# Неточная одномерная оптимизация.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad f \in C^1$$

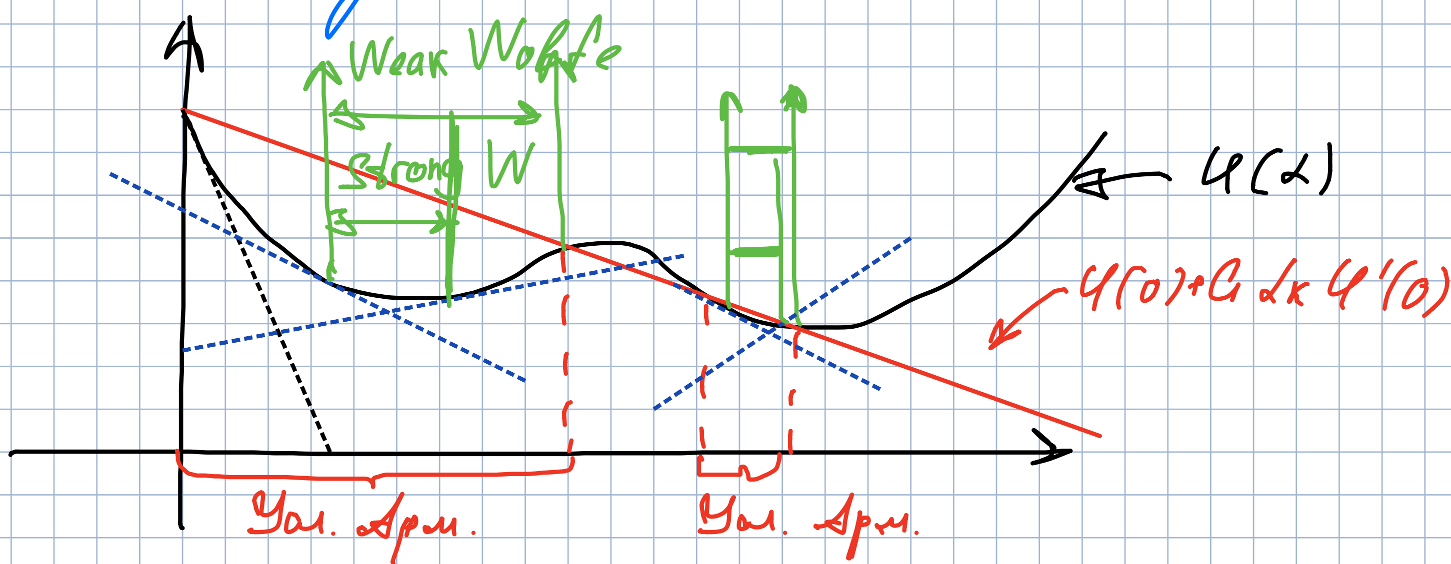
$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad x_k, d_k \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}_+$$

$$\alpha_k = \underset{\alpha \geq 0}{\operatorname{argmin}} f(x_k + \alpha d_k)$$

$$\varphi(\alpha) := f(x_k + \alpha d_k)$$

$\varphi'(0) < 0$ : Выбор $d_k$.

## Условие Армихо:




$$\varphi(\alpha_k) \leq \varphi(0) + c_1 \alpha_k \varphi'(0)$$

$$c_1 \in (0,1)$$

Условие Вульфа: а) $\varphi'(\alpha_k) \geq C_2 \varphi'(0)$ - слабое.

$C_2 \in (0,1)$

б) $|\varphi'(\alpha_k)| \leq C_2 |\varphi'(0)|$

Th $\varphi(\alpha) \in C^1$; $\varphi'(0) < 0$, $\varphi(\alpha) > -\infty$, $\forall \alpha$

$0 < C_1 \leq C_2 < 1 \Rightarrow \exists \hat{\alpha}$, удовл. услов. Армихо и Вульфа.

$\varphi(\alpha) = \cancel{\varphi(0)} + \varphi'(0)\alpha + \bar{o}(\alpha) < \cancel{\varphi(0)} + C_1 \varphi'(0)\alpha$

$= (1-C_1)\varphi'(0)\alpha + \bar{o}(\alpha) \overset{?}{<} 0 \quad | : \alpha$

$= \underbrace{\underbrace{(1-C_1)}_{>0} \underbrace{\varphi'(0)}_{<0}}_{<0} + \bar{o}(1) < 0$

$\alpha \to 0$.

## Процедура backtracking

$\alpha_0 := \alpha_{start}$.

while $\varphi_k(\alpha) > \varphi(0) + C_1 \alpha \varphi'(0)$

$\alpha_0 := \beta \cdot \alpha$.

end while

## Расширение

$\alpha_0 = 0$; $\alpha_{max} > 0$, $\alpha_1 \in (0; \alpha_{max})$

$i = 1$

повторять:

если $\varphi(\alpha_i) > \varphi(0) + C_1 \alpha_i \varphi'(0)$ или

$\varphi(\alpha_i) > \varphi(\alpha_{i-1})$, то

$\alpha_* = \text{Сум}(\alpha_{i-1}, \alpha_i)$

выч. $\varphi'(\alpha_i)$

если $|\varphi'(\alpha_i)| \leq C_2 |\varphi'(0)|$, то $\alpha_* = \alpha_i$, выход.

если $\varphi'(\alpha_i) \geq 0$, то $\alpha_* = \text{Сужение}(\alpha_i, \alpha_{i-1})$

выбрать $\alpha_{i+1} \in (\alpha_i, \alpha_{max})$

$i = i + 1$

## Сужение. $(\alpha_{lo}, \alpha_{hi})$

повторять:

найти $\alpha_j \in (\alpha_{lo}, \alpha_{hi})$ с помощью интерполяции или бисекции.

выч. $\varphi(\alpha_j)$

если $\varphi(\alpha_j) > \varphi(0) + c_1 \cdot \alpha_j \varphi'(0)$ и $\varphi(\alpha_j) > \varphi(\alpha_{lo})$, то $\alpha_{hi} = \alpha_j$.

иначе

выч. $\varphi'(\alpha_j)$

если $|\varphi'(\alpha_j)| \leq c_2 |\varphi'(0)|$, то $\alpha_j = \alpha_*$, выход.

если $\varphi'(\alpha_j)(\alpha_{hi} - \alpha_{lo}) \geq 0$, то $\alpha_{hi} = \alpha_{lo}$.

$\alpha_{lo} = \alpha_j$.