

测度论（王昆扬）

李信操

24212792

2025-11-16

目录

第一章 抽象测度和积分	2
1.1 测度	2
1.2 可测函数、积分	3

第一章 抽象测度和积分

1.1 测度

定义 1.1.1 (σ 环和 σ 代数). 设 X 是一个集合, \mathcal{R} 是 X 的一些子集构成的非空的族, 若 \mathcal{R} 满足下述条件:

- (1) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R};$
- (2) $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R},$

则称 \mathcal{R} 是 X 上的 σ 环. 若 \mathcal{A} 是 X 上的 σ 环使得 $X \in \mathcal{A}$, 则称 \mathcal{A} 为 X 上的 σ 代数.

注意, σ 环 \mathcal{R} 一定包含 \emptyset , 由于

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus A_n \right),$$

因此 \mathcal{R} 对于可列交运算也封闭. 但是因为 X 可以不在 \mathcal{R} 中, 因此 \mathcal{R} 可以不对余运算封闭.

定义 1.1.2 (可测空间). 设 \mathcal{A} 是集 X 上的 σ 代数, 把 X 与 \mathcal{A} 合起来叫做可测空间, 记作 (X, \mathcal{A}) .

定义 1.1.3 (测度、符号测度). 设 \mathcal{R} 是 X 上的 σ 环, ϕ 是 \mathcal{R} 上的函数. 如果 ϕ 满足

- (1) $\phi(\emptyset) = 0;$
- (2) ϕ 具有可列可加性, 即当 $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$ 且 $A_m \cap A_n = \emptyset$ ($\forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$) 时 $\phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)$ 成立.

则称 ϕ 是 \mathcal{R} 上的符号测度. 不取负值的符号测度叫做测度.

定义 1.1.4 (测度空间、完全的测度空间). 若 (X, \mathcal{A}) 是可测空间, μ 是 \mathcal{A} 上的测度, 则称三元组 (X, \mathcal{A}, μ) 为测度空间, 并称 \mathcal{A} 中的元为 μ 可测集.

一个测度空间 (X, \mathcal{A}, μ) 如果使零测度集每个子集都可测, 就叫做完全的.

定义 1.1.5 (有限测度、 σ 有限测度). 设 (X, \mathcal{A}) 是可测空间, ϕ 是 \mathcal{A} 上的符号测度. 若 ϕ 只取有限值, 则称 ϕ 为有限的. 若 X 可表示为 \mathcal{A} 中可列个集 E_k 的并, $k \in \mathbb{N}$, 使得 $\phi(E_k) \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, 则称 ϕ 是 σ 有限的.

命题 1.1.6 (测度的一些基本性质). 设 μ 是 σ 环 \mathcal{R} 上的测度, 则以下结论成立

1. 当 $A, B \in \mathcal{R}$ 且 $A \subset B$ 时, $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. 若 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 \mathcal{R} 的单调增序列, 那么

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).$$

3. 若 $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 \mathcal{R} 中的单调降序列且 $\mu(A_1) < \infty$, 则

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).$$

4. 若 $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$, 那么

$$\mu(\underline{\lim} A_n) \leq \overline{\lim} \mu(A_n),$$

如果还知道 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$, 则

$$\mu(\overline{\lim} A_n) \geq \overline{\lim} \mu(A_n).$$

1.2 可测函数、积分

定义 1.2.1 (可测函数). 设 (X, \mathcal{A}) 是可测空间, $E \in \mathcal{A}$. 设 f 是 E 上的广义实值函数. 如果对任意 $a \in \mathbb{R}$, $\{x \in E : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$, 则称 f 是 E 上的 \mathcal{A} 可测函数.

定义 1.2.2 (简单函数). 设 (X, \mathcal{A}) 是可测空间, E_1, \dots, E_n 是 \mathcal{A} 中 n 个两两不交的集合, 使得 $\bigcup_{i=1}^n E_i = X$, 称

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}(x), \quad x \in X$$

为简单函数.

定理 1.2.3 (简单函数逼近非负可测函数). 设 f 是可测集 E 上的非负可测函数, 则存在一列非负简单函数 $f_n, n \in \mathbb{N}$, 使得在 E 上 $f_n \nearrow f$.

定理 1.2.4 (Eropob). 设 (X, \mathcal{A}, μ) 是测度空间, $E \in \mathcal{A}$ 且 $\mu(E) < \infty$. 设 f_n 是 E 上的可测的 $\mu - a.e.$ 有限函数. 若 $\{f_n\}$ 在 E 上 $\mu - a.e.$ 收敛, 那么, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $A \subset E, A \in \mathcal{A}$, 使得 $\mu(E \setminus A) < \epsilon$ 并且 $\{f_n\}$ 在 A 上一致收敛.

定义 1.2.5 (依测度收敛). 设 (X, \mathcal{A}, μ) 是测度空间, f 和 f_n 是 X 上 \mathcal{A} 可测函数, 若

$$\forall \delta > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \delta\}) = 0,$$

则称 f_n 依测度 μ 收敛到 f , 记作 $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

定理 1.2.6 (F.Riesz). 若 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则有子列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ $\mu-a.e.$ 收敛到 f .