Ск-сть сходимости итер. процессов опт.

Невязка - величина ошибки, расхождения приближенного равенства.

$r_k := |f(x_k) - f_{opt}|$ | $r_k \geq 0$

$\|x_k - x_{opt}\|$ | $r_k \to 0$, $k \to +\infty$

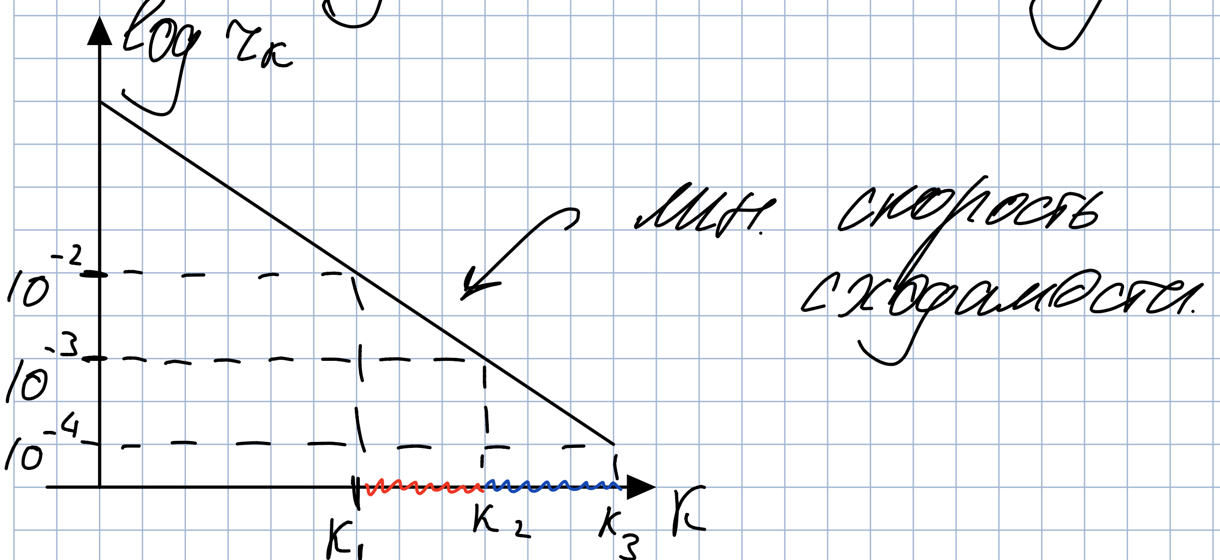
$\|\nabla f(x_k)\|$

Процесс сходится = хотим охарактеризовать скорость сходимости.

Опр.: $\{r_k\}$, $r_k \geq 0$, $r_k \to 0$, $k \to +\infty$

имеет линейную скорость сходимости, если

$\exists\, C > 0,\ q \in (0,1):\ r_k \leq C \cdot q^k,\ \forall k \geq k_0$



Опр. Если $r_k \to 0$, и не имеет линейной скорости сходимости $\forall q \in [0, 1)$, то r_k сходится сублинейно.

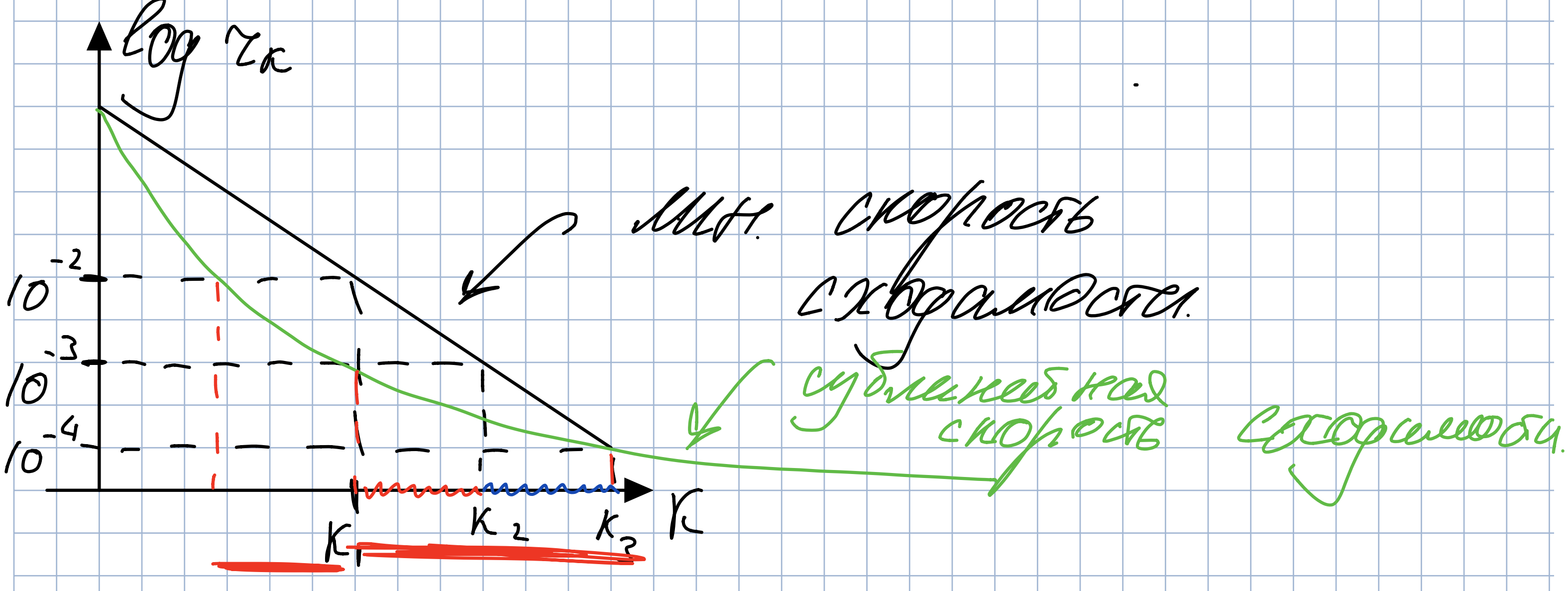
Опр. Если $r_k \to 0$ и сходится линейно с показателем $q = 0$, то r_k сходится суперлинейно.

$$r_k := \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{k} > C \cdot q^k \quad \forall C, \ \forall q \in (0, 1), \ \forall k \geq k_0.$$

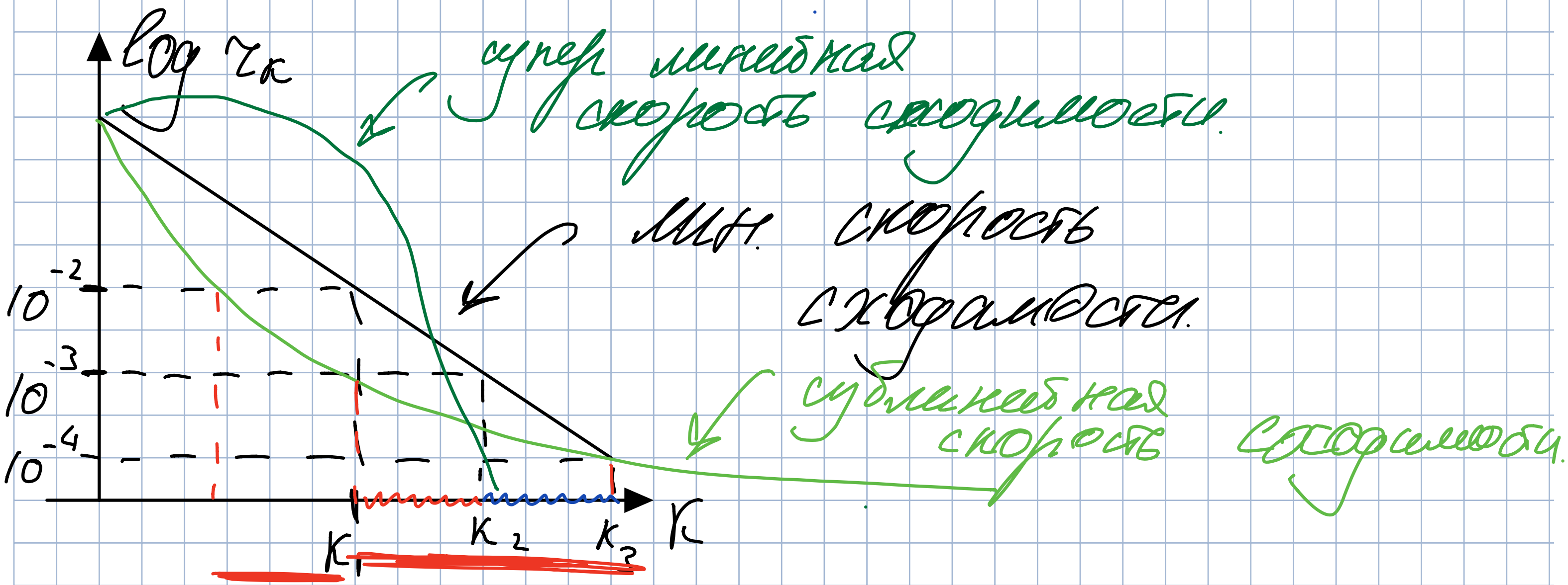
$$\frac{1}{C} > k \cdot q^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

Сходится сублинейно.



Пояснение: при k довольно малых сублинейная будет быстрее, но найдется такое k, после которого линейная скорость будет лучше.

Также, каждая следующая значимая цифра в решении стоит на порядок больше.



Тест отношений.

$$\alpha := \varlimsup_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}, \quad \beta := \varliminf_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}.$$

Th $r_k > 0$, $r_k \to 0$, $k \to +\infty$.

1) Если $\alpha \in (0, 1)$, то r_k сход. линейно.

2) Если $\alpha = 0$, то r_k сход суперлинейно.

3) Если $\beta = 1$, то r_k сход. сублинейно.

4) Если $\beta < 1$, $\alpha \geq 1$, то неизвестно.

Пример:

① $r_k = \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{r_{k+1}}{r_k} = \frac{k}{k+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{k}} \to 1$, $k \to +\infty$ / сублин.

② $r_k = 2^{-k^2} = \left(\frac{1}{2^k}\right)^k$

$\Rightarrow \frac{r_{k+1}}{r_k} = \frac{2^{k^2}}{2^{(k+1)^2}} \to 0$, $k \to +\infty$ / суперлинейно.

③ $$q_k := \begin{cases} q_{k-1}, & \text{если } k \text{ - нечетно} \\ \frac{1}{2^k}, & \text{если } k \text{ - четно.} \end{cases}$$

$$\frac{q_{k+1}}{q_k} = \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ - нечетно} \\ 1/2, & \text{если } k \text{ - четно} \end{cases}$$

~~$\Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = \frac{1}{2}.$~~

~~Неизвестно. (по критерию).~~

По тесту неопределен, но можно ограничить менеечно.

Критерий корней

$$\alpha := \overline{\lim_{k \to \infty}} \, q_k^{\frac{1}{k}}$$

Тh $q_k \geq 0$, $q_k \to 0$,

1) Если $\alpha = 0$, то q_k сход. суперлин.
2) Если $\alpha \in (0,1)$, то q_k сход. линейно.
3) Если $\alpha = 1$, то сход. сублинейно.
4) $\alpha > 1$, невозможно

Пример:

$$q_k := \begin{cases} q_{k-1}, & \text{если } k \text{ - нечетно} \\ \frac{1}{2^k}, & \text{если } k \text{ - четно.} \end{cases}$$

$$q_k^{\frac{1}{k}} := \begin{cases} \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}}, & \text{если } k \text{ - нечетно.} \\ \frac{1}{2}, & \text{если } k \text{ - четно} \end{cases}$$

$\alpha = \frac{1}{2}$, $\Rightarrow$ сходится линейно.

Опр. $r_k \geq 0$, $r_k \to 0$, имеет суперлин. ск-сть сходимости порядка $p > 1$, если

$$\exists C, q: \ r_k \leq C q^{p^k}, \ \forall k \geq k_0.$$

Тест отн. $\alpha := \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{r_{k+1}}{r_k^p}$

Если $\alpha < +\infty$, то r_k сходится суперлинейно с порядком p.

Критерий корней.

$$\alpha := \overline{\lim_{k\to\infty}} \ r_k^{1/p^k}$$

если $\alpha < 1$, то r_k сходится суперлинейно с порядком p.