幂级数 收敛域 和函数

1. $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ $(n+1)a_{n+1}=(n+\frac{1}{2})a_n$ 证明：当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，并求其和函数

$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}=1$ ∴ $R=1$ ∴ $|x|<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 则 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+\frac{1}{2})a_nx^n=$

$1+\frac{1}{2}S(x)+xS'(x)$ 即 $S'(x)-\frac{1}{2(1-x)}S(x)=\frac{1}{1-x}$

∴ $S(x)=\frac{C}{\sqrt{1-x}}-2$ $S(0)=0$ => $C=2$ ∴ $S(x)=2(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1)$ $-1<x<1$

2. 关于数列收敛与幂级数收敛。 $\lim_{n\to\infty}a_n\ \exists$ $\lim_{n\to\infty}S_n\ \exists$ $(S_n=a_1+a_2+\dots+a_n)$

①. 设正值数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$ $b_{n+1}(b_{n+1}-b_n)=a_n$ $(n=1,2,\dots)$ 则 $\{b_n\}$ 收敛是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的 ____ 条件。

$a_n>0$ $b_n>0$ ∴ $b_{n+1}-b_n>0$ ∴ $b_n\uparrow$ $b_1=1$ ∴ $b_n\geq1$ $a_n=b_{n+1}(b_{n+1}-b_n)\geq b_{n+1}-b_n$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_{n+1}-b_n=b_2-b_1+b_3-b_2+\dots+b_{n+1}-b_n=\lim_{n\to\infty}b_{n+1}-b_1$ ∴ $\{b_n\}$ 收敛 即 $\sum_{n=1}^{\infty}b_{n+1}-b_n$ 收敛

① $\sum a_n$ 收敛 ∵ $a_n\geq b_{n+1}-b_n$ ∴ $\sum_{n=1}^{\infty}b_{n+1}-b_n$ 也收敛 即 $\{b_n\}$ 收敛

② $\{b_n\}$ 收敛 即 $\sum_{n=1}^{\infty}b_{n+1}-b_n$ 收敛。 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}b_{n+1}\ \exists\ >0$ 同敛散 ∴ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛

∴ 充要条件。

② 设$\{u_n\}$是单调增加的有界数列，则下列级数中收敛的是.

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{u_n}$ C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$

$u_n\uparrow$ 有界 $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$. $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_{i+1}^2-u_i^2 = u_2^2-u_1^2+u_3^2-u_2^2+\cdots+u_{n+1}^2-u_n^2 = u_{n+1}^2-u_1^2$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}^2-u_1^2$ $\exists$ $\therefore$ D.

u_n 取 $-\frac{1}{\ln(1+n)}$ A 发散 u_n 取 $-\frac{1}{n}$ B, C 发散

		收敛
$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$	$p>1$
$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^q x}dx$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^q n}$	$q>1$
$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}$	$p>1$ $p=1$ $q>1$

		收敛
$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^p}dx$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$	$p>1$

数列

3、$a_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$ (1) 证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2} \quad (n=2,3,\cdots)$

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

(1) ① $x=\sin t$ $\quad a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t - \sin^{n+2} t\,dt$

② 分部积分. $a_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 x^{n-1}\,x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\,d\sqrt{1-x^2} =$

$-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\int_0^1 x^{n-1}\,d(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\times(n-1)\,x^{n-2}\,dx = \frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx$

$= \frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{n-1}{3}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$ 即 $a_n = \frac{n-1}{3}a_{n-2} - \frac{n-1}{3}a_n$

$\therefore a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2} \quad (n=2,3,\cdots)$

$a_{n+1}-a_n = \int_0^1 x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}\,dx$ $[0,1]$上 $x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}\le 0$ 且不恒等于 0 $\therefore a_{n+1}-a_n<0$ 即$\{a_n\}\downarrow$

(2) $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+2}\,\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$ $\quad a_n\downarrow$ 且 $a_n>0$ $\quad\therefore \frac{n-1}{n+2} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ $\quad\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$