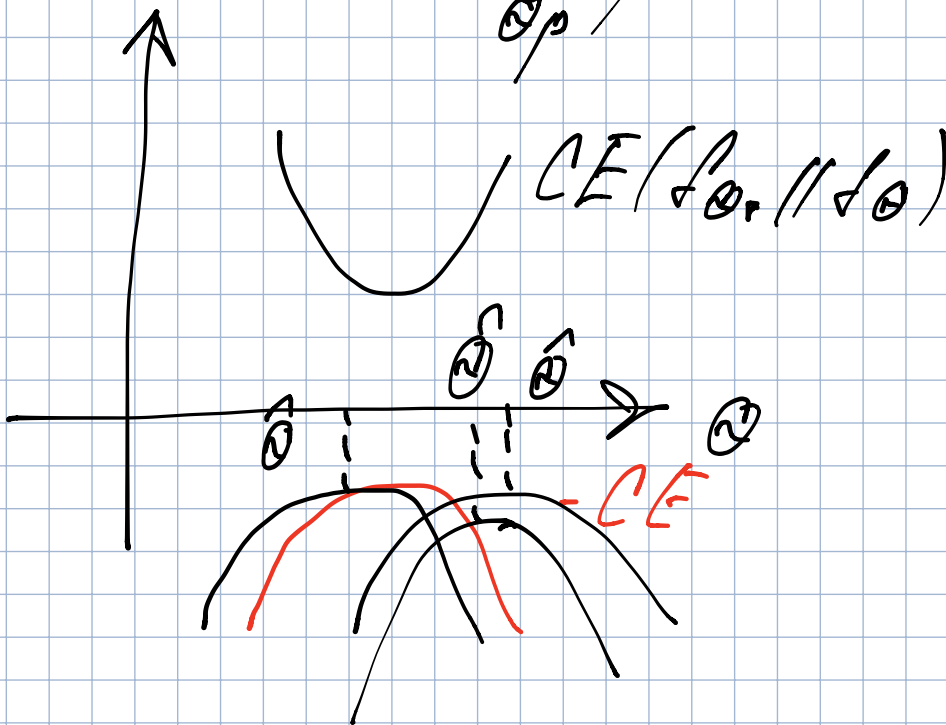$\ell(y|\theta) = \ln L(y|\theta)$ - лог. ф-ия правд.

$S(y|\theta) = \dfrac{\partial \ell}{\partial \theta}$ S - score function
                              произв. правдопод.

θ - скаляр $\Rightarrow$ S - скаляр.

$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_p \end{pmatrix} \Rightarrow S = \nabla\theta.$

$CE(f_{\theta_r}||f_\theta)$

$-CE$

<u>Th</u> Если [регул], то $\mathbb{E}_{\theta_r}(S(y|\theta_r)) = 0$

<u>Proof</u> θ_r - минимум $CE(f_{\theta_r}||f_\theta)$

$\Downarrow$

$\dfrac{\partial CE(f_\theta(|\theta))}{\partial \theta}\bigg|_{\theta_r} = 0$

Информация Фишера [о неизв. θ]

$$I_F = Var\left(S(g(\theta))\right) = Var\left(\frac{\partial L(y(\alpha)}{\partial \theta_T}\right)$$

Интуиция

крутая

Var(S)
велика
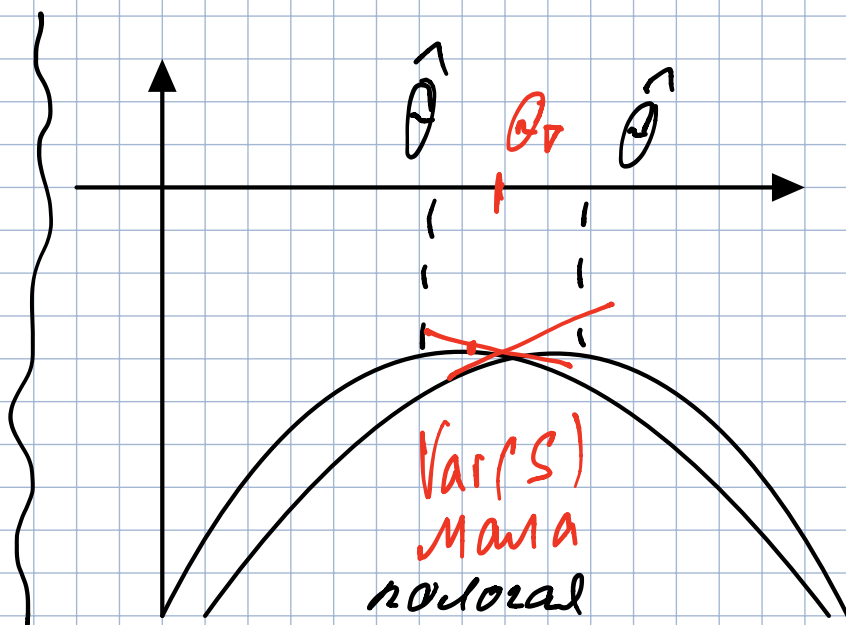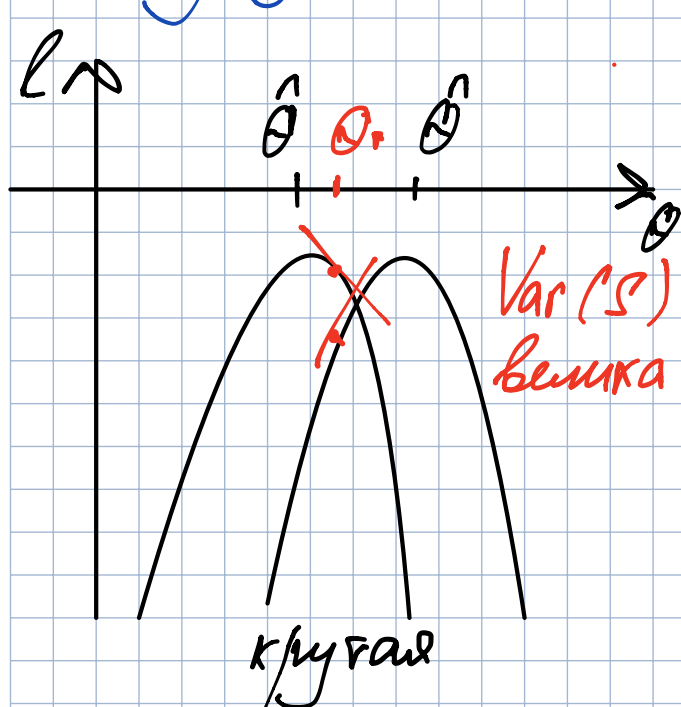
Var(S)
мала
пологая

Чем больше I_F, тем ближе $\hat{\theta}$ к истинному θ_T

$$\underline{Th} \quad I_F = Var(S(\ell(\theta_n)) = E\left(\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right)^2\right) - \underbrace{\left(E\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right)\right)^2}_{0}$$

$$= E\left(\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right)^2\right) \quad \text{Скаляр.}$$

$$\underline{I_F = -E\left(H(y(\theta))\right)} \quad H - \text{гессиан}$$

Для вектора

$$I_F = E\left[\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right) \cdot \left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right)^T\right]$$

$$\underset{\text{столбец}}{\uparrow} \qquad \underset{\text{строка}}{\uparrow}$$

Нюансы:

$$Var(S) = \begin{bmatrix} Var\left(\frac{\partial \ell}{\theta_1}\right), & Cov\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \ell}{\partial \theta_2}\right) \\ H & Var\left(\frac{\partial \ell}{\theta \theta_2}\right) \end{bmatrix} \updownarrow P$$

$$\xleftarrow{\hspace{5cm}} P \xrightarrow{\hspace{5cm}}$$

Нераве-во Крамера-Рао.

Если $\hat{\theta}$ - несмещ. оценка для θ_r

$E(\hat{\theta}) = \theta_r$ и [регуляри.], то слишком точных оценок быть не может.

$$\boxed{Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I_F}}$$ ← Скаляр

Th Если (регул.), то

$$\left(I_n^F\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\hat{\Theta}_{ML} - \Theta_0\right) \xrightarrow[n \to \infty]{dist} N\left(0; \underset{\text{ед. матр.}}{I}\right)$$

Θ - вектор.

$$\sqrt{I_n^F} \cdot \left(\hat{\Theta}_{ML} - \Theta\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} N(0,1)$$

Θ - скаляр

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_p \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

p - фикс. $\qquad n \to \infty$

$\hat{\Theta}_{ML}$ - ассимпт. нормальное, несмещенное, эффективное.

def Эффективность:

$$E\left[\left(\hat{\Theta}_{BEST} - \Theta\right)^2\right] \le E\left[\left(\hat{\Theta} - \Theta\right)^2\right] \forall \hat{\Theta}$$

Th ⑦ Если (регул.), то

$\swarrow$ *была просто* I^F

$$\sqrt{\widehat{I}_n^F} \cdot (\widehat{\Theta}_n^{мп} - \Theta) \xrightarrow[n\to\infty]{dist} N(0,1)$$

$\left.\begin{array}{l} I_n^F(\Theta_r) \\ \text{зависит} I_n'' \\ \text{от нешв. } \Theta_r \end{array}\right.$

Как оценить I_n^F ?

Ⓥ Способ 1:

$$I_s^F = -E\left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \Theta^2}\right)$$

$$\widehat{I}^F = -\frac{\partial^2 \ell}{\partial \Theta^2}\bigg|_{\widehat{\Theta}_{мп}}$$
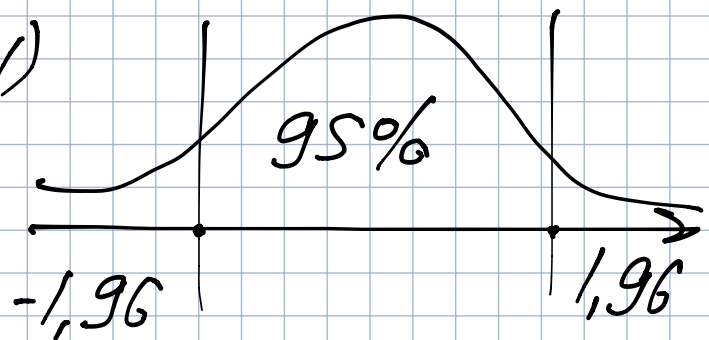
$$f(y \mid \theta)$$

Шаг 1. $\hat{\theta}_{мс}$

Шаг 2. $\hat{I}_F = -\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2}\Big|_{\hat{\theta}_{ML}}$

Шаг 3. $\widehat{Var}(\hat{\theta}_{мс}) = \frac{1}{\hat{I}_F}$

$$se(\hat{\theta}_{мс}) = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\theta}_{мс})}$$

$$\frac{\hat{\theta} - \theta}{H(\hat{\theta})} \xrightarrow[n \to \infty]{dist} N(0;1)$$

se - standart
error

95%

−1,96   1,96

CI: Шаг 4.

$$-1,96 \leqslant \frac{\hat{\theta} - \theta}{se(\hat{\theta})} \leqslant 1,96$$

$$\hat{\theta} - 1,96\, se(\hat{\theta}) \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta} + 1,96\, se(\hat{\theta})$$