

Definizione: Abbiamo due sequenze X, Y e una funzione $W: \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$ funzione che associa ad ogni elemento di X e Y un peso. Vogliamo massimizzare il peso.

Sottoproblema (i, j): contiene il peso massimo della sottosequenza comune Z considerando i primi X_i e Y_j elementi

Equazioni di ricorrenza

- caso base: $M[i,j] = 0$ se $i = 0 \vee j = 0$
- passo ricorsivo: $M[i,j] = \begin{cases} M[i-1, j-1] + w[x_i] & \text{se } x[i] = y[j] \\ \max\{M[i-1, j], M[i, j-1]\} & \text{se } x[i] \neq y[j] \end{cases}$

Osservazione: Il problema è identico alla LCS, ma al posto di massimizzare la lunghezza, voglio massimizzare il peso.

Osservazione: Tutti i problemi di PD su sequenze che incontreremo possono essere formulati in termini:

- LCS: mi basta salvarmi il valore migliore nell'ultima posizione
- LIS: devo guardare sempre tutte le possibilità. Devo introdurre un problema ausiliario in cui salvarmi la sequenza che termina con X_m.

Definizione problema: date 3 sequenze X, Y, W di n, m e l numeri interi, si determini una tra le più lunghe sottosequenze comuni a X, Y e W

- sol. ottimale: S
- valore ottimo: $|S|$

Sottoproblema: Il sottoproblema di dimensione (i, j, k) é definito come segue: date 3 sequenze X, Y, W di n, m e l numeri interi, si determini una tra le più lunghe sottosequenze comuni ai prefissi X_i, Y_j, W_k

Numero sottoproblemi: Dato che $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$, $0 \leq k \leq l$ abbiamo $(n+1)(m+1)(l+1)$ sottoproblemi

Variabile sottoproblema: $c_{i,j,k}$ é la lunghezza di una tra le piú lunghe sottosequenze comuni a X_i, Y_j, W_k

Equazioni di ricorrenza: si scrivono senza sapere il valore delle soluzioni dei sottoproblemi ma sapendo solamente che tali soluzioni esistono e si possono utilizzare. Composta da:

- caso base: (i, j, k) con $i = 0 \vee j = 0 \vee k = 0$
- passo ricorsivo: (i, j, k) con $i > 0 \wedge j > 0 \wedge k > 0$. Distinguiamo i casi:

$$c_{i,j,k} = \begin{cases} 1 + c_{i-1,j-1,k-1} & \text{se } x_i = y_j = w_k \\ \max\{c_{i-1,j,k}, c_{i,j-1,k}, c_{i,j,k-1} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Soluzione: Otteniamo il valore ottimo in posizione $c_{n,m,l}$, per ricostruire la soluzione ottimale salvando gli elementi e stampandoli tramite procedura ricorsiva.

Implementazione bottom-up: valore ottimo

```
* inizializzazione a 0 ∀i,j,k tc i v j v k = 0 *
for i = 1 to n
    for j = 1 to m
        for k = 1 to l
            if xi = yj = wk
                c[i,j,k] = 1 + c[i-1,j-1,k-1]
            else
                c[i,j,k] = max{c[i-1,j,k], c[1,j-1,k], c[i,j,k-1]}
return c[n,m,l]
```

Definizione: Date due sequenze $X = <x_1, \dots, x_m>$ e $Y = <y_1, \dots, y_n>$ trovare la sottosequenza comune crescente più lunga.

- Valore ottimo: $|W|$
- Soluzione ottimale:

Definizione sottoproblema: trovare la lunghezza di una delle LICS di X_i e Y_j che terminano con x_i e y_j. N° sottoproblemi: $(m+1) \cdot (n+1)$, avremo $c_{i,j}$ = lunghezza LICS x_i e y_j.

ottimizzabile in $m \cdot n$

Equazioni di ricorrenza:

- caso base: $i = 0 \land j = 0$ tc $x_i \neq y_j \longrightarrow c_{i,j} = 0$
- passo ricorsivo: $i > 0 \land j > 0$ tc $x_i = y_j$ avremo

$$c_{i,j} = 1 + \max\{c_{h,k} \mid 1 \leq h < i,\ 1 \leq k < j,\ x_h < x_i\}$$ se $c_{h,k} = \emptyset$ allora $\max \emptyset = 0$

Soluzione del problema: ripercorro la matrice e salvo il $\max\{c_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$

	2	7	4	23	21	14	1	8
2	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	2	0	0	0	0	0
7	0	2	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	3	0	0	0
14	0	0	0	0	0	3	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0

Algoritmo DP (bottom-up) valore ottimo:

```
max = 0
for i = 1 to m
    for j = 1 to n
        if xi ≠ yj
            c[i,j] = 0
        else
            temp = 0
            for h = 1 to i-1
                for k = 1 to j-1
                    if xh < xi ∧ c[h,k] > temp
                        temp = c[h,k]
            c[i,j] = 1 + temp
        if c[i,j] > max
            max = c[i,j]
return max
```

tempo: $\Theta(n^2 \cdot m^2)$

spazio: $\Theta(n \cdot m)$

Premessa: Sia C insieme di colori tc la funzione di colorazione è definita nel seguente modo

$$\phi(x): \begin{cases} \text{rosso} & x<5 \\ \text{blu} & 5\le x\le 10 \\ \text{verde} & x>10 \end{cases}$$

Definizione: Date due sequenze X e Y di m e n numeri interi, e un numero naturale R stabilire se tutte le LCS di X e Y contengono al più R elementi rossi. (LCS < R)

Sottoproblema: Il sottoproblema di dimensione (i,j,r) è definito come segue:
Date due sequenze X_i e Y_j di m e n numeri interi, e un numero naturale R stabilire se tutte le LCS di X e Y contengono al più r elementi rossi.
N° sottoproblemi: $(m+1)(n+1)(R+1)$. Ad ogni sottoproblema è associata una variabile

Variabile: $c_{i,j,r}$ = true sse tutte le LCS a X_i e Y_j contengono al più r elementi rossi, false altrimenti

Equazioni di ricorrenza:

· caso base: $c_{i,j,r} = \begin{cases} \text{true} & \text{se } i=0 \lor j=0 \\ \text{false} & \text{se } i>0 \land j>0 \land r=0 \land x_i=y_j \land \phi(x_i)=\text{rosso} \end{cases}$

· passo ricorsivo: $c_{i,j,r} = \begin{cases} c_{i-1,j-1,r-1} & \text{se } i>0 \land j>0 \land r=0 \land x_i=y_j \land \phi(x_i)=\text{rosso} \\ c_{i-1,j-1,r} & \text{se } i>0 \land j>0 \land r\ge 0 \land x_i=y_j \land \phi(x_i)\ne\text{rosso} \\ c_{i-1,j,r} \land c_{i,j-1,r} & \text{se } i>0 \land j>0 \land r\ge 0 \land x_i=y_j \land \phi(x_i)=\text{rosso} \end{cases}$

Soluzione del problema: $c_{m,n,R}$

Algoritmo DP:

```
procedure LCSR(X,Y,R)
    for i=0 to m
        for r=0 to R
            c[i,0,r]= true
    for j=0 to m
        for r=0 to R
            c[0,j,r]= true
    for i=1 to m
        for j=1 to n
            if xi=yj and ϕ(xi)= rosso
                c[i,j,0]= false
    for i=1 to m
        for j=1 to n
            for r=0 to R
                if xi=yj
                    if ϕ(xi)=rosso
                        if r>0
                            c[i,j,r]=c[i-1,j-1,r-1]
                    else
                        C[i,j,r]=C[i-1,j-1,r]
                else
                    c[i,j,r]= c[i-1,j,r] ∧ c[i,j-1,r]
    return c[m,n,R]
```

Definizione: La distanza di Edit di due sequenze X e Y è il minimo numero di operazioni di cancellazione, inserimento e sostituzione di un singolo elemento che trasformano X in Y

Sottoproblema (i,j): trovare la distanza di edit dei prefissi X_i e Y_j, $i \in \{0,1,\dots,m\}$, $j \in \{0,1,\dots,n\}$
N° sottoproblemi: $(m+1)(n+1)$
Coefficiente $d_{i,j}$: distanza di edit dei prefissi X_i e Y_j
Valore ottimo: $d_{m,n}$

Casi base: sottoproblemi più semplici risolvibili
- $i=0 \land j=0$ allora sono uguali, $d_{0,0}=0$
- $i>0 \land j=0$ allora elimino gli i, $d_{i,0}=i$
- $i=0 \land j=0$ allora elimino gli j, $d_{0,j}=j$

Passo ricorsivo:
$$d_{i,j}=\begin{cases} d_{i-1,j-1} & \text{se } x_i=y_j \\ \min(\underbrace{d_{i-1,j-1}+1}_{\text{sostituzione}},\ \underbrace{d_{i-1,j}+1}_{\text{cancellazione}},\ \underbrace{d_{i,j-1}+1}_{\text{inserimento}}) & \text{se } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Algoritmo DP:

```
int calcola_ED(X,Y)
    for i=0 to m
        D[i,0]=i
    for j=0 to n
        D[0,j]=j
    for i=1 to m
        for j=1 to n
            if xi=yj
                D[i,j]=D[i-1,j-1]
            else
                D[i,j]=min(D[i-1,j-1]+1, D[i-1,j]+1, D[i,j-1]+1)
    return D[m,n]
```

Ricostruzione operazioni:

- Inizializzo lista minOP vuota
- Si parte dalla cella D[m,n] e seguo percorso di calcolo e termino in D[0,0]
- Per ogni D[i,j] visitata si aggiunge operazione a minOP (se $x_i \neq y_j$)
- Da D[i,j] si passa alla cella che ne ha determinato il calcolo

Ricostruzione sol. ottimale:

```
void    ric_minop_ricorsiva(D,i,j)
    if i>0 or j>0
        if from diagonal
            if xi ≠ yj
                append substitution(xi → yj) to minOP
            ric_minop_ricorsiva(D,i-1,j-1)
        else if from left
            append insertion(yj) to minOP
            ric_minop_ricorsiva(D,i,j-1)
        else
            append deletion(yj) to minOP
            ric_minop_ricorsiva(D,i-1,j)
```

Esempio: X = ⟨2, 10, 5, 3, 1, 12⟩ , Y = ⟨2, 5, 12, 2, 3, 12, 1, 30⟩

		2	5	12	2	3	12	1	30
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	↖ 0	←+1 1	←+1 2	←+1 3	←+1 4	←+1 5	←+1 6	←+1 7
10	2	↑+1 1	↖+1 1	←+1 2	←+1 3	←+1 4	←+1 5	←+1 6	←+1 7
5	3	↑+1 2	↖ 1	←+1 2	←+1 3	←+1 4	←+1 5	←+1 6	←+1 7
3	4	↑+1 3	↑+1 2	↖+1 2	←+1 3	↖ 3	←+1 4	←+1 5	←+1 6
1	5	↑+1 4	↑+1 3	↖+1 3	↖+1 3	←+1 4	↖+1 4	↖ 4	←+1 5
12	6	↑+1 5	↑+1 4	↖ 3	↖+1 4	↖+1 4	↖ 4	↖+1 5	↖+1 5

		2	5	12	2	3	12	1	30
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
~~10~~	2	1	1	2	3	4	5	6	7
5 ↪ 2 ↪ 12	3	2	1	2	3	4	5	6	7
3 ↪ 12	4	3	2	2	3	3	4	5	6
1	5	4	3	3	3	4	4	4	5
12 ↓ 30	6	5	4	3	4	4	4	5	5

Definizione: Date due sequenze X e Y rispettivamente di m e n interi e un numero naturale L, stabilire se la lunghezza di una qualunque LCS tra X e Y sia ≤ a L.

Sottoproblema (i,j,ℓ): Date due sequenze X e Y rispettivamente di m e n interi e un numero naturale L, stabilire se la lunghezza di una qualunque LCS tra X_i e Y_j sia ≤ a ℓ.

N° sottoproblemi: Dato che $0 \le i \le m$, $0 \le j \le n$, $0 \le \ell \le L$ avremo $(m+1)(n+1)(L+1)$ sottoproblemi

Definizione coefficiente: $c_{i,j,\ell}$ è true se e solo se la LCS X_i e Y_j è $\le \ell$, false altrimenti.

Equazioni di ricorrenza:

caso base
$$\begin{cases} \text{true} & \text{se } i=0 \lor j=0 \\ \text{false} & \text{se } i>0 \land j>0 \land j=0 \land x_i = y_j \end{cases}$$

passo ricorsivo
$$\begin{cases} c_{i-1,j-1,\ell-1} & \text{se } i>0 \land j>0 \land \ell>0 \land x_i = y_j \\ c_{i-1,j,\ell} \land c_{i,j-1,\ell} & \text{se } i>0 \land j>0 \land \ell \ge 0 \land x_i \ne y_j \end{cases}$$

Algoritmo DP: procedure LCS≤L(X, Y, L)

```
for i=0 to m
|   for ℓ=0 to L
|   |   c[i,0,ℓ]=true
for j=0 to m
|   for ℓ=0 to L
|   |   c[0,j,ℓ]=true
for i=1 to m
|   for j=1 to n
|   |   if xi=yj
|   |   |   c[i,j,0]=false
for i=1 to m
|   for j=1 to n
|   |   for ℓ=0 to L
|   |   |   if xi=yj
|   |   |   |   if ℓ>0
|   |   |   |   |   c[i,j,ℓ]=c[i-1,j-1,ℓ-1]
|   |   |   |   else
|   |   |   |   |   c[i,j,ℓ]=c[i,j-1,ℓ] ∧ c[i-1,j,ℓ]
return c[m,n,L]
```

Input:

- $X = \{1, 2, \dots, n\}$ insieme di n oggetti dove ogni oggetto i ha associato:
  - v_i. valore
  - w_i. peso
  - $col(i)$. colore nell' insieme {rosso, blu}
- C, capacità massima dello zaino
- R, intero positivo

Output:

- Problema: subset S di X che ha il massimo valore che contenga al più R oggetti rossi.
- Problema ridotto: valore del subset S di X che ha il massimo valore che contenga al più R oggetti rossi.

Sottoproblema (i, c, r): trovare il valore del subset $S_{i,c,r}$ dell' insiemi $X_i = \{1, 2, \dots, i\}$ che possa essere contenuto in uno zaino di capacità c, che ha il massimo valore e che contenga al più r oggetti rossi.

Numero sottoproblemi: $0 \leq i \leq n$, $0 \leq c \leq C$, $0 \leq r \leq R$ quindi $(n+1)(C+1)(R+1)$ sottoproblemi

Definizione coefficiente: $d_{i,c,r}$ contiene il valore di $S_{i,c,r}$

Equazioni di ricorrenza:

- caso base: $d_{i,c,r} = 0$, $S_{i,c,r} = \emptyset$ se $(i = 0 \vee c = 0) \wedge r \geq 0$
- passo ricorsivo:

$$
\begin{cases}
d_{i,c,r} = d_{i-1,c,r} & \text{se } i > 0 \wedge c > 0 \wedge r \geq 0 \wedge w_i > c \\
d_{i,c,r} = d_{i-1,c,r} & \text{se } i > 0 \wedge c > 0 \wedge r = 0 \wedge w_i \leq c \wedge col(i) = R \\
d_{i,c,r} = \max(d_{i-1,c,r} \wedge d_{i-1,c-w_i,r-1} + v_i) & \text{se } i > 0 \wedge c > 0, r > 0, col(i) = R \\
d_{i,c,r} = \max(d_{i-1,c,r} \wedge d_{i-1,c-w_i,r} + v_i) & \text{se } i > 0 \wedge c > 0, r > 0, col(i) \neq R
\end{cases}
$$

Definizione: Date due sequenze X e Y di lunghezza m e n trovare la LCS che non ha 2 elementi consecutivi uguali.

Problema ausiliario: Date due sequenze X e Y di lunghezza m e n trovare la LCS che non ha 2 elementi consecutivi uguali e finisce in x_m e y_n.

Sottoproblema (i,j): Date due sequenze X_i e Y_j di lunghezza m e n trovare la LCS che non ha 2 elementi consecutivi uguali e finisce in x_i e y_j.

Numero sottoproblemi: Dato che $0 \leq i \leq m$ e $0 \leq i \leq n$ avremo $(n+1)(m+1)$ sottoproblemi.

Definizione coefficiente: $c_{i,j}$ contiene la lunghezza della LCS di X_i e Y_j che non ha 2 elementi consecutivi e finisce in x_i e y_j.

Equazioni di ricorrenza:

- caso base: $c_{i,j} = 0$ se $(i=0 \lor j=0) \lor (i>0 \land j>0, x_i \neq y_j)$
- passo ricorsivo: $c_{i,j} = 1 + \max\{c_{h,k} \neq 0 \mid \text{tc } 1 \leq h < i \land 1 \leq k \leq j \land x_h \neq x_i\}$

Soluzione problema ausiliario: $c_{m,n}$

Soluzione problema ridotto: $\max\{c_{i,j} \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$

Introduzione: Prima di introdurre il problema Subset Sum, introduciamo il Partition, caso specifico del SS.

Definizione: Abbiamo $O = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ di n oggetti di valore v_i. Vogliamo sapere se è possibile o meno dividere equamente i valori.

Def. formale: $O = \{o_1, \dots, o_n\}$ oggetti, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ valori. $? \exists S \subseteq O$ tc $\sum_{i \in S} v_i = \sum_{i \in O-S} v_i$

Idea: Faccio una somma dei valori $T = \sum_{i \in O} v_i$ e la divido per 2: $T/2$. Se T é dispari allora la risposta é no, se T é pari devo scegliere un sottoinsieme di oggetti che arrivano a $T/2$.

Problema: Come faccio a sapere se, preso un numero, devo prenderne anche un altro? Dovrei provare tutte le combinazioni: tempo esponenziale (2^n). Allora cerco algoritmo DP.

Idea: Creo una matrice di n righe e $T/2$ colonne, dove in posizione $M[i][j] = T/F$, ed é T sse posso ottenere il valore j usando i primi i oggetti.

Sottostruttura ottima: $m_{i,j} = \begin{cases} T & \text{se } j \text{ è ottenibile dai primi } i \\ F & \text{se } j \text{ non è ottenibile dai primi } i \end{cases}$

Equazioni di ricorrenza:

- caso base: $M[0,j] = F \quad \forall 1 \leq j \leq T/2$
- passo ricorsivo: $M[i,j] = \begin{cases} T & \text{se } j = v_i \\ M[i-1,j] & \text{se } j < v_i \\ M[i-1,j] \vee M[i-1,j-v_i] & \text{se } j > v_i \end{cases}$
- valore ottimo: $M[n][T/2]$

Algoritmo bottom-up:

```
bool partition-DP(n, V)
    T = 0
    for i = 1 to n
        T = T + V[i]
    if T mod 2 ≠ 0
        return false
    else
        for j = 1 to T/2
            M[0, j] = F
        for i = 1 to T/2
            for j = 1 to n
                if V[i] == j
                    M[i, j] = T
                else if V[i] > j
                    M[i, j] = M[i-1, j]
                else
                    M[i, j] = M[i-1, j] or M[i-1, j-V[i]]
    return M[n, T/2]
```

Tempo: $O(n \cdot T/2)$ pseudopolinomiale. Possiamo ottimizzare il caso medio con un controllo: appena vedo T in colonna T/2 restituisco e termino.

Spazio: $O(n \cdot T/2)$ ottimizzabile in $O(T)$ dato che bastano due righe.

Definizione: $O=\{1,\dots,n\}$ oggetti, $V=\{v_1,\dots,v_n\}$, L limite, ? $\exists S \subseteq O$ tc $\sum_{i \in S} v_i = L$

Idea: Posso sfruttare partition usando al posto di $T/2 \rightarrow L$.

Algoritmo:

```
Partition(O,V):
    T=0
    for i=1 to n
        T=T+V[i]
    if T mod 2 ≠ 0
        return false
    else
        R= subsetsum(O,V,T/2)
    return R
```

Terminologia: Abbiamo ridotto partition a subsetsum. Riduzione di problemi.

Definizione: Dato un grafo $G=(V,E,col)$ dove V sono i vertici, E sono gli archi, $col: V \to \{R,N\}$ si vuole determinare $\forall (i,j) \in V \times V$ l'esistenza di un cammino p da i in j in cui non ci sono due vertici consecutivi rossi.

Sottoproblema K-esimo: Dato un grafo $G=(V,E,col)$ e $K \in \{0,1,\dots,n\}$ si vuole determinare $\forall (i,j) \in V \times V$ l'esistenza di un cammino p da i a j senza vertici consecutivi rossi.

Variabile associata: $d^{(K)}_{(i,j)}$: True se esiste cammino dal vertice i al vertice j i cui vertici intermedi appartengono all'insieme $\{1,2,\dots,K\}$ e che non contiene due vertici consecutivi rossi.

Equazioni di ricorrenza:

caso base: $\forall (i,j) \in V \times V$, $d^{(0)}_{(i,j)} = \begin{cases} \text{True} & \text{se } i=j \vee (i,j) \in E \wedge [col[i] \neq R \vee col[j] \neq R] \\ \text{False} & \text{altrimenti} \end{cases}$

passo ricorsivo: $d^{(K)}_{(i,j)} = d^{(K-1)}_{(i,j)} \vee d^{(K-1)}_{(i,K)} \wedge d^{(K-1)}_{(K,j)}$

Algoritmo DP:

```
procedure FW-no-red-pair-ex(V, E, col())
    for i=1 to n
        for j=1 to n
            if i=j ∨ (i,j)∈E ∧ [col[i]≠R ∨ col[j]≠R]
                d^(0)(i,j) = True
            else
                d^(0)(i,j) = False
    for K=1 to n
        for i=1 to n
            for j=1 to n
                d^(K)(i,j) = d^(K-1)(i,j) ∨ d^(K-1)(i,K-1) + d^(K-1)(K,j)
    return d^(n)
```

Tempo: (n^3)

Definizione: Dato un grafo $G=(V,E,W,col)$ dove V sono i vertici, E sono gli archi, W è la matrice dei pesi, $col: V \to \{R,N\}$ si vuole calcolare $\forall (i,j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo p da i a j in cui non ci siano due vertici consecutivi rossi.

Sottoproblema K-esimo: Dato un grafo $G=(V,E,W,col)$ con $K \in \{0,1,\dots,n\}$ si vuole calcolare $\forall (i,j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo p da i a j con vertici intermedi $\{1,2,\dots,K\}$ in cui non ci siano due vertici consecutivi di colore rosso.

Definizione variabile: $d^{(K)}(i,j)$ che è il peso di un cammino minimo da i a j i cui vertici intermedi appartengono all'insieme $\{1,2,\dots,K\}$ e che non contiene due vertici consecutivi di colore rosso.

Equazioni di ricorrenza:

caso base: $\forall (i,j) \in V \times V$, $d_{i,j}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i=j \\ w_{i,j} & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge [col(i) \neq R \vee col(j) \neq R] \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$

passo ricorsivo: $\forall (i,j) \in V \times V$, $d_{i,j}^{(K)} = \min\{\underbrace{d^{(K-1)}(i,j)}_{K \notin p}, \underbrace{d^{(K-1)}(i,K) + d^{(K-1)}(K,j)}_{K \in p}\}$ per proprietà sottostruttura ottima

Algoritmo DP:

```
procedure FW-no-red-pair(V, E, col())
    for i=1 to n
        for j=1 to n
            if i=j  d(0)(i,j) = 0
            else if (i,j)∈E ∧ [col(i)≠R ∨ col(j)≠R]  d(0)(i,j) = w_i,j
            else d(0)(i,j) = ∞
    for k=1 to n
        for i=1 to n
            for j=1 to n
                d(k)(i,j) = min{ d(k-1)(i,j) , d(k-1)(i,k-1) + d(k-1)(k,j) }
    return d(n)
```

Tempo: (n^3)

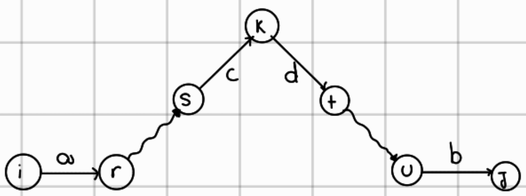
Definizione: Dato un grafo $G=(V,E,col)$ dove V sono i vertici, E sono gli archi, $col: E \rightarrow \{R,N\}$ si vuole determinare $\forall (i,j) \in V \times V$ l'esistenza di un cammino p da i in j in cui non ci sono due archi consecutivi rossi.

Sottoproblema K-esimo: Dato un grafo $G=(V,E,col)$ e $K \in \{0,1,\dots,n\}$ si vuole determinare $\forall (i,j) \in V \times V$ l'esistenza di un cammino p da i a j senza archi consecutivi rossi, con vertici intermedi $\in \{1,\dots,K\}$

Variabile associata: $d^{(K)}_{(i,j)}$: True se esiste cammino dal vertice i al vertice j i cui vertici intermedi appartengono all'insieme $\{1,2,\dots,K\}$ e che non contiene due archi consecutivi rossi.

Introduzione p. ausiliario: Necessario introdurlo in quanto l'ultimo arco di p_1 e il primo arco di p_2 non vengono controllati.

P ausiliario p': Dato un grafo $G=(V,E,col)$ dove V sono i vertici, E sono gli archi, $col: E \rightarrow \{R,N\}$ si vuole determinare $\forall (i,j) \in V \times V$ e $\forall (a,b) \in \{R,N\} \times \{R,N\}$ l'esistenza di un cammino p da i in j dove il primo arco ha colore a e l'ultimo ha colore b



Sottoproblema K-esimo P': Dato un grafo $G=(V,E,col)$ e $K \in \{0,1,\dots,n\}$ si vuole determinare $\forall (i,j) \in V \times V$ e $\forall (a,b) \in \{R,N\} \times \{R,N\}$ l'esistenza di un cammino p da i a j senza archi consecutivi rossi.

Variabile associata: $d^{(K)}(i,j,a,b)$ vale True se esiste un cammino minimo dal vertice i al vertice j con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1,2,\dots,K\}$ senza due archi consecutivi rossi, con il primo arco di colore a e l'ultimo arco di colore b. False altrimenti

Dimensione: $D^{(K)}(i,j,a,b) = n \cdot n \cdot 2 \cdot 2 = 4n^2$

Equazioni di ricorrenza:

- caso base: $K=0$ allora $d^{(0)}(i,j,a,b) = \begin{cases} True & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge a = b = col(i,j) \\ False & \text{altrimenti} \end{cases}$
- passo ricorsivo: $K>0$ allora $d^{(K)}(i,j,a,b) = e_1 \vee e_2$ dove:
  - se $K \notin p$ $e_1 = d^{(K-1)}(i,j,a,b)$
  - se $K \in p$ $e_2 = \bigvee_{(c,d)\in\{R,N\}^2 \mid c \neq R \vee d \neq R} (d^{(K-1)}(i,K,a,c) \wedge d^{(K-1)}(K,j,d,b))\}$

Soluzione problema PB: Chiamiamo $d_{PB}(i,j)$ il valore di verità del cammino $i \to j$.
Per ogni coppia (i,j) tc $i=j$ avremo $d_{PB}(i,j) = True$, mentre se $i \neq j$ avremo uno dei 4 casi:

- $v_1 = d^{(n)}(i,j,R,R)$
- $v_2 = d^{(n)}(i,j,R,N)$
- $v_3 = d^{(n)}(i,j,N,R)$
- $v_4 = d^{(n)}(i,j,N,N)$

Per ogni (i,j) il $d_{PB}(i,j)$ è dato dall'or logico tra v_1, v_2, v_3, v_4. La soluzione ha n^2 elementi.

Algoritmo DP:

caso base problema ausiliario

passo ricorsivo problema ausiliario

soluzione problema originale

```
procedure FW-no-cons-red-edges(V, E, col())
    for i = 1 to n
        for j = 1 to n
            for a ∈ {R, B}
                for b ∈ {R, B}
                    if i ≠ j ∧ (i,j) ∈ E ∧ a = b = col(i,j)
                        d^(0) i,j,a,b = True
                    else
                        d^0(i,j,a,b) = False
    for K = 1 to n
        for i = 1 to n
            for j = 1 to n
                for a ∈ {R, B}
                    for b ∈ {R, B}
                        e1 = d^(K-1) i,j,a,b
                        e2 = VALORE(K, i, j, a, b)
                        d^(K)(i,j) = e1 ∨ e2
    for i = 1 to n
        for j = 1 to n
            if i ≠ j
                u1 = d^(n) i,j,R,N
                u2 = d^(n) i,j,N,N
                u3 = d^(n) i,j,N,R
                u4 = d^(n) i,j,R,R
                dPB(i,j) = ∨{u1, u2, u3, u4}
            else
                dPB = True
    return dPB
```

Definizione: Dato un grafo $G=(V,E,W,col)$ dove V sono i vertici, E sono gli archi, W è la matrice dei pesi, $col: E \to \{R,N\}$ si vuole calcolare $\forall (i,j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo p da i a j in cui non ci siano due archi consecutivi rossi.

Sottoproblema K-esimo: Dato un grafo $G=(V,E,W,col)$ con $K \in \{0,1,\dots,n\}$ si vuole calcolare $\forall (i,j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo p da i a j con vertici intermedi $\{1,2,\dots,K\}$ in cui non ci siano due archi consecutivi di colore rosso.

Definizione variabile: $d^{(K)}(i,j)$ che è il peso di un cammino minimo da i a j i cui vertici intermedi appartengono all'insieme $\{1,2,\dots,K\}$ e che non contiene due archi consecutivi di colore rosso.

Introduzione p. ausiliario: Necessario introdurlo in quanto l'ultimo arco di p_1 e il primo arco di p_2 non vengono controllati.

P ausiliario p': Dato un grafo $G=(V,E,col)$ dove V sono i vertici, E sono gli archi, $col: E \to \{R,N\}$ si vuole calcolare $\forall (i,j) \in V \times V$ e $\forall (a,b) \in \{R,N\} \times \{R,N\}$ il peso minimo di un cammino p da i in j dove il primo arco ha colore a e l'ultimo ha colore b

Sottoproblema K-esimo P': Dato un grafo $G=(V,E,col)$ e $K \in \{0,1,\dots,n\}$ si vuole calcolare $\forall (i,j) \in V \times V$ e $\forall (a,b) \in \{R,N\} \times \{R,N\}$ il peso minimo di un cammino p da i a j senza archi consecutivi rossi.

Variabile associata: $d^{(K)}(i,j,a,b)$ è il peso di un cammino minimo dal vertice i al vertice j con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1,2,\dots,K\}$ senza due archi consecutivi rossi, con il primo arco di colore a e l'ultimo arco di colore b. False altrimenti

Equazioni di ricorrenza:

- caso base: $K=0$ allora $d^{(0)}(i,j,a,b) = \begin{cases} w_{i,j} & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge a=b=col(i,j) \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$

- passo ricorsivo: $K>0$ allora $d^{(K)}(i,j,a,b) = e_1 \vee e_2$ dove:
  - se $K \notin p$ $\quad e_1 = d^{(K-1)}(i,j,a,b)$
  - se $K \in p$ $\quad e_2 = \min\limits_{(c,d) \in \{R,N\}^2 \mid c \neq R \vee d \neq R} \left(d^{(K-1)}(i,K,a,c) + d^{(K-1)}(K,j,d,b) \right)$

Soluzione problema PB: Chiamiamo $d_{PB}(i,j)$ il peso del cammino $i \to j$.
Per ogni coppia (i,j) tc $i=j$ avremo $d_{PB}(i,j)=0$, mentre se $i \neq j$ avremo uno dei 4 casi:

- $v_1 = d^{(n)}(i,j,R,R)$
- $v_2 = d^{(n)}(i,j,R,N)$
- $v_3 = d^{(n)}(i,j,N,R)$
- $v_4 = d^{(n)}(i,j,N,N)$

Per ogni (i,j) il $d_{PB}(i,j)$ è dato dal minimo tra v_1, v_2, v_3, v_4. La soluzione ha n^2 elementi.

Algoritmo per minimo:

```
procedure minimo(K, i, j, a, b)
    m = ∞
    for c ∈ {R,B}
        for d ∈ {R,B}
            if c ≠ R ∨ d ≠ R
                x = d^(K-1)(i,K,a,c) + d^(K-1)(K,j,d,b)
                if x < m
                    m = x
    return m
```

Algoritmo DP:

```
procedure FW-no-cons-red-edges(V, E, col())
    for i = 1 to n                                          caso base problema ausiliario
        for j = 1 to n
            for a ∈ {R,B}
                for b ∈ {R,B}
                    if i ≠ j ∧ (i,j) ∈ E ∧ a = b = col(i,j)
                        d^(0) i,j,a,b = w i,j
                    else
                        d^0(i,j,a,b) = ∞
    for K = 1 to n                                          passo ricorsivo problema ausiliario
        for i = 1 to n
            for j = 1 to n
                for a ∈ {R,B}
                    for b ∈ {R,B}
                        e1 = d^(K-1) i,j,a,b
                        e2 = MINIMO(K, i, j, a, b)
                        d^(K)(i,j) = min{e1, e2}
    for i = 1 to n                                          soluzione problema originale
        for j = 1 to n
            if i ≠ j
                U1 = d^(n) i,j,R,N
                U2 = d^(n) i,j,N,N
                U3 = d^(n) i,j,N,R
                U4 = d^(n) i,j,R,R
                dPB(i,j) = min{U1, U2, U3, U4}
            else
                dPB = 0
    return dPB
```

Definizione: Dato un grafo $G=(V,E,W)$ pesato, orientato e senza cappi e dato un intero $L>0$ calcolare $\forall (i,j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo da i a j di lunghezza $\leq L$.

Definizione sottoproblema: Dato un grafo $G=(V,E,W)$ e $K \in \{0,\dots,n\}$ e $\ell \in \{1,\dots,L\}$ $\forall (i,j)$ calcolare il peso del cammino minimo da i a j con vertici intermedi in $\{1,\dots,K\}$ e lunghezza $\leq L$.

Definizione variabili: $d_{i,j}^{(K,\ell)}$ è il peso del cammino minimo da i a j con vertici intermedi $\in \{1,\dots,K\}$ e lunghezza $\leq L$

Equazioni di ricorrenza:

caso base: $K=0$
$$d_{i,j}^{(0,\ell)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i=j \\ w_{i,j} & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

passo ricorsivo: $K>0$
$$d_{i,j}^{(K,\ell)} = \begin{cases} d_{i,j}^{(K-1,\ell)} & \text{se } K \notin p \\ \min\{ d_{i,K}^{(K-1,\ell_1)} + d_{K,p}^{(K-1,\ell_2)} \}_{\ell_1+\ell_2 \leq \ell} & \text{se } K \in p \wedge \ell > 1 \\ \infty & \text{se } K \in p \wedge \ell = 1 \end{cases}$$

Definizione: Dato un grafo $G=(V,E,W,col)$ dove V sono i vertici, E sono gli archi, W è la matrice dei pesi, $col: W \rightarrow \{R,N\}$ si vuole calcolare $\forall (i,j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo p da i a j in cui non ci siano due vertici consecutivi rossi e lunghezza $= L$

Sottoproblema K-esimo: Dato un grafo $G=(V,E,W,col)$ con $K \in \{0,1,\dots,n\}$ e $\ell \in \{1,\dots,L\}$ $\forall (i,j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo p da i a j con vertici intermedi $\{1,2,\dots,K\}$ in cui non ci siano due vertici consecutivi di colore rosso e lunghezza $= \ell$

Definizione variabile: $d^{(K,\ell)}(i,j)$ che è il peso di un cammino minimo da i a j i cui vertici intermedi appartengono all'insieme $\{1,2,\dots,K\}$ e che non contiene due vertici consecutivi di colore rosso e la lunghezza $\ell = L$

Equazioni di ricorrenza:

caso base $K=0$ avremo
$$d^{(0,\ell)}_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i=j \\ w_{i,j} & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge [col(i) \neq R \vee col(j) \neq R] \wedge \ell = 1 \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

passo ricorsivo: $K>0$ avremo $d^{(K,\ell)}_{i,j} = \min\{e_1 \vee e_2\}$ tc

$$e_1 = d^{(K-1,\ell)}_{i,j} \qquad \text{se } K \notin p$$
$$e_2 = \min\{d^{K-1,\ell_1}_{i,K} + d^{K-1,\ell_2}_{K,j} \mid \ell_1 + \ell_2 = L \wedge \ell_1, \ell_2 \in \{1,\dots,\ell-1\}\} \qquad \text{se } K \in p$$

con $\min \emptyset = \infty$

Valore ottimo: $d^{(n,L)}(i,j)$

FW pari archi rossi

Istanza: (V, E, W, col) $col: E \rightarrow \{R, N, B, \dots\}$ finito

Soluzione: peso di un cammino minimo da i a j nel quale è pari il numero di archi rossi.

Sottoprob: (K, p) $K \in \{0, \dots, n\}$ $p \in \{0, 1\}$ $\forall (i,j) \in V^2$

Variabile: $d_{i,j}^{(K,p)}$: peso di un cammino minimo da i a j nel quale è pari/dispari il n° degli archi rossi a seconda che rispettivamente $p=0$ o $p=1$ e con vertici intermedi $\in \{1, \dots, K\}$

Caso base: $K=0$ $p \in \{0, 1\}$ $\forall (i,j) \in V^2$

$$d_{i,j}^{(0,0)} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } i=j \\ w_{ij} & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge col(i,j) \neq R \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad d_{i,j}^{(0,1)} = \begin{cases} \infty & \text{se } i=j \\ w_{ij} & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge col(i,j) = R \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Passo ricorsivo: (K, p) $K > 0$, $p \in \{0, 1\}$

- se $K \notin$ cammino $d_{i,j}^{(K,p)} = d_{i,j}^{(K-1,p)} = e_1$
- se $K \notin$ cammino

$$d_{i,j}^{(K,0)} = \min\left\{ d_{iK}^{(K-1,0)} + d_{Kj}^{(K-1,0)},\ d_{iK}^{(K-1,1)} + d_{Kj}^{(K-1,1)} \right\} = e_2$$
$$d_{i,j}^{(K,1)} = \min\left\{ d_{iK}^{(K-1,0)} + d_{Kj}^{(K-1,1)},\ d_{iK}^{(K-1,1)} + d_{Kj}^{(K-1,0)} \right\} = e_3$$

Equazioni di ricorrenza:

$$d_{ij}^{(K,0)} = \min\{e_1, e_2\}$$
$$d_{ij}^{(K,1)} = \min\{e_1, e_3\}$$

Soluzione: $\forall (i,j) \in V^2$ $d_{i,j}^{(n,0)}$

Istanza: (V, E, W, col) $col: E \to \{R, B\}$

Soluzione: peso di un cammino minimo da i a j nel quale sono presenti entrambi i colori

Osservazione: rainbow-path è np-completo se $|C| > 2$, tempo esponenziale.

Sottoprob: (K, p, q) $K \in \{0, \dots, n\}$. $p, q \in \{T, F\}$ $\forall (i,j) \in V^2$

Variabile: $d_{i,j}^{(K,p,q)}$ peso di un cammino minimo da i a j nel quale è presente un arco rosso sse $p = T$ e nel quale è presente un arco blu se $q = T$ e con vertici intermedi $\in \{1, \dots, K\}$

Caso base: (K, p, q) con $K = 0 \wedge p \in \{T, F\}$, $q \in \{T, F\}$ $\forall (i,j) \in V^2$

$$d_{ij}^{(0,T,T)} = \infty$$

$$d_{ij}^{(0,F,F)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$d_{ij}^{(0,T,F)} = \begin{cases} \infty & \text{se } i = j \\ w_{ij} & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge col(i,j) = B \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$d_{ij}^{(0,F,T)} = \begin{cases} \infty & \text{se } i = j \\ w_{ij} & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge col(i,j) = R \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Passo ricorsivo: (K, p, q) con $K > 0$, $p, q \in \{T, F\}$ $\forall (i,j) \in V^2$

- $K \notin$ cammino $d_{i,j}^{(K,p,q)} = d_{i,j}^{(K-1,p,q)} = e_0$
- $K \in$ cammino abbiamo 4 casi:

$$d_{i,j}^{(K,T,T)} = \min_{r_1, r_2, b_1, b_2 \in \{T,F\}^4} \left\{ d_{iK}^{(K-1,r_1,b_1)} + d_{Kj}^{(K-1,r_2,b_2)} \right\} \text{ t.c. } (r_1 = T \vee r_2 = T) \wedge (b_1 = T \vee b_2 = T) = e_1$$

$$d_{i,j}^{(K,T,F)} = \min_{r_1, r_2, b_1, b_2 \in \{T,F\}^4} \left\{ d_{iK}^{(K-1,r_1,b_1)} + d_{Kj}^{(K-1,r_2,b_2)} \right\} \text{ t.c. } (r_1 = T \vee r_2 = T) \wedge (b_1 = b_2 = F) = e_2$$

$$d_{i,j}^{(K,F,T)} = \min_{r_1, r_2, b_1, b_2 \in \{T,F\}^4} \left\{ d_{iK}^{(K-1,r_1,b_1)} + d_{Kj}^{(K-1,r_2,b_2)} \right\} \text{ t.c. } (r_1 = r_2 = F) \wedge (b_1 = T \vee b_2 = T) = e_3$$

$$d_{i,j}^{(K,F,F)} = \min_{r_1, r_2, b_1, b_2 \in \{T,F\}^4} \left\{ d_{iK}^{(K-1,r_1,b_1)} + d_{Kj}^{(K-1,r_2,b_2)} \right\} \text{ t.c. } (r_1 = r_2 = F) \wedge (b_1 = b_2 = F) = e_4$$

Equazioni di ricorrenza:
$$d_{ij}^{(K,p,q)} = \begin{cases} \min\{e_0, e_1\} & \text{se } p = q = T \\ \min\{e_0, e_2\} & \text{se } p = T \wedge q = F \\ \min\{e_0, e_3\} & \text{se } p = F \wedge q = T \\ \min\{e_0, e_4\} & \text{se } p = q = F \end{cases}$$

Soluzione: $\forall (i,j) \in V^2$ $d_{ij}^{(n,T,T)}$

FW min. archi rossi ≥ 2

Input: $G=(V,E,W,col)$ $col: E \rightarrow \{R,N\}$

Soluzione: peso di un cammino minimo da i a j nel quale sono presenti almeno 2 archi rossi

Sottoproblema (K,r): $0 \le K \le n$, $0 \le r \le 2$ peso cammino minimo che ha almeno 3 archi rossi con vertici intermedi $\in \{1,\dots,K\}$

Variabile associata $d_{i,j}^{K,r}$: $0 \le i \le n$, $0 \le j \le m$, peso del sottoprob. associato.

Casi base:

$$d_{i,j}^{0,0} = \begin{cases} 0 & \text{se } i=j \\ w_{i,j} & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge col(i,j) \neq R \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$d_{i,j}^{0,1} = \begin{cases} w_{i,j} & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge col(i,j) = R \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$d_{i,j}^{0,2} = \infty$$

Passo ricorsivo:

- $K \notin p$: $d_{i,j}^{K,r} = d_{i,j}^{K-1,r} = e_0$
- $K \in p$: $d_{i,j}^{K,r} = \min\{d_{ik}^{K-1,r_1} + d_{Kj}^{K-1,r_2}\}$ tc $r_1 + r_2 \ge r = e_1$

$$d_{i,j}^{K,r} = \min\{e_0, e_1\}$$

Osservazione: Problema generalizzabile a r elementi rossi, con $r+1$ casi base di cui $r-1 = \infty$

Sol: $S \subseteq X_n$ tc $D(S) = \max_{A \subseteq X_n \text{ comp}(A)=T \sum_{j \in A} t_j \text{ pari}} \{D(A)\}$

$D(S_{i,p}) = \max_{A \subseteq X_i \, . \, \text{comp}(A)=T, \sum_{j \in A} t_j \text{ pari se } p=0 \text{. dispari se } p=1} \{D(A)\}$

CASO base: $i \leq 1, \forall p \in \{0,1\}$

$opt_{0,0} = 0$

$opt_{0,1} = -\infty$

$opt_{1,0} = \begin{cases} d_1 & \text{se } t_1 \text{ pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$opt_{1,1} = \begin{cases} d_1 & \text{se } t \text{ dispari} \\ -\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$

Passo ricorsivo:

se $i \notin S_{ip}$ allora $OPT_{i,p} = OPT_{i-1,p}$

se $i \in S_{ip}$ allora $OPT_{i,p} = \begin{cases} OPT_{i-2,0} + d_i & t_i \text{ pari} \\ OPT_{i-2,1} + d_i & t_i \text{ dispari} \end{cases}$

Problema: Dato un grafo (V,E,W,col) [...] calcolare per ogni coppia $(i,j)\in V^2$ il peso di un cammino minimo da i a j nel quale non vi sono 3 vertici consecutivi rossi.

P. ausiliario: Dato un grafo (V,E,W,col) e dati $A,B\in\{R,B\}$ calcolare $\forall(i,j)\in V^2$ il peso di un cammino minimo da i a j nel quale non vi sono 3 vertici consecutivi rossi e dove A e B sono rispettivamente il colore del vertice del 1° arco del cammino ij e il colore del vertice da cui esce l'ultimo arco da i a j

Sottoprob. generico P': individuato da una tripla (K,a,b) dove $K\in\{0,\dots,n\}$, $a\in\{R,B\}$, $b\in\{R,B\}$
Dato un grafo (V,E,W,col) e dati $a,b\in\{R,B\}$ calcolare $\forall(i,j)\in V^2$ il peso di un cammino minimo da i a j con vert. intermedi $\in\{1,\dots,K\}$ nel quale non vi sono 3 vertici consecutivi rossi e dove A e B sono rispettivamente il colore del vertice del 1° arco del cammino ij e il colore del vertice da cui esce l'ultimo arco da i a j

Variabile associata a P': $d_{ij}^{(K,a,b)}$ è il peso del sottopr. generico P'

Caso base: triple (K,a,b) con $K=0$, $a,b\in\{R,B\}$ $\forall(i,j)\in V^2$

$$d_{ij}^{(0,i,j)}=\begin{cases} w_{ij} & \text{se } i\neq j \wedge (i,j)\in E \wedge col(i)=b \wedge col(j)=a \\ \infty & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Passo ricorsivo: (K,a,b) con $K>0$, $\forall(i,j)\in V^2$

$K\notin p$: $d_{ij}^{(K,a,b)}=d_{ij}^{(K-1,a,b)}$

$K\in p$: $d_{ij}^{(K,a,b)}=\min\limits_{(c,d)\in\{R,B\}^2}\{d_{iK}^{(K-1,a,c)}+d_{Kj}^{(K-1,d,b)}\}$ con $col(K)=B$

$d_{ij}^{(K,a,b)}=\min\limits_{\substack{(c,d)\in\{R,B\}^2\\ c\neq R \vee d\neq R}}\{d_{iK}^{(K-1,a,c)}+d_{Kj}^{(K-1,d,b)}\}$ con $col(K)=R$

Equazione di ricorrenza: $\forall(i,j)\in V^2$ $d_{ij}^{(K,a,b)}=\begin{cases}\min\{e_0,e_2\} & \text{se } col(K)=B\\ \min\{e_0,e_1\} & \text{se } col(K)=R\end{cases}$

Sol prob originale: $d_{PB}=\begin{cases}0 & \text{se } i=j\\ \min\limits_{(a,b)\in\{R,B\}^2}\{d_{ij}^{(n,a,b)}\} & \text{se } i\neq j\end{cases}$

LCS con ingombri

Istanza: $X_m = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$, $Y_n = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$, $C \in \mathbb{N}^+$

Soluzione: una più LCS di X_m e Y_n tc $|Z| = \max_{\substack{U \text{ subsq } X_m \text{ e } Y_n \\ W(U) \leq N}} \{|U|\}$

Variabile associata: l_{ijc} é la lungh. di una LCS di X_i e Y_j, $i \in \{0, \dots, m\}$ e $j \in \{0, \dots, n\}$ $c \in \{0, \dots, C\}$ tale che valore massimo e peso $\leq c$.

Caso base: triple (i, j, c) con $i = 0 \vee j = 0 \vee c = 0$

$l_{i,j,c} = 0$

Passo ricorsivo: $i > 0 \wedge j > 0 \wedge c > 0$:

- se $x_i = y_j$:
  - se $w(x_i) > c$: x_i non fa parte di Z_{ijc} : $l_{ijc} = l_{i-1,j-1,c}$
  - se $w(x_i) \leq c$: x_i potrebbe far parte di Z_{ijc}: $l_{ijc} = \max\{l_{i-1,j-1,c-w(x_i)} + 1, l_{i-1,j-1,c}\}$
- se $x_i \neq y_j$: x_i e y_j non fanno parte di Z_{ijc} : $l_{ijc} = \max\{l_{i,j-1,c}, l_{i-1,j,c}\}$

Algoritmo stampa:

```
procedure print WLCS(Z, i)
    if Z[i] ≠ 0
        print-WLCS(Z, Z[i])
    print(xi)
```

Algoritmo DP:

```
procedure WLCS(X,Y)
    for i=0 to m
        for j=0 to n
            for c=0 to C
                if i=0 V j=0 V c=0
                    l_ijc=0
                    Z_ijc=Ø
                else
                    if x_i=y_j Λ w(x_i) ≤ c
                        l_1= l_{i-1,j-1,c-w_i} + 1
                        l_2= l_{i-1,j-1,c}
                        if l_1 ≥ l_2
                            Z_ijc= Z_{i-1,j-1,c-w_i}
                        else
                            Z_ijc= Z_{i-1,j-1,c}
                        l= max{l_1, l_2}
                    else if x_i=y_j Λ w(x_i) > c:
                        l_ijc= l_{i-1,j-1,c}
                        Z_ijc= Z_{i-1,j-1,c}
                    else if x_i ≠ y_j
                        l_1= l_{i,j-1,c}
                        l_2= l_{i-1,j,c}
                        if l_1 ≥ l_2
                            Z_ijc= Z_{i,j-1,c}
                        else
                            Z_ijc= Z_{i-1,j,c}
                        l= max{l_1, l_2}
    return l_{m,n,C}, Z_{m,n,C}
```