Матричные разложения для СЛАУ.

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$x = (A^TA)^{-1}A^Tb, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

Рассмотрим разложения для разных типов матриц.

1) $A = A^T$, $A > 0$ Симметр., положит. опр.

$$A = L\cdot L^T, \quad L = \begin{pmatrix} & 0 \\ & \end{pmatrix} \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$Ax = b \Rightarrow L\underbrace{L^Tx}_{y} = b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = L^{-1}b & O(n^2) \\ x = L^{-T}y & O(n^2) \end{array}\right.$$

Стоим. разложения Холецкого $\approx \frac{1}{3}n^3$

② $A = A^T$ Симметричная матрица.

$$P^T A P = L D L^T \qquad L = \begin{pmatrix} \triangle & 0 \\ & \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \square & & & 0 \\ & \boxplus & & \\ & & \boxplus & \\ 0 & & & \square \end{pmatrix}$$

перестановочная матрица.

$$Ax = b \Rightarrow \underbrace{P L D \underbrace{L^T P^T x}_{y}}_{z} = b$$

$$\left[\begin{array}{ll} z = L^{-1} P^T b & \leftarrow O(n)^2 \\ y = D^{-1} z & \leftarrow O(n) \\ x = P L^{-T} y & \leftarrow O(n^2) \end{array}\right.$$

3. $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$PA = LU, \quad \underset{n \times \min(n,m)}{L = \begin{pmatrix} \diagdown & 0 \\ & \diagdown \end{pmatrix}}, \quad \underset{\min(n,m) \times m}{U = \begin{pmatrix} \diagdown & \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix}}.$$

Стоимость $LU \approx \frac{2}{3} n^3$

4. $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$AP = QR, \quad Q^T Q = I, \quad R = \begin{pmatrix} \diagdown & \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix}$$

$$Q \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad R \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Стоимость $QR = \frac{4}{3} n^3$.

$n > m$

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$A = QR = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m & n-m \end{array} \\ n & \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c c} & m \\ m & \\ n-m & \end{array} \!\!\!\! \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = (R^T Q^T \; QR)^{-1} R^T Q^T b =$$

$$= (R_1^T R_1)^{-1} R_1^T Q_1^T b = R_1^{-1} R_1^{-T} R_1^T Q_1^T b =$$

$$= R_1^{-1} Q_1^T b$$

(5) $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $A = U \Sigma V^T$

$$U^T U = I \quad V^T V = I,$$

$$\Sigma_1' = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_{\min(m,n)} \end{bmatrix}$$

Стоимость SVD ≈ 5 QR ≈ 20 Холецкого.

Метод Ньютона

$f(x) \to \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n}$, $f \in C^2$. $\quad B_k = B_k^T > 0$

$$f(x_k + d_k) \approx m_k(d) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d \to \min_d$$

$$\nabla_d m_k(d) = \nabla f(x_k) + B_k d = 0$$

$$\Rightarrow d_k = -B_k^{-1} \nabla f(x_k)$$

① $B_k = I \to$ - GD.

② $B_k = \nabla^2 f(x_k) \to$ Newton.

Newton: $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \left(\nabla^2 f(x_k)\right)^{-1} \nabla f(x_k)$

Требование: $\nabla^2 f(x_k) \succ 0$

$f(x)$ $\qquad \tilde{x} = A^{-1} x$

$x = A\tilde{x}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n},$

$\det A \neq 0.$

$\tilde{f}(\tilde{x}) := f(A\tilde{x})$

$d\tilde{f}(\tilde{x}) = \nabla \tilde{f}(\tilde{x})\, d(A\tilde{x}) = \nabla f(A\tilde{x})^T A\, d\tilde{x}$

$d^2 \tilde{f}(\tilde{x}) = \left(\nabla^2 f(A\tilde{x}) A\, d\tilde{x}_2\right)^T A\, d\tilde{x}_1 =$

$= d x_2^T A^T \nabla^2 f(A\tilde{x}) A\, d\tilde{x}_1$

$\nabla \tilde{f}(\tilde{x}) = A^T \nabla f(A\tilde{x})$

$\nabla^2 \tilde{f}(\tilde{x}) = A^T \nabla^2 f(A\tilde{x}) A$

$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k - \alpha_k \left(\nabla^2 \tilde{f}(\tilde{x}_k)\right)^{-1} \nabla \tilde{f}(\tilde{x}_k) =$

$= \tilde{x}_k - \alpha_k \left(A^T \nabla^2 f(A\tilde{x}_k) A\right)^{-1} A^T \nabla f(A\tilde{x}_k) =$

$= \tilde{x}_k - \alpha_k A^{-1} \left(\nabla^2 f(A\tilde{x}_k)\right)^{-1} A^{-T} A^T \nabla f(A\tilde{x}_k)$

$$x_{k+1} = A\tilde{x}_{k+1} = \underbrace{A\tilde{x}_k}_{x_k} - \alpha_k \left(\nabla^2 f(x_k)\right)^{-1} \nabla f(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \left(\nabla^2 f(x_k)\right)^{-1} \nabla f(x_k)$$

Таким образом, Метод Ньютона устойчив к линейным преобразованиям.

Локальная скорость сходимости.

Тк $f \in C_M^{2,2}$, $\alpha_k = 1$, $\nabla^2 f(x_{opt}) \geq \mu I$, $\mu > 0$

$\Leftrightarrow$ $\lambda_{min}(\nabla^2 f(x_{opt})) \geq \mu > 0$

$\Rightarrow$ $\exists r : \| x_0 - x_{opt} \| \leq r$; $\forall x_0$

для метода Ньютона верно, что:

$$\| x_{k+1} - x_{opt} \| \leq const \, \| x_k - x_{opt} \|^2$$

Глобальная сходимость.

$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ $\qquad \nabla f(x)^T d_k < 0,\ f \in C^{1,1}$

α_k: (A) $f(x_{k+1}) \le f(x_k) + c_1 \alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k$.

(B) $\nabla f(x_{k+1})^T d_k \ge c_2 \nabla f(x_k)^T d_k$

$$\Rightarrow f(x_{k+1}) \le f(x_k) - \frac{c_1(1-c_2)}{L} \cos^2 \Theta_n \|\nabla f(x_k)\|^2$$

$$\frac{\nabla f(x_k)^T d_k}{\|\nabla f(x_k)\| \cdot \|d_k\|}$$

У метода Ньютона мнимая глобальная сходимость.

Метод	Память	Сто-сть итерац.
Град. поиск	$O(n)$	Стоимость $f(x)$ $O(g)$ $O(gn)$ $O(g)$ - back prop.
Метод Ньютона	$O(n^2)$	$O(n^3) + O(gn^2)$