测度论（王昆扬）

李佶操

24212792

2025-11-16

目录

第一章　抽象测度和积分

1.1　测度

定义 1.1.1 (σ 环和 σ 代数)**.** 设 X 是一个集合，$\mathscr{R}$ 是 X 的一些子集构成的非空的族，若 $\mathscr{R}$ 满足下述条件:

（1）$A, B \in \mathscr{R} \Rightarrow A \backslash B \in \mathscr{R}$;

（2）$A_n \in \mathscr{R}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$,

则称 $\mathscr{R}$ 是 X 上的 σ 环. 若 $\mathscr{A}$ 是 X 上的 σ 环使得 $X \in \mathscr{A}$，则称 $\mathscr{A}$ 为 X 上的 σ 代数.

注意，σ 环 $\mathscr{R}$ 一定包含 $\emptyset$，由于

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \backslash A_n \right),$$

因此 $\mathscr{R}$ 对于可列交运算也封闭. 但是因为 X 可以不在 $\mathscr{R}$ 中，因此 $\mathscr{R}$ 可以不对余运算封闭.

定义 1.1.2 (可测空间)**.** 设 $\mathscr{A}$ 是集 X 上的 σ 代数，把 X 与 $\mathscr{A}$ 合起来叫做可测空间，记作 $(X, \mathscr{A})$.

定义 1.1.3 (测度、符号测度)**.** 设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的 σ 环，ϕ 是 $\mathscr{R}$ 上的函数. 如果 ϕ 满足

（1）$\phi(\emptyset) = 0$;

（2）ϕ 具有可列可加性，即当 $A_n \in \mathscr{R}, n \in \mathbb{N}$ 且 $A_m \cap A_n = \varnothing \ \ (\forall m, n \in \mathbf{N}, m \neq n)$ 时 $\varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ 成立.

则称 ϕ 是 $\mathscr{R}$ 上的符号测度. 不取负值的符号测度叫做测度.

定义 1.1.4 (测度空间、完全的测度空间)**.** 若 $(X, \mathscr{A})$ 是可测空间，μ 是 $\mathscr{A}$ 上的测度，则称三元组 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 为测度空间，并称 $\mathscr{A}$ 中的元为 μ 可测集.

一个测度空间 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 如果使零测度集每个子集都可测，就叫做完全的.

定义 1.1.5 (有限测度、σ 有限测度)**.** 设 $(X,\mathscr{A})$ 是可测空间，ϕ 是 $\mathscr{A}$ 上的符号测度. 若 ϕ 只取有限值，则称 ϕ 为有限的. 若 X 可表示为 $\mathscr{A}$ 中可列个集 E_k 的并，$k\in\mathbb{N}$，使得 $\phi(E_k)\in\mathbb{R},k\in\mathbb{N}$，则称 ϕ 是 σ 有限的.

命题 1.1.6 (测度的一些基本性质)**.** *设 μ 是 σ 环 $\mathscr{R}$ 上的测度，则以下结论成立*

1. *当 $A,B\in\mathscr{R}$ 且 $A\subset B$ 时，$\mu(A)\leqslant\mu(B)$.*
2. *若 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathscr{R}$ 的单调增序列, 那么*

$$\mu(\lim A_n)=\lim\mu(A_n).$$

3. *若 $\{\mathscr{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathscr{R}$ 中的单调降序列且 $\mu(A_1)<\infty$, 则*

$$\mu(\lim A_n)=\lim\mu(A_n).$$

4. *若 $A_n\in\mathscr{R},n\in\mathbf{N}$, 那么*

$$\mu(\underline{\lim}A_n)\leqslant\underline{\lim}\mu(A_n),$$

如果还知道 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)<\infty$, 则

$$\mu(\overline{\lim}A_n)\geqslant\overline{\lim}\mu(A_n).$$

1.2　可测函数、积分

定义 1.2.1 (可测函数)**.** 设 $(X,\mathscr{A})$ 是可测空间，$E\in\mathscr{A}$. 设 f 是 E 上的广义实值函数. 如果对任意 $a\in\mathbb{R}$，$\{x\in E:f(x)>a\}\in\mathscr{A}$，则称 f 是 E 上的 $\mathscr{A}$ 可测函数.

定义 1.2.2 (简单函数)**.** 设 $(X,\mathscr{A})$ 是可测空间，$E_1,\ldots,E_n$ 是 $\mathscr{A}$ 中 n 个两两不交的集合，使得 $\cup_{i=1}^{n}E_i=X$，称

$$\phi(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathcal{X}_{E_i}(x),\quad x\in X$$

为简单函数.

定理 1.2.3 (简单函数逼近非负可测函数)**.** *设 f 是可测集 E 上的非负可测函数，则存在一列非负简单函数 $f_n,n\in\mathbb{N}$，使得在 E 上 $f_n\uparrow f$.*

定理 1.2.4 (Eropob)**.** *设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是测度空间，$E\in\mathscr{A}$ 且 $\mu(E)<\infty$. 设 f_n 是 E 上的可测的 $\mu-a.e.$ 有限函数. 若 $\{f_n\}$ 在 E 上 $\mu-a.e.$ 收敛，那么，对任意 $\epsilon>0$，存在 $A\subset E,A\in\mathscr{A}$，使得 $\mu(E\backslash A)<\epsilon$ 并且 $\{f_n\}$ 在 A 上一致收敛.*

定义 1.2.5 (依测度收敛)**.** 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是测度空间，f 和 f_n 是 X 上 $\mathscr{A}$ 可测函数，若

$$\forall \delta > 0, \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X: | f(x) - f_n(x) | \geqslant \delta\}) = 0,$$

则称 f_n 依测度 μ 收敛到 f，记作 $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

定理 1.2.6 (F.Riesz)**.** 若 $f_n \xrightarrow{\mu} f$，则有子列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ $\mu - a.e.$ 收敛到 f.

定理 1.2.7 (Levi)**.** 设 $k \in \mathbb{N}$，f_k 可测且 $f_k \to f$ $(k \to \infty)$. 则

1. 若 $\exists \varphi \in L(X, \mathscr{A}, \mu)$ 使得 $f_k \uparrow f$ 且 $\varphi \leq f_k$（对一切 k），则

$$\int_X f_k \, \mathrm{d}\mu \uparrow \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

2. 若 $\exists \varphi \in L(X, \mathscr{A}, \mu)$ 使得 $f_k \downarrow f$ 且 $\varphi \geq f_k$（对一切 k），则

$$\int_X f_k \, \mathrm{d}\mu \downarrow \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

定理 1.2.8 (Fatou)**.** 设 $k \in \mathbb{N}$，f_k 可测，则

1. 若 $\exists \varphi \in L(X, \mathscr{A}, \mu)$ 使得 $\varphi \geq f_k$（对一切 k），则

$$\int_X \liminf_{k\to\infty} f_k \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu.$$

2. 若 $\exists \varphi \in L(X, \mathscr{A}, \mu)$ 使得 $\varphi \leq f_k$（对一切 k），则

$$\int_X \limsup_{k\to\infty} f_k \, \mathrm{d}\mu \geq \limsup_{k\to\infty} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu.$$

定理 1.2.9 (Lebesgue 支配收敛)**.** 设 f_k 为 $\mathscr{A}$-可测并满足 $f_k \to f$. 若存在 $\varphi \in L(X, \mathscr{A}, \mu)$ 使得 $|f_k| \leq \varphi$（对所有 k），则

$$\int_X f_k \, \mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_X f \, \mathrm{d}\mu \qquad (k \to \infty).$$

定理 1.2.10. 设 $f \in L(X, \mathscr{A}, \mu)$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对一切 $A \in \mathscr{A}$，只要 $\mu(A) < \delta$，就有

$$\int_X |f| \, \chi_A \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

注　以后我们把 $\int_X f\chi_A \, \mathrm{d}\mu$ 写作 $\int_A f \, \mathrm{d}\mu$.