管理类联考数学
必修课

最值专题

思路1：均值不等式（一正二定三相等）

思路2：二次函数对称轴$x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标$(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a})$

思路3：非负性（常见三种形式：平方、绝对值、算术平方根）

思路4：绝对值最值（$|x-a|+|x-b|$或$|x-a|-|x-b|$）

思路5：总和一定，求最值。极端临界情况

求最值——知识点回顾

思路1：均值不等式（一正二定三相等） **如：** $y=3x+\frac{4}{x^2}\ (x>0)$

算术平均值≥几何平均值；

$$\frac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots\ldots x_n} \qquad (x_i>0,\ i=1,2,\ \ldots\ldots,n)$$

积定值,和有最小值；

和定值,积有最大值。

当且仅当实数 $x_1=x_2=\ldots\ldots=x_n$ 时，等号成立。

积定或和定

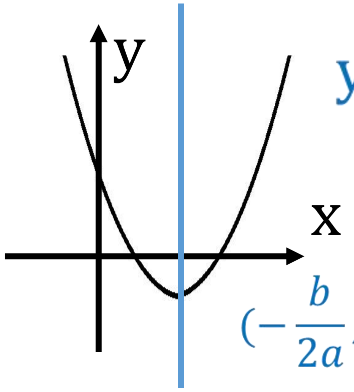
一正、二定、三相等

正实数

“二定”时有最值，取最值时这n个正实数相等

求最值——知识点回顾

思路2：二次函数对称轴$x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$　**如**：$y=x^2+2x+1$



$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$$

$$x=-\frac{b}{2a}$$

a＞0，开口向上，存在最小值;

a＜0，开口向下，存在最大值

韦达定理：

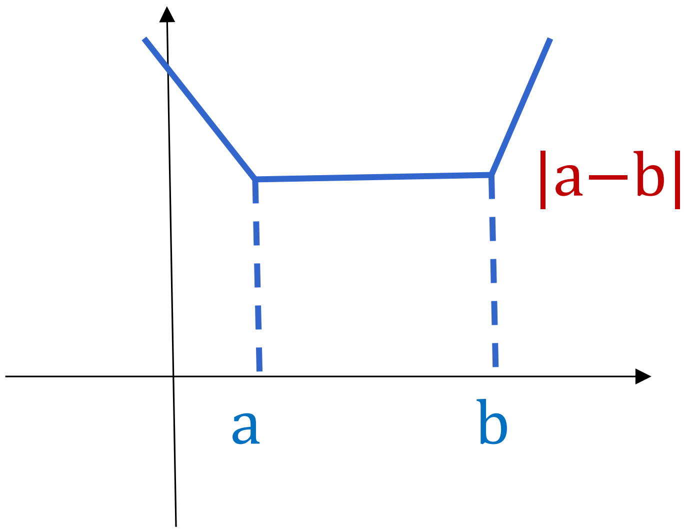
$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}$$

求最值——知识点回顾

思路3：非负性（常见三种形式：平方、绝对值、算术平方根）

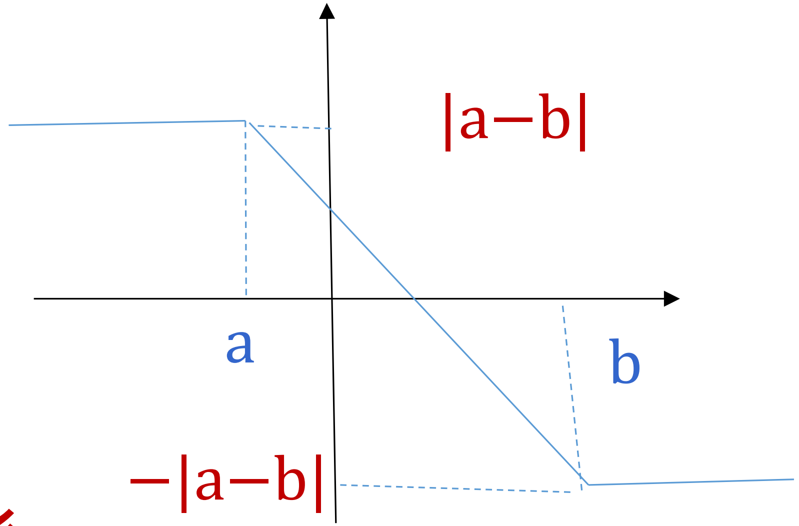
思路4：绝对值最值（$|x-a|+|x-b|$或$|x-a|-|x-b|$）



平底锅图形

形如$y=|x-a|+|x-b|$

此时有最小值，为$|a-b|$



Z图形

形如$y=|x-a|-|x-b|$

此时有最小值，为$-|a-b|$

此时有最大值，为$|a-b|$

强化练习题（2019年1月）

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$（a,b,c$\in R^+$） → $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

【例1】函数$F(x)=2x+\frac{a}{x^2}$ （a > 0）在（0，+∞）内的最小值为$F(x_0)=12$，则$x_0=$（ ）

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2 E. 1

$F(x)=2x+\frac{a}{x^2}=x+x+\frac{a}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{x \cdot x \cdot \frac{a}{x^2}} = 3\sqrt[3]{a}$

$3\sqrt[3]{a}=12$

当$x=x=\frac{a}{x^2}$时，取得最小值12，$x^3 = a$

$x= \sqrt[3]{a} = 4$

$x+x+\frac{a}{x^2}=12$，且$x=x=\frac{a}{x^2}$，则$x=x=\frac{a}{x^2}=4$

强化 2020年真题-24

【例2】设a，b 是正实数，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 存在最小值

答案：A

（1）已知 ab 的值

（2）已知a，b是方程 $x^2-(a+b)x+2=0$ 的两个不同实根

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$　　均值不等式，当且仅当 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$ 时等号成立，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 存在最小值

$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$，即$a=b$，换句话说，当能取到a=b时，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$取到最小值。

条件1：知道ab的值，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$，当$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$(即$a=b$)时，等号成立，取得最小值。

条件2：a，b 是方程 的不等实根,a≠b,不可能取到最小值。

强化 2018年真题-19

用x,y,z表示,则$y^2=xz$

【例3】甲、乙、丙三人的年收入成等比数列，则能确定乙的年收入的最大值。

（1）已知甲、丙两人的年收入之和;

（2）已知甲、丙两人的年收入之积。

答案：D

条件1：已知 $x+z$，$x+z\geq2\sqrt{xz}=2y$，可以知道y的最大值，$y\leq\frac{x+z}{2}$　充分

条件2：已知xz, 又因为$y^2=xz$，　y是确定的值，是常数　充分

常数的最大值和最小值都是这个常数本身。

练习题（2003年1月）

【例4】已知某厂生产x件产品的总成本为 C 为

C=25000+200x+$\frac{1}{40}x^2$(元),要使平均成本最小，所应生产的产品件数是（　　）

A.100件　　B.200件　　C.1000件　　D. 2000件　　E.以上结果都不正确

解析：平均成本表达式=$\frac{C}{x}=\frac{25000+200x+\frac{1}{40}x^2}{x}$=$\frac{25000}{x}$+200+$\frac{1}{40}x$

$\frac{25000}{x}+\frac{1}{40}x \geq 2\sqrt{\frac{25000}{x}\times\frac{1}{40}x}$=**50**

当且仅当$\frac{25000}{x}=\frac{1}{40}x$时，取得最小值，$x=1000$

强化 练习题（2010年1月）

【例5】甲商店销售某种商品，该商品的进价每件90元，若每件定为100元，则一天内能售出500件，在此基础上，定价每增1元，一天能少售出10件，要使甲商店获得最大利润，则该商品的定价应（　　）.

A:115元　　B:120元　　C:125元　　D:130元　　E:135元

对称轴x=$-\frac{b}{2a}$

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$

解析：设每件产品增加的价格为x元（在100元基础上）

每件产品的利润=100−90+x=10+x

一共可以卖出的产品为500−10x

卖出产品的总利润=（10+x)(500−10x）　卖出产品的总利润=−10x²+400x+5000

对称轴x=$-\frac{b}{2a}=-\frac{400}{2\times(-10)}$=20

【练习6】某商场将每台进价为2000元的冰箱以2400元销售时，每天销售8台，调研表明这种冰箱的售价每降低50元，每天就能多销售4台，若要每天销售利润最大，则该冰箱的定价应为（ ）元。

A. 2200　B. 2250　C. 2300　D. 2350　E. 2400

解析：设冰箱降价了x个50元（在2400元基础上）

每件产品的利润=2400−50x−2000=400−50x

一共可以卖出的产品为8+4x

卖出产品的总利润=（400−50x)(8+4x）

当x=$\frac{x_1+x_2}{2}$=$\frac{8+（-2）}{2}$=3

强化练习题（2022年1月）

【例7】设x、y为实数，则f(x,y)= $x^2+4xy+5y^2-2y+2$的最小值（   ）

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{3}{2}$　　E. 3

∵f(x，y)=$x^2+4xy+5y^2-2y+2$

$=x^2+4xy+4y^2+y^2-2y+1+1$

$=(x+2y)^2+(y-1)^2+1$

∵ $(x+2y)^2\geq0$，$(y-1)^2\geq0$，∴ f(x，y)的最小值为1

强化 练习题（2012年10月）

【例8】设实数x，y满足x+2y=3，则x^2+y^2+2y的最小值为（　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. $\left(\frac{1}{2}\right)^5-1$　　E. $\left(\frac{1}{2}\right)^5+1$

x+2y=3→x=3−2y

$x^2+y^2+2y=(3-2y)^2+y^2+2y$

$=5y^2-10y+9$

当$y=-\frac{b}{2a}=-\frac{-10}{2\times5}=1$时，$5y^2-10y+9$取最小值4

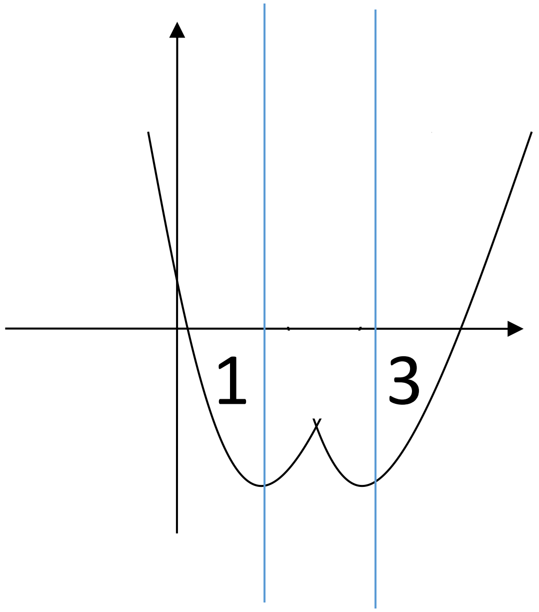
强化 练习题（2021年1月）——解法1

【例9】函数 $f(x)=x^2-4x-2|x-2|$的最小值为（　　）

A. -4　　B. -5　　C. -6　　D. -7　　E. -8

$$f(x)=x^2-4x-2|x-2|=\begin{cases}x^2-6x+4, & x\geq 2\\ x^2-2x-4, & x<2\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-3)^2-5, & x\geq 2\\ (x-1)^2-5, & x<2\end{cases}$$



强化 练习题（2021年1月）——解法2

【例9】函数 $f(x)=x^2-4x-2|x-2|$ 的最小值为（　　）

A. -4　　B. -5　　C. -6　　D. -7　　E. -8

$f(x)=x^2-4x-2|x-2|$

$=x^2-4x+4-4-2|x-2|=(x-2)^2-2|x-2|-4=|x-2|^2-2|x-2|-4$

令 $t=|x-2|$，$|x-2|^2-2|x-2|-4=t^2-2t-4$

$=t^2-2t+1-1-4=(t-1)^2-1-4=(t-1)^2-5$

$(t-1)^2\geq 0$，要想求最小值，令 $(t-1)^2=0$

此时最最小值为 $0-5=-5$

【例10】某年级共有8个班。在一次年级考试中，共有21名学生不及格，每班不及格的学生最多有3名，则(一)班至少有1名学生不及格。 最小值为 1

（1）(二)班的不及格人数多于(三)班

（2）(四)班不及格的学生有2名

条件1：要想让（一）班人数最少，要让其他班尽可能多

一班	二班	三班	四班	五班	六班	七班	八班
1	3	2	3	3	3	3	3

2　3　1

3　2　1

四~八班共15个人是固定的，剩余6个人在一二三班进行分配。 条件1充分

强化 2011年1月

【例10】某年级共有8个班。在一次年级考试中，共有21名学生不及格，每班不及格的学生最多有3名，则(一)班至少有1名学生不及格。 最小值为 1

（1）(二)班的不及格人数多于(三)班

（2）(四)班不及格的学生有2名

答案：D

条件2： 要想让（一）班人数最少，要让其他班尽可能多

一班	二班	三班	四班	五班	六班	七班	八班
1	3	3	2	3	3	3	3

条件2充分

强化 2012年1月

【例11】已知三种水果的平均价格为10元/千克，则每种水果的价格均不超过18元/千克。 **三种水果用x\y\z表示，则x+y+z=30元/千克** **不超过即≤18**

（1）三种水果中价格最低的为6元/千克

答案：D

（2）购买重量分别是1千克、1千克和2千克的三种水果共用了46元

条件1：因为总价是一定的，要想求最高价格，则让其他的价格尽可能低。

x	y	z
6	6	18

条件1充分

条件2：$x+y+2z=46$

$x+y+z=30$ $z=16$ $x+y=14$ 条件2充分

强化 2014年10月——思路5

【例12】a，b，c，d，e五个数满足$a\le b\le c\le d\le e$，其平均数 $m=100$，$c=120$，则$e-a$的最小值是（ ）

A.45　　B.50　　C.55　　D.60　　E.65

要求$e-a$的最小值，让 e 尽可能小，a 尽可能大

a	b	c	d	e
70	70	120	120	120

$100\times5-120\times3=140$

$120-70=50$

强化 2020年真题-08

【例13】某网店对单价为55元、75元、80元的三种商品进行促销，促销策略是每单满200元减 m 元，如果每单减 m 后实际售价均不低于原价的8折，那么 m 的最大值为( )

A. 40　　B. 41　　C. 43　　D. 44　　E. 48

设原价为 x 元($x\geq 200$)，根据题意，$x-m\geq 0.8x$，即 $m\leq 0.2x$

$\because$ $m\leq 0.2x$恒成立，所以找 x 的最小值

三种产品的组合：$55+75+75=205$为最小值

$m\leq 0.2\times 205=41$

2022年真题-17强化

【例14】设实数x满足$|x-2|-|x-3|=a$，则能确定x的值。

（1）$0<a\le\frac{1}{2}$

（2）$\frac{1}{2}<a\le 1$

$y=|x-2|-|x-3|$与y=a 相交

零点x=2， x=3

A

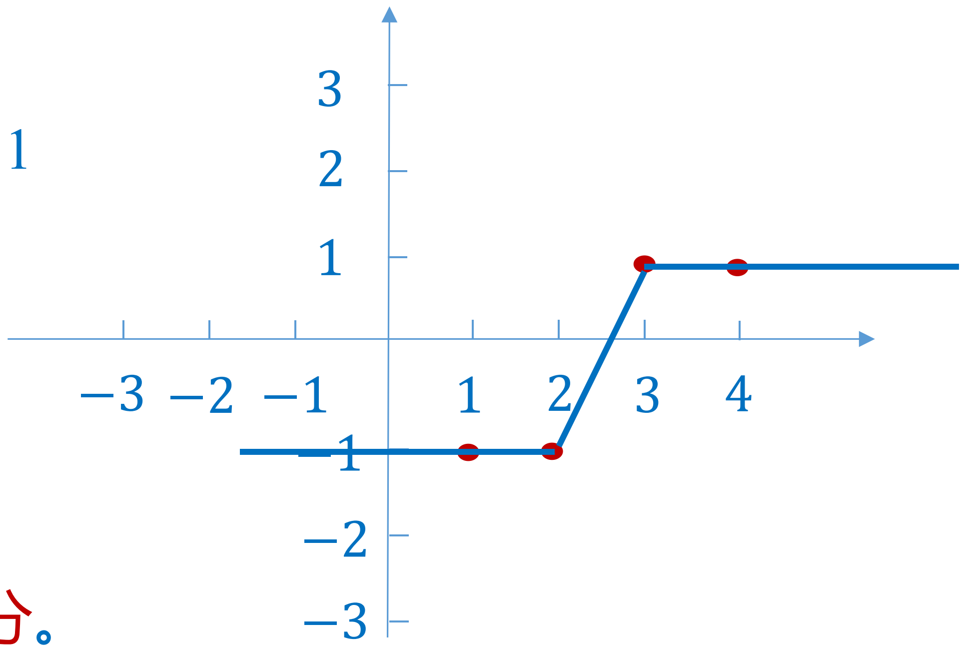
当x=2，$|x-2|-|x-3|=-1$

x=3，$|x-2|-|x-3|=1$

当x=1，$|x-2|-|x-3|=-1$

x=4，$|x-2|-|x-3|=1$

画出如图



条件1：在此范围内x唯一确定。充分

条件2：当a=1时，x有无数个解，不能确定，不充分。

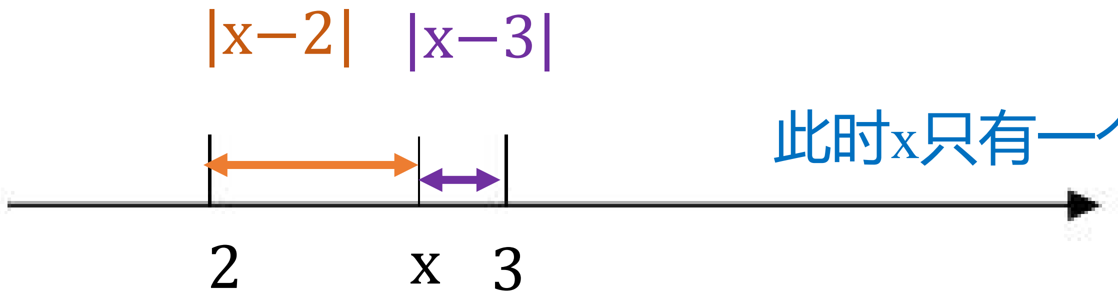
2022年真题-17强化

【例14】设实数x满足$|x-2|-|x-3|=a$，则能确定x的值。

（1）$0<a\leq\frac{1}{2}$

A

（2）$\frac{1}{2}<a\leq1$

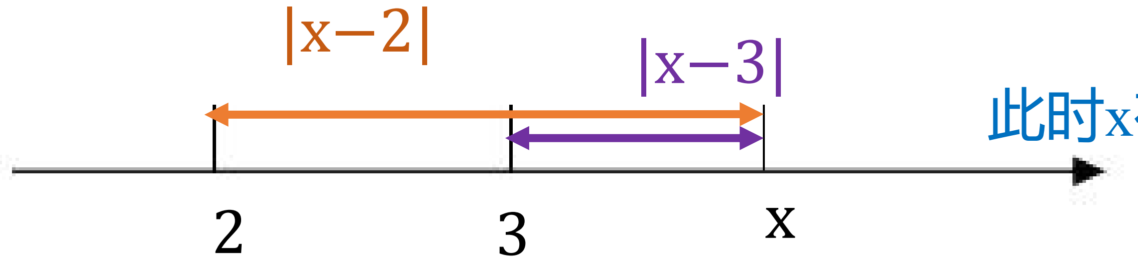


此时x只有一个取值，能确定

条件1：取$a=\frac{1}{2}$，

取$a=\frac{1}{4}$，

把x往左移动，也只有一个x值



条件2：取$a=1$，

此时x有很多值，不确定

强化 练习题（2010年1月） 这个题目前面已经讲过

【自行练习】设实数x、y满足$x^2-4xy+4y^2+\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-6=0$，求 $x+y$的最大值（ ）

A. 2　　B. 3　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{2}$　　E. $3\sqrt{3}$

$$\because x^2-4xy+4y^2+\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-6=(x-2y)^2+\sqrt{3}(x+y)-6=0$$

$$\therefore x+y=\frac{6-(x-2y)^2}{\sqrt{3}}$$

当$(x-2y)^2=0$时，x+y取得最大值，为$2\sqrt{3}$

练习题（2003年10月）

【自行练习】已知某厂生产x件产品的总成本为 C 为

$C=25000+200x+\frac{1}{40}x^2$(元),若产品以每件500元售出，则使利润最大的产量是（　　）

A.2000件　B.3000件　C.4000件　D. 5000件　E.6000件

解析：利润=收入 - 成本，设卖出产品为x件

=收入 - 成本$=500x-C$

$$=500x-\left(25000+200x+\frac{1}{40}x^2\right)$$

$$=-\frac{1}{40}x^2+300x-25000$$

开口向下的抛物线，对称轴的位置取得最大值　**对称轴**$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{300}{2\times\left(-\frac{1}{40}\right)}=6000$

END • Thanks for listening