测度论（王昆扬）

李佶操

24212792

2025-11-16

目录

第一章 抽象测度和积分 **2**

1.1 测度 2

1.2 可测函数、积分 3

1.3 $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ 5

1.4 符号测度 5

1.4.1 符号测度的分解 5

1.4.2 测度的绝对连续与奇异的概念 6

1.5 Radon-Nikodym 定理 7

1.6 外测度 9

1.6.1 外测度诱导的测度 9

第一章　抽象测度和积分

1.1　测度

定义 1.1.1 (σ 环和 σ 代数)**.** 设 X 是一个集合，$\mathscr{R}$ 是 X 的一些子集构成的非空的族，若 $\mathscr{R}$ 满足下述条件:

（1）$A, B \in \mathscr{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathscr{R}$;

（2）$A_n \in \mathscr{R}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$,

则称 $\mathscr{R}$ 是 X 上的 σ 环. 若 $\mathscr{A}$ 是 X 上的 σ 环使得 $X \in \mathscr{A}$，则称 $\mathscr{A}$ 为 X 上的 σ 代数.

注意，σ 环 $\mathscr{R}$ 一定包含 $\emptyset$，由于

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus A_n \right),$$

因此 $\mathscr{R}$ 对于可列交运算也封闭. 但是因为 X 可以不在 $\mathscr{R}$ 中，因此 $\mathscr{R}$ 可以不对余运算封闭.

定义 1.1.2 (可测空间)**.** 设 $\mathscr{A}$ 是集 X 上的 σ 代数，把 X 与 $\mathscr{A}$ 合起来叫做可测空间，记作 $(X, \mathscr{A})$.

定义 1.1.3 (测度、符号测度)**.** 设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的 σ 环，ϕ 是 $\mathscr{R}$ 上的函数. 如果 ϕ 满足

（1）$\phi(\emptyset) = 0$;

（2）ϕ 具有可列可加性，即当 $A_n \in \mathscr{R}, n \in \mathbb{N}$ 且 $A_m \cap A_n = \varnothing$ $(\forall m, n \in \mathbf{N}, m \neq n)$ 时 $\varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ 成立.

则称 ϕ 是 $\mathscr{R}$ 上的符号测度. 不取负值的符号测度叫做测度.

定义 1.1.4 (测度空间、完全的测度空间)**.** 若 $(X, \mathscr{A})$ 是可测空间，μ 是 $\mathscr{A}$ 上的测度，则称三元组 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 为测度空间，并称 $\mathscr{A}$ 中的元为 μ 可测集.

一个测度空间 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 如果使零测度集每个子集都可测，就叫做完全的.

定义 1.1.5 (有限测度、σ 有限测度). 设 $(X,\mathscr{A})$ 是可测空间，ϕ 是 $\mathscr{A}$ 上的符号测度. 若 ϕ 只取有限值，则称 ϕ 为有限的. 若 X 可表示为 $\mathscr{A}$ 中可列个集 E_k 的并，$k\in\mathbb{N}$，使得 $\phi(E_k)\in\mathbb{R},k\in\mathbb{N}$，则称 ϕ 是 σ 有限的.

命题 1.1.6 (测度的一些基本性质). *设 μ 是 σ 环 $\mathscr{R}$ 上的测度，则以下结论成立*

1. *当 $A,B\in\mathscr{R}$ 且 $A\subset B$ 时，$\mu(A)\leqslant\mu(B)$.*
2. *若 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathscr{R}$ 的单调增序列, 那么*
$$\mu(\lim A_n)=\lim\mu(A_n).$$
3. *若 $\{\mathscr{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathscr{R}$ 中的单调降序列且 $\mu(A_1)<\infty$, 则*
$$\mu(\lim A_n)=\lim\mu(A_n).$$
4. *若 $A_n\in\mathscr{R},n\in\mathbf{N}$, 那么*
$$\mu(\underline{\lim}A_n)\leqslant\underline{\lim}\mu(A_n),$$
如果还知道 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)<\infty$, 则
$$\mu(\overline{\lim}A_n)\geqslant\overline{\lim}\mu(A_n).$$

1.2　可测函数、积分

定义 1.2.1 (可测函数). 设 $(X,\mathscr{A})$ 是可测空间，$E\in\mathscr{A}$. 设 f 是 E 上的广义实值函数. 如果对任意 $a\in\mathbb{R}$，$\{x\in E:f(x)>a\}\in\mathscr{A}$，则称 f 是 E 上的 $\mathscr{A}$ 可测函数.

定义 1.2.2 (简单函数). 设 $(X,\mathscr{A})$ 是可测空间，$E_1,\ldots,E_n$ 是 $\mathscr{A}$ 中 n 个两两不交的集合，使得 $\cup_{i=1}^{n}E_i=X$，称
$$\phi(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathcal{X}_{E_i}(x),\quad x\in X$$
为简单函数.

定理 1.2.3 (简单函数逼近非负可测函数). *设 f 是可测集 E 上的非负可测函数，则存在一列非负简单函数 $f_n,n\in\mathbb{N}$，使得在 E 上 $f_n\uparrow f$.*

定理 1.2.4 (Eropob). *设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是测度空间，$E\in\mathscr{A}$ 且 $\mu(E)<\infty$. 设 f_n 是 E 上的可测的 $\mu-a.e.$ 有限函数. 若 $\{f_n\}$ 在 E 上 $\mu-a.e.$ 收敛，那么，对任意 $\epsilon>0$，存在 $A\subset E,A\in\mathscr{A}$，使得 $\mu(E\setminus A)<\epsilon$ 并且 $\{f_n\}$ 在 A 上一致收敛.*

定义 1.2.5 (依测度收敛)**.** 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是测度空间，f 和 f_n 是 X 上 $\mathscr{A}$ 可测函数，若

$$\forall\delta>0,\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in X{:}|f(x)-f_n(x)\,|\geqslant\delta\})=0,$$

则称 f_n 依测度 μ 收敛到 f，记作 $f_n\xrightarrow{\mu}f$.

定理 1.2.6 (F.Riesz)**.** 若 $f_n\xrightarrow{\mu}f$，则有子列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ $\mu-a.e.$ 收敛到 f.

定理 1.2.7 (Levi)**.** 设 $k\in\mathbb{N}$，f_k 可测且 $f_k\to f$ $(k\to\infty)$. 则

1. 若 $\exists\varphi\in L(X,\mathscr{A},\mu)$ 使得 $f_k\uparrow f$ 且 $\varphi\le f_k$（对一切 k），则

$$\int_X f_k\,\mathrm{d}\mu\uparrow\int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

2. 若 $\exists\varphi\in L(X,\mathscr{A},\mu)$ 使得 $f_k\downarrow f$ 且 $\varphi\ge f_k$（对一切 k），则

$$\int_X f_k\,\mathrm{d}\mu\downarrow\int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

定理 1.2.8 (Fatou)**.** 设 $k\in\mathbb{N}$，f_k 可测，则

1. 若 $\exists\varphi\in L(X,\mathscr{A},\mu)$ 使得 $\varphi\ge f_k$（对一切 k），则

$$\int_X\liminf_{k\to\infty}f_k\,\mathrm{d}\mu\le\liminf_{k\to\infty}\int_X f_k\,\mathrm{d}\mu.$$

2. 若 $\exists\varphi\in L(X,\mathscr{A},\mu)$ 使得 $\varphi\le f_k$（对一切 k），则

$$\int_X\limsup_{k\to\infty}f_k\,\mathrm{d}\mu\ge\limsup_{k\to\infty}\int_X f_k\,\mathrm{d}\mu.$$

定理 1.2.9 (Lebesgue 支配收敛)**.** 设 f_k 为 $\mathscr{A}$-可测并满足 $f_k\to f$. 若存在 $\varphi\in L(X,\mathscr{A},\mu)$ 使得 $|f_k|\le\varphi$（对所有 k），则

$$\int_X f_k\,\mathrm{d}\mu\longrightarrow\int_X f\,\mathrm{d}\mu\qquad(k\to\infty).$$

定理 1.2.10. 设 $f\in L(X,\mathscr{A},\mu)$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对一切 $A\in\mathscr{A}$，只要 $\mu(A)<\delta$，就有

$$\int_X|f|\,\chi_A\,\mathrm{d}\mu<\varepsilon.$$

注　以后我们把 $\int_X f\chi_A\,\mathrm{d}\mu$ 写作 $\int_A f\,\mathrm{d}\mu$.

1.3 $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$

定义 1.3.1 (L^p 空间)**.** 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是测度空间，f 表示 X 上的广义实值 $\mathscr{A}$ 可测函数，$0<p<\infty$. 定义

$$L^p(X,\mathscr{A},\mu)=\{\, f:\ |f|^p\in L(X,\mathscr{A},\mu)\,\},\qquad \|f\|_p=\|f\|_{L^p(X,\mathscr{A},\mu)}=\left(\int_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

本质上确界范数（∞-范数）定义为

$$\|f\|_\infty=\inf_{\mu(E)=0}\ \sup\{\,|f(x)|:\ x\in X\setminus E\,\},\qquad L^\infty(X,\mathscr{A},\mu)=\{\, f:\ \|f\|_\infty<\infty\,\}.$$

为了估计 L^p 范数，我们有必要引入分布函数的概念.

定义 1.3.2 (分布函数)**.** 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是测度空间，f 是 $\mu-a.e.$ 有限的可测函数，称

$$\lambda(t):=\mu\left(\{x\in X: f(x)\geq t\}\right)\ \ t\in\mathbb{R}$$

叫做 f 的分布函数. 显然 $\lambda(t)$ 是单调递减且右连续的.

定理 1.3.3. *设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是测度空间，f 为 $\mu-a.e.$ 有限的非负可测函数，λ 是其分布函数，则*

$$\int_X f\mathrm{d}\mu=\int_{(0,\infty)}\lambda(t)\mathrm{d}t$$

右端为 Lebesgue 积分.

这个定理告诉我们,通过分布函数,可以将抽象的测度空间中的积分转化为 Lebesgue 积分来计算. 一个经典的例子就是概率空间中的分布函数来计算期望.

推论 1.3.4. *设 $f\in L^p(X,\mathscr{A},\mu),0<p<\infty$，$\lambda$ 为 $|f|$ 的分布函数，则*

$$\int_X |f|^p\mathrm{d}\mu=p\int_{(0,\infty)}t^{p-1}\lambda(t)\mathrm{d}t.$$

1.4 符号测度

本节讨论符号测度的分解及其与测度的关系，引入绝对连续与奇异的概念.

1.4.1 符号测度的分解

定义 1.4.1 (正集、负集、零集)**.** 设 μ 是可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 上的符号测度. 如果 $P\in\mathscr{A}$ 满足下述条件:

$$\mu(P\cap E)\geq 0,\ \ \forall E\in\mathscr{A},$$

则称 P 是 μ 的正集.$-\mu$ 的正集成为 μ 的负集. 既正又负的可测集叫做零集.

定理 1.4.2 (正集的存在性)**.** 设 μ 是可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 上的符号测度，$E\in\mathscr{A}$. 若 $\mu(E)>0$，则存在 $\mathscr{A}$ 可测集 $S\subset E,\mu(S)>0$，且 S 是 μ 的正集.

定理 1.4.3 (Hahn 分解)**.** 设 μ 是可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 上的符号测度. 那么，存在 $P\in\mathscr{A}$，使得 P 为 μ 的正集，$P^{\complement}$ 是 μ 的负集. 并且在以下意义下是唯一的：若存在另一个 *Hahn* 分解 $(P_1,P_1^{\complement})$，则对于任意的 $A\in\mathscr{A}$，有

$$\mu(P_1\bigcap A)=\mu(P\bigcap A),\mu(P_1^{\complement}\bigcap A)=\mu(P^{\complement}\bigcap A).$$

定义 1.4.4 (正变差、负变差与全变差)**.** 设可测空间 $(X,\mathscr{A})$，μ 为其上的符号测度. 对任意 $E\in\mathscr{A}$，定义

$$\mu^+(E)=\sup_{A\in\mathscr{A}}\mu(A\cap E),\qquad \mu^-(E)=\sup_{A\in\mathscr{A}}\{-\mu(A\cap E)\},$$

并令

$$|\mu|(E)=\mu^+(E)+\mu^-(E).$$

分别称为 μ 在 E 上的正变差、负变差与全变差.

定理 1.4.5 (正变差与负变差是测度)**.** 设 μ 是可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 上的符号测度，若 $P,P^{\complement}$ 分别为 μ 的正集与负集，则对任意 $E\in\mathscr{A}$，有

$$\begin{aligned}\mu^+(E)&=\mu(E\cap P),\\ \mu^-(E)&=-\mu\left(E\cap P^{\complement}\right).\end{aligned}$$

定理 1.4.6. *(Jordan 分解)* 设 μ 是可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 上的符号测度，那么可以分解为两个测度的差，即

$$\mu=\mu^+-\mu^-.$$

有了 Jordan 分解之后，我们定义符号测度上的抽象积分为

定义 1.4.7. 若 $f\in L(X,\mathscr{A},|\mu|)$，则定义 f 在 X 上关于 μ 的积分为

$$\int_X f\mathrm{d}\mu:=\int_X f\mathrm{d}\mu^+-\int_X f\mathrm{d}\mu^-.$$

1.4.2　测度的绝对连续与奇异的概念

定义 1.4.8 (绝对连续)**.** 设 $(X,\mathscr{A})$ 为可测空间，μ 与 ν 为其上的符号测度. 若对一切 $E\in\mathscr{A}$，都有

$$|\mu|(E)=0\implies\nu(E)=0,$$

则称 ν 关于 μ 绝对连续，记作 $\nu\ll\mu$.

例 1.4.9. 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 为测度空间，$f\in L^1(X,\mathscr{A},\mu)$，并定义

$$\nu(A)=\int_A f\,\mathrm{d}\mu,\qquad \forall\, A\in\mathscr{A}.$$

则有 $\nu\ll\mu$.

定理 1.4.10 (特殊情形下绝对连续的充要条件)**.** 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是测度空间，ν 是 $(X,\mathscr{A})$ 上的有限符号测度. 则 $\nu\ll\mu$ 的充要条件是：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对所有 $A\in\mathscr{A}$，若 $\mu(A)<\delta$ 则有 $|\nu|(A)<\varepsilon$.

定义 1.4.11 (相互奇异)**.** 设 $(X,\mathscr{A})$ 为可测空间，μ 与 ν 为符号测度. 若存在 $A\in\mathscr{A}$，使

$$|\mu|(A)=0\quad \text{且}\quad |\nu|(A^{\complement})=0,$$

则称 μ 与 ν 相互奇异（亦称 μ 关于 ν 奇异），记作 $\mu\perp\nu$.

定理 1.4.12 (特殊情形下相互奇异的充要条件)**.** 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 为测度空间，ν 是 $(X,\mathscr{A})$ 上的符号测度. 则 $\nu\perp\mu$ 的充要条件是：

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\, E\in\mathscr{A}\ \text{使得}\ \mu(E)<\varepsilon\ \text{且}\ |\nu|(E^{\complement})<\varepsilon.$$

1.5　Radon-Nikodym 定理

本节我们将介绍两个重要的定理，一个是 Lebesgue 分解定理，一个是 Radon-Nikodym 定理. Lebesgue 分解定理告诉我们，任意一个 σ 有限的符号测度，都可以分解为两部分，一部分是绝对连续的，另一部分是奇异的. Radon-Nikodym 定理则告诉我们，若一个 σ 有限的符号测度关于另一个测度是绝对连续的，那么符号测度可以写成另一测度的积分的形式，这在将抽象积分转化为具体积分时有很大的作用.

定理 1.5.1 (Radon–Nikodym)**.** 设 μ,ν 都是测度空间 $(X,\mathscr{A})$ 上的有限测度. 若 $\nu\ll\mu$，则存在一个非负函数 $f_0\in L^1(X,\mathscr{A},\mu)$，使得对一切非负可测函数 f，

$$\int_X f\,\mathrm{d}\nu=\int_X f\,f_0\,\mathrm{d}\mu.$$

特别地，对一切 $A\in\mathscr{A}$，

$$\nu(A)=\int_A f_0\,\mathrm{d}\mu.$$

（此时 $f_0=\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ 为 *Radon–Nikodym* 导数.）

定理 1.5.2 (Radon–Nikodym)**.** 设 $(X,\mathscr{A})$ 是可测空间，μ,ν 是 $(X,\mathscr{A})$ 上的 σ 有限测度. 若 $\nu\ll\mu$，则存在唯一的（按 μ-*a.e.* 意义）非负 $\mathscr{A}$ 可测函数 f_0，使得:

1. 对一切非负可测函数 f 以及一切 $f\in L(X,\mathscr{A},\nu)$，都有
$$\int_X f\,\mathrm{d}\nu \;=\; \int_X f\,f_0\,\mathrm{d}\mu.$$
2. 对一切 $A\in\mathscr{A}$，都有
$$\nu(A) \;=\; \int_A f_0\,\mathrm{d}\mu.$$

已知：若 φ 为符号测度，则 $\int_X f\,\mathrm{d}\varphi=\int_X f\,\mathrm{d}\varphi^+-\int_X f\,\mathrm{d}\varphi^-$. 由 R–N 定理与 Hahn 分解可得下述符号测度版定理.

定理 1.5.3 (Radon–Nikodym 定理，符号测度版)**.** 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是 σ 有限测度空间，φ 是 $(X,\mathscr{A})$ 上的 σ 有限符号测度. 若 $\varphi\ll\mu$，则存在（按 μ-*a.e.* 意义唯一的）可测函数 f_0，使得:

1. 对一切 $f\in L(X,\mathscr{A},|\varphi|)$，都有
$$\int_X f\,\mathrm{d}\varphi \;=\; \int_X f\,f_0\,\mathrm{d}\mu.$$
2. 对一切 $A\in\mathscr{A}$，都有
$$\varphi(A) \;=\; \int_A f_0\,\mathrm{d}\mu.$$
3. 对一切 $A\in\mathscr{A}$，都有
$$|\varphi|(A) \;=\; \int_A |f_0|\,\mathrm{d}\mu.$$

此外，f_0 在 μ-*a.e.* 意义下唯一.

推论 1.5.4. 设 φ 是 $(X,\mathscr{A})$ 上的 σ 有限符号测度. 则存在可测函数 f_0（按 $|\varphi|$-*a.e.* 意义唯一），使得:

1. 对一切 $f\in L(X,\mathscr{A},|\varphi|)$，
$$\int_X f\,\mathrm{d}\varphi \;=\; \int_X f\,f_0\,\mathrm{d}|\varphi|.$$
2. 对一切 $A\in\mathscr{A}$，
$$\varphi(A) \;=\; \int_A f_0\,\mathrm{d}|\varphi|.$$
3. $|f_0|=1$　在$|\varphi|$-*a.e.* 意义下.

定理 1.5.5 (Lebesgue 分解)**.** 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是 σ 有限测度空间，ν 是 $(X,\mathscr{A})$ 上的 σ 有限符号测度. 则存在唯一的一对 σ 有限符号测度 ν_1,ν_2 使得
$$\nu \;=\; \nu_1+\nu_2,\qquad \nu_1\ll\mu,\qquad \nu_2\perp\mu.$$

1.6 外测度

1.6.1 外测度诱导的测度

定义 1.6.1 (外测度)**.** 设 X 是集合，$\mathcal{M} = 2^X$，设 μ^* 是 $\mathcal{M}$ 上的广义实值集函数，满足

1. $\forall A \in \mathcal{M},\ \mu^*(A) \geq 0;\ \mu^*(\varnothing) = 0;$
2. $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B);$
3. $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow \mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i),$

称 μ^* 为 X 上的外测度. 性质 (3) 称为可列次加性.

若 $\mu^*(X) < \infty$，称 μ^* 为有限的；若对于每个 $i \in \mathbb{N}$ 存在 E_i，使得 $\mu^*(E_i) < \infty$ 并且 $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$，则称 μ^* 是 σ 有限的.

定义 1.6.2 (外测度诱导的测度)**.** 设 μ^* 是 X 上的外测度. 若 $E \subset X$ 满足下述以数学家 Carathéodory 的名字命名的条件：

$$\text{(C)} \qquad \forall A \subset X,\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*\big(A \cap E^c\big),$$

则称 E 为 μ^* 可测集，简称为可测集.

定理 1.6.3 (外测度诱导测度的合理性)**.** *设 μ^* 是 X 上的外测度，$\mathscr{A}$ 为 μ^* 可测集之全体，则以下结论成立*

1. *$\mathscr{A}$ 是 σ 代数；*
2. *设 μ 是 μ^* 在 $\mathscr{A}$ 上的限制，则 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 为完全的测度空间.*