

# Цель работы

- Построить модель «хищник - жертва» Лотки - Вольтерры:
  - Построить следующие графики зависимости:
    - $x$  от  $y$ .
    - $x(t), y(t)$ .
  - Найти стационарное состояние системы

## Задание №43

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -0.28x(t) + 0.028x(t)y(t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 0.29y(t) - 0.029x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} x_0 &= 7 \\ y_0 &= 21 \end{aligned}$$

Найдите стационарное состояние системы.

## Краткая теоретическая справка

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник-жертва» — модель Лотки-Вольтерры. Данная двухвидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв  $x$  и хищников  $y$  зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса (по экспоненциальному закону), при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

В этой модели  $x$  – число жертв,  $y$  – число хищников. Коэффициент  $a$  описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников,  $c$  – естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников  $xy$ . Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены  $-bxy$  и  $dx$  в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (положение равновесия, не зависящее от времени решения). Если начальное состояние будет другим, то это приведет к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в начальное состояние.

Стационарное состояние системы будет в точке:

$$x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$$

Если начальные значения задать в стационарном состоянии

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0$$

, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей  $x(0)$ ,  $y(0)$ . Колебания совершаются в противофазе.

## Выполнение лабораторной работы

---

### Код работы

model lab05

constant Real a = 0.28; //сметность хищников

constant Real b = 0.028; // прирост жертв

constant Real c = 0.29; // прирост хищников

constant Real d = 0.032; // смртность жертв

Real x;

Real y;

initial equation // начальные условия

x = 7;

y = 21;

equation

der(x) = -ax + bxy;

der(y) = cy - dxy;

end lab05;

### Стационарное состояние системы

$$x_0 = \frac{0.29}{0.029}$$
$$y_0 = \frac{0.28}{0.028}$$

### Графики

*Зависимость изменения численности хищников от изменения численности жертв (рис.01).*

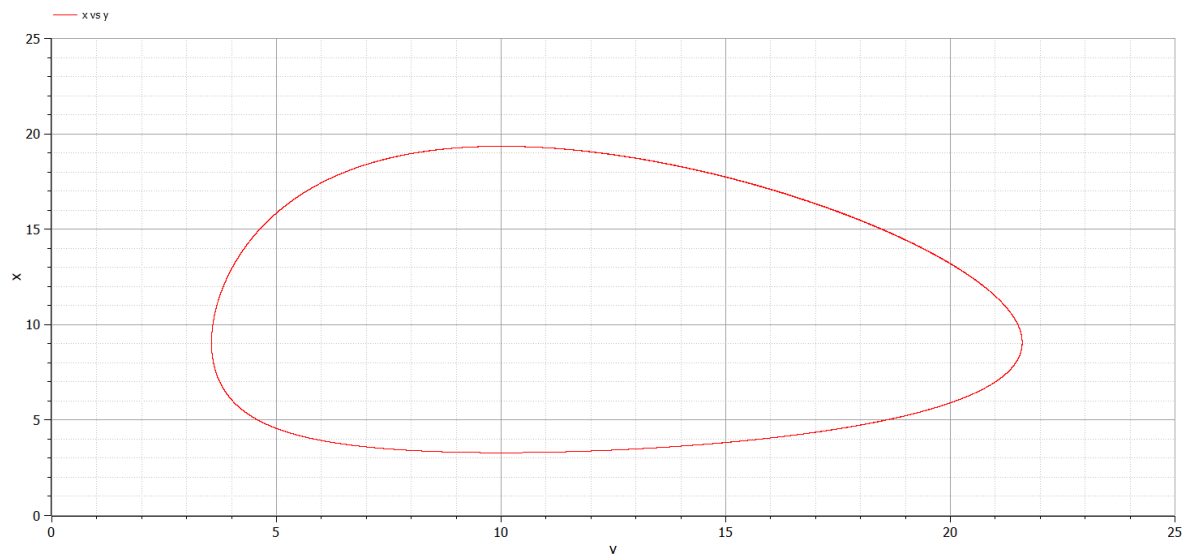


рис.01

Зависимость численности хищников и жертв от времени (рис.02).

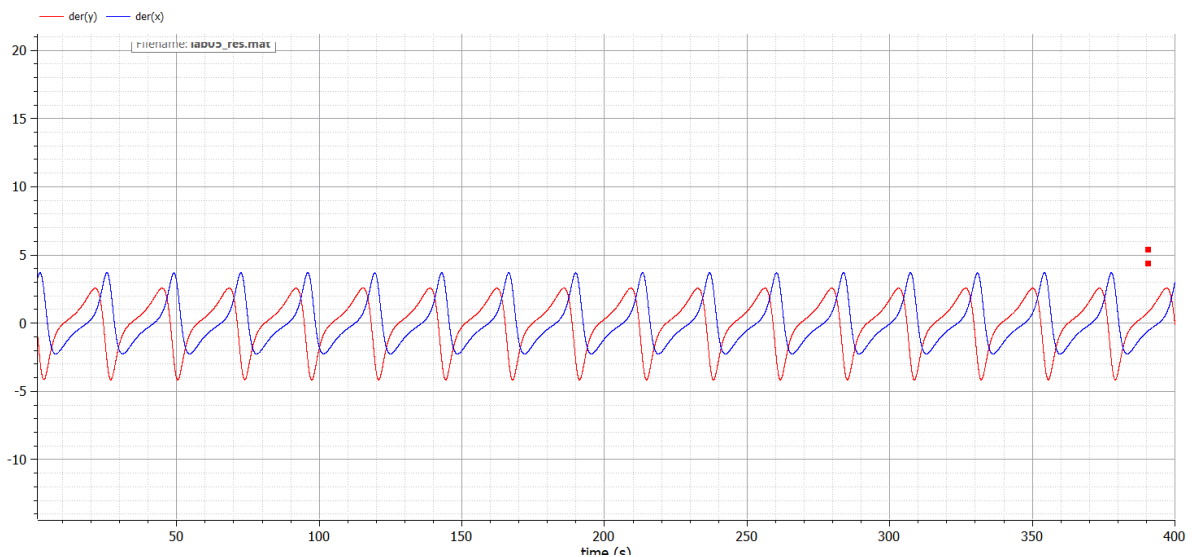


рис.02

## Вывод

Построили модель «хищник - жертва» Лотки - Вольтерры.

Построили следующие графики зависимостей:  $x$  от  $y$  и  $x(t)$ ,  $y(t)$ .

Нашли стационарное состояние системы.

## Список литературы

Кулябов Д.С "Лабораторная работа №5": [https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1343813/mod\\_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%204.pdf](https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1343813/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%204.pdf)

