



# 管理类联考数学 必修课

## 第二部分：代数

---

### 代数

1

整式与分式

2

集合

3

方程

4

函数

5

不等式

6

数列

## 第二章 整式与分式的运算

---

1

整式及其运算

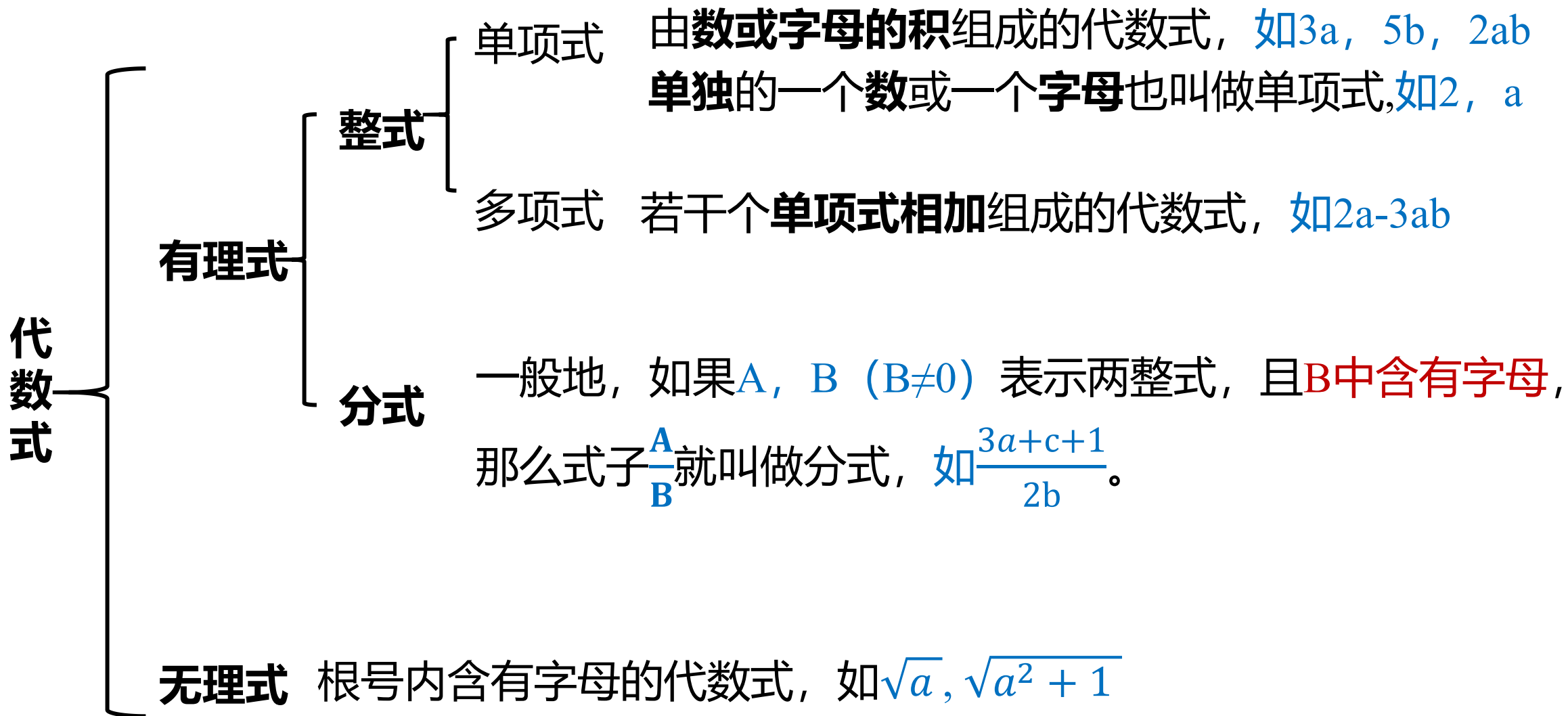
2

分式及其运算

3

重要题型及运算技巧

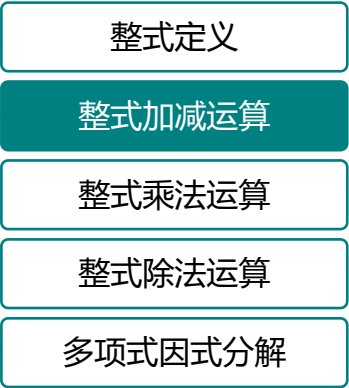
# 第一节 整式及其运算



# 第一节 整式及其运算

## 2.1.2 整式加减运算

整式及其运算



几个整式相加减，有括号的先去括号，然后合并同类项。

如  $(a^2+ab)-(4ab+a^2-b^2)=a^2+ab-4ab-a^2+b^2=b^2-3ab$

**同类项**——必须同时具备的两个条件（缺一不可）：

①所含的**字母**相同；  $2x^2$ 与 $5x^2$ ——同类项

②相同**字母的指数**也相同。  $2x^2$ 与 $5x^3$ ——非同类项

**方法：**把同类项的系数相加，而字母和字母的指数不变。

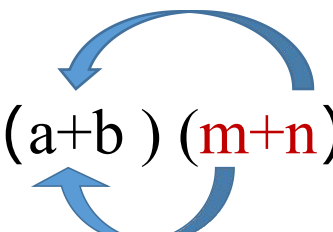
**注意：**去括号时一定要注意**符号**（尤其是负号）的处理。

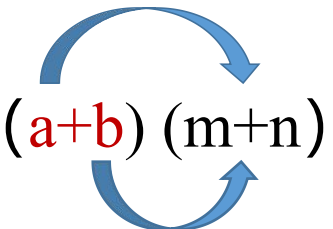
# 第一节 整式及其运算

## 2.1.3 整式乘法运算

整式乘法的运算步骤：

- (1) 一个因式的**每一项**乘以另一个因式的每一项；
- (2) 合并同类项。


$$(a+b)(m+n) = m(a+b) + n(a+b) = am + bm + an + bn$$


$$(a+b)(m+n) = a(m+n) + b(m+n) = am + an + bm + bn$$

整式及其运算

整式定义

整式加减运算

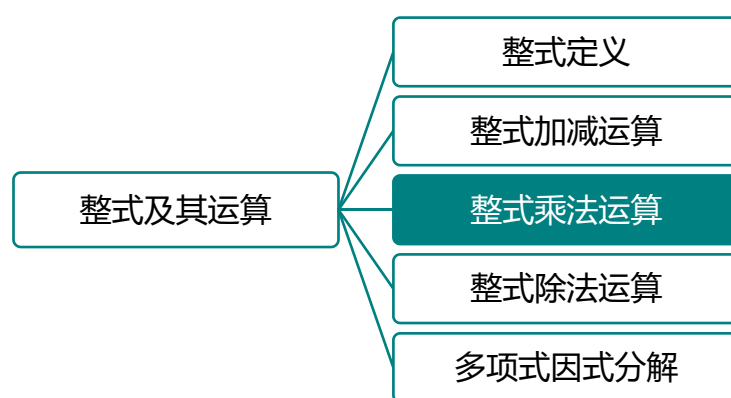
整式乘法运算

整式除法运算

多项式因式分解

# 第一节 整式及其运算

## 2.1.3 整式乘法运算



平方差公式

$$\textcircled{1} (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

完全平方公式

$$\textcircled{2} (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

完全立方公式

$$\textcircled{3} (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

立方和/差公式

$$\textcircled{4} a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

考试时要特别注意当 $a=x$ ,  $b=\frac{1}{x}$ 时, 如 $(x\pm\frac{1}{x})^2=x^2\pm 2+\frac{1}{x^2}$

# 第一节 整式及其运算

整式及其运算

整式定义

整式加减运算

整式乘法运算

整式除法运算

多项式因式分解

## 2.1.3 整式乘法运算 以下为公式的展开过程，请自行查看

①  $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$(a+b)(a-b)$$

$$=a(a+b)-b(a+b)$$

$$=a^2+ab-ab-b^2$$

$$=a^2-b^2$$

②  $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$$

$$=a(a+b)+b(a+b)$$

$$=a^2+ab+ab+b^2$$

$$=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=((a-b)(a-b))$$

$$=a(a-b)-b(a-b)$$

$$=a^2-ab-ab+b^2$$

$$=a^2-2ab+b^2$$



# 第一节 整式及其运算

整式及其运算

整式定义

整式加减运算

整式乘法运算

整式除法运算

多项式因式分解

## 2.1.3 整式乘法运算 以下为公式的展开过程，请自行查看

$$\textcircled{3} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)(a+b)(a+b)$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$

$$= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a-b)(a-b)(a-b)$$

$$= (a^2 - 2ab + b^2)(a-b)$$

$$= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

# 第一节 整式及其运算

整式及其运算

整式定义

整式加减运算

整式乘法运算

整式除法运算

多项式因式分解

## 2.1.3 整式乘法运算 以下为公式的展开过程，请自行查看

$$\textcircled{4} a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$$

$$= (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$$

$$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3a^2b - 3ab^2$$

$$= (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

$$= (a - b)[(a - b)^2 + 3ab]$$

$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

# 整式及其运算

---

以下几个式子可以练习推导一下

**基本公式** 如果 $ab=2$ ,  $a+b=3$ , 求下列各个式子的值。

(1)  $a^2+b^2$

(2)  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$

(3)  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

注意：有分式，想到通分。

# 整式及其运算

---

以下几个式子可以练习推导一下

**基本公式** 如果 $ab=2$ ,  $a+b=3$ , 求下列各个式子的值。

(4)  $a^3+b^3$

(5)  $|a - b|$

(6)  $a^4+b^4$

## 练习题

---

【例1】  $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$  的值为 ( )

A.  $2^{16}-4$

B.  $2^{16}+2$

C.  $2^{16}-2$

D.  $2^{16}+1$

E.  $2^{16}-1$

## 练习题 (2019年1月)

---

【例2】若实数 $a$ 、 $b$ 满足 $ab=6$ ,  $|a+b|+|a-b|=6$ , 则为 $a^2+b^2=$  ( )

- A. 10      B. 11      C. 12      D. 13      E. 14

## 练习题 (2018年1月)

---

【练习3】 设实数 $a, b$ 满足 $|a - b| = 2$ ,  $|a^3 - b^3| = 26$ , 则  $a^2 + b^2 =$  ( )

A. 30

B. 22

C. 15

D. 13

E. 10

# 强化练习题(2014年1月)

【例4】 设x是非零实数， 则  $x^3+\frac{1}{x^3}=18$

(1)  $x+\frac{1}{x}=3$

(2)  $x^2+\frac{1}{x^2}=7$

条件(1)	条件(2)	选项
√	×	A
×	√	B
×	×	C (combine )
(1)+(2) √		
√	√	D (double )
×	×	E (error )
(1)+(2) ×		



## 强化 练习题(2020年1月)

---

【练习5】 已知实数 $x$ 满足 $x^2 + \frac{1}{x^2} - 3x - \frac{3}{x} + 2 = 0$ , 则  $x^3 + \frac{1}{x^3} = ( \quad )$

A. 12

B. 15

C. 18

D. 24

E. 27

# 总结

## (1) 整式加减运算

有括号的先去括号，再合并同类项。

**注意：**去括号时一定要注意符号（尤其是负号）的处理。

## (2) 整式乘法运算

运算步骤：

(1) 一个因式的每一项乘以另一个因式的每一项；

平方差公式

$$\textcircled{1} (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

(2) 合并同类项。完全平方公式

$$\textcircled{2} (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

完全立方公式

$$\textcircled{3} (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

立方和/差公式

$$\textcircled{4} a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

考试时要特别注意当 $a=x$ ,  $b=\frac{1}{x}$ 时, 如 $(x\pm\frac{1}{x})^2=x^2\pm 2+\frac{1}{x^2}$

# 第一节 整式及其运算

## 2.1.4 整式除法运算

### 整除

$$\text{被除数} = \text{除数} \times \text{商} + \text{余数}$$

$$\text{被除式} = \text{除式} \times \text{商式} + \text{余式}$$

当 $F(x)$ 能被 $f(x)$ 整除，商为 $g(x)$ 时，则有 $F(x) = f(x) g(x)$

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$$

### 非整除

当 $F(x)$ 除以 $f(x)$ ，商为 $g(x)$ ，余式为 $r(x)$ 时，则有 $F(x) = f(x) g(x) + r(x)$ .

$$x^2 + x + 1 = (x - 1)(x + 2) + 3$$

整式及其运算

整式定义

整式加减运算

整式乘法运算

整式除法运算

多项式因式分解

# 第一节 整式及其运算

## 2.1.4 整式除法运算

### 整除与非整除

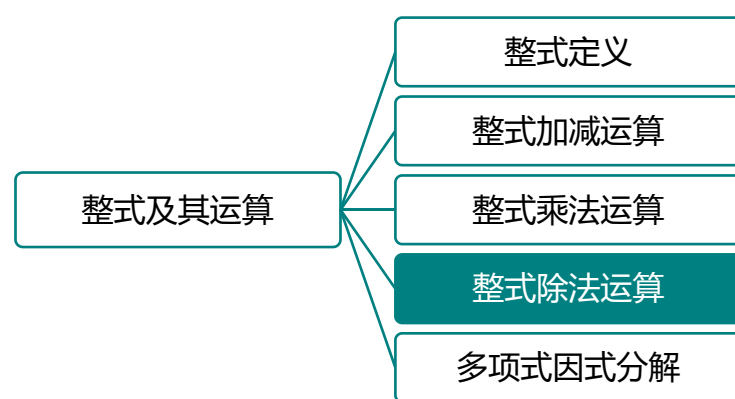
#### 因式定理——整除

设被除式为  $F(x)$ ，除式为  $(x - a)$ ，商为  $q(x)$ ，则有  $F(x) = (x - a) \cdot q(x)$

当  $x=a$  时，有  $F(x) = F(a) = (a - a) \cdot q(x) = 0$

如若  $F(x)$  能被  $(x - 3)$  整除，则  $F(x) = (x - 3) \cdot q(x)$ ，

当  $x=3$  时，有  $F(x) = F(3) = (3 - 3) \cdot q(3) = 0$



# 第一节 整式及其运算

## 2.1.4 整式除法运算

### 整除与非整除

#### 余式定理——非整除

设被除式为  $F(x)$ , 除式为  $g(x) = (x - a)$ , 商为  $q(x)$ , 余式为  $r(x)$ , 则有

$$F(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x)$$

当  $x=a$  时, 有  $F(x) = F(a) = (a - a) \cdot q(a) + r(a)$  即余式  $F(a) = r(a)$

如:  $x^2 + x + 1$  除以  $(x - 1)$  的余式为  $F(1) = 3$

$$x^2 + x + 1 = (x - 1)(x + 2) + 3$$

**解题关键: 令除式=0**

$$\text{被除数} = \text{除数} \times \text{商} + \text{余数}$$

$$\text{被除式} = \text{除式} \times \text{商式} + \text{余式}$$

整式及其运算

整式定义

整式加减运算

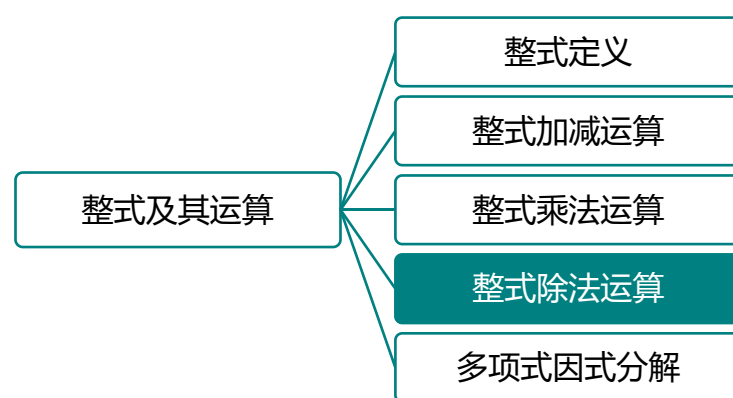
整式乘法运算

整式除法运算

多项式因式分解

# 第一节 整式及其运算

## 2.1.4 整式除法运算



**余式定理** 是指当一个多项式 $F(x)$  除以多项式 $(x - a)$  的余式是  $F(a)$ 。

令除式=0, 将x的值代入

**推论：** 多项式 $F(x)$ 除以因式  $ax - b$  所得的余式一定是 $F(\frac{b}{a})$

$$F(x) = (ax - b) \cdot q(x) + r(x)$$

$$F(\frac{b}{a}) = (a \cdot \frac{b}{a} - b) \cdot q(\frac{b}{a}) + r(\frac{b}{a}) = r(\frac{b}{a})$$

## 练习题

---

【例6】代数式 $5x^3+mx^2+x+5$ 除以 $x+1$ ，余式是5，则 $m=$ （ ）

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

E. 6

## 练习题(2007年变形)

---

【例7】已知 $x^3 + 3x^2 - 3x + k$ 有一个因式是 $x + 1$ , 则  $k = ( )$

- A.  $-5$       B.  $3$       C.  $-4$       D.  $-10$       E.  $10$



## 练习题（模拟题）

---

**【练习8】** 已知多项式 $f(x)$ 除以 $x+2$ 所得余数为1，除以 $x+3$ 所得余数为-1，则多项式 $f(x)$ 除以 $(x+2)(x+3)$ 所得的余式是（ ）

- A.  $2x-5$       B.  $2x+5$       C.  $x-1$       D.  $x+1$       E.  $2x-1$

# 第一节 整式及其运算

整式及其运算

整式定义

整式加减运算

整式乘法运算

整式除法运算

多项式因式分解

## 2.1.5 多项式的因式分解

把一个多项式表示成几个整式乘积的形式，叫做多项式的因式分解。

如  $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

多项式因式分解的常用方法如下：

**方法一：提取公因式法。**

**公因式：**多项式中各项都含有的相同的因式，

即各项中系数的最大公约数与相同字母的最低次幂的乘积。

如：  $2x^3 + 6x^2 + 8x = 2x(x^2 + 3x + 4)$

# 第一节 整式及其运算

## 2.1.5 多项式的因式分解

### 方法二：公式法

平方差公式

$$\textcircled{1} (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

完全平方公式

$$\textcircled{2} (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

完全立方公式

$$\textcircled{3} (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

立方和/差公式

$$\textcircled{4} a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

整式及其运算

整式定义

整式加减运算

整式乘法运算

整式除法运算

多项式因式分解

# 第一节 整式及其运算

## 2.1.5 多项式的因式分解

### 方法三：十字相乘法

$$x^2+px+q= (x+a)(x+b) = x^2+ (a+b) x+ab$$

$$p= a+b, \quad q=ab$$

x

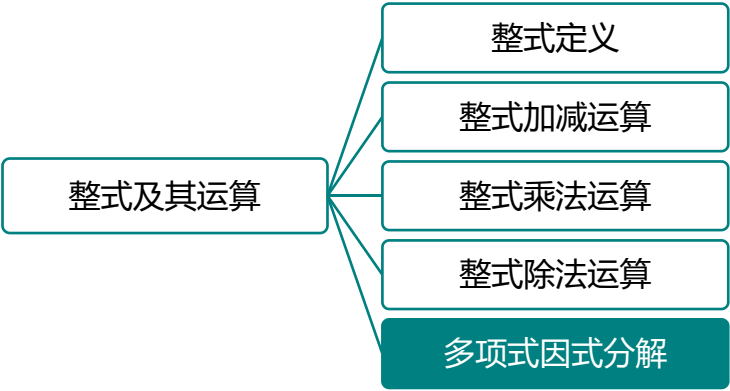
x

a

b

---

$px=ax+bx$



# 第一节 整式及其运算

## 2.1.5 多项式的因式分解

### 方法三：十字相乘法

$$X^2 - 8x + 15 = (x - 5)(x - 3)$$



$$\begin{array}{cc} x & -5 \\ x & -3 \end{array}$$

$$(-3x) + (-5x) = -8x$$

$$3x + 5x = 8x$$

$$15x + x = 16x$$

$$\begin{array}{cc} x & a \\ x & b \end{array}$$

---

$$p = a + b$$

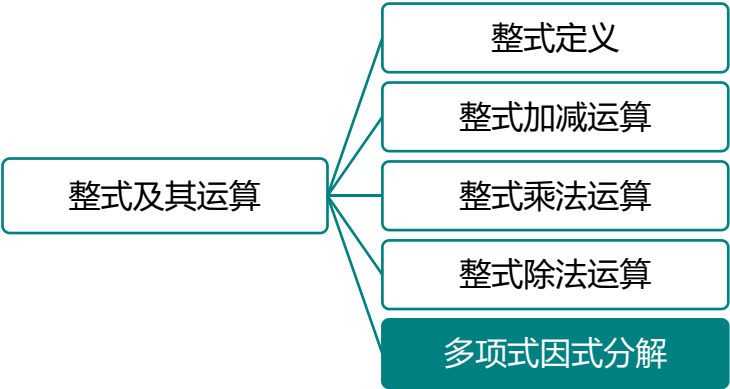
$$5$$

$$15$$

$$3$$

$$1$$

**十字相乘法：拆头拆尾凑中间，要连着正负号一起拆分。**



# 第一节 整式及其运算

## 2.1.5 多项式的因式分解

### 方法三：十字相乘法

$$6X^2+19x+15= (2x+3)(3x+5)$$



$$\begin{array}{cc} 2x & \times & 3 \\ 3x & \times & 5 \end{array}$$

$$10x+9x=19x$$

**注意：**

涉及到因式分解的问题，首先考虑**首尾项检验法**！！

即：原式**最高次项系数**，一定等于各因式的最高次项系数之积；

原式的**常数项**，一定等于各因式常数项之积。

整式及其运算

整式定义

整式加减运算

整式乘法运算

整式除法运算

多项式因式分解

$$\begin{array}{cc} x & \times & a \\ x & \times & b \end{array}$$

$$p=a+b$$

## 方法三：十字相乘法练习题

---

$$(1) \quad X^2 - 7x + 6 = (x-6)(x-1)$$

$$(2) \quad 18X^2 - 21x + 5 = (3x-1)(6x-5)$$

$$(3) \quad 2X^2 + 3x + 1 = (x+1)(2x+1)$$

$$(4) \quad 6X^2 - 13x + 6 = (2x-3)(3x-2)$$

$$(5) \quad 6X^2 - 11x + 3 = (2x-3)(3x-1)$$

$$(6) \quad 10X^2 - 21x + 2 = (x-2)(10x-1)$$

$$(7) \quad 5X^2 - 8x - 13 = (x+1)(5x-13)$$

$$(8) \quad 4X^2 + 4x - 15 = (2x+5)(2x-3)$$

# 第一节 整式及其运算

## 2.1.5 多项式的因式分解

方法四：求根法（简单了解即可）

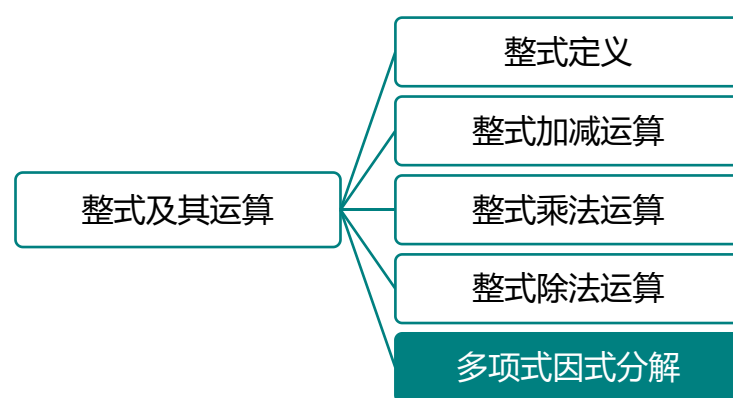
例：已知  $3x^2 - 2x - 8 = 0$  的两根为 2 和  $-\frac{4}{3}$

要能够写出这个式子：  $3x^2 - 2x - 8 = (3x+4)(x-2)$

$$(x-2)(x+\frac{4}{3}) = 0$$

$$3(x-2)(x+\frac{4}{3}) = 0$$

$$(x-2)(3x+4) = 0$$





## 练习题(2010年1月)

---

【例9】多项式  $x^3 + ax^2 + bx - 6$  的两个因式是  $x - 1$  和  $x - 2$ , 则第三个一次因式为 ( )

- A.  $x-6$       B.  $x-3$       C.  $x+1$       D.  $x+2$       E.  $x+3$

## 练习题（模拟题）

---

【例10】若  $x^2-3x+2xy+y^2-3y-40=(x+y+m)(x+y+n)$ , 且  $m < n$ , 则  $m, n$  的值分别为 ( ).

A. 5; 8

B. 8; -5

C. -8; 5

D. -8; -5

E. -8; 3

## 强化 练习题 (2009年10月)

---

【练习11】 若二次三项式  $x^2+x-6$  是多项式  $2x^4 + x^3 - ax^2+bx+a+b-1$  的一个因式。

(1)  $a=16$

(2)  $b=2$

# 练习题

【练习12】  $x - 2$  是多项式  $f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + b$  的因式.

- (1)  $a = 1, b = 2$ .
- (2)  $a = 2, b = 3$ .

条件(1)	条件(2)	选项
√	×	A
×	√	B
×	×	C (combine)
(1)+(2) √		
√	√	D (double)
×	×	E (error)
(1)+(2) ×		

## 练习题(2012年1月)

---

**【练习13】** 若  $x^3+x^2+ax+b$  能被  $x^2-3x+2$  整除, 则 ( )

A.  $a=4, b=4$

B.  $a=-4, b=-4$

C.  $a=10, b=-8$

D.  $a=-10, b=8$

E.  $a=-2, b=0$

# 总结

---

## (3) 整式除法运算

余式定理——非整除

因式定理——整除

解题关键——除式为0

## (4) 因式分解

方法1：提取公因式法；

方法2：公式法；



方法3：十字相乘法；

首尾项检验法

方法4：求根法。

# 整式除法运算延伸

## 竖式除法

计算:  $(4x^3 + 5x^2 - 3x - 8) \div (x^2 + 2x + 1)$

$$\begin{array}{r} 4x - 3 \\ x^2 + 2x + 1 \overline{) 4x^3 + 5x^2 - 3x - 8} \\ \underline{4x^3 + 8x^2 + 4x} \phantom{- 8} \\ -3x^2 - 7x - 8 \\ \underline{-3x^2 - 6x - 3} \\ -x - 5 \end{array}$$

商式

被除式

除式

余式

$$\text{则: } (4x^3 + 5x^2 - 3x - 8) = (4x - 3)(x^2 + 2x + 1) + (-x - 5)$$

# 整式除法运算延伸

## 竖式除法

计算:  $(x^2 + x + 1) \div (x - 1)$

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ x - 1 \overline{) x^2 + x + 1} \\ \underline{x^2 - x} \phantom{+ 1} \\ 2x + 1 \\ \underline{2x - 2} \\ 3 \end{array}$$

即  $x^2 + x + 1 = (x - 1)(x + 2) + 3$



## 第二章 整式与分式的运算

---

1

整式及其运算

2

分式及其运算

3

重要题型及运算技巧

## 第二节 分式及其运算

分式定义

分式的基本性质

分式的运算

解分式方程

分式及其运算

### 2.2.1 分式的定义

若A,B表示两个整式，且 **$B \neq 0$** ，B中含有字母，则称 $\frac{A}{B}$ 是分式。

$\frac{2x}{2y}$  ( $y \neq 0$ ) 是分式。

$\frac{2x}{3}$  不是分式，这是整式中的单项式

## 第二节 分式及其运算

分式及其运算

分式定义

分式的基本性质

分式的运算

解分式方程

### 2.2.2 分式的基本性质

分式的分子和分母同乘以（或除以）**同一个不为零**的式子，分式的**值不变**，即有

$$\frac{A}{B} = \frac{mA}{mB} (m \neq 0)$$

分式的基本性质主要应用在分式的**通分和约分**上。

**通分**：把几个**异分母的分式**分别化成与原本的分式相等的**同分母的分式**；

**约分**：把一个分式的分子与分母的**所有公因式约去**。

## 第二节 分式及其运算

分式定义

分式的基本性质

分式的运算

解分式方程

分式及其运算

### 2.2.2 分式的基本性质

通分

$$\frac{2x}{x-5} \text{ 与 } \frac{3x}{x+5}$$

$$\frac{2x}{x-5} = \frac{2x(x+5)}{(x-5)(x+5)}$$

$$\frac{3x}{x+5} = \frac{3x(x-5)}{(x+5)(x-5)}$$

约分 (分母不等于0)

$$\frac{-32a^3b^2c}{24a^2b^3d} \text{ 与 } \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$$

$$\frac{-32a^3b^2c}{24a^2b^3d} = \frac{-4ac}{3bd}$$

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}$$

当分子分母是多项式的时候，先进行因式分解，再约分。

## 第二节 分式及其运算

### 2.2.3 分式的运算

#### (1) 加减运算

**同分母**的几个分式相加减，分母不变，分子相加减；

$$\frac{2a}{a+b} + \frac{3b}{a+b} = \frac{2a+3b}{a+b}$$

**不同分母**的几个分式相加减，取这几个分式分母的公分母作分母，通分后化为同分母分式的加减运算。

$$\frac{2a}{a+b} - \frac{3b}{a(a+b)} = \frac{a \cdot 2a}{a(a+b)} - \frac{3b}{a(a+b)} = \frac{2a^2 - 3b}{a(a+b)}$$

分式及其运算

分式定义

分式的基本性质

分式的运算

解分式方程

## 第二节 分式及其运算

分式定义

分式的基本性质

分式及其运算

分式的运算

解分式方程

### 2.2.3 分式的运算

#### (2) 乘除运算

几个分式**相乘**，分子乘分子，分母乘分母。
$$\frac{2a}{a+b} \times \frac{3b}{a+b} = \frac{6ab}{(a+b)^2}$$
  
(分式的乘法运算满足交换律、结合律和分配律。)

两个分式**相除**，将除式的分子分母颠倒变为乘法运算。

**除以一个数等于乘以这个数的倒数**

$$\frac{a^2-2ab+b^2}{4a^2-b^2} \div \frac{a-b}{2a+b} = \frac{(a-b)^2}{(2a+b)(2a-b)} \times \frac{2a+b}{a-b} = \frac{a-b}{2a-b}$$

## 第二节 分式及其运算

分式定义

分式的基本性质

分式及其运算

分式的运算

解分式方程

### 2.2.3 解分式方程

$$\frac{x+4}{x^2+2x} - \frac{1}{x+2} = 1 + \frac{2}{x}$$

两边都乘公分母  $x(x+2)$

$$(x+4) - x = x(x+2) + 2(x+2)$$

$$4 = x^2 + 2x + 2x + 4$$

$$x^2 + 4x = 0$$

$$x=0 \text{ 或 } x=-4$$

经检验,  $x=0$ 代入原方程, 分母为0, 所以 $x=0$ 是增根。

# 总结

---

## (1) 定义

$\frac{A}{B}$ , A、B为整式, B中含有字母, 且 $B \neq 0$

## (2) 分式的基本性质

**通分与约分**: 当分子分母是多项式时, 先进行因式分解, 再约分。

## (3) 分式的运算

**加减**运算: 注意区分分母相同和分母不同

**乘除**运算

## (4) 解分式方程

注意**增根**: 其实就是要注意**分母不为0**





## 第二章 整式与分式的运算

---

1

整式及其运算

2

分式及其运算

3

重要题型及运算技巧

# 基本分式补充

---

$$\textcircled{5} (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$$

$$\textcircled{6} \frac{(a+b)^2+(b+c)^2+(a+c)^2}{2} = a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac$$

$$\textcircled{7} \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2}{2} = a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$$

**推论：**若  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ ，则  $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2$

$$\therefore \frac{bc+ac+ab}{abc} = 0 \text{ 且分母 } abc \neq 0, \therefore bc + ac + ab = 0 \therefore (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2$$

## 练习题 (2010年前)

---

【例14】若 $\triangle ABC$ 的三边为 $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，满足 $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$ ，则 $\triangle ABC$ 为（ ）

- A. 等腰三角形
- B. 直角三角形
- C. 等边三角形
- D. 等腰直角三角形
- E. 以上选项均不正确

## 强化练习题 (2010年1月)

---

【例15】 设实数 $x$ 、 $y$ 满足 $x^2 - 4xy + 4y^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{3}y - 6 = 0$ , 求 $x + y$ 的最大值 ( )

- A. 2                      B. 3                      C.  $2\sqrt{3}$                       D.  $3\sqrt{2}$                       E.  $3\sqrt{3}$

## 强化练习题 (2022年1月)

---

【练习16】 设 $x$ 、 $y$ 为实数, 则 $f(x,y)=x^2+4xy+5y^2-2y+2$ 的最小值 ( )

A. 1

B.  $\frac{1}{2}$

C. 2

D.  $\frac{3}{2}$

E. 3

## 练习题（模拟题）

---

【练习17】 已知 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 是不完全相等的任意实数，有 $x=a^2-bc$ ,  $y=b^2-ac$ ,  $z=c^2-ab$ , 则 $x,y,z$  ( )

- A. 都大于0
- B. 至少有一个大于0
- C. 至少有一个小于0
- D. 都小于0
- E. 以上都不正确

## 进阶练习题 (2010年10月)

---

【例18】 若实数 $a, b, c$  满足 $a^2+b^2+c^2=9$ , 则代数式 $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$ 的最大值是 ( )

- A. 21      B. 27      C. 29      D. 32      E. 39

## 练习题（模拟题）

---

【练习19】 已知实数 $x$ 、 $y$ ， 则  $x^2+y^2-2x+12y+40$  的最小值为（ ）

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4



### 2.3.1 关于 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

---

**推论：**若  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ ，则  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$$\because \frac{bc+ac+ab}{abc} = 0 \text{ 且分母 } abc \neq 0, \therefore bc + ac + ab = 0 \quad \therefore (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

**【例20】** 已知  $a+b+c=-3$ ，且  $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+3} = 0$ ，则  $(a+1)^2 + (b+2)^2 + (c+3)^2$  的值为 ( )

- A.9      B.16      C.4      D.25      E.36

## 2.3.1 关于 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

**推论：**若  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ ，则  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

若  $a+b+c=k$ ，则  $a^2 + b^2 + c^2 = k^2$ 。

如果想要知道  $a^2 + b^2 + c^2$  的值，需要知道  $a+b+c$  的值。

总结：若  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ ，  
           $a+b+c=k$ ，则  $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 = k^2$ 。

互为倒数。

# 进阶 练习题

【例21】  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  成立

(1)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

(2)  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$

条件(1)	条件(2)	选项
√	×	A
×	√	B
×	×	C (combine )
(1)+(2) √		
√	√	D (double )
×	×	E (error )
(1)+(2) ×		

## 2.3.2 求高次代数式

---

形如  $x + \frac{1}{x} = a$  或  $x^2 + ax + 1 = 0$  , 求高次代数式的问题. (降次)

$x + \frac{1}{x} = a$       两边同时乘以  $x$ , 为  $x^2 + 1 = ax$ ,  $x^2 = ax - 1$

$x^2 + ax + 1 = 0$       整理成  $x^2 = -ax - 1$  形式

将  $x^2$  代入整式, 迭代降次即可。

## 练习题(示范)

---

**【例22】** 已知  $x^2 - 3x - 1 = 0$ , 则多项式  $3x^3 - 11x^2 + 3x + 3$  的值为 ( )

- A. -1      B. 0      C. 1      D. 2      E. 3

## 练习题 (2010年10月)

---

**【例23】** 若 $x + \frac{1}{x} = 3$ , 则  $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = ( \quad )$

- A.  $-\frac{1}{8}$       B.  $\frac{1}{6}$       C.  $\frac{1}{4}$       D.  $-\frac{1}{4}$       E.  $\frac{1}{8}$

## 强化 练习题 (2023年1月)

---

【例24】 设 $x$ 为正实数，则 $\frac{x}{8x^3+5x+2}$ 的最大值为 ( )

A.  $\frac{1}{15}$

B.  $\frac{1}{11}$

C.  $\frac{1}{9}$

D.  $\frac{1}{6}$

E.  $\frac{1}{5}$

# 总结

$$\textcircled{5} (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$$

## (1) 基本公式补充

$$\textcircled{6} \frac{(a+b)^2+(b+c)^2+(a+c)^2}{2} = a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac$$

$$\textcircled{7} \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2}{2} = a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$$

## (2) 关于 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

**推论：**若  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ ，则  $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2$

总结：若  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ ，  
 $a+b+c=k$ ，则  $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 = k^2$ 。

互为倒数。

## (3) 求高次代数式

$$x + \frac{1}{x} = a \quad \text{两边同时乘以} x, \text{ 为 } x^2+1=ax, x^2=ax-1$$

$$x^2+ax+1=0 \quad \text{整理成 } x^2=-ax-1 \text{ 形式}$$



END • Thanks for listening