

测度论（王昆扬）

李佶操

24212792

2025-11-16

目录

第一章 抽象测度和积分	2
1.1 测度	2
1.2 可测函数、积分	3
1.3 $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$	5
1.4 符号测度	5
1.4.1 符号测度的分解	5
1.4.2 测度的绝对连续与奇异的概念	6
1.5 Radon-Nikodym 定理	7
1.6 外测度	9
1.6.1 外测度诱导的测度	9
1.6.2 \mathbb{R} 上的 Lebesgue-Stieltjes 外测度	10

第一章 抽象测度和积分

1.1 测度

定义 1.1.1 (σ 环和 σ 代数). 设 X 是一个集合, \mathcal{R} 是 X 的一些子集构成的非空的族, 若 \mathcal{R} 满足下述条件:

- (1) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$;
- (2) $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$,

则称 \mathcal{R} 是 X 上的 σ 环. 若 \mathcal{A} 是 X 上的 σ 环使得 $X \in \mathcal{A}$, 则称 \mathcal{A} 为 X 上的 σ 代数.

注意, σ 环 \mathcal{R} 一定包含 \emptyset , 由于

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus A_n \right),$$

因此 \mathcal{R} 对于可列交运算也封闭. 但是因为 X 可以不在 \mathcal{R} 中, 因此 \mathcal{R} 可以不对余运算封闭.

定义 1.1.2 (可测空间). 设 \mathcal{A} 是集 X 上的 σ 代数, 把 X 与 \mathcal{A} 合起来叫做可测空间, 记作 (X, \mathcal{A}) .

定义 1.1.3 (测度、符号测度). 设 \mathcal{R} 是 X 上的 σ 环, ϕ 是 \mathcal{R} 上的函数. 如果 ϕ 满足

- (1) $\phi(\emptyset) = 0$;
- (2) ϕ 具有可列可加性, 即当 $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$ 且 $A_m \cap A_n = \emptyset$ ($\forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$)

时 $\phi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)$ 成立.

则称 ϕ 是 \mathcal{R} 上的符号测度. 不取负值的符号测度叫做测度.

定义 1.1.4 (测度空间、完全的测度空间). 若 (X, \mathcal{A}) 是可测空间, μ 是 \mathcal{A} 上的测度, 则称三元组 (X, \mathcal{A}, μ) 为测度空间, 并称 \mathcal{A} 中的元为 μ 可测集.

一个测度空间 (X, \mathcal{A}, μ) 如果使零测度集每个子集都可测, 就叫做完全的.

定义 1.1.5 (有限测度、 σ 有限测度). 设 (X, \mathcal{A}) 是可测空间, ϕ 是 \mathcal{A} 上的符号测度. 若 ϕ 只取有限值, 则称 ϕ 为有限的. 若 X 可表示为 \mathcal{A} 中可列个集 E_k 的并, $k \in \mathbb{N}$, 使得 $\phi(E_k) \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, 则称 ϕ 是 σ 有限的.

命题 1.1.6 (测度的一些基本性质). 设 μ 是 σ 环 \mathcal{R} 上的测度, 则以下结论成立

1. 当 $A, B \in \mathcal{R}$ 且 $A \subset B$ 时, $\mu(A) \leq \mu(B)$.

2. 若 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 \mathcal{R} 的单调增序列, 那么

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).$$

3. 若 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 \mathcal{R} 中的单调降序列且 $\mu(A_1) < \infty$, 则

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).$$

4. 若 $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$, 那么

$$\mu(\underline{\lim} A_n) \leq \underline{\lim} \mu(A_n),$$

如果还知道 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$, 则

$$\mu(\overline{\lim} A_n) \geq \overline{\lim} \mu(A_n).$$

1.2 可测函数、积分

定义 1.2.1 (可测函数). 设 (X, \mathcal{A}) 是可测空间, $E \in \mathcal{A}$. 设 f 是 E 上的广义实值函数. 如果对任意 $a \in \mathbb{R}$, $\{x \in E : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$, 则称 f 是 E 上的 \mathcal{A} 可测函数.

定义 1.2.2 (简单函数). 设 (X, \mathcal{A}) 是可测空间, E_1, \dots, E_n 是 \mathcal{A} 中 n 个两两不交的集合, 使得 $\bigcup_{i=1}^n E_i = X$, 称

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}(x), \quad x \in X$$

为简单函数.

定理 1.2.3 (简单函数逼近非负可测函数). 设 f 是可测集 E 上的非负可测函数, 则存在一系列非负简单函数 $f_n, n \in \mathbb{N}$, 使得在 E 上 $f_n \uparrow f$.

定理 1.2.4 (Eropob). 设 (X, \mathcal{A}, μ) 是测度空间, $E \in \mathcal{A}$ 且 $\mu(E) < \infty$. 设 f_n 是 E 上的可测的 $\mu - a.e.$ 有限函数. 若 $\{f_n\}$ 在 E 上 $\mu - a.e.$ 收敛, 那么, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $A \subset E, A \in \mathcal{A}$, 使得 $\mu(E \setminus A) < \epsilon$ 并且 $\{f_n\}$ 在 A 上一致收敛.

定义 1.2.5 (依测度收敛). 设 (X, \mathcal{A}, μ) 是测度空间, f 和 f_n 是 X 上 \mathcal{A} 可测函数, 若

$$\forall \delta > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \delta\}) = 0,$$

则称 f_n 依测度 μ 收敛到 f , 记作 $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

定理 1.2.6 (F.Riesz). 若 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则有子列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ $\mu - a.e.$ 收敛到 f .

定理 1.2.7 (Levi). 设 $k \in \mathbb{N}$, f_k 可测且 $f_k \rightarrow f$ ($k \rightarrow \infty$). 则

1. 若 $\exists \varphi \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$ 使得 $f_k \uparrow f$ 且 $\varphi \leq f_k$ (对一切 k), 则

$$\int_X f_k d\mu \uparrow \int_X f d\mu.$$

2. 若 $\exists \varphi \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$ 使得 $f_k \downarrow f$ 且 $\varphi \geq f_k$ (对一切 k), 则

$$\int_X f_k d\mu \downarrow \int_X f d\mu.$$

定理 1.2.8 (Fatou). 设 $k \in \mathbb{N}$, f_k 可测, 则

1. 若 $\exists \varphi \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$ 使得 $\varphi \geq f_k$ (对一切 k), 则

$$\int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu.$$

2. 若 $\exists \varphi \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$ 使得 $\varphi \leq f_k$ (对一切 k), 则

$$\int_X \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu.$$

定理 1.2.9 (Lebesgue 支配收敛). 设 f_k 为 \mathcal{A} -可测并满足 $f_k \rightarrow f$. 若存在 $\varphi \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$ 使得 $|f_k| \leq \varphi$ (对所有 k), 则

$$\int_X f_k d\mu \rightarrow \int_X f d\mu \quad (k \rightarrow \infty).$$

定理 1.2.10. 设 $f \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对一切 $A \in \mathcal{A}$, 只要 $\mu(A) < \delta$, 就有

$$\int_X |f| \chi_A d\mu < \varepsilon.$$

注 以后我们把 $\int_X f \chi_A d\mu$ 写作 $\int_A f d\mu$.

1.3 $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$

定义 1.3.1 (L^p 空间). 设 (X, \mathcal{A}, μ) 是测度空间, f 表示 X 上的广义实值 \mathcal{A} 可测函数, $0 < p < \infty$. 定义

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : |f|^p \in L(X, \mathcal{A}, \mu)\}, \quad \|f\|_p = \|f\|_{L^p(X, \mathcal{A}, \mu)} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

本质上确界范数 (∞ -范数) 定义为

$$\|f\|_\infty = \inf_{\mu(E)=0} \sup\{|f(x)| : x \in X \setminus E\}, \quad L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : \|f\|_\infty < \infty\}.$$

为了估计 L^p 范数, 我们有必要引入分布函数的概念.

定义 1.3.2 (分布函数). 设 (X, \mathcal{A}, μ) 是测度空间, f 是 $\mu - a.e.$ 有限的可测函数, 称

$$\lambda(t) := \mu(\{x \in X : f(x) \geq t\}) \quad t \in \mathbb{R}$$

叫做 f 的分布函数. 显然 $\lambda(t)$ 是单调递减且右连续的.

定理 1.3.3. 设 (X, \mathcal{A}, μ) 是测度空间, f 为 $\mu - a.e.$ 有限的非负可测函数, λ 是其分布函数, 则

$$\int_X f d\mu = \int_{(0, \infty)} \lambda(t) dt$$

右端为 Lebesgue 积分.

这个定理告诉我们, 通过分布函数, 可以将抽象的测度空间中的积分转化为 Lebesgue 积分来计算. 一个经典的例子就是概率空间中的分布函数来计算期望.

推论 1.3.4. 设 $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $0 < p < \infty$, λ 为 $|f|$ 的分布函数, 则

$$\int_X |f|^p d\mu = p \int_{(0, \infty)} t^{p-1} \lambda(t) dt.$$

1.4 符号测度

本节讨论符号测度的分解及其与测度的关系, 引入绝对连续与奇异的概念.

1.4.1 符号测度的分解

定义 1.4.1 (正集、负集、零集). 设 μ 是可测空间 (X, \mathcal{A}) 上的符号测度. 如果 $P \in \mathcal{A}$ 满足下述条件:

$$\mu(P \cap E) \geq 0, \quad \forall E \in \mathcal{A},$$

则称 P 是 μ 的正集. $-\mu$ 的正集成为 μ 的负集. 既正又负的可测集叫做零集.

定理 1.4.2 (正集的存在性). 设 μ 是可测空间 (X, \mathcal{A}) 上的符号测度, $E \in \mathcal{A}$. 若 $\mu(E) > 0$, 则存在 \mathcal{A} 可测集 $S \subset E, \mu(S) > 0$, 且 S 是 μ 的正集.

定理 1.4.3 (Hahn 分解). 设 μ 是可测空间 (X, \mathcal{A}) 上的符号测度. 那么, 存在 $P \in \mathcal{A}$, 使得 P 为 μ 的正集, P^c 是 μ 的负集. 并且在以下意义下是唯一的: 若存在另一个 Hahn 分解 (P_1, P_1^c) , 则对于任意的 $A \in \mathcal{A}$, 有

$$\mu(P_1 \cap A) = \mu(P \cap A), \mu(P_1^c \cap A) = \mu(P^c \cap A).$$

定义 1.4.4 (正变差、负变差与全变差). 设可测空间 (X, \mathcal{A}) , μ 为其上的符号测度. 对任意 $E \in \mathcal{A}$, 定义

$$\mu^+(E) = \sup_{A \in \mathcal{A}} \mu(A \cap E), \quad \mu^-(E) = \sup_{A \in \mathcal{A}} \{-\mu(A \cap E)\},$$

并令

$$|\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E).$$

分别称为 μ 在 E 上的正变差、负变差与全变差.

定理 1.4.5 (正变差与负变差是测度). 设 μ 是可测空间 (X, \mathcal{A}) 上的符号测度, 若 P, P^c 分别为 μ 的正集与负集, 则对任意 $E \in \mathcal{A}$, 有

$$\begin{aligned} \mu^+(E) &= \mu(E \cap P), \\ \mu^-(E) &= -\mu(E \cap P^c). \end{aligned}$$

定理 1.4.6. (Jordan 分解) 设 μ 是可测空间 (X, \mathcal{A}) 上的符号测度, 那么可以分解为两个测度的差, 即

$$\mu = \mu^+ - \mu^-.$$

有了 Jordan 分解之后, 我们定义符号测度上的抽象积分为

定义 1.4.7. 若 $f \in L(X, \mathcal{A}, |\mu|)$, 则定义 f 在 X 上关于 μ 的积分为

$$\int_X f d\mu := \int_X f d\mu^+ - \int_X f d\mu^-.$$

1.4.2 测度的绝对连续与奇异的概念

定义 1.4.8 (绝对连续). 设 (X, \mathcal{A}) 为可测空间, μ 与 ν 为其上的符号测度. 若对一切 $E \in \mathcal{A}$, 都有

$$|\mu|(E) = 0 \implies \nu(E) = 0,$$

则称 ν 关于 μ 绝对连续, 记作 $\nu \ll \mu$.

例 1.4.9. 设 (X, \mathcal{A}, μ) 为测度空间, $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, 并定义

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

则有 $\nu \ll \mu$.

定理 1.4.10 (特殊情形下绝对连续的充要条件). 设 (X, \mathcal{A}, μ) 是测度空间, ν 是 (X, \mathcal{A}) 上的有限符号测度. 则 $\nu \ll \mu$ 的充要条件是: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对所有 $A \in \mathcal{A}$, 若 $\mu(A) < \delta$ 则有 $|\nu|(A) < \varepsilon$.

定义 1.4.11 (相互奇异). 设 (X, \mathcal{A}) 为可测空间, μ 与 ν 为符号测度. 若存在 $A \in \mathcal{A}$, 使

$$|\mu|(A) = 0 \quad \text{且} \quad |\nu|(A^c) = 0,$$

则称 μ 与 ν 相互奇异 (亦称 μ 关于 ν 奇异), 记作 $\mu \perp \nu$.

定理 1.4.12 (特殊情形下相互奇异的充要条件). 设 (X, \mathcal{A}, μ) 为测度空间, ν 是 (X, \mathcal{A}) 上的符号测度. 则 $\nu \perp \mu$ 的充要条件是:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists E \in \mathcal{A} \text{ 使得 } \mu(E) < \varepsilon \text{ 且 } |\nu|(E^c) < \varepsilon.$$

1.5 Radon-Nikodym 定理

本节我们将介绍两个重要的定理, 一个是 Lebesgue 分解定理, 一个是 Radon-Nikodym 定理. Lebesgue 分解定理告诉我们, 任意一个 σ 有限的符号测度, 都可以分解为两部分, 一部分是绝对连续的, 另一部分是奇异的. Radon-Nikodym 定理则告诉我们, 若一个 σ 有限的符号测度关于另一个测度是绝对连续的, 那么符号测度可以写成另一测度的积分的形式, 这在将抽象积分转化为具体积分时有很大的作用.

定理 1.5.1 (Radon-Nikodym). 设 μ, ν 都是测度空间 (X, \mathcal{A}) 上的有限测度. 若 $\nu \ll \mu$, 则存在一个非负函数 $f_0 \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, 使得对一切非负可测函数 f ,

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f f_0 \, d\mu.$$

特别地, 对一切 $A \in \mathcal{A}$,

$$\nu(A) = \int_A f_0 \, d\mu.$$

(此时 $f_0 = \frac{d\nu}{d\mu}$ 为 Radon-Nikodym 导数.)

定理 1.5.2 (Radon–Nikodym). 设 (X, \mathcal{A}) 是可测空间, μ, ν 是 (X, \mathcal{A}) 上的 σ 有限测度. 若 $\nu \ll \mu$, 则存在唯一的 (按 μ -a.e. 意义) 非负 \mathcal{A} 可测函数 f_0 , 使得:

1. 对一切非负可测函数 f 以及一切 $f \in L(X, \mathcal{A}, \nu)$, 都有

$$\int_X f d\nu = \int_X f f_0 d\mu.$$

2. 对一切 $A \in \mathcal{A}$, 都有

$$\nu(A) = \int_A f_0 d\mu.$$

已知: 若 φ 为符号测度, 则 $\int_X f d\varphi = \int_X f d\varphi^+ - \int_X f d\varphi^-$. 由 R–N 定理与 Hahn 分解可得下述符号测度版定理.

定理 1.5.3 (Radon–Nikodym 定理, 符号测度版). 设 (X, \mathcal{A}, μ) 是 σ 有限测度空间, φ 是 (X, \mathcal{A}) 上的 σ 有限符号测度. 若 $\varphi \ll \mu$, 则存在 (按 μ -a.e. 意义唯一的) 可测函数 f_0 , 使得:

1. 对一切 $f \in L(X, \mathcal{A}, |\varphi|)$, 都有

$$\int_X f d\varphi = \int_X f f_0 d\mu.$$

2. 对一切 $A \in \mathcal{A}$, 都有

$$\varphi(A) = \int_A f_0 d\mu.$$

3. 对一切 $A \in \mathcal{A}$, 都有

$$|\varphi|(A) = \int_A |f_0| d\mu.$$

此外, f_0 在 μ -a.e. 意义下唯一.

推论 1.5.4. 设 φ 是 (X, \mathcal{A}) 上的 σ 有限符号测度. 则存在可测函数 f_0 (按 $|\varphi|$ -a.e. 意义唯一), 使得:

1. 对一切 $f \in L(X, \mathcal{A}, |\varphi|)$,

$$\int_X f d\varphi = \int_X f f_0 d|\varphi|.$$

2. 对一切 $A \in \mathcal{A}$,

$$\varphi(A) = \int_A f_0 d|\varphi|.$$

3. $|f_0| = 1$ 在 $|\varphi|$ -a.e. 意义下.

定理 1.5.5 (Lebesgue 分解). 设 (X, \mathcal{A}, μ) 是 σ 有限测度空间, ν 是 (X, \mathcal{A}) 上的 σ 有限符号测度. 则存在唯一的一对 σ 有限符号测度 ν_1, ν_2 使得

$$\nu = \nu_1 + \nu_2, \quad \nu_1 \ll \mu, \quad \nu_2 \perp \mu.$$

1.6 外测度

1.6.1 外测度诱导的测度

定义 1.6.1 (外测度). 设 X 是集合, $\mathcal{M} = 2^X$, 设 μ^* 是 \mathcal{M} 上的广义实值集函数, 满足

1. $\forall A \in \mathcal{M}, \mu^*(A) \geq 0; \mu^*(\emptyset) = 0;$
2. $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B);$
3. $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow \mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i),$

称 μ^* 为 X 上的外测度. 性质 (3) 称为可列次加性.

若 $\mu^*(X) < \infty$, 称 μ^* 为有限的; 若对于每个 $i \in \mathbb{N}$ 存在 E_i , 使得 $\mu^*(E_i) < \infty$ 并且 $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, 则称 μ^* 是 σ 有限的.

定义 1.6.2 (外测度诱导的测度). 设 μ^* 是 X 上的外测度. 若 $E \subset X$ 满足下述以数学家 Carathéodory 的名字命名的条件:

$$\forall A \subset X, \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c),$$

则称 E 为 μ^* 可测集, 简称为可测集.

定理 1.6.3 (外测度诱导测度的合理性). 设 μ^* 是 X 上的外测度, \mathcal{A} 为 μ^* 可测集之全体, 则以下结论成立

1. \mathcal{A} 是 σ 代数;
2. 设 μ 是 μ^* 在 \mathcal{A} 上的限制, 则 (X, \mathcal{A}, μ) 为完全的测度空间.

注意, 外测度是对 X 的所有子集都定义的, 我们把所有满足 Carathéodory 条件的子集结合起来, 记为集合 \mathcal{A} , 恰好是一个 σ 代数, 那么 μ^* 限制在其上, 就是测度. 除此之外, 这个测度还是完全的! 即零测集的子集是可测的.

定义 1.6.4 (外测度的正则性). 设 μ^* 是 X 上的外测度, (X, \mathcal{A}, μ^*) 是 μ^* 诱导的测度空间. 若对任意 $E \subset X$, 存在 $A \in \mathcal{A} \supset E$, 使得

$$\mu^*(E) = \mu(A),$$

则称 μ^* 是正则的.

定义 1.6.5 (距离外测度). 设 (X, d) 是距离空间, μ^* 是 X 上的外测度. 若 μ^* 满足下述条件: $\forall E_1, E_2 \subset X$, 当

$$\rho(E_1, E_2) := \inf\{d(x_1, x_2) : x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\} > 0$$

时

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2),$$

则称 μ^* 为 X 上 (或 (X, d) 上) 的距离外测度.

定义 1.6.6 (Borel 代数). 设 (X, d) 是距离空间. X 中的全体开集生成的 σ 代数记作 \mathcal{B} (即包含全体开集的最小 σ 代数), 叫 Borel 代数.

定理 1.6.7. 设 μ^* 是距离空间 (X, d) 上的距离外测度, μ^* 可测集之全体记为 \mathcal{A} , 则 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

1.6.2 \mathbb{R} 上的 Lebesgue-Stieltjes 外测度

设 f 是 \mathbb{R} 上的单调递增实值函数, 对于有限区间 $(a, b] \subset \mathbb{R}$, 定义

$$\lambda_f((a, b]) = f(b) - f(a),$$

当 $a = b$ 时, 认为 $(a, b] = \emptyset$.

对于 $A \subset \mathbb{R}$, 定义

$$\Lambda_f^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_f((a_k, b_k]) : \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k] \supset A \right\}.$$

由此定义知, $\Lambda_f^*(\emptyset) = 0$.

那么 Λ_f^* 是 \mathbb{R} 上的外测度. 我们称之为由 f 决定的 L-S 外测度, 由它导出的测度记为 Λ_f , 叫作由 f 决定的 L-S 测度.

定理 1.6.8. Λ_f^* 是正规的距离外测度.

1.6.3 Lebesgue-Stieltjes 积分