第 三 章

1. 计算积分 $\int_C \frac{2z-3}{z}dz$，其中，C 为：

(1) 从 $z=-2$ 到 $z=2$ 沿圆周 $|z|=2$ 的上半圆；

(2) 从 $z=-2$ 到 $z=2$ 沿圆周 $|z|=2$ 的下半圆；

(3) 圆周 $|z|=2$ 的正向.

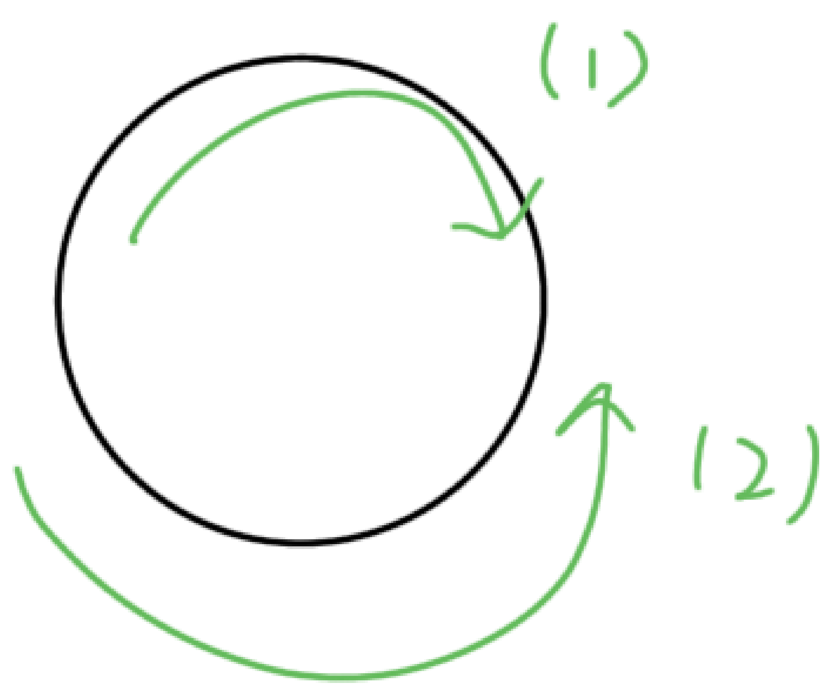
解：(1) $\int_C \frac{2z-3}{z}dz = \int_C \left(2-\frac{3}{z}\right)dz$，令 $z=2e^{i\theta}$，则 $z'(\theta)=2ie^{i\theta}$

原式 $= \int_{\pi}^{0}\left(2-\frac{3}{2e^{i\theta}}\right)2ie^{i\theta}d\theta = 4i\int_{\pi}^{0}e^{i\theta}d\theta - 3i\int_{\pi}^{0}d\theta = 8+3i\pi$

(2) 同(1)，只是积分上下限有变得

原式 $= 4i\int_{-\pi}^{0}e^{i\theta}d\theta - 3i\int_{-\pi}^{0}d\theta = 8-3i\pi$

(3)



故原式 $= -(8+3i\pi)+(8-3i\pi) = -6i\pi$.

2. 计算积分 $\int_{-i}^{i}|z|dz$，

(1) 沿直线段；

(2) 沿圆周 $|z|=1$ 的左半；

(3) 沿圆周 $|z|=1$ 的右半.

解：(1) 令 $z=x+iy$，则线段上有 $x=0$，$y=t\in[-1,1]$，

故 $\int_{-i}^{i}|z|dz = \int_{-1}^{1}|t|(i)dt = i\int_{-1}^{0}(-t)dt + i\int_{0}^{1}tdt = i$.

(2) 令 $z=e^{i\theta}$，则 θ 分为两段：$-\frac{\pi}{2}\to-\pi$ 与 $\pi\to\frac{\pi}{2}$

$\int_{-i}^{i}|z|dz = i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi}e^{i\theta}d\theta + i\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}e^{i\theta}d\theta = e^{i\theta}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi} + e^{i\theta}\Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} = 2i$

(3) 类(2)，只需改变积分上下限，

原式 $= e^{i\theta}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = i-(-i) = 2i$

3. 利用积分估值，证明：

(1) $\left|\int_{-i}^{i}(x^2+iy^2)dz\right| \leqslant 2$，积分路线是直线段；

(2) $\left|\int_{-i}^{i}(x^2+iy^2)dz\right| \leqslant \pi$，积分路线是圆周 $|z|=1$ 的右半.

解：(1) 由长大不等式，$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq Ml$

其中 $l=2$, $M=\max\left|\left|x^2+iy^2\right|\right|=1$. 故

原式 ≤ 2.

(2) 同(1). 此时 $l=\pi$. $M=1$ 故

原式 $\leq \pi$.

4. 证明：$\left|\int_{i}^{2+i}\frac{dz}{z^2}\right| \leqslant 2$，积分路线是直线段.

解：由长大不等式. $M=1$, $l=2$. 故

$$\left|\int_{i}^{2+i}\frac{dz}{z^2}\right| \leq Ml = 2.$$

5. 计算积分 $\int_{|z|=1}\frac{1}{z+2}dz$，并由此证明

$$\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta = 0.$$

由于 $\frac{1}{z+2}$ 在 $|z|\leq 1$ 中解析 故原式 $=0$，（奇点在 $z=-2$. 圆外！）

令 $z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$. 则

$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z+2} = \int_{|z|=1\ 0}^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}+2}d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{i(\cos\theta+i\sin\theta)}{\cos\theta+i\sin\theta+2}d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{(-\sin\theta+i\cos\theta)(\cos\theta+2-i\sin\theta)}{(\cos\theta+2+i\sin\theta)(\cos\theta+2-i\sin\theta)}d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{-2\sin\theta+i(2\cos\theta+1)}{4\cos\theta+5}d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{-2\sin\theta d\theta}{4\cos\theta+5} + i\int_0^{2\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta = 0$$

故 $\int_0^{2\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta = 0$. 又因 $\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}$ 关于 $\theta=\pi$ 轴对称.

即 $\cos(2\pi-\theta)=\cos(\theta)$. 故 $\int_0^{2\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta = 0 = 2\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$.

证毕.

6. 利用牛－莱公式计算下列积分：

(1) $\int_0^{\pi+2i}\cos\frac{z}{2}dz$；　　(2) $\int_{-i}^{i}(1+4iz^3)dz$；

(3) $\int_{-\pi i}^{0}e^{-z}dz$.

解：(1) $\int_0^{\pi+2i}\cos\frac{z}{2}dz = 2\sin\frac{z}{2}\Big|_0^{\pi+2i} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\right) - 0$

$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \sin B\cos A$

$\cos(ix) = \cosh x$, $\sin(ix) = i\sinh x$.

原式 $= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(i) + 2\sin(i)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= 2\cosh(1) = 2\frac{e+\frac{1}{e}}{2} = e + \frac{1}{e}$.

(2) $\int_{-i}^{i}(1+4iz^3)dz = z + iz^4\Big|_{-i}^{i} = 2i$

(3) $\int_{-\pi i}^{0} e^{-z}dz = -e^{-z}\Big|_{-\pi i}^{0} = -(1-e^{i\pi}) = -2$

7. 设 $f(z)$ 在域 D：$|z|>R_0$，$0\leqslant \arg z\leqslant\alpha$，$0<\alpha\leqslant 2\pi$ 内连续，且存在极限

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = A.$$

设 C_R 是位于 D 内的圆弧 $|z|=R$，试证明

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz = iA\alpha.$$

解：由题意，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists R_1>R_0$，s.t. 当 $|z|>R$ 时有 $|zf(z)-A|<\varepsilon$，即

$$\left|f(z)-\frac{A}{z}\right| < \frac{\varepsilon}{|z|}$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz = \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\left(f(z)-\frac{A}{z}+\frac{A}{z}\right)dz = \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\left(f(z)-\frac{A}{z}\right)dz + \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{A}{z}dz$$

$$\int_{C_R}\frac{A}{z}dz = \int_0^{\alpha}\frac{A}{Re^{i\theta}}Rie^{i\theta}d\theta = i\int_0^{\alpha}A\,d\theta = iA\alpha$$

又 $R\to+\infty$ 时 $\left|f(z)-\frac{A}{|z|}\right| < \frac{\varepsilon}{|z|}$，故

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz = iA\alpha.$$

8. 若多项式 $Q(z)$ 比多项式 $P(z)$ 高二次，试证

$$\lim_{R\to\infty}\int_{|z|=R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz = 0.$$

解：不妨令 $P(z) = a_n z^n + \cdots$，$Q(z) = b_{n+2}z^{n+2} + \cdots$

则 $P(z) = z^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right)$，$Q(z) = z^{n+2}\left(b_{n+2} + \cdots + \frac{b_0}{z^{n+2}}\right)$

则 $\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right)}{\left(b_{n+2} + \frac{b_{n+1}}{z} + \cdots + \frac{b_0}{z^{n+2}}\right)}$

则 $\left|\int_{|z|=R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz\right| \le \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|_{max} \cdot 2\pi R$，则

$$\left|\lim_{R\to+\infty}\int_{|z|=R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz\right| \le \lim_{R\to+\infty}\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|_{max} \cdot 2\pi R = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R^2}\frac{a_n}{b_{n+2}}\cdot 2\pi R = 0$$

故 $\lim_{R\to+\infty}\int_{|z|=R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0$

9. 求积分 $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$，并证明 $\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = \pi$.

解：令 $z = x+iy$，由 $|z|=1$，令 $x=\cos\theta, y=\sin\theta$，$\theta\in[0,2\pi]$，故

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta)]}{\cos\theta+i\sin\theta}(-\sin\theta+i\cos\theta)\,d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta)]$$

$$= -\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\,d\theta + i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta$$

由 e^z 是整函数及 Cauchy 公式 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$，有

$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z-0} dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i$，故 $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta = 2\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = 2\pi$.

即证 $\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = \pi$.

10. 求积分 $\int_C \frac{e^z}{1+z^2} dz$，其中，C 为

(1) $|z-i|=1$；(2) $|z+i|=1$；(3) $|z|=2$.

解：(1) $\int_C \frac{e^z}{1+z^2} dz = \int_C \frac{e^z}{(z+i)(z-i)} dz = \int_C \frac{\frac{e^z}{z+i}}{z-i} dz$，此时 $f(z)=\frac{e^z}{z+i}$

在 $|z-i|=1$ 区域中解析，故原式 $= 2\pi i f(i) = \pi(\cos 1 + i\sin 1)$

(2) 同(1)、但是奇点有变，故化为 $\displaystyle\int_C \frac{\frac{e^z}{z-i}}{z+i}dz = -\pi e^{-i}$

$= -\pi(\cos 1 - i\sin 1)$

(3) 此时 i 与 $-i$ 都在 $|z|\le 2$ 中.

使用 Cauchy 定理的推广，此时 (1)、(2) 中两个小圆包含在 (3) 中

故 $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{1+z^2}dz = \pi(\cos 1 + i\sin 1) - \pi(\cos 1 - i\sin 1) = 2i\sin 1$.

11. 计算 $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{dz}{z^2(z+1)(z-1)}$，$r \neq 1$.

解：① 当 $r<1$ 时，有 $z=0$ 一个奇点

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{z^2(z+1)(z-1)} = \int_{|z|=r} \frac{dz}{z^2(z^2-1)} = \frac{1}{2}\int_{|z|=r}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)dz - \int_{|z|=r}\frac{dz}{z^2}$$

此处前一项在 $|z|\le r$ 中解析，故为0，后一项由 Cauchy 公式有

$-\displaystyle\int \frac{1}{(z-0)^{1+1}}dz = \frac{-2\pi i}{1!}(1)' = 0$，故原式 $=0$

② 当 $r>1$ 时有 $i, -i, 0$ 三个奇点，由

原式 $= \displaystyle\frac{1}{2}\int_{|z|=r}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)dz - \int_{|z|=r}\frac{dz}{z^2} = \frac{1}{2}(2\pi i - 2\pi i) - 0 = 0$

(注意设 $f(z)=1$)

12. 计算 $\displaystyle\int_C \frac{z\,dz}{(9-z^2)(z+i)}$，其中，$C$ 为：

(1) $|z| = 2$；　　(2) $|z| = \frac{10}{3}$.

解：(1) 有 $3, -3, -i$ 三个奇点，此时只有 $-i$，则

原式 $= \displaystyle\int_C \frac{\left(\frac{z}{9-z^2}\right)}{z-(-i)}dz = \left.\frac{z}{9-z^2}\right|_{z=-i} 2\pi i = \frac{\pi}{5}$

(2) 此时3个奇点均在内，则分解因式

$$\frac{z}{(9-z^2)(z+i)} = \frac{z}{(3+z)(3-z)(z+i)} = \frac{A}{3+z} + \frac{B}{3-z} + \frac{C}{z-i}$$

则 $\frac{z}{(3-z)(z+i)} = A + \frac{(3+z)B}{3-z} + \frac{(3+z)C}{z-i}$，令 $z=-3$ 则 $A=\frac{3+i}{20}$

同理 $B=\frac{3-i}{20}$ $C=\frac{-i}{10}$，故

原式 $= 2\pi i\left(\frac{3+i}{20} - \frac{3-i}{20} - \frac{i}{10}\right) = 0$.

13. 设 $g(z_0) = \int_C \frac{2z^2 - z + 1}{z - z_0} dz$，其中，$C$ 为圆周 $|z| = 2$ 取正向：

(1) 证明 $g(1) = 4\pi i$；(2) 当 $|z_0| > 2$ 时，$g(z_0) = ?$

解：(1) $g(z_0) = \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i(2z_0^2 - z_0 + 1)$

故 $g(1) = 4\pi i$

(2) 此时被积函数在闭区中解析，故

$g(z_0) = 0$

14. 计算 $\int_C \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^2}$，其中，$C$ 为包围 i 且位于上半平面的闭路.

解：$\frac{z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{1+z^2} - \left(\frac{1}{1+z^2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{(z-i)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{(z+i)^2}$

第三个式子奇点 $z=-i$ 不在上半平面，故积分为0

对 $\frac{1}{2}\int_C \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2}\int_C \frac{\left(\frac{1}{z+i}\right)}{z-i} dz = \frac{1}{2}(2\pi i)\left(\frac{1}{2i}\right) = \frac{\pi}{2}$

对 $\frac{1}{4}\int_C \frac{1}{(z-i)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!}(1)' = 0$，故原式 $= \frac{\pi}{2}$.

15. 设 $p(z) = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)$，其中，$a_i(i=1,\cdots,n)$ 各不相同，闭路 C 不通过 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，证明积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{p'(z)}{p(z)} dz$$

等于位于 C 内的 $p(z)$ 的零点的个数.

提示 $\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z-a_1} + \frac{1}{z-a_2} + \cdots + \frac{1}{z-a_n}$.

解：由提示可知，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{p'(z)}{p(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\frac{1}{z-a_1}+\cdots+\frac{1}{z-a_n}\right)dz$$

对于 $\int_C \frac{1}{z-a_k}dz$，其为 $2\pi i\cdot 1 = 2\pi i$，故原式 $=n$，即有 n 个零点.

16. 试证明不存在这样的函数，它在闭单位圆 $|z|\leqslant 1$ 上解析，而在单位圆周上的值为 $1/z$.

解：若 $f(z)$ 在 $|z|\leq 1$ 解析，则 $\int_{|z|=1} f(z)dz = 0$，

若 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 上值为 $\frac{1}{z}$，则令 $z=e^{i\theta}$，

$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z} = i\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta+i\sin\theta}d\theta = 2\pi i \neq 0.$$ 矛盾. 故不存在这样的函数.

17. 试证明下述定理（无界区域的柯西积分公式）：设 $f(z)$ 在闭路 C 及其外部区域 D 内解析，且 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = A \neq \infty$. 则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases} -f(z)+A, & z\in D \quad ① \\ A, & z\in C \text{ 的内部区域}. \quad ② \end{cases}$$

提示 当 $z\in D$ 时，以充分大的 R 为半径作圆周 $\Gamma: |\zeta| = R$. 使 z 在复闭路 $L = \Gamma + C^-$ 内. 则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = f(z).$$

再证明

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = A.$$

解：在 L 围成闭路中有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

则 $$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = -f(z) + \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz \qquad (*)$$

下证 $\lim\limits_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = A$：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz - A = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\frac{f(z)}{z-z_0} - \frac{A}{z-z_0}\right)dz - A + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{A}{z-z_0}dz.$$

又 $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{A}{z-z_0}dz = A$. 故 $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz - A = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\frac{f(z)}{z-z_0} - \frac{A}{z-z_0}\right)dz$

而 $\lim\limits_{R\to+\infty}(f(z)-A) = 0$. 故 $\lim\limits_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)-A}{z-z_0}dz = \lim\limits_{R\to+\infty}(f(z)-A) = 0$.

故 $\lim\limits_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0} = A$.

对 $(*)$ 两边取 $\lim\limits_{R\to+\infty}$，则有 ①.

由 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-}\frac{f(z)}{z-z_0} = 0$，得

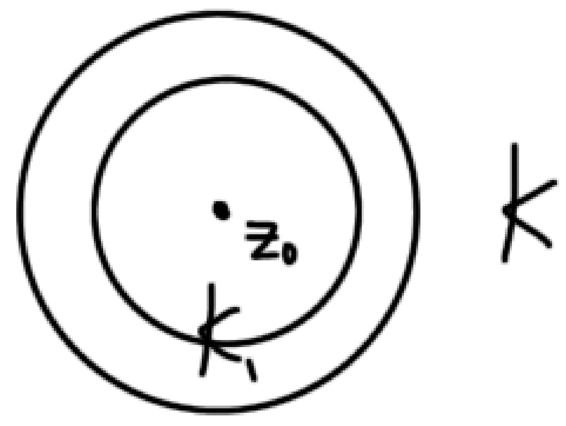
$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0} = A$，则有② 证毕.

18. 如果 $f(z)$ 是区域 D 内不恒为常数的解析函数且没有零点，证明 $|f(z)|$ 不可能在 D 内达到最小值.

解：不妨令 $M = |f(z_0)|$ 为 $|f(z)|$ 的最小值，则以 z_0 为圆心，R 为半径作圆 K

对 K 的任意同心圆周 K_1，$\zeta = z_0 + re^{i\theta}$，$r \le R$，有

$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_{K} f(\zeta)ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta$，



若令 $g(z) = \frac{1}{f(z)}$，由 $f(z)$ 无零点知 $g(z)$ 也在 D 中解析.

也即 $|g(z)|$ 在 $z = z_0$ 处取最大值.

$$\frac{1}{M} = |g(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(z_0+re^{i\theta})|d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{M}d\theta = \frac{1}{M}$$

故 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{M} - |g(z_0+re^{i\theta})|\right)d\theta = 0$，即 $|g(z_0+re^{i\theta})| = \frac{1}{M}$.

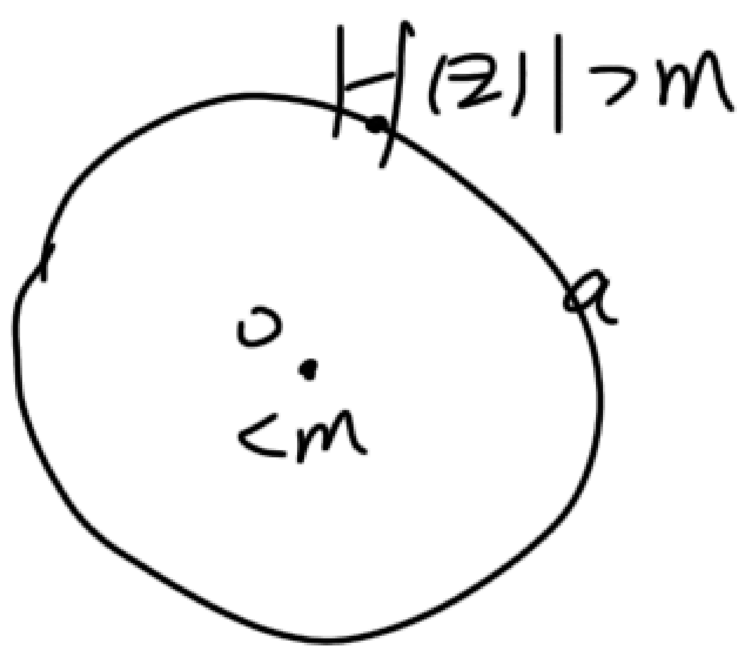
故在圆周 K_1 上有 $|g(z)| = \frac{1}{M}$，同书本证明过程可知 $g(z)$ 为常数

即 $g(z)$，$f(z)$ 为常数，与题设矛盾. 故 $|f(z)|$ 不可能在 D 内取 min

19. 设 $f(z)$ 在 $|z| \leqslant a$ 解析，在圆周 $|z| = a$ 上有 $|f(z)| > m$，且 $|f(0)| < m$，证明 $f(z)$ 在 $|z| < a$ 内至少有一个零点.

解：假设 $f(z)$ 在 $|z| < a$ 内至少有一个零点.

则 $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ 也在 $|z| \le a$ 中解析



由最大模原理，$|g(z)|$ 最大值在 $|z| = a$ 上得到.

但 $|g(0)| = \frac{1}{|f(0)|} > \frac{1}{m} > \frac{1}{|f(z')|} = |g(z')|$

其中 $|z'| = a$. 产生矛盾. 故

$f(z)$ 在 $|z| < a$ 内至少有一个零点.

20. 利用 19 题结果，证明代数学基本定理.

$f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a_1z+a_0=0$ 在全平面解析.

$|f(z)|=|a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0|$,

$|f(0)|=|a_0|$,只需找到 m, r 使 $f(z)$ 在 $|z|=r$ 上有 $|f(z)|>m>|a_0|=|f(0)|$.

令 $f(z)=z^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right)$，当 $|z|\to+\infty$, $|f(z)|\to+\infty$.

也即 $\forall R_1>0$, $\exists z_1$ 使当 $|z|>|z_1|$ 时总有 $|f(z)|>R_1$.

当上述 $R_1=|a_0|$ 时. 在 $|z|=|z_1|+1$ 上有 $|f(z)|>|a_0|$. 则有 $m=\frac{|f(z)|+|a_0|}{2}$

再由 19 题可知 $f(z)$ 在域内必有根