**班 级 1802031**

**学 号 18020300021**

宋体小四加粗

****

本科毕业设计论文



黑体三号

**题 目** 图信号采样和滤波器设计方法

宋体小三

**学 院** 电子工程学院

**专 业**  电子信息工程

**学 生 姓 名**  张 三

**校外导师姓名** 李 四

**校内导师姓名**

摘要

科技的进步带来了信息量的快速增长和信息技术的飞速发展，人们正处在一个海量信息时代，随之而来的是对各个场景下的数据进行处理的需求。很多情况下我们面临的数据都是高维且不规则的。传统的只能体现信号本身的信号处理方法已不再适用，因此，“图信号处理”应运而生。本文针对图信号特点对其采样方法和滤波器设计方法进行了研究，主要包含以下几个方面。

阐述了图信号概念和图傅里叶变换的实现方法，探究影响图傅里叶变换的因素，分析图信号基本运算与定理，解释了图信号处理的原理；

从传统离散时间信号出发，从信号空间的角度研究了香农采样定理的本质，并将其推广到图信号采样中，证明了传统离散时间信号的DFT与图傅里叶变换的关系，以均匀采样为例，验证了环形图信号采样定理。

从有限维离散信号出发，建立一般的图信号采样定理，总结了实现图信号采样和无失真重构的条件和步骤，经过必要的仿真分析验证了这一结果的正确性。

提出了一种基于滤波器的带限图信号采样算法，降低了现有图信号采样算法的计算量和采样复杂度。

**关键词**：图傅里叶变换，图信号采样，图信号重构，图滤波器设计

Abstract

The development of science and technology has brought about the rapid growth of the amount of information and the rapid development of information technology. People are in an era of massive information, and with it comes the need to process data in various scenarios. These data can come from financial and Banks, social networks, tracking and detection of electronic devices, road traffic networks, etc. The difference between this type of data and the traditional single data is that most of the above data are meshed high-dimensional data, and its complexity and interaction form its Irregular topology, the traditional signal processing method that can only reflect the signal itself is no longer applicable. Therefore, "graph signal processing" came into being. This thesis studies the sampling method and filter design method according to the characteristics of the graph signal, mainly including the following aspects.

The concept of graph signal and the realization method of graph Fourier transform are expounded, the factors affecting graph Fourier transform are explored, the basic operations and theorems of graph signal are analyzed, and the principle of graph signal processing is explained.

Starting from traditional discrete-time signals, the essence of Shannon's sampling theorem is studied from the perspective of signal space, and it is extended to graph signal sampling, and the relationship between DFT and graph Fourier transform of traditional discrete-time signals is proved. As an example, the ring graph signal sampling theorem is verified.

Starting from finite-dimensional discrete signals, a general graph signal sampling theorem is established, the conditions and steps for realizing graph signal sampling and distortion-free reconstruction are summarized, and the correctness of the result is verified by necessary simulation analysis.

A filter-based band-limited graph signal sampling algorithm is proposed, which reduces the computational complexity and sampling complexity of the existing graph signal sampling algorithms.

**Keywords:** Graph Fourier Transform, Graph Signal Sampling, Graph Signal Reconstruction, Graph

Filter Design

目录

摘要

Abstract

1. 绪论
   1. 选题背景与研究意义
   2. 国内外研究现状
      1. 国外研究现状
      2. 国内研究现状
   3. 本文主要工作与内容安排
2. 图信号处理方法

2.1 图信号基本概念

2.1.1 图信号定义与表示

2.1.2 图信号基本运算

2.1.3 图傅里叶变换

2.2 图信号采样

2.3 图信号滤波

2.4 本章小结

1. 图信号采样与重构理论研究（环形到一般）

3.1环形图信号采样与重构

3.2环形图信号采样定理

3.3有限维离散信号的采样和插值

3.4图信号采样定理的仿真验证

3.5本章小结

1. 基于滤波器的带限图信号采样分析
2. ARMA图滤波器设计
3. 总结与展望
4. 绪论

选题背景与研究意义

科技的发展带来了信息量的快速增长和信息技术的飞速发展，人们正处在一个海量信息时代，随之而来的是对各个场景下的数据进行处理的需求，这些数据可以来自金融和银行、社交网络、电子设备的追踪与检测、道路交通网络等，这类数据与传统单一的数据的不同之处在于以上数据多为网状的高维度数据，其复杂性和交互作用形成了其不规则的拓扑结构，传统的只能体现信号本身的信号处理方法已不再适用。以图1.1的交通网络为例，不同地点间由铁路连接，而两个地点可能没有直接相连，却以多种方式间接相连。图中密集区域代表这些地点间存在大量的的联系，也暗含这一区域的重要程度；图1.2所示的社交网络中，一定的个体间存在互动，而某个个体与其他个体互动程度体现在这一节点与其他节点相连的数目；图1.3是大脑神经网络示意图，不同神经细胞通过突触相连，电信号通过突触在细胞间传递和作用。



图1.1

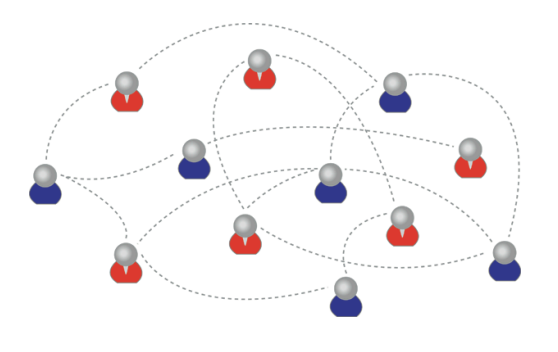


图1.2



图1.3

以上数据都有着共同的特点：非孤立，相互关联影响。因此，若要更好的处理这类数据，不但数据本身，数据的拓扑结构也需考虑在内。由于传统信号处理形式无法体现数据间的结构与联系，“图信号处理”应运而生。

图能很好的体现数据之间的复杂结构和交互作用。图信号处理的目标是将经典信号处理的工具方法扩展到不规则的图上，通过加权图揭示信号间的相互作用和联系，为处理具有复杂结构的数据提供了有效手段，在生物医学、计算机视觉、机器学习、图像处理等领域得以广泛应用。传统信号处理方式中的傅里叶变换、滤波、频率响应等概念扩展到图信号处理中依然适用。当采集整个的网络数据花费巨大时，采样理论将发挥至关重要的作用。

图滤波器是一个处理图信号频谱的关键技术，即增强或抑制不同的图频谱。图滤波器在图信号去噪、平滑、聚类、采样重建等方面都存在应用。------

图信号处理的目的是将传统信号处理的方法和工具拓展到图信号上，在图信号中，这些技术大多与图的拓扑结构有关。信号之间的相互联系由图的拓扑结构来表示，从而可以有效处理具有复杂结构的信号。采样定理在经典信号处理中有着相当大的分量，在图信号处理领域内也是一个重要的工具。采样理论在采集整个网络所需花费较大时，将发挥至关重要的作用。

国内外研究现状

国外研究现状

图信号处理可以将信号间的相互关系在处理过程中体现出来，有关图信号处理的最早研究出现在2008年前后，主要是基于图信号处理理论架构中分支问题的研究，彼时尚未有完整的理论体系。在2013年，“图信号处理”的概念在文献【1】（韩墨）中由Shuman、Narang和Ortega等人正式提出，同时给出了“图傅里叶变换”的定义，图信号自此可以在图谱域进行表示。此文也对图信号的卷积，移位，调制等基本运算进行了定义，构造了相对完整的图信号处理理论体系架构。此后出现了一系列有关图信号处理的研究，例如，图信号滤波，它广泛应用于网络信号的平滑去噪【13-15韩墨】、网络异常检测【17韩墨】等领域。传统的IIR【20韩墨】和FIR【13 18 19韩墨】滤波，ARMA【21 22】的设计等也可推广到图信号。为了同时观察图信号在不同变换域特性，人们开始关注顶点域-图谱域联合信号分析。文献【28-30韩墨】阐述了图信号在顶点域，图谱域的不确定关系。图信号的采样广泛应用于传感器位置确定【64韩墨】，分布式学习【65韩墨】等领域。关于图信号的采样定理和截止频率等问题，文献【8，66-68】进行了详细的讨论并给出了数学证明，现有的图信号采样相关研究多是从最佳估计角度出发以寻找能够使信号重构的最佳算法。文献【25楚帆】中提到一种基于全变分正则化的方法用来对图信号去噪，可以得到一个精确的闭式解，一个近似的迭代解，分别是基于逆图滤波器和标准的图滤波器得到的。文献【26楚帆】中，作者在传统小波信号去噪方法的启示下，提出了一种基于谱图小波变换的新的去噪框架，从而可以直接在图的频域进行非迭代去噪。文献【28楚帆】提出了图谱核函数进行平滑的方法。文献【32楚帆】提出了基于伯恩斯坦多项式逼近和约束优化的图滤波器设计方法，此方法能实现在频率响应的过渡带锐度、纹波幅度、重构误差间的权衡。文献【41楚帆】提出了一种基于多项式的平方和表示的滤波器设计方法，同时提出了一种图滤波器优化方法，该方法可以精确控制图滤波器通带和阻带波纹。

国内研究现状

国内对于图信号处理的研究尚处于萌芽阶段，少有相关文献。其中文献【80 韩墨】讨论了图上低频信号谱域变换中的边权重优化设计，从最优化问题的角度对其展开研究，进而提出了一种基于网络数据分布式权重的优化算法，满足了网络化数据处理中的分布式计算的需求。文献【81韩墨】研究了图信号的粗化、降维问题。文献【82 83韩墨】实现了图信号处理在滚动轴承的故障特征提取中的应用。

本文主要工作与内容安排

本文主要讨论了图信号处理中的基本问题，即图信号的采样与无失真重构和图滤波器的设计方法。内容安排如下：

第一章对课题背景和研究的意义进行了介绍，并对图信号处理的国内外研究现状进行了分析和阐述，介绍了本文研究的内容。

第二章对图信号处理的方法进行了解释，从图信号的基本概念引出图信号的基本运算，从传统信号的傅里叶变换推广到图傅里叶变换。对于香农采样定理，从信号空间的角度进行了重新认识与理解，并提出了图信号采样遵守的香农采样定理的推广形式，最后对图滤波进行了介绍，为后文提供了基础。

第三章对图信号的采样与重构理论进行研究，从环形图信号的均匀采样出发，对采样定理进行总结和验证，进一步推广到一般图信号，非均匀采样，从特殊到一般，说明了采样定理的普适性与正确性。

第四章提出了一种新的带限图信号采样策略，具有较低的复杂度，解决了现有的一些采样算法计算量大、采样过程复杂的问题——

第五章进行ARMA图滤波器的设计，由于FIR图滤波器阶数高，实现花销大，研究了ARMA图滤波器的设计，使其频率响应尽可能接近预期频率响应。首先对ARMA图滤波器设计过程进行介绍，再提出ARMA图滤波器的实现过程，最后求解ARMA图滤波器的系数，相比于FIR图滤波器，相同阶数下ARMA图滤波器有更低的均方误差。

第六章对现有工作进行了总结与思考，并对接下来的研究工作进行了设想与展望。

第二章 图信号处理方法

图信号基本概念

图信号定义与表示

图信号的概念是基于图这一数据结构的，一个图的信息包括顶点和连接各顶点的边的权重，以无向图为例，可表述为

G={V,E}

其中V={1,2,…,N}，N为顶点个数，对于存在连接的结点，这些连接的集合为E。设任意两个不同结点i,j∈V，则E可表示为

E={i,j,wij}

其中wij表示两个节点间的权重。

上述定义法便于直观理解图的结构，但不利于发掘图本身的特征，因此常用矩阵表达，定义一个N×N的邻接矩阵A，A的第m行第n列元素amn定义为

图信号就是一个N维离散信号矢量，依附于图G，其中第i个元素f(i)即图信号f的信号值和图G的顶点vi一一对应，如图1所示：



图1 图的结构

定义度对角矩阵D，对角上的元素为各个顶点的度，顶点vi的度表示和顶点相关联的边的数量，对角线元素可表示为

则拉普拉斯矩阵L定义为

L=D-A

图信号基本运算

传统的信号处理中，涉及到了卷积、平移、调制、尺度变换等运算，这些运算可推广为图信号的运算。

1. 卷积

经典信号处理过程中卷积定义为

其中h()在几何角度上表示信号的平移。一维时间信号具有线性结构和明确的方向性，可以平移；图信号是网状结构，是不规则的、无序的，其平移方向不能确定，故不能将时域卷积直接推广。从图谱域考虑图信号的定义，用图拉普拉斯矩阵的特征向量对传统信号卷积中负指数项进行代替可得

上式中代表图信号卷积。可以看出，图信号在图谱域的乘积经图傅里叶逆变换得到其在顶点域的卷积。

1. 互相关运算

在图谱域定义图信号的互相关运算，将传统时间信号中的复指数项用图拉普拉斯矩阵的特征向量代替，从而得图信号**f**和**g**的互相关运算定义如下

1. 平移

经典信号处理中的平移可看作函数f(t)与冲激函数的卷积，故可由图信号的卷积对图信号的平移进行定义。设图平移算子为:,可定义图信号的平移如下：

对于图上冲激信号，采用如下的方式进行定义：

从图信号平移定义式可知，图信号平移并非对信号在顶点域进行移位，而是在图谱域对信号进行的运算。平移改变了信号的幅度与能量，不能保证操作前后信号的能量是守恒的，故平移这一运算的研究有待深入。

1. 调制

传统信号处理中，调制就是信号的频谱搬移，在频域定义如下：

图信号具有离散，不规则的频谱，不同图信号有不同的图频率个数、取值范围，且图频率分布不均匀，相同图频率的搬移尺度无法保证是一致的，故无法在图谱域对图信号的调制进行定义，因此，考虑在顶点域对图信号的调制进行间接定义。

传统信号中调制运算在时域定义如下：

若用图拉普拉斯矩阵的特征向量对上式中复指数项进行代替，调制就推广到了图信号，可得图信号的调制运算如下

1. 尺度变换

图信号的顶点和不会同时位于顶点集合𝒱中，所以不能直接将传统信号处理中尺度变换在时域的定义推广到图信号。若从图谱域来定义可得：

上式中的定义在整个实数轴上，而非像图信号调制时局限于【0，λmax】

1. 帕萨瓦尔定理

传统信号处理中的帕萨瓦尔定理指出，信号的能量在时域和频域是守恒的。推广到图信号，可得帕萨瓦尔定理有如下形式：

其中**F**和**G**是N维离散图信号矢量**f**和**g**的图傅里叶变换

图傅里叶变换

经典一维信号f(t)的傅里叶变换可以视为在其一维拉普拉斯算子特征函数上对其进行展开，类似地可以借助图拉普拉斯算子的特征值λi和特征向量ui（i=0,1,…,N-1）来定义图信号f的图傅里叶变换。

根据矩阵论和图论相关知识，实对称矩阵的不同特征值对应特征向量相互正交，故图傅里叶变换可以定义如下：

图傅里叶逆变换表示为：

上式中特征值表示图频率，特征向量表示图频率对应的图信号分量。随着增大，对应的显示出更剧烈的波动。

在图谱域上，不同图信号的图频率具有不同的分布，这些尺度不能直接进行比较，因此需对拉普拉斯矩阵L归一化处理，使这些图频率分布在同一尺度下。归一化后的拉普拉斯算子矩阵表示如下

经验证可得，是实对称阵，对角线元素为1。

以图1为例对图傅里叶变换的构造过程进行分析说明。设各边权重wmn均为1，图的邻接矩阵可表示如下：

对L特征分解，特征向量矩阵如下

L的特征值矩阵如下

易知特征值=0对应的特征向量在各个顶点上信号值未产生波动，随着增大，对应的各个顶点的信号值产生了波动。

图信号值f的变化不会对信号间的关系产生影响，换言之，不会影响图结构体现的顶点间关系，因为图信号值f改变不会改变拉普拉斯矩阵L，也不会改变矩阵L的特征值。由此可得，对一个图结构确定的图信号，其图频率也有着确定的分布，它不会被图信号值影响，若要改变图频率的分布，应当改变图的结构，以图1所示信号为例，其傅里叶变换仿真如图3所示。

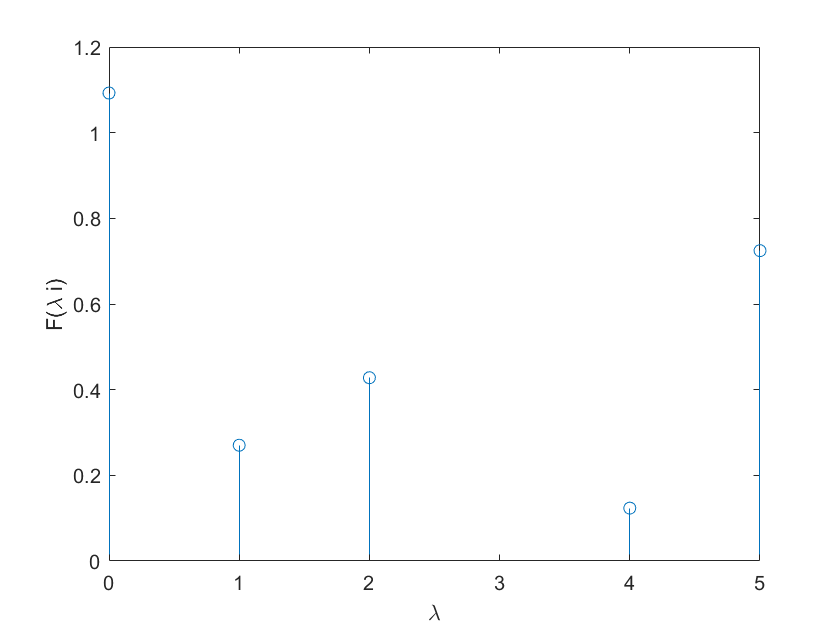


图3 f的傅里叶变换

若改变其图结构，例如将顶点1与顶点4相连，得到傅里叶变换如图4所示，由图4可知，L的特征值发生了变化，即图信号图频率的分布变化，同时图信号**f**的傅里叶变换值也发生了改变。

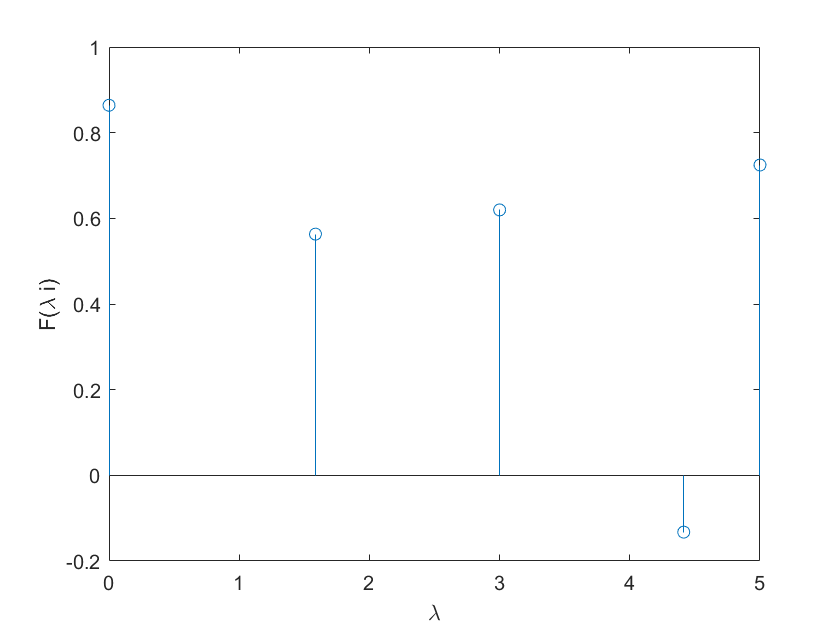


图4 改变f的图结构后f1的傅里叶变换

若是只改变了信号值，得到结果如图5所示，观察图5可得，L的特征值未发生变化，同样是0，1，2，4，5，图频率的分布未改变，验证了前文所述结论。

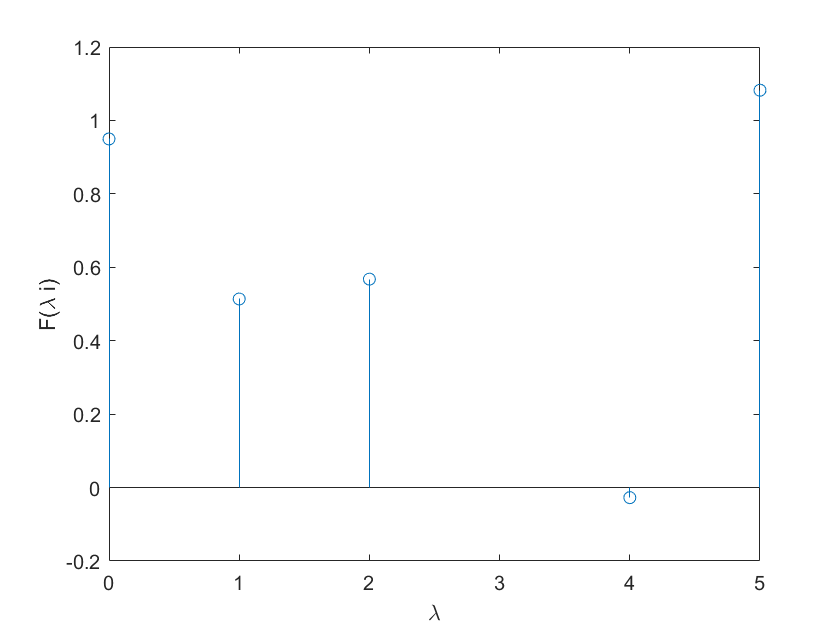
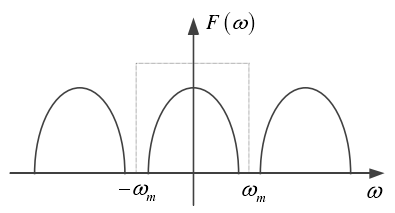


图5 仅改变f信号值后所得f2的傅里叶变换

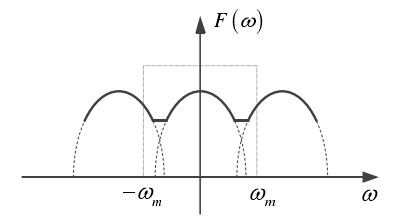
图信号采样

在传统模拟信号中，由香农采样定理知，采样频率大于等于模拟信号最高频率的2倍时，可以由采样信号无失真地恢复原信号。因为采样会将输入模拟信号的频谱进行周期延拓，如下图所示：



图：经典香农采样引起输入信号频谱周期延拓

上图中采样频率大于等于被采样信号频谱中最高频率的2倍，此时延拓后不会产生频谱混叠，采样这一过程中保留了输入信号的全部信息，可以完全恢复被采样信号的频谱。若采样信号不满足香农定理的条件，即采样频率小于输入信号最大频率的2倍，将发生频谱混叠现象，如下图所示



图：经典香农采样引起的频谱混叠

图信号具有不规则性，其在顶点域的采样不会造成图谱域上的平移和周期延拓。所以对香农定理从频谱混叠角度的理解不能推广到图信号。考虑从信号空间的角度对香农定理进行重新理解，进而研究低通信号空间的构造法。

想要实现图信号的采样和重构，首先要考虑构造图信号的低通信号空间，然后在该空间上进行操作。而低通空间的构造又需要图信号“低通”的概念，对图信号低通的定义可以进行如下说明。

首先定义V变换：对N维信号矢量**f**=[f(0),f(1),…,f(N-1)]T∈RN，若存在一个可逆矩阵V∈RN×N，就称该矩阵的逆V-1是f的一个线性算子，从而基于该算子的对输入图信号矢量f的变换称为V变换，定义如下：

设N维信号矢量**f**=[f(0),f(1),…,f(N-1)]T∈RN 是输入的图信号，如果f满足

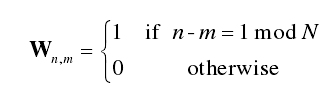
定义f为低通图信号，且在V变换空间内带限于带宽K。满足上述条件的整数K的最小值就是图信号f在V变换下带宽。由此可得，若输入信号f不是带限，就称它是全频带图信号矢量。

模拟信号采样和重构过程可以简化定义为四个步骤：前置滤波，采样，卷积，后置滤波。

在低通图信号的定义下可知，若输入信号f带宽为wm，采样的前置滤波器带宽为ws，其中wm<=ws，则输入信号通过滤波器后不存在能量损失，此时可以实现无失真采样和重构。相反地，若f带宽大于ws，信号f在带宽ws外的信息无法通过前置滤波器，造成了能量损失，不能进行无失真重构。

图信号滤波

离散信号处理中设计滤波器时，最基本的结构为延迟单元z-1，它能够延迟输入信号一个单元。设存在N×N的循环矩阵W=CN，且



则可将时移写作如下的形式：



不同于数字信号处理中的移位，图信号处理中的移位无需单独考虑边界条件，因为在信号的结构图

中已包含了边界条件。

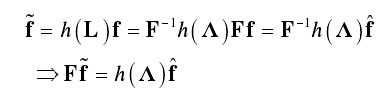
图滤波器是一个线性系统，信号先进行线性组合作为输入得到的结果等价于各个信号输出的线性组合，即



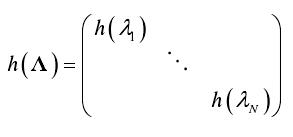
同理，对输入信号先滤波再位移相当于先对输入信号移位再作为滤波器的输入，表示为



综上，经过滤波器h（L），图信号f滤波后所得



由此可知，输出信号频谱与输入信号的频谱有如下关系



其中h(λn)即滤波器h(L)的频率响应。

上上式解释了卷积定理：图信号的滤波可以看作频域上图信号的频谱与滤波器频率响应的乘积。

本章小结

本章从图信号的基本概念出发，介绍了图信号的表示、基本运算与图傅里叶变换，其中图傅里叶变换是由传统信号的傅里叶变换推广而来，然后介绍了图信号采样，在这里对香农定理进行了新的理解，提出了低通信号空间的定义，然后从数字信号处理中滤波器最简单的结构出发介绍了图信号滤波实现。

第三 章 图信号采样与重构理论研究（环形到一般）

环形图信号采样与重构

环形图信号采样定理

有限维离散信号的采样和插值

图信号采样定理的仿真验证

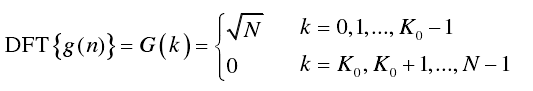
本章小结

环形图信号采样与重构

理想低通滤波器构造

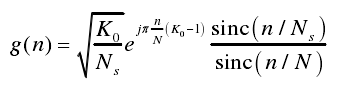
环形图信号可以看作离散时间信号，其性质与运算可由模拟信号离散化得知，考虑将香农定理进行推广。由上文中关于图信号采用的分析可知，香农定理可以理解为先设计信号的低通滤波器，再对滤波器平移，从而得到低通信号空间，进一步得到输入信号在此空间上的投影和投影系数，该系数就是采样值。同时，若低通信号空间带宽为ws，则输入图信号带宽不大于ws时，可以实现无失真采样和重构。要实现采样和重构，就要在DFT的频域上进行低通滤波器、低通信号空间的构造。

由上文对低通图信号的定义可知，DFT低通滤波器可表示为如下所示，该滤波器带宽为K0。



由于DFT具有周期性，上式中若n和k取值不在规定范围内，则对其进行模N处理。

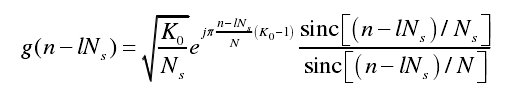
根据DFT和IDFT的性质可知，DFT低通滤波器也存在时域表达式，可以求出



上式中Ns=N/K0。由经典香农采样理论可知，这里的g(n)对应sinc函数，验证了g(n)即DFT理想低通滤波器的时域表示。

低通信号空间构造

由上文知求得DFT低通信号空间即为环形图信号低通信号空间。考虑按固定周期将g(n)平移，构造低通信号空间。由于DFT的隐含周期性，进行的平移都是循环平移，表示为f(n-n0)mod N，其中f(n)为N点离散信号，为了便于表示，下文中以f(n-n0)表示f(n-n0)mod N。考虑以周期Ns=N/K0对点数为N的滤波器g(n)进行平移，得到如下的一组基函数

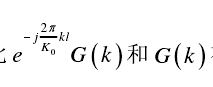


其中

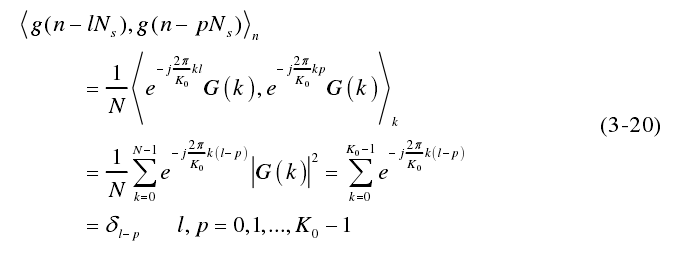
为了确定上式中这组基函数是否满足构成低通信号空间正交基的条件，首先考虑是否所有函数带限为K0，其次考虑不同基函数之间的正交性。

首先考虑g(n-lNs)，由DFT的循环平移性质得



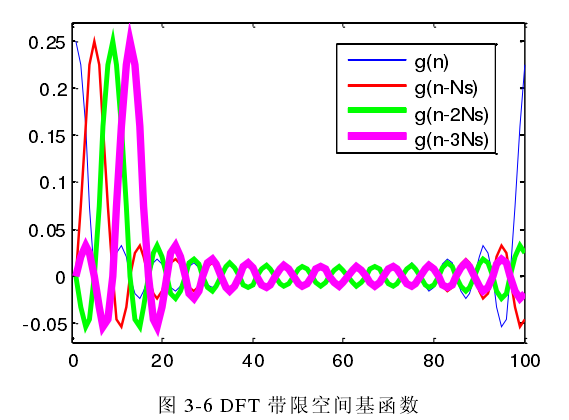
其中非0，因此上式中在频域内具有相同的零点，所以该基向量组中任意函数带限为K0。

其次考虑基向量组的正交性，任取l,p=，其中l不等于p，对函数做内积，由可知，

（韩墨）

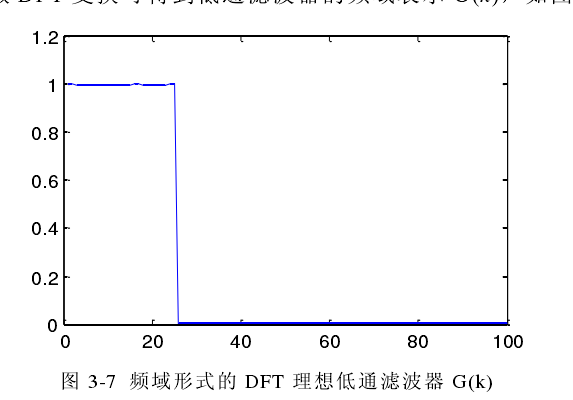
因此可以验证，任意两个信号是正交的，换而言之，基向量组是正交基向量组。故低通信号空间构造完成，可以在此空间上实现信号的采样。

不妨令N=100，K0=25，则Ns=N/K0=4，以NS为周期，g(n)平移后可得到K0个基函数 作图如下



由图 得，基函数满足零点同步，函数间相互正交。

对DFT理想低通滤波器做DFT变换，得到如图 所示的G(k)，



由图可知，G(k)为理想低通滤波器，其带宽K0=25，从而验证了g(n)就是理想低通滤波器的时域形式。

环形图信号采样定理：（3.3.3）