测度论（王昆扬）

李信操

24212792

2025-11-16

目录

第一章　抽象测度和积分

1.1　测度

定义 1.1.1 (σ 环和 σ 代数)**.** 设 X 是一个集合，$\mathscr{R}$ 是 X 的一些子集构成的非空的族，若 $\mathscr{R}$ 满足下述条件:

（1）$A, B \in \mathscr{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathscr{R}$;

（2）$A_n \in \mathscr{R}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$,

则称 $\mathscr{R}$ 是 X 上的 σ 环. 若 $\mathscr{A}$ 是 X 上的 σ 环使得 $X \in \mathscr{A}$，则称 $\mathscr{A}$ 为 X 上的 σ 代数.

注意，σ 环 $\mathscr{R}$ 一定包含 $\emptyset$，由于

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus A_n \right),$$

因此 $\mathscr{R}$ 对于可列交运算也封闭. 但是因为 X 可以不在 $\mathscr{R}$ 中，因此 $\mathscr{R}$ 可以不对余运算封闭.

定义 1.1.2 (可测空间)**.** 设 $\mathscr{A}$ 是集 X 上的 σ 代数，把 X 与 $\mathscr{A}$ 合起来叫做可测空间，记作 $(X, \mathscr{A})$.

定义 1.1.3 (测度、符号测度)**.** 设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的 σ 环，ϕ 是 $\mathscr{R}$ 上的函数. 如果 ϕ 满足

（1）$\phi(\emptyset) = 0$;

（2）ϕ 具有可列可加性，即当 $A_n \in \mathscr{R}, n \in \mathbb{N}$ 且 $A_m \cap A_n = \varnothing \ \ (\forall m, n \in \mathbf{N}, m \neq n)$ 时 $\varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ 成立.

则称 ϕ 是 $\mathscr{R}$ 上的符号测度. 不取负值的符号测度叫做测度.

定义 1.1.4 (测度空间、完全的测度空间)**.** 若 $(X, \mathscr{A})$ 是可测空间，μ 是 $\mathscr{A}$ 上的测度，则称三元组 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 为测度空间，并称 $\mathscr{A}$ 中的元为 μ 可测集.

一个测度空间 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 如果使零测度集每个子集都可测，就叫做完全的.

定义 1.1.5 (有限测度、σ 有限测度). 设 $(X, \mathscr{A})$ 是可测空间，ϕ 是 $\mathscr{A}$ 上的符号测度. 若 ϕ 只取有限值，则称 ϕ 为有限的. 若 X 可表示为 $\mathscr{A}$ 中可列个集 E_k 的并，$k \in \mathbb{N}$，使得 $\phi(E_k) \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$，则称 ϕ 是 σ 有限的.

命题 1.1.6 (测度的一些基本性质). *设 μ 是 σ 环 $\mathscr{R}$ 上的测度，则以下结论成立*

1. *当 $A, B \in \mathscr{R}$ 且 $A \subset B$ 时，$\mu(A) \leqslant \mu(B)$.*
2. *若 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathscr{R}$ 的单调增序列, 那么*
$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).$$
3. *若 $\{\mathscr{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathscr{R}$ 中的单调降序列且 $\mu(A_1) < \infty$, 则*
$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).$$
4. *若 $A_n \in \mathscr{R}, n \in \mathbf{N}$, 那么*
$$\mu(\underline{\lim} A_n) \leqslant \underline{\lim} \mu(A_n),$$
如果还知道 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$, 则
$$\mu(\overline{\lim} A_n) \geqslant \overline{\lim} \mu(A_n).$$

1.2 可测函数、积分

定义 1.2.1 (可测函数). 设 $(X, \mathscr{A})$ 是可测空间，$E \in \mathscr{A}$. 设 f 是 E 上的广义实值函数. 如果对任意 $a \in \mathbb{R}$，$\{x \in E : f(x) > a\} \in \mathscr{A}$，则称 f 是 E 上的 $\mathscr{A}$ 可测函数.

定义 1.2.2 (简单函数). 设 $(X, \mathscr{A})$ 是可测空间，$E_1, \ldots, E_n$ 是 $\mathscr{A}$ 中 n 个两两不交的集合，使得 $\cup_{i=1}^{n} E_i = X$，称
$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{E_i}(x), \quad x \in X$$
为简单函数.

定理 1.2.3 (简单函数逼近非负可测函数). *设 f 是可测集 E 上的非负可测函数，则存在一列非负简单函数 $f_n, n \in \mathbb{N}$，使得在 E 上 $f_n \uparrow f$.*

定理 1.2.4 (Eropob). *设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是测度空间，$E \in \mathscr{A}$ 且 $\mu(E) < \infty$. 设 f_n 是 E 上的可测的 $\mu - a.e.$ 有限函数. 若 $\{f_n\}$ 在 E 上 $\mu - a.e.$ 收敛，那么，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $A \subset E, A \in \mathscr{A}$，使得 $\mu(E \setminus A) < \epsilon$ 并且 $\{f_n\}$ 在 A 上一致收敛.*

定义 1.2.5 (依测度收敛). 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是测度空间，f 和 f_n 是 X 上 $\mathscr{A}$ 可测函数，若

$$\forall\delta>0,\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in X:|f(x)-f_n(x)|\geqslant\delta\})=0,$$

则称 f_n 依测度 μ 收敛到 f，记作 $f_n\xrightarrow{\mu}f$.

定理 1.2.6 (F.Riesz). 若 $f_n\xrightarrow{\mu}f$，则有子列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ $\mu-a.e.$ 收敛到 f.

定理 1.2.7 (Levi). 设 $k\in\mathbb{N}$，f_k 可测且 $f_k\to f$ $(k\to\infty)$. 则

1. 若 $\exists\varphi\in L(X,\mathscr{A},\mu)$ 使得 $f_k\uparrow f$ 且 $\varphi\le f_k$（对一切 k），则

$$\int_X f_k\,\mathrm{d}\mu\uparrow\int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

2. 若 $\exists\varphi\in L(X,\mathscr{A},\mu)$ 使得 $f_k\downarrow f$ 且 $\varphi\ge f_k$（对一切 k），则

$$\int_X f_k\,\mathrm{d}\mu\downarrow\int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

定理 1.2.8 (Fatou). 设 $k\in\mathbb{N}$，f_k 可测，则

1. 若 $\exists\varphi\in L(X,\mathscr{A},\mu)$ 使得 $\varphi\ge f_k$（对一切 k），则

$$\int_X\liminf_{k\to\infty}f_k\,\mathrm{d}\mu\le\liminf_{k\to\infty}\int_X f_k\,\mathrm{d}\mu.$$

2. 若 $\exists\varphi\in L(X,\mathscr{A},\mu)$ 使得 $\varphi\le f_k$（对一切 k），则

$$\int_X\limsup_{k\to\infty}f_k\,\mathrm{d}\mu\ge\limsup_{k\to\infty}\int_X f_k\,\mathrm{d}\mu.$$

定理 1.2.9 (Lebesgue 支配收敛). 设 f_k 为 $\mathscr{A}$-可测并满足 $f_k\to f$. 若存在 $\varphi\in L(X,\mathscr{A},\mu)$ 使得 $|f_k|\le\varphi$（对所有 k），则

$$\int_X f_k\,\mathrm{d}\mu\longrightarrow\int_X f\,\mathrm{d}\mu\qquad(k\to\infty).$$

定理 1.2.10. 设 $f\in L(X,\mathscr{A},\mu)$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对一切 $A\in\mathscr{A}$，只要 $\mu(A)<\delta$，就有

$$\int_X|f|\,\chi_A\,\mathrm{d}\mu<\varepsilon.$$

注 以后我们把 $\int_X f\chi_A\,\mathrm{d}\mu$ 写作 $\int_A f\,\mathrm{d}\mu$.

1.3　$L^p(X,\mathscr{A},\mu)$

定义 1.3.1 (L^p 空间)**.** 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是测度空间，f 表示 X 上的广义实值 $\mathscr{A}$ 可测函数，$0<p<\infty$. 定义

$$L^p(X,\mathscr{A},\mu)=\left\{ f:\ |f|^p\in L(X,\mathscr{A},\mu)\right\},\qquad \|f\|_p=\|f\|_{L^p(X,\mathscr{A},\mu)}=\left(\int_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

本质上确界范数（∞-范数）定义为

$$\|f\|_\infty=\inf_{\mu(E)=0}\ \sup\{\,|f(x)|:\ x\in X\setminus E\,\},\qquad L^\infty(X,\mathscr{A},\mu)=\{\,f:\ \|f\|_\infty<\infty\,\}.$$

为了估计 L^p 范数，我们有必要引入分布函数的概念.

定义 1.3.2 (分布函数)**.** 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是测度空间，f 是 $\mu-a.e.$ 有限的可测函数，称

$$\lambda(t):=\mu\left(\{x\in X: f(x)\geq t\}\right)\ \ t\in\mathbb{R}$$

叫做 f 的分布函数. 显然 $\lambda(t)$ 是单调递减且右连续的.

定理 1.3.3. *设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是测度空间，f 为 $\mu-a.e.$ 有限的非负可测函数，λ 是其分布函数，则*

$$\int_X f\mathrm{d}\mu=\int_{(0,\infty)}\lambda(t)\mathrm{d}t$$

右端为 Lebesgue 积分.

这个定理告诉我们,通过分布函数,可以将抽象的测度空间中的积分转化为 Lebesgue 积分来计算. 一个经典的例子就是概率空间中的分布函数来计算期望.

推论 1.3.4. *设 $f\in L^p(X,\mathscr{A},\mu),0<p<\infty$，$\lambda$ 为 $|f|$ 的分布函数，则*

$$\int_X |f|^p\mathrm{d}\mu=p\int_{(0,\infty)}t^{p-1}\lambda(t)\mathrm{d}t.$$

1.4　符号测度

本节讨论符号测度的分解及其与测度的关系，引入绝对连续与奇异的概念.

1.4.1　符号测度的分解

定义 1.4.1 (正集、负集、零集)**.** 设 μ 是可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 上的符号测度. 如果 $P\in\mathscr{A}$ 满足下述条件:

$$\mu(P\cap E)\geq 0,\ \ \forall E\in\mathscr{A},$$

则称 P 是 μ 的正集.$-\mu$ 的正集成为 μ 的负集. 既正又负的可测集叫做零集.

定理 1.4.2 (正集的存在性)**.** *设 μ 是可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 上的符号测度，$E\in\mathscr{A}$. 若 $\mu(E)>0$，则存在 $\mathscr{A}$ 可测集 $S\subset E,\mu(S)>0$，且 S 是 μ 的正集.*

定理 1.4.3 (Hahn 分解)**.** *设 μ 是可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 上的符号测度. 那么，存在 $P\in\mathscr{A}$，使得 P 为 μ 的正集，$P^{\complement}$ 是 μ 的负集. 并且在以下意义下是唯一的：若存在另一个 Hahn 分解 $(P_1,P_1^{\complement})$，则对于任意的 $A\in\mathscr{A}$，有*

$$\mu(P_1\bigcap A)=\mu(P\bigcap A),\mu(P_1^{\complement}\bigcap A)=\mu(P^{\complement}\bigcap A).$$

定义 1.4.4 (正变差、负变差与全变差)**.** 设可测空间 $(X,\mathscr{A})$，μ 为其上的符号测度. 对任意 $E\in\mathscr{A}$，定义

$$\mu^+(E)=\sup_{A\in\mathscr{A}}\mu(A\cap E),\qquad \mu^-(E)=\sup_{A\in\mathscr{A}}\{-\mu(A\cap E)\},$$

并令

$$|\mu|(E)=\mu^+(E)+\mu^-(E).$$

分别称为 μ 在 E 上的正变差、负变差与全变差.

定理 1.4.5 (正变差与负变差是测度)**.** *设 μ 是可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 上的符号测度，若 $P,P^{\complement}$ 分别为 μ 的正集与负集，则对任意 $E\in\mathscr{A}$，有*

$$\begin{aligned}\mu^+(E)&=\mu(E\cap P),\\ \mu^-(E)&=-\mu\left(E\cap P^{\complement}\right).\end{aligned}$$

定理 1.4.6. *(Jordan 分解) 设 μ 是可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 上的符号测度，那么可以分解为两个测度的差，即*

$$\mu=\mu^+-\mu^-.$$

有了 Jordan 分解之后，我们定义符号测度上的抽象积分为

定义 1.4.7. 若 $f\in L(X,\mathscr{A},|\mu|)$，则定义 f 在 X 上关于 μ 的积分为

$$\int_X f\mathrm{d}\mu:=\int_X f\mathrm{d}\mu^+-\int_X f\mathrm{d}\mu^-.$$

1.4.2 测度的绝对连续与奇异的概念

定义 1.4.8 (绝对连续)**.** 设 $(X,\mathscr{A})$ 为可测空间，μ 与 ν 为其上的符号测度. 若对一切 $E\in\mathscr{A}$，都有

$$|\mu|(E)=0\implies\nu(E)=0,$$

则称 ν 关于 μ 绝对连续，记作 $\nu\ll\mu$.

例 1.4.9. 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 为测度空间，$f \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$，并定义

$$\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu, \qquad \forall\, A \in \mathscr{A}.$$

则有 $\nu \ll \mu$.

定理 1.4.10 (特殊情形下绝对连续的充要条件)**.** *设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是测度空间，ν 是 $(X, \mathscr{A})$ 上的有限符号测度. 则 $\nu \ll \mu$ 的充要条件是：对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对所有 $A \in \mathscr{A}$，若 $\mu(A) < \delta$ 则有 $|\nu|(A) < \varepsilon$.*

定义 1.4.11 (相互奇异)**.** 设 $(X, \mathscr{A})$ 为可测空间，μ 与 ν 为符号测度. 若存在 $A \in \mathscr{A}$，使

$$|\mu|(A) = 0 \quad 且 \quad |\nu|(A^{\complement}) = 0,$$

则称 μ 与 ν 相互奇异（亦称 μ 关于 ν 奇异)，记作 $\mu \perp \nu$.

定理 1.4.12 (特殊情形下相互奇异的充要条件)**.** *设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 为测度空间，ν 是 $(X, \mathscr{A})$ 上的符号测度. 则 $\nu \perp \mu$ 的充要条件是：*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, E \in \mathscr{A}\ 使得\ \mu(E) < \varepsilon\ 且\ |\nu|(E^{\complement}) < \varepsilon.$$

1.5　Radon-Nikodym 定理

本节我们将介绍两个重要的定理，一个是 Lebesgue 分解定理，一个是 Radon-Nikodym 定理. Lebesgue 分解定理告诉我们，任意一个 σ 有限的符号测度，都可以分解为两部分，一部分是绝对连续的，另一部分是奇异的. Radon-Nikodym 定理则告诉我们，若一个 σ 有限的符号测度关于另一个测度是绝对连续的，那么符号测度可以写成另一测度的积分的形式，这在将抽象积分转化为具体积分时有很大的作用.

定理 1.5.1 (Radon–Nikodym)**.** *设 μ, ν 都是测度空间 $(X, \mathscr{A})$ 上的有限测度. 若 $\nu \ll \mu$，则存在一个非负函数 $f_0 \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$，使得对一切非负可测函数 f，*

$$\int_X f \,\mathrm{d}\nu = \int_X f\, f_0 \,\mathrm{d}\mu.$$

特别地，对一切 $A \in \mathscr{A}$，

$$\nu(A) = \int_A f_0 \,\mathrm{d}\mu.$$

（此时 $f_0 = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ 为 Radon–Nikodym 导数.）

定理 1.5.2 (Radon–Nikodym)**.** 设 $(X,\mathscr{A})$ 是可测空间，μ,ν 是 $(X,\mathscr{A})$ 上的 σ 有限测度. 若 $\nu\ll\mu$，则存在唯一的（按 μ-*a.e.* 意义）非负 $\mathscr{A}$ 可测函数 f_0，使得:

1. 对一切非负可测函数 f 以及一切 $f\in L(X,\mathscr{A},\nu)$，都有
$$\int_X f\,\mathrm{d}\nu \;=\; \int_X f\,f_0\,\mathrm{d}\mu.$$
2. 对一切 $A\in\mathscr{A}$，都有
$$\nu(A) \;=\; \int_A f_0\,\mathrm{d}\mu.$$

已知：若 φ 为符号测度，则 $\int_X f\,\mathrm{d}\varphi=\int_X f\,\mathrm{d}\varphi^+-\int_X f\,\mathrm{d}\varphi^-$. 由 R–N 定理与 Hahn 分解可得下述符号测度版定理.

定理 1.5.3 (Radon–Nikodym 定理，符号测度版)**.** 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是 σ 有限测度空间，φ 是 $(X,\mathscr{A})$ 上的 σ 有限符号测度. 若 $\varphi\ll\mu$，则存在（按 μ-*a.e.* 意义唯一的）可测函数 f_0，使得:

1. 对一切 $f\in L(X,\mathscr{A},|\varphi|)$，都有
$$\int_X f\,\mathrm{d}\varphi \;=\; \int_X f\,f_0\,\mathrm{d}\mu.$$
2. 对一切 $A\in\mathscr{A}$，都有
$$\varphi(A) \;=\; \int_A f_0\,\mathrm{d}\mu.$$
3. 对一切 $A\in\mathscr{A}$，都有
$$|\varphi|(A) \;=\; \int_A |f_0|\,\mathrm{d}\mu.$$

此外，f_0 在 μ-*a.e.* 意义下唯一.

推论 1.5.4. 设 φ 是 $(X,\mathscr{A})$ 上的 σ 有限符号测度. 则存在可测函数 f_0（按 $|\varphi|$-*a.e.* 意义唯一），使得:

1. 对一切 $f\in L(X,\mathscr{A},|\varphi|)$，
$$\int_X f\,\mathrm{d}\varphi \;=\; \int_X f\,f_0\,\mathrm{d}|\varphi|.$$
2. 对一切 $A\in\mathscr{A}$，
$$\varphi(A) \;=\; \int_A f_0\,\mathrm{d}|\varphi|.$$
3. $|f_0|=1$　在$|\varphi|$-*a.e.* 意义下.

定理 1.5.5 (Lebesgue 分解)**.** 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是 σ 有限测度空间，ν 是 $(X,\mathscr{A})$ 上的 σ 有限符号测度. 则存在唯一的一对 σ 有限符号测度 ν_1,ν_2 使得
$$\nu \;=\; \nu_1+\nu_2,\qquad \nu_1\ll\mu,\qquad \nu_2\perp\mu.$$

1.6 外测度

1.6.1 外测度诱导的测度

定义 1.6.1 (外测度)**.** 设 X 是集合，$\mathcal{M}=2^X$，设 μ^* 是 $\mathcal{M}$ 上的广义实值集函数，满足

1. $\forall A\in\mathcal{M},\ \mu^*(A)\geq 0;\ \mu^*(\varnothing)=0;$
2. $A\subset B\Rightarrow\mu^*(A)\leq\mu^*(B);$
3. $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\Rightarrow\mu^*(E)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i),$

称 μ^* 为 X 上的外测度. 性质 (3) 称为可列次加性.

若 $\mu^*(X)<\infty$，称 μ^* 为有限的；若对于每个 $i\in\mathbb{N}$ 存在 E_i，使得 $\mu^*(E_i)<\infty$ 并且 $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，则称 μ^* 是 σ 有限的.

定义 1.6.2 (外测度诱导的测度)**.** 设 μ^* 是 X 上的外测度. 若 $E\subset X$ 满足下述以数学家 Carathéodory 的名字命名的条件：

$$\forall A\subset X,\ \mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*\big(A\cap E^c\big),$$

则称 E 为 μ^* 可测集，简称为可测集.

定理 1.6.3 (外测度诱导测度的合理性)**.** *设 μ^* 是 X 上的外测度，$\mathscr{A}$ 为 μ^* 可测集之全体，则以下结论成立*

1. *$\mathscr{A}$ 是 σ 代数；*
2. *设 μ 是 μ^* 在 $\mathscr{A}$ 上的限制，则 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 为完全的测度空间.*

注意，外测度是对 X 的所有子集都定义的，我们把所有满足 Carathéodory 条件的子集结合起来，记为集合 $\mathscr{A}$，恰好是一个 σ 代数，那么 μ^* 限制在其上，就是测度. 除此之外，这个测度还是完全的！即零测集的子集是可测的.

定义 1.6.4 (外测度的正则性)**.** 设 μ^* 是 X 上的外测度，$(X,\mathscr{A},\mu^*)$ 是 μ^* 诱导的测度空间. 若对任意 $E\subset X$，存在 $A\in\mathscr{A}\supset E$，使得

$$\mu^*(E)=\mu(A),$$

则称 μ^* 是正则的.

定义 1.6.5 (距离外测度)**.** 设 (X,d) 是距离空间，μ^* 是 X 上的外测度. 若 μ^* 满足下述条件：$\forall\,E_1,E_2\subset X$，当

$$\rho(E_1,E_2):=\inf\{d(x_1,x_2):x_1\in E_1,\ x_2\in E_2\}>0$$

时

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2),$$

则称 μ^* 为 X 上（或 (X,d) 上）的距离外测度.

定义 1.6.6 (Borel 代数)**.** 设 (X,d) 是距离空间.X 中的全体开集生成的 σ 代数记作 $\mathscr{B}$（即包含全体开集的最小 σ 代数），叫 Borel 代数.

定理 1.6.7. *设 μ^* 是距离空间 (X,d) 上的距离外测度，μ^* 可测集之全体记为 $\mathscr{A}$，则 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$.*

1.6.2 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue-Stieltjes 外测度

设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的单调递增实值函数，对于有限区间 $(a,b] \subset \mathbb{R}$, 定义

$$\lambda_f((a,b]) = f(b) - f(a),$$

当 $a = b$ 时，认为 $(a,b] = \emptyset$.

对于 $A \subset \mathbb{R}$，定义

$$\Lambda_f^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_f\big((a_k,b_k]\big) : \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k] \supset A\right\}.$$

由此定义知，$\Lambda_f^*(\varnothing) = 0$.

那么 Λ_f^* 是 $\mathbb{R}$ 上的外测度. 我们称之为由 f 决定的 L-S 外测度，由它导出的测度记为 Λ_f，叫作由 f 决定的 L-S 测度.

定理 1.6.8. *Λ_f^* 是正规的距离外测度.*

1.6.3 Lebesgue-Stieltjes 积分

设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的实值单调增函数，Λ_f^* 是由 f 决定的 L-S 外测度，它导出测度空间 $(\mathbb{R}, \mathscr{A}, \Lambda_f)$. 我们已经证明 Λ_f^* 可测集全体一 σ 代数 $\mathscr{A}$，包含着 Borel 集的全体一 σ 代数 $\mathscr{B}$. 将 Λ_f 限制在 $\mathscr{B}$ 上，$(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \Lambda_f)$ 亦为一测度空间.

由定理 1.6.4 的证明看到，

$$\forall A \in \mathscr{A},\ \exists B \in \mathscr{B},\ A = B \setminus Z,\ \Lambda_f(Z) = 0.$$

由此可见，$\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 实际上并不差多少，然而 $\mathscr{B}$ 的结构比 $\mathscr{A}$ 明白得多.

我们说到 L-S 积分指的是测度空间 $(\mathbb{R},\mathscr{A},\Lambda_f)$ 或 $(\mathbb{R},\mathscr{B},\Lambda_f)$ 上的积分，其中 Λ_f 是由一个单调增加有限实值函数导出的 L-S 测度.

定理 1.6.9 (Riemann–Stieltjes 和抽象积分之间的联系)**.** *设 f 是 $\mathbb{R}$ 上单调增右连续实值函数，g 是 $\mathbb{R}$ 上的有界 $\mathscr{B}$ 可测函数. 若在有限区间 $[a,b]$ 上 Riemann–Stieltjes 积分 $\int_a^b g\,df$ 存在，则*

$$\int_{\mathbb{R}} g\chi_{(a,b)}\,d\Lambda_f = \int_a^b g\,df.$$

在小节1.6.2，1.6.3中我们已经看到一个由外测度产生测度的实例. 在这个例子中，当 f 取恒等函数，即 $f(x)=x$ 时，我们就回到了寻常的 Lebesgue 测度.

1.7　乘积测度和 Fubini 定理

我们构造两种乘积测度，一种是根据集合 σ 代数构造的，另一种根据外测度诱导得到.

定义 1.7.1 (可测矩形)**.** 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 和 $(Y,\mathscr{B},\nu)$ 是两个测度空间。令 $X\times Y$ 表示 X 和 Y 的乘积，即

$$X\times Y=\{(x,y): x\in X,\ y\in Y\}.$$

1. 若 $A\subset X,\ B\subset Y$，则 $A\times B$ 叫作 $X\times Y$ 的矩形。当 $A\in\mathscr{A},\ B\in\mathscr{B}$ 时，$A\times B$ 叫作可测矩形。用字母 $\mathscr{R}$ 表示可测矩形之全体，用 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ 表示 $X\times Y$ 上的包含 $\mathscr{R}$ 的最小 σ 代数。
2. 在 $\mathscr{R}$ 上定义函数 λ:

   $$\lambda(A\times B)=\mu(A)\nu(B),\qquad A\times B\in\mathscr{R},$$

   可以把 $\lambda(A\times B)$ 叫作 $A\times B$ 的面积。

定义 1.7.2 (乘积空间的外测度)**.** 对于每个集 $E\subset X\times Y$，令

$$\lambda^*(E)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(I_k):\ I_k\in\mathscr{R},\ \bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\supset E\right\}.$$

定理 1.7.3. *$\boldsymbol{\lambda}^*$ 是 $X\times Y$ 上的外测度，且*

$$\lambda^*(I)=\lambda(I),\forall I\in\mathscr{R}.$$

设 $\mathscr{M}$ 是上述外测度诱导的测度，则可以定义乘积测度空间：

定义 1.7.4 (乘积测度空间)**.** 上述 $(X\times Y,\mathscr{M},\lambda)$, 和 $(X\times Y,\mathscr{A}\times\mathscr{B},\lambda)$ 都叫作 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 和 $(Y,\mathscr{B},\nu)$**的乘积测度空间; 相应地**$\lambda=\mu\times\nu$ 叫乘积测度.

定理 1.7.5 (两种乘积测度空间的关系)**.**

$$\mathscr{A}\times\mathscr{B}\subset\mathscr{M}.$$

第二章　测度与拓扑

2.1　拓扑空间与连续映射

2.1.1　拓扑空间

定义 2.1.1 (拓扑)**.** 设 X 是一个不空的集合. 所谓 X 上的一个拓扑，是指 X 的一个子集族 $\mathscr{T}$，它满足以下三个条件:

(i) $\varnothing \in \mathscr{T}$, $X \in \mathscr{T}$;

(ii) 若 $\{U_\alpha\} \subset \mathscr{T}$，则 $\bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathscr{T}$;

(iii) 若 $\{U_i : i = 1, \ldots, m\} \subset \mathscr{T}$，则 $\bigcap\limits_{i=1}^{m} U_i \in \mathscr{T}$.

注意：拓扑不需要对余运算封闭.

定义 2.1.2 (开集、闭集、内部、闭包、紧性)**.** 对于拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$，$\mathscr{T}$ 中元素被称作开集，开集的余集叫做闭集.

设 $A \subset X$,

1. 内部
$$\mathring{A} = \bigcup_{V \subset A, V \in \mathscr{T}} V.$$
2. 闭包
$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset A, F^{\complement} \in \mathscr{T}} F.$$
3. 紧集：任意开覆盖有有限子覆盖.

显然，紧集的闭子集也是紧集. 但是紧集不一定是闭集，例如单点集永远是紧的，但可能不是闭集. 例如对于集合 $X = \{0, 1\}$，以及拓扑 $\mathscr{T} = \{\emptyset, \{1\}, X\}$，单点集 $\{1\}$ 就是开集.

定义 2.1.3 (子空间拓扑)**.** 设 $\{X, \mathscr{T}\}$ 是拓扑空间，Y 是 X 的非空子集. 定义 $\mathscr{T}' = \{G \bigcap Y;\ G \in \mathscr{T}\}$, 那么 ,$(Y, \mathscr{T}')$ 是拓扑空间，叫作 $(X, \mathscr{T})$ 的子空间 ,$\mathscr{T}'$ 叫作 $\mathscr{T}$ 的子拓扑.

定义 2.1.4 (Hausdorff 空间与第二类分离性)**.** 设 X 是拓扑空间，若对于 X 中任意不同的两点 x, y，必存在不相交开集 $U \cap V = \emptyset$ 使得 $x \in U, y \in V$，则称 X 为 Hausdorff 空间或 T_2 空间. 定义中所述的性质叫做第二类分离性，常叫做 T_2 公理.

定理 2.1.5. *在 Hausdorff 空间中，紧集一定是闭的.*

证明紧集的补集是开集即可，即对任意 $y \in X \backslash K$，都存在开邻域 $U_y \subset X \backslash K$.

关于 Hausdorff 空间有如下重要的性质：任意互不相交的紧集能被一对互不相交的开集分离.

定理 2.1.6. *设 X 为 Hausdorff 空间，K 和 L 为 X 的紧集，且 $K \bigcap L = \varnothing$, 那么，存在两开集 U 和 V, 使得*

$$K \subset U, L \subset V, U \cap V = \emptyset.$$

推论 2.1.7. *设 X 为 Hausdorff 空间. 若 K 为 X 的紧集，U_1 和 U_2 为 X 的开集，且 $K \subset U_1 \bigcup U_2$, 则存在紧集 K_1 和 K_2, 使得 $K_1 \subset U_1, K_2 \subset U_2$, 以及 $K = K_1 \bigcup K_2$.*

定义 2.1.8 (正规拓扑空间)**.** 设 X 为拓扑空间，若 X 的任意一对互不相交的闭集 $A \cap B = \emptyset$，存在互不相交的开集 $U \cap V = \emptyset$，使得 $A \subset U, B \subset B$，则称 X 为正规的拓扑空间. 上述分离性叫做第四类分离性，常称为 T_4 公理.

推论 2.1.9. *紧的 Hausdorff 空间是正规的.*

正规性表述的是一种很强的分离性，也就是任意闭集都可以被开集分离，这在一般的 T_2 空间中是做不到的. 而紧空间的闭子集是紧的，所以紧 Hausdorff 空间中的闭集是紧的，可以被开集分离.

2.1.2　连续映射

引理 2.1.10 (Urysohn 引理)**.** *设 X 为正规的拓扑空间，E 和 F 为 X 的闭集，且 $E \cap F = \varnothing$，则存在连续函数 $f : X \to [0, 1]$，使得*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in E, \\ 1, & x \in F. \end{cases}$$

定理 2.1.11 (Urysohn 延拓定理)**.** *设 X 是正规的拓扑空间，F 是 X 的闭子集，$\varphi : F \to \mathbb{R}$ 是有界连续函数，那么存在有界连续函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 满足:*

$$\forall x \in F,\ f(x) = \varphi(x); \qquad \sup\{\, |f(x)| : x \in X \,\} = \sup\{\, |\varphi(x)| : x \in F \,\}.$$

2.2　局部紧的 Hausdorff 空间上的连续函数

定义 2.2.1 (局部紧空间)**.** 拓扑空间 X 称为*局部紧的*，是指对任一 $x \in X$，有开集 $U \ni x$，且 $\overline{U}$ 为紧集.

显然，$\mathbb{R}^n$ 是局部紧的 Hausdorff 空间（依 Euclid 拓扑）. 此外，紧的 Hausdorff 空间也是局部紧的. 为书写简便起见，我们将局部紧的 Hausdorff 空间记作 LCHS（Locally compact Hausdorff space）. LCHS 有如下的重要性质.

定理 2.2.2. *设 X 为 LCHS，紧集 $K \subset X$，开集 $U \subset X$，且 $K \subset U$，那么存在一开集 $V \subset X$，使得 $\overline{V}$ 为紧集，且*

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

这里的重点是 $\overline{V}$ 也在 U 中. 因为 $\overline{V}$ 作为 LCHS 的子空间，就是紧的 Hausdorff 空间，因此是正规的. 因此，就可以存在连续函数的延拓定理.

定理 2.2.3. *设 X 为 LCHS，K 为 X 的紧集，U 为 X 的开集，且 $K \subset U$，那么存在一 $f \in C_c(X)$，使得*

$$\chi_K(x) \le f(x) \le \chi_U(x), \qquad x \in X,$$

以及

$$\operatorname{supp} f \subset U,$$

其中 χ_E 表示集合 E 的特征函数.

定理 2.2.4. *设 X 为一 LCHS，$f \in C_c(X)$，以及*

$$\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i,$$

其中每一 U_i 为 X 的开集，那么存在 $f_i \in C_c(X)$，$1 \le i \le m$，使得

$$f = \sum_{i=1}^{m} f_i, \qquad \operatorname{supp} f_i \subset U_i \quad (1 \le i \le m).$$

此外，若 $f \ge 0$，则 $f_i \ge 0$ $(1 \le i \le m)$.

定理 2.2.5 (Tietze 延拓定理)**.** *设 X 为 LCHS，且 K 为 X 的紧集. 若 $f \in C(K)$，则存在 $\varphi \in C_c(X)$，使得 φ 在 K 上的限制*

$$\varphi\big|_K = f.$$

定义 2.2.6 (拓扑基)**.** 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$\mathscr{U} \subset \mathscr{T}$. 如果任一 $A \in \mathscr{T}$ 皆可表示成 $\mathscr{U}$ 中元的并，则称 $\mathscr{U}$ 为 $(X,\mathscr{T})$ 的基. 此外，若基 $\mathscr{U}$ 是可数集，那么就称 X 为具有可数基 $\mathscr{U}$ 的拓扑空间.

定理 2.2.7. *设 X 为 LCHS. 若 X 有可数基 $\mathscr{U}$，则 X 的每一开集可表示成可数个紧集的并集.*

2.3 Radon 测度与 Riesz 表示定理