

Proyecto A: Optimización en la Planeación de Transporte Vehicular Urbana para LogistiCo

Diego Pulido - Marco Ramirez - Daniel Fuentes

21 de marzo de 2025

Índice

1. Introducción	2
2. Formulación Matemática del Modelo	2
2.1. Definición de Conjuntos	2
2.2. Definición de Parámetros	2
2.3. Variables de Decisión	3
2.4. Función Objetivo	3
2.5. Restricciones	3
3. Proceso de Indagación y Función Objetivo	5
4. Preprocesamiento de Datos y Análisis	5
5. Ejemplos Ilustrativos	6
6. Justificación y Discusión	6
7. Conclusiones	7

1. Introducción

El presente documento tiene como objetivo presentar la formulación matemática completa para el problema de optimización en la asignación de inventario y planificación de rutas para LogistiCo, en el contexto de la Urban Logistics en Bogotá. Se busca **minimizar los costos operativos y de transporte, considerando las limitaciones reales del negocio**: capacidad de almacenamiento en centros de distribución, demanda en zonas de entrega, capacidades y rangos operativos de los vehículos, entre otros.

2. Formulación Matemática del Modelo

2.1. Definición de Conjuntos

D Conjunto de centros de distribución (depots).

$$D = \{CD1, CD2, CD3\}$$

C Conjunto de clientes o zonas de entrega.

$$C = \{C1, C2, C3\}$$

N Conjunto de todos los nodos (centros de distribución y clientes).

$$N = D \cup C$$

V Conjunto de vehículos disponibles.

$$V = \{V1, V2, V3\}$$

A Conjunto de arcos o rutas posibles entre nodos, definidos por:

$$A = \{(i, j) \in N \times N \mid i \neq j\}$$

2.2. Definición de Parámetros

A continuación se listan las constantes y datos operativos:

P1: Distancias: d_{ij} es la distancia en kilómetros entre los nodos i y j , obtenida mediante la fórmula de Haversine.

$$d_{ij} = \text{haversine}(\text{lat}_i, \text{lon}_i, \text{lat}_j, \text{lon}_j)$$

P2: Demanda: q_j representa la demanda en unidades del cliente j .

Para $j \in C$, se tiene que:

$$q_j = \begin{cases} 50, & \text{si } j = C1, \\ 80, & \text{si } j = C2, \\ 65, & \text{si } j = C3. \end{cases}$$

Además, para los centros de distribución $i \in D$, se asume $q_i = 0$.

P3: Stock en Depots: s_i es el inventario disponible en el centro de distribución $i \in D$.

$$s_{CD1} = 20000, \quad s_{CD2} = 50000, \quad s_{CD3} = 30000.$$

P4: Capacidad de Vehículos: cap_v es la capacidad máxima en unidades del vehículo $v \in V$.

$$cap_{V1} = 100, \quad cap_{V2} = 80, \quad cap_{V3} = 150.$$

P5: Rango Operativo: r_v es el rango máximo (en km) que puede recorrer el vehículo $v \in V$.

$$r_{V1} = 120, \quad r_{V2} = 100, \quad r_{V3} = 150.$$

P6: Constantes de Costo: Se consideran las siguientes constantes:

- Tarifa de flete: $F_t = 5000$ COP/km.
- Costo de mantenimiento: $C_m = 700$ COP/km.
- Precio del combustible: $P_f = 15000$ COP/litro.
- Consumo de combustible: 0,1 litros/km, lo que implica un costo por km de:

$$\text{Costo de combustible} = P_f \times 0,1 = 1500 \text{ COP/km.}$$

Se define el factor de costo total por km como:

$$c = F_t + C_m + 1500 = 7200 \text{ COP/km.}$$

2.3. Variables de Decisión

Se definen las siguientes variables:

X1: Ruta: $x_{vij} \in \{0, 1\}$, que vale 1 si el vehículo $v \in V$ viaja directamente del nodo i al nodo j , y 0 en caso contrario.

$$x_{vij} = \begin{cases} 1, & \text{si el vehículo } v \text{ recorre el arco } (i, j), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

X2: Flujo de Inventario: $f_{vij} \geq 0$, cantidad de inventario (en unidades) transportado por el vehículo v en el arco (i, j) .

X3: Variable Auxiliar para Eliminación de Subtours: u_{vi} , que representa la posición del nodo i en la ruta del vehículo v . Se utiliza en la formulación de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) para eliminar ciclos.

X4: Variables de Depósito de Inicio y Fin:

$$\begin{aligned} \text{start}_{vd} \in \{0, 1\} & \quad \text{indica si el vehículo } v \text{ inicia en el depósito } d \in D, \\ \text{end}_{vd} \in \{0, 1\} & \quad \text{indica si el vehículo } v \text{ termina en el depósito } d \in D. \end{aligned}$$

2.4. Función Objetivo

El objetivo es minimizar el costo total de transporte, el cual se modela como el costo por kilómetro multiplicado por la distancia recorrida por cada vehículo a lo largo de los arcos seleccionados.

La función objetivo se expresa como:

$$\min \left(\sum_{v \in V} \sum_{(i,j) \in A} c d_{ij} x_{vij} \right)$$

Esta función agrupa el costo de cada arco recorrido, ponderado por la distancia y el factor de costo total.

2.5. Restricciones

A continuación se describen las restricciones del modelo:

1. Visita Única a Clientes

Cada cliente debe ser visitado exactamente una vez (por algún vehículo):

$$\sum_{v \in V} \sum_{\substack{i \in N \\ i \neq j}} x_{vij} = 1 \quad \forall j \in C.$$

2. Balance de Flujo en Nodos

Para los clientes, el flujo entrante menos el flujo saliente debe satisfacer la demanda:

$$\sum_{\substack{i \in N \\ i \neq j}} f_{vij} - \sum_{\substack{k \in N \\ k \neq j}} f_{vjk} = q_j \sum_{\substack{i \in N \\ i \neq j}} x_{vij} \quad \forall v \in V, j \in C.$$

En los depósitos se debe omitir la restricción.

3. Vinculación entre Ruta y Flujo

El flujo de inventario en el arco (i, j) no puede superar la capacidad del vehículo si se recorre ese arco:

$$f_{vij} \leq cap_v x_{vij} \quad \forall v \in V, (i, j) \in A.$$

4. Restricción de Rango Operativo

La distancia total recorrida por cada vehículo no puede exceder su rango operativo:

$$\sum_{(i,j) \in A} d_{ij} x_{vij} \leq r_v \quad \forall v \in V.$$

5. Restricción de Stock en Depots

La cantidad total despachada desde un centro de distribución no puede superar el stock disponible:

$$\sum_{v \in V} \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq d}} f_{vdj} \leq s_d \quad \forall d \in D.$$

6. Restricción de Asignación de Depósito de Inicio y Fin

Cada vehículo debe iniciar y terminar su ruta en a lo sumo un depósito:

$$\sum_{d \in D} start_{vd} \leq 1 \quad \forall v \in V, \quad \sum_{d \in D} end_{vd} \leq 1 \quad \forall v \in V.$$

7. Vinculación de Depósito y Ruta

Se debe garantizar que la elección del depósito esté vinculada a la ruta:

$$\sum_{\substack{j \in N \\ j \neq d}} x_{vdj} = start_{vd} \quad \forall v \in V, d \in D,$$

$$\sum_{\substack{i \in N \\ i \neq d}} x_{vid} = end_{vd} \quad \forall v \in V, d \in D.$$

8. Conservación de Flujo en Clientes

Si un vehículo llega a un cliente, debe salir de él:

$$\sum_{\substack{i \in N \\ i \neq j}} x_{vij} = \sum_{\substack{k \in N \\ k \neq j}} x_{vjk} \quad \forall v \in V, j \in C.$$

9. Eliminación de Subtours (Formulación MTZ)

Para evitar ciclos (subtours) en la ruta de cada vehículo se utiliza la formulación de Miller-Tucker-Zemlin:

$$u_{vj} \geq u_{vi} + 1 - M(1 - x_{vij}) \quad \forall v \in V, i, j \in C, i \neq j,$$

donde M es una constante suficientemente grande, por ejemplo:

$$M = (2|N|)^2.$$

10. Vinculación entre Uso de Vehículo y Demanda

Si un vehículo transporta carga (es decir, es utilizado) debe salir de algún depósito y la suma de la demanda atendida no excederá su capacidad:

$$\sum_{c \in C} q_c \left(\sum_{\substack{i \in N \\ i \neq c}} x_{vic} \right) \leq cap_v \left(\sum_{d \in D} start_{vd} \right) \quad \forall v \in V.$$

3. Proceso de Indagación y Función Objetivo

Para la definición de la función objetivo se realizó una revisión de la literatura en optimización de rutas y problemas logísticos, inspirándose en el problema del viajante (TSP). La función objetivo se estableció considerando minimizar los costos de transporte, que dependen de la distancia recorrida y los costos operativos (tarifa de flete, mantenimiento y combustible).

4. Preprocesamiento de Datos y Análisis

El proceso de preprocesamiento incluyó:

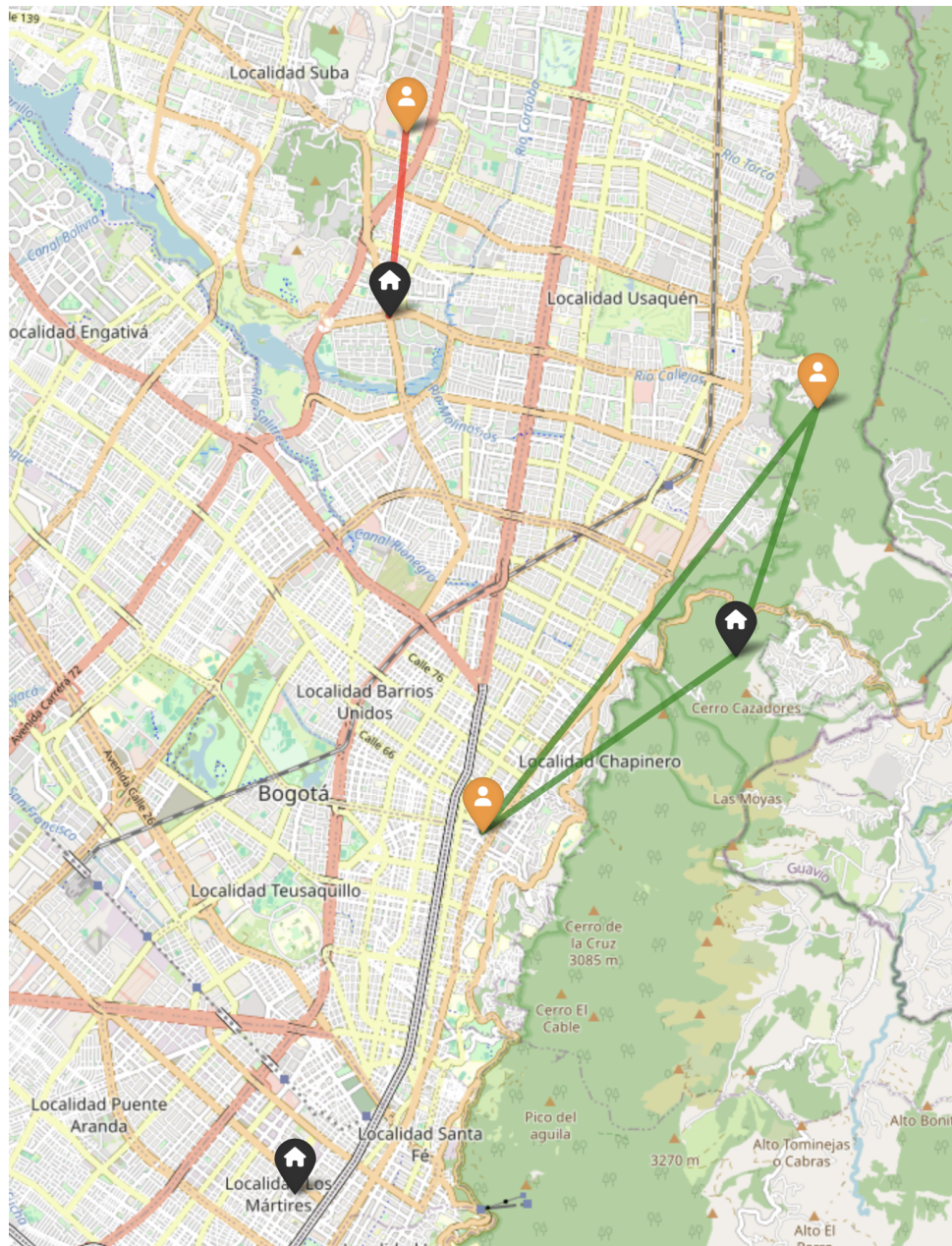
- **Cálculo de Distancias:** Se aplicó la fórmula de Haversine para obtener las distancias entre cada par de nodos (depots y clientes). Esta metodología es ampliamente utilizada en aplicaciones geográficas y permite incorporar la curvatura terrestre en el cálculo.

$$d_{ij} = 2r \arcsin \left(\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\Delta \phi}{2} \right) + \cos \phi_i \cos \phi_j \sin^2 \left(\frac{\Delta \lambda}{2} \right)} \right),$$

donde $r = 6371$ km es el radio de la Tierra.

- **Integración de Datos:** Los datos de localización, demanda, stock y características de los vehículos se integraron en el modelo de optimización utilizando la librería Pyomo. Se definieron los parámetros de manera análoga a la información presentada en los cuadros de datos del enunciado.

5. Ejemplos Ilustrativos



En la imagen se aprecian tres puntos negros que representan los centros de distribución y tres puntos naranjas que corresponden a los clientes. Aunque existen tres centros de distribución disponibles, solo se emplean dos vehículos para realizar los envíos, conectando de manera óptima dos de los centros con los tres clientes. Esto ilustra cómo la planificación permite cubrir toda la demanda con un número limitado de rutas, minimizando así la distancia total recorrida.

6. Justificación y Discusión

- **Conjuntos:** La partición en centros de distribución y clientes permite reflejar la estructura operativa de LogistiCo.
- **Parámetros:** La definición de distancias, demanda, stock y capacidades se basa en datos reales y en constantes operativas (como tarifas y costos de mantenimiento) proporcionadas

en el enunciado.

- **Variables de Decisión:** La variable binaria x_{vij} captura la elección de rutas; f_{vij} modela el flujo de inventario, y las variables auxiliares u_{vi} son fundamentales para evitar subtours.
- **Función Objetivo:** Se orienta a minimizar los costos totales, lo cual es coherente con el objetivo estratégico de optimización de recursos y mejora en la eficiencia operativa.
- **Restricciones:** Cada restricción refleja una limitación física u organizacional del problema, como la capacidad de los vehículos, el stock en los depósitos y el rango operativo, asegurando que la solución sea factible y aplicable en el contexto real.

7. Conclusiones

Se ha desarrollado una formulación matemática completa y detallada para la optimización en la planeación de transporte vehicular urbana para LogistiCo. El modelo integra la asignación de inventario y la planificación de rutas, considerando restricciones operativas reales y utilizando técnicas de modelado matemático avanzadas (como la formulación MTZ para la eliminación de subtours). Los ejemplos ilustrativos demuestran la aplicabilidad del modelo en escenarios de pequeña escala.