LEZIONE 1

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

01.10.2021

- **MATEMATICA DISCRETA**: SCIENZA CHE SI OCCUPA DI CLASSIFICARE, ENUMERARE E COMBINARE OGGETTI DISTINTI

- **DISCRETO**: INSIEME COSTITUITO DA ELEMENTI DISTINTI, NON CONTIGUI TRA LORO

- **CONTINUO**: INSIEME COSTITUITO DA INFINITI ELEMENTI, CONTIGUI TRA LORO

IL METODO UTILIZZATO DALLA MATEMATICA DISCRETA SI ARTICOLA IN 3 FASI:

1) **CLASSIFICAZIONE**: INDIVIDUARE LE CARATTERISTICHE COMUNI DI ENTITÀ DIVERSE

2) **ENUMERAZIONE**: ASSEGNARE UN INDICE UNIVOCO A CIASCUN ELEMENTO

3) **COMBINAZIONE**: COMBINARE GLI ELEMENTI DI UN INSIEME FINITO

- **LOGICA**: STUDIO DEL RAGIONAMENTO E DELL'ARGOMENTAZIONE

- **ALGEBRA**: RAMO DELLA MATEMATICA CHE STUDIA LE OPERAZIONI DEFINITE IN UN INSIEME

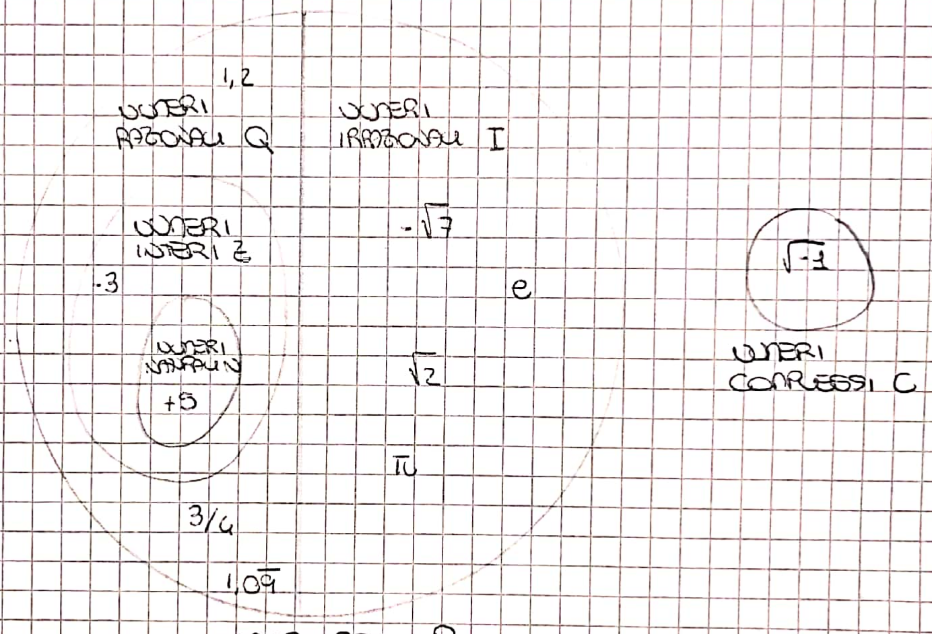
- **ALGEBRA ASTRATTA**: RAMO DELLA MATEMATICA CHE SI OCCUPA DELLO STUDIO DELLE STRUTTURE ALGEBRICHE

LEZIONE 1
INSIEMI E OPERAZIONI

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

05.10.2021

- NUMERI NATURALI (N): $N = \{0, 1, 2, \dots, n, n+1\}$
- NUMERI INTERI (Z): $Z = \{-n-1, -n, -3, 3, n, n+1\}$
- NUMERI RAZIONALI (Q): Q = FRAZIONI Es: $1/2$, $3/4$, $-2/5$ ecc..
- NUMERI IRRAZIONALI (I): I = NUMERI NON RAPPRESENTABILI SOTTO FORMA DI FRAZIONE Es: π, $\sqrt{2}$, ecc.
- NUMERI REALI (R): R = NUMERI RAPPRESENTABILI IN FORMA DECIMALE
- NUMERI COMPLESSI (C): C = NUMERO + PARTE IMMAGINARIA



QUALCHE DEFINIZIONE:

- PRINCIPIO DI INDUZIONE: UNA PROPRIETÀ È VERA SU TUTTO N SE:
  1) È VERA PER N_0
  2) SE È VERA PER N_1, ALLORA VALE ANCHE PER $N+1$
- VALORE ASSOLUTO: NUMERO PRIVATO DEL SEGNO

LEZIONE 1
INSIEMI E OPERAZIONI

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

05.10.2021

IL CONCETTO DI INSIEME È DEFINITO COME PRIMITIVO, CIOÈ NON SI PUÒ SPIEGARE IN TERMINI PIÙ SEMPLICI.

IN UN INSIEME DEVE ESSERE POSSIBILE STABILIRE SE UN ELEMENTO FA PARTE DELL'INSIEME, SENZA AMBIGUITÀ

$x = y$	$x \neq y$	$A = A$ RIFLESSIVITÀ
x uguale y	x diverso y	$A = B$ $B = A$ SIMMETRIA
		$A = B$ $B = C$, $A = C$ TRANSITIVITÀ

• RAPPRESENTAZIONE ESTENSIONALE: ELEMENTI SENZA DUPLICAZIONI

ES: $\{x, y, z\}$

• RAPPRESENTAZIONE INTENSIONALE: INSIEME CONTENENTE I VALORI CHE SODDISFANO UNA PROPRIETÀ

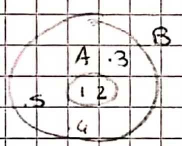
ES: $S = \{x \mid x > 3 \text{ e } x < 100\}$

NB: $x > 3$ e $x < 100$ È UN ENUNCIATO VERO FUNZIONALE

UN INSIEME A DI B SI DICE SOTTOINSIEME ~~PROPRIO~~ DI B

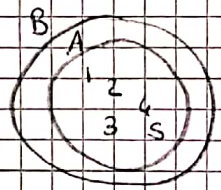
$\cancel{A \subseteq B}$

$A \subset B$



UN INSIEME SI DICE SOTTOINSIEME IMPROPRIO SE

$A \subseteq B$



INSIEME POTENZA: TUTTI I SOTTOINSIEMI DELL'INSIEME

$P\{x, y\} = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ 2^n elementi

LEZIONE 2
INSIEMI E OPERAZIONI

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

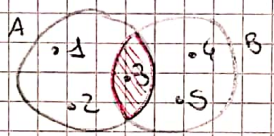
06.10.2021

• OPERAZIONI SU INSIEMI: DATI $A=\{1,2,3\}$ E $B=\{3,4,5\}$

- UNIONE ($\cup$): ELEMENTI CHE STANNO IN A O IN B

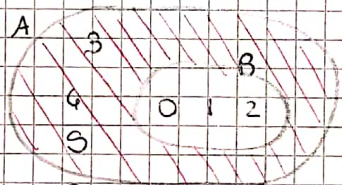
$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$

- INTERSEZIONE ($\cap$) ELEMENTI COMUNI AD A E B



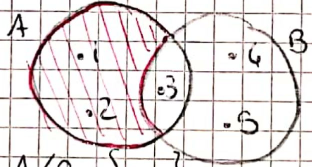
$A\cap B=\{3\}$

- COMPLEMENTAZIONE (C) $A\{0,1,2,3,4,5\}$, $B=\{0,1,2\}$



$C_A B=\{3,4,5\}$

- DIFFERENZA (\) GLI ELEMENTI CHE STANNO IN A MA NON IN B



$A/B=\{1,2\}$

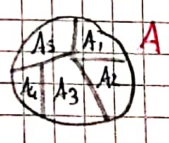
- DIFFERENZA SIMMETRICA (Δ) ELEMENTI NON COMUNI AGLI INSIEMI

$A\Delta B=\{1,2,4,5\}$

- POWERSET: COMBINAZIONI DEI SOTTOINSIEMI (2^n elementi)

$P(A\cdot B)=\{\emptyset,3\}$

- PARTIZIONE DI INSIEME: 1) NESSUNO VUOTO
2) NO INTERSEZIONI
3) L'UNIONE DA L'INTERO A



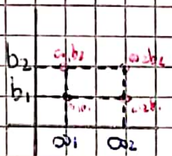
LEZIONE 3
INSIEMI E OPERAZIONI

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

12.10.2023

- **INSIEMI ORDINATI**: INSIEMI IN CUI GLI ELEMENTI CHE LO COMPONGONO SONO ORDINATI SECONDO UN CRITERIO PRESTABILITO.
- **COPPIA ORDINATA**: COLLEZIONE DI DUE OGGETTI DISTINTI $\langle x, y \rangle$
- **N-UPLA ORDINATA**: INSIEME ORDINATO DI N ELEMENTI $\langle x_1, \dots x_n \rangle$
- **PRODOTTO CARTESIANO**: INSIEME DI TUTTE LE POSSIBILI COMBINAZIONI DI ELEMENTI DI DUE INSIEMI

$A \times B$



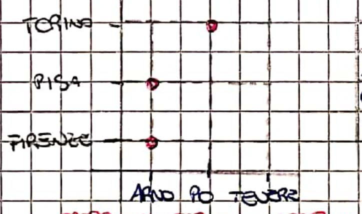
- **RELAZIONE**: SOTTOINSIEME DEL PRODOTTO CARTESIANO

ES: $S = \{$ARNO, PO, TEVERE$\}$
$T = \{$FIRENZE, PISA, TORINO$\}$

$S \times T = \{$ <ARNO, FIRENZE>, <ARNO, PISA>, <ARNO, TORINO>
<PO, FIRENZE>, <PO, PISA>, <PO, TORINO>
<TEVERE, FIRENZE>, <TEVERE, PISA>, <TEVERE, TORINO> $\}$

VOGLIAMO PERÓ SOLO QUELLE SENSATE (LE CITTÁ BAGNATE DAL RELATIVO FIUME)

$R = \{$ <ARNO, FIRENZE> <ARNO, PISA>, <PO, TORINO> $\}$ RAPPRESENTAZIONE FORMALE



RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

	FIRENZE	PISA	TORINO
ARNO	•	•	
PO			•
TEVERE			

RAPPRESENTAZIONE TABELLARE

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RAPPRESENTAZIONE MATRICIALE

- **RELAZIONE BINARIE**:
  - DOMINIO: OGGETTI X TALI CHE $\langle x, y \rangle \in R$ PER QUALCHE Y
  - CODOMINIO: OGGETTI Y TALI CHE $\langle x, y \rangle \in R$ PER QUALCHE X
  - ESTENSIONE: $D(R) \cup C(R)$

- **RELAZIONE N-ARIE**: COPPIA ORDINATA CHE HA COME VALORI [N-ORE] E [GRAFICO]
  - UNARIE SE N=1 LA RELAZIONE R SU S É UNARIA
  - BINARIA SE N=2 LA RELAZIONE R SU S É BINARIA
  - TERNARIA SE N=3 LA RELAZIONE R SU S É TERNARIA

DATO UN INSIEME A, LA RELAZIONE:

$I_A = \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$

DOVE OGNI ELEMENTO É IN RELAZIONE CON SE STESSO SI CHIAMA IDENTITÁ SU A

UNA RELAZIONE $R \subseteq A^2$ PUÓ ESSERE:

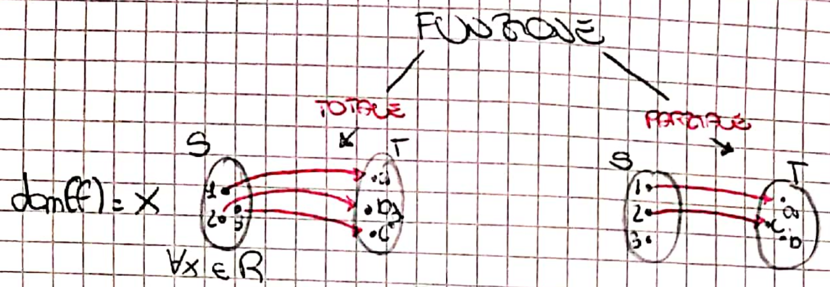
- RIFLESSIVA $\langle x, x \rangle \in R \ \forall x \in A$
- SIMMETRICA $\langle x, y \rangle \in R \mid \langle y, x \rangle \in R$
- ANTISIMMETRICA se $\langle x, y \rangle, \langle y, x \rangle \in R \mid x = y$
- TRANSITIVA $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \mid \langle x, z \rangle$

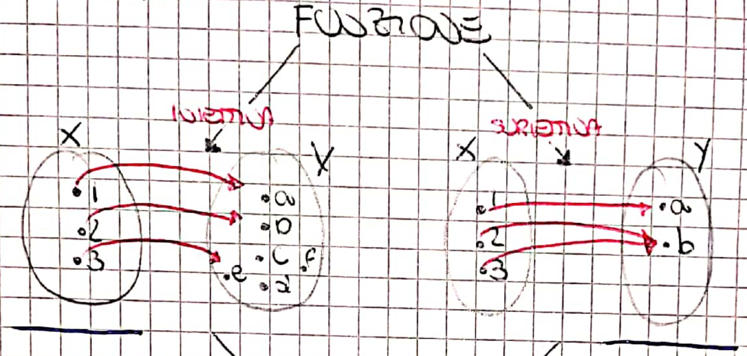
LEZIONE 4
INSIEMI E OPERAZIONI

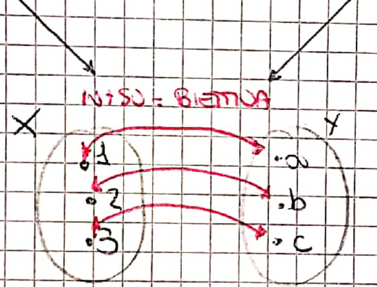
FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

13.10.2021

• **FUNZIONE**: RELAZIONE $R \subseteq S \times T$ SE PER OGNI $x \in S$ ESISTE UN SOLO $y \in T$ TALE CHE $\langle x,y \rangle \in R$





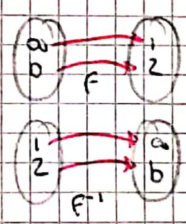


N.B.: SE LA FUNZIONE È SURIETTIVA + TOTALE SI DICE BIUNIVOCA

• **PUNTO FISSO**: SIA $f: A \to A$, UN PUNTO FISSO È UN ELEMENTO DI A CHE COINCIDE CON LA SUA IMMAGINE

$$x = f(x)$$

• **INVERTIBILE**: f^{-1}, CON f BIUNIVOCA



• **COMPOSIZIONE DI FUNZIONI**:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = 2^x \\ h(x) = x+3 \end{array}\right\} g \circ x = 2^{x+3}$$

• **FUNZIONE CARATTERISTICA**

$$f_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$$

• **MULTINSIEME**: GLI ELEMENTI POSSONO RIPETERSI

$\{\{a, b, b, c, c, c\}\} \neq \{\{a, b, c\}\}$

$A = \{a, b, c, d\}$

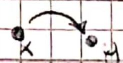
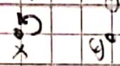
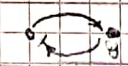
$\{\langle a,1 \rangle, \langle b,2 \rangle, \langle c,3 \rangle, \langle d,0 \rangle\}$

LEZIONE 6
STRUTTURE RELAZIONALI,
GRAFI E ORDINAMENTI

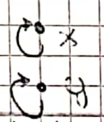
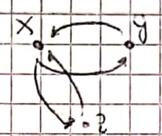
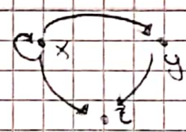
FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

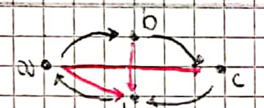
19.10.2021

- **GRAFO**: INSIEME DI NODI COLLEGATI TRA LORO DA SPIGOLI (FRECCE)

COPPIE	GRAFO
$\langle x,y\rangle \in R$	
$\langle x,x\rangle \in R$	
$\langle x,y\rangle \in R, \langle y,x\rangle \notin R$	

- **PROPRIETÀ**:

- RIFLESSIVITÀ	- IRRIFLESSIVITÀ	- SIMMETRIA	- ANTISIMMETRIA
			
ogni nodo ha un cappio	nessun nodo ha un cappio	per ogni freccia c'è l'inverso	per ogni freccia non c'è l'inverso

- TRANSITIVITÀ	- ASIMMETRICA
 ogni nodo raggiungibile è collegato	$x R y$, $y R x$ $\Downarrow$ $x = y$

- **CONNESSA**: OGNI DUE ELEMENTI COLLEGATI: $x, y \in S$ se $x \neq y$, $\langle x,y\rangle \in R$ o $\langle y,x\rangle \in R$

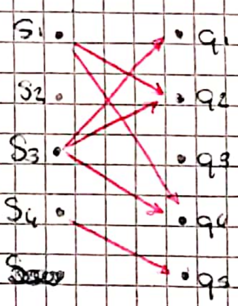
- **RELAZIONE DI EQUIVALENZA**: RIFLESSIVA, SIMMETRICA E TRANSITIVA

- **GRAFI BIPARTITI**

$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$
$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$

G su $S \times Q$

$\{\langle s_1, q_2\rangle, \langle s_1, q_4\rangle, \langle s_3, q_2\rangle, \langle s_3, q_1\rangle, \langle s_4, q_5\rangle\} \longrightarrow$



s_1	q_2
s_1	q_4
s_3	q_2
s_3	q_4
s_3	q_1
s_4	q_5

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
s_1	0	1	0	1	0
s_2	0	0	0	0	0
s_3	1	1	0	1	0
s_4	0	0	0	0	1

LEZIONE 5
STRUTTURE RELAZIONALI
INSIEMI E OPERAZIONI

Fondamenti dell'Informatica

19.10.2023

• Matrici booleane:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & m_{ij}=1 \\ 0 & m_{ij}=0 \end{cases} \qquad \overline{m}_{ij} = \begin{cases} 1 & m_{ij}=0 \\ 0 & m_{ij}=1 \end{cases}$$

$A \sqcup B = C$ join:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_{ij}=1 \text{ o } b_{ij}=1 \\ 0 & \text{se } a_{ij}=0 \text{ e } b_{ij}=0 \end{cases}$$

$A \sqcap B = C$ meet

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_{ij}=1 \text{ e } b_{ij}=1 \\ 0 & \text{se } a_{ij}=0 \text{ o } b_{ij}=0 \end{cases}$$

• Prodotto booleano

$\underset{n\times m}{A=[a_{ij}]}$ $\underset{m\times p}{B=b_{ij}}$ $A \cdot B = C_{n\times p}$

$$c_{ip} = \begin{cases} 1 & a_{ik}=1 \text{ e } b_{kj}=1 \text{ per qualche } k,\ 1 \le k \le m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

• Composizione di relazioni

$R_1\ S\times T$, $R_2\ T\times Q$

$R_2 \circ R_1$ se esiste $b \in T$ tale che $\langle a,b\rangle \in R_1$ e $\langle b,c\rangle \in R_2$

Es: $S=\{a,b\}$ $R_1=\{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,b\rangle\}$

$R_2=\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle\}$

$R_1 \circ R_2=\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle\}$

$R_2 \circ R_1=\{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle\}$

LEZIONE 6
STRUTTURE RELAZIONALI
INSIEMI E OPERAZIONI

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

20.10.2024

• **RELAZIONE D'EQUIVALENZA**: ESPRESSIONE IN TERMINI FORMALI LA <u>SIMILITUDINE</u> DI OGGETTI

ES: "ESSERE PARALLELE" NELL'INSIEME DELLE RETTE DEL PIANO

R: RELAZIONE BINARIA SU S, RIFLESSIVA, TRANSITIVA E SIMMETRICA

• **CLASSI DI EQUIVALENZA**: DETERMINA UNA <u>PARTIZIONE</u> DELL'INSIEME.

- ESAUSTIVE: OGNI ELEMENTO DELL'INSIEME APPARTIENE A QUALCHE CLASSE
- DISGIUNTE: LE DIVERSE CLASSI NON HANNO ELEMENTI IN COMUNE

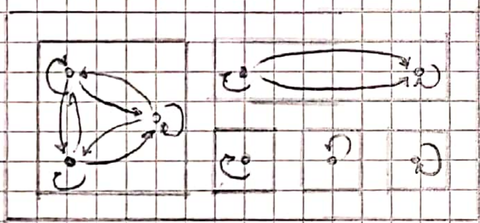
ES: S È UN INSIEME
R È UNA RELAZIONE EQUIVALENTE SU S
$T \subseteq S$ È UNA CLASSE DI EQUIVALENZA:

$x \in T$ se $\{y \in S \mid \langle x, y \rangle \in R\} = T$

x È IN UNA RELAZIONE CON TUTTI E SOLTANTO GLI ELEMENTI DI T

• **INSIEME QUOZIENTE**: <u>LA FAMIGLIA</u> DI CLASSI DI EQUIVALENZA È CHIAMATO INSIEME QUOZIENTE DI S, SI INDICA CON S/R

ES:



- OGNI COMPONENTE È UNA CLASSE DI EQUIVALENZA
- L'INSIEME QUOZIENTE HA 5 INSIEMI:
  - UNO CON 3 ELEMENTI
  - UNO CON 2 ELEMENTI
  - 3 SINGOLI
- LA RELAZIONE R DIVIDE L'INSIEME IN CLASSI DI EQUIVALENZA

• **FAMIGLIE DI INSIEMI**: UN INSIEME ELEMENTO DI UN ALTRO INSIEME. QUANDO GLI ELEMENTI SONO <u>TUTTI</u> INSIEME SI CHIAMA FAMIGLIA DI INSIEMI

$\cup F$ UNIONE

$\cap F$ INTERSEZIONE

LEZIONE 7
STRUTTURE RELAZIONALI
GRAFI E ORDINAMENTO

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

28.10.21

GRAFO: STRUTTURA COSTITUITA DA:

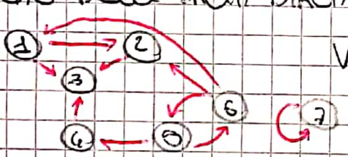
- OGGETTI SEMPLICI: nodi e vertici
- COLLEGAMENTI TRA I VERTICI CHE POSSONO ESSERE:
  - ORIENTATI
  - NON ORIENTATI
  - DATI ASSOCIATI A NODI E COLLEGAMENTI

• RELAZIONE BINARIA

v_1	v_1
v_1	v_2
v_1	v_3
v_2	v_1
v_4	v_3
v_4	v_5
v_5	v_6
v_6	v_6

• GRAFO ORIENTATO (O DIRETTO): GRAFO G DEFINITO DA DUE INSIEMI:

- V: L'INSIEME DEI VERTICI
- E: L'INSIEME DEGLI ARCHI DIRETTI (u,v)

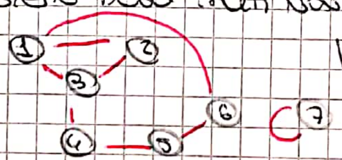


$V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

N.B.: $(u,v) \neq (v,u)$

• GRAFO NON ORIENTATO (O INDIRETTO): GRAFO G' DEFINITO DA DUE INSIEMI:

- V': L'INSIEME DEI VERTICI
- E': L'INSIEME DEGLI ARCHI NON DIRETTI (u,v)



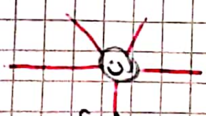
$V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

N.B.: $(u,v) = (v,u)$

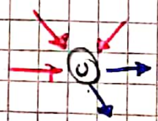
• INCIDENZA: L'ARCO (u,v) NEL GRAFO DIRETTO È INCIDENTE DA u IN v

• ADIACENZA: L'ARCO (u,v) NEL GRAFO NON DIRETTO È ADIACENTE TRA DI LORO (O INCIDENTE SU u,v)

• GRADO: CORRISPONDE AL NUMERO DI ARCHI INCIDENTI CON u. SI PUÒ CALCOLARE ANCHE IL GRADO USCENTE O ENTRANTE.



$\delta(u) = 5$



$\delta^-(u) = 3$

$\delta^+(u) = 2$

Scansionato con CamScanner

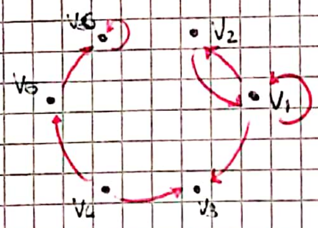
LEZIONE 7
STRUTTURE RELAZIONALI
GRAFI E ORDINAMENTO

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

26.10.2021

- SORGENTE: NO ARCHI ENTRANTI
- POZZO: NO ARCHI USCENTI

ENTRAMBI = NODO ISOLATO

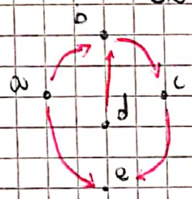


	δ^+	δ^-	S	P	I
V_1	3	2	NO	NO	NO
V_2	1	1	NO	NO	NO
V_3	0	2	NO	SI	NO
V_4	2	0	SI	NO	NO
V_5	11	1	NO	NO	NO
V_6	1	2	NO	NO	NO

- CAMMINO: SEQUENZA $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ DI NODI A DUE A DUE ADIACENTI, DOVE (v_i, v_{i+1}) CON $i = 1, \dots, k-1$ È UN ARCO DEL GRAFO

  SE $v_1 = u$ E $v_k = v$, ESISTE UN CAMMINO $(u \rightsquigarrow v)$ E v È RAGGIUNGIBILE DA u.
  IL CAMMINO SI DICE SEMPLICE SE I VERTICI SONO TUTTI DISTINTI

- SOTTOCAMMINO: $\langle v_i, v_{i+1}, \dots, v_j \rangle$ È UNA SOTTOSEQUENZA CONTINUA DEI VERTICI CHE COMPONGONO UN CAMMINO.

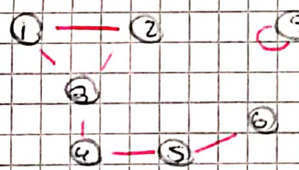


TRA A E E:
- CAMMINO DI LUNGHEZZA 1: $\langle a, e \rangle$
- CAMMINO DI LUNGHEZZA 3: $\langle a, b, c, e \rangle$

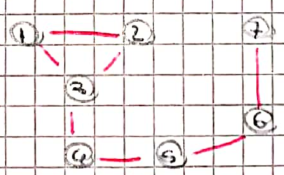
TRA A E D:
- SEMICAMMINO DI LUNGHEZZA 2: $\langle a, b, d \rangle$
- SEMICAMMINO DI LUNGHEZZA 6: $\langle$ ~~a~~ $, a, e, c, b, d \rangle$
- SEMICAMMINO DI LUNGHEZZA 6: $\langle a, b, c, e, a, b, d \rangle$

eccetera

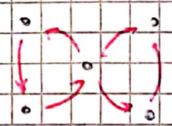
- CICLO: CAMMINO $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ DOVE $v_1 = v_k$. | SEMICICLO:
- GRAFO NON DIRETTO E CONNESSO: OGNI COPPIA DI VERTICI È CONNESSO DA UN CAMMINO.
- GRAFO DIRETTO FORTEMENTE CONNESSO: ESISTE UN CAMMINO TRA OGNI COPPIA DI VERTICI.



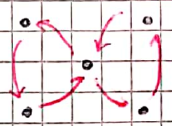
G1 NON CONNESSO



G2 CONNESSO



CONNESSO



FORTEMENTE CONNESSO

- DISTANZA:
  - LUNGHEZZA DEL CAMMINO PIÙ CORTO
  - LA DISTANZA DA V A V È SEMPRE 0
  - SE V E W NON SONO CONNESSI, LA DISTANZA È INFINITA (∞)

LEZIONE 7
STRUTTURE RELAZIONALI
GRAFI E ORDINATI

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

28.10.2021

• ALGORITMO: TROVARE LE DISTANZE DA V AD OGNI NODO:

- INIZIALIZZAZIONE: V VISITATO: $d(v)=0$
- CICLO: FINCHÉ CI SONO NON VISITATI:
  - TROVA W NON VISITATO E SEGNA $d(w)=n$
  - PER OGNI W' INCIDENTE SEGNA $d(w')=n+1$
- FINALIZZAZIONE: OGNI NODO NON VISITATO $d(w)=+\infty$

• GRAFO ETICHETTATO:

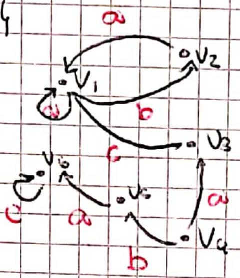
v_1	v_1	a
v_1	v_2	b
v_1	v_3	c
v_2	v_1	a
v_4	v_3	a
v_4	v_5	b
v_5	v_6	a
v_6	v_6	c

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$G: V \times V$

$N=\{a, b, c\}$

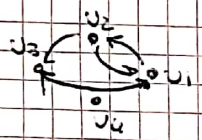
$E: G \to N$



COMPOSIZIONE RELAZIONI

GUARDA ESERCITAZIONE: 4
DATA 29.10.2021

• MATRICE DI ADIACENZA



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

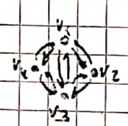
1 se (i,j) $\langle v_i, v_j \rangle \in E$

N.B. NEI GRAFI NON ORIENTATI, LA MATRICE È SIMMETRICA

• MATRICE GRAFO COMPLETO

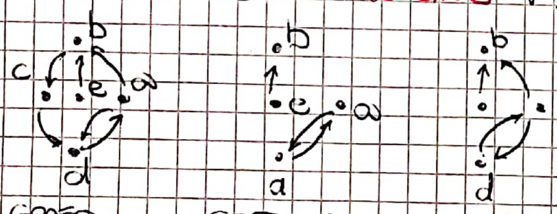
• GRAFO COMPLETO: OGNI NODO È COLLEGATO CON GLI ALTRI MA NON CON SÉ STESSO

• MATRICE
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



• SOTTOGRAFO $G_1=(V_1, E_1)$ È SOTTOGRAFO DI $G_2=(V_2, E_2)$ SE $V_1 \subseteq V_2$ E $E_1 \subseteq E_2$

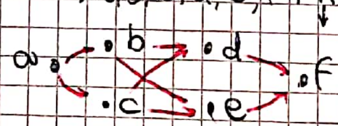
SOTTOGRAFO INDOTTO $V' \subseteq V$ HA SOLO ARCHI ADIACENTI A V'



• ISOMORFI: SONO DUE GRAFI UGUALI, CON I NODI RINOMINATI.

• GRAFO DIRETTO ACICLICO: $S=\{a, b, c, d, e, f\}$ $R=\{$

(DAG)



LEZIONE 8
STRUTTURE RELAZIONALI
GRAFI E ORDINAMENTO

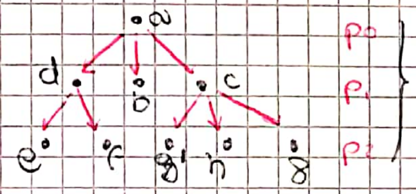
Fondamenti dell'Informatica

28.10.24

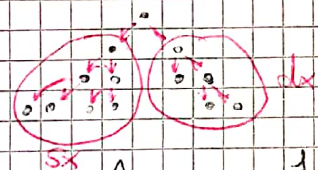
- **ALBERO**: DAG CON:
  - NODO SORGENTE (1) = RADICE
  - OGNI NODO HA UN SOLO ARCO ENTRANTE
  - I NODI SENZA ARCHI USCENTI SONO FOGLIE

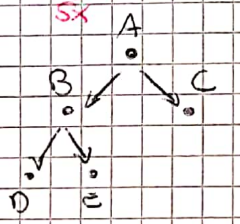
$R \subseteq S \times S$ con $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

$R = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle c,g\rangle, \langle c,h\rangle, \langle c,i\rangle, \langle d,e\rangle, \langle d,f\rangle\}$



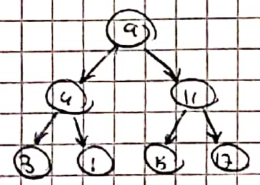
- **CAMMINO**: SEQUENZA DI ARCHI PARTENDO DA UN NODO ALL'ALTRO. OGNI NODO CHE SI TROVA SU CAMMINO È ASCENDENTE.
- **NODO INTERNO**: ALMENO 1 FIGLIO
- **PROFONDITÀ DI UN NODO**: X È LA LUNGHEZZA PER ANDARE DA r A X.
- **ALTEZZA DI UN NODO**: PROFONDITÀ MASSIMA
- **ALBERO BINARIO**: OGNI NODO, TRANNE LE FOGLIE, HANNO 2 FIGLI:
  - 1 NODO
  - ALBERO BIN. SX
  - ALBERO BIN. DX





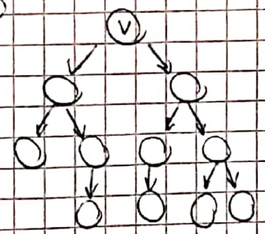
1	A	1
2	B	1
3	C	1
4	D	1
5	E	1
6	0	0
7	0	0

- **ALBERO PIENO**: OGNI NODO INTERNO HA DUE FIGLI.
- **ALBERO COMPLETO**: I NODI VUOTI SONO SOLO SULLE ULTIME RIGHE
- **ALBERO DI RICERCA**



NODI SX < RADICE
NODI DX > RADICE

- **ALBERO BILANCIATO**: PER OGNI NODO V, LA DIFFERENZA TRA NODI SX E DX DI V È MAX 1



LEZIONE 8
27/10/2021
SIR. REL.
GRAF. ORIEN.

FONDAMENTI DELL' INFORMATICA

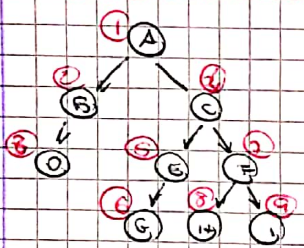
27.10.2021

• ATTRAVERSAMENTO: • PROFONDITÀ: FIGLI PRIMA DEI FRATELLI
• LARGHEZZA: FRATELLI PRIMA DEI FIGLI

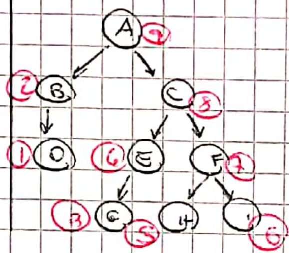
• ENUMERAZIONE: L (left), R (right), V (visit)

- PREORDINE VLR
- ORDINE LVR
- POSTORDINE LRV

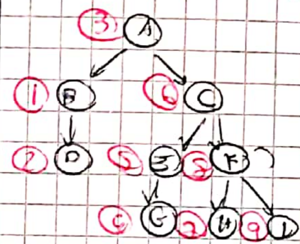
• PREORDER: ABCDEGHFI



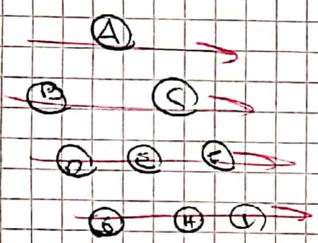
• POSTORDER: DBGEHIFCA



ORDER: BDAGECHFI



AMPIEZZA



A

~~ABC~~ BC → ABCDEFGHI

DEF

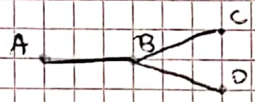
GHI

LEZIONE 9
STR. REL.
GRAF. ORIENT.

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

02.11.21

INSIEME LINEARMENTE ORDINATO | NON LINEARMENTE ORDINATO



POSET: UN ORDINE PARZIALE O SEMIPARZIALE (ORDINAMENTO) È UNA STRUTTURA RELAZIONALE DATA DA UNA COPPIA $\langle S,R \rangle$ IN CUI S È UN INSIEME E R RELAZIONE BINARIA RIFLESSIVA, ANTISIMMETRICA, TRANSITIVA SU S

R ORDINE PARZIALE $\leq$

$(X; \leq)$ INSIEME PARZIALMENTE ORDINATO - POSET

SE $\langle S, \leq \rangle$ E $\langle T, \leq \rangle$ SONO POSET, IL PRODOTTO È $\langle S \times T, \leq \rangle$

COPERTURA $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ $xRy \iff x$ DIVIDE y:

- 8 COPERTURA 4
- 4 COPERTURA 2
- 8 NON È COPERTURA DI 2

RELAZIONE D'ORDINE

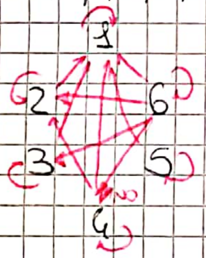
- ANTISIMMETRICA
- TRANSITIVA

O RIFLESSIVA (ORDINE LARGO)
O ANTIRIFLESSIVA (ORDINE STRETTO)

TRANSITIVA → ASIMMETRICA: STRETTO
TRANSITIVA → RIFLESSIVA, ANTISIMMETRICA: LARGO

$\forall x \neq y \; xRy \lor yRx$ ORDINE TOTALE, ALTRIMENTI PARZIALE → POSET

ES: $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ xRy x MULTIPLO DI Y



È D'ORDINE?

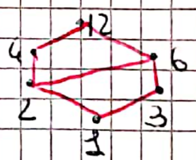
ANTISIMMETRICA ✓
TRANSITIVA ✓
RIFLESSIVA ✓

ORDINE LARGO → RIFLESSIVA
PARZIALE → NON TUTTI SONO IN RELAZIONE

DIAGRAMMA D'HASSE:

$(A, \leq)$ INS. ORD. FINITO:
- GLI ELEMENTI SONO PUNTI
- SE $\langle x,y \in A \land x<y \rangle$ x SI DISEGNA + IN BASSO DI y
- SE $\langle x,y \rangle$ $\nexists z$ tc $\langle x<z<y \rangle$ x E y SI UNISCONO

$A=D(12)=\{1,2,3,4,6,12\}$
$\forall x,y \in A \; (x \leq y \iff x|y)$



← 2 E 3 NON CONFRONTABILI

LEZIONE 10
SOLITA ROBA

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

08.11.2021

- **RETICOLO**: INS. PARZIALMENTE ORDINATO CON $x \sqcup y$ JOIN (MIN MAGGIORANTE) E $x \sqcap y$ MEET (MAX MINORANTE)
  $(S;\leq)$ $\forall x,y \in S(\exists \inf\{x,y\} \wedge \exists \sup\{x,y\})$

- **RETICOLO COMPLETO**: $\langle S, \leq \rangle$, OGNI SOTTOINSIEME M DI L C'È ($\leq$-MASSIMO) E ($\leq$-MINIMO). SE ESISTE MAX E MIN È UNITARIO

- **COMPLEMENTO**: $\langle L, \leq \rangle$ RETICOLO DISTRIBUTIVO UNITARIO $[0,1]$, $a \in L$ È COMPLEMENTO DI a SE $a \sqcup a' = \underline{1}$
  $a \sqcap a' = \underline{0}$

  $\underline{1}' = \underline{0}$ e $\underline{0}' = \underline{1}$

- **MINIMALI/MASSIMALI**: PIÙ ELEMENTI, QUELLI + PICCOLI E + GRANDI

- **MINIMI/MASSIMI**: TRA I MINIMALI E MASSIMALI, CONFRONTANDOLI, TROVIAMO QUELLI **ASSOLUTI**

- **MINORANTI/MAGGIORANTI**: ELEMENTI COMUNI ALL'INSIEME SOPRA/SOTTO O UGUALI ALL'INSIEME STESSO

- **ESTREMI MIN/MAG**: MINORANTI E MAGGIORANTI ASSOLUTI

POSET: INSIEME PARZIALMENTE ORDINATO È UN INSIEME CON PROPRIETÀ:

- RIFLESSIVITÀ
- ANTISIMMETRIA
- TRANSITIVITÀ

RETICOLO: POSET DOVE 2 ELEMENTI HANNO 1 MAX MINORANTE E 1 MIN MAGGIORANTE

R. COMPLEMENTATO: OGNI ELEMENTO HA UN COMPLEMENTO: IL LORO MAX MINORANTE È IL JOIN E IL LORO MIN MAGGIORANTE È IL MEET (DEVE ESSERE UNITARIO)

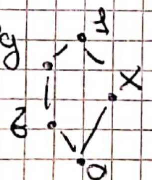
R. DISTRIBUTIVO: $(a \sqcap b) \sqcup c = (a \sqcup c) \sqcap (b \sqcup c)$

R. UNITARIO: C'È UN MINIMO ELEMENTO E UN MASSIMO

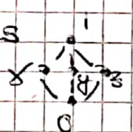
ALGEBRA DI BOOLE: HA QUESTE 3 PROPRIETÀ

RETICOLI NON DISTRIBUTIVI: UN RETICOLO È DISTRIBUTIVO SE NON HA SOTTOINSIEMI SIMILI AD NS E MS

NS



MS



MS: $d \vee (b \wedge e) = d \vee a = d$
$(d \vee b) \wedge (d \vee e) = e \wedge e = e$ $\quad d \neq e$

NS: $b \vee (e \wedge c) = b \vee a = b$
$(b \vee e) \wedge (b \vee c) = d \wedge E = d$ $\quad b \neq d$

1) RETICOLO TOT. ORDINATO: È DISTR. ; TUTTI I RETICOLI MS DISTRIBUTIVI

LEZIONE 11
ALGEBRA BOOLEANA

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

16.11.21

ALGEBRA DI BOOLE: 2 VALORI: VERO O FALSO. UNA PROPOSIZIONE SEMPLICE CHE ASSUME UN VALORE SI DICE VARIABILE BOOLEANA

OPERATORI: AND, OR, NOT.

TABELLE DI VERITÀ

AND

x	y	&&
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

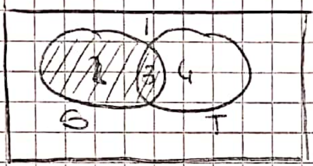
OR

x	y	||
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOT

x	!x
0	1
1	0

DIAGRAMMA DI VENN



S: CAPELLI CASTANI
T: OCCHI AZZURRI

1. NO, NO
2. S-T, SI NO
3. S∩T, SI-SI
4. T-S, NO-SI
5. 2+3+4 = S∪T =

AND: S∩T
OR: S∪T
NOT: S-T, T-S

TEOREMI DI DE MORGAN:

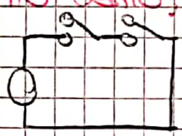
$$\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$$
$$\overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

PORTE LOGICHE:


APERTO, 0


CHIUSO, 1

IN SERIE: AND



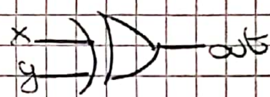
ENTRAMBE DEVONO ESSERE 1

PARALLELO: OR

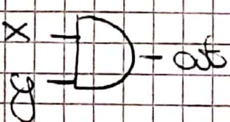
BASTA 1

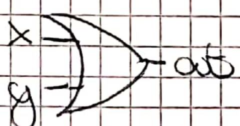
EXOR

x	y	
0	1	→ 1
1	0	→ 1
1	1	→ 0



NOT





LEZIONE 11
AUTOMI

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

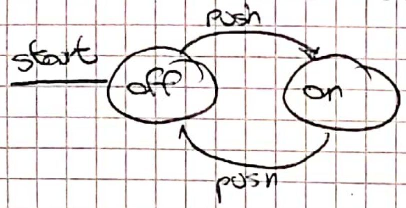
17.11.21

AUTOMA A STATI FINITI: GRAFO

NODI: RAPPRESENTANO GLI STATI

ARCHI: RAPPRESENTANO LE TRANSIZIONI

ETICHETTE: RAPPRESENTANO LA CAUSA DELLA TRANSIZIONE



AUTOMA A STATI FINITI: FORMALE

UN AUTOMA È DESCRITTO CON UNA QUINTUPLA:

$$A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$$

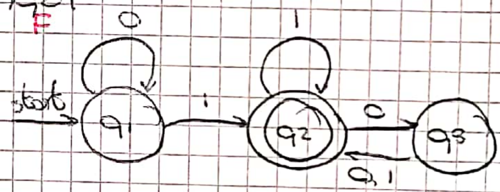
Q: STATI Σ ALFABETO δ $Q \times \Sigma \rightarrow$ FUNZIONE DI TRANSIZIONE q_0 STATO INIZIALE

F: STATI ACCETTATI

ES: • $A = \{ \underbrace{\{q_1, q_2, q_3\}}_{Q}, \underbrace{\{0,1\}}_{\Sigma}, \underbrace{\delta}_{\delta}, \underbrace{q_1}_{q_0}, \underbrace{\{q_2\}}_{F} \}$

• δ =

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2



• INPUT: 1101

• OUTPUT:
- INIZIO IN q_1 q_0
- LEGGO 1, VADO IN Q2
- LEGGO 1, VADO IN Q2
- LEGGO 0, VADO IN Q3
- LEGGO 1, VADO IN Q2
- Q2 È ACCETTATO F

POTENZE ALFABETO Σ^k $\Sigma = \{0,1\}$ $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$

$\Sigma^1 = \{0,1\}$

$\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$

STRINGA VUOTA $\Sigma = \{\varepsilon\}$

LUNGHEZZA STRINGA $|w|$, $|0110| = 4$

INSIEME STRINGHE: Σ^*, $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\varepsilon\}$

LEZIONE 11
AUTOMI

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

17.11.21

UN AUTOMA ACCETTA UN LINGUAGGIO SE ESISTE UN CAMMINO CHE:

- INIZIA NELLO STATO INIZIALE q_0
- HA UNA SEQUENZA $a_1 a_2 \ldots a_n$
- FINISCE IN UNO STATO DI ACCETTAZIONE F

I LINGUAGGI ACCETTATI SONO DETTI LINGUAGGI REGOLARI.

UN AUTOMA A STATI FINITI È DETERMINISTICO SE AD OGNI PASSO DI UNA STRINGA SEGUE IL PASSO PRECEDENTE. AFD

AFN: CI SONO PIÙ DI UN ARCO CON LA STESSA ETICHETTA USCENTE DA UNO STATO

LEZIONE 12
INDUZIONE E RICORSIONE

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

23.11.21

INDUZIONE E RICORSIONE: SONO DUE PRINCIPI MATEMATICI PER DEFINIRE, STUDIARE, MANIPOLARE OGGETTI E STRUTTURE COMPLESSE

RICORSIONE: DEFINIZIONE DI STRUTTURE BASATE IN SE STESSE

INDUZIONE: INDURRE UNA PROPRIETÀ GENERALE A PARTIRE DA CASI PARTICOLARI

AUTOREFERENZA: ENTRAMBI HANNO UNA AUTOREFERENZA BEN FONDATA, CHE CI AIUTA PER:

- DEFINIZIONE RICORSIVA: DEFINIRE INSIEMI, STRUTTURE
- DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE: VERIFICARE PROPRIETÀ
- DEFINIZIONI RICORSIVE DI ALGORITMI: DESCRIVERE METODI DI CALCOLO

DEFINIZIONI MATEMATICHE

- DEFINIZIONE: DESCRIVE LE PROPRIETÀ
- ASSIOMA: PRINCIPIO VERO SENZA DIMOSTRARLO
- TEOREMA: CONSEGUENZA LOGICA DEGLI ASSIOMI

UNA DEFINIZIONE RICORSIVA HA BISOGNO DI:

- UN CASO BASE
- FUNZIONE: PER COSTRUIRE NUOVI CASI
- ORDINE TOTALE: $n \in \mathbb{N},\ n \leq n+1$; $n \leq m,\ m \leq l,\ n \leq l$
- BUON ORDINE: UN ORDINE PARZIALE $(S; \leq)$ È UN BUON ORDINE QUALSIASI SOTTOINSIEME $X \subseteq S$ HA UN ELEMENTO $\leq$ MINIMALE

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

- P VERA PER 0
- P VERA PER $n \in \mathbb{N}$, ALLORA È VERO ANCHE PER $n+1$

1° DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} 2k = n(n+1) \rightarrow \sum_{k=0}^{n} 2k = 0+2+4+2n$$

1. BASE $n=0$, $\sum_{k=0}^{0} 2k = 2 \cdot 0 = 0(0+1) = 0$
2. IPOTESI $\sum_{k=0}^{n} 2k = n(n+1)$
3. PASSO $\sum_{k=0}^{n+1} 2k = (n+1)(n+1+1)$

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2k = \sum_{k=0}^{n} 2k + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1) = (n+2)(n+1)$$

Scansionato con CamScanner

LEZIONE 12
INDUZIONE E RICORSIONE

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

23.11.21

2° DIMOSTRAZIONE PER SUCCESSIONE

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$$

I BASE

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 2\cdot 0 + 1 = 1 = (0+1)^2 = 1^2 = 1$$

II ~~...~~ IPOTESI

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$$

III PASSO

$$\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) = (n+2)^2$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1) + 2(n+1) + 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} (n+2)^2 + 2(n+1) + 1 = (n+1+1)^2 = \boxed{(n+2)^2}$$

PRINCIPIO DI INDUZIONE COMPLETA IN N

SIA P UNA PROPRIETÀ IN N, SE

1. P(0) È VERO
2. $n \in N$, P(k) VERO, $\forall\ 0 \leq k \leq n$
3. P(n+1) È VERO

ESEMPIO: OGNI NUMERO $N \geq 2$ SI PUÒ ESPRIMERE COME IL PRODOTTO DI NUMERI PRIMI

I. BASE $n=2$

II. IPOTESI IIG. $2 \leq k \leq n$

III. PASSO SE $n+1$ primo è VERO
SE $n+1$ non è primo, allora È COMPOSTO DA DUE NUMERI $n+1 = m \cdot l$
$2 \leq m, l \leq n$, quindi anche $n+1$ è primo

LEZIONE 13
INDUZIONE E RICORSIONE

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

24.11.21

SIA A UN INSIEME DI SIMBOLI CHIAMATO ALFABETO

L'INSIEME A^* È COMPOSTO DA TUTTE LE PAROLE FINITE GENERATE DA A.

- LA PAROLA VUOTA (ε) È UNA PAROLA FINITA ($\varepsilon \in A^*$)
- OGNI SIMBOLO $a \in A$ È UNA PAROLA FINITA ($A \subseteq A^*$)
- SE V E W SONO PAROLE INFINITE, allora ANCHE $v \cdot w$ LO È

L'OPERAZIONE $\cdot$ DENOTA LA GIUSTAPPOSIZIONE (CONCATENAZIONE) DI DUE PAROLE

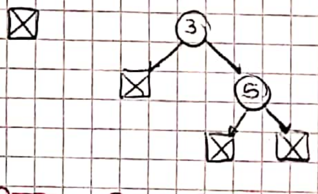
STELLA DI KLEENE: * È DEFINITO RICORSIVAMENTE TALE CHE L^* HA TUTTE LE GIUSTAPPOSIZIONI DI L

LUNGHEZZA:
- $lung(\varepsilon)=0$
- $lung\ a \in A = 1$
- $w = u \cdot v$, allora $lung(w) = lung(u) + lung(v)$

PALINDROMA: PAROLA CHE SI LEGGE UGUALE IN TUTTE LE DIREZIONI
- ε Pal
- $A \subseteq Pal$
- $w \in Pal$, awa Pal

ALBERI BINARI: OGNI GRAFO HA MAX DUE SUCCESSORI E UN PREDECESSORE
- l'ALBERO VUOTO ε È UN ALBERO BINARIO
- SE t_1, t_2 alberi, $n \in \mathbb{Z}$ allora (n, t_1, t_2) È BINARIO

ε $\quad (3, \varepsilon, (5, \varepsilon, \varepsilon))$



ALBERO BILANCIATO: t_1, t_2 BILANCIATI $|nodi(t_1) - nodi(t_2)| \leq 1$

ALBERO BINARIO DI RICERCA: $t_1, t_2 \in BST$, $\max(t_1) < n < \min(t_2)$

LEZIONE 16
LOGICA PROPOSIZIONALE

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

30.11.21

• ALGEBRA DI BOOLE: $B = (\{0,1\}, \leq)$, 0 FALSO, 1 VERO

VARIABILI: PROPOSIZIONI ATOMICHE, SONO VERE O FALSE

FORMULA: COMBINA PROPOSIZIONI.

CONNETTIVI: $\neg$ NOT
$\wedge$ AND
$\vee$ OR
(VALORE DI DESTRA) $\rightarrow$ IMPLICA
(STESSO VALORE) $\leftrightarrow$ DOPPIA IMPLICAZIONE

PRECEDENZA

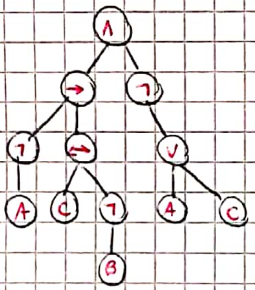
TABELLE DI VERITÀ:

	$\neg$
0	1
1	0

		$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

ALBERO SINTATTICO

$(\neg A \rightarrow (C \leftrightarrow \neg B)) \wedge \neg(A \vee C)$



1. MAI VUOTO
2. FOGLIE: PROPOSIZIONI
3. RESTO: CONNETTIVI
4. POSSONO ESSERCI RIPETIZIONI

N.B: PER COSTRUIRE UN ALBERO SI PARTE DALLE CONGIUNZIONI CON MINOR PRECEDENZA

ASSEGNAZIONE BOOLEANA $V: A \rightarrow \{0,1\}$

VALUTAZIONE BOOLEANA $I_V: F \rightarrow \{0,1\}$

TAVOLA DI VERITÀ: PER SAPERE TUTTE LE COMBINAZIONI

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$C \leftrightarrow \neg B$	G_1	$A \vee C$	G_2	F
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0

LEZIONE 15
LOGICA PROPOSIZIONALE

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

01.12.2021

EQUIVALENZA: DUE FORMULE SONO EQUIVALENTI SE NON DISTINGUIBILI DALLE ASSEGNAZIONI

ES: $A \equiv \neg\neg A \equiv A \wedge A \equiv A \vee A \equiv A \vee \neg A \rightarrow A$

OPERATORI SUPERFLUI: $\rightarrow$ E $\leftrightarrow$ POSSONO ESSERE ESPRESSI CON $\wedge$, $\vee$, $\neg$.

MODELLI / CONTROMODELLI: V = MODELLO SE $I_V(F) = 1$
V = CONTROMODELLO SE $I_V(F) = 0$

TAUTOLOGIA: NO CONTROMODELLI

CONTRADDIZIONE: NON HA MODELLI

SE ~~NON~~ È UN MIX, SODDISFACIBILE NON TAUTOLOGICA

LEZIONE ~~..~~ 16 — 10.12.21

LOGICA PROPOSIZIONALE

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

RELAZIONE DI CONSEGUENZA: $\Gamma \models F$, F È UNA CONSEGUENZA DI GAMMA

SE $M \models F$, M È UN MODELLO DI F.

p q r	$p \to q$	$\neg(r \land q)$	r
0 0 0	1	1	0
0 0 1	1	1	1
0 1 0	1	1	0
0 1 1	1	0	1
1 0 0	0	1	0
1 0 1	0	1	1
1 1 0	1	1	0
1 1 1	1	0	1

F È VALIDO SE OGNI INTERPRETAZIONE SODDISFA F (TAUTOLOGIA)

SISTEMA DEDUTTIVO: INSIEME DI REGOLE PER MANIPOLARE FORMULE

$$\frac{F_1, \dots, F_n}{F} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{PREMESSE} \\ \leftarrow \text{CONCLUSIONE} \end{matrix}$$

SE TUTTE LE PREMESSE SONO VERE, ALLORA LA CONCLUSIONE È VERA.

ASSIOMI: $\dfrac{}{F}$ (NON HANNO PREMESSE)

TEOREMA: UNA FORMULA CHE HA DIMOSTRAZIONE.

$\Gamma \vdash F$ F SI DERIVA DA GAMMA

CHIUSURA DEDUTTIVA: $Cn(\Gamma) := \{F \in \mathcal{F} \mid \Gamma \vdash F\}$

LEZIONE ~~15~~ 16
LOGICA PREDICATIVA

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

14.12.2021

UN SISTEMA DEDUTTIVO È SEMPRE:

- INCLUSIVO $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$
  un insieme di formule è sempre contenuto nella sua chiusura deduttiva
- MONOTONO: $\Gamma \subseteq \Delta$ ALLORA $Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$
- COMPATTO: $\Gamma \vdash F$ SE $\Delta \subseteq \Gamma$ FINITO t.c. $\Delta \vdash F$
  se F dimostrabile in un insieme infinito, se è dimostrabile in uno finito se questo è incluso in quello infinito
- TAGLIO DI PREMESSE: SE $\Delta \vdash F$ e $\forall \Gamma \vdash G$ $\forall G \in \Delta$, allora $\Gamma \vdash F$
  F si dimostra da Δ, g da Γ, se $G \in \Delta$, F si dimostra da Γ

UN SISTEMA DEDUTTIVO PUÒ ESSERE

- DEDUZIONE: $\Gamma, F \vdash G$ se $\Gamma \vdash F \to G$

SISTEMI

LOGICO — $\models$ CONSEGUENZA — SEMANTICO

DEDUTTIVO — $\vdash$ DERIVABILITÀ — SINTATTICO

UN SISTEMA DEDUTTIVO È:

- CORRETTO $\vdash F$ IMPLICA $\models F$ (ogni teorema è vero nel sistema logico)
- COMPLETO $\models F$ IMPLICA $\vdash F$ (si dimostra ogni formula logica)

SE ENTRAMBI:

- DECIDIBILITÀ: OGNI TAUTOLOGIA PUÒ ESSERE DIMOSTRATA ANCHE SE NON SAPPIAMO COME

TABLEAUX: COSTRUISCE MODELLI PIÙ SEMPLICI FINO A

- TROVA UN MODELLO
- NON TROVA MODELLI

F È UNA TAUTOLOGIA SE $\neg F$ È UNA CONTRADDIZIONE

F È UNA TAUTOLOGIA? (ASSURDO PER CONTRADDIZIONE)

1. NEGO F: $\neg F$
2. MODELLO DI F: TABLEAUX
3. SE ESISTE UN MODELLO, $\neg F$ NON È UNA TAUTOLOGIA

LEZIONE 17-18 — **FONDAMENTI DELL'INFORMATICA** — 16.12.2021
LOGICA PREDICATIVA

NEGAZIONE

$\dfrac{T: \neg\varphi}{F: \varphi}$ $\dfrac{F: \neg\varphi}{T: \varphi}$

CONGIUNZIONE

$\dfrac{T: \varphi \wedge \psi}{T: \varphi,\ T: \psi}$ $\dfrac{F: \varphi \wedge \psi}{F: \varphi \mid F: \psi}$

DISGIUNZIONE

$\dfrac{T: \varphi \vee \psi}{T: \varphi \mid T: \psi}$ $\dfrac{F: \varphi \vee \psi}{F: \varphi,\ F: \psi}$

IMPLICAZIONE

$\dfrac{T: \varphi \rightarrow \psi}{F: \varphi \mid T: \psi}$ $\dfrac{F: \varphi \rightarrow \psi}{T: \varphi,\ F: \psi}$

DOPPIA

$\dfrac{T: \varphi \leftrightarrow \psi}{T: \varphi,\ T: \psi \mid F: \varphi,\ F: \psi}$ $\dfrac{F: \varphi \leftrightarrow \psi}{T: \varphi,\ F: \psi \mid F: \varphi,\ T: \psi}$

ES:

$$T\ (\neg A \rightarrow (C \leftrightarrow B)) \wedge (A \vee C)$$

$$T: \neg A \rightarrow (C \leftrightarrow B),\ T: \neg(A \vee C)$$

$$T: \neg A \rightarrow (C \leftrightarrow B),\ F: A \vee C$$

$$T: \neg A \rightarrow (C \leftrightarrow B),\ F: A,\ F: C$$

$$F: \neg A,\ F: A,\ F: C \mid T: C \leftrightarrow B,\ F: A,\ F: C$$

$$T: A,\ F: A,\ F: C \mid T: C,\ T: B,\ F: A,\ F: C \mid F: C,\ F: B,\ F: A,\ F: C$$

CONTRADDIZIONE | CONTRADDIZIONE | MODELLO

IL METODO TABLEAU FINISCE DOPO UN N° FINITO DI PASSI (MAX = N° CONNETTIVI)

LEZIONE 17
LOGICA DEI PREDICATI

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

17.12.21

PROPOSIZIONE: PREDICATO + SOGGETTO + COPULA

PREDICATO	SOGGETTO	COPULA
ciò che si afferma	ciò di cui si afferma	l'atto di affermare

TIPI:

- UNI + AFF : A
- PAR + AFF : E
- UNI + NEG : I
- PAR + NEG : O

A TUTTI GLI S SONO P
E NESSUN S È P
I QUALCHE S È P
O QUALCHE S NON È P

SILLOGISTICA: RIDUZIONE DI UNA CONCLUSIONE NELLE SUE PREMESSE

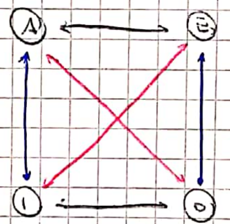
TUTTI GLI UOMINI SONO MORTALI ← PREMESSE
I FILOSOFI SONO UOMINI

I FILOSOFI SONO MORTALI ← CONCLUSIONE

S ESTREMO MINORE FILOSOFO
M TERMINE MEDIO UOMO
P ESTREMO MAGGIORE MORTALE

CONVERSIONI:

A → I (QUALCHE P È S)
E → E (NESSUN P È S)
I → I (QUALCHE P È S)
O → $\nexists x$



= CONTRARIE
= CONTRADDITORIE
= SUBALTERNAZIONE

FORME:

• 1° M P / S M / S P  2° P M / S M / S P  3° M P / M S / S P  4° P M / M S / S P 

NON TUTTE LE 256 COMBINAZIONI SONO VALIDE, SONO 19:

I) 4 DELLA 1° FORMA
II) 4 DELLA 2° FORMA
III) 6 DELLA 3° FORMA
IV) 5 DELLA 4° FORMA

CALCOLO DEI PREDICATI: QUANTIFICATORE UNIVERSALE $\forall x$
QUANTIFICATORE ESISTENZIALE $\exists x$

A $\forall x \, (Px \supset Qx)$
E $\forall x \, (Px \supset \neg Qx)$
I $\exists x \, (Px \wedge Qx)$
O $\exists x \, (Px \wedge \neg Qx)$

LEZIONE 17
LOGICA DEI PREDICATI

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

17.12.21

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA:

- CONNETTIVI PROPOSIZIONALI: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- COSTANTI PROPOSIZIONALI: $\top, \bot$
- SIMBOLO DI UGUAGLIANZA: $=$
- SIMBOLI SEPARATORI: (,), ,
- VARIABILI
- QUANTIFICATORI: $\forall, \exists$

PREDICATO $P(x)$

$L(x,y)$: X HA LETTO I LIBRI DI Y

$\exists x$ " : IL LIBRO Y È STATO LETTO DA QUALCUNO
$\forall x$ " : TUTTI HANNO LETTO IL LIBRO Y
$\exists y$ " : X HA LETTO UN LIBRO Y
$\forall y$ " : X HA LETTO TUTTI I LIBRI

LEZIONE 18
LOGICA PREDICATIVA

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

11.01.22

- LOGICA PREDICATIVA

- PREDICATI: "FUNZIONI" CHE RESTITUISCONO VERO O FALSO.
- FUNZIONI: RESTITUISCONO UN SOLO VALORE, NON PIÙ DI UNO
- COSTANTI: NOMI PROPRI.

N.B: UN PREDICATO PUÒ AVERE COME OGGETTI SOLO VARIABILI,
ES. NON PUÒ AVERE UN ALTRO PREDICATO

ESEMPIO:

Il film più famoso di QT è PF

⇓ (FILM TALE CHE IL FILM)

NON ESISTE FILM GIRATO DA QT È PIÙ FAMOSO DI PF

PREDICATI	FUNZIONI	COSTANTI
	FILM(X) GIRATO_FILM(X) PIU_FAMOSO(X)	QUENTIN TARANTINO PULP FICTION

$$\boxed{\nexists x} . (FILM(x) \wedge GIRATO\_FILM(QT,x) \wedge PIU\_FAMOSO(x,PF))$$

LEZIONE 19
TABLEAUX PREDICATIVA

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

12.a.22

- ESISTENZIALE POSITIVO

$T: \exists x\, P(x)$

$\downarrow$

$T: P(a)$ CON A NUOVA COSTANTE

- UNIVERSALE NEGATIVO

$F: \forall x\, P(x)$

$\downarrow$

$F: P(a)$ CON A NUOVA COSTANTE

- UNIVERSALE POSITIVO

$T: \forall x\, P(x)$

$\downarrow$

$T: P(a), \underline{T: \forall x.\, P(x)} \leftarrow$ RIMANE

GIÀ PRESENTE

- ESISTENZIALE NEGATIVO

$F: \exists x.\, P(x)$

$\downarrow$

$F: P(a), \underline{F: \exists x.\, P(x)} \leftarrow$ RIMANE

GIÀ PRESENTE

LEZIONE 19
TABLEAU PREDICATIVO

FONDAMENTI DELL'INFORMATICA

① ESISTENZIALE POSITIVA

$$\frac{S,\ T\exists x(P(x))}{S,\ T P(a)}\ T\exists x$$

$\boxed{a \text{ NUOVA}}$

③ ESISTENZIALE NEGATIVA

$$\frac{S,\ F\exists x(P(x))}{S,\ F P(k), \boxed{FA}}\ F\exists x$$

$\boxed{k \text{ QUALSIASI}}$
$\boxed{FA}$ SPAWNER

② UNIVERSALE NEGATIVA

$$\frac{S,\ F\forall x(P(x))}{S,\ F P(a)}\ F\forall x$$

$\boxed{a \text{ NUOVA}}$

④ UNIVERSALE POSITIVA

$$\frac{S,\ T\forall x(P(x)}{S,\ T P(k),\ T A}\ T\forall$$

$\boxed{k \text{ QUALSIASI}}$
$\boxed{TA}$ SPAWNER

SI FA PRIMA IL ∀ O IL ∃, SE SI PUÒ PRIMA CIÒ CHE NON GENERA SPAWNER

ES:

$$\frac{\exists x\forall y(R(x,y)\wedge P(a))\wedge \neg\forall z\exists w(R(w,z)).}{T: \exists x\forall y(R(x,y)\wedge P(a)),\ T: \neg\forall z\exists w(R(w,z))}\ T{:}\wedge\ (\text{NON DIVIDE})$$

$$\frac{}{\boxed{TA},\ T\exists x(R(x,b)\wedge P(a)),\ T:\neg\forall z\exists w(R(w,z))}\ T{:}\exists\ (\text{NON CREA SPAWNER})$$

(CI HANNO FATTO FARE IL T:∀

$$\frac{}{\boxed{TA},\ T\exists x(R(x,b)\wedge P(a)),\ F\forall z\exists w(R(w,z))}\ T{:}\neg$$

$$\frac{}{\boxed{TA},\ T\exists x(R(x,b)\wedge P(a)),\ F\exists w(R(w,c))}\ F{:}\forall$$

$$\frac{}{\boxed{TA}\ T(R(d,b)\wedge P(a)),\ F\exists w(R(w,c))}\ T{:}\exists$$

$$\frac{}{\boxed{TA}\ T(R(d,b)\wedge P(a)),\ F R(k,c)\ \boxed{FB}}\ F{:}\exists$$

$$\frac{}{\boxed{TA}\ T\exists x(R(x,c)\wedge P(a)),\ F R(k,c)\ \boxed{FB}}$$

$T R(e,c), T, P(a),\ F R(e,c)$

CONTRADDIZIONE

PROVA 10

$T: \exists x \forall y (R(x,y) \land P(a)),\ T: \neg \forall z \exists w (R(w,z))$ $T:\exists$

$T: \forall y (R(a,y) \land P(a)),\ T: \neg \forall z \exists w (R(w,z))$ $T:\neg$

$T: \forall y (R(a,y) \land P(a)),\ F: \forall z \exists w (R(w,z))$ $F:\forall$

$T: \forall y (R(a,y) \land P(a)),\ F: \exists w (R(w,c))$ $T:\forall$

$\boxed{T:A}$ $T: (R(a,c) \land P(a)),\ F: \exists w (R(w,c))$ $F:\exists$

$\boxed{T:A}$ $T: R(a,c) \land P(a),\ F(R(a,c))$ $\boxed{F:B}$ $T:\land$

$\boxed{T:A}$ $\boxed{F:B}$ $T: R(a,c),\ T: P(a),\ F(R(a,c))$

CHIUDE T → CONTRADDIZIONE

NO SPAWNER

SI SPAWNER

$T: \exists x \forall y (R(x,y) \land P(a)) \land T: \neg \forall z \exists w (R(w,z))$ $T:\land$

$T: \exists x \forall y (R(x,y) \land P(a)),\ T: \neg \forall z \exists w (R(w,z))$ $T:\neg$

$T: \exists x \forall y (R(x,y) \land P(a)),\ F: \forall z \exists w (R(w,z))$ $T:\exists$

$T: \forall y (R(b,y) \land P(a)),\ F: \forall z \exists w (R(w,z))$ $F:\forall$

$T: \forall y (R(b,y) \land P(a)),\ F: \exists w (R(w,c))$ $T:\forall$

$T: (R(b,c) \land P(a))$ $\boxed{T:A}$, $F: \exists w (R(w,c))$ $F:\exists$

$T: (R(b,c) \land P(a))$ $\boxed{T:A}$, $F: (R(b,c))$ $\boxed{F:B}$ $T:\land$

$T: R(b,c),\ T: P(a),\ F: R(b,c)$

FBF, CONTRADDIZIONE.