Assignment-3

黎郡 2020E8017782051

Question 1

现有四个来自于两个类别的二维空间中的样本，其中第一类的两个样本为$(1,4)^T$和$(2,3)^T$， 第二类的两个样本为$(4,1)^T$和$(3,2)^T$。这里，上标 T 表示向量转置。若采用规范化增广样 本表示形式，并假设初始的权向量 $a=(0,1,0)^T$，其中向量 a 的第三维对应于样本的齐次 坐标。同时，假定梯度更新步长η_k固定为 1。试利用批处理感知器算法求解线性判别函 数 $g(y)=a^Ty$的权向量 a。（注：“规范化增广样本表示”是指对齐次坐标表示的样本进行 规范化处理）。

Answer 1

感知准则函数如下：

$$J_p(a)=\sum_{y\in Y}(-a^Ty),\text{其中}Y\text{为错分样本集合。}$$

当y被错分的时候$a^Ty\le 0$，则$-a^Ty\ge 0$。$\therefore J_p(a)$总是大于等于0。因此当可分情况下，当且仅当$Y=\emptyset$的时候$J_p(a)=0$,这时将不存在错分样本。因此分类问题可以转化为让目标函数$J_p(a):min_a J_p(a)$

对$J_p(a)$求偏导：

$$\frac{\partial J_p(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}}=-\sum_{\mathbf{y}\in Y}\mathbf{y}$$

因此，根据梯度下降法，有如下更新准则：

$$\mathbf{a}_{k+1}=\mathbf{a}_k+\eta_k\sum_{\mathbf{y}\in Y_k}\mathbf{y}$$

这里， $\mathbf{a}_{k+1}$ 是当前迭代的结果， $\mathbf{a}_k$ 是前一次迭代的 结果， Y_k 是被 $\mathbf{a}_k$ 错分的样本集合， η_k 为步长因子（更新动力因子）。

解：根据上述感知准则的原理，可以将样本按照规范化增广形式写成如下形式：

$$\begin{aligned}y_1&=(1,4,1)^T\\y_2&=(2,3,1)^T\\y_3&=(-4,-1,-1)^T\\y_4&=(-3,-2,-1)^T\\Y&=[y_1,y_2,y_3,y_4]\end{aligned}$$

根据已知$a_0=[0,1,0]^T$, 第一次迭代

$$a_0^TY=[0,1,0]\begin{bmatrix}1&2&-4&-3\\4&3&-1&-2\\1&1&-1&-1\end{bmatrix}=[4,3,-1,-2]$$

后两个样本小于0发生分类错误，由题目可知η_k固定为 1，根据梯度下降法的更新准则：

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_0 + \sum_{\mathbf{y} \in Y_k} \mathbf{y}$$
$$a_1 = a_0 + y_3 + y_4 = [-7, -2, -2]^T$$

第二次迭代

$$a_1^T Y = [-7, -2, -2] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -3 \\ 4 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = [-17, -22, 32, 27]$$

前两个样本小于零，前两个样本判错，于是

$$a_2 = a_1 + y_1 + y_2 = [-4, 5, 0]^T$$

第三次迭代

$$a_2^T Y = [16, 7, 11, 2]$$

全部样本判别正确，迭代结束，最终 $a = [-4, 5, 0]^T$

Question 2

对于多类分类情形，考虑 one-vs-all 技巧，即构建 c 个线性判别函数:

$$g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_i^T\mathbf{x} + w_{i0}, \quad i = 1, 2, \ldots, c$$

此时的决策规则为: 对 $j \neq i$, 如果 $g_i(\mathbf{x}) > g_j(\mathbf{x}), \mathbf{x}$ 则被分为 ω_i 类。现有三个二维空间内 的模式分类器，其判别函数为:

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}) &= -x_1 + x_2 \\ g_2(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 - 1 \\ g_3(\mathbf{x}) &= -x_2 \end{aligned}$$

试画出决策面，指出为何此时不存在分类不确定性区域。

Answer 2

解：对于one-vs-all问题，对于 $j \neq i$, 如果 $g_i(\mathbf{x}) > g_j(\mathbf{x}), \mathbf{x}$ 则被分为 ω_i 类

对于第一类样本,

$$\begin{cases} g_1(x) > g_2(x) \\ g_1(x) > g_3(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 > x_1 + x_2 - 1 \\ -x_1 + x_2 > -x_2 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 < \frac{1}{2} \\ x_2 > \frac{1}{2}x_1 \end{cases} \tag{1}$$

对于第二类样本,

$$\begin{cases} g_2(x) > g_1(x) \\ g_2(x) > g_3(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 1 > -x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 - 1 > -x_2 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 > \frac{1}{2} \\ 2x_2 + x_1 - 1 > 0 \end{cases} \tag{2}$$

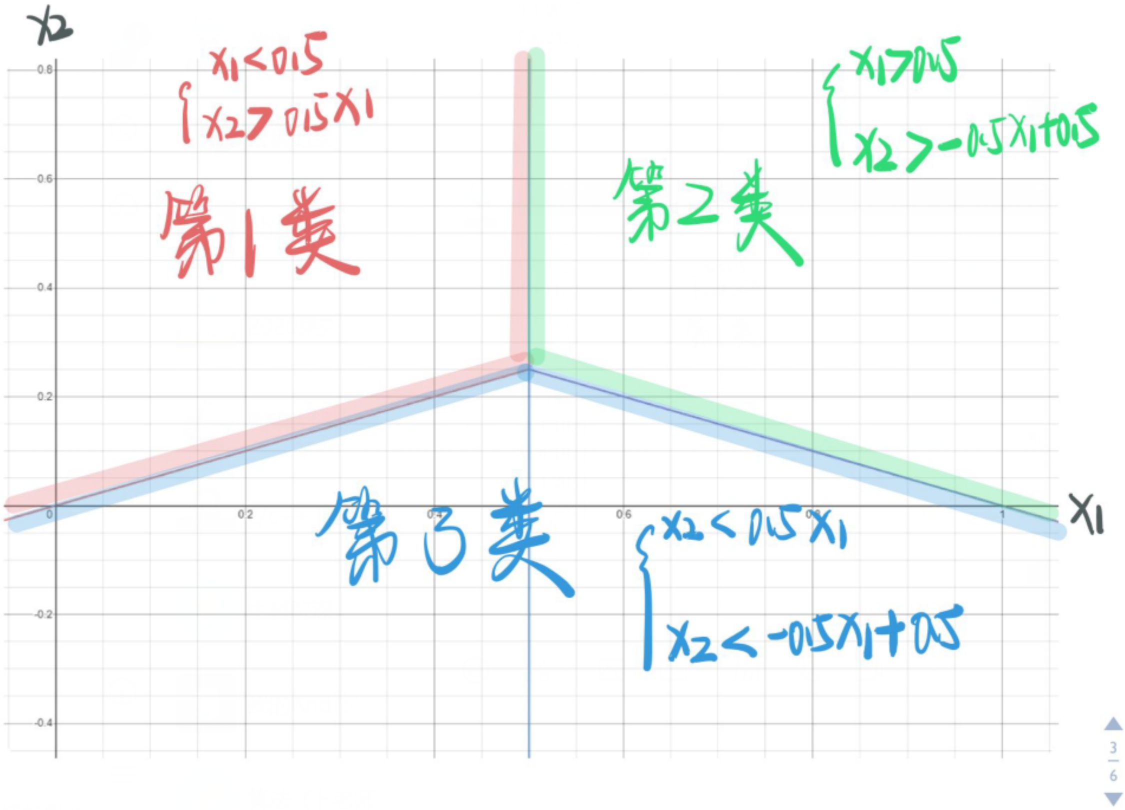
对于第三类样本,

$$\begin{cases} g_3(x) > g_1(x) \\ g_3(x) > g_1(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x_2 > -x_1 + x_2 \\ -x_2 > x_1 + x_2 - 1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 1 < 0 \\ x_2 < \frac{1}{2}x_1 \end{cases} \tag{3}$$

根据式 (1)、(2)、(3) 画出三类样本的决策区域如下图所示。根据如图所示结果可以发现，不存在无法决策的类别区域。



x2
x1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
0.6
1
x1<0.5
x2>0.5x1
第1类
第2类
x1>0.5
x2>-0.5x1+0.5
第3类
x2<0.5x1
x2<-0.5x1+0.5
3
6

Question 3

1. Write a program to implement the "batch perception" algorithm.
   (a). Starting with **a** = **0**, apply your program to the training data from ω_1 and ω_2. Note that the number of iterations required for convergence（即记录下收敛的步数）。
   (b). Apply your program to the training data from ω_3 and ω_2. Again, note that the number of iterations required for convergence.
2. Implement the Ho-Kashyap algorithm and apply it to the training data from ω_1 and ω_3. Repeat to apply it to the training data from ω_2 and ω_4. Point out the training errors, and give some analyses.
3. 请写一个程序，实现 MSE 多类扩展方法。每一类用前 8 个样本来构造分类器，用后两个样本作测试。请给出你的正确率。

Answer 3.1

根据Question 1 可知"batch perception"的计算方法，程序运行结果如下：

1. 对于sample1和sample2结果如下：

> Iteration nums:1, a^T = [-17.9 33.3 0.]
> Iteration nums:2, a^T = [-29.3 23.7 1.]
> Iteration nums:3, a^T = [-15.3 36.3 5.]
> Iteration nums:4, a^T = [-39.3 21.1 4.]
> Iteration nums:5, a^T = [-13.5 50.3 11.]
> Iteration nums:6, a^T = [-43.8 33.5 9.]
> Iteration nums:7, a^T = [-29. 47.4 12.]
> Iteration nums:8, a^T = [-40.4 37.8 13.]
> Iteration nums:9, a^T = [-40.6 35.2 16.]
> Iteration nums:10, a^T = [-25.8 49.1 19.]
> Iteration nums:11, a^T = [-41.4 37.6 19.]
> Iteration nums:12, a^T = [-37.3 40.4 20.]
> Iteration nums:13, a^T = [-37.5 37.8 23.]
> Iteration nums:14, a^T = [-36.9 36.5 25.]
> Iteration nums:15, a^T = [-32.8 39.3 26.]
> Iteration nums:16, a^T = [-36.3 35.2 27.]
> Iteration nums:17, a^T = [-32.2 38. 28.]
> Iteration nums:18, a^T = [-35.7 33.9 29.]
> Iteration nums:19, a^T = [-31.6 36.7 30.]
> Iteration nums:20, a^T = [-35.1 32.6 31.]
> Iteration nums:21, a^T = [-31. 35.4 32.]
> Iteration nums:22, a^T = [-34.5 31.3 33.]
> Iteration nums:23, a^T = [-30.4 34.1 34.]
>
> Process finished with exit code 0

2. 对于sample3和sample4结果如下：

> Iteration nums:1, a^T = [44.2 96.7 0.]
> Iteration nums:2, a^T = [36.1 95.4 2.]
> Iteration nums:3, a^T = [28. 94.1 4.]
> Iteration nums:4, a^T = [25. 91.2 5.]
> Iteration nums:5, a^T = [22. 88.3 6.]
> Iteration nums:6, a^T = [19. 85.4 7.]
> Iteration nums:7, a^T = [16. 82.5 8.]
> Iteration nums:8, a^T = [13. 79.6 9.]
> Iteration nums:9, a^T = [10. 76.7 10.]
> Iteration nums:10, a^T = [7. 73.8 11.]
> Iteration nums:11, a^T = [4. 70.9 12.]
> Iteration nums:12, a^T = [1. 68. 13.]
> Iteration nums:13, a^T = [6.9 64.9 13.]
> Iteration nums:14, a^T = [3.9 62. 14.]
> Iteration nums:15, a^T = [0.9 59.1 15.]
> Iteration nums:16, a^T = [6.8 56. 15.]
> Iteration nums:17, a^T = [3.8 53.1 16.]
> Iteration nums:18, a^T = [0.8 50.2 17.]
> Iteration nums:19, a^T = [6.7 47.1 17.]
> Iteration nums:20, a^T = [3.7 44.2 18.]
> Iteration nums:21, a^T = [0.7 41.3 19.]
> Iteration nums:22, a^T = [6.6 38.2 19.]
> Iteration nums:23, a^T = [3.6 35.3 20.]
> Iteration nums:24, a^T = [0.6 32.4 21.]
> Iteration nums:25, a^T = [6.5 29.3 21.]
> Iteration nums:26, a^T = [3.5 26.4 22.]
> Iteration nums:27, a^T = [0.5 23.5 23.]
> Iteration nums:28, a^T = [6.4 20.4 23.]
> Iteration nums:29, a^T = [3.4 17.5 24.]
> Iteration nums:30, a^T = [0.4 14.6 25.]
> Iteration nums:31, a^T = [6.3 11.5 25.]
> Iteration nums:32, a^T = [3.3 8.6 26.]
> Iteration nums:33, a^T = [0.3 5.7 27.]
> Iteration nums:34, a^T = [24.4 12.7 24.]
> Iteration nums:35, a^T = [8.2 17. 28.]
> Iteration nums:36, a^T = [5.2 14.1 29.]
> Iteration nums:37, a^T = [2.2 11.2 30.]
> Iteration nums:38, a^T = [8.1 8.1 30.]
> Iteration nums:39, a^T = [5.1 5.2 31.]
>
> Process finished with exit code 0Answer 3.2

解： Ho-Kashyap算法：

根据MSE算法优化$||Ya-b||^2$可以知道，所得到的最优解并不需要位于可分超平面上。因此如果训练样本是线性可分的话，那么一定存在一个a,b使得$Ya=b>0$。由于我们并不知道这个b应该取多大，此时的b不再是任意给定的一个数。因此我们可以将MSE的准则函数更新为：

$$J_s(a,b)=||Ya-b||^2$$

注意：直接优化$J_s(a,b)=||Ya-b||^2$容易导致平凡解，因此需要给b加一个约束$b>0$.

对于a而言：

$$\frac{\partial J_s(a,b)}{\partial a}=2Y^T(Ya-b)=0$$
$$\text{则：} Ya-b=0\rightarrow a=Y^+b, \text{其中} Y^+ \text{为} Y \text{的伪逆}$$

对于b而言：

b 需要同时满足约束条件 $\mathbf{b} > \mathbf{0}$ 。梯度更新:

$$\mathbf{b}_{k+1} = \mathbf{b}_k - \eta_k \frac{\partial J_s(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}$$

由于 $\mathbf{b}_k$ 总是大于零，要使b $_{k+1}$ 也大于零，可以要求 $\partial J_s(\mathbf{a}, \mathbf{b})/\partial \mathbf{b}$ 为负。

$\mathbf{b}$ 的梯度下降可以改写成下式：

$$\mathbf{b}_1 > \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}_{k+1} = \mathbf{b}_k - \eta_k \frac{1}{2}\left(\frac{\partial J_s(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} - \left|\frac{\partial J_s(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\right|\right)$$
$$\text{此时：} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial J_s(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} - \left|\frac{\partial J_s(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\right|\right) \text{一定小于等于} 0$$

更新a、b：

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{Y}^+ \mathbf{b}_k$$
$$\mathbf{b}_1 > \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}_{k+1} = \mathbf{b}_k + 2\eta_k \mathbf{e}_k^+$$
$$\text{其中：} \mathbf{e}_k^+ = \tfrac{1}{2}((\mathbf{Y}\mathbf{a}_k - \mathbf{b}_k) + |\mathbf{Y}\mathbf{a}_k - \mathbf{b}_k|), \quad \because \tfrac{\partial J_s(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} = -2(\mathbf{Y}\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

由于初始$b_1 > 0$,且更新因子$\eta > 0$，因此b_k总是大于0

对于更新因子$\eta \in (0,1]$，如果问题线性可分，则总能找到元素全为正的b。

如果$e_k = Ya_k - b_k$全为0， 此时b_k将不再更新，因此获得一个解。如果e_k有一部分元素小于0，则可以证明该问题不是线性可分的。

根据上述算法，编写程序：令学习率$\eta_k = 1, a = [0,0,0], b$为用0-1之间的随机数随机初始化的一个$1 \times 20$的矩阵。

```python
iter_num = 0
while min(e)<0:
    iter_num += 1
    e_ = 0.5*(e+abs(e))
    b = b+2*learning_rate*e_
    a = np.dot(b, np.linalg.pinv(Y).transpose())
    e = np.dot(a, Y.transpose()) - b
    print("iteration nums:" + str(iter_num) + ", a = " + str(a) + ", b = " + str(b))
    if iter_num > 50000:
        break
    if abs(e).sum() < 0.001:
        break
print(e)
```

实验结果如下：

观察对w_1, w_3数据的训练过程我们可以发现，再迭代50001次后，误差向量e仍然存在少数的负数分量，但都接近于0。观察向量b的历史数据可以发现，b几乎不再改变，说明b已经收敛，所以可以认为在50001次时已经有了近似解。

> iteration nums:50001
>
> a = [0.27521491 -0.1920547 0.08026759],
>
> b = [0.06846006 0.64830714 0.21923511 0.66859362 0.86395917 0.21235355 0.2069912 0.85353701 0.34300515 0.38538695 0.78344853 1.45300083 0.83390472 0.94593833 1.44311239 0.98811418 2.04620224 1.70109952 1.63061597 0.97696527]

> e = [-1.71931141e-01 -6.01665086e-02 -3.14795436e-01 -5.56443888e-01 -1.93063599e-01 -2.39193223e-01 -9.72244268e-02 -7.56041633e-01 -1.15813075e-01 -1.66533454e-16 -5.95030016e-01 0.00000000e+00 -1.30898069e+00 -1.11022302e-16 0.00000000e+00 -1.11022302e-16 -4.44089210e-16 0.00000000e+00 -2.22044605e-16 -6.00662228e-01]

观察对w_2, w_4数据的训练过程我们可以发现，再迭代517次后，误差向量e已近接近于0了，则在数据2，4中是无法线性可分的。

> iteration nums:517
>
> a = [0.21787046 0.19283731 1.30649534],
>
> b = [3.66326455 0.17274297 2.28691243 2.98758616 2.58791334 0.9944346 1.05803547 0.67486397 3.85010582 1.77550128 0.74936133 0.59409007 1.09340795 1.16247608 0.9245813 0.57654216 1.14022813 1.82312309 2.11090684 1.65133841] e=[2.77884872e-05 -4.66709563e-04 4.66903405e-09 3.28036078e-05 2.88394740e-05 8.30766200e-09 -2.44268164e-07 -5.14583529e-08 -5.31157987e-07 2.08852964e-05 -2.82353319e-04 -1.05744726e-04 -6.22161034e-08 6.91693928e-06 4.70802333e-06 9.73926020e-07 -3.95914337e-08 1.33793114e-05 5.72644021e-09 5.00932002e-06]

Answer 3.3

对于MSE多分类而言，目标函数为：

$$\min_{\mathbf{W},\mathbf{b}} \sum_{i=1}^{n} \left\| \mathbf{W}^T \mathbf{x} + \mathbf{b} - \mathbf{y}_i \right\|_2^2$$

$$\hat{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{b}^T \end{pmatrix} \in R^{(d+1)\times c}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} \in R^{d+1}, \quad \hat{\mathbf{X}} = (\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \cdots, \hat{\mathbf{x}}_n) \in R^{(d+1)\times n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \mathbf{W}^T \mathbf{x} + \mathbf{b} - \mathbf{y}_i \right\|_2^2 = \left\| \hat{\mathbf{W}}^T \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{Y} \right\|_F^2 \quad (\|.\|_F \text{ 为 Frobenius范 数 })$$

$$\min_{\hat{\mathbf{w}}} \left\| \hat{\mathbf{W}}^T \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{Y} \right\|_F^2$$

$$\hat{\mathbf{W}} = \left(\hat{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{X}}^T \right)^{-1} \hat{\mathbf{X}} \mathbf{Y}^T \in R^{(d+1)\times c} \quad \hat{\mathbf{W}} = \left(\hat{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{X}}^T + \lambda \mathbf{I} \right)^{-1} \hat{\mathbf{X}} \mathbf{Y}^T \in R^{(d+1)\times c}$$

决策条件为：

$$\text{if } j = arg_{max}(W^T x + b), then\ x \in w_j$$

所以根据上述式子，求出$\hat{W}$即可求解。

使用前每个类别的前8个类别构建样本，求解处$\hat{W}$结果如下：

> $\hat{w} =$ [[0.02049668 0.01626151 0.26747287] [0.06810971 -0.03603827 0.27372075] [-0.04087307 0.05969134 0.25027714] [-0.04773332 -0.03991458 0.20852924]]

接着将每个类别的后两个数据做成测试数据，带入结果为：

> test_result: [1 1 2 2 3 3 4 4]

所以可以发现该分类器准确预测结果，正确率为百分之百。