复变函数

一、复数 & 平面点集

$z = x + yi$

$x = \mathrm{Re}\,z$, $y = \mathrm{Im}\,z$

$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$

$z_1 z_2 = 0 \Rightarrow z_1$ or $z_2 = 0$

$z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\,z$, $z - \bar{z} = -2\,\mathrm{Im}\,z$

$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

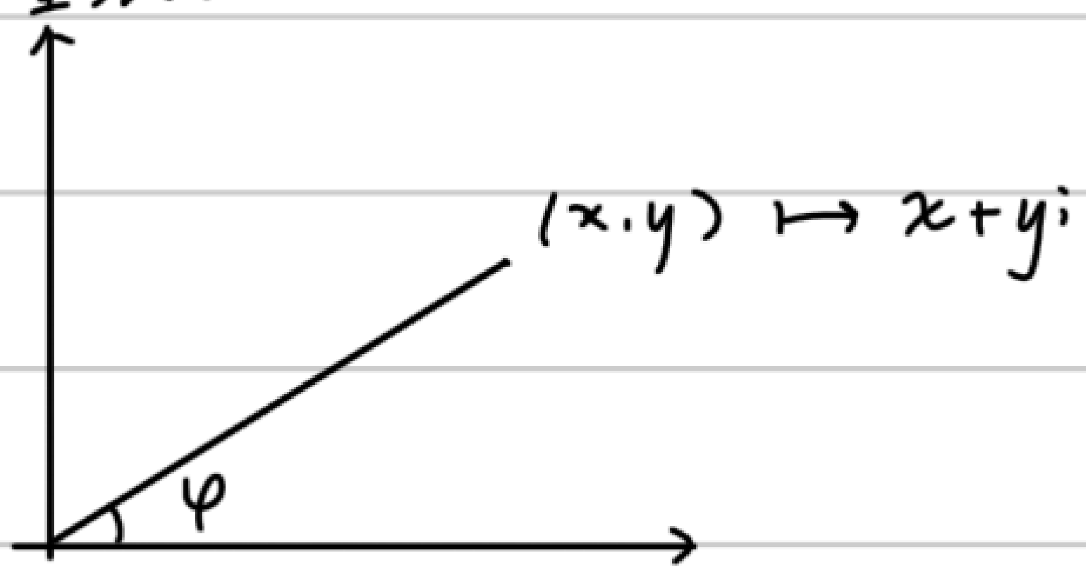
$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$　$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$z\bar{z} = \mathrm{Re}^2 z + \mathrm{Im}^2 z = |z|^2$

z为实 $\Leftrightarrow z = \bar{z}$ ，z为虚 $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$.

$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$

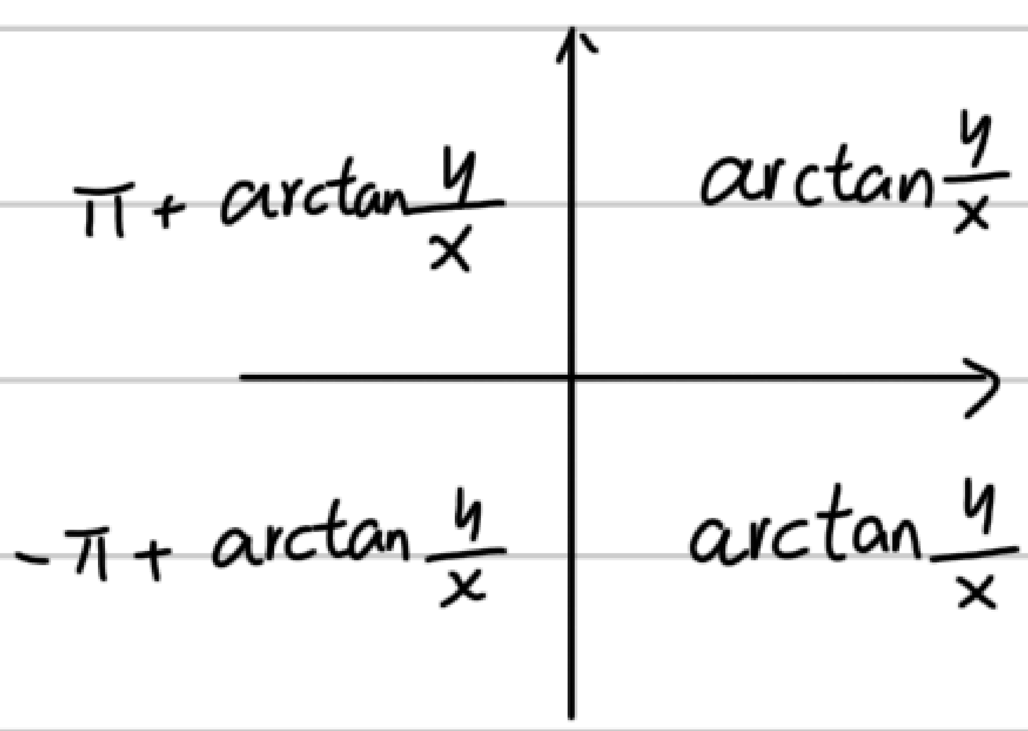
向量表示



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan\varphi = \frac{y}{x}$

$r = |z|$, $\varphi = \mathrm{Arg}\,z \in [-\pi, \pi]$

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$



$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

$|x| = |\mathrm{Re}\,z| \le |z|$　$|y| = |\mathrm{Im}\,z| \le |z|$　$|z| \le |\mathrm{Re}\,z| + |\mathrm{Im}\,z|$

$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$　$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|$　（三角不等式：幅角相等⇔=成立）

$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$
$z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ $\Rightarrow$

$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)] = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

即 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

即 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}\, z_1 - \mathrm{Arg}\, z_2$

$F(x,y) \Rightarrow F\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$

$A(x^2+y^2) + mx + ny + C = 0 \Rightarrow \left(z + \frac{B}{A}\right)^2 = \frac{|B|^2 - AC}{A^2}$

de Moivre

$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

$e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$

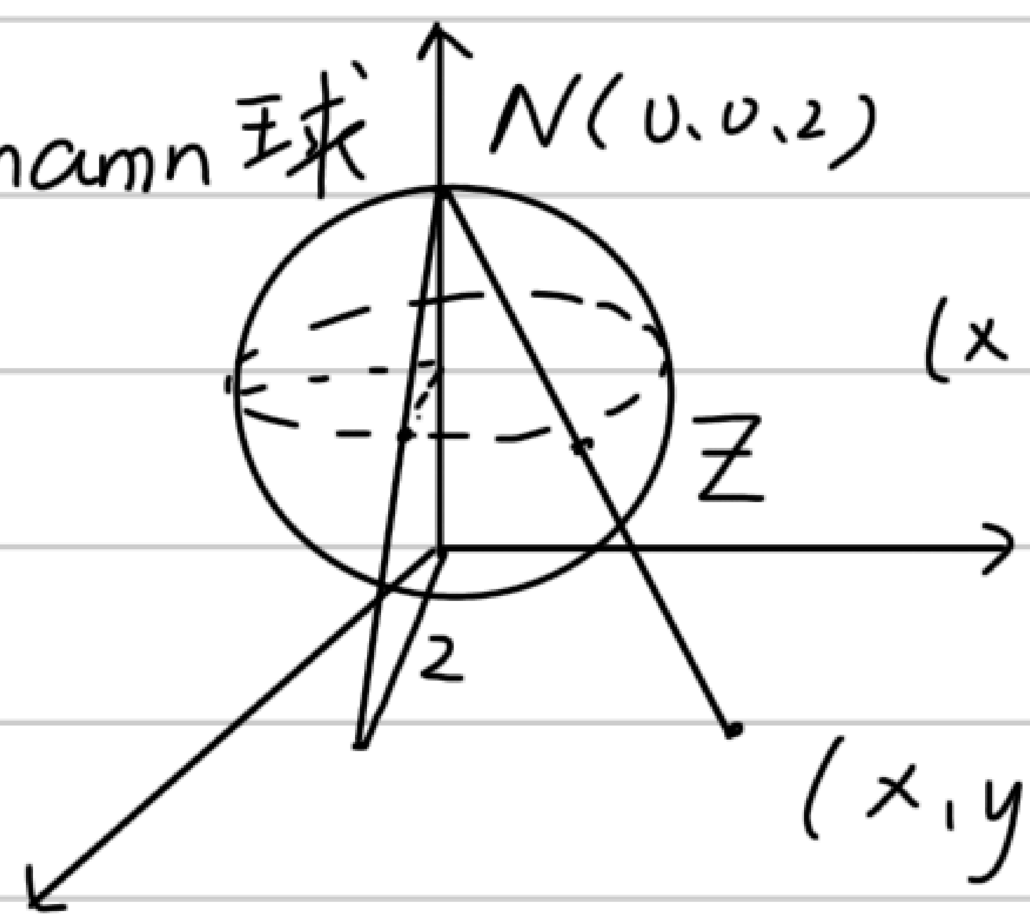
$\sqrt[n]{z} = (\sqrt[n]{r})\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$

极限

$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |z_0 - z_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0$, $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$ $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$

Riemann 球



$(x,y,0) \mapsto Z = \left(\frac{4\,\mathrm{Re}\,z}{|z|^2+4}, \frac{4\,\mathrm{Im}\,z}{|z|^2+4}, \frac{2|z|^2}{|z|^2+4}\right)$

$Z(\xi,\eta,\zeta) \mapsto \left(\frac{2\xi}{2-\zeta}, \frac{2\eta}{2-\zeta}\right)$

① $x^2+y^2=R^2 \Longrightarrow 4(\xi^2+\eta^2)=R^2(2-\xi)^2$

② 纬圆：$\begin{cases} \xi^2+\eta^2+(\xi-1)^2=1 \\ \xi=\dfrac{2R^2}{R^2+4} \end{cases}$

③ 赤道：$\begin{cases} \xi^2+\eta^2=1 \\ \xi=1 \end{cases}$ （映成 $R=2$ 圆）

无穷：

$|\infty|=+\infty$，若 $a\neq 0$，$a\cdot\infty=\infty$，$\frac{a}{0}=\infty$

若 $a\neq+\infty$，$\frac{a}{\infty}=0$，$a\pm\infty=\infty$，$\frac{a}{\infty}=0$，$\frac{\infty}{a}=\infty$

扩充平面/闭平面（Riemann 球 + 复平面）

原来开平面：开平面/有限平面

二. 复变数函数

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续

$\Longleftrightarrow$ $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 作为二元函数在 (x_0,y_0) 处连续

$w=f(z)$ $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)=\dfrac{df}{dz}=\dfrac{dw}{dz}$

若 $f(z)$ 在 D 每一点可微，则称 $f(z)$ 在 D 解析（不解析称为奇点）

$\begin{cases} w=f(z) \\ z=\varphi(w) \end{cases} \Rightarrow f'(z)=\dfrac{1}{\varphi'(w)}$.

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z=x+iy$（区域 D）可微 $\Longleftrightarrow$

$\begin{cases} \text{二元函数 } u(x,y),\ v(x,y) \text{ 可微} \\ u(x,y)\ \&\ v(x,y) \text{ 满足 C-R 方程} \end{cases}$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

有 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

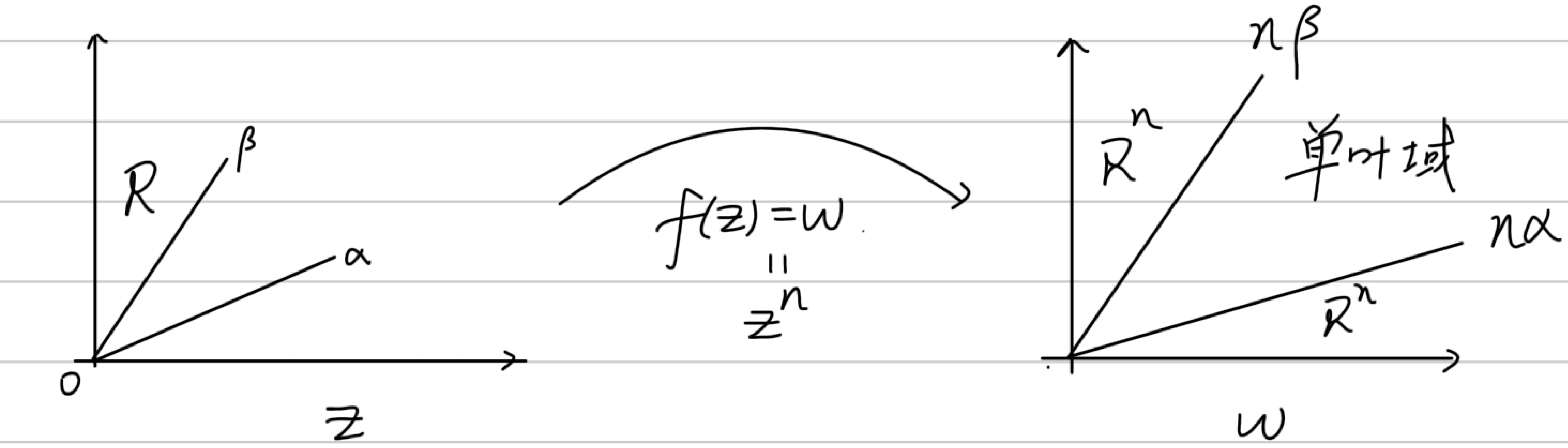
$$=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

若 $w=f(z)$ 是D内一一解析映照,称 $f(z)$ 是D内单叶函数,D是 $f(z)$ 的单叶性区域.

幂函数

$w=z^n$

$z=\sqrt[n]{|w|}\exp\left(i\frac{\arg w+2k\pi}{n}\right)$



角域 $0<\arg z<\frac{\pi}{n} \longrightarrow 0<\arg w<\pi$ (上半平面)

反函数: $z=(\sqrt[n]{w})_0=\sqrt[n]{|w|}\exp\left(i\frac{\arg w}{n}\right)$ $(-\pi<\arg w<\pi)$

D_k: $\frac{2k-1}{n}\pi<\arg z<\frac{2k+1}{\pi}n$ $(k=0,1,2\cdots n-1)$ $\xrightarrow{\text{单叶}}$ 切开负实轴的平面

根式函数

正向闭曲线绕 $|k|$ 圈, $\Delta\arg z=2k\pi$. (k可小于0)

支点: 在 $z=a$ 充分小邻域内作闭曲线C. z绕C区线一圈, $f(z)$ 的值就变化一次. 称 $z=a$ 为支点.

支割线&多值函数的单值解析分支

取一条曲线/直线割开z平面而取G，使所有支点不包含在G中，那么G为一个单值解析分支（$w=\sqrt[n]{z}$ 有n个分支）

取负实轴为支割线，则 $w=\sqrt[n]{r}$ 有n个单值分支

$$w_k = w_{k-1}\exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\exp\left(i\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right)$$

$$(2k-1)\pi < \arg z < (2k+1)\pi \quad , k=0,1,2\cdots$$

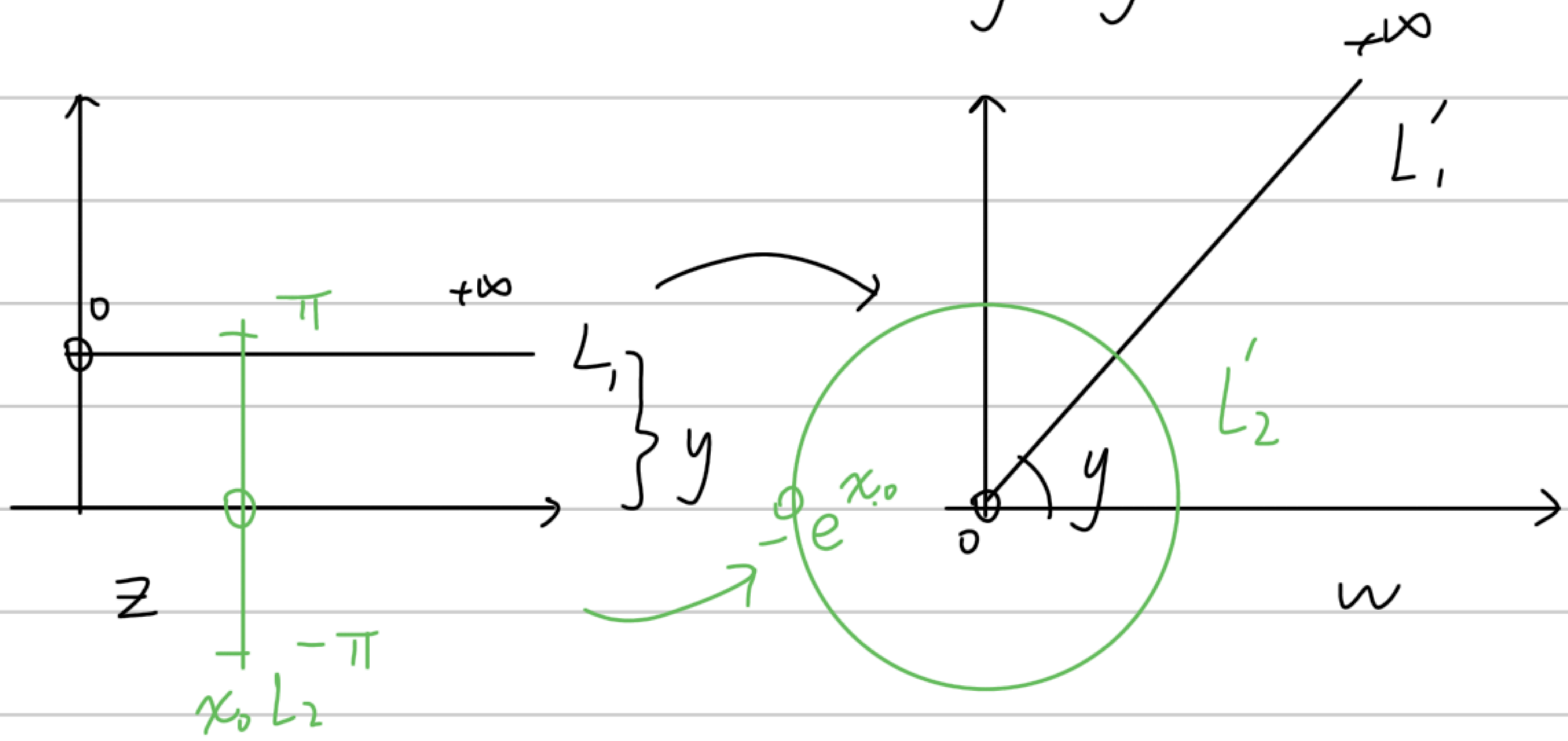
$$\frac{dw_k}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{n w_k^{n-1}} = \frac{w_k}{nz}.$$

支割线两岸的函数值

一般支割线两岸的函数值不同.

指数函数 $w=e^z$

令 $z=x+iy$，则 $w=e^x e^{iy}$，即 $\begin{cases} |w|=e^x \\ \arg w = y \end{cases}$



$w=e^z$ 将条形域 $a<\mathrm{Re}\,z<b$，$b-a\le 2\pi$ 单叶映为 $a<\arg w<b$

将条形域 $(2k-1)\pi<\mathrm{Im}\,z<(2k+1)\pi$，$k=0,\pm1,\cdots$ 单叶映为沿负半轴剪开的复平面.

对数函数

$\mathrm{Ln}z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}z = \ln|z| + i\arg z + i2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2\cdots$

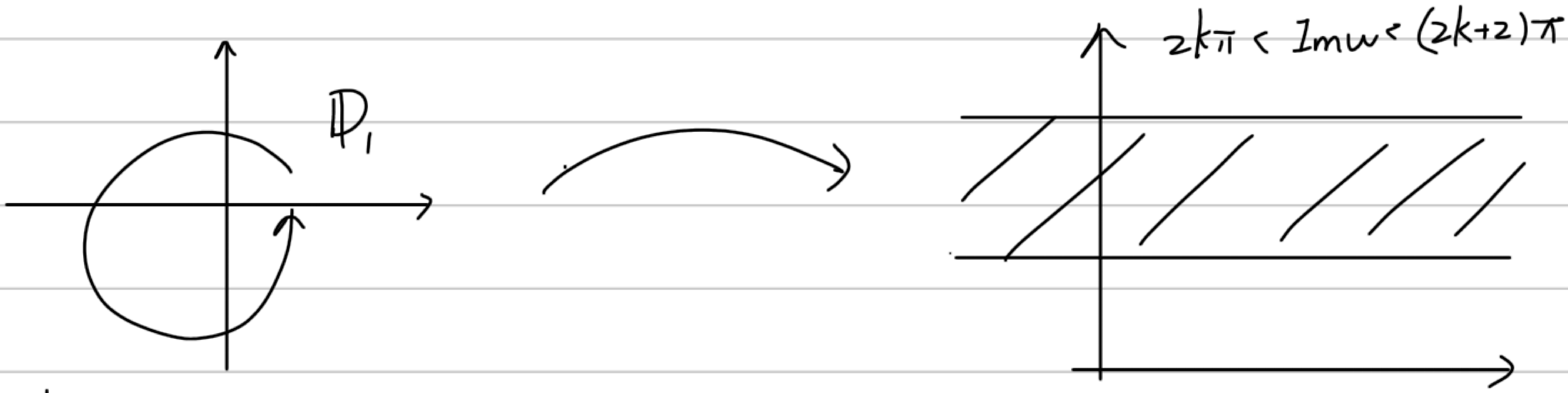
只有0和∞是支点，

沿实正半轴割开

$w_k = \ln|z| + i\arg z + i2k\pi \qquad 0 < \arg z < 2\pi$

沿实负半轴割开

$w_k = \ln|z| + i\arg z + i2k\pi \qquad -\pi < \arg z < \pi$



$2k\pi < \arg z < (2k+2)\pi$

三角函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos iz = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y})$$

双曲函数

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \cos iz \qquad \tanh z = -i\tan iz$$

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = -i\sin iz \qquad \coth z = i\cot iz$$

一般幂函数

$$w=z^{\alpha}=\exp(\alpha\,\mathrm{Ln}z)=\exp\{\alpha[\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)]\}$$

① α 为正整数 n　　单值函数

$$z^{n}=\exp[n(\ln|z|+i\arg z)]=|z|^{n}\exp(in\arg z)$$

② $\alpha=\frac{1}{n}$，n 为正整数　　n 值函数

$$z^{1/n}=|z|^{1/n}\exp i\left(\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right)\qquad z^{m/n}=\sqrt[n]{z^{m}}$$

③ α 为无理数或一般复数　　$(\mathrm{Im}\,\alpha\neq 0)$　无穷多值

反三角函数

$$w=\mathrm{Arcsin}z=-i\underbrace{\mathrm{Ln}}_{\text{无穷多值}}(iz+\underbrace{\sqrt{1-z^{2}}}_{\text{二值函数}})$$