管理类联考数学
必修课

第二部分：代数

代数

1. 整式与分式
2. 集合
3. 方程
4. 函数
5. 不等式
6. 数列

第二章 整式与分式的运算

1 整式及其运算

2 分式及其运算

3 重要题型及运算技巧

第一节 整式及其运算

代数式

- **有理式**
  - **整式**
    - 单项式：由**数或字母的积**组成的代数式，如3a，5b，2ab
      单独的一个**数**或一个**字母**也叫做单项式,如2，a
    - 多项式：若干个**单项式相加**组成的代数式，如2a-3ab
  - **分式**：一般地，如果A，B（B≠0）表示两整式，且B中含有字母，那么式子$\frac{A}{B}$就叫做分式，如$\frac{3a+c+1}{2b}$。
- **无理式**：根号内含有字母的代数式，如$\sqrt{a}$, $\sqrt{a^2+1}$

第一节 整式及其运算

2.1.2 整式加减运算

几个整式相加减，有括号的先去括号，然后合并同类项。

如 $(a^2+ab)-(4ab+a^2-b^2)=a^2+ab-4ab-a^2+b^2=b^2-3ab$

同类项——必须同时具备的两个条件（缺一不可）：

①所含的**字母**相同；　　$2x^2$与$5x^2$——同类项

②相同**字母的指数**也相同。　　$2x^2$与$5x^3$——非同类项

方法：把同类项的系数相加，而字母和字母的指数不变。

注意：去括号时一定要注意符号（尤其是负号）的处理。

第一节 整式及其运算

2.1.3 整式乘法运算

整式乘法的运算步骤：

（1）一个因式的每一项乘以另一个因式的每一项；

（2）合并同类项。

$$(a+b)(m+n)=m(a+b)+n(a+b)=am+bm+an+bn$$

$$(a+b)(m+n)=a(m+n)+b(m+n)=am+an+bm+bn$$

第一节 整式及其运算

2.1.3 整式乘法运算

平方差公式 ① $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

完全平方公式 ② $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

完全立方公式 ③ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

立方和/差公式 ④ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

考试时要特别注意当$a=x$，$b=\frac{1}{x}$时，如$(x\pm\frac{1}{x})^2=x^2\pm 2+\frac{1}{x^2}$

第一节 整式及其运算

2.1.3 整式乘法运算 以下为公式的展开过程，请自行查看

① $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

② $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)$

$=a(a+b)-b(a+b)$

$=a^2+ab-ab-b^2$

$=a^2-b^2$

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$

$=a(a+b)+b(a+b)$

$=a^2+ab+ab+b^2$

$=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=((a-b)(a-b)$

$=a(a-b)-b(a-b)$

$=a^2-ab-ab+b^2$

$=a^2-2ab+b^2$

第一节 整式及其运算

2.1.3 整式乘法运算 以下为公式的展开过程，请自行查看

③ $(a+b)^3= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)(a+b)(a+b)$

$=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$

$=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$

$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a-b)(a-b)(a-b)$

$=(a^2-2ab+b^2)(a-b)$

$=a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)$

$=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

第一节 整式及其运算

2.1.3 整式乘法运算 以下为公式的展开过程，请自行查看

④ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$\begin{aligned}a^3+b^3 &= (a+b)^3-3a^2b-3ab^2\\ &= (a+b)^3-3ab(a+b)\\ &= (a+b)[(a+b)^2-3ab]\\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2)\end{aligned}$$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$\begin{aligned}a^3-b^3 &= (a-b)^3+3a^2b-3ab^2\\ &= (a-b)^3+3ab(a-b)\\ &= (a-b)[(a-b)^2+3ab]\\ &= (a-b)(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$

整式及其运算

以下几个式子可以练习推导一下

基本公式　如果ab=2，a+b=3，求下列各个式子的值。

（1）a^2+b^2

(2) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$

(3) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

注意：有分式，想到通分。

整式及其运算

以下几个式子可以练习推导一下

基本公式　　如果ab=2，a+b=3，求下列各个式子的值。

（4）a^3+b^3

（5）$|a-b|$

（6）a^4+b^4

练习题

【例1】 $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$的值为（　　　　）

A. $2^{16}-4$　　B. $2^{16}+2$　　C. $2^{16}-2$　　D. $2^{16}+1$　　E. $2^{16}-1$

练习题（2019年1月）

【例2】若实数a、b满足$ab=6$, $|a+b|+|a-b|=6$,则为$a^2+b^2=$（ ）

A．10　B．11　C．12　D．13　E. 14

练习题（2018年1月）

【练习3】设实数a，b满足$|a-b|=2$，$|a^3-b^3|=26$，则 $a^2+b^2=$（　　）

A. 30　　B. 22　　C. 15　　D. 13　　E. 10

强化练习题(2014年1月)

【例4】 设x是非零实数，则 $x^3+\frac{1}{x^3}=18$

（1）$x+\frac{1}{x}=3$

（2）$x^2+\frac{1}{x^2}=7$

<table>
<tr><th>条件(1)</th><th>条件(2)</th><th>选项</th></tr>
<tr><td>√</td><td>×</td><td>A</td></tr>
<tr><td>×</td><td>√</td><td>B</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td><td rowspan="2">C
(combine)</td></tr>
<tr><td colspan="2">(1)+(2) √</td></tr>
<tr><td>√</td><td>√</td><td>D
(double)</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td><td rowspan="2">E
(error)</td></tr>
<tr><td colspan="2">(1)+(2) ×</td></tr>
</table>

强化 练习题(2020年1月)

【练习5】已知实数x满足$x^2+\frac{1}{x^2}-3x-\frac{3}{x}+2=0$，则 $x^3+\frac{1}{x^3}=$（　）

A. 12　　B. 15　　C. 18　　D. 24　　E. 27

总结

（1）整式加减运算

有括号的先去括号，再合并同类项。

注意：去括号时一定要注意符号（尤其是负号）的处理。

（2）整式乘法运算

运算步骤：

（1）一个因式的每一项乘以另一个因式的每一项；

（2）合并同类项。

平方差公式　① $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

完全平方公式　② $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

完全立方公式　③ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

立方和/差公式　④ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

考试时要特别注意当$a=x$，$b=\frac{1}{x}$时，如$(x\pm\frac{1}{x})^2=x^2\pm 2+\frac{1}{x^2}$

第一节 整式及其运算

2.1.4 整式除法运算

被除数=除数×商+余数

被除式=除式×商式+余式

整除

当F(x)能被f(x)整除，商为g(x)时，则有F(x)= f(x) g(x)

$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

非整除

当F(x)除以f(x)，商为g(x)，余式为r(x)时，则有F(x)= f(x) g(x)+ r(x).

$x^2+x+1=(x-1)(x+2)+3$

第一节 整式及其运算

2.1.4 整式除法运算

整除与非整除

因式定理——整除

设被除式为 $F(x)$，除式为（$x-a$），商为 $q(x)$，则有 $F(x)=(x-a)\cdot q(x)$

当$x=a$时， 有$F(x)=F(a)=(a-a)\cdot q(x)=0$

如若$F(x)$ 能被（$x-3$）整除，则 $F(x)=(x-3)\cdot q(x)$,

当$x=3$时， 有$F(x)=F(3)=(3-3)\cdot q(3)=0$

第一节 整式及其运算

2.1.4 整式除法运算

被除数=除数×商+余数

被除式=除式×商式+余式

整除与非整除

余式定理——非整除

设被除式为 $F(x)$, 除式为 $g(x)=(x-a)$,商为 $q(x)$，余式为 $r(x)$，则有

$$F(x)=(x-a)\cdot q(x)+r(x)$$

当$x=a$时，有$F(x)=F(a)=(a-a)\cdot q(a)+r(a)$ 即余式$F(a)=r(a)$

如：x^2+x+1除以$(x-1)$的余式为$F(1)=$ 3

$$x^2+x+1=(x-1)(x+2)+3$$

解题关键：令除式=0

2.1.4 整式除法运算

整式定义
整式加减运算
整式及其运算
整式乘法运算
整式除法运算
多项式因式分解

余式定理 是指当一个多项式F(x) 除以多项式(x – a) 的余式是 F(a)。

令除式=0， 将x的值代入

推论：多项式F(x)除以因式 ax – b 所得的余式一定是F($\frac{b}{a}$)

$$F(x)=(ax-b)\cdot q(x)+r(x)$$

$$F\left(\frac{b}{a}\right)=\left(a\cdot\frac{b}{a}-b\right)\cdot q\left(\frac{b}{a}\right)+r\left(\frac{b}{a}\right)=r\left(\frac{b}{a}\right)$$

练习题

【例6】代数式$5x^3+mx^2+x+5$ 除以$x+1$，余式是5，则$m=$（ ）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5　　E. 6

练习题(2007年变形)

【例7】已知x^3+3x^2-3x+k有一个因式是 $x+1$，则 $k=$（ ）

$A.\ -5$　　B. 3　　C. -4　　D. -10　　E. 10

练习题（模拟题）

【练习8】已知多项式$f(x)$除以$x+2$所得余数为1，除以$x+3$所得余数为-1，则多项式$f(x)$除以$(x+2)(x+3)$所得的余式是（　）

A．$2x-5$　　B．$2x+5$　　C．$X-1$　　D．$X+1$　　E．$2x-1$

第一节 整式及其运算

- 整式及其运算
  - 整式定义
  - 整式加减运算
  - 整式乘法运算
  - 整式除法运算
  - 多项式因式分解

2.1.5 多项式的因式分解

把一个多项式表示成几个整式乘积的形式，叫做多项式的因式分解。

如 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

多项式因式分解的常用方法如下：

方法一：提取公因式法。

公因式：多项式中各项都含有的相同的因式，

即各项中系数的最大公约数与相同字母的最低次幂的乘积。

如：$2x^3+6x^2+8x=2x(x^2+3x+4)$

第一节 整式及其运算

2.1.5 多项式的因式分解

方法二：公式法

平方差公式 ① $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

完全平方公式 ② $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

完全立方公式 ③ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

立方和/差公式 ④ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

第一节 整式及其运算

2.1.5 多项式的因式分解

方法三：十字相乘法

$$x^2+px+q=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

$$\mathbf{p=a+b，q=ab}$$

$$\begin{array}{ccc} x & & a \\ & \times & \\ x & & b \\ \hline \end{array}$$

$$px=ax+bx$$

第一节 整式及其运算

2.1.5 多项式的因式分解

方法三：十字相乘法

$$\begin{array}{ccc} x & & a \\ & \times & \\ x & & b \end{array}$$

$$p=a+b$$

$$X^2-8x+15=(x-5)(x-3)$$

$$\begin{array}{ccc} x & & -5 \\ & \times & \\ x & & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 5 \\ \\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 15 \\ \\ 1 \end{array}$$

$$(-3x)+(-5x)=-8x \qquad 3x+5x=8x \qquad 15x+x=16x$$

十字相乘法：拆头拆尾凑中间，要连着正负号一起拆分。

第一节 整式及其运算

整式及其运算
- 整式定义
- 整式加减运算
- 整式乘法运算
- 整式除法运算
- **多项式因式分解**

2.1.5 多项式的因式分解

方法三：十字相乘法

$6X^2+19x+15=$ $(2x+3)(3x+5)$

$$\begin{array}{ccc} 2x & & 3 \\ & \times & \\ 3x & & 5 \end{array}$$

$10x+9x=19x$

$$\begin{array}{ccc} x & & a \\ & \times & \\ x & & b \end{array}$$

$p=a+b$

注意：

涉及到因式分解的问题，首先考虑**首尾项检验法**！！

即：原式最高次项系数，一定等于各因式的最高次项系数之积；

原式的常数项，一定等于各因式常数项之积。

方法三：十字相乘法练习题

（1） $X^2 - 7x+6=$ $(x-6)(x-1)$

（2） $18X^2 - 21x+5=$ $(3x-1)(6x-5)$

（3） $2X^2+3x+1=$ $(x+1)(2x+1)$

（4） $6X^2 - 13x+6=$ $(2x-3)(3x-2)$

（5） $6X^2 - 11x+3=$ $(2x-3)(3x-1)$

（6） $10X^2 - 21x+2=$ $(x-2)(10x-1)$

（7） $5X^2 - 8x - 13=$ $(x+1)(5x-13)$

（8） $4X^2+4x - 15=$ $(2x+5)(2x-3)$

第一节 整式及其运算

2.1.5 多项式的因式分解

方法四：求根法（简单了解即可）

例：已知 $3x^2-2x-8=0$的两根为 2和$-\frac{4}{3}$

要能够写出这个式子：$3x^2-2x-8=（3x+4)(x-2)$

$$(x-2)(x+\frac{4}{3})=0$$

$$3(x-2)(x+\frac{4}{3})=0$$

$$(x-2)(3x+4)=0$$

练习题(2010年1月)

【例9】多项式 $x^3+\ ax^2+bx-6$ 的两个因式是$x-1$和$x-2$，则第三个一次因式为（　）

A. x-6　　B.$x-3$　　C. x+1　　D. x+2　　E. x+3

练习题（模拟题）

【例10】若 $x^2-3x+2xy+y^2-3y-40=(x+y+m)(x+y+n)$,且$m<n$， 则$m,n$的值分别为（ ）.

A. 5； 8　　B.8； -5　　C. -8； 5　　D. -8； -5　　E. -8； 3

强化 练习题（2009年10月）

【练习11】若二次三项式 x^2+x-6 是多项式 $2x^4+x^3-ax^2+bx+a+b-1$ 的一个因式。

（1）$a=16$

（2）$b=2$

练习题

【练习12】 x −2是多项式 f(x)= x^3+ $2x^2-\mathrm{a}x+b$的因式.

(1) a=1,b=2.

(2) a=2,b=3.

<table>
<tr><th>条件(1)</th><th>条件(2)</th><th>选项</th></tr>
<tr><td>√</td><td>×</td><td>A</td></tr>
<tr><td>×</td><td>√</td><td>B</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td><td rowspan="2">C
(combine)</td></tr>
<tr><td colspan="2">(1)+(2) √</td></tr>
<tr><td>√</td><td>√</td><td>D
(double)</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td><td rowspan="2">E
(error)</td></tr>
<tr><td colspan="2">(1)+(2) ×</td></tr>
</table>

练习题(2012年1月)

【练习13】若 x^3+x^2+ax+b 能被 x^2-3x+2 整除，则（ ）

A. $a=4,b=4$　　B. $a=-4,b=-4$　　C. $a=10,b=-8$

D. $a=-10,b=8$　　E. $a=-2,b=0$

总结

（3）整式除法运算

余式定理——非整除

因式定理——整除

解题关键——除式为0

（4）因式分解

方法1：提取公因式发；

方法2：公式法；

★ **方法3**：十字相乘法；　首尾项检验法

方法4：求根法。

整式除法运算延伸

竖式除法

计算：$(4x^3+5x^2\text{-}3x-8)\div(x^2+2x+1)$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 4x-3 & \text{商式} \\
\cline{2-2}
x^2+2x+1 \big) & 4x^3+5x^2-3x-8 & \text{被除式} \\
 & 4x^3+8x^2+4x & \\
\cline{2-2}
 & -3x^2-7x-8 & \\
 & -3x^2-6x-3 & \\
\cline{2-2}
 & -x-5 & \text{余式}
\end{array}
$$

除式

则：$(4x^3+5x^2-3x-8)=(4x-3)(x^2+2x+1)+(-x-5)$

整式除法运算延伸

竖式除法

计算：$(x^2+x+1)\div(x-1)$

$$
\begin{array}{r}
x+2 \\
x-1\;\overline{)\,x^2+x+1} \\
x^2-x \\
\hline
2x+1 \\
2x-2 \\
\hline
3
\end{array}
$$

即 $x^2+x+1=(x-1)(x+2)+3$

第二章 整式与分式的运算

1 整式及其运算

2 分式及其运算

3 重要题型及运算技巧

第二节 分式及其运算

2.2.1 分式的定义

若A,B表示两个整式，且**B≠0**，B中含有字母，则称 $\frac{A}{B}$是分式。

$\frac{2x}{2y}$（y≠0）是分式。

$\frac{2x}{3}$不是分式，这是整式中的单项式

第二节 分式及其运算

2.2.2 分式的基本性质

分式的分子和分母同乘以（或除以）**同一个不为零**的式子，分式的**值不变**，即有

$$\frac{A}{B}=\frac{mA}{mB}(m\neq 0)$$

分式的基本性质主要应用在分式的**通分和约分**上。

通分：把几个**异分母的分式**分别化成与原本的分式相等的**同分母的分式；**

约分：把一个分式的分子与分母的**所有公因式约去。**

第二节 分式及其运算

2.2.2 分式的基本性质

通分

$\dfrac{2x}{x-5}$ 与 $\dfrac{3x}{x+5}$

$$\frac{2x}{x-5}=\frac{2x(x+5)}{(x-5)(x+5)}$$

$$\frac{3x}{x+5}=\frac{3x(x-5)}{(x+5)(x-5)}$$

约分（分母不等于0）

$\dfrac{-32a^3b^2c}{24a^2b^3d}$ 与 $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

$$\frac{-32a^3b^2c}{24a^2b^3d}=\frac{-4ac}{3bd}$$

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{x+1}{x-1}$$

当分子分母是多项式的时候，先进行因式分解，再约分。

第二节 分式及其运算

2.2.3 分式的运算

（1）加减运算

同分母的几个分式相加减，分母不变，分子相加减；$\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{3b}{a+b}=\dfrac{2a+3b}{a+b}$

不同分母的几个分式相加减，取这几个分式分母的公分母作分母，通分后化为同分母分式的加减运算。

$$\frac{2a}{a+b}-\frac{3b}{a(a+b)}=\frac{a\cdot 2a}{a(a+b)}-\frac{3b}{a(a+b)}=\frac{2a^2-3b}{a(a+b)}$$

第二节 分式及其运算

2.2.3 分式的运算

(2) 乘除运算

几个分式相乘，分子乘分子，分母乘分母。

$$\frac{2a}{a+b}\times\frac{3b}{a+b}=\frac{6ab}{(a+b)^2}$$

(分式的乘法运算满足交换律、结合律和分配律。)

两个分式相除，将除式的分子分母颠倒变为乘法运算。

除以一个数等于乘以这个数的倒数

$$\frac{a^2-2ab+b^2}{4a^2-b^2}\div\frac{a-b}{2a+b}=\frac{(a-b)^2}{(2a+b)(2a-b)}\times\frac{2a+b}{a-b}=\frac{a-b}{2a-b}$$

第二节 分式及其运算

2.2.3 解分式方程

$$\frac{x+4}{x^2+2x}-\frac{1}{x+2}=1+\frac{2}{x}$$

两边都乘公分母 $x(x+2)$

$$(x+4)-x=x(x+2)+2(x+2)$$

$$4=x^2+2x+2x+4$$

$$x^2+4x=0$$

$$x=0\text{或}x=-4$$

经检验，$x=0$代入原方程，分母为0，所以$x=0$是增根。

总结

（1）定义

$\frac{A}{B}$，A、B为整式，B中含有字母，且B≠0

（2）分式的基本性质

通分与约分：当分子分母是多项式时，先进行因式分解，再约分。

（3）分式的运算

加减运算：注意区分分母相同和分母不同

乘除运算

（4）解分式方程

注意增根：其实就是要注意**分母不为0**

1 整式及其运算

2 分式及其运算

3 重要题型及运算技巧

基本分式补充

⑤ $(a+b+c)^2 \quad =a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac \quad =a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$

⑥ $\dfrac{(a+b)^2+(b+c)^2+(a+c)^2}{2} \quad =a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac$

⑦ $\dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2}{2} \quad =a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$

推论：**若** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$，**则** $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$

$\because \dfrac{bc+ac+ab}{abc}=0$ 且分母$abc\neq 0$， $\therefore bc+ac+ab=0$ $\therefore (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$

练习题（2010年前）

【例14】若△ABC的三边为a、b、c，满足$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$,则△ABC为（ ）

A．等腰三角形

B．直角三角形

C．等边三角形

D．等腰直角三角形

E. 以上选项均不正确

强化练习题（2010年1月）

【例15】设实数x、y满足$x^2-4xy+4y^2+\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-6=0$，求 $x+y$的最大值（　）

A. 2　　B. 3　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{2}$　　E. $3\sqrt{3}$

强化练习题（2022年1月）

【练习16】设x、y为实数，则f(x,y)= $x^2+4xy+5y^2-2y+2$的最小值（　）

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{3}{2}$　　E. 3

练习题（模拟题）

【练习17】已知a、b、c是不完全相等的任意实数，有$x=a^2-bc$, $y=b^2-ac$, $z=c^2-ab$，则x,y,z（ ）

A. 都大于0

B. 至少有一个大于0

C. 至少有一个小于0

D. 都小于0

E. 以上都不正确

进阶练习题（2010年10月）

【例18】 若实数a,b,c 满足$a^2+b^2+c^2=9$，则代数式$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$的最大值是（ ）

A. 21　　B. 27　　C. 29　　D.32　　E. 39

练习题（模拟题）

【练习19】已知实数x、y，则 $x^2+y^2-2x+12y+40$ 的最小值为（　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　E. 4

2.3.1 关于 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

推论：**若** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$，**则** $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$

$\because \frac{bc+ac+ab}{abc}=0$ 且分母 $abc \neq 0$， $\therefore bc+ac+ab=0$　　$\therefore (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$

【例20】已知 $a+b+c=-3$，且 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+3}=0$，则 $(a+1)^2+(b+2)^2+(c+3)^2$ 的值为（ ）

A.9　　B.16　　C.4　　D.25　　E.36

2.3.1 关于 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

推论：**若** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$，**则** $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$

若$a+b+c=k$，则$a^2+b^2+c^2=k^2$。

如果想要知道$a^2+b^2+c^2$的值，需要知道$a+b+c$的值。

总结：若 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$，$a+b+c=k$， 则$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2=k^2$。

互为倒数。

进阶 练习题

【例21】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 成立

（1） $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

（2） $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$

<table>
<tr><th>条件(1)</th><th>条件(2)</th><th>选项</th></tr>
<tr><td>√</td><td>×</td><td>A</td></tr>
<tr><td>×</td><td>√</td><td>B</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td><td rowspan="2">C
(combine)</td></tr>
<tr><td colspan="2">(1)+(2) √</td></tr>
<tr><td>√</td><td>√</td><td>D
(double)</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td><td rowspan="2">E
(error)</td></tr>
<tr><td colspan="2">(1)+(2) ×</td></tr>
</table>

2.3.2 求高次代数式

形如 $x+\frac{1}{x}=a$ 或 $x^2+ax+1=0$，求高次代数式的问题.（降次）

$x+\frac{1}{x}=a$　　两边同时乘以x，为$x^2+1=ax$, $x^2=ax-1$

$x^2+ax+1=0$　　整理成 $x^2=-ax-1$ 形式

将x^2代入整式，迭代降次即可。

练习题(示范)

【例22】已知 $x^2-3x-1=0$，则多项式 $3x^3-11x^2+3x+3$的值为（　　）

A．−1　　B．0　　C．1　　D．2　　E．3

练习题（2010年10月）

【例23】 若$x+\frac{1}{x}=3$,则$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=$(　)

A．$-\frac{1}{8}$　　B．$\frac{1}{6}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$-\frac{1}{4}$　　E．$\frac{1}{8}$

强化 练习题（2023年1月）

【例24】设x为正实数，则$\frac{x}{8x^3+5x+2}$的最大值为（ ）

A. $\frac{1}{15}$ B. $\frac{1}{11}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{6}$ E. $\frac{1}{5}$

总结

⑤ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$

（1）基本公式补充

⑥ $\frac{(a+b)^2+(b+c)^2+(a+c)^2}{2}=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac$

⑦ $\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2}{2}=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$

（2）关于 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

推论：**若** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$，**则** $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$

总结：若 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$，$a+b+c=k$，则 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2=k^2$。

互为倒数。

（3）求高次代数式

$x+\frac{1}{x}=a$　两边同时乘以x，为 $x^2+1=ax$，$x^2=ax-1$

$x^2+ax+1=0$　整理成 $x^2=-ax-1$ 形式

END · Thanks for listening