解析函数的积分表示

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy$$

令 $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ 有 $= \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt$

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \frac{i}{R^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta}\,d\theta = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n\neq \end{cases}$$

$z = a + Re^{i\theta}$，（绕 a 的圆周）

不等式 $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,ds$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)||\Delta z| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\Delta s_k \Rightarrow \left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,ds$$

若 $|f(z)|$ 有界（$\le M$），则有

长大不等式： $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le ML$ ，（L 为曲线长）

注意 $\frac{2\theta}{\pi} \le \sin\theta \le \theta$.

柯西积分定理

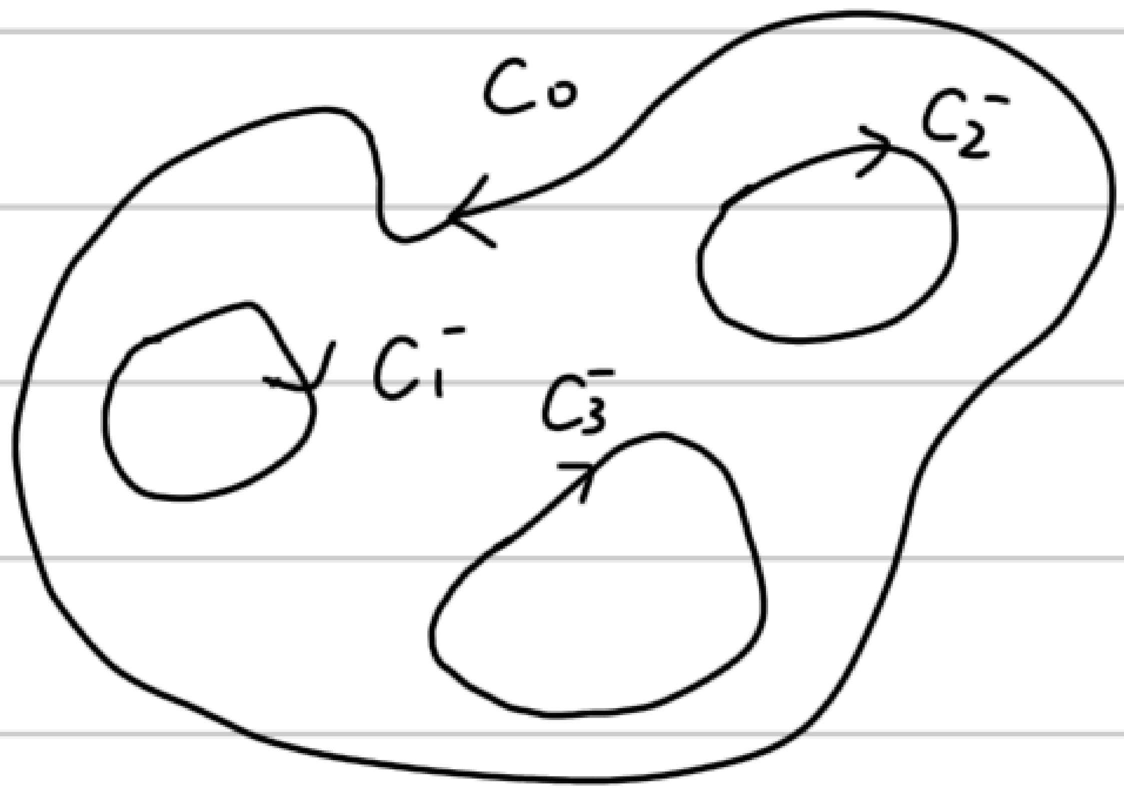
D 由闭路（简单闭曲线）C 围成的单连通区域，$f(z)$ 在 $C+D$ 解析，则

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz = 0}$$

此时积分值与路径无关，记为 $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$

多连通区域中，$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz$

$\int_C f(z)\,dz$



Newton - Leibniz

单连通区域中：$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z) - F(z_0)$

多连通区域中. 若 C_1、C_2围成区域解析. 则仍符合条件.

反之. 函数多值. 如$\frac{1}{z}$的零点

有 $\int_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi i$ ，$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ （$k=$逆时针绕过原点圈数 - 顺时针绕过原点

Cauchy 积分公式

$f(z)$在闭路 C 及所围区域 D 中解析. 则 $\forall z \in D$ 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

Cauchy 公式

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi$$

平均值公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi R}\int_C f(\xi)\,ds$$ ， C 是圆周 $|z-a| = R$.

最大模原理

$f(z)$在有界域 D 内解析在 $C+D$ 连续（$C = \partial D$），则 $|f(z)|$ 只能在 C 上取到 $C+D$ 上的 max

Cauchy不等式

$f(z)$在D内解析，以$\forall z\in D$为圆心作$C:|\xi-z|=R$，令$M(R)=C$上$|f(z)|$最大值，有

$$|f^{(n)}(z)|\leq\frac{n!\,M(R)}{R^n}$$

Liouville定理

若整函数在整个平面有界，则$f(z)=\text{const}$.

代数学基本定理

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n\ ,\quad n\geq1,\ a_0\neq0$$

必有根，且有n个根

Morera定理

若$f(z)$在D连续且$\int_C f(z)dz=0\Rightarrow f(z)$在$D$中解析.

（C为D中$\forall$闭路）