管理类联考数学
必修课

第一章 实数、比例、绝对值

第四节 平均值及其运算

1.4.1 平均值定义

（1）算术平均值： n个实数 x_1， x_2 ， ……， x_n 的算术平均值为：

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{\mathrm{n}}$$

（2）几何平均值： n个**正**实数 x_1， x_2 ， ……， x_n 的几何平均值为：

$$x = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots\ldots x_n}$$

注意:几何平均值只对正实数有定义，而算术平均值对任何实数都有定义。

第四节 平均值及其运算

1.4.2 平均值定理及其运算

基本定理（也叫均值定理）：当实数 x_1，x_2，……，x_n 为n个正实数时，

它们的算术平均值不小于它们的几何平均值，即：

$$\frac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n}{\mathrm{n}} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots\ldots x_n} \qquad (x_i>0，\ i=1,2，\ \ldots\ldots,n)$$

当且仅当实数 $x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_n$ 时，等号成立。

积定或和定

算术平均值≥几何平均值；一正、二定、三相等

积定值,和有最小值；

和定值,积有最大值。

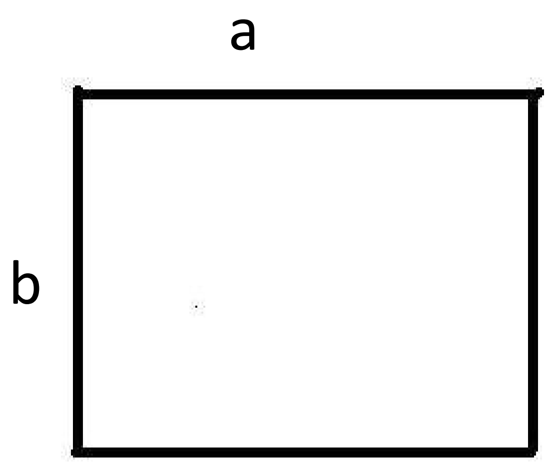
正实数

此时有最值，取最值时这n个正实数相等。

第四节 平均值及其运算

1.4.2 平均值定理及其运算

例：手里有一根长为20米的绳子，要用这根绳子围一个矩形小花园，花园的面积最大为（   ）



设长为a，宽为b，则 $2(a+b)=20 \rightarrow a+b=10$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad \rightarrow \quad ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2=25$$

例：想要围一个面积为36㎡的小花园，需要的绳子最短为（   ）

设长为a，宽为b，则 $ab=36$，需要的绳子长度为$2(a+b)$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}=12 \qquad 2(a+b)=24$$

第四节 平均值及其运算

1.4.2 平均值定理及其运算

常用的基本不等式

$a^2+b^2\geq 2ab \quad (a,b\in R)$ $\qquad \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \quad (a,b\in R^+)$

$(a-b)^2\geq 0 \rightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0 \rightarrow a^2+b^2\geq 2ab$

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0 \rightarrow a-2\sqrt{ab}+b\geq 0 \rightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab}$，即 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \quad (a,b\in R^+) \xrightarrow{\text{演变}} \begin{cases} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geq ab \\ a+b\geq 2\sqrt{ab} \end{cases}$$

一正、二定、三相等

积定值，和有最小值；

和定值，积有最大值。

第四节 平均值及其运算

1.4.2 平均值定理及其运算

常用的基本不等式（着重注意前3个）

(1) $a^2+b^2\geq 2ab \quad (a,b\in R)$

(2) $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \quad (a,b\in R^+)$

(3) $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc} \quad (a,b,c\in R^+)$

(4) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2 \quad (ab>0)$

$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}$，即 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$

(5) $a+\frac{1}{a}\geq 2 \quad (a\in R^+)$

$(\sqrt{a})^2+\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2\geq 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}$，即$a+\frac{1}{a}\geq 2$

(6) $a+\frac{1}{a}\leq -2 \quad \boxed{(a\in R^-)}$

a是负数，相当于等号左右两边同时除以-1

第四节 平均值及其运算

1.4.2 平均值定理及其运算 想知道证明过程的同学请自行查看以下内容。

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}(a，\ b, c \in R^{+})$$

对$x, y, z > 0$

有$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = (x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)]/2 \geq 0.$

即$x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz.$

对$a, b, c > 0$, 取$x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{b}, z = \sqrt[3]{c}$

得$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$

第四节 平均值及其运算

1.4.2 平均值定理及其运算

注意式子的演变

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\quad(a,b\in R^{+})\xrightarrow{\text{演变}}\begin{cases}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2}\geq ab\\ a+b\geq2\sqrt{ab}\end{cases}$$

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}\quad(a,b,c\in R^{+})\xrightarrow{\text{演变}}\begin{cases}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{3}\geq abc\\ a+b+c\geq3\sqrt[3]{abc}\end{cases}$$

一正、二定、三相等

积定值,和有最小值;

和定值,积有最大值。

练习题（模拟题）

【例1】已知2a+b=1，则ab的最大值是（ $\frac{1}{8}$ ）

做题思路：直接使用均值不等式$a+b\geq 2\sqrt{ab}$

2a+b≥$2\sqrt{2ab}$

1≥$2\sqrt{2ab}$

ab≤ $\frac{1}{8}$ （两边同时平方）

练习题(模拟题)

拆低次，凑高次

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

【例2】求函数 $y=3x+\frac{4}{x^2}$（$x>0$）的最小值为（　）.

A. $4\sqrt[3]{9}$　　B. $3\sqrt[3]{9}$　　C. $2\sqrt[3]{9}$　　D. $\sqrt[3]{9}$　　E. 6

做题思路：使用均值不等式求最值，必须通过乘法把x消掉，∵ 分母有x平方，

∴ 需要两个x去乘，把$3x$对半拆分成 $\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x$，然后用均值不等式即可

$$\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x+\frac{4}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3}{2}x\cdot\frac{3}{2}x\cdot\frac{4}{x^2}}=3\sqrt[3]{9}$$

练习题（错误示范）

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

【例2】求函数 $y=3x+\frac{4}{x^2}$ ($x>0$) 的最小值为（ ）.

A. $4\sqrt[3]{9}$ B. $3\sqrt[3]{9}$ C. $2\sqrt[3]{9}$ D. $\sqrt[3]{9}$ E. 6

$$y=3x+\frac{4}{x^2}=x+2x+\frac{4}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{x\cdot 2x\cdot \frac{4}{x^2}}=6$$

一正、二定、三相等

练习题（模拟题）

【练习3】求函数$y=x^2+\frac{16}{x}$ $(x>0)$的最小值是（ 12 ）

做题思路：$y=x^2+\frac{16}{x}$

$$=x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{8}{x}\cdot\frac{8}{x}}=12$$

练习题（2019年1月）

【练习4】函数$F(x)=2x+\frac{a}{x^2}$（a＞0）在（0，+∞）内的最小值为$F(x_0)=12$，则$x_0=$（ ）

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2　　E. 1

$$F(x)=2x+\frac{a}{x^2}=x+x+\frac{a}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{x\cdot x\cdot \frac{a}{x^2}}=3\sqrt[3]{a}$$

$$3\sqrt[3]{a}=12$$

当$x=x=\frac{a}{x^2}$时，取得最小值12，$x^3=a$

$$x=\sqrt[3]{a}=4$$

$x+x+\frac{a}{x^2}=12$，且$x=x=\frac{a}{x^2}$，则$x=x=\frac{a}{x^2}=4$

练习题（真题变形）

构造条件：因为要凑高次(x-1)²，所以先减1再加1

【练习5】函数y= $x+\dfrac{1}{2(x-1)^2}$ $(x>1)$的最小值为(　)

A. $\frac{5}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2　　E. 3

$$y=x+\frac{1}{2(x-1)^2}=x-1+\frac{1}{2(x-1)^2}+1$$

$$x-1+\frac{1}{2(x-1)^2}=\frac{x-1}{2}+\frac{x-1}{2}+\frac{1}{2(x-1)^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{1}{2(x-1)^2}}=\frac{3}{2}$$

$$y\text{最小值}=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$$

强化 练习题（2009年10月）

B

条件(1)	条件(2)	选项
√	×	A
×	√	B
×	×	C (combine)
(1)+(2) √		
√	√	D (double)
×	×	E (error)
(1)+(2) ×		

【例6】$a+b+c+d+e$ 的最大值是 133。

(1) a，b，c，d，e 是大于 1 的自然数，且 $abcde = 2700$

(2) a，b，c，d，e 是大于 1 的自然数，且 $abcde = 2000$

条件1：为使a+b+c+d+e 尽可能大，则需要这5个数字尽可能分散。

$abcde = 2700 = 27\times100 = 3\times3\times3\times25\times4 = 3\times3\times3\times5\times5\times2\times2$

$= 2\times2\times3\times3\times3\times5\times5$　　一共是5个数字，可以是2、2、3、3、75

最大值=2+2+3+3+75=85　　不充分

条件2：$abcde = 2000 = 20\times100 = 5\times4\times25\times4 = 5\times2\times2\times5\times5\times2\times2$

$= 2\times2\times2\times5\times5\times5$　　一共是5个数字，可以是2、2、2、2、125

最大值=2+2+2+2+125=133　　充分

条件(1)	条件(2)	选项
√	×	A
×	√	B
×	×	C (combine)
(1)+(2) √		
√	√	D (double)
×	×	E (error)
(1)+(2) ×		

练习题（2005年10月）

$(a+b+c)/3=\frac{14}{3}$，$a+b+c=14$

【例7】a,b,c的算术平均值是$\frac{14}{3}$，则几何平均值是4.　**E**

（1）a、b、c是满足$a>b>c>1$的三个整数，b=4.

（2）a、b、c是满足$a>b>c>1$的三个整数，b=2.

条件1：$a+b+c=14$，当b=4时，则$a+c=10$,

$a>4>c>1$，所以c=2或3，当c=2时，$a=8$，几何平均值$=\sqrt[3]{8\times4\times2}=\sqrt[3]{64}=4$

当c=3时，$a=7$，几何平均值$=\sqrt[3]{7\times4\times3}=\sqrt[3]{84}$　**不充分**

条件2：$a+b+c=14$，当b=2时，则$a+c=12$,

$a>2>c>1$，没有满足条件的整数c，**不充分。**

联合：b=4和b=2联合无意义，依然不充分。

平均值总结

（1）基本定理

积定或和定

算术平均值≥几何平均值；　一正、二定、三相等

积定值,和有最小值；

和定值,积有最大值。

正实数

此时有最值，取最值时这n个正实数相等。

$$\frac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots\ldots x_n} \qquad (x_i>0,\ i=1,2,\ \ldots\ldots,n)$$

（2）常用公式

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \quad (a,b\in R^+) \xrightarrow{\text{演变}} \begin{cases} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geq ab \\ a+b\geq 2\sqrt{ab} \end{cases}$$

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc} \quad (a,b,c\in R^+) \xrightarrow{\text{演变}} \begin{cases} \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\geq abc \\ a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc} \end{cases}$$

第十章 数据描述

1 算术平均数、众数、中位数

2 方差与标准差

因为这部分也涉及算术平均数，所以提前一起讲解~

第一节 算术平均数、众数、中位数

n个实数x_1，x_2，……，x_n的**算术平均数**为：$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$

1,2,2,3,4,5,5,5,5,7,8,8,8,9

在 n 个数x_1，x_2，……，x_n中，出现次数最多的数称为**众数。**

1,2,3,4,5　　　　1,2,3,4

将 n 个数x_1，x_2，……，x_n按从小到大的顺序依次排列，当 n 为**奇数**时，处在**最中间**的那个数是这组数据的**中位数**；当 n 为**偶数**时，处在**最中间的两个数的平均数**是这组数据的**中位数。**

第二节 方差与标准差

设 $\bar{x}$ 是 n 个数据x_1，x_2，……，x_n的算术平均数，我们把

$$s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2]$$

叫做这组数据的**方差**。

方差的算术平方根即为这组数据的**标准差**，记为s。

方差、标准差是用来衡量一组数据**波动的大小**，体现了数据的**分散程度**。

第二节 方差与标准差

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2]$$

计算步骤如下：

（1）求出所有数字的平均数，设为$\bar{x}$

（2）求出每个数字与平均数的差，取其差的平方，设为$(x_{\mathrm{i}}-\bar{x})^2$

（3）将所有的平方相加，再次求其平均值。

【例】5个数字：1、2、3、4、5

（1）求平均数，$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$

（2）$(1-3)^2=4$，$(2-3)^2=1$，$(3-3)^2=0$，$(4-3)^2=1$，$(5-3)^2=4$

（3）$s^2=\frac{4+1+0+1+4}{5}=2$

5个连续整数的方差为2（可直接作为结论）。

第二节 方差与标准差

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2]$$

5个连续整数的方差为2（可直接作为结论）。

设这5个连续的整数为$a-2$, $a-1$, a， $a+1$， $a+2$

第一步：求平均数$=\frac{(a-2)+(a-1)+a+(a+1)+(a+2)}{5}=\frac{5a}{5}=a$，

第二步: $[(a-2)-a]^2=(-2)^2=4$，$[(a-1)-a]^2=(-1)^2=1$，$(a-a)^2=0$，

$[(a+1)-a]^2=1^2=4$，$[(a+2)-a]^2=2^2=4$，

第三步：$s^2=\frac{4+1+0+1+4}{5}=\frac{10}{5}=2$

练习题（2017年1月）

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2]$$

【例8】甲、乙、丙三人每轮各投篮10次，投了三轮，投中数如下表：

	第一轮	第二轮	第三轮
甲	2	5	8
乙	5	2	5
丙	8	4	9

$3\sigma_1=(2-5)^2+(8-5)^2=18$

$3\sigma_2=(5-4)^2+(2-4)^2+(5-4)^2=6$

$3\sigma_3=(8-7)^2+(4-7)^2+(9-7)^2=14$

记σ_1，σ_2，σ_3 分别为甲、乙、丙投中数的方差，则（　　）

A. $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$　　B. $\sigma_1>\sigma_3>\sigma_2$　　C. $\sigma_2>\sigma_1>\sigma_3$

D. $\sigma_2>\sigma_3>\sigma_1$　　E. $\sigma_3>\sigma_2>\sigma_1$

极差=最大值−最小值

练习题（2019年1月）

【例9】 10名同学的语文和数学的成绩如表

语文成绩	90	92	94	88	86	95	87	89	91	93
数学成绩	94	88	96	93	90	85	84	80	82	98

语文和数学成绩的均值分别为E_1和E_2，标准差分别为σ_1和σ_2，则（ ）

A: $E_1 > E_2$、 $\sigma_1 > \sigma_2$

B: $E_1 > E_2$、$\sigma_1 < \sigma_2$

C: $E_1 > E_2$、 $\sigma_1 = \sigma_2$

D: $E_1 < E_2$、$\sigma_1 > \sigma_2$

E: $E_1 < E_2$、 $\sigma_1 < \sigma_2$

语文极差=最大值−最小值=95 − 86=9

数学极差=最大值−最小值=98 − 80=18，所以数学的方差更大

练习题（2019年1月）

【例9】10名同学的语文和数学的成绩如表

语文成绩	90	92	94	88	86	95	87	89	91	93
数学成绩	94	88	96	93	90	85	84	80	82	98
语-数	−4	4	−2	−5	−4	10	3	9	9	−5

语文−数学＞0，说明语文的成绩更高。

或者以“90”为基准进行比较

练习题（2016年1月）

<table>
<tr><th>条件(1)</th><th>条件(2)</th><th>选项</th></tr>
<tr><td>√</td><td>×</td><td>A</td></tr>
<tr><td>×</td><td>√</td><td>B</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td><td rowspan="2">C
(combine)</td></tr>
<tr><td colspan="2">(1)+(2) √</td></tr>
<tr><td>√</td><td>√</td><td>D
(double)</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td><td rowspan="2">E
(error)</td></tr>
<tr><td colspan="2">(1)+(2) ×</td></tr>
</table>

【例10】设有两组数据S_1: 3,4,5,6,7和S_2: 4,5,6,7, a，则能确定a的值。

（1）S_1与S_2的均值相等

（2）S_1与S_2的方差相等

A

条件1：由S_1与S_2的均值相等，则$\frac{3+4+5+6+7}{5}=\frac{4+5+6+7+a}{5}$

a=3，确定a值，充分。

条件2：由S_1与S_2的方差相等，且S_1是连续的5个整数，则S_2也应该是连续的5个整数，a=3或a=8

不确定a值，不充分。

练习题（2014年1月）

条件(1)	条件(2)	选项
√	×	A
×	√	B
×	×	C (combine)
(1)+(2) √		
√	√	D (double)
×	×	E (error)
(1)+(2) ×		

【练习11】已知M=$\{a,b,c,d,e\}$是一个整数集合，则能确定集合 M

（1）a、b、c、d、e平均值为10.

（2）a、b、c、d、e的方差为2.

C

条件1：a ,b ,c ,d ,e平均值为10，则a+b+c+d+e =50，

但是并不确定具体每个字母的值。

如a=2,b=8,c=10,d=12,e=18或a=5,b=8,c=10,d=12,e=15等

不确定，不充分。

条件2： a ,b ,c ,d ,e的方差为2，说明是5个连续的整数，但是有很多种情况

不确定，不充分。

联合：5个连续的整数，平均值为10，即c=10

∴确定集合M= {8,9,10,11,12}，充分

练习题（2023年1月）

【练习12】跳水比赛中，裁判给某选手的一个动作打分，其平均值为8.6，方差为1.1，若去掉一个最高得分9.7和去掉一个最低得分7.3，则剩余得分的（　）

A.平均值变小，方差变大

B.平均值变小，方差变小

C.平均值变小，方差不变

D.平均值变大，方差变大

E.平均值变大，方差变小

去掉9.7和7.3，则总分下降17分，而平均分为8.6分，$8.6\times 2=17.2$分

算术平均数与方差总结

（1）算术平均值

n个实数x_1，x_2，……，x_n的**算术平均数**为：$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$

（2）方差

方差：$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2]$

标准差 s：方差的算术平方根。

方差、标准差是用来衡量一组数据**波动的大小**，体现了数据的**分散程度**。

判断方式：极差=最大值−最小值

推论：5个连续整数的方差为2

平均值问题

思路一：杠杆交叉比例法（或列方程）

（1）涉及两类对象的平均值

（2）两种溶液混合成新浓度的溶液

思路二：极限思维

思路三：平均值含义

溶液浓度问题

溶液质量（体积）=溶质质量（体积）+溶剂质量（体积）

$$溶液浓度=\frac{溶质质量（体积）}{溶液质量（体积）}\times 100\%$$

溶质守恒：溶质总量不会随着溶液浓度变化而变化。

（一）算术（应用题）　考点：溶液问题/平均值问题-杠杆交叉比例法

设甲、乙两溶液各取m_1、m_2克，两溶液混合后的溶液质量是（m_1+m_2），且甲、乙两溶液的百分比浓度分别为a%、b%（a%>b%）,混合后的浓度为c%。

根据溶质守恒原理：

$$m_1a\%+m_2b\%=(m_1+m_2)c\%$$

$$m_1a\%+m_2b\%=m_1c\%+m_2c\%$$

$$m_1a\%-m_1c\%=m_2c\%-m_2b\%$$

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{c-b}{a-c}$$

m_1 : a　　　　c-b

C平均数　　甲、乙的**数量比**为（c−b）:(a−c)

m_2 : b　　　　a-c

考点：溶液问题/平均值问题-杠杆交叉比例法

m_1 : a

c−b

C平均数

甲、乙的**数量比**为（c−b）:(a−c)

m_2 : b

a−c

可以看作是3个值，知道2个求最后一个。

练习（2014年1月） 方程法

【例1】某部门在一次联欢活动中共设了26个奖，奖品均价为280元，其中一等奖单价为400元，其他奖品均价为270元，一等奖的个数为（ ）。

A.6　　B.5　　C.4　　D.3　　E.2

设一等奖个数为x个，则：

$$x \times 400 + (26 - x) \times 270 = 26 \times 280$$

即$400x - 270x = 26 \times 280 - 26 \times 270$

解得x=2

练习（2014年1月） 杠杆交叉比例法

【例1】某部门在一次联欢活动中共设了26个奖，奖品均价为280元，其中一等奖单价为400元，其他奖品均价为270元，一等奖的个数为（ ）。

A.6　　B.5　　C.4　　D.3　　E.2

一等奖：400　　　　10

280　　　　一等奖、其他奖品的**数量比**为 1:12

其他奖品：270　　　　120

练习（2013年10月）

【例2】某高校高一年级男生人数占该年级学生人数的40%。在一次考试中，男、女的平均分数为75和80.则这次考试高一年级学生平均分数为（　）

A:76　　B:77　　C:77.5　　D:78　　E:79

男：75　　　　2

x

女：80　　　　3

男、女的**数量比**为 2:3

设特殊值，总人数为10人，男生占比40%，为4人，则女生为6人，$\frac{75\times4+80\times6}{10}=\frac{780}{10}=78$

条件(1)	条件(2)	选项
√	×	A
×	√	B
×	×	C (combine)
(1)+(2) √		
√	√	D (double)
×	×	E (error)
(1)+(2) ×		

练习（2016年1月）

【例3】已知某公司男员工的平均年龄和女员工的平均年龄，则能确定该公司员工的平均年龄。

（1）已知该公司员工的人数

（2）已知该公司男、女员工的人数之比

B

男： a　　　　c-b

C平均数　　男、女的**数量比**为（c−b）:(a−c)

女：b　　　　a-c

条件(1)	条件(2)	选项
√	×	A
×	√	B
×	×	C (combine)
(1)+(2) √		
√	√	D (double)
×	×	E (error)
(1)+(2) ×		

练习（2016年1月）

【例3】已知某公司男员工的平均年龄和女员工的平均年龄，则能确定该公司员工的平均年龄。

（1）已知该公司员工的人数

（2）已知该公司男、女员工的人数之比

B

设男、女员工平均年龄分别为a,b。男、女员工的人数分别为x,y。题干要求$\frac{ax+by}{x+y}$的值能确定.

条件（1）x+y已知，无法推出$\frac{ax+by}{x+y}$的值，条件（1）不充分.

条件（2）$\frac{x}{y}$已知，设$\frac{x}{y}=k$，则$\frac{ax+by}{x+y}=\frac{aky+by}{ky+y}=\frac{ak+b}{k+1}$,可求出最后的数值，条件（2）充分.

练习题（2011年1月）

条件(1)	条件(2)	选项
√	×	A
×	√	B
×	×	C (combine)
(1)+(2) √		
√	√	D (double)
×	×	E (error)
(1)+(2) ×		

【例4】在一次英语考试中，某班的及格率为80%。

（1）男生及格率为70%，女生及格率为90%

（2）男生的平均分与女生的平均分相等

E

条件1

男及格率： 70%　　　　10%

　　　　　80%

女及格率：90%　　　　10%

要想得出最后的及格率是80%，需要男：女=1:1

条件2：仅有平均分，得不到与及格率相关的条件，故不充分。

练习题（2022年1月）

<table>
<tr><th>条件(1)</th><th>条件(2)</th><th>选项</th></tr>
<tr><td>√</td><td>×</td><td>A</td></tr>
<tr><td>×</td><td>√</td><td>B</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td><td rowspan="2">C
(combine)</td></tr>
<tr><td colspan="2">(1)+(2) √</td></tr>
<tr><td>√</td><td>√</td><td>D
(double)</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td><td rowspan="2">E
(error)</td></tr>
<tr><td colspan="2">(1)+(2) ×</td></tr>
</table>

【例5】两个人数不等的班数学测验的平均分不相等，则能确定人数多的班。

（1）已知两个班的平均成绩

（2）已知两个班的总平均值

C

甲班： 平均分 a　　　　| b−c |

总平均分c

乙班：平均分 b　　　　| a−c |

确定人数多，就是看| b−c |与| a−c |的比值

练习题（2013年1月）——解法1　　极限思维

【例6】甲班共有30名学生，在一次满分为100分的考试中，全班的平均成绩为90分，则成绩低于60分的学生至多有（）

A:8名　B:7名　C:6名　D:5名　E:4名

设成绩低于60分的人数为 x，

$$100(30-x)+60x=30\times 90$$

$$3000-100x+60x=2700$$

$$-40x=-300$$

$$x=7.5$$

7.5名学生是当所有低分段均为60的情况，但不能实现，所以最多7人

练习题（2013年1月）——解法2　　极限思维

【例6】甲班共有30名学生，在一次满分为100分的考试中，全班的平均成绩为90分，则成绩低于60分的学生至多有（）

A:8名　　B:7名　　C:6名　　D:5名　　E:4名

30名学生，一张卷子满分为100分，总共是3000分

现在全班平均成绩为90分，总得分为2700分

被扣掉了300分，假设班级除了低于60分的，其余同学都是100分，这样可以“拉”更多同学

那么这300分都是低于60分的同学扣掉的，要想低于60分的同学最多

那么每个人扣的分数要越少　300÷40=7.5

练习题（2015年1月） 极限思维

【例7】在某次考试中，甲、乙、丙三个班的平均成绩分别为80，81和81.5，三个班的学生得分之和为6952，三个班共有学生（ ）

A. 85名　B. 86名　C. 87名　D. 88名　E. 89名

三个班平均成绩一定大于80分，小于81.5分。

若为80分，则总人数为$\frac{6952}{80}=86.9$；

若为81.5分，则总人数为$\frac{6952}{81.5}\approx 85.3$。

所以学生总人数一定是85.3到86.9之间的整数。

练习题（2019年1月）

条件(1)	条件(2)	选项
√	×	A
×	√	B
×	×	C (combine)
(1)+(2) √		
√	√	D (double)
×	×	E (error)
(1)+(2) ×		

【例8】某校理学院五个系每年的录取人数如表： **答案：C**

系别	数学系	物理系	化学系	生物系	地学系
录取人数	60	120	90	60	30

今年与去年相比，物理系的录取平均分没变，则理学院的录取平均分升高了。

（1）数学系的录取平均分升高了3分，生物系的录取平均分降低了2分。

（2）化学系的录取平均分升高了1分，地学系的录取平均分降低了4分。

条件1：不知道化学系和地学系的变动情况，不充分；

条件2：不知道数学系和生物系的变动情况，不充分；

联合：数学系：升3分，物理系：不变；生物系：降2分，化学系：升1分，地学系：降4分

总分数的变动$60\times3+120\times0+90\times1+60\times(-2)+30\times(-4)=30$

总分数提高了，说明平均分也升高了，充分。

练习题（2021年1月）

条件(1)	条件(2)	选项
√	×	A
×	√	B
×	×	C (combine)
(1)+(2) √		
√	√	D (double)
×	×	E (error)
(1)+(2) ×		

【例9】某班增加两名同学，则该班同学的平均身高增加了。

（1）增加的两名同学的平均身高与原来男同学的平均身高相同；

（2）原来男同学的平均身高大于女同学的平均身高；　　C

条件1：无法确定原本该班男生的平均身高和女生的平均身高之间的关系。

若女生的平均身高高于男生，满足条件（1）的情况下，新增加的两位同学会拉低平均值，所以不充分。

条件2：无法确定增加的两名同学的平均身高和**原本**该班男生平均身高与女生平均身高的关系。不充分。

联合：充分。

溶液浓度问题

【例10】若用浓度30%和20%的甲、乙两种食盐溶液配成浓度为24%的食盐溶液500克，则甲、乙两种溶液应各取（ ）

A. 180克和320克　　B. 185克和315克　　C. 190克和310克

D. 195克和305克　　E. 200克和300克

甲：30%　　　　4%

　　　　24%

乙：20%　　　　6%

$\frac{甲}{乙}=\frac{4\%}{6\%}=\frac{2}{3}$

设甲a克，总溶液为500克，

∴ 乙溶液为(500-a)克

溶质守恒

30%a+ 20%× (500-a)= 24%× 500

解得a=200, 500-a=300

练习题（2021年1月）

【例11】现有甲、乙两种浓度的酒精，已知用10升甲酒精和12升乙酒精可以配成浓度为70%的酒精，用20升甲酒精和8升乙酒精可以配成浓度80%的酒精，则甲酒精的浓度为（　　）

A.72%　　B.80%　　C.84%　　D.88%　　E.91%

设甲溶液的浓度为x，乙溶液的浓度为y，

$$10x+12y=70\%\times(10+12)$$
$$20x+8y=80\%\times(20+8)$$

$$5x+6y=7.7$$
$$5x+2y=5.6$$

$$\Rightarrow x=0.91$$

∴甲溶液浓度为91%。

强化溶液浓度问题（2011年10月）

【例12】某种新鲜水果的含水量为98%，一天后的含水量降为97.5%。某商店以每斤1元的价格购进了1000斤新鲜水果，预计当天能售出60%，两天内售完。要使利润维持在20%，则每斤水果的平均售价应定为（　　　）。

A. 1.20　　B. 1.25　　C.1.30　　D. 1.35　　E. 1.40

设1斤水果水分减少后的重量为x斤，水分减少但是果肉是不变的

$1\times2\%=2.5\%x$　解得$x=0.8$　　（原来1斤重的水果水分减少后变为0.8斤）

设每斤水果的平均售价应定为a元

$600a+400\times0.8a=1000\times1\times(1+20\%)$

$a\approx1.3$

强化溶液浓度问题（2013年10月）

【例13】甲、乙、丙三个容器中装有盐水，现将甲容器中盐水的$\frac{1}{3}$倒入乙容器，摇匀后将乙容器中盐水的$\frac{1}{4}$倒入丙容器，摇匀后再将丙容器中盐水的$\frac{1}{10}$倒回甲容器，此时甲、乙、丙三个容器中盐水的含盐量都是9千克，则甲容器中原来的盐水含盐量是（ ）千克。

A. 13　　B. 12.5　　C.12　　D. 10　　E. 9.5

法1：整数特性，因为甲容器中盐水的$\frac{1}{3}$倒入乙容器，只有12能被3整除，答案选C

法2：丙中盐水的$\frac{1}{10}$倒回甲后剩余9千克盐，则丙原来总的盐为$9\div\frac{9}{10}=10$千克

则丙倒入甲的盐为1千克

∵最后三个容器中盐水的含盐量都是9千克

∴甲容器中盐水的$\frac{1}{3}$倒入乙容器后含盐量为8千克

∴甲的盐为$8\div(1-\frac{1}{3})=12$千克

强化溶液浓度问题（2012年10月）

【例14】一满桶纯酒精倒出10升后，加满水搅匀，再倒出4升后，再加满水，此时，桶中的纯酒精与水的体积之比是2:3。则该桶的容积是（ ）升

A. 15　　B. 18　　C.20　　D. 22　　E. 25

设该桶的容积为x升，最初是纯酒精，浓度为100%

倒出10升后加满水后的浓度为：$\dfrac{100\%(x-10)}{x}$

再倒出4升后剩余$(x-4)$升，此时浓度为$\dfrac{100\%(x-10)}{x}$　∴ 溶质为$(x-4)\cdot\dfrac{100\%(x-10)}{x}$

加满水后的浓度为 $\dfrac{(x-4)\cdot\frac{100\%(x-10)}{x}}{x}=\dfrac{2}{2+3}$　解得x=20

$$100\%\times\frac{(x-4)\cdot(x-10)}{x\cdot x}=40\%$$

强化溶液浓度问题（2012年10月）

【例14】一满桶纯酒精倒出10升后，加满水搅匀，再倒出4升后，再加满水，此时，桶中的纯酒精与水的体积之比是2:3。则该桶的容积是（）升

A. 15　　B. 18　　C.20　　D. 22　　E. 25

倒出一定量溶液，再用等量水补满，公式为：

$$原浓度\times\frac{V-a}{V}\times\frac{V-b}{V}=后浓度$$

V指原溶液的体积，a指第一倒出的体积，b指第二次倒出的体积。

$$100\%\times\frac{(V-10)(V-4)}{V^2}=\frac{2}{2+3}$$

直接找特值往里面带，先从中间开始，20正好。

溶液浓度问题（2014年1月）

【**例15**】某容器中装满了浓度为90 %的酒精，倒出1升后用水将容器注满，搅拌均匀后又倒出1升，再用水将容器注满．已知此时的酒精浓度为40%，则该容器的容积是（　　）升

A. 2.5　　B. 3　　C.3.5　　D. 4　　E. 4.5

$$\textbf{原浓度}\times\frac{V-a}{V}\times\frac{V-b}{V}=\textbf{后浓度}$$

$$90\%\times\frac{(V-1)(V-1)}{V^2}=40\%$$

$$\frac{(V-1)^2}{V^2}=\frac{40\%}{90\%}=\frac{4}{9}$$

强化溶液浓度问题（2016年1月）

条件(1)	条件(2)	选项
√	×	A
×	√	B
×	×	C (combine)
(1)+(2) √		
√	√	D (double)
×	×	E (error)
(1)+(2) ×		

【例16】 将2升甲酒精和1升乙酒精混合得到丙酒精，则能确定甲、乙两种酒精的浓度。

E

（1）1升甲酒精和5升乙酒精混合后的浓度是丙酒精浓度的$\frac{1}{2}$倍

（2）1升甲酒精和2升乙酒精混合后的浓度是丙酒精浓度的$\frac{2}{3}$倍

假设甲酒精浓度为x，乙酒精的浓度为y，则丙酒精的浓度为$\frac{2x+y}{3}$

条件1： $\frac{x+5y}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{2x+y}{3}$ 化简得 $x=4y$ 不充分

条件2： $\frac{x+2y}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{2x+y}{3}$ 化简得 $x=4y$ 不充分

联合： $x=4y$ 不确定x、y，不充分

强化分段计费问题（2012年10月）

【例17】某商场在一次活动中规定：一次购物不超过100元时没有优惠，超过100元而没有超过200元时，按该次购物全额9折优惠;超过200元时，其中200元按9折优惠，超过200元的部分按8.5折优惠。若甲乙两人在该商场购买的物品分别付费94.5元和197元，则两人购买的物品在举办活动前需要的付费总额是（ ）元。

A.291.5　　B.314.5　　C.325　　D.291.5或314.5　　E. 314.5或325

价格	折扣
≤100	0%
100~200	全额×0.9
＞200	200×0.9+（x-200）×0.85

94.5分为两种情况：

无优惠：原来消费94.5

有优惠：原来消费94.5÷0.9=105

197分为两部分：

100~200：200×0.9=180　　200+20=220

＞200：（197-180）÷0.85=20

END · Thanks for listening

练习题（2020年1月）

【自行练习18】某人在同一观众群中调查了对五部电影的看法，得到如下数据：

电影	一	二	三	四	五
好	0.25	0.5	0.3	0.8	0.4
差	0.75	0.5	0.7	0.2	0.6

则观众意见分歧最大的前两部影片是（ ）

A. 一三　　B. 二三　　C. 二五　　D. 四一　　E. 四二

观众给出的好评率和差评率**越**接近，则说明观众对电影的意见**越**不统一，即分歧**越**大。

练习（2008年10月）　方程法

【自行练习19】某班有学生36人，期末各科平均成绩为85分以上的为优秀生，若该班优秀生的平均成绩为90分，非优秀生的平均成绩为72分，全班平均成绩为80分，则该班优秀生的人数是（ ）

A:12　　B:14　　C:16　　D:18　　E:20

设优秀生为 a 人，则非优秀生为 $(36-a)$ 人

优秀生总分数+非优秀生总分数=全部总分数

$$90a+72\times(36-a)=80\times36$$

$$a=16$$

练习（2008年10月） 杠杆交叉比例法

【**自行练习19** 】某班有学生36人，期末各科平均成绩为85分以上的为优秀生，若该班优秀生的平均成绩为90分，非优秀生的平均成绩为72分，全班平均成绩为80分，则该班优秀生的人数是（ ）

A:12　　B:14　　C:16　　D:18　　E:20

优秀生： 90　　　　8

80

非优秀生：72　　　　10

优秀生、非优秀生的**数量比**为 8:10=4:5

溶液问题

【自行练习20】含盐12.5%的盐水40千克蒸发掉部分水分后变成了含盐20%的盐水，蒸发掉的水分的重量为（ ）千克。

A.19　　B.18　　C.17　　D.16　　E.15

蒸发前后水中盐的含量是不变的，设蒸发后的盐水重量为xkg。则：

$40 \times 12.5\% = x \times 20\%$

解得：$x=25$

蒸发的水分重量：40-25=15，答案选E

溶质守恒：溶质总量不会随着溶液浓度变化而变化。

分段计费问题（2018年1月）

【自行练习20】某单位采取分段收费的方式收取网络流量(单位:GB)费用,每月流量20（含）以内免费,流量20到30(含)每GB收费1元,流量30到40(含)每GB收费3元，流量40以上的每GB收费5元,小王这个月用了45GB的流量,则他应该交费（　）

A.45元　　B.65元　　C.75元　　D.85元　　E.135元

流量GB	≤20	20＜流≤30	30＜流≤40	40＜流
费用元/GB	0	1	3	5
小王	20	10	10	5
小王费用	0	10	30	25

0+10+30+25=65