2022～2023 学年第二学期第一次月考试卷参考答案

《高等数学 2B》（共 3 页）

考试时间：2023 年 3 月 31 日（14:00-16:00）

题号	一	二	三	成绩	核分人签字
得分					

一、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

1. 设函数 $z(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})}$ 和 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-x}\sin\dfrac{x}{y}+\mathrm{e}^{-x}\cos\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{-x}\cos\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{-x}{y^2}$，

$\therefore\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})}=\pi\mathrm{e}^{-2}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})}=-2\pi^2\mathrm{e}^{-2}$.

2. 设 $z=f(u,x,y)$，$u=x\mathrm{e}^y$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_2'=f_1'\cdot\mathrm{e}^y+f_2'$，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f_1'\cdot\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^y\left[f_{11}''\cdot x\mathrm{e}^y+f_{13}''\right]+f_{21}''\cdot x\mathrm{e}^y+f_{23}''\\&=\mathrm{e}^y f_1'+x\mathrm{e}^{2y}f_{11}''+\mathrm{e}^y f_{13}''+x\mathrm{e}^y f_{21}''+f_{23}''.\end{aligned}$$

3. 求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-24xy$ 的极值.

解：由 $\begin{cases}f_x'=3x^2-24y=0,\\ f_y'=24y^2-24x=0\end{cases}$ 解得驻点 $P_1(0,0)$, $P_2(4,2)$.

$f_{xx}''=6x,\ f_{xy}''=-24,\ f_{yy}''=48y.$

在 $P_1(0,0)$ 处，$A=C=0,\ B^2-AC>0$，故 $P_1(0,0)$ 不是极值点;

在 $P_2(4,2)$ 处，$A=24,C=96,\ B^2-AC<0$，且 $A>0$，故 $P_2(4,2)$ 是极小值点，

函数 $f(x,y)$ 有极小值 $f(4,2)=-64$.

4. 求旋转椭球面 $\dfrac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x+y+2z=0$ 的切平面方程.

解：设切点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$， 令 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{4}+y^2+z^2-1$，则

$\left.F_x'\right|_{M_0}=\dfrac{x_0}{2}$，$\left.F_y'\right|_{M_0}=2y_0$，$\left.F_z'\right|_{M_0}=2z_0$.

由于切平面平行于 $x+y+2z=0$，令 $\left(\dfrac{x_0}{2},2y_0,2z_0\right)=k(1,1,2)$，则

$x_0=2k,\ y_0=\dfrac{1}{2}k,\ z_0=k$，代入椭球面方程 $\dfrac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$，有

$k^2+\dfrac{k^2}{4}+k^2=1$，$\therefore k=\pm\dfrac{2}{3}$， 切点为 $M_0(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3})$ 或 $M_0(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3})$.

故所求切平面方程为 $x+y+2z=\pm3$.

二、计算题（第 1-3 小题每小题 8 分，第 4 小题 12 分，共 36 分）

1. 设 $u = f(x^2+y^2+z^2)$， f 为可微函数，由方程 $3x+y^3+2z^2=6xyz$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 在 $M(1,1,1)$ 处的值.

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x} = f'(x^2+y^2+z^2)\cdot\left(2x+2z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$.

令 $F(x,y,z)=3x+y^3+2z^2-6xyz$，则

$F'_x = 3-6yz$，$F'_z = 4z-6xy$，$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = -\dfrac{3-6yz}{4z-6xy}$，

$\therefore \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -\dfrac{3}{2}$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_M = f'(3)\cdot(2-3) = -f'(3)$.

2. 求函数 $f(x,y)=\sin x\sin y\sin(x+y)$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\, x\ge 0, y\ge 0, x+y\le \pi\right\}$ 上的最大值与最小值.

解：由 $\begin{cases} f_x{}' = \sin y\left[\cos x\sin(x+y)+\sin x\cos(x+y)\right] = \sin y\sin(2x+y)=0, \\ f_y{}' = \sin x\sin(x+2y)=0, \end{cases}$

在区域 D 内，得到唯一驻点 $(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3})$，$f(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

在区域 D 的边界上，$f(x,y)\equiv 0$.

由于 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，$f(x,y)$ 在 D 上必取得最大值与最小值，且最大值与最小值在 D 内的驻点处或者在 D 的边界上取得.

综上， $f(x,y)$ 在 D 上的最小值为 0，最大值为 $f(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

3. 求曲线 $\begin{cases} x^2=3y, \\ 2xy=9z \end{cases}$ 在点 $M(3,3,2)$ 处的切线方程与法平面方程.

解：曲线的参数方程为 $x=x, y=\dfrac{1}{3}x^2, z=\dfrac{2}{27}x^3$.

切向量 $\boldsymbol{s} = \left.(1,\dfrac{2}{3}x,\dfrac{2}{9}x^2)\right|_M = (1,2,2)$,

故所求切线方程为 $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{2}$,

法平面方程为 $x-3+2(y-3)+2(z-2)=0$，即 $x+2y+2z-13=0$.

4. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 求 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$，并讨论

(1) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微； (2) $f'_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续.

解：$f(x,0)\equiv 0, f(0,y)\equiv 0$，$\therefore f'_x(0,0)=0$，$f'_y(0,0)=0$.

(1) 记 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$， 则

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z - f_x{}'(0,0)\Delta x - f_y{}'(0,0)\Delta y}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\rho}\sin\frac{1}{\rho^2} = 0,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

(2) 当 $(x,y)\ne(0,0)$ 时，$f'_x(x,y) = y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} + xy\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$,

由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\dfrac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}}\dfrac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = -\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ 不存在,

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} = 0$，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y)$ 不存在，$f'_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

三、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

1. 求函数 $u=\ln(1+z^2)+x^2+y^2$ 在 $M(1,1,1)$ 处沿着曲线 $L:\begin{cases}x=t,\\ y=2t^2-1,\\ z=t^3\end{cases}$ 在点 M 处的切线方向的方向导数.

解: $\mathbf{grad}\,u\big|_M=\left.(2x,2y,\dfrac{2z}{1+z^2})\right|_M=(2,2,1),$

切向量 $\boldsymbol{s}=(1,4t,3t^2)\big|_{t=1}=(1,4,3)$，与 $\boldsymbol{s}$ 平行的单位向量为 $\boldsymbol{l}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{26}}(1,4,3),$

故所求方向导数为 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}=\mathbf{grad}\,u\big|_M\cdot\boldsymbol{l}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{26}}(2,2,1)\cdot(1,4,3)=\pm\dfrac{13}{\sqrt{26}}=\pm\dfrac{\sqrt{26}}{2}.$

2. 计算 $\iint\limits_D|x+y-1|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le1,\ 0\le y\le1\}$.

解法一: 记 $D_1=\{(x,y)\,|\,0\le y\le1-x,0\le x\le1\}$, $D_2=\{(x,y)\,|\,1-x\le y\le1,0\le x\le1\}$, 则

$$I=\iint\limits_D|x+y-1|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x+y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\,\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^1(x+y-1)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac12\int_0^1(1-x)^2\mathrm{d}x+\int_0^1\left[x(x-1)+\frac{1-(1-x)^2}{2}\right]\mathrm{d}x\quad=\frac16+\frac16=\frac13.$$

解法二: 由对称性,

$$I=2\iint\limits_{D_1}(1-x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1(1-x)^2\mathrm{d}x=\frac13.$$

3. 计算 $I=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是 $y=\sqrt{1-x^2},y=x,x=0$ 所围成的区域.

解法一: 采用直角坐标系,

$$I=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\left(1-x^2-x\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(x-\frac13x^3+\frac13(1-x^2)^{\frac32}\right)\right|_0^{\frac{\sqrt2}{2}}=\frac{\sqrt2}{2}-\frac13.$$

解法二: 采用极坐标系，令 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，则

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1-\rho^2\cos^2\theta}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2\theta}{3}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac13\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sec^2\theta-\sin\theta\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta=\frac13\left.\left(\tan\theta-\sec\theta-\cos\theta\right)\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt2}{2}-\frac13.$$

4. 计算 $I=\iint\limits_D\dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le2x\}$.

解法一: 采用极坐标系，令 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，则

$$I=\iint\limits_D\frac{x^2+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{x^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(\text{对称性})$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\cos^2\theta\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac34\pi.$$

解法二: 采用直角坐标系,

$$I=\iint\limits_D\frac{x^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\frac{x^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^2x\arctan\sqrt{\frac2x-1}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\frac{2}{t^2+1}\arctan t\cdot\frac{4t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t\quad(\text{令}\ t=\sqrt{\frac2x-1})$$

$$\overset{\theta=\arctan t}{=\!=\!=}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\,\mathrm{d}(\cos^4\theta)=-4\theta\cos^4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{4}.$$