

# 测度论（王昆扬）

李佶操

24212792

2025-11-16

# 目录

第一章 抽象测度和积分	2
1.1 测度 . . . . .	2

# 第一章 抽象测度和积分

## 1.1 测度

**定义 1.1.1** ( $\sigma$  环和  $\sigma$  代数). 设  $X$  是一个集合,  $\mathcal{R}$  是  $X$  的一些子集构成的非空的族, 若  $\mathcal{R}$  满足下述条件:

- (1)  $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$ ;
- (2)  $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ ,

则称  $\mathcal{R}$  是  $X$  上的  $\sigma$  环. 若  $\mathcal{A}$  是  $X$  上的  $\sigma$  环使得  $X \in \mathcal{A}$ , 则称  $\mathcal{A}$  为  $X$  上的  $\sigma$  代数.

注意,  $\sigma$  环  $\mathcal{R}$  一定包含  $\emptyset$ , 由于

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus A_n \right),$$

因此  $\mathcal{R}$  对于可列交运算也封闭. 但是因为  $X$  可以不在  $\mathcal{R}$  中, 因此  $\mathcal{R}$  可以不对余运算封闭.

**定义 1.1.2** (可测空间). 设  $\mathcal{A}$  是集  $X$  上的  $\sigma$  代数, 把  $X$  与  $\mathcal{A}$  合起来叫做可测空间, 记作  $(X, \mathcal{A})$ .

**定义 1.1.3** (测度、符号测度). 设  $\mathcal{R}$  是  $X$  上的  $\sigma$  环,  $\phi$  是  $\mathcal{R}$  上的函数. 如果  $\phi$  满足

- (1)  $\phi(\emptyset) = 0$ ;
- (2)  $\phi$  具有可列可加性, 即当  $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$  且  $A_m \cap A_n = \emptyset$  ( $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$ )

时  $\phi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)$  成立.

则称  $\phi$  是  $\mathcal{R}$  上的符号测度. 不取负值的符号测度叫做测度.

**定义 1.1.4** (测度空间、完全的测度空间). 若  $(X, \mathcal{A})$  是可测空间,  $\mu$  是  $\mathcal{A}$  上的测度, 则称三元组  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  为测度空间, 并称  $\mathcal{A}$  中的元为  $\mu$  可测集.

一个测度空间  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  如果使零测度集每个子集都可测, 就叫做完全的.

**定义 1.1.5** (有限测度、 $\sigma$  有限测度). 设  $(X, \mathcal{A})$  是可测空间,  $\phi$  是  $\mathcal{A}$  上的符号测度. 若  $\phi$  只取有限值, 则称  $\phi$  为有限的. 若  $X$  可表示为  $\mathcal{A}$  中可列个集  $E_k$  的并,  $k \in \mathbb{N}$ , 使得  $\phi(E_k) \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ , 则称  $\phi$  是  $\sigma$  有限的.

**命题 1.1.6** (测度的一些基本性质). 设  $\mu$  是  $\sigma$  环  $\mathcal{R}$  上的测度, 则以下结论成立

1. 当  $A, B \in \mathcal{R}$  且  $A \subset B$  时,  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

2. 若  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  是  $\mathcal{R}$  的单调增序列, 那么

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).$$

3. 若  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  是  $\mathcal{R}$  中的单调降序列且  $\mu(A_1) < \infty$ , 则

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).$$

4. 若  $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$ , 那么

$$\mu(\underline{\lim} A_n) \leq \underline{\lim} \mu(A_n),$$

如果还知道  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$ , 则

$$\mu(\overline{\lim} A_n) \geq \overline{\lim} \mu(A_n).$$

## 1.2 可测函数、积分