① $x^2+y^2=R^2 \Longrightarrow 4(\xi^2+\eta^2)=R^2(2-\xi)^2$

② 纬圆：$\begin{cases} \xi^2+\eta^2+(\zeta-1)^2=1 \\ \zeta=\dfrac{2R^2}{R^2+4} \end{cases}$

③ 赤道：$\begin{cases} \xi^2+\eta^2=1 \\ \zeta=1 \end{cases}$ （映成 $R=2$ 圆）

无穷：

$|\infty|=+\infty$，若 $a\neq0$，$a\cdot\infty=\infty$，$\frac{a}{0}=\infty$

若 $a\neq+\infty$，$\frac{a}{\infty}=0$，$a\pm\infty=\infty$，$\frac{a}{\infty}=0$，$\frac{\infty}{a}=\infty$

扩充平面/闭平面（Riemann 球 + 复平面）

原来开平面：开平面/有限平面

二. 复变数函数

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续

$\Longleftrightarrow$ $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 作为二元函数在 (x_0,y_0) 处连续

$w=f(z)$ $\lim\limits_{\Delta z\to0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)=\dfrac{df}{dz}=\dfrac{dw}{dz}$

若 $f(z)$ 在 D 每一点可微，则称 $f(z)$ 在 D 解析（不解析称为奇点）

$\begin{cases} w=f(z) \\ z=\varphi(w) \end{cases} \Rightarrow f'(z)=\dfrac{1}{\varphi'(w)}$.

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z=x+iy$（区域 D）可微 $\Longleftrightarrow$

$\begin{cases} \text{二元函数 } u(x,y),\ v(x,y) \text{ 可微} \\ u(x,y)\ \&\ v(x,y) \text{ 满足 C-R 方程} \end{cases}$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

有 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

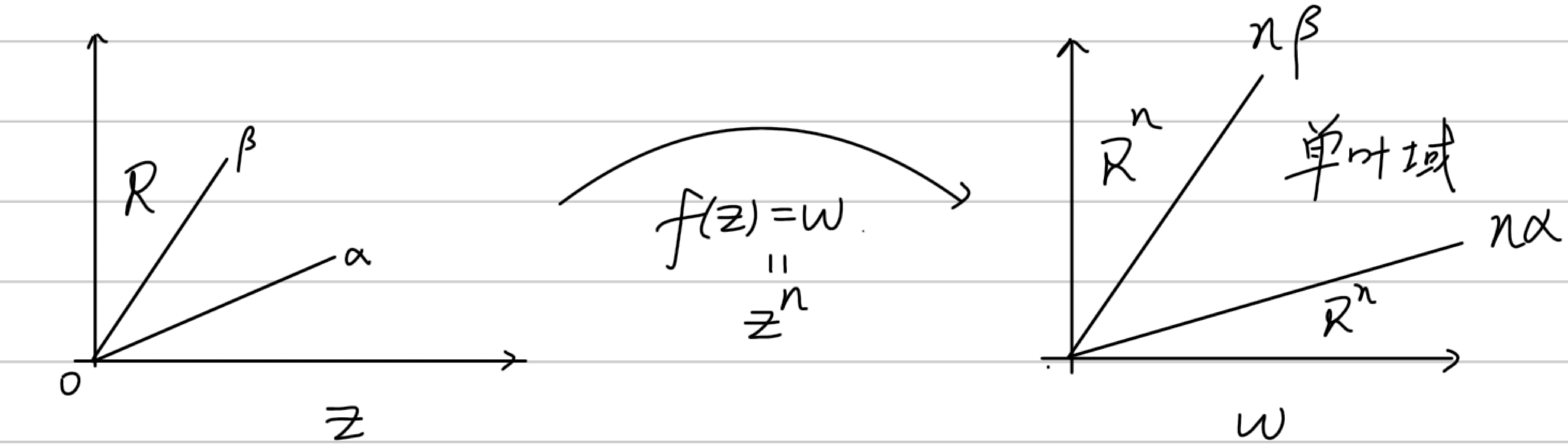
$=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$

若 $w=f(z)$ 是D内一一解析映照，称 $f(z)$ 是D内单叶函数，D是 $f(z)$ 的单叶性区域.

幂函数

$w=z^n$

$z=\sqrt[n]{|w|}\exp\left(i\frac{\arg w+2k\pi}{n}\right)$



角域 $0<\arg z<\frac{\pi}{n} \longrightarrow 0<\arg w<\pi$ （上半平面）

反函数： $z=(\sqrt[n]{w})_0=\sqrt[n]{|w|}\exp\left(i\frac{\arg w}{n}\right)$ $(-\pi<\arg w<\pi)$

D_k: $\frac{2k-1}{n}\pi<\arg z<\frac{2k+1}{\pi}n$ $(k=0,1,2\cdots n-1)$ $\xrightarrow{\text{单叶}}$ 切开负实轴的平面

根式函数

正向闭曲线绕 $|k|$ 圈，$\Delta\arg z=2k\pi$. （k可小于0）

支点：在 $z=a$ 充分小邻域内作闭曲线C. z绕C区线一圈，$f(z)$ 的值就变化一次.
称 $z=a$ 为支点.

支割线& 多值函数的单值解析分支

取一条 曲线/直线割开z平面而取G, 使所有支点不包含在G中.

那么 G为一个单值解析分支 (、$w=\sqrt[n]{z}$ 有n个分支)

取负实轴为支割线, 则 $w=\sqrt[n]{r}$ 有n个单值分支

$$w_k = w_{k-1}\exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\exp\left(i\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right)$$

$$(2k-1)\pi < \arg z < (2k+1)\pi \quad , k=0,1,2\cdots$$

一般取原支割线辐角较大的沿为上界.

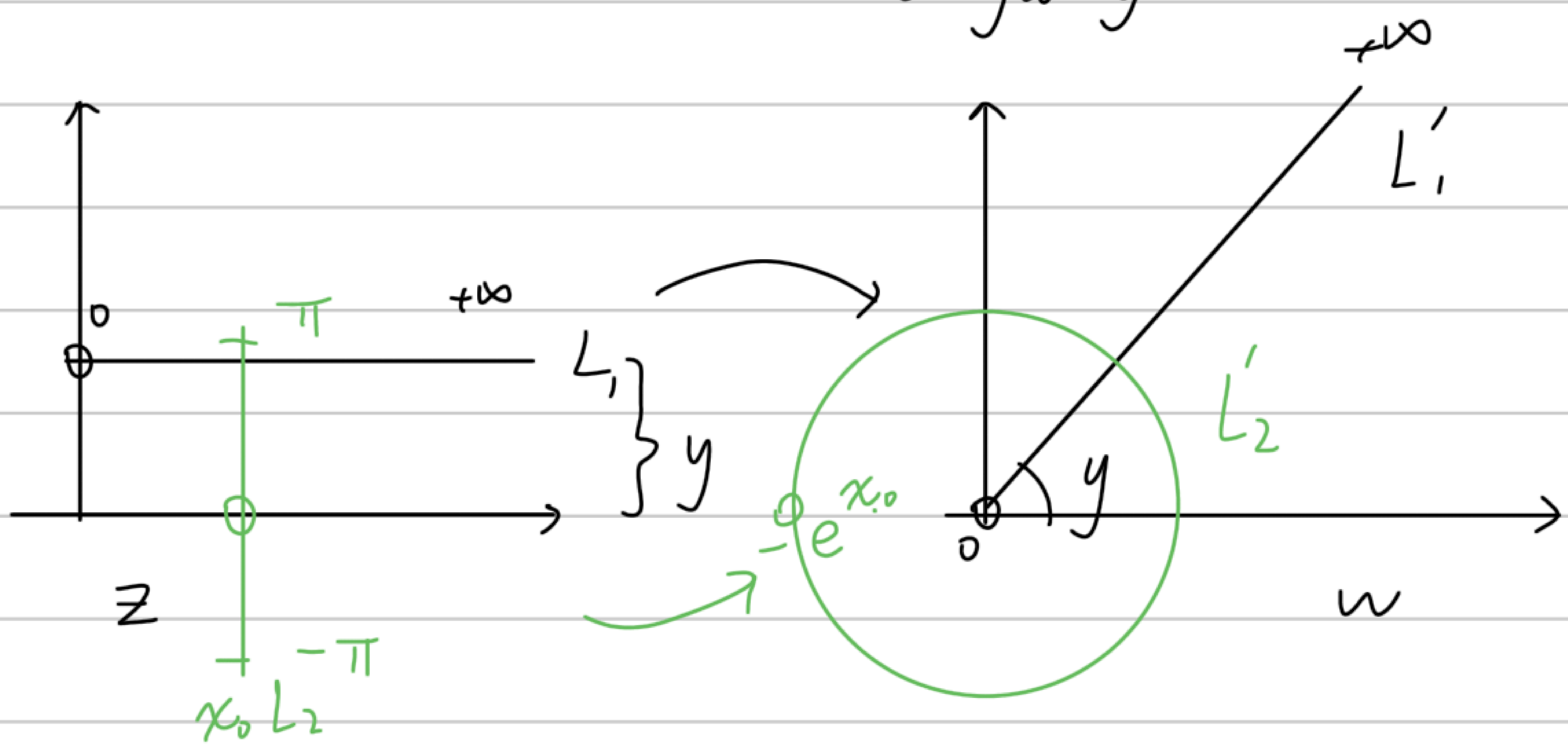
$$\frac{dw_k}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{n w_k^{n-1}} = \frac{w_k}{nz}.$$

支割线两岸的函数值

一般支割线两岸的函数值不同.

指数函数 $w=e^z$

令 $z=x+iy$, 则 $w=e^x e^{iy}$, 即 $\begin{cases}|w|=e^x\\ \arg w=y\end{cases}$



$w=e^z$ 将条形域 $a<\mathrm{Re}\,z<b$, $b-a\le 2\pi$ 单叶映为 $\alpha<\arg w<b$

将条形域 $(2k-1)\pi<\mathrm{Im}\,z<(2k+1)\pi$. $k=0,\pm1,\cdots$ 单叶映为沿负半轴剪开的复平面.

对数函数

$$\mathrm{Ln}z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}z = \ln|z| + i\arg z + i2k\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2\cdots$$

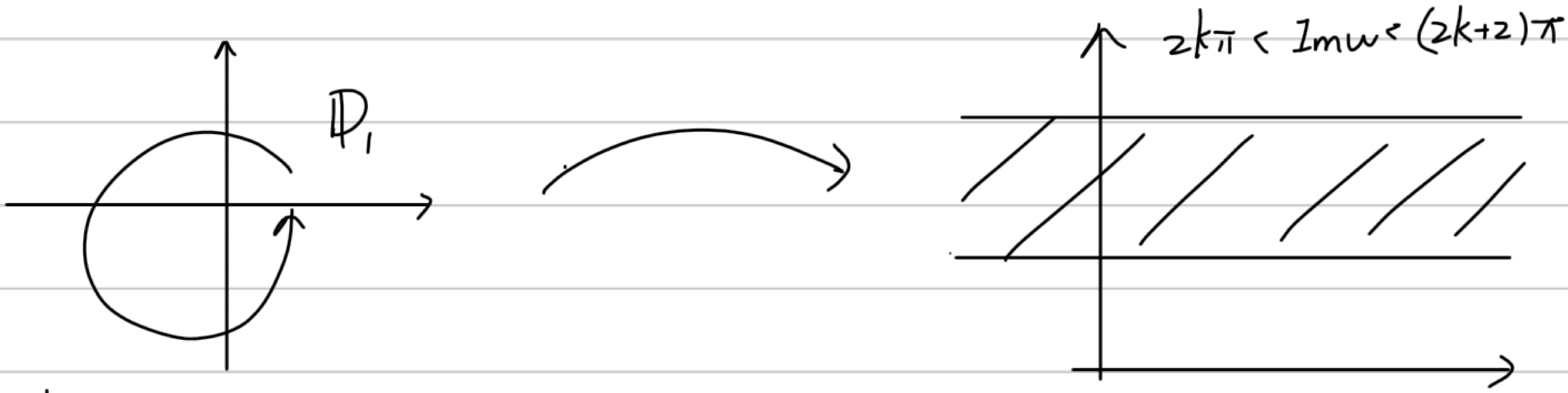
只有 0 和 ∞ 是支点，

沿实正半轴割开

$$w_k = \ln|z| + i\arg z + i2k\pi \qquad 0 < \arg z < 2\pi$$

沿实负半轴割开

$$w_k = \ln|z| + i\arg z + i2k\pi \qquad -\pi < \arg z < \pi$$



$$2k\pi < \arg z < (2k+2)\pi$$

三角函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos iz = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y})$$

双曲函数

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \cos iz \qquad \tanh z = -i\tan iz$$

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = -i\sin iz \qquad \coth z = i\cot iz$$

一般幂函数

$$w=z^{\alpha}=\exp(\alpha\, \mathrm{Ln} z)=\exp\{\alpha[\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)]\}$$

① α 为正整数 n　　单值函数

$$z^{n}=\exp[n(\ln|z|+i\arg z)]=|z|^{n}\exp(in\arg z)$$

② $\alpha=\frac{1}{n}$, n 为正整数　　n 值函数

$$z^{1/n}=|z|^{1/n}\exp i\left(\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right)\qquad z^{m/n}=\sqrt[n]{z^{m}}$$

③ α 为无理数或一般复数　　$(\mathrm{Im}\,\alpha\neq 0)$ 无穷多值

反三角函数

无穷多值　　二值函数

$$w=\mathrm{Arcsin} z=-i\,\mathrm{Ln}(iz+\sqrt{1-z^{2}})$$

$$\mathrm{Arccos} z=-i\,\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^{2}-1})$$