算法设计与分析第七次作业

曲宇勋 201928014628016 人工智能学院

2．相遇集问题

例：给定集合 S 的一个子集族 C 和一个正整数 K；

问：S 是否包含子集 S'，$|S'| \leq K$，使得 S' 与 C 中的任何一个子集的交均非空？（S' 称为 C 的相遇子集）试判定相遇集问题是 P 类的还是 NP 完全的，并给出你的证明？

Solution:

首先对于某个子集 S'，只需要遍历子集族 C 即可验证满足性，其复杂度与子集族的规模 n 和子集中中集合包含元素 m 成正比，是多项式关系，所以首先是 NP 问题。

然后以图的点覆盖问题为参照，假设有图 $G = \{V, E\}$，是否存在一个顶点子集 V'，使得所有 $e \in E$ 都与 V' 相邻，且 $|V'| \leq K$.

首先，构建集合 $S = V$，即构建包含所有顶点的集合 S，然后对于任意 i, j，若 v_i 和 v_j 之间有边，则 $\{v_i, v_j\} \in C$. 从易知这个图到构建相遇集只需要多项式时间.

假设图 G 具有一个大小不超过 K 的点覆盖 V'，那么，取 V' 对应点构成 S'，那么 $|S'| \leq K$ 一定成立，而且对于 C 中任意一个元素 c 代表某一条边，由于 V' 是全覆盖点，所以 c 中包含的两个顶点一定至少有一个属于 V'，也即 S' 与 c 交集一定非空. 所以 S' 一定为问题的一个解.

反之，若具有一个 S' 为相遇集，由于其与 C 中任何一个子集交集非空，所以其对应点集 V' 一定与所有边都相邻，所以点集一定为一个覆盖点集.

所以相遇集问题由点覆盖多项式导出. 其也为 NPC 问题.

3．0/1 整数规划问题

例：给定一个 $m \times n$ 矩阵 A 和一个 m 元整数向量 b;

问：是否存在一个 n 元 0/1 向量 x，使得 $Ax \leq b$?

试证明 0/1 整数规划问题是 NP 完全问题。

Solution:

每当给定一个 x，验证 $Ax \leq b$ 只需要多项式时间，所以该问题为 NP 问题.

设置参照问题为划分问题，已知有有限集合 A 对于每个 $a \in A$ 赋予权值 $sa \in Z^+$，是否存在子集 $A' \subset A$，使得 $\sum_{s \in A'} s(a) = \sum_{s \in A} s(a)$.

对于每个参照问题，假设共有 n 个权值，构建矩阵 A 为 $2 \times n$ 的矩阵，第一行为 $[2s_1, 2s_2, ...2s_n]$，第二行为 $[-2s_1, -2s_2, ... - 2s_n]$，b 为 2×1 的向量，$b = [\sum s(a), -\sum s(a)]^T$. 此时整数规划问题等价于求解 $s_1x_1 + s_2x_2 + ...s_nx_n = \frac{\sum s(a)}{2}$，其中 x_i 只能取 0 或 1.

那么对于将划分问题的权值排好序 $i = 1, 2, ...n$，若选取该权值则 $x_i = 1$，反之 $x_i = 0$，则划分问题完全等价于限制的整数规划问题，划分的一个解一定满足整数规划问题，限制的整数规划问题的一个解也一定满足划分问题.

所以 0/1 整数规划问题由划分问题多项式导出. 其也为 NPC 问题.
5. 独立集问题：
例：对于给定的无向图 $G=(V,E)$ 和正整数 $k(\leq |V|)$
问：G 是否包含一个于 k −独立集 V'，即是否存在一个子集 $V'\subset V,|V'|=k$，使得 V' 中的任何两个顶点在图中 G 都不相邻。
证明独立集问题都是 NPC 问题.
Solution:
给定顶点后遍历图的边就可以得到验证，这种遍历是多项式的，所以问题是 NP 的.
设定参考问题是 3SAT 问题，对于每个原子 a（共 n 个）构建个两个节点分别代表 a 与 $\sim a$，并且将两个原子之间创建连边，形成子图 $\{V_1,E_1\}$ 对于每个子句（共 m 个）构建三个节点分别代表子句内的三个原子，将子句与其对应的原子创建连边，其构成子图 $\{V_2,E_2\}$. 令 $k=m+n$.
假设得到一个解释 I，对于解释的每一个原子如果其为假，则在 V_1 中选中原子对应的节点加入 V'，反之则选择其的非加入 V'. 由于每个子句集是满足的，所以子句至少有一个原子是真的，在 V_2 中选中每个子句的原子对应的节点加入 V'，每个子句中仅选择一个原子. 通过这种方式，可以选中 $m+n$ 个节点，由于在 V_2 中选择取值为真的节点，所以，从 V_2 中选择的节点与 V_1 中取值为真的相邻，又由于在 V_1 中选择取值为假的节点，所以在 V' 中任意两个点都没有边相连接.
假设图中有一个 $k=m+n$ 的独立集 V'，易知一定在 V_1 中有 n 个点，且 V_2 中有 m 个点，取 V' 在 V_1 的 n 个点对应的原子的非为真，由于 V_2 的每个子句都包含一个点，且 V_1 中与这个点相连的对应顶点一定不在 V' 中，所以对应顶点为真，对于每个子句而言都至少有一个原子为真. 所以原问题一定满足.
所以独立集问题由 3SAT 问题多项式导出. 其也为 NPC 问题.
8. NP-完全问题一定是 NP 困难问题吗？
Solution:
是，对于任意一个 NPC 问题 Π_2，取另外一个 NPC 问题 Π_1，那么存在一种多项式变换，能够使得 Π_2 的解 x 变为 Π_1 的解 $f(x)$. 假设存在求解 Π_1 的算法 A_1，其仅需要调用一次求解 Π_2 的算法 A_2，再进行多项式复杂度的变换即可，若假设 A_1 的时间为单位时间，则所用总时间为多项式时间，所以存在从 Π_1 到 Π_2 的图灵归约.
所以 Π_2 为 NP 难的问题. 所以任意的 NPC 问题一定是 NP 难的.