

# 测度论（王昆扬）

李佶操

24212792

2025-11-16

# 目录

第一章 抽象测度和积分	2
1.1 测度	2
1.2 可测函数、积分	3
1.3 $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$	5
1.4 符号测度	5
1.4.1 符号测度的分解	5
1.4.2 测度的绝对连续与奇异的概念	6
1.5 Radon-Nikodym 定理	7
1.6 外测度	9
1.6.1 外测度诱导的测度	9
1.6.2 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue-Stieltjes 外测度	10
1.6.3 Lebesgue-Stieltjes 积分	10
1.7 乘积测度和 Fubini 定理	11

# 第一章 抽象测度和积分

## 1.1 测度

**定义 1.1.1** ( $\sigma$  环和  $\sigma$  代数). 设  $X$  是一个集合,  $\mathcal{R}$  是  $X$  的一些子集构成的非空的族, 若  $\mathcal{R}$  满足下述条件:

- (1)  $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$ ;
- (2)  $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ ,

则称  $\mathcal{R}$  是  $X$  上的  $\sigma$  环. 若  $\mathcal{A}$  是  $X$  上的  $\sigma$  环使得  $X \in \mathcal{A}$ , 则称  $\mathcal{A}$  为  $X$  上的  $\sigma$  代数.

注意,  $\sigma$  环  $\mathcal{R}$  一定包含  $\emptyset$ , 由于

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus A_n \right),$$

因此  $\mathcal{R}$  对于可列交运算也封闭. 但是因为  $X$  可以不在  $\mathcal{R}$  中, 因此  $\mathcal{R}$  可以不对余运算封闭.

**定义 1.1.2** (可测空间). 设  $\mathcal{A}$  是集  $X$  上的  $\sigma$  代数, 把  $X$  与  $\mathcal{A}$  合起来叫做可测空间, 记作  $(X, \mathcal{A})$ .

**定义 1.1.3** (测度、符号测度). 设  $\mathcal{R}$  是  $X$  上的  $\sigma$  环,  $\phi$  是  $\mathcal{R}$  上的函数. 如果  $\phi$  满足

- (1)  $\phi(\emptyset) = 0$ ;
- (2)  $\phi$  具有可列可加性, 即当  $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$  且  $A_m \cap A_n = \emptyset$  ( $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$ )

时  $\phi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)$  成立.

则称  $\phi$  是  $\mathcal{R}$  上的符号测度. 不取负值的符号测度叫做测度.

**定义 1.1.4** (测度空间、完全的测度空间). 若  $(X, \mathcal{A})$  是可测空间,  $\mu$  是  $\mathcal{A}$  上的测度, 则称三元组  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  为测度空间, 并称  $\mathcal{A}$  中的元为  $\mu$  可测集.

一个测度空间  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  如果使零测度集每个子集都可测, 就叫做完全的.

**定义 1.1.5** (有限测度、 $\sigma$  有限测度). 设  $(X, \mathcal{A})$  是可测空间,  $\phi$  是  $\mathcal{A}$  上的符号测度. 若  $\phi$  只取有限值, 则称  $\phi$  为有限的. 若  $X$  可表示为  $\mathcal{A}$  中可列个集  $E_k$  的并,  $k \in \mathbb{N}$ , 使得  $\phi(E_k) \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ , 则称  $\phi$  是  $\sigma$  有限的.

**命题 1.1.6** (测度的一些基本性质). 设  $\mu$  是  $\sigma$  环  $\mathcal{R}$  上的测度, 则以下结论成立

1. 当  $A, B \in \mathcal{R}$  且  $A \subset B$  时,  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

2. 若  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  是  $\mathcal{R}$  的单调增序列, 那么

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).$$

3. 若  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  是  $\mathcal{R}$  中的单调降序列且  $\mu(A_1) < \infty$ , 则

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).$$

4. 若  $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$ , 那么

$$\mu(\underline{\lim} A_n) \leq \underline{\lim} \mu(A_n),$$

如果还知道  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$ , 则

$$\mu(\overline{\lim} A_n) \geq \overline{\lim} \mu(A_n).$$

## 1.2 可测函数、积分

**定义 1.2.1** (可测函数). 设  $(X, \mathcal{A})$  是可测空间,  $E \in \mathcal{A}$ . 设  $f$  是  $E$  上的广义实值函数. 如果对任意  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\{x \in E : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$ , 则称  $f$  是  $E$  上的  $\mathcal{A}$  可测函数.

**定义 1.2.2** (简单函数). 设  $(X, \mathcal{A})$  是可测空间,  $E_1, \dots, E_n$  是  $\mathcal{A}$  中  $n$  个两两不交的集合, 使得  $\bigcup_{i=1}^n E_i = X$ , 称

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}(x), \quad x \in X$$

为简单函数.

**定理 1.2.3** (简单函数逼近非负可测函数). 设  $f$  是可测集  $E$  上的非负可测函数, 则存在一系列非负简单函数  $f_n, n \in \mathbb{N}$ , 使得在  $E$  上  $f_n \uparrow f$ .

**定理 1.2.4** (Eropob). 设  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  是测度空间,  $E \in \mathcal{A}$  且  $\mu(E) < \infty$ . 设  $f_n$  是  $E$  上的可测的  $\mu - a.e.$  有限函数. 若  $\{f_n\}$  在  $E$  上  $\mu - a.e.$  收敛, 那么, 对任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $A \subset E, A \in \mathcal{A}$ , 使得  $\mu(E \setminus A) < \epsilon$  并且  $\{f_n\}$  在  $A$  上一致收敛.

**定义 1.2.5** (依测度收敛). 设  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  是测度空间,  $f$  和  $f_n$  是  $X$  上  $\mathcal{A}$  可测函数, 若

$$\forall \delta > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \delta\}) = 0,$$

则称  $f_n$  依测度  $\mu$  收敛到  $f$ , 记作  $f_n \xrightarrow{\mu} f$ .

**定理 1.2.6** (F.Riesz). 若  $f_n \xrightarrow{\mu} f$ , 则有子列  $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$   $\mu - a.e.$  收敛到  $f$ .

**定理 1.2.7** (Levi). 设  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f_k$  可测且  $f_k \rightarrow f$  ( $k \rightarrow \infty$ ). 则

1. 若  $\exists \varphi \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$  使得  $f_k \uparrow f$  且  $\varphi \leq f_k$  (对一切  $k$ ), 则

$$\int_X f_k d\mu \uparrow \int_X f d\mu.$$

2. 若  $\exists \varphi \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$  使得  $f_k \downarrow f$  且  $\varphi \geq f_k$  (对一切  $k$ ), 则

$$\int_X f_k d\mu \downarrow \int_X f d\mu.$$

**定理 1.2.8** (Fatou). 设  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f_k$  可测, 则

1. 若  $\exists \varphi \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$  使得  $\varphi \geq f_k$  (对一切  $k$ ), 则

$$\int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu.$$

2. 若  $\exists \varphi \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$  使得  $\varphi \leq f_k$  (对一切  $k$ ), 则

$$\int_X \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu.$$

**定理 1.2.9** (Lebesgue 支配收敛). 设  $f_k$  为  $\mathcal{A}$ -可测并满足  $f_k \rightarrow f$ . 若存在  $\varphi \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$  使得  $|f_k| \leq \varphi$  (对所有  $k$ ), 则

$$\int_X f_k d\mu \rightarrow \int_X f d\mu \quad (k \rightarrow \infty).$$

**定理 1.2.10.** 设  $f \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$ , 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对一切  $A \in \mathcal{A}$ , 只要  $\mu(A) < \delta$ , 就有

$$\int_X |f| \chi_A d\mu < \varepsilon.$$

注 以后我们把  $\int_X f \chi_A d\mu$  写作  $\int_A f d\mu$ .

### 1.3 $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$

**定义 1.3.1** ( $L^p$  空间). 设  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  是测度空间,  $f$  表示  $X$  上的广义实值  $\mathcal{A}$  可测函数,  $0 < p < \infty$ . 定义

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : |f|^p \in L(X, \mathcal{A}, \mu)\}, \quad \|f\|_p = \|f\|_{L^p(X, \mathcal{A}, \mu)} = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

本质上确界范数 ( $\infty$ -范数) 定义为

$$\|f\|_\infty = \inf_{\mu(E)=0} \sup\{|f(x)| : x \in X \setminus E\}, \quad L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : \|f\|_\infty < \infty\}.$$

为了估计  $L^p$  范数, 我们有必要引入分布函数的概念.

**定义 1.3.2** (分布函数). 设  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  是测度空间,  $f$  是  $\mu - a.e.$  有限的可测函数, 称

$$\lambda(t) := \mu(\{x \in X : f(x) \geq t\}) \quad t \in \mathbb{R}$$

叫做  $f$  的分布函数. 显然  $\lambda(t)$  是单调递减且右连续的.

**定理 1.3.3.** 设  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  是测度空间,  $f$  为  $\mu - a.e.$  有限的非负可测函数,  $\lambda$  是其分布函数, 则

$$\int_X f d\mu = \int_{(0, \infty)} \lambda(t) dt$$

右端为 Lebesgue 积分.

这个定理告诉我们, 通过分布函数, 可以将抽象的测度空间中的积分转化为 Lebesgue 积分来计算. 一个经典的例子就是概率空间中的分布函数来计算期望.

**推论 1.3.4.** 设  $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $0 < p < \infty$ ,  $\lambda$  为  $|f|$  的分布函数, 则

$$\int_X |f|^p d\mu = p \int_{(0, \infty)} t^{p-1} \lambda(t) dt.$$

## 1.4 符号测度

本节讨论符号测度的分解及其与测度的关系, 引入绝对连续与奇异的概念.

### 1.4.1 符号测度的分解

**定义 1.4.1** (正集、负集、零集). 设  $\mu$  是可测空间  $(X, \mathcal{A})$  上的符号测度. 如果  $P \in \mathcal{A}$  满足下述条件:

$$\mu(P \cap E) \geq 0, \quad \forall E \in \mathcal{A},$$

则称  $P$  是  $\mu$  的正集.  $-\mu$  的正集成为  $\mu$  的负集. 既正又负的可测集叫做零集.

**定理 1.4.2** (正集的存在性). 设  $\mu$  是可测空间  $(X, \mathcal{A})$  上的符号测度,  $E \in \mathcal{A}$ . 若  $\mu(E) > 0$ , 则存在  $\mathcal{A}$  可测集  $S \subset E, \mu(S) > 0$ , 且  $S$  是  $\mu$  的正集.

**定理 1.4.3** (Hahn 分解). 设  $\mu$  是可测空间  $(X, \mathcal{A})$  上的符号测度. 那么, 存在  $P \in \mathcal{A}$ , 使得  $P$  为  $\mu$  的正集,  $P^c$  是  $\mu$  的负集. 并且在以下意义下是唯一的: 若存在另一个 Hahn 分解  $(P_1, P_1^c)$ , 则对于任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 有

$$\mu(P_1 \cap A) = \mu(P \cap A), \mu(P_1^c \cap A) = \mu(P^c \cap A).$$

**定义 1.4.4** (正变差、负变差与全变差). 设可测空间  $(X, \mathcal{A})$ ,  $\mu$  为其上的符号测度. 对任意  $E \in \mathcal{A}$ , 定义

$$\mu^+(E) = \sup_{A \in \mathcal{A}} \mu(A \cap E), \quad \mu^-(E) = \sup_{A \in \mathcal{A}} \{-\mu(A \cap E)\},$$

并令

$$|\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E).$$

分别称为  $\mu$  在  $E$  上的正变差、负变差与全变差.

**定理 1.4.5** (正变差与负变差是测度). 设  $\mu$  是可测空间  $(X, \mathcal{A})$  上的符号测度, 若  $P, P^c$  分别为  $\mu$  的正集与负集, 则对任意  $E \in \mathcal{A}$ , 有

$$\begin{aligned} \mu^+(E) &= \mu(E \cap P), \\ \mu^-(E) &= -\mu(E \cap P^c). \end{aligned}$$

**定理 1.4.6.** (Jordan 分解) 设  $\mu$  是可测空间  $(X, \mathcal{A})$  上的符号测度, 那么可以分解为两个测度的差, 即

$$\mu = \mu^+ - \mu^-.$$

有了 Jordan 分解之后, 我们定义符号测度上的抽象积分为

**定义 1.4.7.** 若  $f \in L(X, \mathcal{A}, |\mu|)$ , 则定义  $f$  在  $X$  上关于  $\mu$  的积分为

$$\int_X f d\mu := \int_X f d\mu^+ - \int_X f d\mu^-.$$

## 1.4.2 测度的绝对连续与奇异的概念

**定义 1.4.8** (绝对连续). 设  $(X, \mathcal{A})$  为可测空间,  $\mu$  与  $\nu$  为其上的符号测度. 若对一切  $E \in \mathcal{A}$ , 都有

$$|\mu|(E) = 0 \implies \nu(E) = 0,$$

则称  $\nu$  关于  $\mu$  绝对连续, 记作  $\nu \ll \mu$ .

**例 1.4.9.** 设  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  为测度空间,  $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ , 并定义

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

则有  $\nu \ll \mu$ .

**定理 1.4.10** (特殊情形下绝对连续的充要条件). 设  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  是测度空间,  $\nu$  是  $(X, \mathcal{A})$  上的有限符号测度. 则  $\nu \ll \mu$  的充要条件是: 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对所有  $A \in \mathcal{A}$ , 若  $\mu(A) < \delta$  则有  $|\nu|(A) < \varepsilon$ .

**定义 1.4.11** (相互奇异). 设  $(X, \mathcal{A})$  为可测空间,  $\mu$  与  $\nu$  为符号测度. 若存在  $A \in \mathcal{A}$ , 使

$$|\mu|(A) = 0 \quad \text{且} \quad |\nu|(A^c) = 0,$$

则称  $\mu$  与  $\nu$  相互奇异 (亦称  $\mu$  关于  $\nu$  奇异), 记作  $\mu \perp \nu$ .

**定理 1.4.12** (特殊情形下相互奇异的充要条件). 设  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  为测度空间,  $\nu$  是  $(X, \mathcal{A})$  上的符号测度. 则  $\nu \perp \mu$  的充要条件是:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists E \in \mathcal{A} \text{ 使得 } \mu(E) < \varepsilon \text{ 且 } |\nu|(E^c) < \varepsilon.$$

## 1.5 Radon-Nikodym 定理

本节我们将介绍两个重要的定理, 一个是 Lebesgue 分解定理, 一个是 Radon-Nikodym 定理. Lebesgue 分解定理告诉我们, 任意一个  $\sigma$  有限的符号测度, 都可以分解为两部分, 一部分是绝对连续的, 另一部分是奇异的. Radon-Nikodym 定理则告诉我们, 若一个  $\sigma$  有限的符号测度关于另一个测度是绝对连续的, 那么符号测度可以写成另一测度的积分的形式, 这在将抽象积分转化为具体积分时有很大的作用.

**定理 1.5.1** (Radon-Nikodym). 设  $\mu, \nu$  都是测度空间  $(X, \mathcal{A})$  上的有限测度. 若  $\nu \ll \mu$ , 则存在一个非负函数  $f_0 \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ , 使得对一切非负可测函数  $f$ ,

$$\int_X f d\nu = \int_X f f_0 d\mu.$$

特别地, 对一切  $A \in \mathcal{A}$ ,

$$\nu(A) = \int_A f_0 d\mu.$$

(此时  $f_0 = \frac{d\nu}{d\mu}$  为 Radon-Nikodym 导数.)



**定理 1.5.2** (Radon–Nikodym). 设  $(X, \mathcal{A})$  是可测空间,  $\mu, \nu$  是  $(X, \mathcal{A})$  上的  $\sigma$  有限测度. 若  $\nu \ll \mu$ , 则存在唯一的 (按  $\mu$ -a.e. 意义) 非负  $\mathcal{A}$  可测函数  $f_0$ , 使得:

1. 对一切非负可测函数  $f$  以及一切  $f \in L(X, \mathcal{A}, \nu)$ , 都有

$$\int_X f d\nu = \int_X f f_0 d\mu.$$

2. 对一切  $A \in \mathcal{A}$ , 都有

$$\nu(A) = \int_A f_0 d\mu.$$

已知: 若  $\varphi$  为符号测度, 则  $\int_X f d\varphi = \int_X f d\varphi^+ - \int_X f d\varphi^-$ . 由 R–N 定理与 Hahn 分解可得下述符号测度版定理.

**定理 1.5.3** (Radon–Nikodym 定理, 符号测度版). 设  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  是  $\sigma$  有限测度空间,  $\varphi$  是  $(X, \mathcal{A})$  上的  $\sigma$  有限符号测度. 若  $\varphi \ll \mu$ , 则存在 (按  $\mu$ -a.e. 意义唯一的) 可测函数  $f_0$ , 使得:

1. 对一切  $f \in L(X, \mathcal{A}, |\varphi|)$ , 都有

$$\int_X f d\varphi = \int_X f f_0 d\mu.$$

2. 对一切  $A \in \mathcal{A}$ , 都有

$$\varphi(A) = \int_A f_0 d\mu.$$

3. 对一切  $A \in \mathcal{A}$ , 都有

$$|\varphi|(A) = \int_A |f_0| d\mu.$$

此外,  $f_0$  在  $\mu$ -a.e. 意义下唯一.

**推论 1.5.4.** 设  $\varphi$  是  $(X, \mathcal{A})$  上的  $\sigma$  有限符号测度. 则存在可测函数  $f_0$  (按  $|\varphi|$ -a.e. 意义唯一), 使得:

1. 对一切  $f \in L(X, \mathcal{A}, |\varphi|)$ ,

$$\int_X f d\varphi = \int_X f f_0 d|\varphi|.$$

2. 对一切  $A \in \mathcal{A}$ ,

$$\varphi(A) = \int_A f_0 d|\varphi|.$$

3.  $|f_0| = 1$  在  $|\varphi|$ -a.e. 意义下.

**定理 1.5.5** (Lebesgue 分解). 设  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  是  $\sigma$  有限测度空间,  $\nu$  是  $(X, \mathcal{A})$  上的  $\sigma$  有限符号测度. 则存在唯一的一对  $\sigma$  有限符号测度  $\nu_1, \nu_2$  使得

$$\nu = \nu_1 + \nu_2, \quad \nu_1 \ll \mu, \quad \nu_2 \perp \mu.$$

## 1.6 外测度

### 1.6.1 外测度诱导的测度

**定义 1.6.1** (外测度). 设  $X$  是集合,  $\mathcal{M} = 2^X$ , 设  $\mu^*$  是  $\mathcal{M}$  上的广义实值集函数, 满足

1.  $\forall A \in \mathcal{M}, \mu^*(A) \geq 0; \mu^*(\emptyset) = 0;$
2.  $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B);$
3.  $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow \mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i),$

称  $\mu^*$  为  $X$  上的外测度. 性质 (3) 称为可列次加性.

若  $\mu^*(X) < \infty$ , 称  $\mu^*$  为有限的; 若对于每个  $i \in \mathbb{N}$  存在  $E_i$ , 使得  $\mu^*(E_i) < \infty$  并且  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ , 则称  $\mu^*$  是  $\sigma$  有限的.

**定义 1.6.2** (外测度诱导的测度). 设  $\mu^*$  是  $X$  上的外测度. 若  $E \subset X$  满足下述以数学家 Carathéodory 的名字命名的条件:

$$\forall A \subset X, \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c),$$

则称  $E$  为  $\mu^*$  可测集, 简称为可测集.

**定理 1.6.3** (外测度诱导测度的合理性). 设  $\mu^*$  是  $X$  上的外测度,  $\mathcal{A}$  为  $\mu^*$  可测集之全体, 则以下结论成立

1.  $\mathcal{A}$  是  $\sigma$  代数;
2. 设  $\mu$  是  $\mu^*$  在  $\mathcal{A}$  上的限制, 则  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  为完全的测度空间.

注意, 外测度是对  $X$  的所有子集都定义的, 我们把所有满足 Carathéodory 条件的子集结合起来, 记为集合  $\mathcal{A}$ , 恰好是一个  $\sigma$  代数, 那么  $\mu^*$  限制在其上, 就是测度. 除此之外, 这个测度还是完全的! 即零测集的子集是可测的.

**定义 1.6.4** (外测度的正则性). 设  $\mu^*$  是  $X$  上的外测度,  $(X, \mathcal{A}, \mu^*)$  是  $\mu^*$  诱导的测度空间. 若对任意  $E \subset X$ , 存在  $A \in \mathcal{A} \supset E$ , 使得

$$\mu^*(E) = \mu(A),$$

则称  $\mu^*$  是正则的.

**定义 1.6.5** (距离外测度). 设  $(X, d)$  是距离空间,  $\mu^*$  是  $X$  上的外测度. 若  $\mu^*$  满足下述条件:  $\forall E_1, E_2 \subset X$ , 当

$$\rho(E_1, E_2) := \inf\{d(x_1, x_2) : x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\} > 0$$

时

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2),$$

则称  $\mu^*$  为  $X$  上 (或  $(X, d)$  上) 的距离外测度.

**定义 1.6.6** (Borel 代数). 设  $(X, d)$  是距离空间.  $X$  中的全体开集生成的  $\sigma$  代数记作  $\mathcal{B}$  (即包含全体开集的最小  $\sigma$  代数), 叫 Borel 代数.

**定理 1.6.7.** 设  $\mu^*$  是距离空间  $(X, d)$  上的距离外测度,  $\mu^*$  可测集之全体记为  $\mathcal{A}$ , 则  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ .

### 1.6.2 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue-Stieltjes 外测度

设  $f$  是  $\mathbb{R}$  上的单调递增实值函数, 对于有限区间  $(a, b] \subset \mathbb{R}$ , 定义

$$\lambda_f((a, b]) = f(b) - f(a),$$

当  $a = b$  时, 认为  $(a, b] = \emptyset$ .

对于  $A \subset \mathbb{R}$ , 定义

$$\Lambda_f^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_f((a_k, b_k]) : \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k] \supset A \right\}.$$

由此定义知,  $\Lambda_f^*(\emptyset) = 0$ .

那么  $\Lambda_f^*$  是  $\mathbb{R}$  上的外测度. 我们称之为由  $f$  决定的 L-S 外测度, 由它导出的测度记为  $\Lambda_f$ , 叫作由  $f$  决定的 L-S 测度.

**定理 1.6.8.**  $\Lambda_f^*$  是正规的距离外测度.

### 1.6.3 Lebesgue-Stieltjes 积分

设  $f$  是  $\mathbb{R}$  上的实值单调增函数,  $\Lambda_f^*$  是由  $f$  决定的 L-S 外测度, 它导出测度空间  $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \Lambda_f)$ . 我们已经证明  $\Lambda_f^*$  可测集全体一  $\sigma$  代数  $\mathcal{A}$ , 包含着 Borel 集的全体一  $\sigma$  代数  $\mathcal{B}$ . 将  $\Lambda_f$  限制在  $\mathcal{B}$  上,  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \Lambda_f)$  亦为一测度空间.

由定理 1.6.4 的证明看到,

$$\forall A \in \mathcal{A}, \exists B \in \mathcal{B}, A = B \setminus Z, \Lambda_f(Z) = 0.$$

由此可见,  $\mathcal{A}$  与  $\mathcal{B}$  实际上并不差多少, 然而  $\mathcal{B}$  的结构比  $\mathcal{A}$  明白得多.

我们说到 L-S 积分指的是测度空间  $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \Lambda_f)$  或  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \Lambda_f)$  上的积分, 其中  $\Lambda_f$  是由一个单调增加有限实值函数导出的 L-S 测度.

**定理 1.6.9** (Riemann–Stieltjes 和抽象积分之间的联系). 设  $f$  是  $\mathbb{R}$  上单调增右连续实值函数,  $g$  是  $\mathbb{R}$  上的有界  $\mathcal{B}$  可测函数. 若在有限区间  $[a, b]$  上 Riemann–Stieltjes 积分  $\int_a^b g df$  存在, 则

$$\int_{\mathbb{R}} g \chi_{(a,b)} d\Lambda_f = \int_a^b g df.$$

在小节 1.6.2, 1.6.3 中我们已经看到一个由外测度产生测度的实例. 在这个例子中, 当  $f$  取恒等函数, 即  $f(x) = x$  时, 我们就回到了寻常的 Lebesgue 测度.

## 1.7 乘积测度和 Fubini 定理

我们构造两种乘积测度, 一种是根据集合  $\sigma$  代数构造的, 另一种根据外测度诱导得到.

**定义 1.7.1** (可测矩形). 设  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  和  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  是两个测度空间. 令  $X \times Y$  表示  $X$  和  $Y$  的乘积, 即

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

1. 若  $A \subset X, B \subset Y$ , 则  $A \times B$  叫作  $X \times Y$  的矩形. 当  $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$  时,  $A \times B$  叫作可测矩形. 用字母  $\mathcal{R}$  表示可测矩形之全体, 用  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  表示  $X \times Y$  上的包含  $\mathcal{R}$  的最小  $\sigma$  代数.
2. 在  $\mathcal{R}$  上定义函数  $\lambda$ :

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \quad A \times B \in \mathcal{R},$$

可以把  $\lambda(A \times B)$  叫作  $A \times B$  的面积.

**定义 1.7.2** (乘积空间的外测度). 对于每个集  $E \subset X \times Y$ , 令

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) : I_k \in \mathcal{R}, \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset E \right\}.$$

**定理 1.7.3.**  $\lambda^*$  是  $X \times Y$  上的外测度, 且

$$\lambda^*(I) = \lambda(I), \forall I \in \mathcal{R}.$$

设  $\mathcal{M}$  是上述外测度诱导的测度, 则可以定义乘积测度空间:

**定义 1.7.4** (乘积测度空间). 上述  $(X \times Y, \mathcal{M}, \lambda)$ , 和  $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \lambda)$  都叫作  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  和  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  的乘积测度空间; 相应地  $\lambda = \mu \times \nu$  叫乘积测度.

**定理 1.7.5.**

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{M}.$$