dots,x_n]f=\int_0^1\mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^{t_{n-1}}f^{(n)}\big(x_0+(x_1-x_0)t_1+\cdots+(x_n-x_{n-1})t_n\big)\mathrm{d}t_n$$

Peano 核 设 $\lambda(f):=\int_a^b f\mathrm{d}\mu$ 是 $C[a,b]$ 上的连续线性泛函，并且与所有次数 $\leq n-1$ 的多项式正交，即 $\lambda(P_{n-1})=0$，则对任意 $f\in C^n[a,b]$，有

$$\lambda(f)=\int_a^b f^{(n)}(t)\lambda\left[\frac{(\cdot-t)_+^{n-1}}{(n-1)!}\right]\mathrm{d}t$$

我们把由与多项式正交的泛函诱导出来的表达式

$$\lambda(f)=\int_a^b f^{(n)}(t)K(t)\mathrm{d}t$$

中的 K 称做 Peano 核.

当 $x_0,\dots,x_n$ 互不相同时，差商运算作为一个泛函是连续的，因此可以诱导 Peano 核:

$$[x_0,\dots,x_n]f=\int_a^b f^{(n)}(t)[x_0,\dots,x_n]\left[\frac{(\cdot-t)_+^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}t\right].\tag{1.1.2}$$

第二章　Splines

2.1　Definition and Simple properties

样条定义　令 $T^* := (t_i^*)_1^s$ 或 $T^* := (t_i^*)_{=\infty}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 上严格递增的有限序列或双无穷序列，在第二种情况下，假定 $|t_i^*| \to \infty, i \to \infty$. 若在每个区间 (t_i^*, t_{i+1}^*) 上，函数 S 是一个次数 $\leq m = r - 1$ 的多项式，且至少有一个区间上次数恰为 m，则称 S 是 r 阶且断点为 T^* 的样条.

样条在断点处光滑度　样条在断点 t_i^* 处的光滑度 m_i 定义如下：

- 若 S 在 t_i^* 处不连续，则令 $m_i = 0$;
- 否则，m_i 是满足 $0 < m_i \leq r$ 的最大整数，使得 S 在 t_i^* 的某个邻域内属于 $C^{(m_i-1)}$，也就是说 S 的各阶导数直到 $m_i - 1$ 阶都连续.

样条空间　给定区间 $A = [a, b]$ 或 $A = \mathbb{R}$，以及断点序列 T^*，可以在 A 上构造样条空间. 记:$S_r^*(A)$ 表示 A 上所有阶数 $\leq r$ 的样条构成的空间；$S_r^*(T^*, A)$ 表示 A 上所有阶数 $\leq r$ 且断点都包含在 T^* 中都样条构成的空间.

Schoenberg 空间　给定断点集 T^* 和一系列 $m_i(0 \leq m_i < r)$，我们定义 A 上的 Schoenberg 空间：他由所有阶数 $\leq r$、断点包含在 T^* 中，并且 t_i^* 处的光滑度至少为 m_i 的样条 S 组成. 不过，通常不是直接使用 m_i，而是使用所谓的亏格 (defect)

$$k_i := r - m_i,$$

因为 k_i 更好的描述了 S 在 t_i^* 处自由度的个数. 这个 Schoenberg 空间记作

$$S_r := S_r(R^*, \boldsymbol{k}, A), \quad \boldsymbol{k} := (k_i).$$

Schoenberg 空间有如下性质

1. $S_r(T^*, \mathbf{1}, A)$ 是任意其他 Schoenberg 空间 $S_r(T^*, \boldsymbol{k}, A)$ 的子空间;

2. 若 $S \in S_r(T^*, \boldsymbol{k}, A)$，则其任意原函数 $S_1 \in S_{r+1}(T^*, \boldsymbol{k}, A)$，其中亏格 $\boldsymbol{k}$ 相同;
3. $S_r(T^*, \boldsymbol{k}, A)$ 总包含所有次数 $\le r-1$ 的多项式 P_{r-1}，另一方面，他又是 $S_r(T^*, \boldsymbol{r}, A)$ 的子空间（即没有任何光滑性要求，只是分段多项式）.

样条空间的基　在情形 $A = [a, b]$ 下，可以借助截断幂构造 $Y = S_r(T^*, \mathbf{k}, A)$ 的一个自然基. 通常可以按以下方式找到一组基. 设 $dim(Y) = N$，我们在 Y 中找到元素 $S_1, \ldots, S_N$ 以及线性泛函 $a_1, \ldots, a_N$，满足

1. $$a_j(S_i) = 0, \quad i \neq j; \qquad a_j(S_j) = 1,$$
2. $$a_j(S) = 0, \quad j = 1, \ldots, N \Rightarrow S = 0,$$

在这种情形下有

$$S = \sum_{j=1}^{N} a_j(S)\, S_j, \tag{2.1.1}$$

其中 a_j 称为 S_j 的对偶泛函.

定理 2.1.1 (样条空间的基). 若区间 $A = [a, b]$ 有限，则空间 $S_r(T^*, \mathbf{k}, I)$ 具有如下基

$$S_{-j}(x) := \frac{(x-a)^j}{j!}, \qquad j = 0, \ldots, r-1, \tag{2.1.2}$$

$$S_{i,j}(x) := \frac{(x-t_i^*)_+^j}{j!}, \qquad j = r-k_i, \ldots, r-1, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{2.1.3}$$

其对应的对偶泛函为

$$a_{-j}(S) := S^{(j)}(a), \qquad j = 0, \ldots, r-1, \tag{2.1.4}$$

$$a_{i,j}(S) := S^{(j)}(t_i^{*+}) - S^{(j)}(t_i^{*-}), \qquad j = r-k_i, \ldots, r-1, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{2.1.5}$$

特别地，有

$$\dim S_r(T^*, \mathbf{k}, A) = n + r, \qquad n := \sum_{i=1}^{r} k_i. \tag{1.5}$$

证明. 令 $S \in S_r(T^*, \mathbf{k}, I)$. 若对所有 $i = 1, \ldots, S$ 以及 $j = r-k_i, \ldots, r-1$ 都有 $a_{i,j}(S) = 0$，则

$$S, \ldots, S^{(r-1)}$$

在每个 t_i^* 处连续，因此 $S^{(r-1)}$ 为常数. 于是 $S^{(r)} \equiv 0$，从而 S 在 A 上必为次数 $< r$ 的多项式. 若再对 $j = 0, \ldots, r-1$ 都有 $a_{-j}(S) = 0$，则该多项式所有阶导数在 a 处均为零，只能是零函数，即 $S \equiv 0$. 其余部分显然成立. □

注：k_i 表示每个节点处的自由度，对于多项式空间来说，基的个数谁 r，样条空间每个节点 k_i 个自由度，也就是 k_i 个基.

根据定理2.1.1，$S \in S_r$，可以被写成

$$S(x) = P_{r-1}(x) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_i} c_{i,j} (x - t_i^*)_+^{r-j}$$

样条基本不等式　样条满足一些与多项式类似的基本不等式. 这里我们只给出 Nikol'skii 与 Markov 不等式在 Schoenberg 空间

$$S_r(T^*, \mathbf{k}, A), \qquad A = [a, b],$$

中的变形，其中断点集合为

$$T^* := \{t_j^*\}_{j=1}^{s}.$$

我们约定

$$t_0^* := a, \qquad t_{s+1}^* := b.$$

定理 2.1.2. *若断点 T^* 满足*

$$\delta_0 \le |t_{j+1}^* - t_j^*| \le \delta, \qquad j = 0, \dots, s, \tag{2.1.6}$$

则对任意

$$S \in S_r(T^*, \mathbf{k}, A), \qquad A = [a, b],$$

有

$$\|S\|_p \le C\, \delta^{1/q - 1/p}\, \|S\|_q, \qquad p_0 \le q \le p \le \infty, \tag{2.1.7}$$

其中常数 $C = C(p_0, r)$；并且当 $k = 1, \dots, r-1$ 时，还有

$$\|S^{(k)}\|_p \le C\, \delta_0^{-k}\, \|S\|_p, \qquad 0 < p \le \infty, \tag{2.1.8}$$

这里的常数 $C = C(r)$.

2.2　B-样条

定理2.1.1中，把样条表示成若干截断幂级数之和，从一般观点看其实并不好用，因为截断幂级数的支撑集很大. 因此需要引入另一组基，这就是 B-样条 (Basic splines).

B-样条定义　我们记 $[x_0,\dots,x_n]f$ 表示 f 在这些点的 n 阶差商，我们定义 B-样条为

$$M(x) := M(x;x_0,\dots,x_r) := r[x_0,\dots,x_r](\cdot - x)_+^{r-1}$$

其中的点 $\{x_0,\dots,x_r\}$ 称为 M 的结点.

根据式(1.1.2)可知，对任意 $f \in W_1^r$，

$$[x_0,\dots,x_r]f = \frac{1}{r!}\int_{\infty}^{\infty} f^{(r)}(t)M(t)\mathrm{d}t.$$

令 $f(t)=t^r$，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} M(t)\mathrm{d}t = 1.$$

当 $r=1$ 时，

$$M(x;x_0,x_1) = \frac{1}{x_1-x_0}\mathcal{X}_{(x_0,x_1)}(x),\quad x\neq x_0,x_1.$$

B-样条性质

1. $M(x)>0,\quad x\in(x_0,x_r);\quad M(x)=0,\quad x\notin[x_0,x_r]$
2. $\begin{cases} M(x)\sim(x-x_0)^{r-k_0}, & x\to x_0^+; \\ M(x)\sim(x-x_r)^{r-k_r}, & x\to x_r^-. \end{cases}$　(其中 k_0,k_r 是 x_0,x_r 的重数.)
3. $M(x)\le C_r/(x_r-x_0),\quad x\in\mathbb{R},$
4. 递推公式：

$$M(x;x_0,\dots,x_r) = \frac{r}{r-1}\left[\frac{x-x_0}{x_r-x_0}M(x;x_0,\dots,x_{r-1}) + \frac{x_r-x}{x_r-x_0}M(x;x_1,\dots,x_r)\right]$$

注：递推公式 4 可以由对 $(\cdot-x)_+^{r-1}=(\cdot-x)(\cdot-x)_+^{r-2}$ 两侧使用差分的莱布尼茨公式得到.

我们得到一个 M 的变体，使得其具有更简单的递推公式，并且，其导数也是容易计算的:

$$N(x;x_0,\dots,x_r) := \frac{1}{r}(x_r-x_0)M(x;x_0,\dots,x_r) = (x_r-x_0)[x_0,\dots,x_r](\cdot-x)_+^{r-1}. \quad (2.2.1)$$

则有

$$\begin{aligned} N(x;x_0,\dots,x_r) &= \frac{x-x_0}{x_{r-1}-x_0}N(x;x_0,\dots,x_{r-1}) + \frac{x_r-x}{x_r-x_1}N(x;x_1,\dots,x_r), \\ N'(x;x_0,\dots,x_r) &= -(r-1)\Big([x_1,\dots,x_r]-[x_0,\dots,x_{r-1}]\Big)(\cdot-x)_+^{r-2} \\ &= (r-1)\left(\frac{N(x;x_0,\dots,x_{r-1})}{x_{r-1}-x_0} - \frac{N(x;x_1,\dots,x_r)}{x_r-x_1}\right) \end{aligned}$$

根据(1.1.1)，差分运算实际上是关于 $f(x_k)$ 的线性组合. 因此差分运算与求导运算可以交换顺序! 除此之外 $(t-x)_+^{r-1}$ 对于 $x=t$ 点是 $r-2$ 阶连续可微的.

整数节点 B-样条　特别重要的一种 $B-$ 样条是整数节点的 B-样条. 此时 $M_1(x) = \mathcal{X}_I(x)$，其中 $I = [0,1]$，并且 $N_r = M_r := M(x; 0, \dots, r)$ 可以通过卷积得到:

$$M_r = M_{r-1} * \mathcal{X}_I = \mathcal{X}_I * \dots * \mathcal{X}_I,$$

并且

$$M_r'(x) = N_r'(x) = N_r(x) - N_r(x-1).$$

样条函数随节点的变化

引理 2.2.1. *假设向量 $(y_0, \dots, y_r)$ 在 $\mathbb{R}^{r+1}$ 中收敛到 $(x_0, \dots, x_r)$，并且 $A \subset \mathbb{R}$ 是紧集. 则有:*

(i) *若 $x_0, \dots, x_r$ 都是实数点，且其中属于集合 A 的点中，任意时刻至多有 $r-1$ 个两两重合，则*

$$M(x; y_0, \dots, y_r) \xrightarrow[y \to x]{} M(x; x_0, \dots, x_r)$$

在 $x \in A$ 上一致收敛. 函数 $N(x; y_0, \dots, y_r)$ 也有同样的结论.

(ii) *若 $0 < q < \infty$，则*

$$N(x : y_0, \dots, y_r) \xrightarrow[y \to x]{} N(x : x_0, \dots, x_r)$$

在空间 $L_q(A)$ 的度量下收敛.

2.3　B-Spline Series

Schoenberg 空间 $S_r(T^*, \boldsymbol{k}, A)$ 在定理2.1.1给出的基中相当简单，也能给出系数的简单公式. 然而，这种基有一些明显的缺点：计算样条 S 的系数时，需要知道 S 在所有断点 t_i^* 处的值. 对于大多数逼近或插值问题来说，一个局部的基更实用-B-样条基. 他只需要利用 S 在靠近 x 的 $r+1$ 个点上的数据，就可以计算 $S(x)$.

我们调整记号 $S_r(T^*, \boldsymbol{k}, A)$，其中 $\boldsymbol{k}$ 表示断点 t_i^* 的重数，得到一个单调不减的序列

$$T = (t_i),$$

我们称 T 为 Schoenberg 空间的基本结点序列.，并把该空间记为

$$S_r := S_r(T, A).$$

当 $A=\mathbb{R}$ 时，若 $|i|\to\infty$，则 $|t_i|\to\infty$. 在所有情况下（因为 $k_i\le r$），都有

$$t_i < t_{i+r}, \quad \forall i.$$

若 $A=[a,b]$，我们还需要辅助结点

$$t_{-r+1\le\cdots\le t_0\le a}, \quad t_{n+r}\ge\cdots\ge t_{n+1}\ge b.$$

满足 $k_i=1$ 的结点为简单节点.

按第一节的定义，空间 $S_r(T,A)$ 由所有阶数 $\le r$ 的样条 S 组成，这些样条在每个重数为 k_i 的基本结点处，都具有阶数 $<r-k_i$ 的连续导数. 基本结点完全决定了空间 $S_r(T,A)$; 辅助结点只是在构造 B-样条基时需要.

S_r 的基

定理 2.3.1. $N_j(x) := N_{j,r}(x) := N(x;t_j,\dots,t_{j+r})$, $(j\in\Lambda)$ 是 $S_r(T,A)$ 的一组基，其中

$$\Lambda := \begin{cases} \{-r+1,\dots,n\}, & A=[a,b]; \\ \mathbb{Z}, & A=\mathbb{R}. \end{cases}$$

$N_j(x)$ 定义见(2.2.1).

此外，对任意 $S\in S_r(T,A)$，可以被唯一写成

$$S(x) = \sum_{j\in\Lambda} c_j(S)N_j(x),$$

其中，

$$g_{j,r}(x) = \begin{cases} 1, & r=1, \\ \dfrac{1}{(r-1)!}\displaystyle\prod_{\ell=1}^{r-1}\big(x-t_{j+\ell}\big), & r\ge 2, \end{cases}$$

并约定 $g_j := g_{j,r}$.

$$c_j(S) := \sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^\nu\, g_j^{(r-\nu-1)}(\xi_j)\, S^{(\nu)}(\xi_j), \qquad S\in S_r(T,A),$$

其中 $\xi_j\in(t_j,t_{j+r})\cap A$.

2.4 Good Approximation for L^p by splines