Lista 2

Algorytmy optymalizacji dyskretnej

Szymon Zajączkowski

Informatyka Algorytmiczna, Semestr VI

20 kwietnia 2023

Zadanie 1

Treść zadania

Pewne przedsiębiorstwo lotnicze musi podjąć decyzję o zakupie paliwa do samolotów odrzutowych, mając do wyboru trzech dostawców. Samoloty tankują paliwo regularnie na czterech lotniskach, które obsługują.

Firmy paliwowe poinformowały, ze mogą dostarczyć następujące ilości paliwa w nadchodzącym miesiącu: `Firma 1` - 275 000 galonów, `Firma 2` - 550 000 galonów i `Firma 3` - 660 000 galonów. Niezbędne ilości paliwa do odrzutowców na poszczególnych lotniskach są odpowiednio równe: na `Lotnisku 1` - 110 000 galonów, na `Lotnisku 2` - 220 000 galonów, na `Lotnisku 3` - 330 000 galonów i na `Lotnisku 4` - 440 000 galonów.

Koszt jednego galonu paliwa (w $) z uwzględnieniem kosztów transportu dostarczonego przez poszczególnych dostawców kształtuje się na każdym z lotnisk następująco:

	`Firma 1`	`Firma 2`	`Firma 3`
`Lotnisko 1`	10	7	8
`Lotnisko 2`	10	11	14
`Lotnisko 3`	9	12	4
`Lotnisko 4`	11	13	9

Wyznacz plan zakupu i dostaw paliwa na lotniska, który minimalizuje koszty. Następnie na jego podstawie odpowiedz na poniższe pytania.

1. Jaki jest minimalny łączny koszt dostaw wymaganych ilości paliwa na wszystkie lotniska?

2. Czy wszystkie firmy dostarczają paliwo?

3. Czy możliwości dostaw paliwa przez firmy są wyczerpane?

Zapisz model programowania liniowego w wybranym języku i rozwiąż go za pomocą solvera `GLPK` (lub np. `Cbc`).

Opis modelu

Model formalny:

- n - liczba lotnisk, m - liczba firm,
- c_i, $i \in \{1, ..., m\}$ - ilość posiadanego paliwa przez i-tą firmę,
- a_j, $j \in \{1, ..., n\}$ - zapotrzebowanie na paliwo na j-tym lotnisku,
- t_{ji}, $j \in \{1, ..., n\}, i \in \{1, ..., m\}$ - koszt galonu paliwa z firmy j-tej na lotnisku i-tym,
- $x_{ji} \geqslant 0$, $j \in \{1, ..., n\}, i \in \{1, ..., m\}$ - liczba galonów paliwa zakupionych na j-te lotnisko w i-tej firmie,
- ograniczenia:
  - $\forall_{k \in \{1,...,n\}} \sum_{l=1}^{m} x_{kl} \geqslant a_k$
  - $\forall_{l \in \{1,...,m\}} \sum_{k=1}^{n} x_{kl} \leqslant c_l$
- funkcja celu:
  - $\min \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} x_{kl} t_{kl}$

Rozwiązanie

Poniżej przedstawiono otrzymane rezultaty:

	Firma 1	Firma 2	Firma 3
Lotnisko 1	0	110 000	0
Lotnisko 2	165 000	55 000	0
Lotnisko 3	0	0	330 000
Lotnisko 4	110 000	0	330 000

Figure 1: Ilość paliwa (w galonach) dostarczona na lotniska przez firmy

Na podstawie uzyskanych rezultatów można stwierdzić, że:

- Minimalny łączny koszt dostaw wynosi \$ 8 525 000.
- Wszystkie firmy dostarczają paliwo.
- `Firma 1` i `Firma 3` dostarczają całe dostępne paliwo. `Firma 2` dostarcza jedynie 165 000 galonów. Na stanie zostanie 385 000 galonów paliwa.

Zadanie 2

Treść zadania

Dana jest sieć połączeń między n miastami reprezentowana za pomocą skierowanego grafu $G = (N, A)$, gdzie N jest zbiorem miast (wierzchołków), $|N| = n$, A jest zbiorem połączeń między miastami (łuków), $|A| = m$. Dla każdego połączenia z miasta i do miasta j, $(i, j) \in A$, dane są koszt przejazdu c_{ij} oraz czas przejazdu t_{ij} (im mniejszy koszt, tym dłuższy czas przejazdu). Dane są również dwa miasta $i^{\circ}, j^{\circ} \in N$.

Celem jest znalezienie połączenia (ścieżki) między zadanymi dwoma miastami, którego całkowity koszt jest najmniejszy i całkowity czas przejazdu nie przekracza z góry zadanego czasu przejazdu T.

1. Zapisz model programowania całkowitoliczbowego w wybranym języku. Rozwiąż własny egzemplarz problemu ($n \geqslant 10$) za pomocą solvera `GLPK` (lub np. `Cbc`).
2. Czy ograniczenie na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych jest potrzebne? Sprawdź, jakie będą wartości zmiennych decyzyjnych, jeśli usuniemy ograniczenie na ich całkowitoliczbowość (tj. mamy przypadek, w którym model jest modelem programowania liniowego).
3. Czy po usunięciu ograniczenia na czasy przejazdu w modelu bez ograniczeń na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych i rozwiązaniu problemu otrzymane połączenie jest akceptowalnym rozwiązaniem?

Opis modelu

Model formalny:

- N - zbiór miast, A - zbiór połączeń pomiędzy miastami,
- n - liczba miast, m - liczba połączeń, T - maksymalny całkowity czas przejazdu,
- i° - miasto początkowe, j° - miasto końcowe,
- c_{ij}, $(i, j) \in A$ - koszt przejazdu z i-tego miasta do j-tego miasta,
- t_{ij}, $(i, j) \in A$ - czas przejazdu z i-tego miasta do j-tego miasta,
- x_{ij}, $(i, j) \in A$ - użyte krawędzie (1 - krawędź użyta, 0 - krawędź nieużyta),
- ograniczenia:
  - $\sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij} \leqslant T$
  - $\forall_{i\in\{1,\ldots,n\}}(\sum_{(j,i)\in A} x_{ji} + 1[i = i^\circ] = \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} + 1[i = j^\circ])$
- funkcja celu:
  - $\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$

Rozwiązanie

Poniżej przedstawiono rozwiązanie przykładowego egzemplarza problemu:

Wejście	Wyjście	Koszt	Czas	Wejście	Wyjście	Koszt	Czas
1	2	50	3	6	8	20	2
1	3	40	2	6	9	70	5
2	4	60	4	7	8	60	4
2	5	20	1	7	9	30	2
3	4	30	2	8	10	50	3
3	5	70	5	8	1	80	7
4	6	80	6	9	10	20	10
4	7	10	1	9	2	90	8
5	6	40	3	10	3	30	2
5	7	90	7	10	4	40	3

Figure 2: Przykładowy egzemplarz problemu ($n = 10$)

Poniżej przedstawiono rozwiązanie przykładowego egzemplarza problemu:

Źródło	Ujście	Ścieżka	Koszt	Maksymalny czas
1	10	$1 \to 3 \to 4 \to 7 \to 9 \to 10$	130	17
1	10	$1 \to 2 \to 5 \to 6 \to 8 \to 10$	180	16

Figure 3: Rozwiązanie przedstawionego egzemplarza problemu

Rozwiązanie o koszcie 130 jest rozwiązaniem optymalnym. Po zmniejszeniu maksymalnego kosztu optymalne rozwiązanie staje się niedopuszczalne i wyznaczone jest rozwiązanie, które jest optymalne biorąc pod uwagę ograniczenia czasowe.

Ograniczenia na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych jest potrzebne, gdyż w przypadku, gdy rozwiązanie optymalne nie spełnia ograniczeń czasowych, zmienne decyzyjne w otrzymanym rozwiązaniu przyjmują wartości ułamkowe.

Usunięcie ograniczeń czasowych nie rozwiąże problemu, gdyż wtedy program wyznaczy optymalne rozwiązanie nie biorąc pod uwagę maksymalnego czasu. Zatem może być ono niedozwolone.

Zadanie 3

Treść zadania

Zapisz model dla zadania 3. z Listy 2 na ćwiczenia w wybranym języku i rozwiąż go dla podanych tam danych za pomocą solvera `GLPK` (lub np. `Cbc`).

W opisie rozwiązania przedstaw optymalny przydział radiowozów dla każdej zmiany i dzielnicy oraz podaj całkowitą liczbę wykorzystywanych radiowozów.

Policja w małym miasteczku posiada w swoim zasięgu trzy dzielnice oznaczone jako `p1`, `p2` i `p3`. Każda dzielnica ma przypisaną pewną liczbę radiowozów wyposażonych w radiotelefony i sprzęt pierwszej pomocy. Policja pracuje w systemie trzyzmianowym. W poniższych tabelach podane są minimalne i maksymalne liczby radiowozów dla każdej zmiany.

	zmiana 1	zmiana 2	zmiana 3
p1	2	4	3
p2	3	6	5
p3	5	7	6

Figure 4: Minimalne liczby radiowozów dla każdej zmiany i dzielnicy

	zmiana 1	zmiana 2	zmiana 3
p1	3	7	5
p2	5	7	10
p3	8	12	10

Figure 5: Maksymalne liczby radiowozów dla każdej zmiany i dzielnicy

Aktualne przepisy wymuszają, że dla zmiany 1, 2 i 3 powinno być dostępnych, odpowiednio, co najmniej 10, 20 i 18 radiowozów. Ponadto dzielnice p1, p2 i p3 powinny mieć przypisane, odpowiednio, co najmniej 10, 14 i 13 radiowozów. Policja chce wyznaczyć przydział radiowozów spełniający powyższe wymagania i minimalizujący ich całkowitą liczbę. Sformułuj ten problem jako problem cyrkulacji.

Opis modelu

Model formalny:

- n - liczba dzielnic, m - liczba zmian,
- d_i, $i \in \{1, ..., n\}$ - minimalna liczba radiowozów w i-tej dzielnicy,
- s_j, $j \in \{1, ..., m\}$ - minimalna liczba radiowozów na j-tej zmianie,
- a_{ij}, $i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., m\}$ - minimalna liczba radiowozów w i-tej dzielnicy na j-tej zmianie,
- b_{ij}, $i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., m\}$ - maksymalna liczba radiowozów w i-tej dzielnicy na j-tej zmianie,
- $x_{ij} \geqslant 0$, $i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., m\}$ - liczba radiowozów w i-tej dzielnicy na j-tej zmianie,
- ograniczenia:
  - $\forall_{k \in \{1,...,n\}} \sum_{l=1}^{m} (x_{kl} \geqslant d_k)$
  - $\forall_{l \in \{1,...,m\}} \sum_{k=1}^{n} (x_{kl} \geqslant s_l)$
  - $\forall_{k \in \{1,...,n\}} \forall_{l \in \{1,...,m\}} (a_{kl} \leqslant x_{kl} \leqslant b_{kl})$
- funkcja celu:
  - $\min \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} x_{kl}$

Rozwiązanie

Poniżej przedstawiono optymalny przydział radiowozów:

	zmiana 1	zmiana 2	zmiana 3
p1	2	7	5
p2	3	6	7
p3	5	7	6

Figure 6: Optymalny przydział radiowozów do dzielnic

Do odpowiedniego patrolowania dzielnic policja potrzebuje 48 samochodów.

Zadanie 4

Treść zadania

Pewna firma przeładunkowa posiada teren, na którym składuje kontenery z cennym ładunkiem. Teren podzielony jest na $m \times n$ kwadratów. Kontenery składowane są w wybranych kwadratach. Zakłada się, że kwadrat może być zajmowany przez co najwyżej jeden kontener. Firma musi rozmieścić kamery, żeby monitorować kontenery. Każda kamera może obserwować k kwadratów na lewo, k kwadratów na prawo, k kwadratów w górę i k kwadratów w dół. Kamera nie może być umieszczona w kwadracie zajmowanym przez kontener.

Zaplanuj rozmieszczenie kamer w kwadratach tak, aby każdy kontener był monitorowany przez co najmniej jedną kamerę oraz liczba użytych kamer była jak najmniejsza.

Zapisz model programowania całkowitoliczbowego w wybranym języku. Rozwiąż własny egzemplarz problemu ($m, n \geqslant 5$; rozwiązania dla $\geqslant 2$ różnych wartości parametru k) za pomocą solvera `GLPK` (lub np. `Cbc`).

Opis modelu

Model formalny:

- n - liczba rzędów kontenerów, m - liczba kolumn kontenerów, k - zasięg kamer,
- c_{ij}, $i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., m\}$ - rozmieszczenie kontenerów (1 - kontener jest ustawiony na danym polu, 0 - pole jest puste),
- x_{ij}, $i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., m\}$ - rozmieszczenie kamer (1 - kamera jest ustawiona na danym polu, 0 - pole jest puste),
- ograniczenia:
  - $\forall_{a\in\{1,...,n\}}\forall_{b\in\{1,...,m\}}(x_{ab} + c_{ab} \leqslant 1)$
  - $\forall_{a\in\{1,...,n\}}\forall_{b\in\{1,...,m\}}(c_{ab} = 1 \implies (\sum_{o=\max(1,b-k)}^{\min(m,b+k)} x_{ao} + \sum_{p=\max(1,a-k)}^{\min(n,a+k)} x_{pb} \geqslant 1))$
- funkcja celu:
  - $\min \sum_{a=1}^{n} \sum_{b=1}^{m} x_{ab}$

Rozwiązanie

Poniżej przedstawiono rozwiązanie przykładowego egzemplarza problemu:

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	1
2	0	1	0	1	0
3	0	0	1	0	0
4	0	1	0	1	0
5	1	0	0	0	1

Figure 7: Przykładowy egzemplarz problemu ($n = 5, m = 5$)

k	`Liczba kamer`	`Rozmieszczenie kamer`
1	5	$(1,2),(1,4),(2,3),(4,1),(4,5)$
2	4	$(1,3),(2,3),(4,1),(4,5)$
3	3	$(1,2),(1,4),(5,3)$

Figure 8: Optymalne rozmieszczenie kamer w zależności od wartości parametru k

Zadanie 5

Treść zadania

Zakład może produkować cztery różne wyroby $P_i, i \in 1,2,3,4$, w różnych kombinacjach. Każdy z wyrobów wymaga pewnego czasu obróbki na każdej z trzech maszyn. Czasy te są podane w poniższej tabeli (w minutach na kilogram wyrobu). Każda z maszyn jest dostępna przez 60 godzin w tygodniu. Produkty P_1, P_2, P_3 i P_4 mogą być sprzedane po cenie, odpowiednio, 9, 7, 6 i 5 \$ za kilogram. Koszty zmienne (koszty pracy maszyn) wynoszą, odpowiednio, 2 \$ za godzinę dla maszyn M_1 i M_2 oraz 3 \$ za godzinę dla maszyny M_3. Koszty materiałowe wynoszą 4 \$ na każdy kilogram wyrobu P_1 i 1 \$ na każdy kilogram wyrobu P_2, P_3 i P_4. W tabeli podany jest także maksymalny tygodniowy popyt na każdy z wyrobów (w kilogramach).

`Produkt`	M_1	M_2	M_3	`Max popyt`
P_1	5	10	6	400
P_2	3	6	4	100
P_3	4	5	3	150
P_4	4	2	1	500

Figure 9: Maksymalny tygodniowy popyt na każdy z wyrobów (w kilogramach)

Wyznacz optymalny tygodniowy plan produkcji poszczególnych wyrobów i oblicz zysk z ich sprzedaży.

Zapisz model programowania liniowego w wybranym języku i rozwiąż go za pomocą solvera `GLPK` (lub np. `Cbc`).

Opis modelu

Model formalny:

- n - liczba produktów, m - liczba maszyn,
- p_i, $i \in \{1, ..., n\}$ - cena za sprzedaż kilogramu i-tego produktu,
- m_i, $i \in \{1, ..., n\}$ - koszt materiałowy za kilogram i-tego produktu,
- w_j, $i \in \{1, ..., m\}$ - koszt pracy za godzinę j-tej maszyny,
- d_j, $i \in \{1, ..., n\}$ - maksymalny popyt i-tego produktu,
- h - maksymalny czas działania każdej z maszyn (w godzinach),
- t_{ij}, $i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., m\}$ - czas wyrobu kilogramu i-tego produktu na j-tej maszynie (w minutach),
- $x_i \geqslant 0$, $i \in \{1, ..., n\}$ - liczba wyprodukowanych kilogramów i-tego produktu,
- ograniczenia:
  - $\forall_{k \in \{1,...,n\}}(x_k \leqslant d_k)$
  - $\forall_{l \in \{1,...,m\}} \sum_{k=1}^{n}(\frac{x_k t_{kl}}{60} \leqslant h)$
- funkcja celu:
  - $\max \sum_{k=1}^{n}(x_k(p_k - m_k - \sum_{l=1}^{m} \frac{t_{kl} w_l}{60}))$

Rozwiązanie

Poniżej przedstawiono optymalny tygodniowy plan produkcji poszczególnych wyrobów:

P_1	P_2	P_3	P_4
125	100	150	500

Figure 10: Optymalny tygodniowy plan produkcji

Maksymalny zysk wynosi 3632.5 \$.