

层次分析法

李俊霖

2025 年 3 月 16 日

1 问题提出

周末干什么已经和中午吃什么一样，成为困扰大学生的重大疑难问题之一，因此，大学生李华最近密集的安排将他搞的晕头转向，他想求助你帮他根据给出的条件为他安排最优的周末安排，请你根据此进行数学建模。

题目信息：目标周末安排；准则紧急程度，心理接受度，精力占用度；方案写数模作业，出去玩，在宿舍睡觉

判断矩阵

$$W_{CB_1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0.25 & 1 & 1 \\ 0.25 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W_{CB_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.5 \\ 5 & 1 & 2.5 \\ 2 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W_{CB_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0.5 & 1 & 5 \\ 0.1 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W_{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0.5 & 1 & 2 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

2 模型假设

1. 除题目外其他信息对于模型没有其他影响
2. 方案层与准则层的重要程度取决于判断矩阵
3. 模型应用层次分析法建立

3 模型建立

为得到方案层中 C_1, C_2, C_3 对应的权重 $W_{C_1A}, W_{C_2A}, W_{C_3A}$ 我们可以逐层地确定相邻层间的相对权重矩阵, 并通过多个权重矩阵的相乘, 确定最终的权重。

对于题目信息建立层次模型, 如下图 建立矩阵乘法公式



$$\begin{bmatrix} W_{C_1A} \\ W_{C_2A} \\ W_{C_3A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{C_1B_1} & W_{C_1B_2} & W_{C_1B_3} \\ W_{C_2B_1} & W_{C_2B_2} & W_{C_2B_3} \\ W_{C_3B_1} & W_{C_3B_2} & W_{C_3B_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{B_1A} \\ W_{B_2A} \\ W_{B_3A} \end{bmatrix} \quad (1)$$

即

$$W_{CA} = W_{CB} * W_{BA} \quad (2)$$

由 $W_{CA} = W_{CB} * W_{BA}$ 可见所要求的 C 对 A 的权重矩阵为 C 对 B 的权重矩阵与 B 对 A 的权重矩阵的乘积。

对判断矩阵 W 进行特征值分解权重向量 ($W_{C_1B}, W_{C_2B}, W_{C_3B}$) 取为矩阵模最大特征值对应的特征向量, 这样的特征向量被称为主特征向量。由于权重向量各分量之和应该为 1, 故我们将各分量分别除以各分量之和, 即进行归一化。

最终, 我们计算得到三种候选项的权重向量

最终得到了 C 和 A 层间的权重矩阵, 并进行选择

4 模型求解

4.1 求解 W_{CB}

(1) 求解 W_{CB_1} ，原矩阵

$$W_{CB_1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0.25 & 1 & 1 \\ 0.25 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

计算过程 计算得：

```

命令窗口
>> M_CB1=[1 4 4;0.25 1 1;0.25 1 1]

M_CB1 =

    1.0000    4.0000    4.0000
    0.2500    1.0000    1.0000
    0.2500    1.0000    1.0000

>> [V,eigv]=eig(M_CB1)

V =

    0.9428   -0.0000    0.9511
    0.2357   -0.7071   -0.3022
    0.2357    0.7071    0.0645

eigv =

    3.0000         0         0
         0    0.0000         0
         0         0   -0.0000

fx>>

```

$$\begin{bmatrix} W_{C_1B_1} \\ W_{C_2B_1} \\ W_{C_3B_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6666 \\ 0.1667 \\ 0.1667 \end{bmatrix} \quad (3)$$

(2) 求解 W_{CB_2} 原矩阵

$$W_{CB_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.5 \\ 5 & 1 & 2.5 \\ 2 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

计算过程 计算得：

```

>> M_CB2=[1 0.2 0.5;5 1 2.5 ;2 0.4 1]

M_CB2 =

    1.0000    0.2000    0.5000
    5.0000    1.0000    2.5000
    2.0000    0.4000    1.0000

>> [V,eigv]=eig(M_CB2)

V =

    0.1826    0.1226   -0.2336
    0.9129   -0.9815    0.9691
    0.3651    0.1474    0.0795

eigv =

    3.0000         0         0
         0   -0.0000         0
         0         0    0.0000
fx>>

```

$$\begin{bmatrix} W_{C_1B_2} \\ W_{C_2B_2} \\ W_{C_3B_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1250 \\ 0.6250 \\ 0.2500 \end{bmatrix} \quad (4)$$

(3) 求解 W_{CB_3} 原矩阵

$$W_{CB_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0.5 & 1 & 5 \\ 0.1 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

计算过程见附录

计算得：

$$\begin{bmatrix} W_{C_1B_2} \\ W_{C_2B_2} \\ W_{C_3B_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6250 \\ 0.3125 \\ 0.0625 \end{bmatrix} \quad (5)$$

4.2 求解 W_{BA}

原矩阵

$$W_{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0.5 & 1 & 2 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

计算过程 计算得：

```
>> M_BA=[1 2 4;0.5 1 2 ;0.25 0.5 1]

M_BA =

    1.0000    2.0000    4.0000
    0.5000    1.0000    2.0000
    0.2500    0.5000    1.0000

>> [V,eigv]=eig(M_BA)

V =

    0.8729   -0.0000    0.8426
    0.4364   -0.8944   -0.5355
    0.2182    0.4472    0.0571

eigv =

    3.0000         0         0
         0    0.0000         0
         0         0   -0.0000

fx>>
```

$$\begin{bmatrix} W_{C_1 B_2} \\ W_{C_2 B_2} \\ W_{C_3 B_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5715 \\ 0.2857 \\ 0.1428 \end{bmatrix} \quad (6)$$

4.3 矩阵相乘

$$\begin{bmatrix} W_{C_1 A} \\ W_{C_2 A} \\ W_{C_3 A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6666 & 0.1250 & 0.6250 \\ 0.1667 & 0.6250 & 0.3125 \\ 0.1667 & 0.2500 & 0.0625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5715 \\ 0.2857 \\ 0.1428 \end{bmatrix} \quad (7)$$

得

$$\begin{bmatrix} W_{C_1 A} \\ W_{C_2 A} \\ W_{C_3 A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5059 \\ 0.3185 \\ 0.1756 \end{bmatrix} \quad (8)$$

5 选择结果

所以得到最终结果为写数学建模作业，因此，我们得出李华周末应该写数学建模作业

6 附录

M_{CB_3} 计算过程

```
>> M_CB3=[1 2 10;0.5 1 5 ;0.1 0.2 1]

M_CB3 =

    1.0000    2.0000   10.0000
    0.5000    1.0000    5.0000
    0.1000    0.2000    1.0000

>> [V,eigv]=eig(M_CB3)

V =

    0.8909   -0.9894    0.2766
    0.4454    0.1250   -0.9473
    0.0891    0.0739    0.1618

eigv =

    3.0000         0         0
         0   -0.0000         0
         0         0   -0.0000

fx>> |
```