

测度论（王昆扬）

李佶操

24212792

2025-11-16

目录

第一章 抽象测度和积分	2
1.1 测度	2
1.2 可测函数、积分	3
1.3 $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$	5
1.4 符号测度	5
1.4.1 符号测度的分解	5
1.4.2 测度的绝对连续与奇异的概念	6
1.5 Radon-Nikodym 定理	7
1.6 外测度	9
1.6.1 外测度诱导的测度	9
1.6.2 \mathbb{R} 上的 Lebesgue-Stieltjes 外测度	10
1.6.3 Lebesgue-Stieltjes 积分	10
1.7 乘积测度和 Fubini 定理	11
第二章 测度与拓扑	13
2.1 拓扑空间与连续映射	13
2.1.1 拓扑空间	13
2.1.2 连续映射	14
2.2 局部紧的 Hausdorff 空间上的连续函数	15

第一章 抽象测度和积分

1.1 测度

定义 1.1.1 (σ 环和 σ 代数). 设 X 是一个集合, \mathcal{R} 是 X 的一些子集构成的非空的族, 若 \mathcal{R} 满足下述条件:

- (1) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$;
- (2) $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$,

则称 \mathcal{R} 是 X 上的 σ 环. 若 \mathcal{A} 是 X 上的 σ 环使得 $X \in \mathcal{A}$, 则称 \mathcal{A} 为 X 上的 σ 代数.

注意, σ 环 \mathcal{R} 一定包含 \emptyset , 由于

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus A_n \right),$$

因此 \mathcal{R} 对于可列交运算也封闭. 但是因为 X 可以不在 \mathcal{R} 中, 因此 \mathcal{R} 可以不对余运算封闭.

定义 1.1.2 (可测空间). 设 \mathcal{A} 是集 X 上的 σ 代数, 把 X 与 \mathcal{A} 合起来叫做可测空间, 记作 (X, \mathcal{A}) .

定义 1.1.3 (测度、符号测度). 设 \mathcal{R} 是 X 上的 σ 环, ϕ 是 \mathcal{R} 上的函数. 如果 ϕ 满足

- (1) $\phi(\emptyset) = 0$;
- (2) ϕ 具有可列可加性, 即当 $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$ 且 $A_m \cap A_n = \emptyset$ ($\forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$)

时 $\phi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)$ 成立.

则称 ϕ 是 \mathcal{R} 上的符号测度. 不取负值的符号测度叫做测度.

定义 1.1.4 (测度空间、完全的测度空间). 若 (X, \mathcal{A}) 是可测空间, μ 是 \mathcal{A} 上的测度, 则称三元组 (X, \mathcal{A}, μ) 为测度空间, 并称 \mathcal{A} 中的元为 μ 可测集.

一个测度空间 (X, \mathcal{A}, μ) 如果使零测度集每个子集都可测, 就叫做完全的.

定义 1.1.5 (有限测度、 σ 有限测度). 设 (X, \mathcal{A}) 是可测空间, ϕ 是 \mathcal{A} 上的符号测度. 若 ϕ 只取有限值, 则称 ϕ 为有限的. 若 X 可表示为 \mathcal{A} 中可列个集 E_k 的并, $k \in \mathbb{N}$, 使得 $\phi(E_k) \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, 则称 ϕ 是 σ 有限的.

命题 1.1.6 (测度的一些基本性质). 设 μ 是 σ 环 \mathcal{R} 上的测度, 则以下结论成立

1. 当 $A, B \in \mathcal{R}$ 且 $A \subset B$ 时, $\mu(A) \leq \mu(B)$.

2. 若 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 \mathcal{R} 的单调增序列, 那么

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).$$

3. 若 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 \mathcal{R} 中的单调降序列且 $\mu(A_1) < \infty$, 则

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).$$

4. 若 $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$, 那么

$$\mu(\underline{\lim} A_n) \leq \underline{\lim} \mu(A_n),$$

如果还知道 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$, 则

$$\mu(\overline{\lim} A_n) \geq \overline{\lim} \mu(A_n).$$

1.2 可测函数、积分

定义 1.2.1 (可测函数). 设 (X, \mathcal{A}) 是可测空间, $E \in \mathcal{A}$. 设 f 是 E 上的广义实值函数. 如果对任意 $a \in \mathbb{R}$, $\{x \in E : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$, 则称 f 是 E 上的 \mathcal{A} 可测函数.

定义 1.2.2 (简单函数). 设 (X, \mathcal{A}) 是可测空间, E_1, \dots, E_n 是 \mathcal{A} 中 n 个两两不交的集合, 使得 $\bigcup_{i=1}^n E_i = X$, 称

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}(x), \quad x \in X$$

为简单函数.

定理 1.2.3 (简单函数逼近非负可测函数). 设 f 是可测集 E 上的非负可测函数, 则存在一系列非负简单函数 $f_n, n \in \mathbb{N}$, 使得在 E 上 $f_n \uparrow f$.

定理 1.2.4 (Eropob). 设 (X, \mathcal{A}, μ) 是测度空间, $E \in \mathcal{A}$ 且 $\mu(E) < \infty$. 设 f_n 是 E 上的可测的 $\mu - a.e.$ 有限函数. 若 $\{f_n\}$ 在 E 上 $\mu - a.e.$ 收敛, 那么, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $A \subset E, A \in \mathcal{A}$, 使得 $\mu(E \setminus A) < \epsilon$ 并且 $\{f_n\}$ 在 A 上一致收敛.

定义 1.2.5 (依测度收敛). 设 (X, \mathcal{A}, μ) 是测度空间, f 和 f_n 是 X 上 \mathcal{A} 可测函数, 若

$$\forall \delta > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \delta\}) = 0,$$

则称 f_n 依测度 μ 收敛到 f , 记作 $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

定理 1.2.6 (F.Riesz). 若 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则有子列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ $\mu - a.e.$ 收敛到 f .

定理 1.2.7 (Levi). 设 $k \in \mathbb{N}$, f_k 可测且 $f_k \rightarrow f$ ($k \rightarrow \infty$). 则

1. 若 $\exists \varphi \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$ 使得 $f_k \uparrow f$ 且 $\varphi \leq f_k$ (对一切 k), 则

$$\int_X f_k d\mu \uparrow \int_X f d\mu.$$

2. 若 $\exists \varphi \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$ 使得 $f_k \downarrow f$ 且 $\varphi \geq f_k$ (对一切 k), 则

$$\int_X f_k d\mu \downarrow \int_X f d\mu.$$

定理 1.2.8 (Fatou). 设 $k \in \mathbb{N}$, f_k 可测, 则

1. 若 $\exists \varphi \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$ 使得 $\varphi \geq f_k$ (对一切 k), 则

$$\int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu.$$

2. 若 $\exists \varphi \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$ 使得 $\varphi \leq f_k$ (对一切 k), 则

$$\int_X \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu.$$

定理 1.2.9 (Lebesgue 支配收敛). 设 f_k 为 \mathcal{A} -可测并满足 $f_k \rightarrow f$. 若存在 $\varphi \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$ 使得 $|f_k| \leq \varphi$ (对所有 k), 则

$$\int_X f_k d\mu \rightarrow \int_X f d\mu \quad (k \rightarrow \infty).$$

定理 1.2.10. 设 $f \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对一切 $A \in \mathcal{A}$, 只要 $\mu(A) < \delta$, 就有

$$\int_X |f| \chi_A d\mu < \varepsilon.$$

注 以后我们把 $\int_X f \chi_A d\mu$ 写作 $\int_A f d\mu$.

1.3 $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$

定义 1.3.1 (L^p 空间). 设 (X, \mathcal{A}, μ) 是测度空间, f 表示 X 上的广义实值 \mathcal{A} 可测函数, $0 < p < \infty$. 定义

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : |f|^p \in L(X, \mathcal{A}, \mu)\}, \quad \|f\|_p = \|f\|_{L^p(X, \mathcal{A}, \mu)} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

本质上确界范数 (∞ -范数) 定义为

$$\|f\|_\infty = \inf_{\mu(E)=0} \sup\{|f(x)| : x \in X \setminus E\}, \quad L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : \|f\|_\infty < \infty\}.$$

为了估计 L^p 范数, 我们有必要引入分布函数的概念.

定义 1.3.2 (分布函数). 设 (X, \mathcal{A}, μ) 是测度空间, f 是 $\mu - a.e.$ 有限的可测函数, 称

$$\lambda(t) := \mu(\{x \in X : f(x) \geq t\}) \quad t \in \mathbb{R}$$

叫做 f 的分布函数. 显然 $\lambda(t)$ 是单调递减且右连续的.

定理 1.3.3. 设 (X, \mathcal{A}, μ) 是测度空间, f 为 $\mu - a.e.$ 有限的非负可测函数, λ 是其分布函数, 则

$$\int_X f d\mu = \int_{(0, \infty)} \lambda(t) dt$$

右端为 Lebesgue 积分.

这个定理告诉我们, 通过分布函数, 可以将抽象的测度空间中的积分转化为 Lebesgue 积分来计算. 一个经典的例子就是概率空间中的分布函数来计算期望.

推论 1.3.4. 设 $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $0 < p < \infty$, λ 为 $|f|$ 的分布函数, 则

$$\int_X |f|^p d\mu = p \int_{(0, \infty)} t^{p-1} \lambda(t) dt.$$

1.4 符号测度

本节讨论符号测度的分解及其与测度的关系, 引入绝对连续与奇异的概念.

1.4.1 符号测度的分解

定义 1.4.1 (正集、负集、零集). 设 μ 是可测空间 (X, \mathcal{A}) 上的符号测度. 如果 $P \in \mathcal{A}$ 满足下述条件:

$$\mu(P \cap E) \geq 0, \quad \forall E \in \mathcal{A},$$

则称 P 是 μ 的正集. $-\mu$ 的正集成为 μ 的负集. 既正又负的可测集叫做零集.

定理 1.4.2 (正集的存在性). 设 μ 是可测空间 (X, \mathcal{A}) 上的符号测度, $E \in \mathcal{A}$. 若 $\mu(E) > 0$, 则存在 \mathcal{A} 可测集 $S \subset E, \mu(S) > 0$, 且 S 是 μ 的正集.

定理 1.4.3 (Hahn 分解). 设 μ 是可测空间 (X, \mathcal{A}) 上的符号测度. 那么, 存在 $P \in \mathcal{A}$, 使得 P 为 μ 的正集, P^c 是 μ 的负集. 并且在以下意义下是唯一的: 若存在另一个 Hahn 分解 (P_1, P_1^c) , 则对于任意的 $A \in \mathcal{A}$, 有

$$\mu(P_1 \cap A) = \mu(P \cap A), \mu(P_1^c \cap A) = \mu(P^c \cap A).$$

定义 1.4.4 (正变差、负变差与全变差). 设可测空间 (X, \mathcal{A}) , μ 为其上的符号测度. 对任意 $E \in \mathcal{A}$, 定义

$$\mu^+(E) = \sup_{A \in \mathcal{A}} \mu(A \cap E), \quad \mu^-(E) = \sup_{A \in \mathcal{A}} \{-\mu(A \cap E)\},$$

并令

$$|\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E).$$

分别称为 μ 在 E 上的正变差、负变差与全变差.

定理 1.4.5 (正变差与负变差是测度). 设 μ 是可测空间 (X, \mathcal{A}) 上的符号测度, 若 P, P^c 分别为 μ 的正集与负集, 则对任意 $E \in \mathcal{A}$, 有

$$\begin{aligned} \mu^+(E) &= \mu(E \cap P), \\ \mu^-(E) &= -\mu(E \cap P^c). \end{aligned}$$

定理 1.4.6. (Jordan 分解) 设 μ 是可测空间 (X, \mathcal{A}) 上的符号测度, 那么可以分解为两个测度的差, 即

$$\mu = \mu^+ - \mu^-.$$

有了 Jordan 分解之后, 我们定义符号测度上的抽象积分为

定义 1.4.7. 若 $f \in L(X, \mathcal{A}, |\mu|)$, 则定义 f 在 X 上关于 μ 的积分为

$$\int_X f d\mu := \int_X f d\mu^+ - \int_X f d\mu^-.$$

1.4.2 测度的绝对连续与奇异的概念

定义 1.4.8 (绝对连续). 设 (X, \mathcal{A}) 为可测空间, μ 与 ν 为其上的符号测度. 若对一切 $E \in \mathcal{A}$, 都有

$$|\mu|(E) = 0 \implies \nu(E) = 0,$$

则称 ν 关于 μ 绝对连续, 记作 $\nu \ll \mu$.

例 1.4.9. 设 (X, \mathcal{A}, μ) 为测度空间, $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, 并定义

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

则有 $\nu \ll \mu$.

定理 1.4.10 (特殊情形下绝对连续的充要条件). 设 (X, \mathcal{A}, μ) 是测度空间, ν 是 (X, \mathcal{A}) 上的有限符号测度. 则 $\nu \ll \mu$ 的充要条件是: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对所有 $A \in \mathcal{A}$, 若 $\mu(A) < \delta$ 则有 $|\nu|(A) < \varepsilon$.

定义 1.4.11 (相互奇异). 设 (X, \mathcal{A}) 为可测空间, μ 与 ν 为符号测度. 若存在 $A \in \mathcal{A}$, 使

$$|\mu|(A) = 0 \quad \text{且} \quad |\nu|(A^c) = 0,$$

则称 μ 与 ν 相互奇异 (亦称 μ 关于 ν 奇异), 记作 $\mu \perp \nu$.

定理 1.4.12 (特殊情形下相互奇异的充要条件). 设 (X, \mathcal{A}, μ) 为测度空间, ν 是 (X, \mathcal{A}) 上的符号测度. 则 $\nu \perp \mu$ 的充要条件是:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists E \in \mathcal{A} \text{ 使得 } \mu(E) < \varepsilon \text{ 且 } |\nu|(E^c) < \varepsilon.$$

1.5 Radon-Nikodym 定理

本节我们将介绍两个重要的定理, 一个是 Lebesgue 分解定理, 一个是 Radon-Nikodym 定理. Lebesgue 分解定理告诉我们, 任意一个 σ 有限的符号测度, 都可以分解为两部分, 一部分是绝对连续的, 另一部分是奇异的. Radon-Nikodym 定理则告诉我们, 若一个 σ 有限的符号测度关于另一个测度是绝对连续的, 那么符号测度可以写成另一测度的积分的形式, 这在将抽象积分转化为具体积分时有很大的作用.

定理 1.5.1 (Radon-Nikodym). 设 μ, ν 都是测度空间 (X, \mathcal{A}) 上的有限测度. 若 $\nu \ll \mu$, 则存在一个非负函数 $f_0 \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, 使得对一切非负可测函数 f ,

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f f_0 \, d\mu.$$

特别地, 对一切 $A \in \mathcal{A}$,

$$\nu(A) = \int_A f_0 \, d\mu.$$

(此时 $f_0 = \frac{d\nu}{d\mu}$ 为 Radon-Nikodym 导数.)

定理 1.5.2 (Radon–Nikodym). 设 (X, \mathcal{A}) 是可测空间, μ, ν 是 (X, \mathcal{A}) 上的 σ 有限测度. 若 $\nu \ll \mu$, 则存在唯一的 (按 μ -a.e. 意义) 非负 \mathcal{A} 可测函数 f_0 , 使得:

1. 对一切非负可测函数 f 以及一切 $f \in L(X, \mathcal{A}, \nu)$, 都有

$$\int_X f d\nu = \int_X f f_0 d\mu.$$

2. 对一切 $A \in \mathcal{A}$, 都有

$$\nu(A) = \int_A f_0 d\mu.$$

已知: 若 φ 为符号测度, 则 $\int_X f d\varphi = \int_X f d\varphi^+ - \int_X f d\varphi^-$. 由 R–N 定理与 Hahn 分解可得下述符号测度版定理.

定理 1.5.3 (Radon–Nikodym 定理, 符号测度版). 设 (X, \mathcal{A}, μ) 是 σ 有限测度空间, φ 是 (X, \mathcal{A}) 上的 σ 有限符号测度. 若 $\varphi \ll \mu$, 则存在 (按 μ -a.e. 意义唯一的) 可测函数 f_0 , 使得:

1. 对一切 $f \in L(X, \mathcal{A}, |\varphi|)$, 都有

$$\int_X f d\varphi = \int_X f f_0 d\mu.$$

2. 对一切 $A \in \mathcal{A}$, 都有

$$\varphi(A) = \int_A f_0 d\mu.$$

3. 对一切 $A \in \mathcal{A}$, 都有

$$|\varphi|(A) = \int_A |f_0| d\mu.$$

此外, f_0 在 μ -a.e. 意义下唯一.

推论 1.5.4. 设 φ 是 (X, \mathcal{A}) 上的 σ 有限符号测度. 则存在可测函数 f_0 (按 $|\varphi|$ -a.e. 意义唯一), 使得:

1. 对一切 $f \in L(X, \mathcal{A}, |\varphi|)$,

$$\int_X f d\varphi = \int_X f f_0 d|\varphi|.$$

2. 对一切 $A \in \mathcal{A}$,

$$\varphi(A) = \int_A f_0 d|\varphi|.$$

3. $|f_0| = 1$ 在 $|\varphi|$ -a.e. 意义下.

定理 1.5.5 (Lebesgue 分解). 设 (X, \mathcal{A}, μ) 是 σ 有限测度空间, ν 是 (X, \mathcal{A}) 上的 σ 有限符号测度. 则存在唯一的一对 σ 有限符号测度 ν_1, ν_2 使得

$$\nu = \nu_1 + \nu_2, \quad \nu_1 \ll \mu, \quad \nu_2 \perp \mu.$$

1.6 外测度

1.6.1 外测度诱导的测度

定义 1.6.1 (外测度). 设 X 是集合, $\mathcal{M} = 2^X$, 设 μ^* 是 \mathcal{M} 上的广义实值集函数, 满足

1. $\forall A \in \mathcal{M}, \mu^*(A) \geq 0; \mu^*(\emptyset) = 0;$
2. $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B);$
3. $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow \mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i),$

称 μ^* 为 X 上的外测度. 性质 (3) 称为可列次加性.

若 $\mu^*(X) < \infty$, 称 μ^* 为有限的; 若对于每个 $i \in \mathbb{N}$ 存在 E_i , 使得 $\mu^*(E_i) < \infty$ 并且 $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, 则称 μ^* 是 σ 有限的.

定义 1.6.2 (外测度诱导的测度). 设 μ^* 是 X 上的外测度. 若 $E \subset X$ 满足下述以数学家 Carathéodory 的名字命名的条件:

$$\forall A \subset X, \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c),$$

则称 E 为 μ^* 可测集, 简称为可测集.

定理 1.6.3 (外测度诱导测度的合理性). 设 μ^* 是 X 上的外测度, \mathcal{A} 为 μ^* 可测集之全体, 则以下结论成立

1. \mathcal{A} 是 σ 代数;
2. 设 μ 是 μ^* 在 \mathcal{A} 上的限制, 则 (X, \mathcal{A}, μ) 为完全的测度空间.

注意, 外测度是对 X 的所有子集都定义的, 我们把所有满足 Carathéodory 条件的子集结合起来, 记为集合 \mathcal{A} , 恰好是一个 σ 代数, 那么 μ^* 限制在其上, 就是测度. 除此之外, 这个测度还是完全的! 即零测集的子集是可测的.

定义 1.6.4 (外测度的正则性). 设 μ^* 是 X 上的外测度, (X, \mathcal{A}, μ^*) 是 μ^* 诱导的测度空间. 若对任意 $E \subset X$, 存在 $A \in \mathcal{A} \supset E$, 使得

$$\mu^*(E) = \mu(A),$$

则称 μ^* 是正则的.

定义 1.6.5 (距离外测度). 设 (X, d) 是距离空间, μ^* 是 X 上的外测度. 若 μ^* 满足下述条件: $\forall E_1, E_2 \subset X$, 当

$$\rho(E_1, E_2) := \inf\{d(x_1, x_2) : x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\} > 0$$

时

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2),$$

则称 μ^* 为 X 上 (或 (X, d) 上) 的距离外测度.

定义 1.6.6 (Borel 代数). 设 (X, d) 是距离空间. X 中的全体开集生成的 σ 代数记作 \mathcal{B} (即包含全体开集的最小 σ 代数), 叫 Borel 代数.

定理 1.6.7. 设 μ^* 是距离空间 (X, d) 上的距离外测度, μ^* 可测集之全体记为 \mathcal{A} , 则 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

1.6.2 \mathbb{R} 上的 Lebesgue-Stieltjes 外测度

设 f 是 \mathbb{R} 上的单调递增实值函数, 对于有限区间 $(a, b] \subset \mathbb{R}$, 定义

$$\lambda_f((a, b]) = f(b) - f(a),$$

当 $a = b$ 时, 认为 $(a, b] = \emptyset$.

对于 $A \subset \mathbb{R}$, 定义

$$\Lambda_f^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_f((a_k, b_k]) : \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k] \supset A \right\}.$$

由此定义知, $\Lambda_f^*(\emptyset) = 0$.

那么 Λ_f^* 是 \mathbb{R} 上的外测度. 我们称之为由 f 决定的 L-S 外测度, 由它导出的测度记为 Λ_f , 叫作由 f 决定的 L-S 测度.

定理 1.6.8. Λ_f^* 是正规的距离外测度.

1.6.3 Lebesgue-Stieltjes 积分

设 f 是 \mathbb{R} 上的实值单调增函数, Λ_f^* 是由 f 决定的 L-S 外测度, 它导出测度空间 $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \Lambda_f)$. 我们已经证明 Λ_f^* 可测集全体一 σ 代数 \mathcal{A} , 包含着 Borel 集的全体一 σ 代数 \mathcal{B} . 将 Λ_f 限制在 \mathcal{B} 上, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \Lambda_f)$ 亦为一测度空间.

由定理 1.6.4 的证明看到,

$$\forall A \in \mathcal{A}, \exists B \in \mathcal{B}, A = B \setminus Z, \Lambda_f(Z) = 0.$$

由此可见, \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 实际上并不差多少, 然而 \mathcal{B} 的结构比 \mathcal{A} 明白得多.

我们说到 L-S 积分指的是测度空间 $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \Lambda_f)$ 或 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \Lambda_f)$ 上的积分, 其中 Λ_f 是由一个单调增加有限实值函数导出的 L-S 测度.

定理 1.6.9 (Riemann–Stieltjes 和抽象积分之间的联系). 设 f 是 \mathbb{R} 上单调增右连续实值函数, g 是 \mathbb{R} 上的有界 \mathcal{B} 可测函数. 若在有限区间 $[a, b]$ 上 Riemann–Stieltjes 积分 $\int_a^b g df$ 存在, 则

$$\int_{\mathbb{R}} g \chi_{(a,b)} d\Lambda_f = \int_a^b g df.$$

在小节 1.6.2, 1.6.3 中我们已经看到一个由外测度产生测度的实例. 在这个例子中, 当 f 取恒等函数, 即 $f(x) = x$ 时, 我们就回到了寻常的 Lebesgue 测度.

1.7 乘积测度和 Fubini 定理

我们构造两种乘积测度, 一种是根据集合 σ 代数构造的, 另一种根据外测度诱导得到.

定义 1.7.1 (可测矩形). 设 (X, \mathcal{A}, μ) 和 (Y, \mathcal{B}, ν) 是两个测度空间. 令 $X \times Y$ 表示 X 和 Y 的乘积, 即

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

1. 若 $A \subset X, B \subset Y$, 则 $A \times B$ 叫作 $X \times Y$ 的矩形. 当 $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ 时, $A \times B$ 叫作可测矩形. 用字母 \mathcal{R} 表示可测矩形之全体, 用 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 表示 $X \times Y$ 上的包含 \mathcal{R} 的最小 σ 代数.
2. 在 \mathcal{R} 上定义函数 λ :

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \quad A \times B \in \mathcal{R},$$

可以把 $\lambda(A \times B)$ 叫作 $A \times B$ 的面积.

定义 1.7.2 (乘积空间的外测度). 对于每个集 $E \subset X \times Y$, 令

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) : I_k \in \mathcal{R}, \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset E \right\}.$$

定理 1.7.3. λ^* 是 $X \times Y$ 上的外测度, 且

$$\lambda^*(I) = \lambda(I), \forall I \in \mathcal{R}.$$

设 \mathcal{M} 是上述外测度诱导的测度, 则可以定义乘积测度空间:

定义 1.7.4 (乘积测度空间). 上述 $(X \times Y, \mathcal{M}, \lambda)$, 和 $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \lambda)$ 都叫作 (X, \mathcal{A}, μ) 和 (Y, \mathcal{B}, ν) 的乘积测度空间; 相应地 $\lambda = \mu \times \nu$ 叫乘积测度.

定理 1.7.5 (两种乘积测度空间的关系).

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{M}.$$

第二章 测度与拓扑

2.1 拓扑空间与连续映射

2.1.1 拓扑空间

定义 2.1.1 (拓扑). 设 X 是一个不空的集合. 所谓 X 上的一个拓扑, 是指 X 的一个子集族 \mathcal{T} , 它满足以下三个条件:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$;
- (ii) 若 $\{U_\alpha\} \subset \mathcal{T}$, 则 $\bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{T}$;
- (iii) 若 $\{U_i : i = 1, \dots, m\} \subset \mathcal{T}$, 则 $\bigcap_{i=1}^m U_i \in \mathcal{T}$.

注意: 拓扑不需要对余运算封闭.

定义 2.1.2 (开集、闭集、内部、闭包、紧性). 对于拓扑空间 (X, \mathcal{T}) , \mathcal{T} 中元素被称作开集, 开集的余集叫做闭集.

设 $A \subset X$,

1. 内部

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{V \subset A, V \in \mathcal{T}} V.$$

2. 闭包

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset A, F^c \in \mathcal{T}} F.$$

3. 紧集: 任意开覆盖有有限子覆盖.

显然, 紧集的闭子集也是紧集. 但是紧集不一定是闭集, 例如单点集永远是紧的, 但可能不是闭集. 例如对于集合 $X = \{0, 1\}$, 以及拓扑 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, X\}$, 单点集 $\{1\}$ 就是开集.

定义 2.1.3 (子空间拓扑). 设 $\{X, \mathcal{T}\}$ 是拓扑空间, Y 是 X 的非空子集. 定义 $\mathcal{T}' = \{G \cap Y; G \in \mathcal{T}\}$, 那么, (Y, \mathcal{T}') 是拓扑空间, 叫作 (X, \mathcal{T}) 的子空间, \mathcal{T}' 叫作 \mathcal{T} 的子拓扑.

定义 2.1.4 (Hausdorff 空间与第二类分离性). 设 X 是拓扑空间, 若对于 X 中任意不同的两点 x, y , 必存在不相交开集 $U \cap V = \emptyset$ 使得 $x \in U, y \in V$, 则称 X 为 Hausdorff 空间或 T_2 空间. 定义中所述的性质叫做第二类分离性, 常叫做 T_2 公理.

定理 2.1.5. 在 Hausdorff 空间中, 紧集一定是闭的.

证明紧集的补集是开集即可, 即对任意 $y \in X \setminus K$, 都存在开邻域 $U_y \subset X \setminus K$.

关于 Hausdorff 空间有如下重要的性质: 任意互不相交的紧集能被一对互不相交的开集分离.

定理 2.1.6. 设 X 为 Hausdorff 空间, K 和 L 为 X 的紧集, 且 $K \cap L = \emptyset$, 那么, 存在两开集 U 和 V , 使得

$$K \subset U, L \subset V, U \cap V = \emptyset.$$

推论 2.1.7. 设 X 为 Hausdorff 空间. 若 K 为 X 的紧集, U_1 和 U_2 为 X 的开集, 且 $K \subset U_1 \cup U_2$, 则存在紧集 K_1 和 K_2 , 使得 $K_1 \subset U_1, K_2 \subset U_2$, 以及 $K = K_1 \cup K_2$.

定义 2.1.8 (正规拓扑空间). 设 X 为拓扑空间, 若 X 的任意一对互不相交的闭集 $A \cap B = \emptyset$, 存在互不相交的开集 $U \cap V = \emptyset$, 使得 $A \subset U, B \subset V$, 则称 X 为正规的拓扑空间. 上述分离性叫做第四类分离性, 常称为 T_4 公理.

推论 2.1.9. 紧的 Hausdorff 空间是正规的.

正规性表述的是一种很强的分离性, 也就是任意闭集都可以被开集分离, 这在一般的 T_2 空间中是做不到的. 而紧空间的闭子集是紧的, 所以紧 Hausdorff 空间中的闭集是紧的, 可以被开集分离.

2.1.2 连续映射

引理 2.1.10 (Urysohn 引理). 设 X 为正规的拓扑空间, E 和 F 为 X 的闭集, 且 $E \cap F = \emptyset$, 则存在连续函数 $f: X \rightarrow [0, 1]$, 使得

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in E, \\ 1, & x \in F. \end{cases}$$

定理 2.1.11 (Urysohn 延拓定理). 设 X 是正规的拓扑空间, F 是 X 的闭子集, $\varphi: F \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界连续函数, 那么存在有界连续函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 满足:

$$\forall x \in F, f(x) = \varphi(x); \quad \sup\{|f(x)| : x \in X\} = \sup\{|\varphi(x)| : x \in F\}.$$

2.2 局部紧的 Hausdorff 空间上的连续函数

定义 2.2.1 (局部紧空间). 拓扑空间 X 称为局部紧的, 是指对任一 $x \in X$, 有开集 $U \ni x$, 且 \bar{U} 为紧集.

显然, \mathbb{R}^n 是局部紧的 Hausdorff 空间 (依 Euclid 拓扑). 此外, 紧的 Hausdorff 空间也是局部紧的. 为书写简便起见, 我们将局部紧的 Hausdorff 空间记作 LCHS (Locally compact Hausdorff space). LCHS 有如下的重要性质.

定理 2.2.2. 设 X 为 LCHS, 紧集 $K \subset X$, 开集 $U \subset X$, 且 $K \subset U$, 那么存在一开集 $V \subset X$, 使得 \bar{V} 为紧集, 且

$$K \subset V \subset \bar{V} \subset U.$$

这里的重点是 \bar{V} 也在 U 中. 因为 \bar{V} 作为 LCHS 的子空间, 就是紧的 Hausdorff 空间, 因此是正规的. 因此, 就可以存在连续函数的延拓定理.

定理 2.2.3. 设 X 为 LCHS, K 为 X 的紧集, U 为 X 的开集, 且 $K \subset U$, 那么存在一 $f \in C_c(X)$, 使得

$$\chi_K(x) \leq f(x) \leq \chi_U(x), \quad x \in X,$$

以及

$$\text{supp } f \subset U,$$

其中 χ_E 表示集合 E 的特征函数。

定理 2.2.4. 设 X 为一 LCHS, $f \in C_c(X)$, 以及

$$\text{supp } f \subset \bigcup_{i=1}^m U_i,$$

其中每一 U_i 为 X 的开集, 那么存在 $f_i \in C_c(X)$, $1 \leq i \leq m$, 使得

$$f = \sum_{i=1}^m f_i, \quad \text{supp } f_i \subset U_i \quad (1 \leq i \leq m).$$

此外, 若 $f \geq 0$, 则 $f_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq m$).

定理 2.2.5 (Tietze 延拓定理). 设 X 为 LCHS, 且 K 为 X 的紧集. 若 $f \in C(K)$, 则存在 $\varphi \in C_c(X)$, 使得 φ 在 K 上的限制

$$\varphi|_K = f.$$