

班 级 1802031
学 号 18020300021

西安电子科技大学

本科毕业设计论文



题 目 图信号采样和滤波器设计方法

学 院 电子工程学院

专 业 信息对抗技术

学 生 姓 名 张 志

导 师 姓 名 董阳阳

摘要

科技的进步带来了信息量的快速增长和信息技术的飞速发展，人们正处在一个海量信息时代，随之而来的是对各个场景下的数据进行处理的需求。很多情况下我们面临的数据都是高维且不规则的。传统的只能体现信号本身的信号处理方法已不再适用，因此，“图信号处理”应运而生。本文针对图信号特点对其采样方法和滤波器设计方法进行了研究，主要包含以下几个方面。

阐述了图信号概念和图傅里叶变换的实现方法，探究影响图傅里叶变换的因素，分析图信号基本运算与定理，解释了图信号处理的原理。

从传统离散时间信号出发，从信号空间的角度研究了香农采样定理的本质，并将其推广到图信号采样中，证明了传统离散时间信号的 DFT 与图傅里叶变换的关系，以均匀采样为例，验证了环形图信号采样定理。

从有限维离散信号出发，建立一般的图信号采样定理，总结了实现图信号采样和无失真重构的条件和步骤，经过必要的仿真分析验证了这一结果的正确性。

研究了自回归滑动平均（Autoregressive Moving Average, ARMA）图滤波器的设计，研究的目的是使实际设计出的 ARMA 图滤波器的频率响应与理论预期的频率响应尽可能接近。研究中首先指出了 ARMA 图滤波器的性质和设计问题，接下来利用遗传算法求解滤波器系数并进行仿真研究影响实际频率响应与预期频率响应的均方误差的因素。

关键词：图傅里叶变换 图信号采样 图信号重构 图滤波器设计

ABSTRACT

The advancement of science and technology has brought about the rapid growth of the amount of information and the rapid development of information technology. People are living in an era of massive information, and with it comes the need to process data in various scenarios. In many cases, the data we face is high-dimensional and irregular. The traditional signal processing method that can only reflect the signal itself is no longer applicable. Therefore, "graph signal processing" came into being. In this thesis, the sampling method and filter design method are studied according to the characteristics of the graph signal, which mainly include the following aspects.

The concept of graph signal and the realization method of graph Fourier transform are expounded, the factors affecting graph Fourier transform are explored, the basic operations and theorems of graph signal are analyzed, and the principle of graph signal processing is explained.

Starting from traditional discrete-time signals, the essence of Shannon's sampling theorem is studied from the perspective of signal space, and it is extended to graph signal sampling, and the relationship between DFT and graph Fourier transform of traditional discrete-time signals is proved. As an example, the ring graph signal sampling theorem is verified.

Starting from finite-dimensional discrete signals, a general graph signal sampling theorem is established, the conditions and steps for realizing graph signal sampling and distortion-free reconstruction are summarized, and the correctness of the result is verified by necessary simulation analysis.

The design of the Autoregressive Moving Average (ARMA) graph filter is studied. The purpose of the research is to make the frequency response of the actually designed ARMA graph filter as close as possible to the theoretically expected frequency response. In the research, the properties and design problems of the ARMA graph filter are pointed out first, and then the genetic algorithm is used to solve the filter coefficients and simulate

the factors that affect the mean square error between the actual frequency response and the expected frequency response.

Key words: Graph Fourier Transform Graph Signal Sampling Graph Signal Reconstruction Graph Filter Design

ABSTRACT

目 录

第一章 绪论	1
1.1 选题背景与研究意义	1
1.2 国内外研究现状	3
1.2.1 国外研究现状	3
1.2.2 国内研究现状	4
1.3 本文主要工作与内容安排	4
第二章 图信号处理方法	7
2.1 图信号基本概念	7
2.1.1 图信号定义与表示	7
2.1.2 图信号基本运算	8
2.1.3 图傅里叶变化	11
2.2 图信号采样	14
2.3 图信号滤波	16
2.4 本章小结	17
第三章 图信号采样与重构理论研究	19
3.1 环形图信号采样与重构	19
3.1.1 理想低通滤波器构造	19
3.1.2 低通信号空间构造	20
3.2 环形图信号采样定理与仿真验证	22
3.3 有限维离散信号的采样和插值分析	26
3.4 图信号采样的验证	30
3.5 本章小结	34
第四章 ARMA 图滤波器设计方法	35
4.1 图滤波器	35
4.2 ARMA 图滤波器实现	36
4.3 仿真结果分析	38
4.4 本章小结	41

第五章 总结与展望	43
5.1 全文总结.....	43
5.2 未来展望.....	43
致 谢.....	45
参考文献.....	49

第一章 绪论

1.1 选题背景与研究意义

科技的发展带来了信息量的快速增长和信息技术的飞速发展，人们正处在一个海量信息时代，随之而来的是对各个场景下的数据进行处理的需求，这些数据可以来自金融和银行、社交网络、电子设备的追踪与检测、道路交通网络等，这类数据与传统单一的数据的不同之处在于以上数据多为网状的高维度数据，其复杂性和交互作用形成了其不规则的拓扑结构，传统的只能体现信号本身的信号处理方法已不再适用。以图 1.1 的交通网络为例，不同地点间由铁路连接，而两个地点可能没有直接相连，却以多种方式间接相连。图中密集区域代表这些地点间存在大量的联系，也暗含这一区域的重要程度；图 1.2 所示的社交网络中，一定的个体间存在互动，而某个个体与其它个体互动程度体现在这一节点与其它节点相连的数目；图 1.3 是大脑神经网络示意图，不同神经细胞通过突触相连，电信号通过突触在细胞间传递和作用。



图 1.1 美国东岸公路交通网络

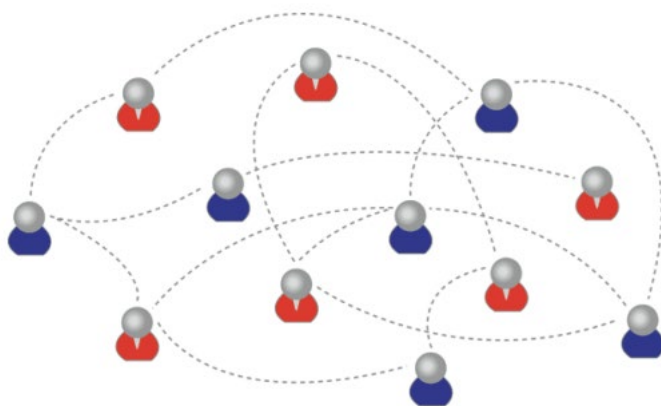


图 1.2 社交网络



图 1.3 大脑神经网络

以上数据都有着这样的特点：非孤立，彼此之间存在影响与关联。因此，对此类型数据进行处理时，不但要考虑其本身，也需对其拓扑结构进行分析和考虑。由于传统的信号处理方法直接推广到图信号会产生很多无法解决的问题，比如考虑不到数据间的结构与联系，因此催生了“图信号处理”这一概念。图信号的定义是基于加权图的，加权图的结构间接体现了数据间底层的拓扑结构，加权图的顶点表示图信号的位置，顶点上对应的值表示信号值，顶点间若存在相连的边，则表示这两点的信号之间存在某种联系，边若有对应权重，则体现了信号间联系的强弱。图信号的出现也为具有复杂拓扑结构的数据提供的合适的模型，从而更好地体现数据彼此之间的各种联系和庞大的结构。

图信号处理的目标是将经典信号处理的工具方法扩展到不规则的图上，通过

加权图揭示信号间的相互作用和联系,对于结构复杂的数据,通过映射到图上,给出了一种有效的处理手段,在生物医学、图像处理^[34]等方面都发挥了重要的作用。传统信号处理方式中的傅里叶变换、滤波、频率响应等概念扩展到图信号上也是适用的。以香农采样理论为例,它在处理传统的信号时有不可忽略的作用,相同地,在图信号处理领域内,图信号采样理论和重构理论也举足轻重。但图信号采样比传统采样更为复杂,因为图信号基于随机的加权图,图的顶点排列不是唯一的,采样时无法均匀获取采样值,在频域,也不会出现传统信号采样时会产生的频谱混叠现象。因此对图信号的采样理论进行研究很有必要。此外,当我们需要处理的网络相关数据要求大量时间和精力,的情况下,图信号采样理论会大大减少工作量提高处理效率。

类似于传统信号中的滤波器,图滤波器对图信号的频谱进行处理,具体来说即增强或抑制不同的图频谱。图滤波器在图信号去噪、平滑、采样重建等方面都发挥着不可或缺的作用。

图信号处理的目的是将传统信号处理的方法和工具拓展到图信号上,在图信号中,这些技术大多与图的拓扑结构有关。信号之间的相互联系由图的拓扑结构来表示,从而可以有效处理具有复杂结构的信号。采样定理在经典信号处理中有着相当大的分量,在图信号处理领域内也是一个重要的工具。

1.2 国内外研究现状

1.2.1 国外研究现状

图信号处理可以将信号间的相互关系在处理过程中体现出来,有关图信号处理的最早研究出现在 2008 年前后,主要是基于图信号处理理论架构中分支问题的研究,彼时尚未有完整的理论体系。在 2013 年,“图信号处理”的概念在文献^[1]中由 Shuman、Narang 和 Ortega 等人正式提出,同时给出了“图傅里叶变换”的定义,图信号自此可以在图谱域进行表示。这篇文章同时对与图信号中基本概念进行了定义,例如调制,卷积,和滤波。从而真对图信号处理的理论构造了一个相对成熟的体系架构。此后出现了众多图信号处理方面的文章和科研成果,例如,图信号滤波,这一概念在网络信号的平滑去噪^{[2] [3] [4]}、网络异常检测^[5]等领域都有广泛的应用。传统的 IIR^[6]和 FIR^{[2] [7] [8]}滤波,以及 ARMA^{[9] [10]}的设计等也可推广到图信号。人们逐渐意识到不能局限于对图信号在不同域孤立分析,于是开始注重联

合顶点域和频谱域共同分析。文献^{[11][12][13]}阐述了图信号在顶点域, 图谱域的不确定关系。图信号的采样这一手段广泛应用于传感器位置确定^[14], 分布式学习^[15]等领域。关于图信号的采样定理和截止频率等问题, 文献^{[16][17][18][19]}进行了详细的讨论并给出了数学证明, 如今广泛被应用的图信号采样领域的研究方法着眼于最佳估计, 从这点出发来求解最合适的算法使图信号能完美重构。文献^[20]中给出了一个图信号去噪的新方法, 这一方法是以全变分正则化为基础的, 这样可以得到两个解, 其中一个是闭式解, 另一个是迭代解, 前者是精确的后者是近似的, 而且分别是根据逆图滤波器和标准图滤波器得到的。文献^[21]中, 作者从传统小波信号的去噪出发, 新提出了一种去噪框架, 该框架基于谱图小波变换, 并且可以直接进行非迭代去噪, 这一操作是在图频率完成的。文献^[22]提出了图谱核函数进行平滑的方法。在文献^[23]中提出了一种新的滤波器设计方法, 由于设计时基于约束优化, 这一方法在频率响应的三大指标间可以进行权衡。文献^[24]提出了一种基于多项式的平方和表示的滤波器设计方法, 同时提出了一种图滤波器优化方法, 该方法可以精确控制图滤波器通带和阻带波纹。

1.2.2 国内研究现状

国内对于图信号处理的研究尚处于萌芽阶段, 少有相关文献。其中文献^[25]讨论了图上低频信号谱域变换中的边权重优化设计, 从最优化问题的角度对其展开研究, 进而提出了一种基于网络数据分布式权重的优化算法, 满足了网络化数据处理中的分布式计算的需求。文献^[26]研究了图信号的粗化、降维问题。文献^{[27][28]}实现了图信号处理在滚动轴承的故障特征提取中的应用。

1.3 本文主要工作与内容安排

本文主要讨论了图信号处理中的基本问题, 即图信号的采样与无失真重构和 ARMA 图滤波器的设计方法。内容安排如下:

第一章对课题背景和研究的意义进行了介绍, 并对图信号处理的国内外研究现状进行了分析和阐述, 介绍了本文研究的内容。

第二章对图信号处理的方法进行了解释, 从图信号的基本概念引出图信号的基本运算, 从传统信号的傅里叶变换推广到图傅里叶变换。对于香农采样定理, 从信号空间的角度进行了重新认识与理解, 并提出了图信号采样遵守的香农采样定理的推广形式, 最后对图滤波进行了介绍, 为后文设计图滤波器提供了理论基础。

第三章对图信号的采样与重构理论进行研究，从环形图信号的均匀采样出发，对采样定理进行总结和验证，进一步推广到一般图信号，非均匀采样，以采样空间和插值空间为理论基础，推出了新的采样定理，该定理适用于一般的图信号，从特殊到一般，并证明了采样定理的普适性与正确性。

第四章进行 ARMA 图滤波器的设计，研究 ARMA 图滤波器的设计目的在于使其频率响应尽可能接近预期频率响应。首先对这一滤波器原理，性质等进行介绍，再提出对其构造的实现过程，最后求解该滤波器的系数，利用遗传算法对其系数求解，并提出了影响最终设计的 ARMA 图滤波器的频率响应与预期频率响应的均方误差的因素。

第五章对现有工作进行了总结与思考，并对接下来的研究工作进行了设想与展望。

第二章 图信号处理方法

2.1 图信号基本概念

本节将对与图信号有关的基本概念进行讨论,包括其表示,基本运算与变换,从而能对图信号有初步的了解,以便之后引入图信号的采样滤波等概念时不显突兀。

2.1.1 图信号定义与表示

图信号的概念是基于图这一数据结构的,一个图的信息包括顶点和连接各顶点的边的权重,以无向图为例,可表述为

$$G = \{V, E\} \quad \text{式(2-1)}$$

其中 $V = \{1, 2, \dots, N\}$, N 为顶点个数,对于存在连接的结点,这些连接的集合为 E 。

设任意两个不同节点 $i, j \in V$, 则 E 可以表示为

$$E = \{i, j, w_{ij}\} \quad \text{式(2-2)}$$

其中 w_{ij} 表示两个节点间的权重。

上述定义法便于直观理解图的结构,但不利于发掘图本身的特征,因此常用矩阵表达,定义一个 $N \times N$ 的邻接矩阵 A , A 的第 m 行第 n 列元素 a_{mn} 定义为

$$a_{mn} = \begin{cases} w_{mn} & \text{顶点 } m, n \text{ 相连} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad \text{式(2-3)}$$

图信号就是一个 N 维离散信号矢量,依附于图 G , 其中第 i 个元素 $f(i)$ 即图信号的信号值和图 G 的顶点 v_i 一一对应,如图 2.1 所示:

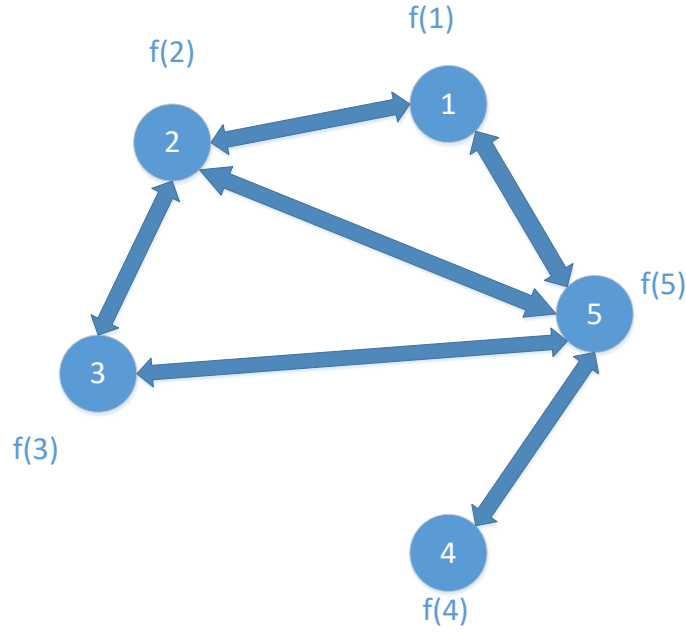


图 2.1 图的结构

定义度对角矩阵 D ，该矩阵对角线上元素为各个顶点的度，顶点 v_i 的度定义为与此顶点相关联的边的数量，对角线元素可表示为

$$d_m = \sum_n a_{mn} \quad \text{式(2-4)}$$

定义图拉普拉斯矩阵 L 如下

$$L = D - A \quad \text{式(2-5)}$$

2.1.2 图信号基本运算

传统的信号处理中，涉及到了卷积、平移、调制、尺度变换等运算，这些运算可推广为图信号的运算，有的可以直接推广，有的则需要重新理解。

1) 卷积

经典连续信号处理过程中卷积定义为

$$\begin{aligned} f_{out}(t) &= \int_R F_{in}(\xi) H(\xi) e^{2\pi i \xi t} d\xi \\ &= \int_R f_{in}(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= (f_{in} * h)(t) \end{aligned} \quad \text{式(2-6)}$$

其中 $h(t - \tau)$ 在几何角度上表示信号的平移。一维时间信号具有线性结构和明确的方向性，可以平移；图信号是网状结构，是不规则的、无序的，其平移方向不能确定，故不能将时域卷积直接推广。从图谱域考虑图信号的定义，用图拉普拉斯矩阵

的特征向量对传统信号卷积中负指数项进行代替可得

$$(\mathbf{f} *_g \mathbf{h})(i) = \sum_{l=0}^{N-1} F(\lambda_l) H(\lambda_l) u_l(i) \quad \text{式(2-7)}$$

其中 $*_g$ 表示图信号的卷积。我们可以看出，图信号在图谱域的乘积经图傅里叶逆变换得到其在顶点域的卷积。

2) 互相关运算

在图谱域定义图信号的互相关运算，将传统时间信号中的复指数项用图拉普拉斯矩阵的特征向量代替，从而得图信号 \mathbf{f} 和 \mathbf{g} 的互相关运算定义如下

$$R_{fg}(i) = \sum_{l=0}^{N-1} F^*(\lambda_l) H(\lambda_l) u_l(i) \quad \text{式(2-8)}$$

3) 平移

经典信号处理中的平移可看作函数 $f(t)$ 与冲激函数的卷积，故可由图信号的卷积对图信号的平移进行定义。设图平移算子为 $T_n: R^N \rightarrow R^N$ ，可定义图信号的平移如下

$$\begin{aligned} (T_n \mathbf{g})(i) &= \sqrt{N} (\mathbf{g} *_g \boldsymbol{\delta}_n)(i) \\ &= \sqrt{N} \sum_{l=0}^{N-1} G(\lambda_l) u_l^*(n) u_l(i) \end{aligned} \quad \text{式(2-9)}$$

对于式(2-9)中的 $\boldsymbol{\delta}_n$ ，即图上冲激信号，采用如下的方式进行定义

$$\boldsymbol{\delta}_n(i) = \begin{cases} 1 & i = n \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad \text{式(2-10)}$$

从图信号平移定义式可知，图信号平移并非对信号在顶点域进行移位，而是在图谱域对信号进行的运算。因为图信号不像一维时间信号一样具有线性结构，图信号的结构是无序的，不规则的，同时图信号的方向性不明确，导致其无法在顶点域直接平移。传统时间信号的平移保证平移前后信号能量不变，但图信号的平移算子有所不同，图信号的平移改变了信号的幅度与能量，不能保证操作前后信号的能量是守恒的，故平移这一运算的研究有待深入。

4) 调制

传统信号处理中，调制就是信号的频谱搬移，常见的有单边带调制，双边带调制，频率调制，相位调制等，在频域定义如下

$$F_{M_{\omega f}}(\xi) = F(\xi - \omega), \forall \xi \in R \quad \text{式(2-11)}$$

图信号具有离散, 不规则的频谱, 不同图信号有不同的图频率个数、取值范围, 且图频率分布不均匀, 相同图频率的搬移尺度无法保证是一致的, 故无法在图谱域对图信号的调制进行定义, 因此, 考虑在顶点域对图信号的调制进行间接定义。

传统信号中调制运算在时域定义如下

$$(M_{\omega}f)(t) = e^{2\pi i \omega t} f(t) \quad \text{式(2-12)}$$

若用图拉普拉斯矩阵的特征向量对上式中复指数项进行代替, 调制就推广到了图信号, 可得图信号的调制运算如下

$$(M_k \mathbf{g})(i) = \sqrt{N} u_k(i) g(i) \quad \text{式(2-13)}$$

因为图信号的频谱具有离散型, 不规则性, 所以图信号的调制并非直接对图谱域信号进行变换, 调制后的信号也不是原信号简单的频谱搬移, 可能产生新的频率分量。

5) 尺度变换

首先考虑传统连续时间信号, 对于 $a > 0$, 尺度变换表示为

$$(D_a f)(t) = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right) \quad \text{式(2-14)}$$

尺度变换在频域表示为

$$F_{D_a f}(\xi) = F(a\xi) \quad \text{式(2-15)}$$

然而, 图信号的顶点 v_i 和 $v_{i/a}$ 不会同时位于顶点集合 V 中, 所以不能直接将传统信号处理中尺度变换在时域的定义推广到图信号。若从图谱域来定义可得

$$G_{D_a g}(\lambda) = G(a\lambda) \quad \text{式(2-16)}$$

值得注意的是, 在这里, 式(2-16)中的 λ 定义在整个实数轴上, 而非像图信号调制时会局限于 $[0, \lambda_{\max}]$ 。

6) 帕萨瓦尔定理

传统信号处理中的帕萨瓦尔定理指出, 信号的能量在时域和频域是守恒的。推广到图信号, 可得帕萨瓦尔定理有如下形式

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle \quad \text{式(2-17)}$$

其中 \mathbf{F} 和 \mathbf{G} 是 N 维离散图信号矢量 \mathbf{f} 和 \mathbf{g} 的图傅里叶变换。

2.1.3 图傅里叶变化

经典一维信号 $f(t)$ 的傅里叶变换可以视为在其一维拉普拉斯算子特征函数上对其进行展开，类似地可以借助图拉普拉斯算子的特征值 λ_i 和图拉普拉斯算子的特征向量 $u_i (i = 0, 1, \dots, N-1)$ 来定义图信号 f 的图傅里叶变换。

根据矩阵论和图论相关知识，实对称矩阵的不同特征值对应特征向量相互正交，故图傅里叶变换可以定义如下

$$F(\lambda_i) = \langle f, u_i \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) u_i^*(k) \quad \text{式(2-18)}$$

图傅里叶逆变换表示为

$$f(k) = \sum_{i=0}^{N-1} F(\lambda_i) u_i(k) \quad \text{式(2-19)}$$

在式(2-19)中，特征值 λ_i 表示图频率，特征向量 u_i 表示图频率 λ_i 对应的图信号分量。

随着 λ_i 增大，对应的 u_i 显示出更剧烈的波动。

在图谱域上，不同图信号的图频率具有不同的分布，这些尺度不能直接进行比较，因此需对拉普拉斯矩阵 L 归一化处理，使这些图频率分布在同一尺度下。归一化后的拉普拉斯算子矩阵表示如下

$$L' = D^{-\frac{1}{2}} L D^{-\frac{1}{2}} \quad \text{式(2-20)}$$

经验证可得， L' 是实对称阵，对角线元素为 1。

以图 2.1 为例对图傅里叶变换的构造过程进行分析说明。设各边权重 w_{mn} 均为 1，那么图的邻接矩阵 A 可表示为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{式(2-21)}$$

对它的图拉普拉斯矩阵 L 进行特征分解，可得特征向量矩阵如下

$$\begin{aligned}
 U &= [u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] \\
 &= \begin{bmatrix} 0.45 & 0.29 & 0.71 & 0.41 & 0.22 \\ 0.45 & 0.29 & 0 & -0.82 & 0.22 \\ 0.45 & 0.29 & -0.71 & 0.41 & 0.22 \\ 0.45 & -0.87 & 0 & 0 & 0.22 \\ 0.45 & 0 & 0 & 0 & -0.90 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2-22}$$

L 的特征值由以下特征值矩阵给出

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \text{diag}(0, 1, 2, 4, 5) \tag{2-23}$$

易知特征值 $\lambda_0 = 0$ 对应的特征向量 u_0 在各个顶点上信号值未产生波动，并且随着 λ_i 增大， u_i 对应的各个顶点的信号值产生了波动。

改变图信号值 f ，并不会产生对信号间关系的影响，换言之，不会影响图结构，因为图信号值 f 改变， $Laplace$ 矩阵 L 不会随之改变， L 的特征值 λ_i 也不会改变。由此可得，如果一个图信号的图结构是确定的，其图频率也有着确定的分布，图信号值无法影响图频率 λ_i ，只有将图的结构改变，才能将图频率 λ_i 及其分布改变。接下来以图 2.1 所示信号为例，其傅里叶变换仿真如图 2.2 所示。

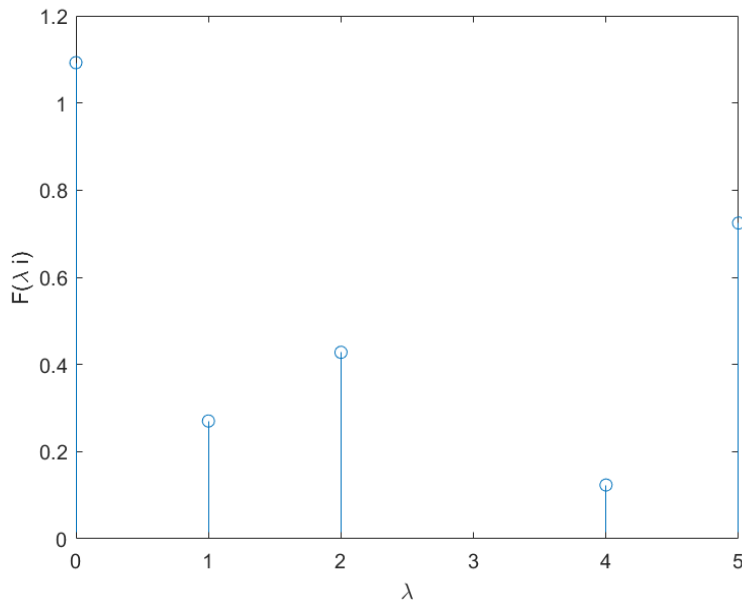


图 2.2 图信号 f 的傅里叶变换 F

若改变其图结构，如将顶点 1 与顶点 4 相连，得到的傅里叶变换如图 2.3 所示，根据图 2.3 可知，图信号 f 的图拉普拉斯矩阵 L 的特征值发生了变化，即图信号图频

率的分布发生了变化，同时图信号 f 的傅里叶变换值也发生了改变。

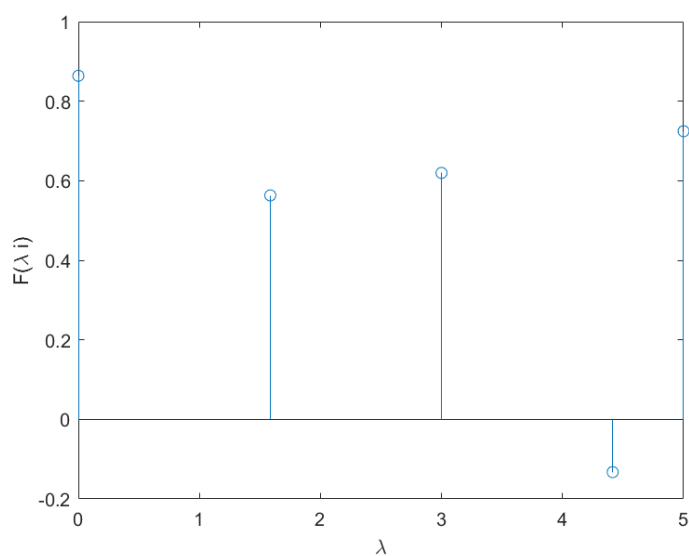


图 2.3 改变图信号 f 的图结构后得到的傅里叶变换

若是只改变了信号值，得到结果如图 2.4 所示，观察可知， L 的特征值未发生变化，同样是 0, 1, 2, 4, 5，图频率 λ_i 的分布未改变，至此，我们验证了前文所述结论——对一个图结构确定的图信号，其图频率也有着确定的分布，它不会被图信号值影响，若要改变图频率 λ_i 的分布，应当改变图的结构。

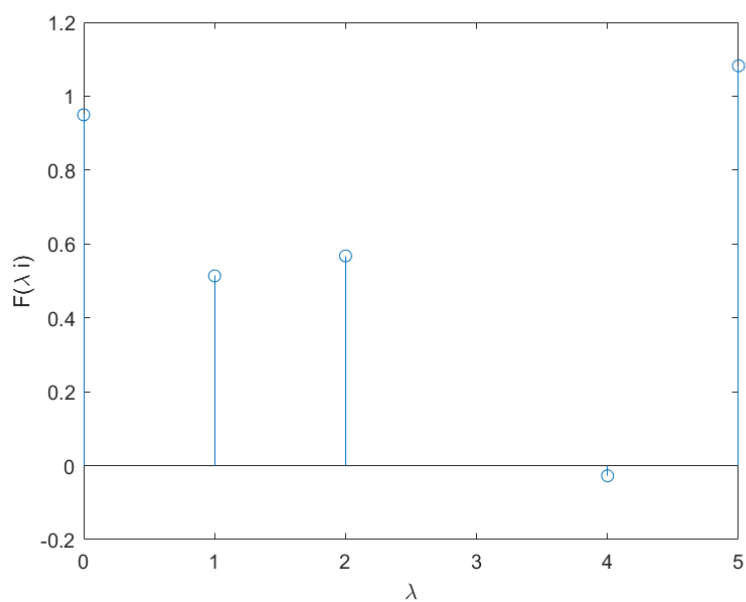


图 2.4 仅改变 f 信号值后得到的傅里叶变换

2.2 图信号采样

在传统模拟信号中,由香农采样定理知,如果采样频率 f_s 和被采样的模拟信号最高频率 f_m 满足 $f_s \geq 2f_m$,可以由采样信号无失真地恢复原信号。因为采样会将输入模拟信号的频谱进行周期延拓。

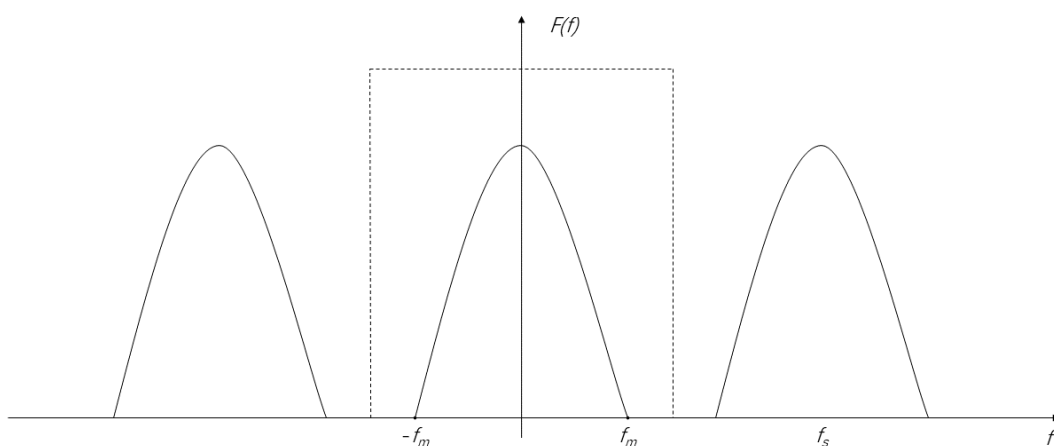


图 2.5 被采样信号的频谱周期延拓现象

在图 2.5 中采样频率 f_s 大于等于被采样信号最高频率 f_m 的 2 倍,此时对被采样信号进行周期延拓并未导致频谱混叠现象的产生,采样后的信号可以反映出原信号所有信息,因此能凭借采样信号完美恢复被采样信号的频谱。若采样信号不满足香农定理的条件,即采样频率 f_s 小于输入信号最大频率 f_m 的 2 倍,将发生频谱混叠现象,如图 2.6 所示

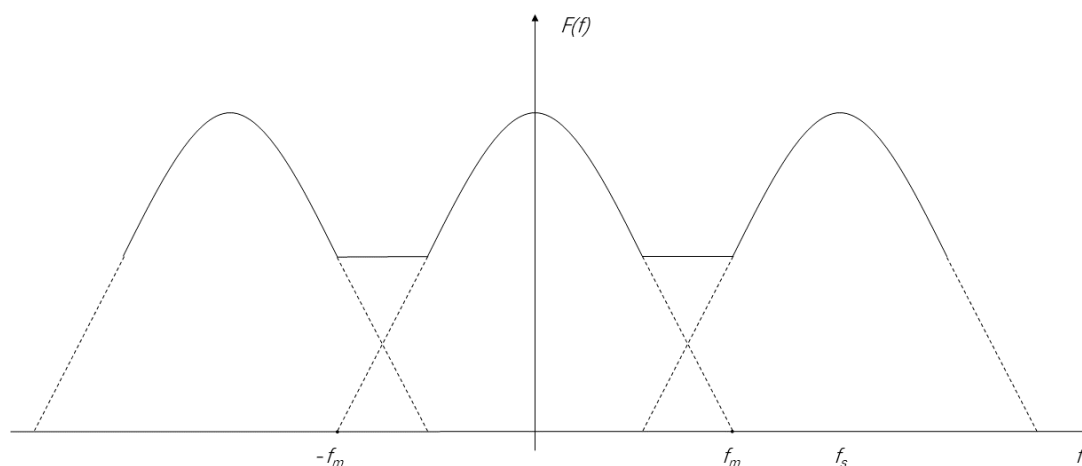


图 2.6 采样频率小于二倍信号最大频率引起频谱混叠

图信号的结构是不规则的，对图信号在顶点域进行采样等操作对于图谱域没有影响，不会造成平移，周期延拓等现象。传统信号的香农定理是从频谱混叠的视角进行分析的，但对于图信号，这一理论不能直接推广过来。考虑对香农定理从另一个角度——信号空间进行分析，进而对低通信号空间进行了解与研究。

想要对图信号进行采样和重构，首先要从图信号的低通信号空间入手，然后在低通信号空间上进行操作。而低通空间的构造又需要图信号“低通”的概念，对图信号的低通的定义可以进行如下说明。

首先定义 V 变换：对 N 维信号矢量 $\mathbf{f} = [f(0), f(1), \dots, f(N-1)]^T \in R^N$ ，若存在一个可逆矩阵 $V \in R^{N \times N}$ ，就称该矩阵的逆 V^{-1} 是 \mathbf{f} 的一个线性算子，从而基于该算子的对输入图信号矢量 \mathbf{f} 的变换称为 V 变换，定义如下

$$\hat{\mathbf{f}} = V^{-1} \mathbf{f} \quad \text{式(2-24)}$$

设 N 维信号矢量 $\mathbf{f} = [f(0), f(1), \dots, f(N-1)]^T \in R^N$ 是输入的图信号，如果 \mathbf{f} 满足

$$\hat{f}(k) = 0 \quad k = K, K+1, \dots, N-1 \quad \text{式(2-25)}$$

则定义 \mathbf{f} 为低通图信号，且在 V 变换空间内带限于带宽 K 。满足式(2-25)的整数 K 的最小值就是图信号 \mathbf{f} 在 V 变换下带宽。同时，若输入信号 \mathbf{f} 不是带限，就称它是

全频带图信号矢量。

模拟信号采样和重构过程可以简化定义为四个步骤：前置滤波，采样，卷积，后置滤波。在低通图信号的定义下可知，若输入信号 f 带宽为 ω_m ，采样的前置滤波器带宽为 ω_s ，其中 $\omega_m \leq \omega_s$ ，则输入信号通过滤波器后不存在能量损失，此时可以实现无失真采样和重构。相反地，若 f 带宽大于 ω_m ，信号 f 在带宽 ω_s 外的信息无法通过前置滤波器，造成了能量损失，不能进行无失真重构。

2.3 图信号滤波

离散信号处理中设计滤波器时，最基本的结构为延迟单元 z^{-1} ，它能够延迟输入信号一个单元。设存在 $N \times N$ 的循环矩阵 $W = C_N$ ，且

$$W_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{if } n-m = 1 \bmod N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{式(2-26)}$$

则可将时移写作如下所示式(2-27)的形式

$$\tilde{f} = C_N f = Wf \quad \text{式(2-27)}$$

不同于数字信号处理中的移位，图信号处理中的移位无需单独考虑边界条件，因为在信号的结构图中已包含了边界条件。

图滤波器是一个线性系统，信号先进行线性组合作为输入经过图滤波器得到的结果等价于各个信号经过图滤波器后输出的线性组合，即

$$H(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha H(f_1) + \beta H(f_2) \quad \text{式(2-28)}$$

同理，对输入信号先滤波再进行移位相当于先对输入信号移位再作为滤波器的输入，表示为

$$W(H(f)) = H(W(f)) \quad \text{式(2-29)}$$

综上，经过滤波器 $h(L)$ ，图信号 f 滤波后得

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= h(L)f = F^{-1}H(\Lambda)Ff = F^{-1}h(\Lambda)\hat{f} \\ &\Rightarrow F\tilde{f} = h(\Lambda)\hat{f} \end{aligned} \quad \text{式(2-30)}$$

由此可知，输出信号频谱与输入信号的频谱有如下关系

$$h(\Lambda) = \begin{pmatrix} h(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & h(\lambda_N) \end{pmatrix} \quad \text{式(2-31)}$$

其中 $h(\lambda_n)$ 即滤波器 $h(L)$ 的频率响应。

式(2-30)解释了卷积定理：图信号的滤波可以看作频域上图信号的频谱与滤波器频率响应的乘积。

2.4 本章小结

本章从图信号的基本概念出发，介绍了图信号的表示、基本运算与图傅里叶变换，其中图傅里叶变换是由传统信号的傅里叶变换推广而来，可以类比为离散傅里叶变换，接下来介绍了图信号采样，在这里对香农定理进行了新的理解，提出了低通信号空间的定义，同时解释了图信号滤波过程，然后从数字信号处理中滤波器最简单的结构出发介绍了图信号滤波的实现。

第三章 图信号采样与重构理论研究

在第二章的讨论中，我们对图信号的基本运算有了一定的了解，同时对采样和滤波有了初步的探索，给出了低通图信号，图滤波器的概念，接下来，将从一种特殊的图信号——环形图信号出发，对图信号的采样定理进行研究。环形图信号是将离散信号的时间点看作图的顶点，信号值看作该顶点对应的图信号值而得到的一个概念。因此本章先对环形图信号即离散时间信号的采样定理进行研究与讨论，提出环形图信号的采样定理，再以该定理作为桥梁，推广到一般图信号上，得到一般形式的采样定理。但传统采样定理不能直接运用到环形图信号上，因为对图信号顶点域的采样不会引起图谱域的周期延拓^[33]。因此，本章从信号空间的角度出发，对香农定理进行新的理解，传统信号处理中的采样和插值，在信号空间的角度理解为被处理的离散信号矢量的维度减少与增加。

3.1 环形图信号采样与重构

3.1.1 理想低通滤波器构造

环形图信号可以看作离散时间信号，其性质与运算可由模拟信号离散化得知，考虑将香农定理进行推广。由上文中关于图信号采样的分析可知，香农定理可以理解为先设计信号的低通滤波器，再对滤波器平移，从而得到低通信号空间，进一步得到输入信号在此空间上的投影和投影系数，该系数就是采样值。同时，若低通信号空间带宽为 ω_s ，则输入图信号带宽不大于 ω_s 时，可以实现无失真采样和重构。要实现采样和重构，就要在 DFT 的频域上进行低通滤波器、低通信号空间的构造。

由上文对低通图信号的定义可知，DFT 低通滤波器可表示为式(3-1)所示形式，其中该滤波器带宽为 K_0 。

$$DFT\{g(n)\} = G(k) = \begin{cases} \sqrt{N} & k = 0, 1, \dots, K_0 - 1 \\ 0 & k = K_0, K_0 + 1, \dots, N - 1 \end{cases} \quad \text{式(3-1)}$$

由于 DFT 具有周期性，上式中的 n 和 k 若取值不在规定范围内，则对其进行模 N 处理。

根据 DFT 和 IDFT 的性质可知，DFT 低通滤波器也存在时域表达式，可以求出

$$g(n) = \sqrt{\frac{K_0}{N_s}} e^{j\pi \frac{n}{N} (K_0-1)} \frac{\sin c(n / N_s)}{\sin c(n / N)} \quad \text{式(3-2)}$$

在式(3-2)中, $N_s = N / K_0$, 由香农采样理论可知, 这里的 $g(n)$ 对应 $\sin c$ 函数, 验证了 $g(n)$ 即 DFT 理想低通滤波器的时域表示这一结论。

3.1.2 低通信号空间构造

由上文知所求得 DFT 低通信号空间即为环形图信号低通信号空间。考虑按固定周期将 $g(n)$ 平移, 构造低通信号空间。由于 DFT 的隐含周期性, 进行的平移都是循环平移, 表示为 $f(n-n_0)_{\text{mod } N}$, 其中 $f(n)$ 为 N 点离散信号, 为了便于表示, 下文以 $f(n-n_0)$ 表示 $f(n-n_0)_{\text{mod } N}$ 。考虑以周期 $N_s = N / K_0$ 对点数为 N 的滤波器 $g(n)$ 进行平移, 得到如式(3-3)所示的一组基函数, 其中 $l = 0, 1, \dots, K_0 - 1$ 。

$$g(n-lN_s) = \sqrt{\frac{K_0}{N_s}} e^{j\pi \frac{n-lN_s}{N} (K_0-1)} \frac{\sin c[(n-lN_s) / N_s]}{\sin c[(n-lN_s) / N]} \quad \text{式(3-3)}$$

为了确定式(3-3)中这组基函数是否满足构成低通信号空间正交基的条件, 首先考虑是否所有函数带限为 K_0 , 其次考虑不同基函数之间的正交性。

考虑 $g(n-lN_s)$, 由 DFT 的循环平移性质得

$$g(n-lN_s) \xrightarrow{\text{DFT}} e^{-j\frac{2\pi}{K_0} kl} G(k) \quad n, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad \text{式(3-4)}$$

其中 $e^{-j\frac{2\pi}{K_0} kl}$ 非零, 因此式(3-4)中的 $e^{-j\frac{2\pi}{K_0} kl} G(k)$ 和 $G(k)$ 在频域内具有相同的零点, 所以该基向量组中任意函数与滤波器 $g(n)$ 一样带限为 K_0 。

其次考虑基向量组的正交性, 任取 $l, p = 0, 1, \dots, N-1$, 其中 l 不等于 p , 然后对函数 $g(n-lN_s)$ 和 $g(n-pN_s)$ 做内积, 由帕萨瓦尔定理^[29] 可知

$$\begin{aligned}
\langle g(n-lN_s), g(n-pN_s) \rangle_n &= \frac{1}{N} \left\langle e^{-j\frac{2\pi}{K_0}kl} G(k), e^{-j\frac{2\pi}{K_0}kp} G(k) \right\rangle_k \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{K_0}k(l-p)} |G(k)|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{K_0-1} e^{-j\frac{2\pi}{K_0}k(l-p)} \\
&= \delta_{l-p} \quad l, p = 0, 1, \dots, K_0 - 1
\end{aligned} \tag{3-5}$$

因此可验证，任意两个信号 $g(n-lN_s)$ 和 $g(n-pN_s)$ 是正交的，换言之，基向量组 $\{g(n-lN_s) | l = 0, 1, \dots, K_0 - 1\}$ 是正交基向量组。故低通信号空间构造完成，可以在此空间上实现信号的采样。

不妨令 $N = 100, K_0 = 25$ ，则 $N_s = N / K_0 = 4$ ，以 N_s 为周期，则 $g(n)$ 平移后可以得到 K_0 个基函数 $\{g(n-lN_s) | l = 0, 1, \dots, K_0 - 1\}$ 。作图如下

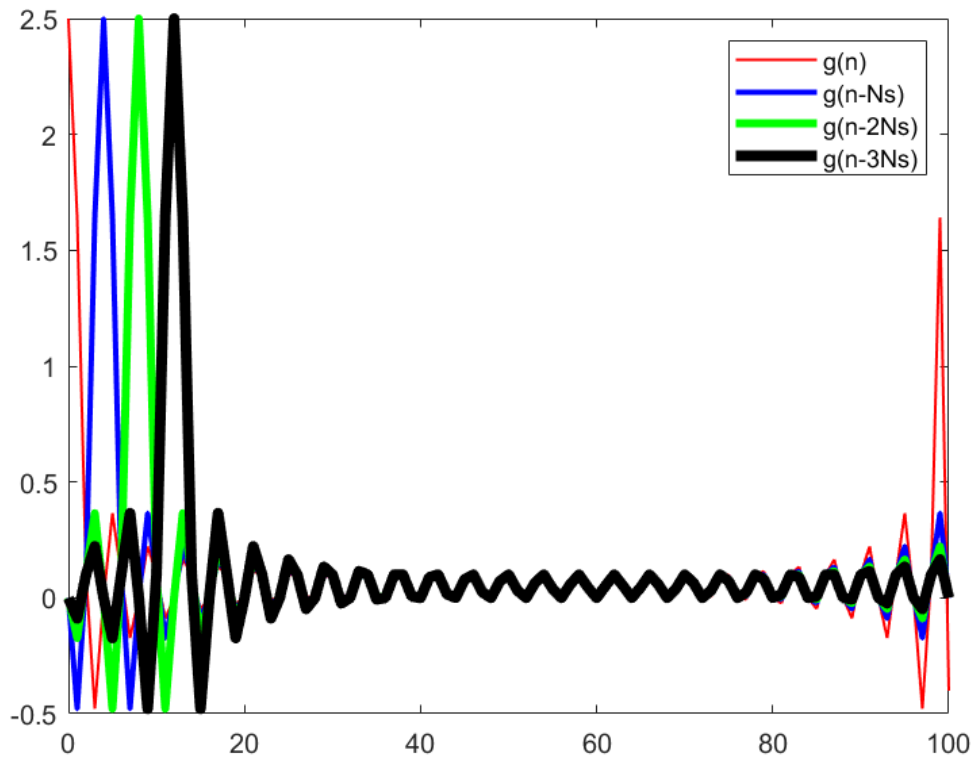


图 3.1 带限空间内 DFT 基函数

由图 3.1 得，基函数满足零点同步，函数间相互正交。

对 DFT 理想低通滤波器做 DFT 变换，得到图 3.2 所示的 $G(k)$

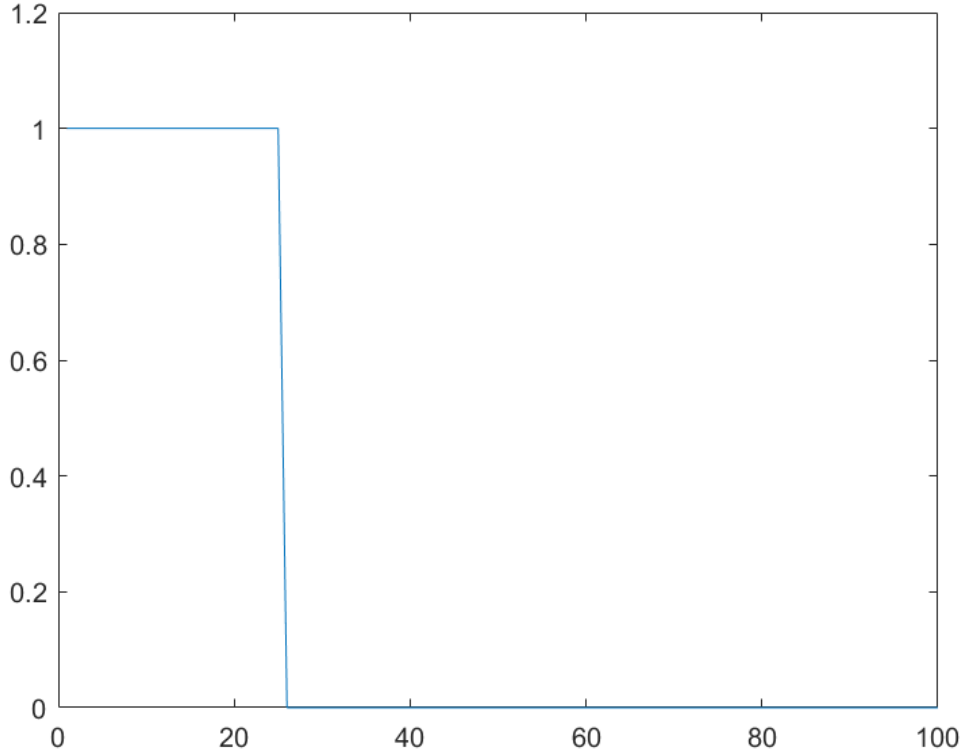


图 3.2 信号 $g(n)$ 的频谱 $G(k)$

从图 3.2 可知, $G(k)$ 为理想低通滤波器, 其带宽 $K_0 = 25$, 从而验证了 $g(n)$ 就是理想低通滤波器的时域形式这一结论。

3.2 环形图信号采样定理与仿真验证

根据前文可知, 环形图信号采样定理就是离散时间信号采样定理, 与模拟信号中经典香农采样定理类似, 环形图信号的采样值就是输入信号在低通信号空间上的投影系数, 这个低通信号空间的正交基可以根据 DFT 的低通理想滤波器平移所得。在这里给出图信号采样定理并给出相关说明分析。

定理 3.1 设存在 N, K_0 为整数, 其中 $K_0 \leq N$, $N_s = N / K_0$ 且为整数, 若存在信号 $f(n)$ 为 N 点带限离散信号, 带宽为 K_0 , 则

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{K_0-1} f(lN_s) e^{j\pi \frac{n-lN_s}{N} (K_0-1)} \frac{\sin c[(n-lN_s) / N_s]}{\sin c[(n-lN_s) / N]} \quad \text{式(3-6)}$$

在式(3-6)中, $n = 0, 1, \dots, N-1$; $l = 0, 1, \dots, K_0-1$ 。序列位移为 N 点循环位移, 易

知 $f(lN_s)$ 是输入序列的采样值, 给出证明如下:

$$\text{设 } g'(n) = \frac{1}{N_s} e^{j\pi \frac{n}{N} (K_0-1)} \frac{\sin c(n/N_s)}{\sin c(n/N)} \quad n=0,1,\dots,N-1, \text{ 根据前文提到的低通滤波器表达式及其 DFT 可得}$$

$$DFT\{g'(n)\} = G'(k) = \begin{cases} 1 & k=0,1,\dots,K_0-1 \\ 0 & k=K_0, K_0+1,\dots,N-1 \end{cases} \quad \text{式(3-7)}$$

设 $f(n)$ 分解到 $g'(n)$ 所得到的正交基上时, 分解系数为 $q(l)$, 则

$$f(n) = \sum_{l=0}^{K_0-1} q(l) g'(n-lN_s) \quad \text{式(3-8)}$$

由 DFT 循环卷积定理知

$$f(n) \otimes g(n) \xleftrightarrow{DFT} F(k)G(k) \quad n, k=0,1,\dots,N-1 \quad \text{式(3-9)}$$

又因为 $f(n)$ 带限于 K_0 , 得

$$\begin{aligned} q(l) &= \langle f(n), g'(n-lN_s) \rangle_n \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} f(n) g'^*(n-lN_s) \\ &= [f(n) \otimes g'^*(-n)]_{n=lN_s} \\ &= [f(n)]_{n=lN_s} \\ &= f(lN_s) \quad n=0,1,\dots,N-1; l=0,1,\dots,K_0-1 \end{aligned} \quad \text{式(3-10)}$$

所以有

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{l=0}^{K_0-1} \langle f(n), g'(n-lN_s) \rangle g'(n-lN_s) \\ &= \sum_{l=0}^{K_0-1} f(lN_s) g'(n-lN_s) \end{aligned} \quad \text{式(3-11)}$$

至此, 环形图信号采样定理得证。

在定理 3.1 中, N_s 为采样周期, K_0 为带宽, N 是离散信号的点数, 三者满足 $N_s = N / K_0$ 。利用定理 3.1, 可以根据 K_0 个采样值 $f(0), f(N_s), \dots, f[(K_0-1)N_s]$ 恢复原 N 点序列 $f(n)$ 。而无失真重构的条件是输入信号带宽 K 满足 $K \leq K_0$ 。

可以将环形图信号采样和重构过程简化为以下公式, 采样公式为

$$\begin{aligned}
f(lN_s) &= \langle f(n), g'(n-lN_s) \rangle_n \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} f(n) g'^*(n-lN_s) \\
&= [f(n) \otimes g'^*(-n)]_{n=lN_s} \quad n=0,1,\dots,N-1; l=0,1,\dots,K_0-1
\end{aligned} \tag{3-12}$$

重构公式为

$$f(n) = \sum_{l=0}^{K_0-1} f(lN_s) g'(n-lN_s) \tag{3-13}$$

上述两式中, $g'(n) = \frac{1}{N_s} e^{j\pi \frac{n}{N} (K_0-1)} \frac{\sin c(n/N_s)}{\sin c(n/N)}$ $n=0,1,\dots,N-1$, 由此可知, 环

形图信号的采样和重构是基于带宽为 K_0 的低通信号空间实现的, 在这一低通信号空间的正交基上, 对输入信号先进行投影, 再插值合成进行恢复, 这一过程也可以用 DFT 的循环卷积表示, 故环形图信号采样与重构过程可以由下图表示

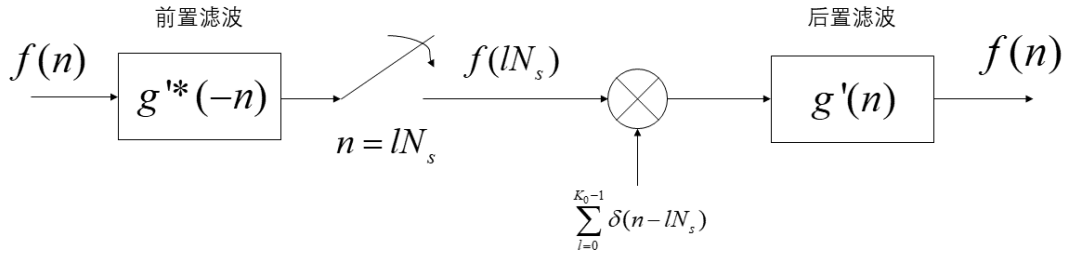


图 3.3 数字信号采样与插值流程图

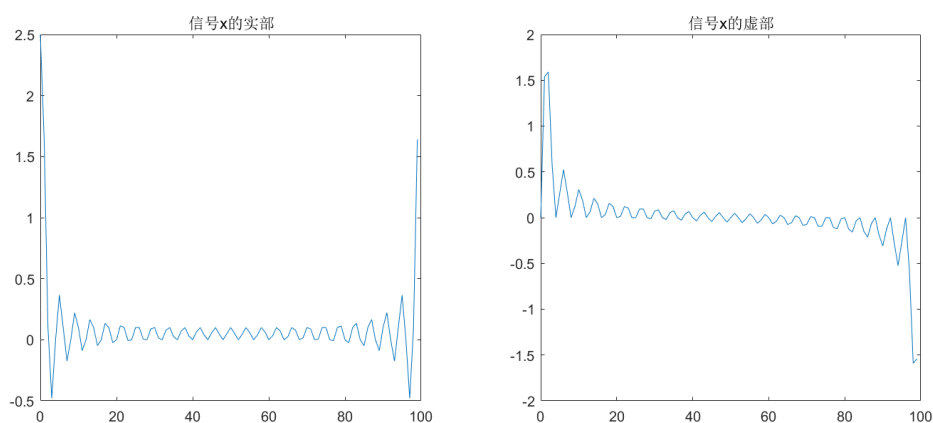
接下来对环形图信号的采样定理进行验证, 设 $N=100, K_0=25$, 构造长度为 N 的输入向量 \mathbf{x} 为如下形式

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_{K_0-1} \tag{3-14}$$

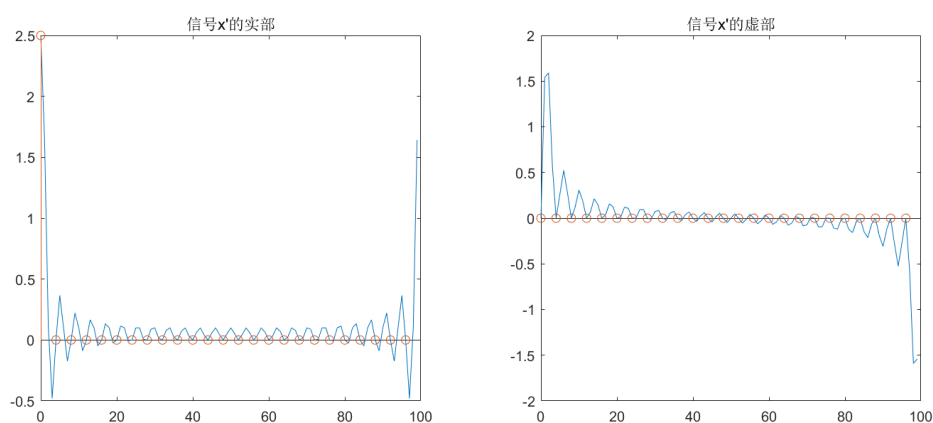
其中向量 \mathbf{v}_k 由式(3-15)确定, 这里 $\omega = e^{j\frac{2\pi}{N}}$, 可以知道 \mathbf{x} 是带宽为 K_0 的低通信号。

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} &= [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \dots, \mathbf{v}_{K_0-1}] \\
&= \begin{bmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \dots & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^1 & \dots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^0 & \omega^{N-1} & \dots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{DFT}_N^*
\end{aligned} \tag{3-15}$$

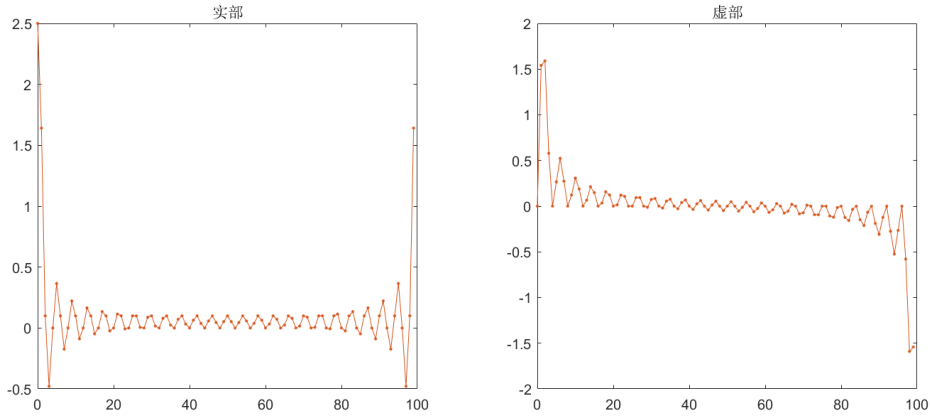
由此可做出信号 \mathbf{x} 的实部与虚部如下

图 3.4 输入序列 x 的实部与虚部

此时 $N_s = N / K_0 = 100 / 25 = 4$ ，故以 4 为采样周期，输入序列 x 经过均匀采样后可得 K_0 个采样点，所得向量 x' 长度为 K_0 ，在输入信号 x 的基础上做出采样信号 x' 的实部虚部如下

图 3.5 输入序列 x 和采样信号 x' 的实部与虚部

由环形图信号采样定理可知，对信号 x' 进行重构，可以得到信号 x'' ，同时做出信号 x 和信号 x'' 的实部与虚部如图 3.6 所示。可知信号 x'' 与信号 x 重合，即根据采样信号 x' 可以实现对信号 x 的无失真重构。

图 3.6 信号 x 和信号 x^* 的实部与虚部

3.3 有限维离散信号的采样和插值分析

设 M 个 N 维图信号矢量 ϕ_1, \dots, ϕ_M ，其中 $\phi_i = [\phi_i(0), \phi_i(1), \dots, \phi_i(N-1)]^T$ ，将其表示为 $N \times M$ 的矩阵形式 $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_M)$ ，则由可逆矩阵 V^{-1} 定义的 V 变换为

$$\hat{\phi}_i = V^{-1} \phi_i \quad \text{式(3-16)}$$

同理，同时对 M 个矢量做 V 变换可以表示为

$$\begin{aligned} V^{-1}(\phi_1, \dots, \phi_M) &= V^{-1} \phi \\ &= \hat{\phi} \\ &= (V^{-1} \phi_1, \dots, V^{-1} \phi_M) \\ &= (\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_M) \end{aligned} \quad \text{式(3-17)}$$

上式中，矩阵 $\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_M)$ 为矩阵 $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_M)$ 的 V 变换。向量 ϕ_1, \dots, ϕ_M 是一组基向量，构成某 M 维的图信号空间，这一空间也可以表示为 $\text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_M\}$ ，因此，该信号空间内任一信号均可表示为基向量 ϕ_1, \dots, ϕ_M 的线性组合，即对任意 f 有

$$\begin{aligned} f &= a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + \dots + a_M \phi_M \\ &= (\phi_1, \dots, \phi_M)(a_1, \dots, a_M)^T \\ &= \phi(a_1, \dots, a_M)^T \end{aligned} \quad \text{式(3-18)}$$

式(3-18)中 a_1, \dots, a_M 是组合系数，因此，图信号的 V 变换可以表示为

$$\begin{aligned}
\hat{f} &= V^{-1}f \\
&= V^{-1}(\phi_1, \dots, \phi_M)(a_1, \dots, a_M)^T \\
&= V^{-1}\phi(a_1, \dots, a_M)^T \\
&= \hat{\phi}(a_1, \dots, a_M)^T \\
&= (\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_M)(a_1, \dots, a_M)^T \\
&= a_1\hat{\phi}_1 + a_2\hat{\phi}_2 + \dots + a_M\hat{\phi}_M
\end{aligned} \tag{3-19}$$

由上式可知，基向量组 ϕ_1, \dots, ϕ_M 的 V 变换 $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_M$ 仍是一组基向量，新的基向量构成新的 M 维信号空间 $\text{span}\{\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_M\}$ ，同时，任意信号 $f \in \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_M\}$ 经 V 变换后所得信号 $\hat{f} \in \text{span}\{\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_M\}$ 。故只需构造信号 $\hat{f} \in \text{span}\{\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_M\}$ 在 V 变换域的低通空间，即可得到图信号 $f \in \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_M\}$ 基于 V 变换的低通信号空间。只要 $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_M$ 在 V 变换域低通，它们的线性组合 \hat{f} 也会在 V 变换域低通。综上，图信号 f 基于 V 变换的低通信号空间就是 $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_M$ 构成的信号空间。

设在带宽为 K 的情况下进行 V 变换，则基于 V 变换的低通信号空间中有基向量矩阵如下

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_{LP} &= V^{-1}\phi = V^{-1}(\phi_1, \dots, \phi_M) = (\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_M) \\
&= \left(\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_1(K) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \hat{\phi}_M(1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_M(K) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{11} & \cdots & \hat{\phi}_{M1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\phi}_{1K} & \cdots & \hat{\phi}_{MK} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} Q \\ 0 \dots 0 \\ \vdots \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix}}_{N \times M} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{K \times K} \\ 0 \dots 0 \\ \vdots \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix}}_{N \times K} \underbrace{Q}_{K \times M}
\end{aligned} \tag{3-20}$$

上式中， Q 是 $K \times M$ 维矩阵，是低通基向量组 $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_M$ 的系数矩阵， Q 不为 0 矩阵，同时包含了低通基向量在 K 内所有非零元素，记作

$$Q = \left(\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_1(K) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \hat{\phi}_M(1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_M(K) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{11} & \cdots & \hat{\phi}_{M1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\phi}_{1K} & \cdots & \hat{\phi}_{MK} \end{pmatrix} \quad \text{式(3-21)}$$

根据矩阵运算的基本知识可知 $V^{-1}V = I_{N \times N}$ ，所以

$$\underbrace{V_{N \times N}^{-1} V_{N \times K}^{(K)}}_{N \times K} = \begin{pmatrix} I_{K \times K} \\ 0 \dots 0 \\ \vdots \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix} \quad \text{式(3-22)}$$

其中矩阵 $V_{(K)}$ 表示矩阵 V 前 K 列，且

$$\begin{aligned} V_{(K)}^{(K)} Q &= V_{(K)}^{(K)} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_1(K) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \hat{\phi}_M(1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_M(K) \end{pmatrix} \right)}_{K \times M} \\ &= V_{N \times N} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_1(K) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \hat{\phi}_M(1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_M(K) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)}_{N \times M} \\ &= V \hat{\phi}_{LP} = \phi \end{aligned} \quad \text{式(3-23)}$$

因此，式(3-20)可以表示为如下所示

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{LP} &= \underbrace{\begin{pmatrix} Q \\ 0 \dots 0 \\ \vdots \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix}}_{N \times M} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{K \times K} \\ 0 \dots 0 \\ \vdots \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix}}_{N \times K} Q_{K \times M} \\ &= V_{N \times N}^{-1} V_{(K)}^{(K)} Q_{K \times M} = V^{-1} \phi \end{aligned} \quad \text{式(3-24)}$$

所以可得

$$V^{-1} V_{(K)} Q = V^{-1} \phi \Rightarrow \phi = V_{(K)} Q \quad \text{式(3-25)}$$

根据式(3-25)可以构造出低通图信号空间，且该空间是基于 V 变换的。

说明如下：根据前文，已知矩阵 Q 是 $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_M$ 的非零系数矩阵，因此只需确定 Q 的元素值就可以确定低通基向量组 $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_M$ ，同时确定 V 变换下的低通图信号空间 $\text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_M\}$ 。但这一图信号空间仅是重构图信号空间，矩阵 $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_M)$ 是重构算子，重构信号空间和采样信号空间未必是同一信号空间，接下来从有限维离散信号的角度理解采样空间和采样矩阵。

通常来说，采样指先对输入信号采样，再对采样信号重建的过程，以 N 维离散信号矢量 $f = [f(0), f(1), \dots, f(N-1)]^T$ 为例，采样可以看作把 f 由 N 维变为 M 维，且 $N > M$ ，因此用 $M \times N$ 的矩阵 Ψ 表示采样算子，用 $N \times M$ 阶矩阵 Φ 表示插值算子，并满足

$$\Psi^* = (\psi_0, \dots, \psi_{M-1}), \Phi = (\phi_0, \dots, \phi_{M-1}) \quad \text{式(3-26)}$$

因此，采样和插值可以看作是分别在空间 $\text{span}\{\psi_0, \dots, \psi_{M-1}\}$ 和空间 $\text{span}\{\phi_0, \dots, \phi_{M-1}\}$ 内进行的，先采样后插值这一过程可以表示如下

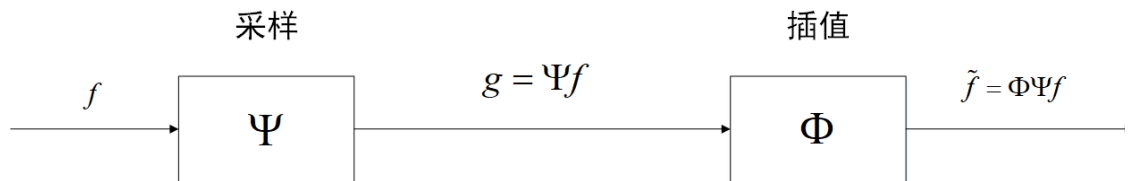


图 3.7 有限维离散信号的采样与插值框图

以图 3.7 所示的先采样后插值这一过程为例，令 $N \times N$ 阶算子矩阵 $P = \Phi\Psi$ ，则图 3.7 中输入 N 维离散信号矢量 f 和输出信号 \tilde{f} 的关系为 $\tilde{f} = \Phi\Psi f = Pf$ 。

根据采样算子与插值算子是否相同，有限维离散信号的采样与重构可分为两种情况。

情况(1): 采样基向量与重构基向量是同一组基向量，此时 $\Psi = \Phi^*$ ，所以 $N \times N$ 阶算子矩阵 $P = \Phi\Psi = \Phi\Phi^* = P^*$ ，若要使得重构信号 \tilde{f} 满足 $\tilde{f} = f$ ，则需要满足以下条件。

条件 1: $f \in S = \text{span}\{\phi_0, \dots, \phi_{M-1}\} = \text{span}\{\psi_0, \dots, \psi_{M-1}\}$

条件 2: $P^2 = P \Leftrightarrow \Phi^*\Phi = I$

上述条件 2 说明该基向量为正交基， P 是正交投影矩阵。若不能满足条件 1，可以

推出 $\tilde{f} \neq f$ ，即无法无失真恢复原信号 f ，但此时由条件 2 可知 \tilde{f} 是信号 f 在空间 S 内的最佳估计。

情况 (2)：采样基向量和重构基向量不同，即 $(\psi_0, \dots, \psi_{M-1}) \neq (\varphi_0, \dots, \varphi_{M-1})$ ，这种情况下无失真恢复原信号需要满足以下条件。

条件 1: $f \in S = \text{span}\{\varphi_0, \dots, \varphi_{M-1}\}$

条件 2: $P^2 = P$

此时条件 2 只能保证 P 是投影算子，不能保证它是正交投影算子，但同时满足以上两个条件时仍可无失真恢复原信号。条件 1 不满足时可知 $\tilde{f} \neq f$ ，所以无法无失真恢复输入信号，此时为了保证 \tilde{f} 是输入信号 f 的最佳估计，除了条件 2，还应满足如下所示条件 3。

条件 3: $P^* = P \Leftrightarrow \Phi = \Psi(\Psi^* \Psi)^{-1}$

若不满足条件 1，但是能同时满足条件 2 和条件 3，则可以保证 P 是正交投影算子，从而可以保证 \tilde{f} 是输入信号 f 在空间 S 内最佳估计。此外，一个固定的 Ψ 只存在唯一一个与之对应的 Φ 可以同时满足条件 2 和条件 3，但对一个固定的 Ψ ，有多个 Φ 只满足条件 2 的情况下与之对应。

3.4 图信号采样的验证

根据上文的分析，情况 (1) 是情况 (2) 的特例，因此针对情况 (2)，进行对图信号采样和插值的研究。首先建立采样和插值的模型如下

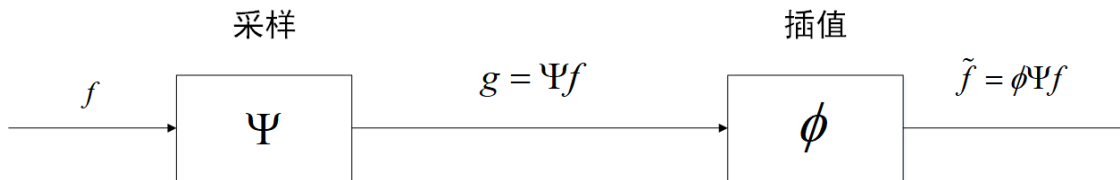


图 3.8 图信号采样与插值流程图模型

根据上文中式(3-25)指出的 $\phi = V_{(K)}Q$ 及条件 $P^2 = P$ ，可以求出图信号的采样算子 Ψ ，由 $P = \phi\Psi$ 可知， $P = \phi\Psi = V_{(K)}Q\Psi$ ，所以可得

$$\begin{aligned}
P^2 &= \phi \Psi \phi \Psi \\
&= V_{(K)} Q \Psi V_{(K)} Q \Psi \\
&= V_{(K)} (Q \Psi V_{(K)}) Q \Psi \\
&= V_{(K)} W_1 Q \Psi \\
&= V_{(K)} Q (\Psi V_{(K)}) Q \Psi \\
&= V_{(K)} Q W_2 \Psi
\end{aligned} \tag{3-27}$$

在式(3-27)中, $W_1 = Q \Psi V_{(K)}$, $W_2 = \Psi V_{(K)} Q$, 可以知道 W_1, W_2 分别为 $K \times K, M \times M$ 阶矩阵, K 是输入信号在 V 变换时的带宽, M 为采样信号维度, 根据前文式(2-24)对 V 变换的定义可知, V 变换不改变向量的维度, 故 M 个图信号在 V 变换域至多有 M 个频率, 只有在 M 大于等于 K 的情况下, 才能保证带宽 K 内频率全部包括在 M 个频率中。从而 $P^2 = P$ 可以理解为

$$\begin{aligned}
P &= V_{(K)} Q \Psi \\
&= V_{(K)} \underset{K \times K}{W_1} Q \Psi \\
&= V_{(K)} Q \underset{M \times M}{W_2} \Psi \\
&= P^2
\end{aligned} \tag{3-28}$$

式(3-28)中, Q 是 $K \times M$ 阶矩阵, 且 M 大于等于 K , 因此可得 $\text{rank}(Q) \leq K$, $\text{rank}(W_2) \leq \text{rank}(Q) \leq K \leq M$, 且只有 $K = M$ 时, $W_2 = I_{M \times M}$, 所以只有当 $W_1 = I_{K \times K}$, 即 $Q \Psi V_{(K)} = I_{K \times K}$ 时, 式(3-28)才能成立。因此根据式(3-25)和 $Q \Psi V_{(K)} = I_{K \times K}$ 可以求得采样矩阵和插值矩阵。

考虑先构造这样的 Ψ 使得采样信号 $g = \Psi f$ 是便于计算的形式, 再求解插值矩阵 ϕ 和 Q 从而恢复原信号 f , 综上, 可得图信号采样与重构定理如下。

定理 3.2 取矩阵 $\Psi_{N \times N}$ 和 $\phi_{N \times M}$ 作为图信号的采样矩阵和插值矩阵, 并令 Ψ 满足

$$\text{rank}(\Psi \cdot V_{(K)}) = K \tag{3-29}$$

矩阵 $V_{(K)}$ 是 $N \times K$ 阶矩阵, 代表 $N \times N$ 阶矩阵 V 的前 K 列。若 S 为低通图信号空间,

带宽为 K , 对任意 N 维图信号 $f \in S$, $\tilde{f} = \phi \Psi f$ 可以无失真恢复 f 的条件如下

$$\phi = V_{(K)} \cdot Q \tag{3-30}$$

上式满足 $Q\Psi V_{(K)} = I_{K \times K}$ 。

该定理说明，图信号为带限的情况下，可以无失真地恢复原信号，但 $f \notin S$ 时

若要保证 $\tilde{f} = \phi\Psi f$ 是信号 f 的最佳估计，还需满足以下条件

$$P^* = P \Leftrightarrow \phi = \Psi(\Psi^* \Psi)^{-1} \Leftrightarrow \Psi = \phi(\phi^* \phi)^{-1} \quad \text{式(3-31)}$$

综上，图信号采样步骤可表示如下：

1. 选采样点数 M 使得 $M \geq K$ ，其中 K 是图信号 f 的带宽。
2. 构造采样矩阵 Ψ ，它是 $M \times N$ 阶矩阵，并保证 $\text{rank}(\Psi) \geq K$ 。
3. 对图信号采样得到采样信号 $g = \Psi f$ 。
4. 由采样矩阵求矩阵 Q ，其中 Q 是 $K \times M$ 阶矩阵，且满足 $Q \cdot \Psi \cdot V_{(K)} = I_{K \times K}$ 。
5. 根据矩阵 Q 求插值矩阵 ϕ ，其中 ϕ 是 $N \times M$ 阶矩阵，且 $\phi = V_{(K)} \cdot Q$ 。
6. 实现图信号的重构，输出信号 $\tilde{f} = \phi\Psi f$ 。

至此，图信号的采样与重构已完成。接下来对图信号采样定理进行验证仿真与分析，为了不失一般性，以普通图信号的非均匀采样为例，对图信号采样定理进行验证。

以图 2.1 所示结构的图信号为例，其邻接矩阵由式(2-21)给出，这里图信号个数为 5 个，即 $N = 5$ ，考虑 $K = 3$ 时，输入如下所示的低通图信号

$$f = [3.5643, -2.2893, 2.1501, 1.2213, -2.4374]^T \quad \text{式(3-32)}$$

根据图信号采样定理的约束条件——采样点数 M 须大于等于带宽 K ，可以设采样点数 $M = K = 3$ ，此时均匀采样矩阵为

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{式(3-33)}$$

将采样矩阵代入采样定理中式(3-30)得到插值矩阵

$$\phi = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0.5411 & 0.8172 & 0.5411 \\ -0.9086 & -1.2033 & -0.9086 \end{bmatrix} \quad \text{式(3-34)}$$

算子 P 可以计算得到

$$P = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0 & 0 \\ -0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.5411 & 0.8172 & 0.5411 & 0 & 0 \\ -0.9086 & -1.2033 & -0.9086 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{式(3-35)}$$

因此可以得到 P^2 和 P^* 如下

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0 & 0 \\ -0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.5411 & 0.8172 & 0.5411 & 0 & 0 \\ -0.9086 & -1.2033 & -0.9086 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{式(3-36)}$$

$$P^* = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.5411 & -0.9086 \\ -0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.8172 & -1.2033 \\ -0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.5411 & -0.9086 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{式(3-37)}$$

观察到 $P = P^2$ 而 $P \neq P^*$ ，此时满足前文所述情况（2）中条件 1 和条件 2，因此可以完全重构输入的低通图信号，根据重构公式得输入

$$f = \begin{bmatrix} 3.5643 \\ -2.2893 \\ 2.1501 \\ 1.2213 \\ -2.4374 \end{bmatrix} \quad \text{式(3-38)}$$

又采样信号为

$$g = \begin{bmatrix} 3.5643 \\ -2.2893 \\ 2.1501 \end{bmatrix} \quad \text{式(3-39)}$$

所以重构信号 $\tilde{f} = \phi \Psi f$ 为

$$\tilde{f} = \begin{bmatrix} 3.5643 \\ -2.2893 \\ 2.1501 \\ 1.2213 \\ -2.4374 \end{bmatrix} \quad \text{式(3-40)}$$

根据输入图信号的结构，将重构信号值绘制在对应顶点，可以得到采样和重构的示意图如下

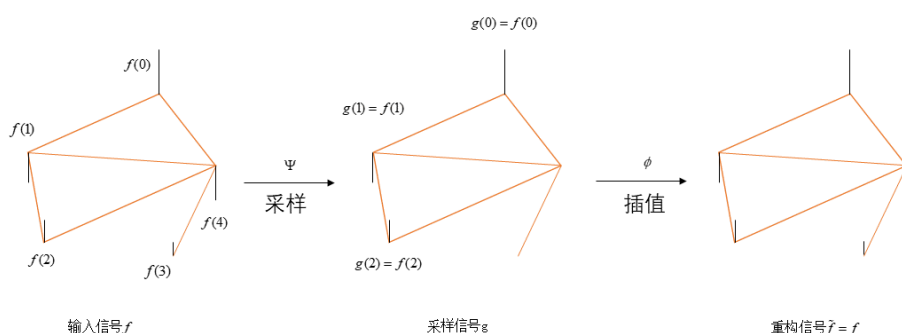


图 3.9 图信号采样与重构

注意到这种情况下采样点数等于输入信号带宽，若采样点数小于输入图信号带宽，会因为产生截断误差从而无法实现无失真重构。

3.5 本章小结

本章从图信号的一种特殊情况——环形图信号出发，对其采样和重构的相关内容进行了分析，提出了环形图信号采样定理，并对插值公式进行了验证，证明了此定理的正确性；接下来推广到一般情况，以有限维离散时间信号为例，研究了其采样与插值的理论，并指出了一般图信号的采样空间域重构空间的关系，从而得到了一般图信号采样定理；最后以一般图信号的非均匀采样为例，验证了一般图信号的采样定理，证明其可无失真恢复原信号，确保了理论的正确性。

第四章 ARMA 图滤波器设计方法

前文解决了图信号的采样问题，本章将针对实际情况，以无限脉冲响应（IIR）图滤波器为例，对其中的 ARMA 图滤波器进行设计；自回归滑动平均（Autoregressive Moving Average, ARMA）图滤波器的频率响应是图位移算子的有理函数，对其研究的目的是使 ARMA 图滤波器的频率响应尽量接近预期。首先对 ARMA 图滤波器的性质进行介绍，然后提出滤波器设计过程中的问题，最后对滤波器系数进行求解，研究影响滤波器性能的因素。

4.1 图滤波器

根据前文所述可知，图滤波器 G 是关于图位移算子 S 的一个函数，表示为

$$G = g(S) \quad \text{式(4-1)}$$

同时， G 还可以表示为

$$G = U g(\Lambda) U^{-1} \quad \text{式(4-2)}$$

式(4-2)是它特征分解的形式， $g(\Lambda)$ 是个对角矩阵，输入信号 x 经过图滤波器后的输出 $y = Gx$ 。同理，在图频率域中 $\hat{y} = g(\Lambda)\hat{x}$ ，这里的 \hat{x} 和 \hat{y} 代表输入信号和输出信号的 GFT。 $g(\Lambda)$ 中对角线上元素表示图滤波器的频率响应，以频率 λ_n 为例， $[g(\Lambda)]_{n,n} = \hat{g}_n$ 。

图滤波器记作 $g(\cdot; \theta)$ ，这里的 θ 表示图滤波器系数构成的向量，因此 \hat{g}_n 表示为 $\hat{g}_n(\theta)$ 。若图频率 λ_n 的预计频率响应为 \hat{h}_n ，则可以通过以下公式求解滤波器系数 θ

$$\min_{\theta} \sum_{n=1}^N \left| \hat{h}_n - \hat{g}_n(\theta) \right|^2 \quad \text{式(4-3)}$$

具体到应用场景，预期的频率响应有着不同形式，在图信号去噪中，需要低通图滤波器，低通图滤波器的频率响应表示如下

$$\hat{h}(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda \leq \lambda_K \\ 0 & \text{if } \lambda > \lambda_K \end{cases} \quad \text{式(4-4)}$$

4.2 ARMA 图滤波器实现

类似上文提到的一般滤波器结构，ARMA 图滤波器也可以表示为 S 的多项式形式^[32]， S 为图位移算子

$$G = g(S; \theta) = \left(\sum_{p=0}^P a_p S^p \right)^{-1} \sum_{q=0}^Q b_q S^q \quad \text{式(4-5)}$$

式(4-5)中 ARMA 图滤波器的系数 $\theta = [a^T, b^T]^T$ ，其中

$$a = [a_0, \dots, a_P]^T, b = [b_0, \dots, b_Q]^T \quad \text{式(4-6)}$$

对应频率 λ_n 处，频率响应为

$$\hat{g}_n = \frac{\sum_{q=0}^Q b_q \lambda_n^q}{\sum_{p=0}^P a_p \lambda_n^p} \quad \text{式(4-7)}$$

ARMA 图滤波器稳定的条件是 $\sum_{p=0}^P a_p S^p$ 可逆，即对任意 $n = 1, 2, \dots, N$ ， $\sum_{p=0}^P a_p \lambda_n^p$ 不为 0。

ARMA 图滤波器相比于经典信号处理用到的滤波器，稳定性问题更少，因为时间信号无限长，图信号有限长，图信号处理过程中无需考虑滤波器零极点问题。

根据 ARMA 图滤波器频率响应可知，其系数 a 和 b 同时乘同一个常数不会改变实际滤波器，故可以固定 $a_0 = 1$ 作为第一个 AR 系数。

由式(4-5)可以知道，ARMA 图滤波器中输出 y 和输入 x 满足

$$\left(\sum_{p=0}^P a_p S^p \right) y = \left(\sum_{q=0}^Q b_q S^q \right) x \quad \text{式(4-8)}$$

可以定义矩阵 P, Q 如下

$$P = \sum_{p=0}^P a_p S^p, Q = \sum_{q=0}^Q b_q S^q \quad \text{式(4-9)}$$

故输出 y 与输入 x 的关系可以写作

$$Py = Qx \quad \text{式(4-10)}$$

即输出 y 可以通过求解线性系统 $Py = z$ 得到，其中 $z = Qx$ 表示对输入 x 进行 FIR 滤波。对这一线性系统的求解，有一阶近似法^[30]，共轭梯度法^[31]等。若 A 为稀疏

矩阵，计算花销会大大降低。

ARMA 图滤波器设计的目的在于，选择合适的系数 a 和 b ，使频率响应 \hat{g}_n 尽可能接近预期的滤波器频率响应 \hat{h}_n ，可以将误差表示为如下形式

$$e_n = \hat{h}_n - \hat{g}_n = \hat{h}_n - \frac{\sum_{q=0}^Q b_q \lambda_n^q}{\sum_{p=0}^P a_p \lambda_n^p} \quad \text{式(4-11)}$$

其中 $a_0 = 1$ ，暂时忽略条件 $\sum_{p=0}^P a_p \lambda_n^p \neq 0$ 进行讨论，在设计完成后再对其进行验证即可。

滤波器的频率响应均方误差为

$$MSE(a, b) = \sum_{n=1}^N e_n^2 \quad \text{式(4-12)}$$

因此现在问题转化为在 $a_0 = 1$ 的条件下求解使得滤波器频率响应均方误差最小的滤波器系数 a 和 b ，即

$$\min_{a, b} MSE(a, b) \text{ s.t. } a_0 = 1 \quad \text{式(4-13)}$$

考虑通过遗传算法求解滤波器系数 a 和 b 。遗传算法指出，每条染色体对应问题的一组解，在此问题下，每条染色体对应一组 (a, b) ，但是不包括 a_0 ，染色体条数等价于种群数量，染色体长度表示一组解映射到一条染色体上后数据的长度，可以用一定长度的 01 序列来表示。每个染色体会发生变异，不同染色体之间交叉，并进行自然选择，从而生成下一代染色体，自然选择的过程在此问题情境下等价于取最小值的操作，如此重复，最后会得到一个最优解。染色体的交叉变异等操作要通过编码来更好的处理，每条染色体等价于 01 序列后，单点变异就是 0 与 1 的变化过程，每次产生子代后，对于给定的子代比例可以求得亲代与子代的所有信息，再根据最小均方值选择，作为下一次进化的亲代。算法开始前设定最大迭代次数，可以通过改变迭代次数观察进化次数对最后得到的解的影响。具体操作流程如下。

算法 4.1 利用遗传算法求 ARMA 图滤波器系数

输入：图顶点个数 nd ，自变量长度也即染色体长度 $nVar$ ，种群规模 $nPop$ (也称作染色体数目)，最大迭代次数 $\max It$ ，子代比例 nPc ，变异概率 nMu ，滤波器

阶数 $J = P + Q$ ，图拉普拉斯矩阵 L 。

种群初始化：利用随机函数生成 N 个随机的个体 $\theta^{(0)}$ ，并求得 L 特征值 λ 。

进化：首先将个体 θ 通过编码得到相应长度的 (a, b) ，利用式(4-11)、式(4-12)求初代个体的均方值，经排序选择后以变量 $flag$ 标记，作为均方误差归一化的参考量。迭代次数 i 小于等于 $\max It$ 时，选择子代中满足使均方值最小的个体作为下一代的亲代，进行交叉、变异，所得子代与本次选择出的作为亲代的个体进行合并，经过排序筛选得到下一代的亲代。

输出：最小均方误差 MSE ，滤波器系数 a^*, b^* 。

经过以上算法，初始随机生成的 N 个个体得到了变异与进化，且每次进化的依据是每个个体表示的滤波器系数对应的频率响应和预期频率响应的均方误差，以误差较小的个体作为下一代的亲代。因此最终的输出是种群中均方误差最小的个体。

4.3 仿真结果分析

传统的有限脉冲响应图滤波器实质上是一个矩阵多项式，基于图位移算子生成，这一类滤波器的频率精度是有限的，特别是在理论响应存在剧烈变化时，因此这里提出的 ARMA 图滤波器将达到更逼近理论频率响应的效果。

采用上文提到的遗传算法求解出一组 ARMA 图滤波器系数 $\{a^*, b^*\}$ ，考虑到图频率的分布不受图信号值的影响，以图拉普拉斯矩阵作为图移位算子，根据式(4-8)可以得到输出信号 y ，此时的输入信号和输出信号的频率分布如下

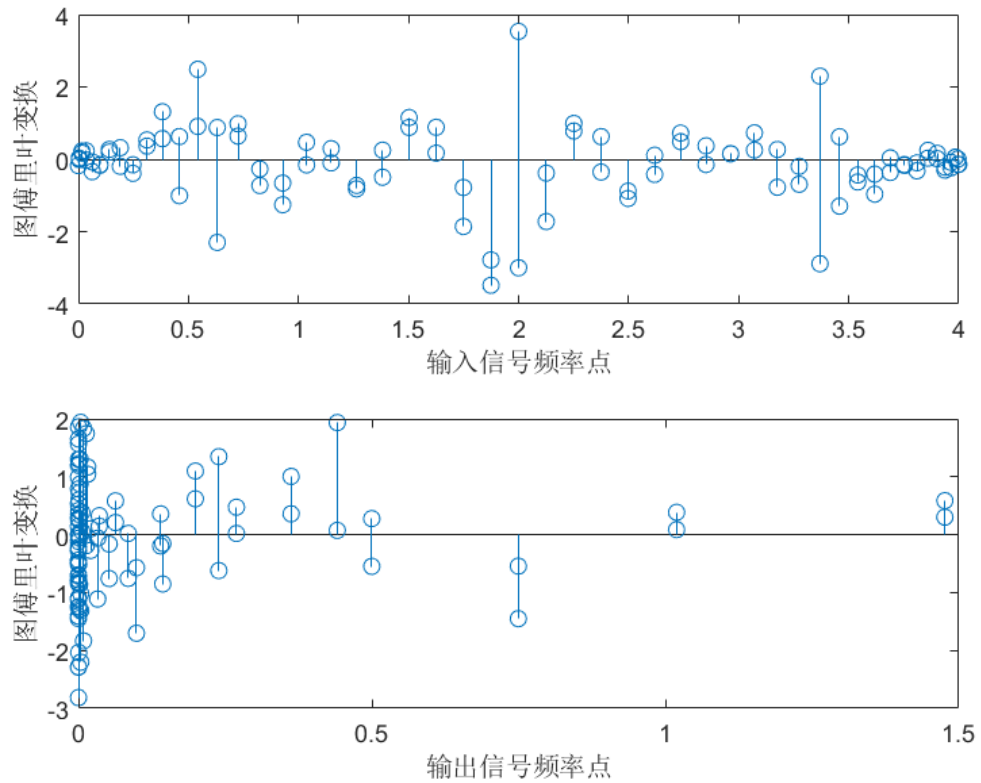


图 4.1 ARMA 图滤波器滤波前后信号频率分布

由图 4.1 可知，频率分布在 $(0,4)$ 的信号经过 ARMA 图滤波器后，输出信号频率集中在 $(0,1.5)$ ，实现了图函数滤波的功能。

接下来针对滤波器阶数 J 和迭代次数 $\max It$ 两个变量对上文提到的 ARMA 图滤波器系数求解算法进行评估和理解。

首先对“归一化均方误差——滤波器阶数”进行仿真，参数如下：图顶点个数 $nd=100$ ，种群规模 $nPop=1000$ ，最大迭代次数 $\max It=50$ ，子代比例 $nPc=0.8$ ，变异概率 $nMu=0.05$ ，所以设计的滤波器频率响应与理论值的归一化均方误差 MSE 与滤波器阶数 J 的关系如下，其中图拉普拉斯矩阵 L 由首尾相连的 100 个顶点的图决定。

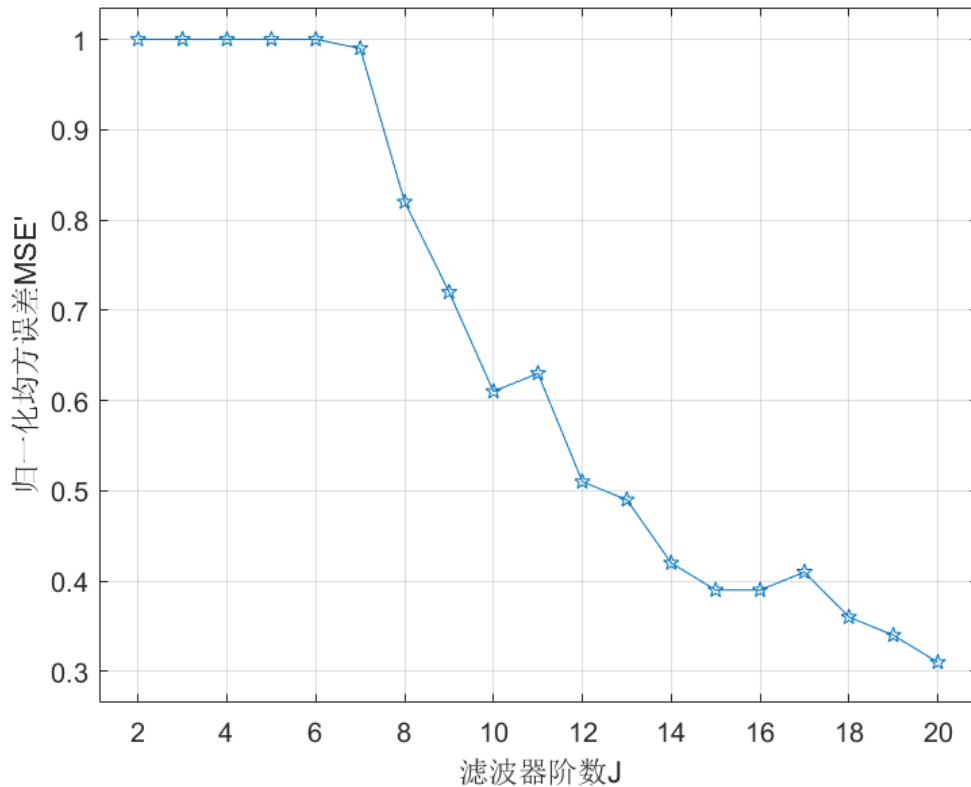


图 4.2 滤波器阶数对归一化均方误差的影响

图 4.2 是按前文提出的方案设计的 ARMA 图滤波器的频率响应和理论频率响应的归一化均方误差 MSE' 和滤波器阶数 J 的关系，由图可以看出，滤波器阶数较小时，归一化均方误差较大且基本不变，随着滤波器阶数的增大，归一化均方误差逐渐减小，在仿真给出的条件下，滤波器阶数增加到 20 前，归一化均方误差均在 0.3 到 0.4 之间波动，并趋于平稳，由此可得，增加滤波器阶数是一种减少设计滤波器的频率响应与理论频率响应之间误差的方法。

接下来对“归一化均方误差——迭代次数”进行仿真，参数如下：图顶点个数 $nd=100$ ，种群规模 $nPop=1000$ ，子代比例 $nPc=0.8$ ，变异概率 $nMu=0.05$ ，则归一化均方误差 MSE' 与最大迭代次数 $\max It$ 的关系如下。

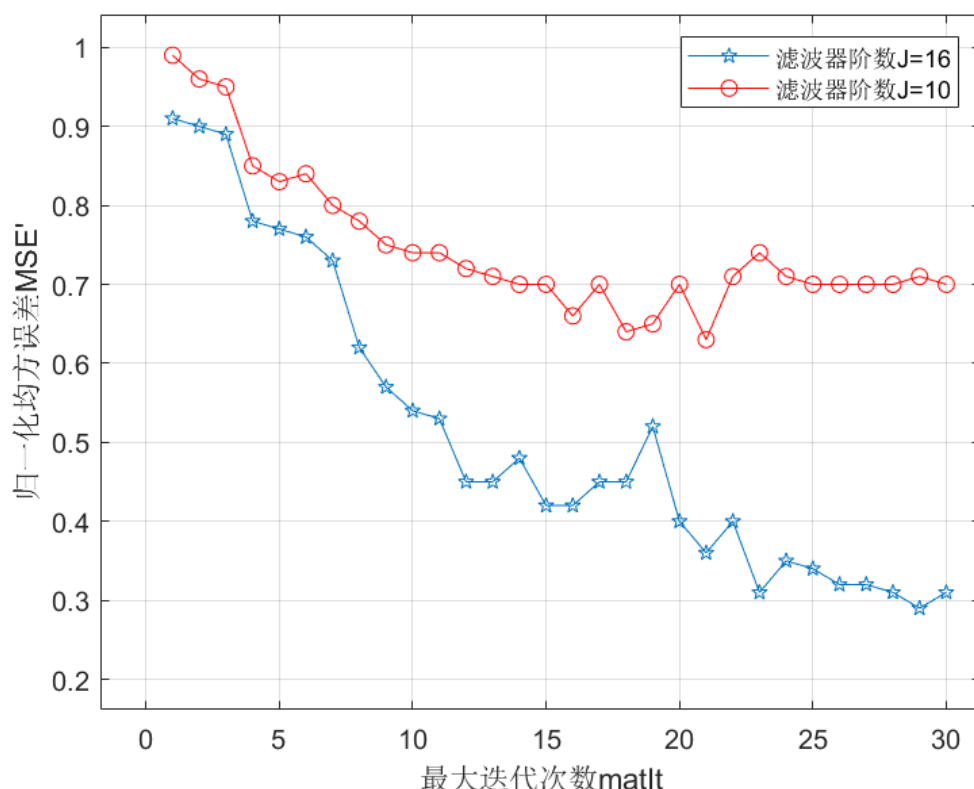


图 4.3 最大迭代次数对归一化均方误差的影响

图 4.3 展示出遗传算法的迭代过程，归一化均方误差为迭代中得到的最佳个体所对应的 ARMA 图滤波器频率响应与理论频率响应的误差，由图可知，随迭代次数的增加，归一化均方误差大体上呈下降趋势，由于算法中存在变异概率与初始化随机选择函数，迭代次数增加时，归一化均方误差会存在波动，并逐渐趋于稳定。此外，迭代次数相同地情况下，滤波器阶数越高，归一化均方误差越小，因为随滤波器阶数的增加，灵活性也会增强，从而对频率响应的拟合性更强。

4.4 本章小结

本章对 ARMA 图滤波器进行设计，其参数的求解用到了遗传算法，遗传算法可以从每一代中选择出更符合要求的个体，再按照给定概率等指标进行变异，交叉，从而产生下一代个体。随着迭代次数的增加，种群逐步向着目标要求进化，最终得到的 ARMA 滤波器的频率响应与理论值越来越接近。根据仿真结果还能看出，阶数越高的滤波器，实际频率响应与理论频率响应的均方误差越小，阶数相同的情况下，迭代次数越多，得到的结果性能更好，对应的均方误差更小，更符合预期要求。

第五章 总结与展望

5.1 全文总结

本文对图信号处理过程中的重要基础问题进行了研究分析，主要研究内容集中在带限图信号采样与重构和 ARMA 图滤波器设计上，具体内容如下

从图信号的定义，基本运算，图傅里叶变换出发对图信号进行了详细介绍，简单介绍了图信号的采样和滤波后提出了带限图信号的采样定理。该定理首先以环形图信号为例，研究环形图信号的采样与无失真重构的条件，进而推广到一般图信号，对一般有限维离散信号的采样和重构进行研究，提出了采样空间，重构空间的概念，并给出了采样算子和重构算子的解释和求法，从而确定了一般图信号采样和重构的步骤。接下来根据具体的图的结构验证了上述结论。

给出了一种 ARMA 图滤波器的设计方法，进行这一研究的根本目的是使实际设计出的 ARMA 滤波器的频率响应和理论上预期的频率响应尽可能接近。文章先给出一般滤波器的结构与表示，然后提出，在滤波器系数满足一定条件下，就是 ARMA 滤波器，接下来给出了 ARMA 图滤波器稳定的条件，以及相对其它滤波器的优点。为了求解出合适的滤波器系数使设计的 ARMA 图滤波器与预期有尽可能接近的频率响应，采用遗传算法对滤波器系数求解，经过仿真，更直观的显示出影响 ARMA 滤波器实际频率响应与预期频率响应均方误差的因素，得到结论：算法迭代次数一定时，滤波器阶数越大，均方误差越小；滤波器阶数一定时，所用的算法迭代次数越多，均方误差越小，但最终，均方误差都会趋于平稳，在一个小范围内波动。

5.2 未来展望

本文主要对带限图信号的采样与无失真重构和 ARMA 图滤波器的设计进行了研究，但鉴于作者水平有限，目前工作仍有待完善，未来将在以下方面进一步调查研究：

实际问题中，图的结构可能是随时间变化的，对应的图频谱也会变化，在这种情况下，须提出新的采样与重构策略对这种变化的图信号进行处理。

对于 ARMA 图滤波器，仅对其自身的特性和影响因素进行了研究，并未横向对照，研究它与其它滤波器相比所具有的优点。未来将阅读相关领域的文献，对其

它图滤波器的特性进行研究讨论。

对于数据规模过大的情况，无法获取图信号的全部信息，仅能从图信号的部分结构和部分数据下手，未来要对此类情况下的采样策略与滤波器设计方法进行研究。

致 谢

岁月不居，时节如流。大学四年匆匆而过，快的令我意想不到，到现在我也很清楚的记得第一天入学的场景，第一天见到室友们的样子。在大学四年中我收获到了很珍贵的友谊，也让我更加明确了我之后所追寻的方向是什么。

感谢我的好舍友高嘉浩，他不仅仅是我的合作伙伴，在大学四年中也因为有他让我变得积极向上。大学生活让我们结下了深厚的友谊，我一直认为在我最好的年纪遇到我的大学，知道这段旅程结束说再见时我才意识到，原来大学和他们才成就了我最美好的年纪。他的各种耐心沟通使得我在这段时间中也变得更沉稳创作，愿我的伙伴前途似锦，繁华如花。

桃李不言，下自成蹊。十分感谢董老师的指导，他是我遇到过老师中及其温柔的老师，也正是因为老师的温声细语，让我有更好的心态去不断修正自己的工作。感谢老师厚爱，导我以狭路，示我以通途，带我成长，祝我进步，言传身教之恩，必当年年岁岁感恩于心。

特别感谢我的父母，他们给予了我很多的鼓励和支持，无声无息的陪伴和坚定的眼神让我知道自己是能做到的。他们无条件的支持我所有想做的事情，在我最低迷的沉没时给予我无限的关怀，感谢我的父母在我每一次面临选择时帮我分析却从不替我决定。我能走这么远，看世界，看天地广阔都是因为他们的支持。世界上的父母都是伟大的，而我的父母是最伟大的。他们是最坚强的后盾，是我无所畏惧为梦想奋斗

的底气。愿我的父母健康平安，也希望我成长的速度能超越爸妈老去的速度。

也要感谢前女友，感谢出现在我世界里带给我的经历和挫折让我成长吗，一直都以为自己是个十八岁做什么都不计后果的孩子，但经历了很多事情以后，忽然间的沉稳让我知道要毕业了，也让我成为一个成熟的大人了。身边朋友也对我说，你真的勇敢了，是我做不到的。大概几年后回头看现在的自己，也会感慨她让我变得勇敢。至少那段时间我为了自己唯一确定想要的东西努力争取过。尽管冬天的雪存留不到夏天，夏天的花绽放不到冬季，我仍然相信万物皆可能，仍在追寻的路上坚持，也希望多年后的自己能像现在一样的勇敢。

最后，说一下感谢自己。

我是一个很没有自信很自卑的人，从初中开始就很怕，甚至连体育课都害怕。刚入就被班上的一些孩子针对了，只因为我是从外地转过去的，他们小学就是同学，没有人会维护正义，只有人挡着教官喊着快打起来。但也感谢自己的内向低调，我经常没什么乱七八糟的事，只自顾自的学习，自然也没有跟同学起过矛盾。感谢那段时间踏踏实实的自己，会认真做笔记，背书，感谢自己在高中坚持锻炼，大学的体育课甚至拿了满分。无论大事小事，我总是怕的要命，小到考驾照，明明普通人人都能随随便便拿到，我每一科都紧张的如同那是我此生绝无仅有的机会，大到各种考试。高中的时候自己为能有足够的自制力带了手机去学校，想来浪费了很多时间在无意义的娱乐上，大学以后总是强迫自己去自习室学习，效果并不好，违背意愿的同时并没有放下随心所欲地娱乐，

到最后也只是沦落得勉强不挂科。但论心不论迹，我执着的意愿在我学某些东西的时候，发挥了很大的作用，有段日子为了自己喜欢的事付出了很多精力和时间，最后的结果到如今也让我佩服，我以那时的我为榜样，正如我以 2010 年的我为榜样。感谢自己时不时的努力与坚持，让我有想起来就能开心的事。不浪费时间说无意义的话了，到此为止吧。感谢所有的经历，感谢所有的遇见，愿此去经年，我们都会更好。

参考文献

- [1] Shuman D I , Narang S K , Frossard P , et al. The Emerging Field of Signal Processing on Graphs: Extending High-Dimensional Data Analysis to Networks and Other Irregular Domains[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2013, 30(3):83-98.
- [2] Shuman D I , Vandergheynst P , Frossard P . Chebyshev polynomial approximation for distributed signal processing[J]. IEEE, 2011.
- [3] Fan Z , Hancock E R . Graph spectral image smoothing using the heat kernel[J]. Patt. Recog, 2008, 41(11):3328-3342.
- [4] Chen S , Sandryhaila A , Moura J , et al. Signal Denoising on Graphs via Graph Filtering[C]// 2014 IEEE Global Conference on Signal and Information Processing (GlobalSIP). IEEE, 2015.
- [5] Egilmez H E , Ortega A . Spectral anomaly detection using graph-based filtering for wireless sensor networks[C]// IEEE International Conference on Acoustics. IEEE, 2014.
- [6] Shi X , Hui F , Zhai M , et al. Infinite Impulse Response Graph Filters in Wireless Sensor Networks[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2015, 22(8):1113-1117.
- [7] Sandryhaila A , Kar S , Moura J . Finite-time distributed consensus through graph filters[C]// IEEE International Conference on Acoustics. IEEE, 2014.
- [8] Narang S K , Gadde A , Sanou E , et al. Localized Iterative Methods for Interpolation in Graph Structured Data[J]. IEEE, 2013.
- [9] Loukas A , Simonetto A , Leus G . Distributed Autoregressive Moving Average Graph Filters[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2015, 22(11):1931-1935.
- [10] Isufi E , Loukas A , Simonetto A , et al. Autoregressive Moving Average Graph Filtering[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 65(2):274-288.
- [11] Agaskar A , Lu Y M . An uncertainty principle for functions defined on graphs[J]. Proceedings of Spie the International Society for Optical Engineering, 2011, 8138(3):81380T-81380T-11.
- [12] Agaskar A , Lu Y M . Uncertainty principles for signals defined on graphs: Bounds and characterizations[C]// IEEE International Conference on Acoustics. IEEE, 2012.
- [13] Agaskar A , Lu Y M . A Spectral Graph Uncertainty Principle[J]. 2012.
- [14] Sakiyama A , Tanaka Y , Tanaka T , et al. Efficient sensor position selection using graph signal sampling theory[C]// IEEE International Conference on Acoustics. IEEE, 2016.

- [15] Lorenzo P D , Banelli P , Barbarossa S , et al. Distributed Adaptive Learning of Graph Signals[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016:1-1.
- [16] Narang S K , Gadde A , Ortega A . Signal processing techniques for interpolation in graph structured data[C]// Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2013 IEEE International Conference on. IEEE, 2013.
- [17] Pesenson I . Sampling in Paley-Wiener spaces on combinatorial graphs[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2008.
- [18] Narang S K , Ortega A . Downsampling graphs using spectral theory[C]// IEEE International Conference on Acoustics. IEEE, 2011.
- [19] Anis A , Gadde A , Ortega A . Towards a sampling theorem for signals on arbitrary graphs[C]// ICASSP 2014 - 2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). IEEE, 2014.
- [20] Chen S , Sandryhaila A , Moura J , et al. Signal Denoising on Graphs via Graph Filtering[C]// 2014 IEEE Global Conference on Signal and Information Processing (GlobalSIP). IEEE, 2015.
- [21] Deutsch S , Ortega A , Medioni G . Manifold denoising based on spectral graph wavelets[C]// 2016 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). IEEE, 2016.
- [22] Fan Z , Hancock E R . Graph spectral image smoothing using the heat kernel[J]. Patt. Recog, 2008, 41(11):3328-3342.
- [23] Tay D , Lin Z . Design of Near Orthogonal Graph Filter Banks[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2014, 22(6):701-704.
- [24] T Aittomäki , Leus G . Graph Filter Design Using Sum-of-squares Representation[C]// 2019 27th European Signal Processing Conference (EUSIPCO). IEEE, 2019.
- [25] 史雪松, 冯辉, 杨涛,等. 图上低频信号谱域变换中的边权重优化设计[J]. 复旦学报: 自然科学版, 2015(6):9.
- [26] 刘鹏飞. 图上信号的降维与重建方法研究[D]. 清华大学, 2015.
- [27] 欧璐. 图谱理论在齿轮箱故障诊断中的应用研究[D]. 湖南大学, 2016.
- [28] 杨汉键. 基于图信号处理的滚动轴承故障特征提取方法研究[D]. 湖南大学.
- [29] Vetterli M , J Kovačević , Goyal V K . Foundations of Signal Processing[M]. 2014.
- [30] Pardalos P M . Convex optimization theory[J]. Optimization Methods and Software, 2011,

25(3):487-487.

[31] Shewchuk J R . An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain[J].

Technical Report, 1994.

[32] 唐于扬. 图滤波器的设计与分布式实现[D]. 南京邮电大学, 2021.

[33] 郑裕. 图信号的高效重建方法研究[D]. 西安电子科技大学, 2021.

[34] 黄双,陈源宝,吴礼华,刘宇.基于图信号处理的都市人群空间动态发现方法[J/OL].武汉大学学报(工学版):2020, 1-9.