

非齐次方程练习

李俊霖

2025 年 3 月 10 日

1 问题提出

已知一颗炮弹做斜上抛运动，初速度大小为 200m/s，击中水平距离 360m、垂直距离 160m 的目标，问当忽略空气阻力时，炮弹发射角多大？请给出这道高中物理题的答案，并画出炮弹飞行的轨迹。

要求：提交一份 word 或 pdf 文档，需包含模型假设、模型建立、模型求解（需包含发射角的大小和炮弹飞行轨迹图）和附录这几部分。附录中要放上你用来求解模型的代码。

2 模型假设

1. 忽略空气阻力：炮弹在飞行过程中只受重力作用
2. 重力加速度恒定：重力加速度 $g=9.81\text{m/s}^2$
3. 初始速度已知：炮弹的初速度大小为 $v_0=200\text{m/s}$
4. 目标位置已知：炮弹需要击中水平距离 $x=360\text{m}$ ，垂直距离 $y=160\text{m}$ 的目标。

3 模型建立

炮弹的运动可以分解为水平方向和垂直方向的运动：

水平方向：初速度分量：

$$V_{0x} = v_0 * \cos(a) \quad (1)$$

运动方程:

$$x = V_{0x} * t \quad (2)$$

垂直方向: 初速度分量:

$$V_{0y} = v_0 * \sin(a) \quad (3)$$

运动方程:

$$y = V_{0y} * t - 0.5 * g * t^2 \quad (4)$$

其中,a 为发射角,t 为飞行时间

4 模型求解

4.1 求解流程

我们需要求解发射角 和飞行时间 t

水平方向方程:

$$x = v_0 * \cos(a) * t \quad (5)$$

解得:

$$t = \frac{x}{v_0 * \cos(a)} \quad (6)$$

垂直方向方程:

$$y = v_0 * \sin(a) * t - 0.5 * g * t^2 \quad (7)$$

将 t 代入:

$$y = v_0 * \sin(a) * \frac{x}{v_0 * \cos(a)} - 0.5 * g * \left(\frac{x}{v_0 * \cos(a)}\right)^2 \quad (8)$$

化简得:

$$y = x * \tan(a) - \frac{gx^2}{2v_0^2 * (\cos(a))^2} \quad (9)$$

利用三角恒等式

$$\frac{1}{\cos(a)^2} = 1 + \tan(a)^2 \quad (10)$$

代入得:

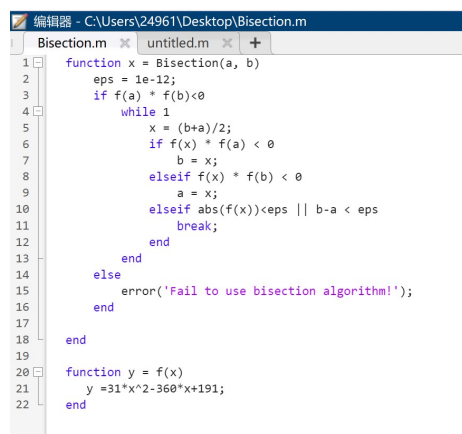
$$y = x * \tan(a) - \frac{gx^2}{2 * v_0^2} * (1 + \tan(a)^2) \quad (11)$$

这是一个关于 \tan 的二次方程: 代入已知数值: $x=360, y=160$ 计算得:

$$31.86 * \tan(a)^2 - 360 * \tan(a) + 191.86 = 0 \quad (12)$$

观察得 $f(0)>0$ 且 $f(1)<0, f(10)<0$ 且 $f(11)>0$ 运用二分法逼近得到在 $(0,1), (10,12)$ 这两个区间中分别有一根

4.2 MATLAB 代码如图



```

1 function x = Bisection(a, b)
2     eps = 1e-12;
3     if f(a) * f(b) < 0
4         while 1
5             x = (b+a)/2;
6             if f(x) * f(a) < 0
7                 b = x;
8             elseif f(x) * f(b) < 0
9                 a = x;
10            elseif abs(f(x)) < eps || b-a < eps
11                break;
12            end
13        end
14    else
15        error('Fail to use bisection algorithm!');
16    end
17 end
18
19 function y = f(x)
20     y = 31*x^2 - 360*x + 191.86;
21 end
22

```

4.3 结果如图

```

>> x = Bisection(0,1)

x =

    0.5573
fx

```

```

>> x = Bisection(10,12)

x =

    11.0556
fx>>

```

4.4 结果验证

```
>> x = 11.055  
  
x =  
  
11.0550  
  
>> 31*x^2-360*x+191  
  
ans =  
  
-0.1962
```

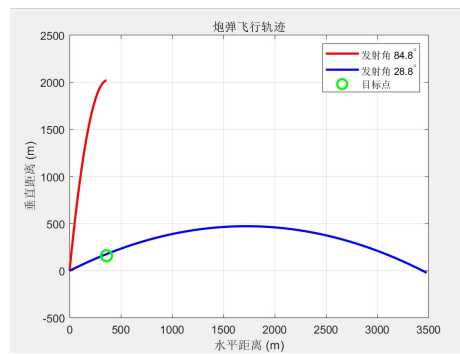
图 1: 图一 X1

```
>> x = 0.55  
  
x =  
  
0.5500  
  
>> 31*x^2-360*x+191  
  
ans =  
  
2.3775
```

图 2: 图二 X2

可知: $\tan(a)=11.055$ 或 $\tan(a)=0.55$ 则发射角为 $a=84.8^\circ$ 或 $a=28.8^\circ$

4.5 将结果可视化



5 f 附录

```
编辑器 - C:\Users\24961\Desktop\Bisection.m
Bisection.m x untitle.m +
1 function x = Bisection(a, b)
2     eps = 1e-12;
3     if f(a) * f(b) < 0
4         while 1
5             x = (b+a)/2;
6             if f(x) * f(a) < 0
7                 b = x;
8             elseif f(x) * f(b) < 0
9                 a = x;
10            elseif abs(f(x)) < eps || b-a < eps
11                break;
12            end
13        end
14    else
15        error('Fail to use bisection algorithm!');
16    end
17 end
18
19
20 function y = f(x)
21     y = 31*x^2 - 360*x + 191;
22 end
```