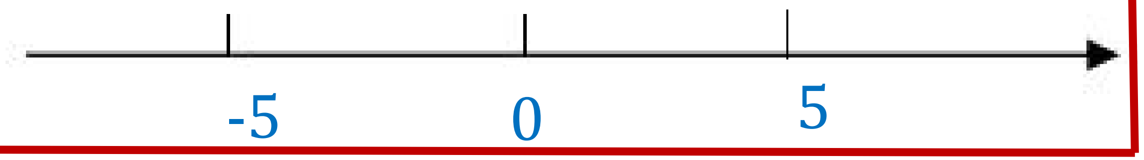
管理类联考数学
必修课

第一章 实数、比例、绝对值

第三节：绝对值

1.3.4 绝对值的运算法则

$|x-0|=|x|$



（1）$|a|\le b\ (b>0) \leftrightarrow -b\le a\le b$　　$|x|\le 5$， $-5\le x\le 5$

（2）$|a|\ge b\ (b>0) \leftrightarrow a\ge b$ 或 $a\le -b$　　$|x|\ge 5$， $x\ge 5$ 或 $x\le -5$

（3）$|a\cdot b|=|a||b|$　　$|2\cdot 3|=|2|\cdot|3|$

（4）$|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|}\ (b\ne 0)$　　$|\frac{2}{-3}|=\frac{|2|}{|-3|}=\frac{2}{3}$

（5）三角不等式　　$|a+b|\le|a|+|b|$（$ab\ge 0$ 时等号成立）

$|a-b|\le|a|+|b|$（$ab\le 0$ 时等号成立）

注意：考试要求掌握等号成立条件的判断

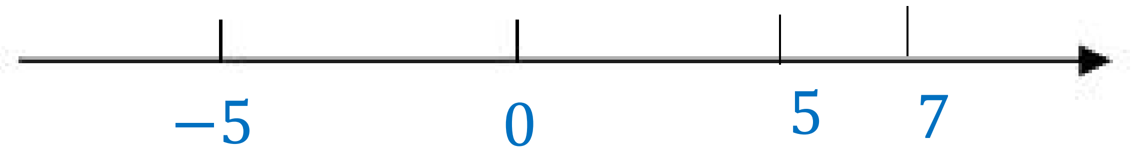
第三节：绝对值

1.3.4 绝对值的运算法则

（5）三角不等式　　$|a+b| \le |a|+|b|$ （$ab \ge 0$时等号成立）

$|a-b| \le |a|+|b|$ （$ab \le 0$时等号成立）

注意：考试要求掌握等号成立条件的判断



当$a=-5,b=7$时，$|a+b|=|-5+7|=2$

$|a|+|b|=|-5|+|7|=12$

$|a+b| \le |a|+|b|$的等号不成立。

当$a=5,b=7$时，$|a+b|=|5+7|=12$

$|a|+|b|=|5|+|7|=12$

$|a+b| \le |a|+|b|$的等号成立。

练习题（2004年1月）

<table>
<tr><th>条件(1)</th><th>条件(2)</th><th>选项</th></tr>
<tr><td>√</td><td>×</td><td>A</td></tr>
<tr><td>×</td><td>√</td><td>B</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td><td rowspan="2">C
(combine)</td></tr>
<tr><td colspan="2">(1)+(2) √</td></tr>
<tr><td>√</td><td>√</td><td>D
(double)</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td><td rowspan="2">E
(error)</td></tr>
<tr><td colspan="2">(1)+(2) ×</td></tr>
</table>

【例1】 x, y是实数，$|x|+|y|=|x-y|$

D

（1） $x>0$， $y<0$

（2） $x<0$， $y>0$

思路:

方法1：根据条件（1）（2）中的x,y与0的关系去绝对值，可以得出都充分，答案选D

方法2：利用刚刚学习的绝对值三角不等式定理，等号成立时是异号

$|a-b|\leq|a|+|b|$（$ab\leq0$时等号成立）

条件(1)	条件(2)	选项
√	×	A
×	√	B
×	×	C (combine)
(1)+(2) √		
√	√	D (double)
×	×	E (error)
(1)+(2) ×		

进阶练习题（2021年1月）

【例2】设a，b为实数，则能确定 $|a|+|b|$ 的值

（1）已知 $|a+b|$的值。

（2）已知 $|a-b|$的值。

【考点】不等式-三角不等式

条件1：$|a+b|\le |a|+|b|$，要想“=”成立，还需要$ab\ge 0$，单看条件1不充分；

条件2：$|a-b|\le |a|+|b|$，要想“=”成立，还需要$ab\le 0$，单看条件2不充分；

条件1：举反例，令$|a+b|=1$，当$a=-3$，$b=2$时，$|a|+|b|=5$；

当$a=1$，$b=-2$时，$|a|+|b|=3$，$|a|+|b|$的值不唯一，不充分；

条件2：举反例，令$|a-b|=1$，当$a=3$，$b=2$，$|a|+|b|=5$，

当$a=4$，$b=3$，$|a|+|b|=7$，$|a|+|b|$的值不唯一，不充分；

第三节：绝对值

1.3.5 绝对值的最值

（1）$|x-a|+|x-b|$

（2）$|x-a|-|x-b|$

（3）$|x-a|+|x-b|+|x-c|$

方法1：数形结合法（绝对值的几何含义）

方法2：常规方法（零点分段讨论法）

终极秘法：直接代入零点

第一步：求零点

第二步：求零点对应的y值

第三节：绝对值

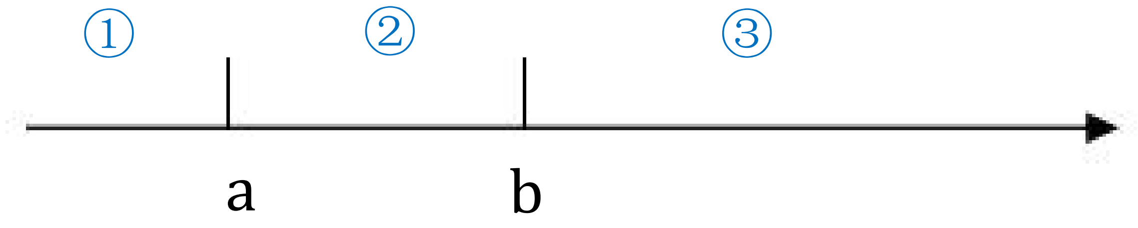
1.3.5 绝对值的最值

（1）$|x-a|+|x-b|$的几何意义：

表示在数轴上x点分别到a点与b点的距离值之和

这里x的位置有3种情况：a的左侧；a和b之间；b的右侧（**详情见下页**）。

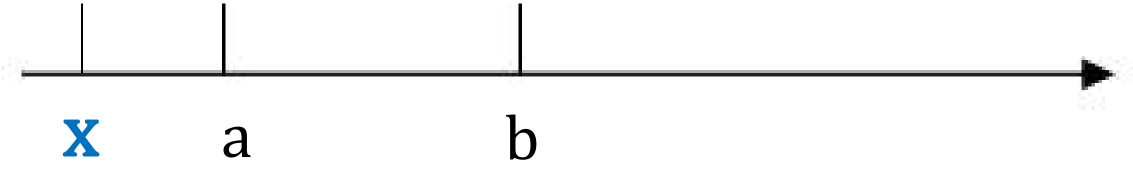
如$y=|x+2|+|x-4|$表示x分别到-2与4的距离之和



第三节：绝对值

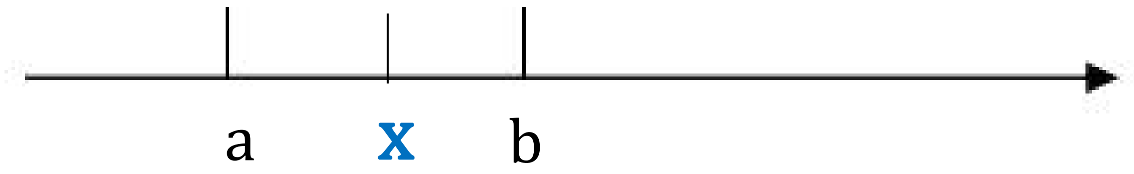
1.3.5 绝对值的最值

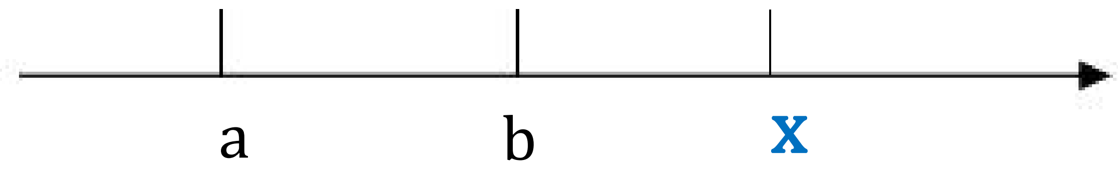
（1）数形结合法：根据绝对值的几何含义进行判断



观察最大值和最小值

$y=|x-a|+|x-b|$





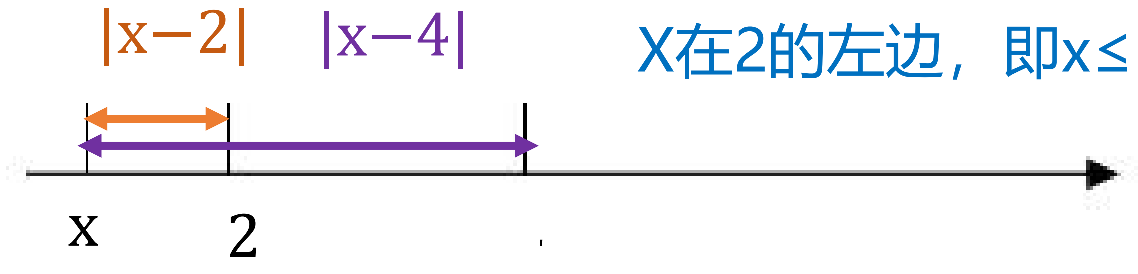
知识点12：绝对值的最值

绝对值的**最值**

（1）数形结合法：根据绝对值的几何含义进行判断

y=|x−a|+ |x−b|

y=|x−2|+ |x−4|

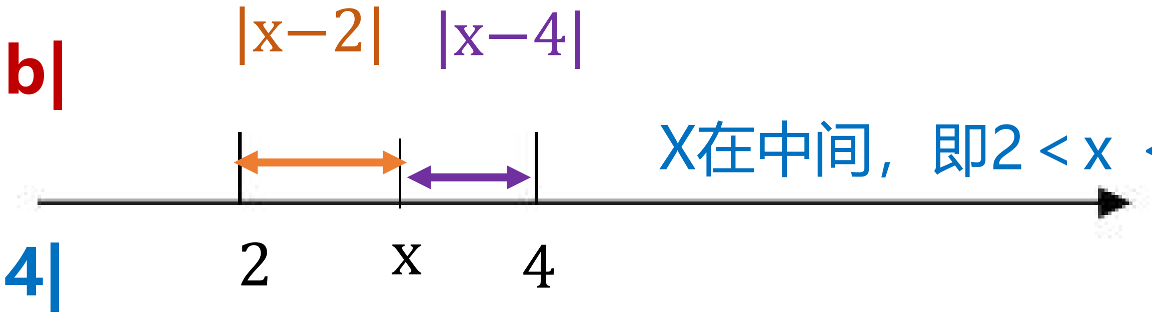


X在2的左边，即x≤2

此时：y 可以无穷大

当x=2时，y=2

无最大值

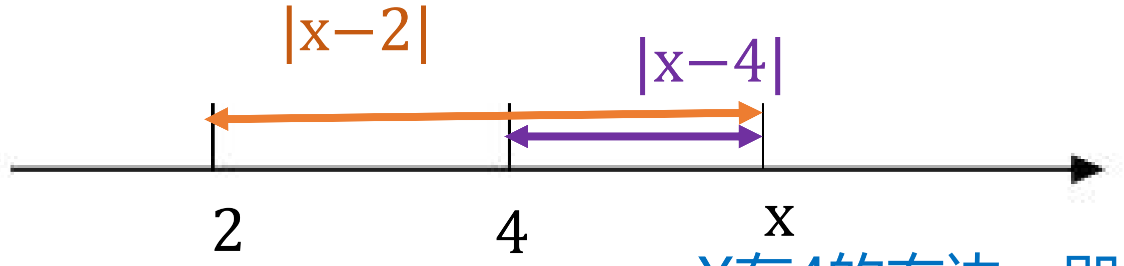


X在中间，即2＜x ＜ 4

此时：y=2

有最小值，

为|a−b|=|2−4|=2



X在4的右边，即x≥4

此时：y 可以无穷大

当x=4时，y=2

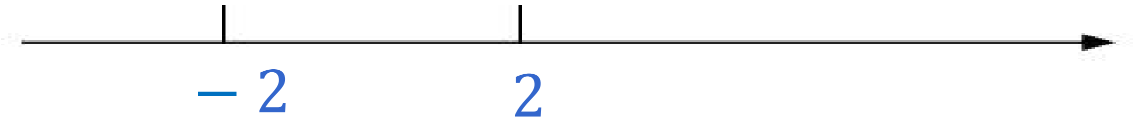
第三节：绝对值

1.3.5 绝对值的最值

（2）常规方法（零点分段讨论法）：分段讨论法去绝对值符号，根据图像判断最值。

例：设$y=|x-2|+|x+2|$

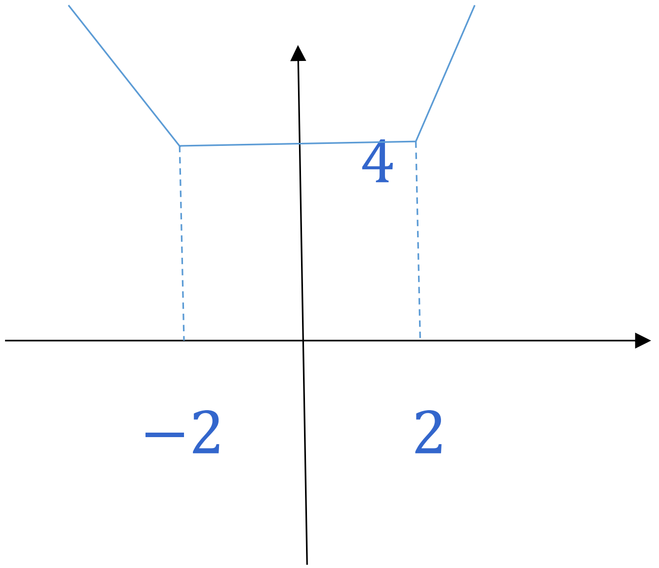
令$|x-2|=0$；$|x+2|=0$，所以 $x_1=2$，$x_2=-2$



①$x\le-2$，　$|x-2|+|x+2|=-(x-2)+[-(x+2)]=-2x$

② $-2<x<2$，　$|x-2|+|x+2|=-(x-2)+(x+2)=4$

③$x\ge2$，　$|x-2|+|x+2|=(x-2)+(x+2)=2x$



此时有最小值，为$|a-b|=|2-(-2)|=4$

第三节：绝对值

1.3.5 绝对值的最值

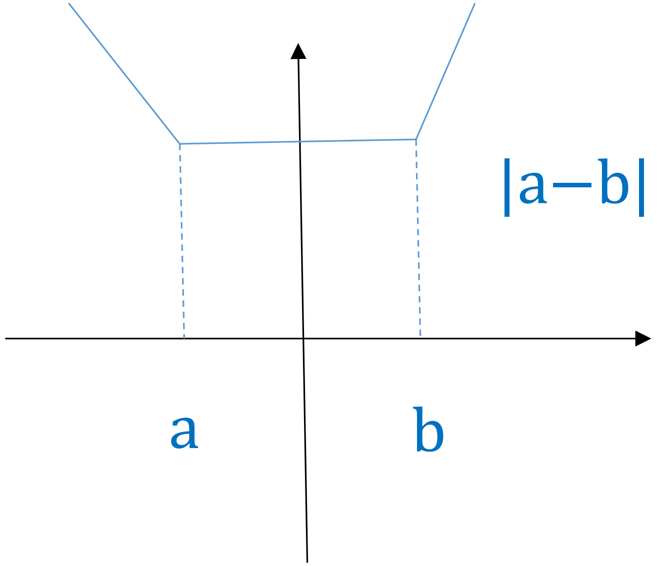
形如y= |x-a|+ |x−b| 平底锅图形

此时有最小值，为|a−b|

形如y= |x-a|+ |b−x|

此时有最小值，为|a−b|

因为|b−x|=|− (x−b)|=|−1|•|x-b|= |x−b|



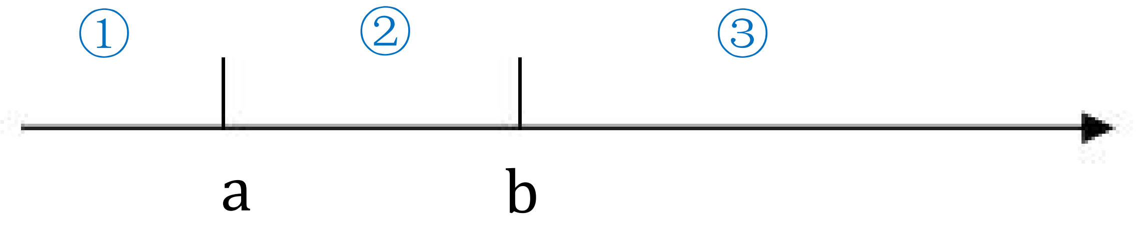
第三节：绝对值

1.3.5 绝对值的最值

（2）$|x-a|-|x-b|$的几何意义：表示在数轴上x点到a点与b点的距离值之差

X 的位置有3种情况：a的左侧；a和b之间；b的右侧。

如$y=|x+2|-|x-4|$表示x到 -2与4的距离之差

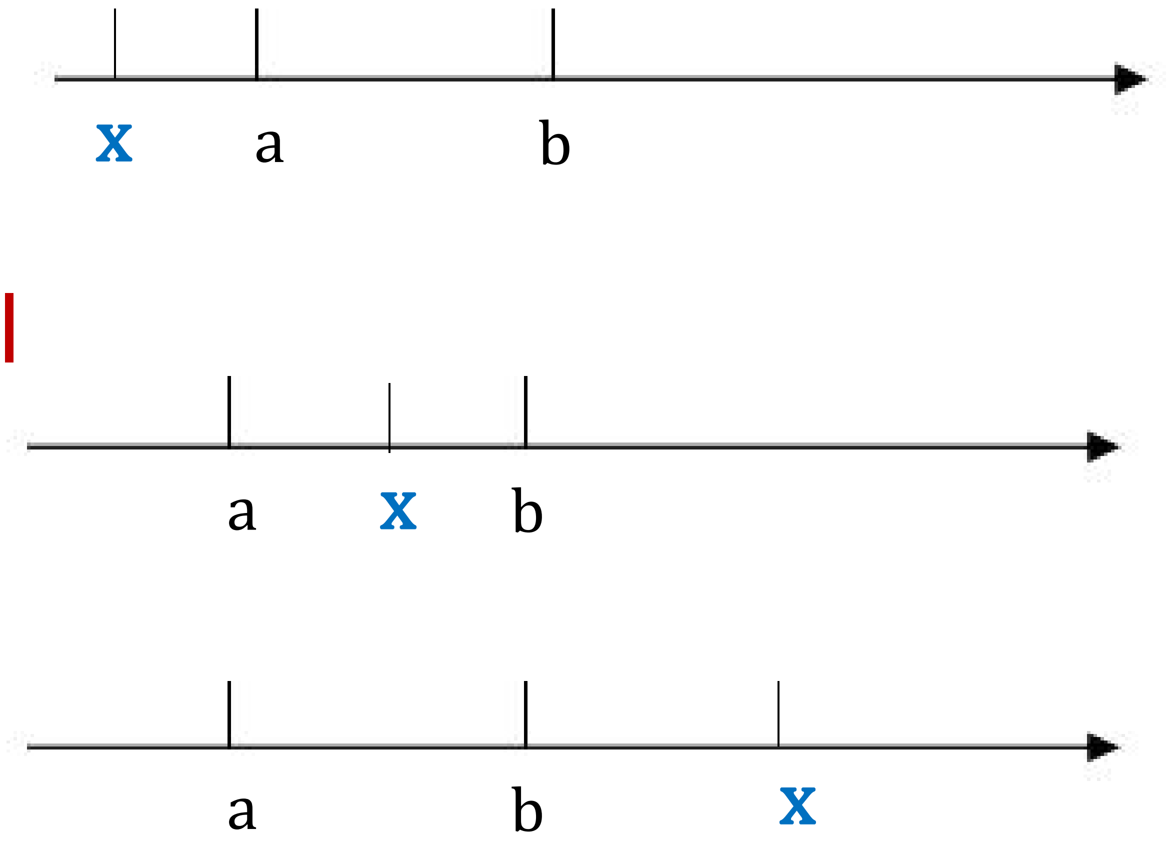


第三节：绝对值

1.3.5 绝对值的最值

（1）**数形结合法**：根据绝对值的几何含义进行判断

$y=|x-a|-|x-b|$

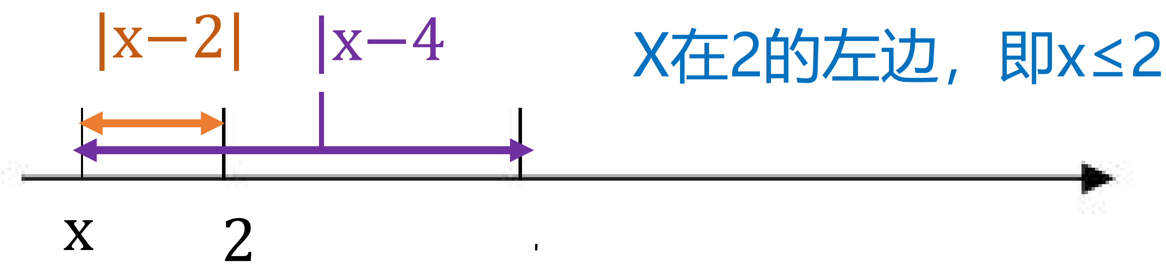


观察最大值和最小值

第三节：绝对值

1.3.5 绝对值的最值

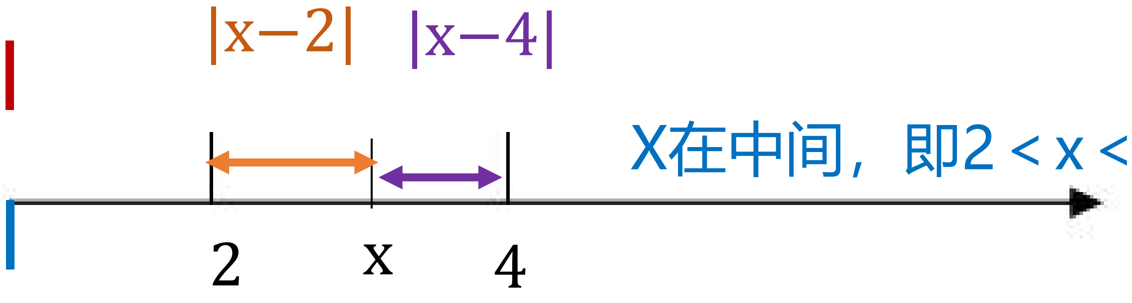
（1）**数形结合法**：根据绝对值的几何含义进行判断



X在2的左边，即x≤2　　此时：y=−2

此时有最小值，为−|a−b|

=−|2−4|=−2



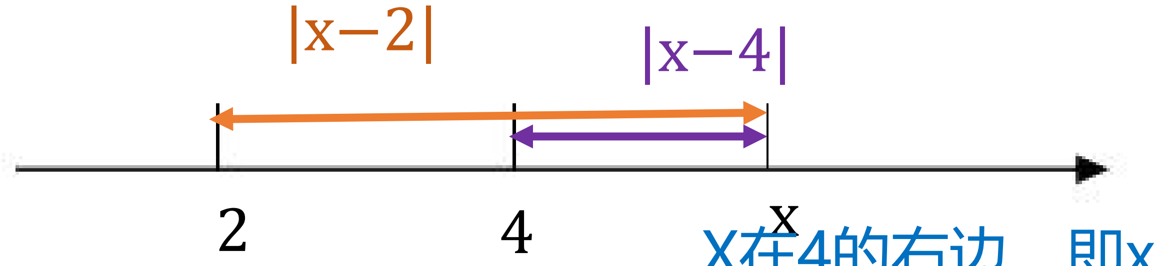
y=|x−a|−|x−b|

y=|x−2|−|x−4|

X在中间，即2＜x＜4　　此时：−2 ＜ y ＜ 2

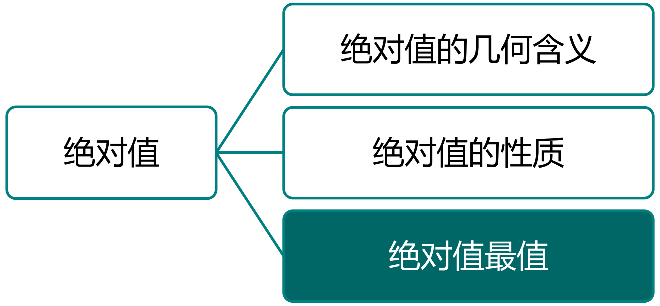
此时有最大值，为|a−b|

=|2−4|=2



X在4的右边，即x≥4　　此时：y=2

第三节：绝对值

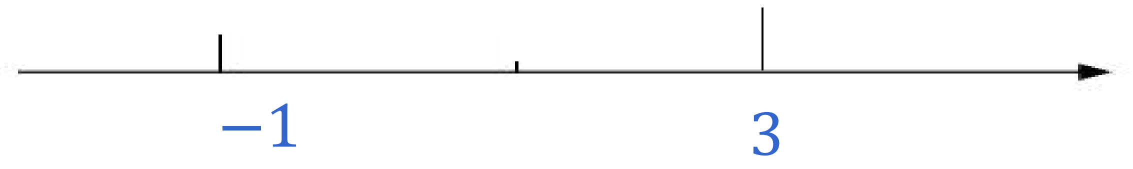


1.3.5 绝对值的最值

（2）常规方法（零点分段讨论法）： 分段讨论法去绝对值符号，根据图像判断最值。

例：设 $y=|x-3|-|x+1|$，则下列结论正确的是（　）

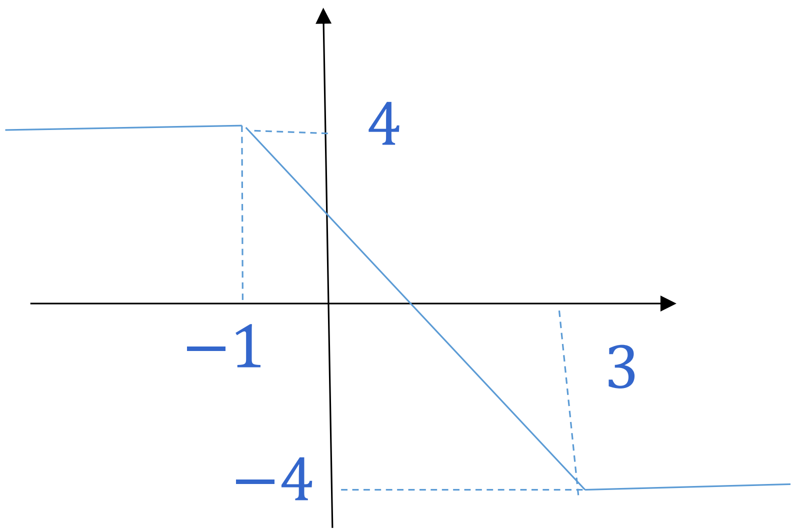
令$|x-3|=0$；$|x+1|=0$，所以 $x_1=3$，$x_2=-1$



①$x<-1$，　$|x-3|-|x+1|=-(x-3)-[-(x+1)]=4$

②$-1\leq x\leq 3$，$|x-3|-|x+1|=-(x-3)-(x+1)=-2x+2$

③$x>3$，　$|x-3|-|x+1|=(x-3)-(x+1)=-4$



此时有最小值，为$-|a-b|=-|3-(-1)|=-4$

此时有最大值，为$|a-b|=|3-(-1)|=4$

第三节：绝对值

绝对值

绝对值的几何含义

绝对值的性质

绝对值最值

1.3.5 绝对值的最值

形如$y=|x-a|+|x-b|$平底锅图形

此时有最小值，为$|a-b|$

形如$y=|x-a|+|b-x|$

此时有最小值，为$|a-b|$

因为$|b-x|=|-(x-b)|=|-1|\cdot|x-b|=|x-b|$

形如$y=|x-a|-|x-b|$ Z图形

此时有最小值，为$-|a-b|$

此时有最大值，为$|a-b|$

形如$y=|x-a|-|b-x|$

此时有最小值，为$-|a-b|$

此时有最大值，为$|a-b|$

练习题（2008年10月）

【例3】 f(x) 有最小值2.

（1） $f(x)=|x-\frac{5}{12}|+|x-\frac{1}{12}|$

（2） $f(x)=|x-2|+|4-x|$

B

条件(1)	条件(2)	选项
√	×	A
×	√	B
×	×	C (combine)
(1)+(2) √		
√	√	D (double)
×	×	E (error)
(1)+(2) ×		

做题思路： $|x-a|+|x-b|$的最小值是$|a-b|$

条件1：最小值为$|\frac{5}{12}-\frac{1}{12}|=\frac{1}{3}$

条件2：最小值为$|2-4|=2$

练习题（2010年前真题）

【例4】 已知 $|x+2|+|1-x|=9-|y-5|-|1+y|$，则$x+y$的最大值和最小值分别为m，n。

（1） $m=5,n=-4$

（2） $m=6,n=-3$

B

做题思路： $|x+2|+|1-x|+|y-5|+|1+y|=9$

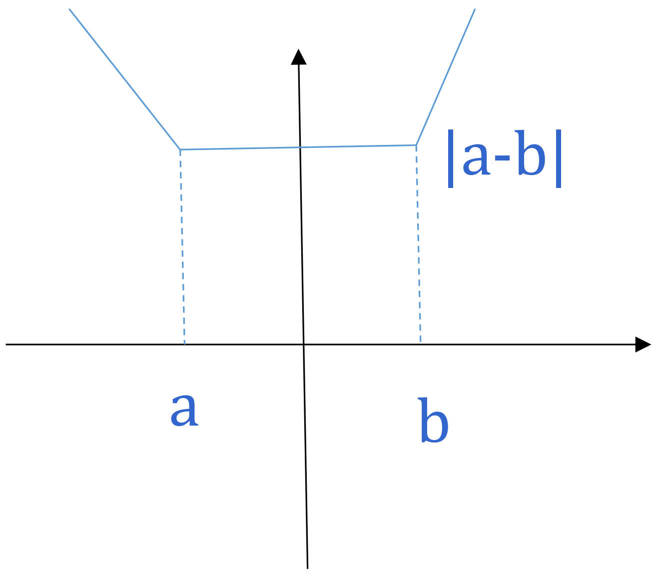
$|x+2|+|1-x|\geq 3$， $|y-5|+|1+y|\geq 6$，题干相加要等于9，

$\therefore$ $|x+2|+|1-x|=3$， $|y-5|+|1+y|=6$，

$\therefore$ $-2\leq x\leq 1$， $-1\leq y\leq 5$

$m=5+1=6$

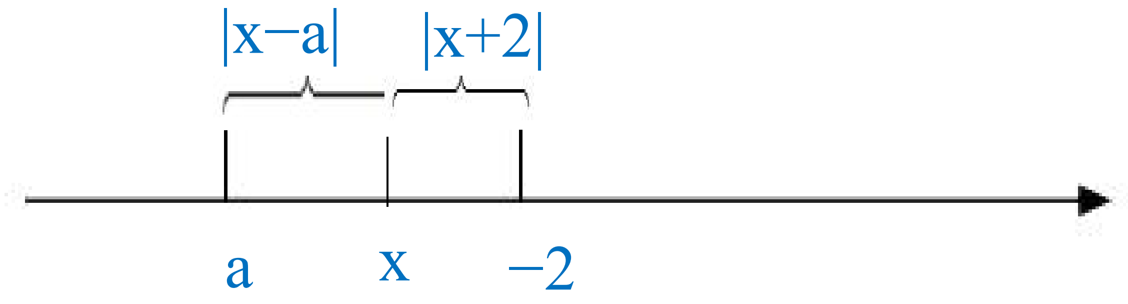
$n=-2+(-1)=-3$



练习题（模拟题）

【练习5】已知$|x-a|+|x+2|$的最小值是5，则a的值是（ ）

A. 3　　B. -3　　C. 7　　D. -7　　E. 3或-7



思路： $|x-a|+|x+2|$的最小值$|a-(-2)|=|a+2|=5$

当$a+2\geq0$时，$a+2=5$，$a=3$

当$a+2<0$时，$a+2=-5$，$a=-7$

第三节：绝对值

1.3.5 绝对值的最值

(2）常规方法（零点分段讨论法）：分段讨论法去绝对值符号，根据图像判断最值。

形如$y=|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 铅笔头图形

假设$a<b<c$，当$x=b$时，有最小值$|c-a|=c-a$

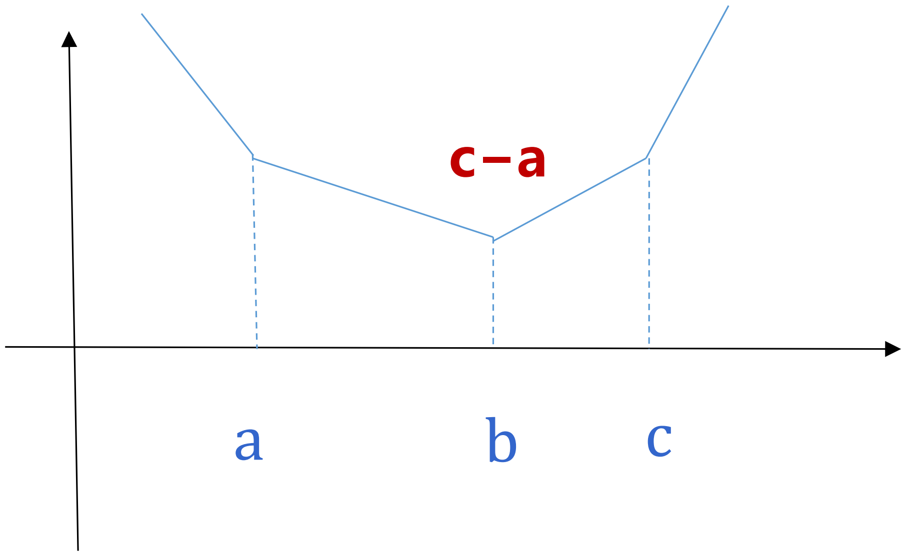
当$x\leq a$时，原式$=-3x+(a+b+c)$

当$a<x<b$时，原式$=-x+(b+c-a)$

当$x=b$时，原式$=c-a$

当$b<x<c$时，原式$=x+(c-a-b)$

当$x\geq c$时，原式$=3x-(a+b+c)$



根据这个讨论可以得出右边的图像（注意形状即可，不必在意具体数字）

强化 练习题(2009年10月)

零点：a　　20　　a+20

【例6】设$y=|x-a|+|x-20|+|x-a-20|$，其中$0<a<20$，则对于满足$a\le x\le 20$的x值，y的最小值是（　）

A. 10　　B. 15　　C. 20　　D. 25　　E. 30

形如$y=|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 铅笔头图形

$y=|x-a|+|x-20|+|x-(a+20)|$

假设$a<b<c$，当$x=b$时，有最小值$|c-a|=c-a$

当$x=a$时，$y=|x-a|+|x-20|+|x-(a+20)|=0+20-a+20=40-a$

当$x=20$时，$y=|x-a|+|x-20|+|x-(a+20)|=20-a+0+a=20$

当$x=20+a$时，$y=|x-a|+|x-20|+|x-(a+20)|=20+a+0=20+a$

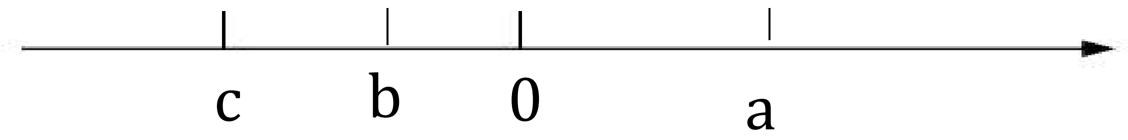
条件(1)	条件(2)	选项
√	×	A
×	√	B
×	×	C (combine)
(1)+(2) √		
√	√	D (double)
×	×	E (error)
(1)+(2) ×		

练习题（2006年10月）

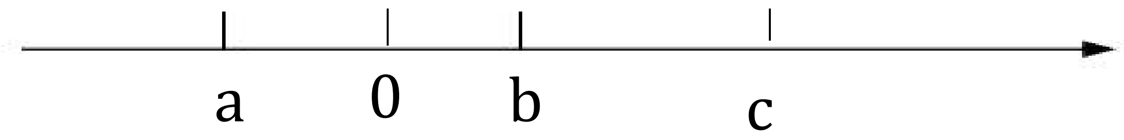
【自行练习7】 |b−a|+ |c−b|− |c|=a

A

（1）实数a,b,c在数轴上的位置为



（2）实数a,b,c在数轴上的位置为



思路：根据a、b、c在数轴上的位置，去绝对值

条件1：|b−a|+ |c−b|− |c|= − (b−a)+[−(c−b)] −(−c)=a−b+b−c+c=a, 充分

条件2：|b−a|+ |c−b|−|c|= b−a+c−b−c=−a，不充分

练习题（模拟题）

【自行练习8】函数 $y=2|x+1|+|x-2|-5|x-1|+|x-3|$的最大值是（　）

A. -3　　B. 2　　C. 7　　D. -1　　E. 10

终极秘法：代入零点!

第一步：求零点

第二步：求零点对应的y值

做题思路:

求零点：$|x+1|=0$；$|x-2|=0$；$|x-1|=0$；$|x-3|=0$

零点：$x=-1$；　$x=2$；　$x=1$；　$x=3$

零点	−1	1	2	3
对应的y值	−3	7	2	−1

绝对值的最值总结

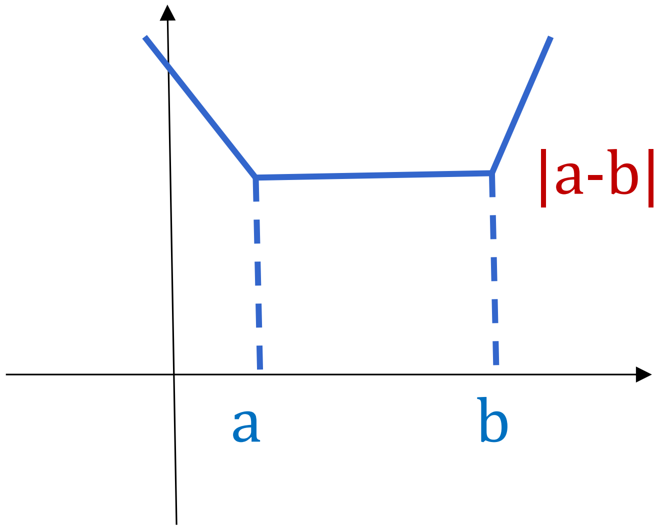
（1）$|x-a|+|x-b|$
（2）$|x-a|-|x-b|$
（3）$|x-a|+|x-b|+|x-c|$
方法1：数形结合法（绝对值的几何含义）
方法2：常规方法（零点分段讨论法）

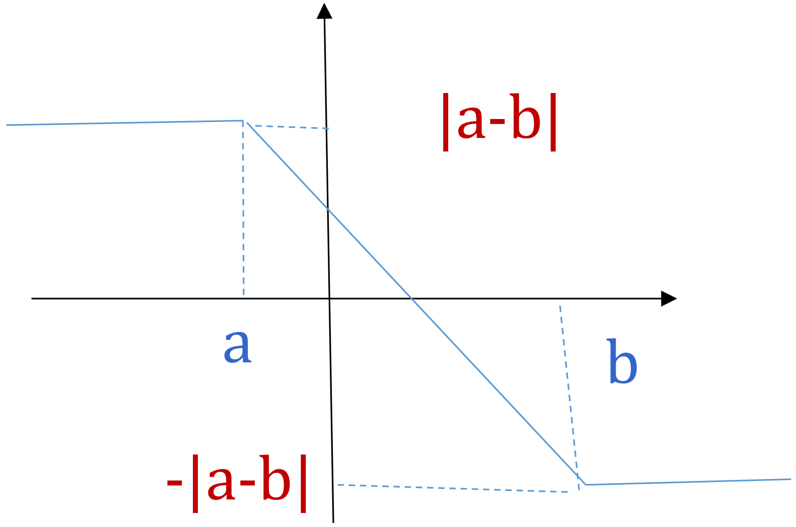
平底锅图形
形如$y=|x-a|+|x-b|$或$y=|x-a|+|b-x|$
此时有最小值，为$|a-b|$

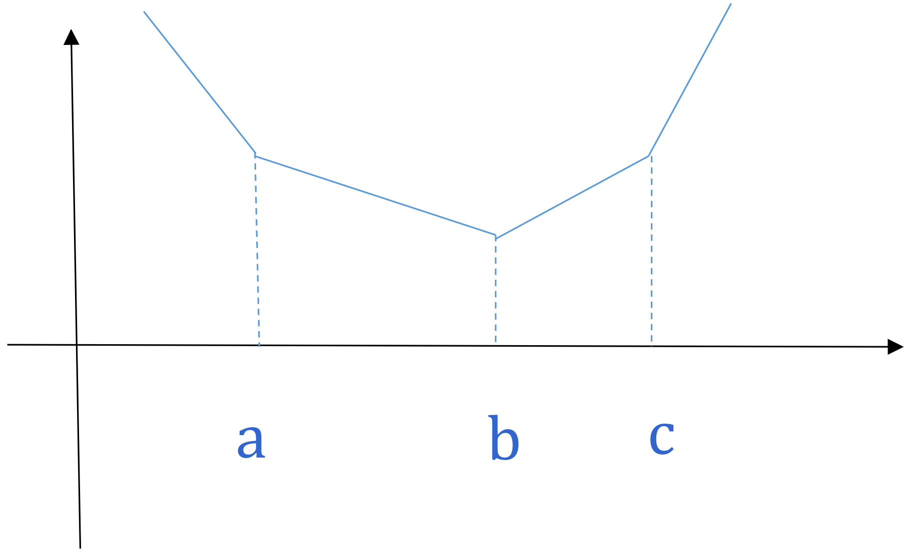
Z图形
形如$y=|x-a|-|x-b|$或$y=|x-a|-|b-x|$
此时有最小值，为$-|a-b|$
此时有最大值，为$|a-b|$

终极大法：直接代入零点！！！

绝对值的最值总结







平底锅图形

形如y= |x-a|+ |x-b|

此时有最小值，为|a-b|

Z图形

形如y= |x-a|- |x-b|

此时有最小值，为-|a-b|

此时有最大值，为|a-b|

铅笔头图形

形如y= |x-a|+ |x-b|+ |x-c|

假设a < b < c，当x=b时，

有最小值|c-a|=c-a

END

• Thanks for listening