图上离散信号处理：采样定理

摘要——我们提出了一个对有向图和无向图都适用的采样定理。这一定理与传统采样理论遵循相同地规则。我们的结果表明，傅里叶变换下的带限图信号，是有可能实现无失真重构的。采样的信号系数形成了一个新的图信号，其对应的图结构保留了原信号的一阶差分。对一般图，我们提出了一种基于实验设计采样的最佳采样算子，以保证完美重构和对噪声的鲁棒性；对于图傅里叶变换为擦去最大鲁棒性的帧的图和Erdős-Rényi 图，随机采样使得无失真重构有很大的可能性。我们进一步建立起了有限离散时间信号处理的采样理论和以前图上信号重构的工作之间的联系。我们建立了一个基于图采样理论的图滤波器组来处理全频带图信号。最后，我们将提出的采样理论用于在线博客和数字图像的半监督分类，在这些方面，我们提出的理论相比于以前的工作，以更少的标记样本达到了相似或者更好的性能。

关键字：图上离散信号处理，采样理论，实验设计抽样，压缩传感。

# 引言

随着信息和交流爆发式增长，信号从各种源头以空前的速度产生，包括社会，引文，生物学和物理基础设施。[1][2]等。与时间序列信号和图像不同的是，这些信号具有复杂，无规律的结构，对于新的处理技术的需求引发了图信号处理这一新兴领域[3][4]。

图信号处理将经典离散信号处理拓宽到了具有复杂底层和不规则结构的信号上。这一框架通过一个图对底层结构进行建模，通过图信号对信号进行建模，并总结了从经典离散信号处理到图信号处理的概念和工具。最近的工作包括基于图的滤波器[5][6][7]，基于图的变换[5][8][9]，图采样和插值[10][11][12]，图上的不确定原理[13]，图的半监督分类[14][15][16]，图字典学习[17][18]，去噪[6][19]，图上社区检测和聚类[20][21][22]，图信号重构[23][24][25]，分布式算法[26][27]。

图信号处理的两种基本方式被这样认为：第一种植根于谱图理论，建立在图拉普拉斯矩阵之上[3]。由于标准图拉普拉斯矩阵被限定为对称阵和半正定阵，这一种方式只适用于具有实非负权重的无向图。第二种方式为图上离散信号处理（DSPG）[5][28]，这种方式植根于代数信号处理理论[29][30]，基于图移位算子建立，图位移算子作为基本算子，为结构给定的信号生成所有线性位移不变滤波器。图移位算子就是邻接矩阵，代表了每两个节点间的相关依赖性。图移位操作未被限定为对称操作，所以这一相应的理论框架适用于任意图，无论是有向边还是无向边，也无论是否是实信号，是否是非负权重。两个框架都使用了复杂的，不规则的结构分析信号，概括了一系列来自经典信号处理的概念和工具，例如图滤波器，图傅里叶变换，从而使基于图的应用更加多样化。

本文中，我们把经典信号处理的工作看作是图上离散信号处理框架内的采样和插值[31][32]。作为连接序列和函数的桥梁，经典采样理论告诉我们，如果采样频率足够高，一个带限信号总可以从它的采样序列实现无失真重构[33]。更普遍而言，我们可以将任何由一个线性算子导致的维度上的减少视作采样，相反地，将任何由一个线性算子导致的维度上的增加视作插值[31][34]。在这种情形下提出抽样理论就等于在高维和低维空间之间移动。

图抽样理论有着有趣的应用。例如，给出一个代表Facebook上人脉圈的图，我们可以对一部分用户进行抽样，询问它们的爱好，然后我们就可以根据重构获得所有用户的爱好。然而，图上采样这一工作没有被很好地理解[11][12]，因为图信号依托于复杂，无规律的底层结构。找到一个与采样信号系数相关联的图结构更是一个具有挑战性的工作；在Facebook这一例子中，我们对一小部分用户进行采样，一个与之相关联的图结构足以让我们推断出被采样用户之间的新的联系，甚至他们在原始的图中并未直接相连。

采样理论之前的成果[10][12][35]考虑的是在给定节点子集上唯一抽样的图信号，这种方法很难应用于有向图。它也没有解释哪种图结构支持这些采样系数。

在本文中，我们提出了一种在有向图和无向图上都支持的图信号采样理论。无失真重构对图傅里叶变换下的带限图信号来说是可行的。我们同时也提出，采样信号系数构成了一个新的图信号，这个图信号对应的图结构由原始图结构所构成。我们提出的这一采样理论遵循文献[31]的第五章，同时也符合经典采样理论。

我们将能实现无失真重构的采样算子称为合格采样算子。我们证明了对于一般图而言，为了保证无失真重构和对噪声的鲁棒性，一个基于实验设计采样的最佳采样算子被提出；对于那些图傅里叶变换为擦除具有最大鲁棒性的帧的图和Erdős-Rényi图，随机抽样有很高的概率能实现无失真重构。我们进一步建立了与有限离散时间信号处理的采样理论和图信号采样先前工作的联系。我们提出了将图信号强制变为带限信号的图滤波器组来解决全频带图信号的问题。最后，我们将提出的采样理论应用到了针对在线博客和数字图像的半监督分类中，在这种情境下，我们的理论同先前的工作相比，可以只使用更少的标记样本却拥有类似或者更好的性能。

贡献。本文最主要的贡献如下：

一个图信号采样的新体系，该体系使用线性代数中简单的工具解决复杂的采样问题。

一个新的图信号采样方法，该方法通过保留原始图信号的一阶差分实现采样。

一种新的设计图采样算子的方法。

大纲。第二章阐述了问题，并简要回顾了奠定本文基础的问题——DSPG。第三章描述了提出的图信号采样理论，和提出的采样信号系数对应的图结构的构造。第四章研究了合格采样算子，包括随机采样和实验设计采样。第五章讨论了和以前工作的联系，并将采样框架扩展到了图滤波器组的设计。第六章给出了图信号采样理论在半监督学习中的应用。第七章总结了全文，指出了未来研究方向。

# 第二章 图上离散信号处理

本章简单回顾了图上离散信号处理相关概念；完整介绍可以在文献[4][28]中找到。它是一个这样的的理论框架，该框架将经典离散信号处理从线或者矩形格这样的规则域推广到通常由图描述的不规则结构。

A. 图移位

图上离散信号处理利用由图表示的复杂的，不规则的结构研究信号，其中是节点的集合，代表图移位，或者说带权重的邻接矩阵。它代表了图*G*的关联性，这里的图既可以是有向图也可以是无向图（值得注意的是，标准图拉普拉斯矩阵之恶能表示无向图[3]）。连接节点和的边的权重是一个代表第*n*个和第*m*个节点之间的潜在关系的定量的表示，这种关系例如相似性，独立性或者沟通模式。为了保证移位算子缩放合适，我们把图移位算子归一化成满足。

B. 图信号

给定图的表示，图信号定义为在图节点上被分配了信号系数的图。一旦节点顺序固定，图信号就可以被写作一个向量

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1) |

这里第*n*个信号系数对应节点。

C. 图傅里叶变换

一般来说，傅里叶变换对应使用不随滤波改变的基本元素进行的信号拓展；在这里，这个基本元素就是图移位矩阵A的特征基（或者说，如果A的特征基不存在，就是A的Jordan特征基）。简单而言，假设A有完整的特征基，那么A的频谱分解为[31]

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2) |

矩阵*V*由A的特征向量组成，是对应特征值的对角矩阵。这些特征值代表图上的频率[28]。这里我们先不指定图频率的顺序，稍后将解释原因。

定义1：的图傅里叶变换为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3) |

逆傅里叶变换为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

(3)中的向量表示信号在特征向量基的展开，也描述了图信号的频率成分。逆傅里叶变换从图信号的频率内容通过连接图频率分量来重构图信号，这里的图频率分量由图傅里叶变换的系数决定。

表1 文中使用的关键符号

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Symbo** | **Descript** | **Dimension** |
|  | 图移位矩阵 |  |
|  | 图信号 |  |
|  | 图傅里叶变换 |  |
|  | 频域图信号 |  |
|  | 采样算子 |  |
|  | 插值算子 |  |
|  | 采样指数 |  |
|  | 的采样系数 |  |
|  | 的第K个系数 |  |
|  | V的第K列 |  |

# 第三章 图采样

之前的研究中，图信号的采样理论基于谱图理论[12]。图信号的带宽是基于图频率的值来定义的，图频率的值对应图拉普拉斯矩阵的特征值。由于每个图都有自己的图频率，实践中很难指定一个一般的图截止频率；同时，计算图频率的所有值的计算效率很低，特别是对规模较大的图。

本章我们提出了一个新的图信号采样框架。这里带宽的定义是基于信号在图傅里叶变换域的非零系数的个数的。因为图傅里叶域的每个信号系数都对应一个图频率，所以带宽的定义也可以基于图频率的个数。这使得我们提出的采样框架和线性代数有了紧密的联系，即我们可以使用线性代数中的简单的工具来表示在复杂的，无规律的图上的采样。

A. 采样和重构

假设我们要对图信号进行点采样得到采样信号，这里表示采样指数的序列，且。然后我们对进行插值可以得到，这样就可以准确或近似还原信号。采样算子是一个从到的线性映射。定义为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4) |

插值算子是一个从到的线性映射（见图1）

|  |
| --- |
|  |
| 图1 先采样后插值 |

可以得到采样和插值操作为

|  |
| --- |
| 采样：，  插值： |

这里可以准确或近似恢复信号。考虑两个采样策略：随机抽样意味着采样指数是从中独立随机选择的；实验设计抽样意味着采样指数可以是预先选择好的。很显然随机抽样是实验设计抽样的一个子集。

当是单位矩阵时，对所有的信号都可以实现无失真重构。一般来说这是不可能的因为。然而，对于具有特定结构的信号，无失真重构是可能的，我们把这种信号定义为带限图信号，就像在经典离散信号处理中的一样。

B. 图信号采样理论

现在，我们定义一类带限图信号，它使得无失真重构变为可能。

定义2：如果存在一个，对于图信号使得它的傅里叶变换满足

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

我们就称图信号是带限的。最小的满足条件的*K*叫做图信号的带宽。非带限图信号又被叫做全频带图信号。

注意到这里的带限图信号不一定意味着低通或光滑。因为我们没有指定频率的顺序，我们可以在图傅里叶变换矩阵中对特征值重排并置换对应的特征向量，从而在图傅里叶变换域选择出任意波段。只有当特征值按下降的顺序排列时，带限图信号才是光滑的。带宽的限制在这里相当于限制已知的图傅里叶变换域中非零信号系数的个数。这个概括对于表示非光滑图信号可能很有用。

定义3：在内，带宽最大是K的图信号的集合是一个封闭子空间，表示为，其中与(2)中相同。

定义带宽的时候，我们专注于图频率的个数，之前的工作[12]关注点在图频率的值。使用图频率的值有两个弊端：(a)考虑图频率的值时，我们忽略了图的离散性；因为图频率是离散的，同一图上的两个截断图频率可能会对应相同地带限空间。例如，假设一个图的图频率为0，0.1，0.4，0.6和2；无论我们将阶段频率设置为0.2还是0.3，都会形成相同地带限空间。(b)图频率值不能在不同的图之间进行比较。因为每个图都有自己的图频率，两个图上相同地截断图频率值可能表示不同的结果。例如，一个图的图频率是0，0.1，0.2，0.4和2，另一个图的图频率是0，1.1，1.6，1.8和2；当我们把截止图频率设置为1时，也就是说，我们保留所有不大于1的图频率，第一个图保留了四分之三的图频率，第二个图只保留了四分之一的图频率。因此，图频率的值没有必然地给出一个关于带限空间直观的理解。使用图频率的个数的另一个关键优势在于建立了一个同线性代数的紧密联系，这使得我们可以在带限图信号的采样和插值时可以使用线性代数中的简单工具。

在文献[31]的定理5.2中，作者通过投影展示了向量的重构，这为经典采样理论奠定了理论基础。按着这一定理，我们可以得到如下的结果，其证明可以在[34]找到。

定理1：使满足

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

这里表示V的第K列。对所有的，无失真重构通过选择如下的决定

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

上式满足是一个的单位矩阵。

在已知条件的情况下，定理1对所有图傅里叶变换域有非零元素的图信号都适用。

类似于经典采样定理，图信号的采样速率也有一个下限，即采样点数应不小于带宽。当时，，因此，不可能是一个单位矩阵。当的时候，若要是一个单位矩阵，应当是矩阵的逆；当时它是矩阵的伪逆，其中的冗余对于降低噪声的影响会很有用。为简单起见，我们只考虑和可逆的情况。当时，我们只需根据M个采样信号系数来选择K从而保证采样点大小和带宽相同。

从定理1中，我们可以知道即使对带限图信号，一个随机采样算子也可能不会实现无失真重构。当采样算子满足全秩假设(5)时，我们把它称为合格采样算子。为了满足(5)，采样算子应该在中选择一组K线性独立的行。因为V是可逆的，所以V中的列向量线性无关，且恒成立；换言之，在中总存在一组K线性无关的行。因为图移位矩阵A已经给出，所以可以独立于图信号找到这样的集合。给定这样的集合后，定理1保证带限图信号的无失真重构。有些高效的算法可以找到矩阵中线性无关的行，比如QR分解；详情在文献[36][31]。因为我们只需要知道图结构就能设计一个合格采样算子，这就遵循了实验设计采样。我们将在第四章展开讲这个话题。

C. 采样后的图信号

我们只证明了图信号在带限的情况下无失真重构是可能的。现在证明采样后的信号系数构成了一个新的图信号，它对应的图移位可以由原始图移位构成。

虽然接下来的结果可以很容易概括为，为了简单起见，我们只考虑的情况。使采样算子和插值算子符合定理1中的情况。对所有的，可以知道

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

这里的代表的第K个系数，（a）由定理1得出，（b）由定义2得出。因此我们可以知道

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

由此可知，采样后信号系数和频率分量形成了一个傅里叶变换对，因为可以从通过构造，也可以由通过构造。这说明，根据定义1和谱分解(2)，是一个与图傅里叶变换矩阵U相关联的图信号，也是一个新的图移位

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

这里有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

其中是对进行采样的前K个特征值组成的对角矩阵。因此可以得到如下的定理。

定理2：令，则它的采样信号为，其中是合格采样算子。然后，和图信号对应的图移位矩阵为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5) |

其中。

从定理2中我们可以知道，图移位矩阵是由对特征向量矩阵的行采样和对原始图移位矩阵A的前K个特征值采样共同构成的。我们通常会说是从A中采样得到的，并在图傅里叶变换域保留了一定的信息。

因为x的带宽是K，所以频域的前K个系数为，另外个系数；换言之，对原信号x和采样信号进行傅里叶变换后可以知道，它们的频率分量是相同的。

类似于定理1，在图傅里叶矩阵上对特征值重新排列，对相应的特征向量进行置换，定理2适用于所有在图谱域具有有限支持的图信号。

D. 采样图信号的性能

我们认为，是支持采样信号系数的图移位，它来自于采样图信号的图傅里叶变换和图移位之间的数学等价性。实际上，我们含蓄地提出了一种采样图的方法。由于采样图总是丢失信息，我们现在研究哪些信息保留。

定理3：对于所有的，有。

证明：

|  |
| --- |
|  |

这里最后一个等号从得知。

这一项测量原始图信号与其移位后的差异。这也被称为x的一阶差分，而这一项测量的是采样指数的一阶差分。此外，是基于范数的图的总变化，这是衡量图信号光滑度的量化特征[28]。当使用采样图来表示采样信号系数时，我们会丢失采样节点与所有其他节点之间的连通性信息；尽管如此，他仍保留了采样指数的一阶差。我们并没有像之前的工作[37]一样专注于保持连通性，而是强调信号和结构之间的相互作用。

E. 举例

考虑一个五节点的有向图，其图移位矩阵为

|  |
| --- |
|  |

与之对应的逆傅里叶变换矩阵为

|  |
| --- |
|  |

该信号的频率为

|  |
| --- |
|  |

令K=3，生成一个带限图信号如

|  |
| --- |
|  |

并且原信号满足

|  |
| --- |
|  |

此时x的一阶差分为

|  |
| --- |
|  |

我们可以检查V的前三列，可以看出三行的所有集合都是独立的。根据抽样定理，我们可以通过采样任意三个系数对x无失真重构；例如，对第一，第二，第四个系数进行采样。然后得到

|  |
| --- |
|  |

并且采样算子是合格采样算子

|  |
| --- |
|  |

我们通过如下的插值算子重构信号x

|  |
| --- |
|  |

重构的过程如图3.2所示

|  |
| --- |
|  |
| 图2 先采样后插值。箭头表示边是有向的 |

采样信号的逆傅里叶变换矩阵为

|  |
| --- |
|  |

采样频率为

|  |
| --- |
|  |

采样图移位可以写作如下

|  |
| --- |
|  |

的一阶差分为

|  |
| --- |
|  |

我们可以看到，采样图移位包含自循环和负权重，这似乎与矩阵A有所不同，但保留了A的部分频率内容，因为是根据V进行采样的，是从A中采样的。也保留了x的一阶差分，这很好地验证了定理3.

# 第四章 合格算子采样

正如第三章所示，只有一个合格采样算子可以使带限图信号无失真重构。由于合格采样算子是通过图的结构来设计的，它属于实验设计的采样。该设计包括在中找到K个线性无关的列，这样就有了多种选择。在本节中，我们提出了一种通过最小化噪声对一般图的影响来设计合格采样算子的优化方法。然后，我们证明了对于某些特定的图，随机抽样也会导致高概率的完美恢复。

|  |
| --- |
|  |
| 图3 图采样 |

1. 实验设计采样

我们现在展示如何在任何给定的图上设计一个对噪声鲁棒的合格采样算子。然后，我们将此最佳采样算子与传感器网络上的随机采样算子进行比较。

最佳采样算子：根据第三章中的B所提到的，所有样本中至少存在一组线性独立的行。当我们有多个线性独立的行的选择时，我们的目标是找到最佳的一个来最小化噪声的影响。

考虑在采样过程中引入噪声的模型，如下所示，

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

这里是一个合格采样算子。重构图信号为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

为了限制噪声的影响，我们令

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

其中不等式来自于谱范数的定义。由于和是固定的，我们希望U有一个更小的谱范数。从这个角度来看，对于每个可行的，我们计算的逆或伪逆得到U；最佳选择来自具有光谱范数最小的光谱的U。这相当于将的最小单值最大化，

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6) |

其中表示最小的奇异值。(6)的解在最小化噪声影响方面是最优的；我们称之为最优采样算子。由于我们限制了(4)中的，(6)的形式是不确定的多项式时间难题。为了求解(6），我们可以使用贪婪算法，如算法1所示。在之前的工作中，作者解决了一个类似的矩阵逼近和优化问题并提出贪婪算法很好地逼近了全局最优解[38]。请注意，是采样序列，指示要选择的行，表示从中采样的行。当增加样本数时，的最小奇异值会增加，因此，冗余样本使算法对噪声具有鲁棒性。

|  |
| --- |
| 算法1 贪婪算法求解最佳采样算子 |
|  |

仿真：我们考虑了美国150个记录当地温度的气象站[5]。当每对气象站之间的测地距离小于500英里时，通过指定一条边来获得表示这些气象站的图形，也就是说，图移位A为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

这里是第i个和第j个气象站之间的测地距离。

我们模拟了一个带宽为3的图信号

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

这里表示V的第i列。我们设计了两个采样算子进行恢复：一个任意合格采样算子和一个最优采样算子。我们知道，在3个样本的情况下，它们都能完全恢复x。为了验证对噪声的鲁棒性，我们在每个样本中加入均值为零、方差为0.01的高斯噪声。我们使用插值算子(5)从样本中恢复图形信号。

图4(f)和(h)显示了从这两个采样操作符中的每一个恢复的图形信号。我们发现，任意限定的采样算子对噪声不具有鲁棒性，无法恢复原始图形信号，而最优采样算子对噪声具有鲁棒性，能够近似恢复原始图形信号。

|  |
| --- |
|  |
| 图4 在传感器网络上绘制信号图。颜色表示信号系数的值。红色代表高值，蓝色代表低值。(e)和(g)中的大节点表示每种情况下的采样节点 |

1. 随机抽样

在此之前，我们已经证明我们需要设计一个合格的采样操作员，以实现完美的恢复。我们现在证明，对于某些图，随机抽样会导致高概率的完美恢复。

对擦除具有最大鲁棒性的帧：一帧是对满足的的生成系统，当存在两个常量时，对于所有的

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

在有限维中，我们将帧表示为带有列的矩阵。当每个的子矩阵（通过删除列得到）都是可逆时，帧对擦除具有最大鲁棒性[39].在[39]中，作者证明多项式变换矩阵是帧对擦除具有最大鲁棒性的一个例子；在[40]中，作者证明了许多重叠正交变换和重叠紧帧变换对擦除也具有最大的鲁棒性。显然，如果如（2）中所示的逆图傅里叶变换矩阵V对擦除具有最大鲁棒性，则至少对K个信号系数进行采样的任何采样算子都可以保证完美恢复；换句话说，当图形傅里叶变换矩阵恰好是多项式变换矩阵时，对任何K个信号系数进行采样都可以实现无失真恢复。

例如，循环图是邻接矩阵为循环的图[41]。循环图移位C可以表示为循环置换矩阵的多项式。循环置换矩阵A的图傅里叶变换是离散傅里叶变换，它也是多项式变换矩阵。如上所述，我们有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

其中L是多项式的阶数，是对应于第i阶的系数。由于循环图的图傅里叶变换矩阵是离散傅里叶变换矩阵，我们可以通过采样定理1所示的任何信号系数，完美地恢复具有带宽K的循环图信号。换句话说，当我们随机采样足够数量的信号系数时，可以保证完美恢复。

Erdős-Rényi图：Erdős-Rényi图是通过随机连接节点构造的，其中每一条边都包含在图中，概率独立于任何其他边[1]，[2]。我们的目的是证明，通过随机采样K个信号系数，对应于的奇异值是有界的。

引理1：让一个图移位表示一个ErdősRényi图，其中每一对顶点随机且独立地以概率连接，是一些正函数。设满足的V为A的特征向量矩阵，且采样系数的数量对一些正常量满足

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

然后有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7) |

对所有采样信号系数的采样算子都是满足的。

证明：对于Erdős-Rényi图，特征向量矩阵【42】对满足

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

通过将V带入到【43】中的定理1.2，我们得到(7)，

定理4：令如引理1中定义。在概率下，是中的一个帧，它有下界M/2和上界3M/2。

证明：利用引理1，在概率情况下，我们有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

然后我们可以得到对所有，

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

从定理4中，我们可以看到，的奇异值是高概率有界的。这表明它很高概率具有满秩；换句话说，当我们随机采样足够多的信号系数时，Erdős-Rényi图信号以高概率实现完美恢复。

|  |
| --- |
|  |
| 图5 Erdős-Rényi图的成功率。蓝色曲线表示大小为50的Erdős-Rényi图，红色曲线表示大小为500的Erdős-Rényi图。 |

仿真：通过对Erdős-Rényi图进行随机抽样，检验满足满秩假设的概率，验证了定理4。一旦满秩假设得到满足，我们就可以找到一个合格的采样算子来实现完全恢复，因此，我们称这个概率为完全恢复的成功率。

我们用不同的大小和连接概率检查完美恢复的成功率。我们将ErdősRényi图的大小从50变为500，连接概率从0变为0.5，区间为0.01。对于每个给定的大小和连接概率，我们随机生成100个图。假设对于每个图，对应的图信号具有固定的带宽K=10。给定一个图移位，我们从图傅里叶变换矩阵的前10列中随机抽取10行，并检查这个10×10矩阵是否为满秩。基于定理1，如果10×10矩阵是满秩的，则保证完全恢复。对于每个给定的图形移位，我们对100个图形进行随机抽样，并计算成功次数以获得成功率。

图5显示了在100次随机测试中平均大小为50和500的成功率。当我们确定图的大小时，在Erdős-Rényi图中，成功率随着连接概率的增加而增加，也就是说，连接越多，获得合格采样算子的概率越高。当我们比较同一类型图的不同大小时，成功率随着大小的增加而增加，也就是说，图的大小越大，获得合格采样算子的概率越高。总的来说，如果连接数量足够，成功率接近100%。仿真结果表明，当图上存在更多连接时，满秩假设更容易满足。直觉是，在连接概率较高的较大图中，节点之间的差异较小，即每个节点都具有相似的连接属性，并且不偏好对其中一个节点进行采样，而不是对另一个节点进行采样。

# 第五章 联系和拓展

我们现在讨论三个主题：与有限离散时间信号采样理论的关系，与压缩传感的关系，以及如何处理全频带图形信号。

1. 有限离散时间信号与采样理论的联系

我们将支持有限离散时间信号的图称为有限离散时间图，它指定了从过去到未来的时间顺序。有限离散时间图可以用循环置换矩阵[31]，[28]表示，

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

特征向量矩阵为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

它是N点离散傅里叶变换矩阵的厄密特转置，，是N点离散傅里叶变换矩阵，，特征值矩阵为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (8) |

这里。我们可以看到，定义2，3和定理1完美适用于有限离散时间信号，并且与此类信号的采样一致【31】。

定义4：当存在使得一个离散时间信号的离散傅里叶变换满足以下条件时，称之为带限信号

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

这里最小的K称为x的带宽。如果一个离散时间信号不是带限的它就叫做全频段离散时间信号。

定义5：带宽最多为K的离散时间信号集是用离散傅里叶变换矩阵表示的闭子空间。

根据离散傅立叶变换矩阵的定义，最高频率位于频谱的中间（尽管这只是一个排序问题）。根据定义4和5，我们可以排列离散傅里叶变换矩阵中的行，以选择任何频带。由于离散傅里叶变换矩阵是范德蒙矩阵，因此任意K行都是独立的[36]，[31]；换句话说，在的时候都成立。我们现在应用定理1得到以下结果。

推论1：令满足采样数不小于带宽，即，对所有的，无失真重构可以通过以下操作实现

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

选择这样的使得是一个的单位矩阵，为的前K列。

从推论1中，我们可以完美地恢复带限的离散时间信号。

与定理2类似，我们可以证明一个新的图移位可以由有限离散时间图构造。可以使用多种采样机制对新的图形移位进行采样；一个直观的结论如下：设为有限离散时间信号，其中N为偶数。重新排列（8）中的频率，将指数为偶数的频率放在第一位，

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

类似地，通过将索引为偶数的列放在第一位，对（9）中的列进行重新排序

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

我们可以检查是否仍然是相同的循环置换矩阵。假设我们想要保留前N/2个频率成分；然后计算采样频率

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

令采样算子选择中的前N/2列，

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

它是大小为N/2的离散傅里叶变换的厄密特转置，满足定理2中的条件，采样图傅里叶变换矩阵是大小为N/2的离散傅里叶变换。采样图移位可以构造为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

这就是N/2×N/2的循环置换矩阵。因此，我们利用定理2证明了通过选择适当的采样机制，可以从较大的有限离散时间图中获得较小的有限离散时间图。我们注意到，使用不同的排序或采样运算符将导致图形移位，这种移位可能不同且不直观。这只是选择不同频率分量的问题。

1. 和压缩感知的关系

压缩感知是一种采样框架，用于通过少量测量恢复稀疏信号[44]。该理论认为，当信号和采样方法在某些理论方面得到很好的定义时，少量样本可以保证原始信号的恢复。更具体地说，在给定采样算子和采样信号的情况下，原信号可以通过求解如下来求得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (9) |

由于范数不是凸的，优化问题是一个不确定的多项式时间困难问题。为了获得计算效率高的算法，基于范数的算法又作为基追踪或带去噪的基追踪，以较小的逼近误差恢复稀疏信号【45】。

在标准的压缩传感理论中，信号必须是稀疏的或近似稀疏的，才能保证准确的恢复特性。在[46]中，作者提出了一种使用字典对非稀疏信号进行压缩感知的通用方法。具体来说，一般信号通过以下方式恢复：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (10) |

这里D是一个用来使Dx为稀疏的运算。指定x为图形信号时，以及指定D为信号所在图形的适当图形傅里叶变换时，Dx表示的频率内容在带宽有限时是稀疏的。方程（10）通过优化方法从几个采样信号系数中恢复带限图形信号。所提出的采样理论处理与非零元素对应的频率已知的情况，并且可以重新排序以形成带限图信号。压缩感知处理与非零元素对应的频率未知的情况，这是一个更普遍、更困难的问题。如果我们能够获得非零元素的位置，那么提出的采样理论使用最小数量的样本来实现完美的恢复。

1. 与图上信号重构的联系

图上的信号恢复尝试从嘈杂、缺失或损坏的样本中恢复相对于基础图被假定为平滑的图信号[23]。以前的工作从不同的角度研究了图上的信号恢复。例如，在[47]中，作者认为图是流形的离散表示，旨在通过正则化平滑度泛函来恢复图信号；在[48]中，作者旨在通过正则化组合Dirichlet来恢复图信号；在[23]中，作者旨在通过正则化图的总变化来恢复图信号；在[49]中，作者旨在通过寻找经验模式来恢复图形信号；在[18]中，作者旨在通过训练一个基于图形的字典来恢复图形信号。这些工作侧重于最小化经验恢复误差，并处理一般的图形信号模型。因此，很难显示何时以及如何准确地恢复丢失的信号系数。

与图上的信号恢复类似，图上的采样理论也试图从不完整样本中恢复图信号。主要区别在于，图的采样理论侧重于平滑图信号的子集，即带限图信号，并从理论上分析何时以及如何准确恢复缺失的信号系数。[10]、[50]、[12]中的作者考虑了一个与我们类似的问题，即通过在顶点域中采样几个信号系数来恢复带限图信号。主要区别如下：（1）我们关注的是图的邻接矩阵，而不是图的拉普拉斯矩阵；（2） 定义带宽时，我们关注的是频率的数量，而不是频率的值。图上抽样理论的一些最新扩展包括[51]–[53]。

|  |
| --- |
|  |
| 图6 将图形信号拆分为两个带限图形信号的图形滤波器组。在每个通道中，我们执行1个插值定理。最后，我们将两个通道的结果相加，以获得原始的全频带图信号。 |

1. 图形下采样和图滤波器组

在经典信号处理中，采样指对连续函数进行采样，下采样指对序列进行采样。这两个概念都使用较少的样本来表示原始信号的整体形状。由于图形信号本质上是离散的，因此采样和下采样是相同的。以前的工作通过图着色[6]或最小生成树[54]实现了图下采样。

提出的抽样理论为一系列合格的抽样算子（5）提供了一个最优抽样算子，如（6）所示。要将图的采样减少2，可以将带宽设置为节点数的一半，也就是说，K=N/2，使用（6）获得最佳采样算子。第五章的A给出了有限离散时间信号的示例。

如定理1所示，当图形信号是带限的时，可以实现完全恢复。为了处理全频带图形信号，我们提出了一种基于图形滤波器组的方法，其中每个通道不需要完全恢复，但需要结合它们来恢复。

设x为全频带图信号，在不损失通用性的情况下，我们可以将其表示为同一个图上支持的两个带限信号的相加，即，其中

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

且

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

我们看到包含前K个频率，包含其他频率，每个频率都是带限的。我们分别在和两个通道中对和进行采样和插值。以第一频道为例。根据定理1和定理2，我们使用一个合格的采样算子对进行采样，并获得采样信号系数为，相应的图为。我们可以用插值算子如来恢复。最后，我们将两个通道的结果相加，以获得原始的全频带图信号（也如图6所示）。使用图形滤波器组的主要好处是，我们可以将注意力集中在感兴趣的频带上，而不是用大图形处理长图形信号，并用每个通道中的小图形处理较短的图形信号。

我们不限制来自两个波段的样本，大小相同，因为我们可以根据样本大小自适应地设计采样和插值算子。

|  |
| --- |
|  |
| 图7 图滤波器组分析 |

这与经典文献中的滤波器组类似，在经典文献中，频谱在通道之间不均匀分配[55]。我们看到，通过将原始图形信号分解为多个带限图形信号，可以很容易地将上述思想推广到多个通道；我们不用处理一个巨大的图，而是处理多个小图，这使得计算更容易。

仿真。我们现在展示一个例子，我们使用提出的图滤波器组分析图信号。与第第四章A2节类似，我们认为美国各地的气象站形成一个图表，每个气象站在一天内测得的温度值形成一个图表信号。假设一个高频分量代表某种天气变化模式；我们希望在给定温度值的情况下检测这种模式。我们可以将温度值的图形信号分解为低频通道（最大15个频率）和高频通道（最小5个频率）。在每个通道中，我们对带限图信号进行采样，以获得稀疏且无损失的表示。图7显示了2013年1月1日和2013年5月1日的温度值之间的比较。我们特意在2013年1月1日的温度值中添加了一些高频成分。我们看到，图7（a）中的高频信道检测到了变化，而图7（b）中的高频信道没有。

直接使用图形频率分量也可以检测高频分量，但图形频率分量不容易可视化。由于图的结构和分解的通道是固定的，因此可以预先设计每个通道中的最佳采样算子和相应的插值算子，这意味着我们只需要查看固定节点集的采样系数来检查通道是否被激活。因此，图形过滤器组速度快且可视化友好

# 第六章 应用

提出的图抽样理论可以应用于半监督学习，其目标是使用少量标记样本和大量未标记样本对数据进行分类[56]。一种方法是基于图的，在图上标签通常被认为是平滑的。从信号处理的角度来看，平滑度可以表示为信号的低通性质。恢复图形上的平滑标签相当于插入低通图形信号。现在我们来看两个例子，包括在线博客的分类和手写数字。

在线博客的抽样：我们首先通过随机抽样调查完美恢复的成功率，然后对在线博客的标签进行分类。考虑一个N=1224的在线政治博客数据库，其中既有保守派又有自由派【57】。我们分别用+1和-1来表示这两派。这些博客用图来表示，节点表示博客，有向图边对应博客之间的超链接引用。这里的图形信号是分配给博客的标签，称为标签信号。我们对这个在线博客图使用（2）中的谱分解，以降序获得图的频率和相应的图傅里叶变换矩阵。标记信号为全频带信号，但近似带限。

为了研究使用随机抽样实现完全恢复的成功率，我们以1到20的间隔改变标记信号的带宽K，从图形傅里叶变换矩阵的前K列随机抽样K行，并检查这一K×K矩阵是否具有满秩。对于每个带宽，我们随机抽样10000次，并计算成功次数以获得成功率。图8（a）显示了最终的成功率。我们发现，随着带宽的增加，成功率会降低；当带宽不大于20%时，它在90%以上。这意味着我们可以通过以相当高的概率使用随机抽样来实现完美的恢复。随着带宽的增加，即使我们获得相同数量的样本，成功率仍然会降低，因为当我们获取更多样本时，更容易获得与之前样本相关的样本。

|  |
| --- |
|  |
| 图8 在线博客的分类。增加带宽时，很难找到合格的采样操作员。实验设计的最优采样算子的采样性能优于随机采样 |

由于合格的采样算子独立于图形信号，我们为在线博客图形预计算合格的采样算子，如第三章B节所述。当标签信号是带限的时，我们可以使用合格的采样算子从中采样M个标签，并使用相应的插值算子恢复标签信号。换句话说，我们可以在查询任何标签之前设计一组要标记的博客。然而，大多数情况下，标记信号不受带宽限制，不可能实现完美的恢复。因为我们只关心标签的符号，所以我们只使用低频内容来近似标签信号；之后，我们设置一个阈值来分配标签。为了最小化高频内容的影响，我们可以在算法1中使用最佳采样算子。

我们解决了以下优化问题来恢复低频内容

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (11) |

这里是一个采样算子，是一个元素为+1或-1的采样标签的向量，将所有的正值设为+1,所有负值设为-1.注意，如果没有，（11）的解就是定理1中的，它完美恢复了带限标记信号。当标记信号不是带限时，（11）的解近似于低频内容。其中范数（11）可以通过logit函数放缩，并通过logistic回归求解【58】。恢复后的标签就为。

图8（b）通过以1到20的间隔改变样本大小，比较了最佳抽样和随机抽样之间的分类精度。我们看到，最佳采样显著优于随机采样，并且随机采样不会随着更多样本而改善，因为插值算子（11）假设采样算子是合格的，这对于图8（a）所示的随机采样并不总是正确的。请注意，仅对两个博客进行抽样，最佳抽样的分类准确率高达94.44%，随着样本数量的增加，分类准确率略有提高。与之前的结果[24]相比，要实现约94%的分类准确率，

120个调和图函数样本；

120个图拉普拉斯正则化样本；

10个图总变差正则化样本；

提出的最佳采样算子（6）对2个博客进行抽样。

这种改进来自这样一个事实，即我们没有像[24]中那样随机抽样，而是使用最优抽样算子根据图结构选择样本。

手写数字的分类：我们的目标是使用所提出的抽样理论对手写数字进行分类，并在样本较少的情况下获得较高的分类精度。

我们使用两个手写数字数据集，MNIST[59]和USPS[60]。每个数据集包括十个类（0-9位字符）。MNIST数据集总共包含6万个样本。我们为每个数字字符随机选择1000个样本，共有数字图像N=10000个；每个图像都被标准化为28×28=784像素。USPS数据集总共包括11000个样本。我们使用数据集中的所有图像；每个图像都被标准化为16×16=256像素。

由于相同的数字产生相似的图像，因此构建一个图形来反映图像之间的关系依赖性是很直观的。对于每个数据集，我们构造一个12最近邻图来表示数字图像。这些节点代表数字图像，每个节点连接到其他12个代表最相似数字图像的节点；相似性由欧几里德距离来衡量。图移位构造为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

其中

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

且用矢量表示数字图像。图移位是不对称的，表示一个有向图，这是基于图拉普拉斯的方法无法处理的。

与第六章第1节类似，我们的目标是通过主动查询一些图像的标签来标记所有数字图像。为了处理10类分类，我们形成了一个大小为N×10的基本真值矩阵X。元素为+1，表示第i个图像在第j个数字类中的成员身份，否则为-1。我们得到了最佳采样算子，如算法1所示。然后查询样本。我们将低频内容覆盖为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (12) |

我们使用logistic回归对（12）进行近似求解，然后得到估计的标签矩阵，其元素表示将第i个图像标记为第j个数字的置信度。最后，我们通过在每一行中选择值最大的数字图像来标记每个数字图像。

|  |
| --- |
|  |
| 图9 MNIST和USPS数据集的图形表示。对于这两个数据集，具有相同数字字符的节点（数字图像）以相同的颜色显示，大黑点通过使用算法1中的最佳采样算子表示10个采样节点 |

MNIST和USPS数据集以及最佳采样集的图形表示如图9所示。节点的坐标来自逆图傅里叶变换前三列的对应行。我们发现，具有相同数字字符的图像形成聚类，最优采样算子从不同的聚类中选择代表性样本.

图10显示了两个数据集以10到100的间隔改变样本大小的分类精度。对于MNIST数据集，我们查询0.1%–1%的图像；对于USPS数据集，我们查询了0.09%–0.9%的图像。通过对两个数据集仅查询0.5%的图像，我们实现了约90%的分类准确率。与之前的结果[35]相比，在USPS数据集中，给定100个样本，

局部线性重建约为65%；

基于标准化切割的主动学习约为70%；

基于图抽样的主动半监督学习约占85%；

提出的带插值算子（12）的最优采样算子（6）达到91.69%。

|  |
| --- |
|  |
| 图10 MNIST和USPS数据集的分类准确度是查询样本数的函数 |

# 第七章 总结

我们提出了一种新的图形信号采样框架，它遵循与经典采样理论相同的范式，并与线性代数紧密相连。我们证明了当图形信号是带限的时，完全恢复是可能的。然后，采样信号系数形成一个新的图信号，其对应的图结构由原始图结构构成，保留原始图信号的一阶差分。我们研究了随机抽样和实验设计抽样的合格抽样算子。我们进一步建立了有限离散时间信号处理的采样理论与图上采样理论的联系，并展示了如何使用图滤波器组处理全频带图信号。我们展示了在在线博客和数字图像的半监督分类中的应用，其中提出的采样和插值算子具有竞争力。

# 致谢

作者要感谢编辑和审稿人的评论，这些评论导致了原稿的改进。[34]。

# 参考文献

1. M. Jackson, Social and Economic Networks. Princeton, NJ, USA: Princeton Univ. Press, 2008.
2. M. Newman, Networks: An Introduction. London, U.K.: Oxford Univ. Press, 2010.
3. I. Shuman, S. K. Narang, P. Frossard, A. Ortega, and P. Vandergheynst,“The emerging field of signal processing on graphs: Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains,” IEEE Signal Process. Mag., vol. 30, no. 3, pp. 83–98, May 2013.
4. A. Sandryhaila and J. M. F. Moura, “Big data processing with signal processing on graphs,” IEEE Signal Process. Mag., vol. 31, no. 5, pp. 80–90, Sep. 2014.
5. Sandryhaila and J. M. F. Moura, “Discrete signal processing on graphs,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 61, no. 7, pp. 1644–1656, Apr. 2013.
6. S. K. Narang and A. Ortega, “Perfect reconstruction two-channel wavelet filter banks for graph structured data,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 60, no. 6, pp. 2786–2799, Jun. 2012.
7. S. K. Narang and A. Ortega, “Compact support biorthogonal wavelet filterbanks for arbitrary undirected graphs,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 61, no. 19, pp. 4673–4685, Oct. 2013.
8. D.K. Hammond, P. Vandergheynst, and R. Gribonval, “Wavelets on graphs via spectral graph theory,” Appl. Comput. Harmon. Anal., vol.30, pp. 129–150, Mar. 2011.
9. S. K. Narang, G. Shen, and A. Ortega, “Unidirectional graph-based wavelet transforms for efficient data gathering in sensor networks,” in Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech Signal Process., Dallas, TX, USA, Mar. 2010, pp. 2902–2905.
10. I. Z. Pesenson, “Sampling in Paley-Wiener spaces on combinatorial graphs,” Trans. Amer. Math. Soc., vol. 360, no. 10, pp. 5603–5627, May 2008.
11. S. K. Narang, A. Gadde, and A. Ortega, “Signal processing techniques for interpolation in graph structured data,” in Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech Signal Process., Vancouver, BC, Canada, May 2013, pp. 5445–5449.
12. A.Anis, A. Gadde, and A. Ortega, “Towards a sampling theorem for signals on arbitrary graphs,” in Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech Signal Process., May 2014, pp. 3864–3868.
13. A.Agaskar and Y. M. Lu, “A spectral graph uncertainty principle,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 59, no. 7, pp. 4338–4356, Jul. 2013.
14. S. Chen, F. Cerda, P. Rizzo, J. Bielak, J. H. Garrett, and J. Kovačević,“Semi-supervised multiresolution classification using adaptive graph filtering with application to indirect bridge structural health monitoring,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 62, no. 11, pp. 2879–2893, Jun. 2014.
15. S. Chen, A. Sandryhaila, J. M. F. Moura, and J. Kovačević, “Adaptive graph filtering: Multiresolution classification on graphs,” in Proc. IEEE GlobalSIP, Austin, TX, Dec. 2013, pp. 427–430.
16. V. N. Ekambaram, B. A. G. Fanti, and K. Ramchandran, “Wavelet-regularized graph semi-supervised learning,” in Proc. IEEE Glob. Conf. Signal Information Process., Austin, TX, USA, Dec. 2013, pp.423–426.
17. X. Dong, D. Thanou, P. Frossard, and P. Vandergheynst, “Learning graphs from observations under signal smoothness prior,” IEEE Trans. Signal Process., 2014, submitted for publication.
18. Thanou, D. I. Shuman, and P. Frossard, “Learning parametric dictionaries for signals on graphs,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 62, no. 15, pp. 3849–3862, Jun. 2014.
19. S. Chen, A. Sandryhaila, J. M. F. Moura, and J. Kovačević, “Signal denoising on graphs via graph filtering,” in Proc. IEEE Glob. Conf. Signal Information Process., Atlanta, GA, USA, Dec. 2014.
20. N. Tremblay and P. Borgnat, “Graph wavelets for multiscale community mining,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 62, no. 20, pp. 5227–5239, Oct. 2014.
21. X. Dong, P. Frossard, P. Vandergheynst, and N. Nefedov, “Clustering on multi-layer graphs via subspace analysis on Grassmann manifolds,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 62, no. 4, pp. 905–918, Feb. 2014.
22. P.-Y. Chen and A. O. Hero, “Local Fiedler vector centrality for detection of deep and overlapping communities in networks,” in Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech Signal Process., Florence, Italy, 2014, pp. 1120–1124.
23. S. Chen, A. Sandryhaila, J. M. F. Moura, and J. Kovačević, “Signal recovery on graphs: Variation minimization,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 63, no. 7, pp. 4609–4624, Sep. 2015.
24. S. Chen, A. Sandryhaila, G. Lederman, Z. Wang, J. M. F. Moura, P. Rizzo, J. Bielak, J. H. Garrett, and J. Kovačević, “Signal inpainting on graphs via total variation minimization,” in Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech Signal Process., Florence, Italy, May 2014, pp. 8267–8271.
25. X. Wang, P. Liu, and Y. Gu, “Local-set-based graph signal reconstruction,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 63, no. 9, pp. 2432–2444, May 2015.
26. X. Wang, M. Wang, and Y. Gu, “A distributed tracking algorithm for reconstruction of graph signals,” IEEE J. Sel. Topics Signal Process., vol. 9, no. 4, pp. 728–740, Jun. 2015.
27. S. Chen, A. Sandryhaila, and J. Kovačević, “Distributed algorithm for graph signals,” in Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech Signal Process., Brisbane, Australia, Apr. 2015.
28. A. Sandryhaila and J. M. F. Moura, “Discrete signal processing on graphs: Frequency analysis,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 62, no. 12, pp. 3042–3054, Jun. 2014.
29. M. Püschel and J. M. F. Moura, “Algebraic signal processing theory: Foundation and 1-D time,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 56, no. 8, pp. 3572–3585, Aug. 2008.
30. M. Püschel and J. M. F. Moura, “Algebraic signal processing theory: 1-D space,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 56, no. 8, pp. 3586–3599, Aug. 2008.
31. M. Vetterli, J. Kovačević, and V. K. Goyal, Foundations of Signal Processing. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press,2014[Online].Available:http://www.fourierandwavelets.org/
32. J. Kovačević and M. Püschel, “Algebraic signal processing theory: Sampling for infinite and finite 1-D space,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 58, no. 1, pp. 242–257, Jan. 2010.
33. M. Unser, “Sampling—50 years after Shannon,” Proc. IEEE, vol. 88, no. 4, pp. 569–587, Apr. 2000.
34. S. Chen, A. Sandryhaila, and J. Kovačević, “Sampling theory for graph signals,” in Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech Signal Process., Brisbane, Australia, Apr. 2015.
35. A. Gadde, A. Anis, and A. Ortega, “Active semi-supervised learning using sampling theory for graph signals,” in Proc. 20th ACMSIGKDD Int. Conf. Knowledge Discovery Data Mining, New York, NY, USA, 2014, pp. 492–501, ser. KDD’14, New York.
36. R. A. Horn and C. Johnson,Matrix Analysis. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 1985.
37. Spielman and N. Srivastava, “Graph sparsification by effective resistances,” SIAM J. Comput., vol. 40, no. 6, pp. 1913–1926, 2011.
38. H. Avron and C. Boutsidis, “Faster subset selection for matrices and applications,” SIAM J. Matrix Analysis Appl., vol. 34, no. 4, pp. 1464–1499, 2013.
39. M. Püschel and J. Kovačević, “Real, tight frames with maximal robustness to erasures,” in Proc. Data Compr. Conf., Snowbird, UT, USA, Mar. 2005, pp. 63–72.
40. A. Sandryhaila, A. Chebira, C. Milo, J. Kovačević, and M. Püschel, “Systematic construction of real lapped tight frame transforms,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 58, no. 5, pp. 2256–2567, May 2010.
41. V. N. Ekambaram, G. C. Fanti, B. Ayazifar, and K. Ramchandran,“Multiresolution graph signal processing via circulant structures,” in Proc. 2013 IEEE DSP/SPE, Napa, CA, Aug. 2013, pp. 112–117.
42. L. V. Tran, V. H. Vu, and K. Wang, “Sparse random graphs: Eigenvalues and eigenvectors,” Random Struct. Algorithms, vol. 42, no. 1, pp. 110–134, 2013.
43. J. Candès and J. Romberg, “Sparsity and incoherence in compressive sampling,” Inverse Problems, vol. 23, pp. 110–134, 2007.
44. D. L. Donoho, “Compressed sensing,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, Apr. 2006.
45. S. S. Chen, D. L. Donoho, and M. A. Saunders, “Atomic decomposition by basis pursuit,” SIAM Rev., vol. 43, no. 1, pp. 129–159, 2001.
46. J. Candès, Y. Eldar, D. Needell, and P. Randall, “Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries,” Appl. Comput. Harmonic Anal., vol. 31, pp. 59–73, 2010.
47. M. Belkin and P. Niyogi, “Semi-supervised learning on Riemannian manifolds,” Mach. Learn., vol. 56, no. 1–3, pp. 209–239, 2004.
48. L. Grady and E. Schwartz, “Anisotropic Interpolation on Graphs: The Combinatorial Dirichlet Problem,” Tech. Rep. CAS/CNS-2003-014, Jul. 2003.
49. N. Tremblay, P. Borgnat, and P. Flandrin, “Graph empirical mode decomposition,” in Proc. Eur. Conf. Signal Process., Lisbon, Portugal, Sept. 2014, pp. 2350–2354.
50. Z. Pesenson, “Variational splines and Paley-Wiener spaces on combinatorial graphs,,” Constr. Approx., vol. 29, pp. 1–21, 2009.
51. Fühar and I. Z. Pesenson, “Poincaré and plancherel-polya inequalities in harmonic analysis on weighted combinatorial graphs,” SIAM J. Discrete Math., vol. 27, no. 4, pp. 2007–2028, 2013.
52. S. Chen, R. Varma, A. Singh, and J. Kovačević, “Signal recovery on graphs: Random versus experimentally designed sampling,” in SampTA, Washington, DC, USA, May 2015.
53. A. Gadde and A. Ortega, “A probabilistic interpretation of sampling theory of graph signals,” presented at the IEEE Int. Conf. Acoust., Speech Signal Process., Brisbane, Australia, Apr. 2015.
54. Q. Nguyen and M. N. Do, “Downsampling of signals on graphs via maximum spanning trees,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 63, no. 1, pp. 182–191, Jan. 2015.
55. M. Vetterli, “A theory of multirate filter banks,” IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process., vol. 35, no. 3, pp. 356–372, Mar. 1987.
56. X. Zhu, Semi-Supervised Learning Literature Survey Univ. Wisconsin- Madison, Madison, WI, USA, Tech. Rep. 1530, 2005.
57. L. A. Adamic and N. Glance, “The political blogosphere and the 2004 U.S. election: Divided they blog,” in Proc. LinkKDD, 2005, pp. 36–43.
58. C. M. Bishop, Pattern Recognition and Machine Learning, ser. Information Science and Statistics. : Springer, 2006.
59. Y. LeCun, L. Bottou, Y. Bengio, and P. Haffner, “Gradient-based learning applied to document recognition,” in Intelligent Signal Processing. : IEEE Press, 2001, pp. 306–351.
60. J. Hull, “A database for handwritten text recognition research,” IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 16, no. 5, pp. 550–554, May 1994.