PROGRAMMA SVOLTO ANALISI TEORIA

1. I NUMERI REALI

1 LEZ 28-09-21

1.1.1 INSIEMI N,Z,Q,R
1.1.2 ASSIOMI DELLA SOMMA E DELL'ORDINE
1.1.3 MODULO E LE SUE PROPRIETÀ
1.1.4 PROPRIETÀ ARCHIMEDEA, DENSITÀ DI Q IN R
1.1.5 MASSIMO, MINIMO, MAGGIORANTE, MINORANTE, LIM SUP, INF, ESTREMO SUP,INF

2 LEZ 29-09-21

1.2.1 DOMINIO, IMMAGINE, GRAFICO, RESTRIZIONE.
1.2.2 SURIETTIVE, INIETTIVE, BIUNIVOCHE
1.2.3 FUNZIONE INVERSA
1.2.4 COMPOSIZIONE DI FUNZIONI
1.2.5 MONOTONE CRESCENTE, DECRESCENTE E STRETTAMENTE
1.2.6 FUNZIONI SUPERIORMENTE/INFERIORMENTE LIMITATE
1.2.7 MASSIMO E MINIMO DI UNA FUNZIONE

3 LEZ 05-10-21

1.3.1 GRAFICI DELLE FUNZIONI
1.2.8.1 f(x) = k
1.2.8.2 f(x) = mx + q
1.2.8.3 f(x) = x-n xn
1.2.8.4 f(x) = 1/xn
1.2.8.5 f(x) = √x
1.2.8.6 f(x) = ax logax
1.2.8.7 f(x) = sin(x), cos(x), tan(x), arcsin(x), arccos(x), arctan(x)

2. SUCCESSIONI

4 LEZ 06-10-21

2.1.1 DEFINIZIONE DI SUCCESSIONI
2.1.2 LIMITE FINITO O INFINITO, SUCCESSIONI IRREGOLARI
2.1.3 LIMITATEZZA DI UNA SUCCESSIONE CONVERGENTE
2.1.4 TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE (dimostrato)
2.1.5 TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO (dimostrato)
2.1.6 OPERAZIONI SUI LIMITI
2.1.7 TEOREMA DEL CONFRONTO (dimostrato)

5 LEZ 12-10-21

4. LIMITI DI FUNZIONI

10 LEZ 26-10-21

4.1.1 PUNTO ACC ISO INT
4.1.2 DEFINIZIONI DI LIMITI PER X0 +INF -INF
4.1.3 CARATTERIZZAZIONE DEI LIMITI CON SUCCESSIONI
4.1.4 TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

11 LEZ 27-10-21

4.2.1 TEOREMA OPERAZIONI SU LIMITI
4.2.2 TEOREMA LIMITE DI FUNZIONE COMPOSTA
4.2.3 TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO
4.2.4 TEOREMA DEL CONFRONTO
4.2.5 LIMITI DA DESTRA E DA SINISTRA DI PUNTI DI ACC
4.2.6 LIMITI NOTEVOLI

5 CONTINUITÀ

12 LEZ 02-11-21

5.1.1 CONTINUITÀ IN UN PUNTO
5.1.2 CONTINUITÀ IN UN INSIEME
5.1.3 SPECIE DISCONTINUITÀ
5.1.4 CARATTERIZZAZIONE
5.1.5 LIMITI NOTEVOLI
5.1.6 OPERAZIONI
5.1.7 STUDIO CONTINUITÀ IN UN PUNTO
5.1.8 WEIERSTRASS

13 LEZ 03-11-21

5.2.1 TEOREMA ZERI
5.2.2 TEOREMA VALORI INTERMEDI
5.2.3 CARATTERIZZAZIONE MONOTONA
5.2.4 FUNZIONE INVERSA
5.2.5 RAPPORTO INCREMENTALE E DERIVATA

6 DERIVATA

14 LEZ 16-11-21

5.3.1 DERIVATA DESTRA E SINISTRA
5.3.2 CONDIZIONE NECESSARIA PER DERIVABILITÀ
5.3.3 CLASSIFICAZIONE PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

Scansionato con CamScanner

2.2.1 OPERAZIONI IN R*
2.2.2 OPERAZIONI SUI LIMITI CON SUCCESSIONI DIVERGENTI
2.2.3 MONOTONIA DI UNA SUCCESSIONE
2.2.4 forme indeterminate
2.2.5 TEOREMA DI ESISTENZA DEL LIMITE PER SUCC. MONOTONA
2.2.6 PRINCIPIO DI INDUZIONE
2.2..7 SUCCESSIONI PER RICORRENZA
2.2.8 punto fisso

6 LEZ 13-10-21

2.3.1 INFINITI E INFINITESIMI
2.3.2 ORDINE SUPERIORE INFERIORE
2.3.4 GERARCHIA DI INFINITI E INFINITESIMI
2.3.5 LIMITI NOTEVOLI DI ECHE SE NE DEDUCONO

7 LEZ 15-10-21

2.4.1 LIMITI NOTEVOLI TRIGONOMETRICI
2.4.2 "ASINTOTICO" E "O PICCOLO"

3. SERIE NUMERICHE

8 LEZ 19-10-21

3.1.1 DEFINIZIONE
3.1.2 CONVERGENTI DIVERGENTI IRREGOLARI
3.1.3 OSSERVAZIONI SU SERIE (AN + BN) E SERIE C x AN
3.1.4 CONDIZIONE NECESSARIA DI CONVERGENZA
3.1.5 CONVERGENZA ASSOLUTA
3.1.6 SERIE GEOMETRICA , SERIE TELESCOPICHE
3.1.7 SERIE A TERMINI NON NEGATIVI: TEOREMA DI REGOLARITÀ

9 LEZ 20-10-21

3.2.1 SERIE ARMONICA 1/N : DIVERGENZA
3.2.2 TEOREMA CRITERIO DEL CONFRONTO
3.2.3 CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO
3.2.4 SERIE DI MENGOLI
3.2.5 TEOREMA CRITERIO DI CONDENSAZIONE
3.2.6 CARATTERE SERIE 1/Nalfa e 1/Nalfa lnbeta
3.2.7 ESEMPI DI APPLICAZIONE DEL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO
3.2.8 TEOREMA CRITERIO DELLA RADICE
3.2.9 CRITERIO DEL RAPPORTO
3.2.10 SERIE DI SEGNO QUALSIASI

5.3.4 REGOLE DI DERIVAZIONE
5.3.5 DERIVATA FUNZIONE COMPOSTA
5.3.6 DERIVATA FUNZIONE INVERSA

15 LEZ 17-11-21

5.4.1 DERIVATA FUNZIONI ELEMENTARI
5.4.2 FUNZIONE DERIVATA
5.4.3 DERIVATA SECONDA
5.4.4 MASSIMI E MINIMI RELATIVI
5.4.5 TEOREMA DI FERMAT

16 LEZ 21-11-21

5.5.1 TEOREMA DI ROLLE
5.5.2 TEOREMA DI CAUCHY
5.5.3 TEOREMA DI LAGRANGE
5.5.4 CONSEGUENZE
5.5.5 TEST DI MONOTONIA
5.5.6 CRITERIO DI MONOTONIA
5.5.7 CONDIZIONE SUFFICIENTE PER DERIVABILITA
5.5.8 TEST DELLA DERIVATA PRIMA PER PUNTI CRITICI
5.5.9 TEOREMA DI DE L HOPITAL

17 LEZ 22-11-21

5.6.1 O PICCOLO PER FUNZIONI, ESEMPI
5.6.2 POLINOMIO DI TAYLOR
5.6.3 MCLAURIN
5.6.4 TEOREMA FORMULA DI TAYLOR
5.6.5 ESEMPI CON ESP, LOG E COSENO

18 LEZ 30-11-21

5.7.1 Teorema (condizione sufficiente per estremante)
5.7.2 convessità concavità
5.7.3 esempi funzioni elementari
5.7.4 primo ordine secondo ordine
5.7.5 punti flesso, tan flesso
5.7.6 esempio studio funzione

7 INTEGRALI

19 LEZ 1-12-21

6.1.1. definizione primitiva
6.1.2 proprietà
6.1.3 suddivisione intervallo,

Scansionato con CamScanner

3.2.11 SERIE DI SEGNO ALTERNATO
3.2.12 CRITERIO DI LEIBNIZ

6.1.4 somma sup e inf
6.1.5 proprietà
6.1.6 cond nec di integrabilità
6.1.7 proprietà integrale definito
6.1.8 teorma integrabilità funz continua
6.1.9 funz monotona

20 LEZ 14-12-21

6.2.1 integrale di riemann come calcolo di aree
6.2.2 teorema media integrale
6.2.3 funzione integrale
6.2.4 continuità funzione integrale
6.2.5 teorema fondamentale del calcolo integrale
6.2.6 secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

Scansionato con CamScanner

RUSSO
ANDREA

ANALISI MATEMATICA

1° LEZIONE / 28.09.21

1. I NUMERI REALI

• 1.1.1 INSIEMI N, Z, Q, R

$N = \{0, 1, 2\}$ NUMERI NATURALI
$Z = \{-2, 0, 2, ...\}$ NUMERI INTERI
$Q = \{1/2, 0, 3, ...\}$ NUMERI RAZIONALI
$R = \{-1/2, 0, 3\}$ NUMERI REALI SODDISFANO ALCUNI ASSIOMI

• 1.1.2. ASSIOMI DELLA SOMMA E DELL'ORDINE

- ASSIOMI DI CAMPO (SOMMA E PRODOTTO)

1) ASSOCIATIVA: $(a+b)c = a(b+c)$
2) COMMUTATIVA: $a+b = b+a$
3) DISTRIBUTIVA: $(a+b)c = ac + bc$
4) ELEMENTO NEUTRO: 0 ADDIZIONE, 1 MOLTIPLICAZIONE
5) INVERSI

- ASSIOMI DI ORDINE (CONFRONTO)

6) PRESI DUE NUMERI SAPPIAMO DIRE SE UNO PRECEDE L'ALTRO O SONO UGUALI
7) SE $a <= b$ e $b <= a$, $a = b$
8) $a <= b$ e $c \in R$, $a + c \leq b + c$
9) se $a >= 0$, $b >= 0$, $a + b >= 0$ e $ab >= 0$

1.1.3 VALORE ASSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x & se \ x > 0 \\ 0 & se \ x = 0 \\ -x & se \ x < 0 \end{cases}$$

PER OGNI $R > 0$ VALGONO:
- $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$
- $|x| \geq r \iff x \leq -r \vee x \geq r$

1.1.4 PROPRIETÁ ARCHIMEDEA, DENSITÁ DI Q IN R

IN R VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÁ:

- PROPRIETÁ ARCHIMEDEA: SIANO $0 < a < b$ ESISTE n tc $na > b$
- Q É DENSO IN R: $a, b \in R$, $a < b$ ESISTE $p/q \in Q$ tc $a < p/q < b$
(TRA DUE NUMERI RAZIONALI CI SONO INFINITI NUMERI)

Scansionato con CamScanner

FALBO ANDREA

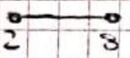
ANALISI MATEMATICA

1ª LEZIONE / 28.09.21

1.1.5 MAX, MIN, MAGG, MINOR, LIM SUP E INF, ESTREMO SUP E INF

UN INSIEME AMMETTE MAGGIORANTI SE È LIMITATO SUPERIORMENTE.
I MAGGIORANTI SONO INFINITI, IL MASSIMO È UNICO E DEVE ESSERE COMPRESO.
L'ESTREMO SUPERIORE DI A, IL NUMERO REALE Sup A = min DEI MAGGIORANTI

ES: $[2, 8]$



È LIMITATO SUPERIORMENTE.
È LIMITATO INFERIORMENTE
MAGGIORANTI = $[8, +\infty)$
MINORANTI = $(-\infty; 2]$
MASSIMO = 8
MINIMO = 2
Sup A = 8
inf A = 2

1.2.1 DOMINIO, IMMAGINE, GRAFICO, RESTRIZIONE

$f: A \to B$ ASSOCIA AD OGNI a UN ELEMENTO DI b

A DOMINIO DI f

B CODOMINIO DI f

$f(a)$ IMMAGINE IN B DI a TRAMITE f

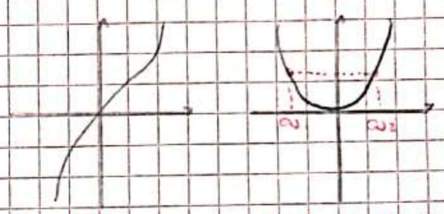
$f(A)$ INSIEME IMMAGINE

$G(f)$ GRAFICO

$C \subset A$, RESTRIZIONE DI f A C

1.2.2 INIETTIVE, SURIETTIVE, BIUNIVOCHE

INIETTIVA $a_1, a_2 \in A$, $f(a_1) \neq f(a_2)$



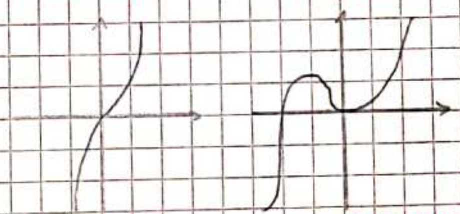
INIETTIVA NO INIETTIVA

SURIETTIVA $f(A) = B$

N.B. GUARDARE SEMPRE IL CODOMINIO.
ES. SE NEL 2, IL CODOMINIO FOSSE $(0, +\infty)$
SAREBBE ANCHE SURIETTIVA

SURIETTIVA NO SURIETTIVA

BIUNIVOCA INIETTIVA + SURIETTIVA

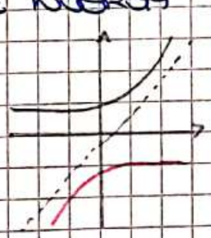


BIUNIVOCA NO BIUNIVOCA

1.2.3 FUNZIONE INVERSA

$f^{-1}: B \to A$

$f: A \to B$



1.2.4 FUNZIONE COMPOSTA

$f: A \to B \quad y = x + 2$

$g: B \to C \quad y = x^2 + 1$

$f(g): A \to C : (x^2+1)+2$

FALBO
ANDREA

ANALISI MATEMATICA

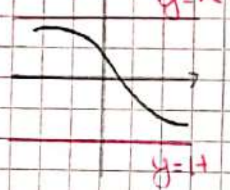
... LEZIONE / 21.04.21

• 1.2.5. MONOTONE CRESCENTI . DECRESCENTI

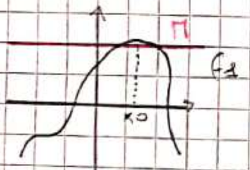
STRET. CRESCENTE   CRESCENTE   STRET. DECRESCENTE   DECRESCENTE

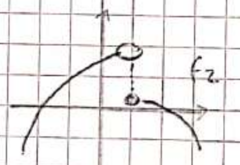
STRET. CRESCENTE $(-\infty, -1)$
DECRESCENTE $(-1, 0{,}5)$
STRET. CRESCENTE $(0{,}5, 1{,}5)$

• 1.2.6. SUPERIORMENTE / INFERIORMENTE LIMITATA



• 1.2.7. MASSIMO E MINIMO DI UNA FUNZIONE





$x_0 = MAX$

f_1 HA MASSIMO f_2 NON HA MASSIMO

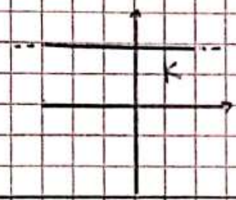
Scansionato con CamScanner

FARBO ANDREA

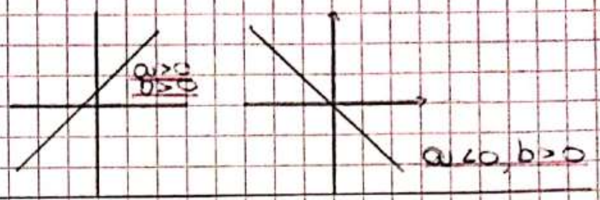
ANALISI MATEMATICA

3° LEZIONE / 03 2021

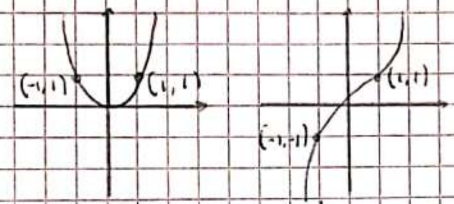
1.3.1 GRAFICO $f(x) = K$



1.3.2 GRAFICO $f(x) = ax + b$



1.3.3 GRAFICO $f(x) = x^n$



n pari ①   n dispari ②

① FUNZIONE: - PARI
(simmetrico a y)
- PASSA DA (0,0)(1,1)(-1,1)
- IMMAGINE = $[0, +\infty)$
- NO INIETTIVA
- NO SURIETTIVA

② FUNZIONE: - DISPARI
- (simmetrico a 0,0)
- INIETTIVA } BIUNIVOCA
- SURIETTIVA }
- STRET. CRESCENTE
- PASSA DA (0,0)(1,1)(-1,-1)

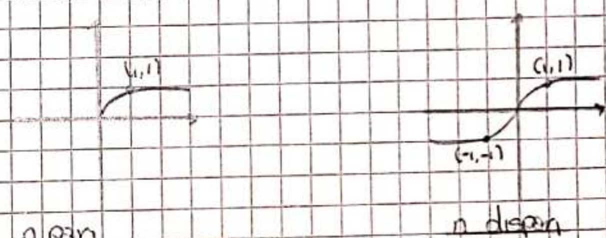
1.3.4 GRAFICO $f(x) = 1/x^n$

n pari   n dispari

FUNZIONE: PARI
NO INI, SURI

FUNZIONE:
- DISPARI
- INIETTIVA
- NO SUR.

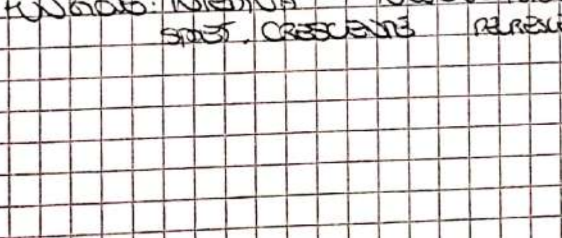
1.3.5 GRAFICO $\sqrt[n]{x}$



n pari
FUNZIONE: INIETTIVA
NO SURIETTIVA

n dispari
FUNZIONE: INIETTIVA
SURIETTIVA

1.3.6 GRAFICO $f(x) = a^x$



$a > 1$ $0 < a < 1$

FUNZIONE: INIETTIVA
STRET. CRESCENTE

FUNZIONE: INIET.
DECRESCENTE

1.3.7 GRAFICO $f(x) = \log_a x$

$a > 1$ $0 < a < 1$

FUNZIONI:
- INIETTIVE E
SURIETTIVE

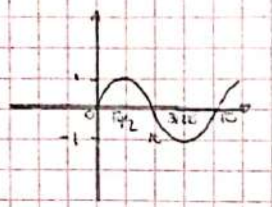
Scansionato con CamScanner

FAUSO ANDREA

ANALISI MATEMATICA

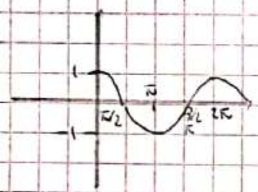
3° LEZIONE / 08.10.21

· 1.3.8. GRAFICO $f(x) = \sin x$



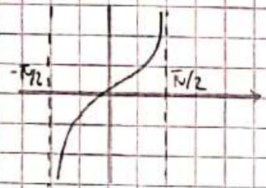
- È PERIODICA DI PERIODO $P = 2\pi$
- È DISPARI
- $Im = [-1, 1]$

· 1.3.9 GRAFICO $f(x) = \cos x$



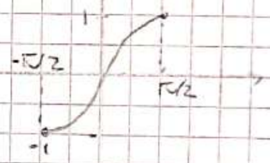
- È PERIODICA
- È ~~DIS~~PARI
- $Im = [-1; 1]$

· 1.3.10 GRAFICO $f(x) = tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$



· PERIODICA $P = \pi$
- INVERTIBILE →

1.3.11 GRAFICO $f(x) = \arcsin x$



Scansionato con CamScanner

FALBO ANDREA

ANALISI MATEMATICA

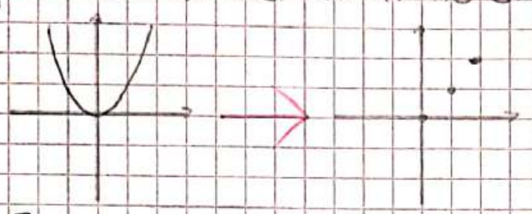
4ª VERSIONE/OC 10.21

2. SUCCESSIONI

2.1.1 DEFINIZIONE DI SUCCESSIONE

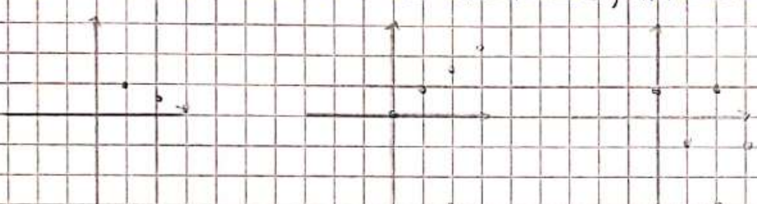
LE SUCCESSIONI SONO FUNZIONI CON DOMINIO N

$\{a_n\}$ VALORI ASSUNTI DA A AL VARIARE DI N



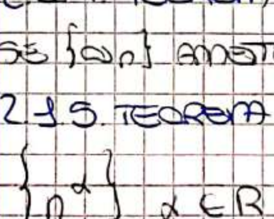
FUNZIONE SUCCESSIONE

2.1.2 LIMITE FINITO O INFINITO, IRREGOLARI



$a_n = 1/n$	$a_n = x^2$	$a_n = (-1)^n$
DIVENTA SEMPRE + PICCOLA	DIVENTA SEMPRE + GRANDE	OSCILLA
$\lim_{n \to +\infty} = 0$	$\lim_{n \to +\infty} = +\infty$	
CONVERGE A 0	DIVERGE A $+\infty$	NON HA LIMITE

2.1.3 LIMITATEZZA DI UNA SUCCESSIONE CONVERGENTE



$a - \varepsilon < a < a + \varepsilon$

2.1.4 TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE

SE $\{a_n\}$ AMMETTE LIMITE, SARÀ UNICO.

2.1.5 TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

$$\{n^\alpha\} \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n \to +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

Scansionato con CamScanner

2.1.6. Operazioni sui limiti

$\{a_n\}, \{b_n\} \mid a_n \to a \in \mathbb{R}, \; b_n \to b \in \mathbb{R}$, allora:
- $a_n + b_n \to a + b$
- $a_n \cdot b_n \to ab$
- $a_n / b_n \to a/b$

Es: $\lim_{n \to +\infty} \left(2 + \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n} \right) = \lim 2$

$2 \to 2$, $\frac{4}{n^2} = 4 \cdot \frac{1}{n^2} \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$

2.1.7. Teorema del confronto (secondo)

- $a_n \le b_n \le c_n \quad \forall n \ge n_0$
- $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} c_n = \ell$ allora $\lim_{n \to \infty} b_n = \ell$

Es: $\lim \left(\frac{(-1)^n}{n^3} \right)$ non sappiamo il valore, però sappiamo che:

$$\frac{-1}{n^3} < \frac{(-1)^n}{n^3} < \frac{1}{n^3}$$

$\frac{-1}{n^3} \to 0$, $\frac{(-1)^n}{n^3} \to 0$, $\frac{1}{n^3} \to 0$

Scansionato con CamScanner

FOLBO ANDREA

ANALISI MATEMATICA

6° LEZIONE / 13.10.2021

2.2.1 OPERAZIONI IN $\overline{R}$

$\overline{R} = R + \{-\infty\}, \{+\infty\}$ $\forall x \in R$:

$-\infty < x < +\infty$

$x + (\pm\infty) = \pm\infty$

$\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$ (NON RISOLVIBILI)

$x \cdot \pm\infty = \pm\infty \quad x > 0$

$x \cdot \pm\infty = \mp\infty \quad x < 0$

$\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$

$\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty$

$\frac{x}{\pm\infty} = 0$

2.2.2 ESTENSIONE OPERAZIONI SUI LIMITI

$\{a_n\}, \{b_n\}$ $a_n \to l, b_n \to l'$

$a_n + b_n \to l + l'$

$a_n \cdot b_n \to l \cdot l'$

$a_n / b_n \to l / l'$

Es: $\lim_{n \to +\infty} (\underbrace{2^n}_{+\infty} + \underbrace{\sqrt{n}}_{+\infty}) = +\infty$

2.2.3 MONOTONIA DI UNA SUCCESSIONE

SE $a_n \to 0$ E b_n LIMITATA ALLORA $a_n b_n \to 0$

Es: $(\sin n)$ - LIMITATA
- NON TENDE $[-1; 1]$

$\to \underbrace{\frac{1}{n}}_{0} \sin n \to 0$

2.2.4 FORME INDETERMINATE

$\pm\infty \mp \infty$, $0 \cdot \pm\infty$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{\pm\infty}{\mp\infty}$, 0^0, 1^∞, ∞^0

2.2.5 TEOREMA ESISTENZA LIMITE DI SUCC. MONOTONA

$\{a_n\}$ CRESCENTE, $l = \sup\{a_n\}$

$a_n \to l$

2.2.6 PRINCIPIO DI INDUZIONE

SIA $P(n)$ PROPRIETÀ RELATIVA AD N

1. ESISTE UN N_0 TALE CHE $P(n_0)$ VALE
2. SE $P(N)$ È VERA PER N, ALLORA ANCHE PER $N+1$

2.2.7 SUCCESSIONI PER RICORRENZA

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

Es: $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \ln(1 + a_n) \end{cases}$ $a_0 = 1$ $a_1 = \ln 2$ $a_2 = \ln(1 + \ln 2)$

Scansionato con CamScanner

FAURO ANDREA

ANALISI MATEMATICA

Es: $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \frac{a_n^2}{4} \end{cases}$

$a_n \to 2$

1. CONTROLLARE SE È MONOTONA

- SI CALCOLANO I PRIMI a

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1 + \frac{1}{4} = 5/4 \\ a_2 &= 1 + \frac{(5/4)^2}{4} = 1 + 25/64 \end{aligned}\right\} a_2 > a_1 > a_0$$

- SEMBRA, PER AVERNE LA CERTEZZA:

$(4)\; a_n \leq 1 + \frac{a_n^2}{4} \;(\cdot 4)$ $\quad (a_n \leq a_{n+1})$

$a_n^2 - 4a_n + 4 \geq 0$

$(a_n - 2)^2 \geq 0$

- È MONOTONA CRESCENTE, TENDE QUINDI A $+\infty$ O NUMERO FINITO

2. VERIFICHIAMO CHE È LIMITATA (QUINDI NON TENDE A $+\infty$)

$x = 2 \to a_0 (=1) \leq x$

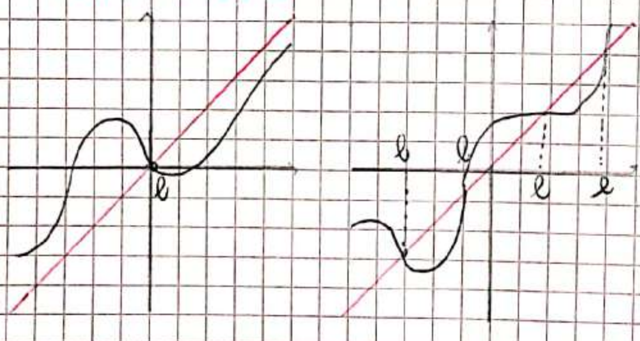
$a_1 \quad 1 + \frac{4}{4} = 2 \leq x$

3. LIMITATA E TENDE A 2

2.2.8 PUNTO FISSO

SIA $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\ell \in A$

ℓ È PUNTO FISSO DI f SE $f(\ell) = \ell$



Scansionato con CamScanner

FABBRO ANDREA — ANALISI MATEMATICA — 6° LEZIONE: 13.10.24

2.3.1 INFINITI E INFINITESIMI

UN INFINITESIMO AMMETTE LIMITE 0, CONVERGE. — INFINITESIMO

UN INFINITO AMMETTE LIMITE ∞, DIVERGE. — INFINITO

ES. INFINITI (∞):

- $\{n^a\}_{a>0}$ $(n^3, n^\pi, n^{21} \to +\infty)$
- $\{a^n\}_{a>1}$ $(3^n, 7^n, \pi^n \to +\infty)$
- $\{\log_a n\}_{a>0 \neq 1}$ $\begin{pmatrix} a>1 \to +\infty \\ 0<a<1 \to -\infty \end{pmatrix}$
- $n! \to \infty$

ES. INFINITESIMI: $1/n$, $1/a^n$, $1/a$

2.3.2 ORDINE SUPERIORE E INFERIORE

SE $\{a_n\}, \{b_n\}$ SONO INFINITI, $\{b_n\}$ È DI ORDINE SUPERIORE SE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Es. $\{a_n\} = n$, $\{b_n\} = n^2+1$: $\frac{n}{n^2+1} = \frac{n}{n(n+1/n^2)} = \frac{1}{\infty} \to 0$

SE $\{a_n\}, \{b_n\}$ INFINITESIMI, $\{a_n\}$ È ORDINE SUPERIORE SE

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Es. $\{a_n\} = 1/n^2$, $\{b_n\} = 1/(n+1)$: $\frac{1/n^2}{1/(n+1)} = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$

SE $\{a_n\}, \{b_n\}$ SONO DELLO STESSO ORDINE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \to K \neq 0 \in \mathbb{R}$$

SE $\{a_n\}, \{b_n\}$ SONO DELLO STESSO ORDINE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \to K \neq 0 \in \mathbb{R}$$

2.3.3 GERARCHIA

$$\text{"}\{\log_a^b n\}_{a>1,\, b>0}\text{"} < \text{"}\{n^a\}_{a>0}\text{"} < \text{"}\{a^n\}\text{"} < \text{"}\{n!\}\text{"} < \text{"}n^n\text{"}$$ ← GERARCHIA INFINITI

Es: $\lim_{n\to+\infty} (3^n - \ln^{10} n - n^4)$

$$\lim_{n\to+\infty} 3^n\left(1 - \underbrace{\frac{\ln^{10} n}{3^n}}_{0} - \underbrace{\frac{n^4}{3^n}}_{0}\right) = \lim_{n\to\infty} 3^n$$

$$\text{"}\left\{\frac{1}{n^n}\right\}\text{"} < \text{"}\left\{\frac{1}{n!}\right\}\text{"} < \text{"}\left\{\frac{1}{a^n}\right\}\text{"} < \text{"}\left\{\frac{1}{a}\right\}\text{"} < \text{"}\left\{\frac{1}{\log_a b}\right\}$$ ← GERARCHIA INFINITESIMI

Es. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{5^{-n} + 1/n + 3/\ln^2 n}{1/\sqrt{n} - 1/\ln n} \to \lim_{n\to+\infty} \frac{3/\ln^2 n \left(\frac{\ln^2 n}{3\cdot 5^n} + \frac{\ln^2 n}{3n} + 1\right)}{-1/\ln n \left(\frac{-\ln n}{\sqrt{n}} + 1\right)} = \frac{-3}{\ln n} = 0$$

23.4 LIMITI NOTEVOLI CHE SI DEDUCONO (e)

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$
- $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1$
- $\lim_{n \to +\infty} \frac{(1+a_n)^{\alpha} - 1}{a_n} = \alpha \in \mathbb{R}$

QUESTO PERCHÉ $(1+a_n)^{1/a_n} = e$

OBIETTIVO: OTTENERE UNA DI QUESTE FORME

Es: $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1 - 3/n)}{2/n - 1/n^2}$

- TENGO ORDINE SUP.

$$\frac{\ln(1 - 3/n)}{2/n} \to \left(-3/n\right)\left(-2/3\right)$$

- CERCO DI AVERE $\{a_n\}$ UGUALE $(3/n)$

$$-\frac{3}{2} \frac{\ln(1-3/n)}{-3/n} = -\frac{3}{2} \cdot 1$$

Scansionato con CamScanner

2.4.1. LIMITI NOTEVOLI TRIGONOMETRICI

$a_n \to 0$ abbiamo $\sin a_n \to 0$
$\cos a_n \to 1$ $(\cos 0 = 1)$

Es: $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$

- NON SAPPIAMO A COSA TENDE
- SUPPONIAMO $a_n > 0$

$0 < \sin a_n < a_n < \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$

- PASSIAMO AI RECIPROCI

$0 < \frac{\cos a_n}{\sin a_n} < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{\sin a_n}$

- MOLTIPLICHIAMO PER $\sin a_n$ (RIAVERE LA FORMA INIZIALE)

$0 < \underset{\downarrow \, 1}{\cos a_n} < \underset{\downarrow \, 1}{\frac{\sin a_n}{a_n}} < \underset{\downarrow \, 1}{1}$

Es: ALTRI LIMITI:
- $\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{n \to +\infty} \frac{\tan a_n}{a_n} = 1$
- $\lim_{n \to +\infty} \frac{\arctan a_n}{a_n} = 1$

2.4.2. ASINTOTICO e O PICCOLO

- $\{a_n\}, \{b_n\}$ SONO ASINTOTICHE SE $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, $\frac{b_n}{a_n} = 1$ $\quad a_n \sim b_n$

Es: CON INFINITESIMI — Es: CON INFINITI

- $\{a_n\} = \ln(1 + a_n)$ $\qquad \{a_n\} = n^2 - n$
  $\{b_n\} = a_n$ $\qquad \{b_n\} = n^2 + e^{-n}$

- $\{a_n\}, \{b_n\}$ a_n È O PICCOLO DI b_n SE $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

Es: $\{a_n\} = n$ $\quad n/n^2 = 0$ $\quad a_n = o(b_n)$
$\{b_n\} = n^2$

Scansionato con CamScanner

6. SERIE ~~SUCCESSIONI~~

3.1.1 DEFINIZIONE

$\{a_k\}_{k \in N}$ SUCCESSIONE DI TERMINE GENERALE $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

$\{s_n\}$ È DETTA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

a_0 a_1 a_2 ...

s_1

s_2

3.1.2 CONVERGENTI DIVERGENTI IRREGOLARI

a_k È CONVERGENTE SE ESISTE LIMITE FINITO DI s_n

$\lim_{n \to +\infty} s_n = S$ $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

N.B. Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ CONVERGE ALLORA $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

a_k È DIVERGENTE SE ESISTE LIMITE INFINITO

$\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$

≠ CONVERGENTE + ≠ DIVERGENTE = IRREGOLARE

STUDIARE IL CARATTERE: DEFINIRE SE IL LIMITE DELLA SUCCESSIONE È:

- FINITO
- INFINITO
- NON ESISTE

3.1.3 SERIE GEOMETRICA

$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad n \in R$ SERIE GEOMETRICA = IL TERMINE GENERALE È LA POTENZA N-ESIMA DI UN NUMERO X

Es: $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/5^n$ $\qquad - s_n = \frac{1}{1-a_n}$

- 1 RAGIONE? $1/5 \to -1 < 1/5 < 1$
- 2 LIMITE? CONVERGENTE
- CALCOLO SERIE (N PARTE DA 0)

$\frac{1}{1-1/5} = 5/4$

FORLEO ANDREA

ANALISI MATEMATICA

8° LEZIONE 17/10/2024

3.1.4. OSSERVAZIONI SU $(A_N + B_N)$ E $C A_n$

$\sum a_n + \sum b_n$ CON a_n e b_n CONVERGENTI $\rightarrow \sum a_n + b_n$ CONVERGE

$\sum a_n + \sum b_n$ CON a_n CONV. E b_n DIVERGENTE $\rightarrow \sum a_n + b_n$ DIVERGE

$\sum c \cdot x^n \rightarrow c \sum x^n$ es: $\sum_0^{\infty} 7 \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} = 7 \sum (-1/3)^n = 7 \cdot \frac{1}{1 + 1/3} = 21/4$

3.1.5. SERIE TELESCOPICHE

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_k$ dove $a_k = b_k - b_{k+1}$

Es: $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\underbrace{1/_{k+1}}_{b_k} - \underbrace{1/_{k+2}}_{b_{k+1}} \right)$ $s_n = (b_0 - \cancel{b_1}) + (\cancel{b_1} - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} + \cancel{b_3}) \dots (\cancel{b_n} - b_{n+1})$

$s_n = b_0 - b_{n+1}$

$S_n = \frac{1}{0+1} - \frac{1}{n+2} = 1 -$ INFINITESIMO $= 1$ CONVERGE E HA SOMMA 1

3.1.6. CONVERGENZA ASSOLUTA

$\sum_0^{\infty} a_n$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE SE CONVERGE LA SERIE $\sum_0^{\infty} |a_n|$

Es: $\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ NON SAPPIAMO, PERÒ $\sum_0^{\infty} \frac{1}{2^n}$ CONVERGE, QUINDI $\frac{(-1)^n}{2^n}$ CONVERGE

3.1.7. SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

$\sum_0^{+\infty} a_k$ $a_k \geq 0$, LA SERIE È REGOLARE (O CONVERGE O DIVERGE)

Scansionato con CamScanner

FALSO ANDREA | ANALISI MATEMATICA | 8/8° LEZIONE 20.10.21

3.2.1. SERIE ARMONICA

$\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$

$1/n \geq 0$ QUINDI O CONVERGE O DIVERGE

$s_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$

CONTROLLIAMO SE È LIMITATA PER VEDERE SE CONVERGE O DIVERGE

PER RAGIONI DI CALCOLO PRENDIAMO UN SOTTOINSIEME, POTENZE DI 2 $\{s_{2^k}\}$
SE NON È LIMITATO IL SOTTOINSIEME, NEMMENO LA SUCCE. TOTALE

$s_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \overline{\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}} + \overline{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2^3}} + \dots + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^k}$

$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + 2^{k-1} \frac{1}{2^k}$

$= 1 + 1/2\, k$

$s_{2^k} \geq 1 + k/2$ LIMITE $+\infty$

$\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ DIVERGE

3.2.2 CRITERIO DEL CONFRONTO

$\sum_0^\infty a_n \quad \sum_0^\infty b_n \quad a_n, b_n \geq 0, \quad a_n \leq b_n$

- SE $\sum_0^\infty a_n$ DIVERGE, ANCHE $\sum_0^\infty b_n$ DIVERGE
- SE $\sum_0^\infty b_n$ CONVERGE, ANCHE $\sum_0^\infty a_n$ CONVERGE

3.2.3. CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

SE $\sum_0^\infty a_n$, $\sum_0^\infty b_n$ $\lim_{n \to +\infty} a_n/b_n = c > 0$, HANNO LO STESSO CARATTERE
$a_n \geq 0, \ b > 0$

ES: $\sum_1^\infty 1/n$ DIVERGE $\rightarrow \sum_8^\infty 1/n$ DIVERGE

3.2.4. SERIE DI MENGOLI

$\sum_1^\infty 1/n(n+1) \rightarrow 1/n - 1/n+1$

$s_n = 1 - 1/n+1$ (TELESCOPICA) $\rightarrow 1$

$\sum_1^\infty 1/n^\alpha \quad \alpha \in R$

$\alpha \leq 0$ → DIVERGE; $\alpha \geq 2$ → CONVERGE; $0 < \alpha \leq 1$ → DIVERGE

ES. $\sum_n^\infty 1/n^6$ CONVERGE $\quad \sum 1/\sqrt[3]{n}$ DIVERGE

$\sum 1/n^4 - 3\sqrt{n} \quad \frac{1}{n^4} \sim a_n$ CONVERGE

Scansionato con CamScanner

FORZA ANDREA — ANALISI MATEMATICA — 9° LEZIONE: 20.10.21

3.2.5. CRITERIO DI CONDENSAZIONE

$\sum a_n$ $a_n \geq 0$ E DECRESCENTE, ALLORA $\sum a_n$, $\sum_0^{\infty} 2^k a_{2^k}$ HANNO LO STESSO CARATTERE

$a_n = 1/n^{\alpha}$ b_n $2^k \cdot (1/2^{k\alpha}) = 1/2^{k(\alpha-1)} = (1/2^{\alpha-1})^k$ GEOMETRICA

CONVERGE

$-1 < 1/2^{\alpha-1} < 1$

$1/2^{\alpha-1} > 2^0$

$\alpha - 1 > 0 \Rightarrow \alpha > 1$

3.2.6. CARATTERE SERIE $1/n^{\alpha}$, $1/n^{\alpha} \cdot 1/\ln^{\beta} n$

$1/n^{\alpha}$: CONV $\alpha > 1$; DIV $\alpha \leq 1$

$1/n^{\alpha} \ln^{\beta} n$: CONV $\alpha > 1, \forall \beta$; $\alpha = 1, \beta > 1$; DIV. $\alpha < 1$; $\alpha = 1, \beta \leq 1$

3.2.7 TEOREMA CRITERIO DELLA RADICE

Sia $a_n \geq 0$ e $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

$l < 1$: $\sum a_n$ CONVERGE; $l > 1$: DIVERGE; $l = 1$: NON SI PUÒ DEDURRE $\sum a_n$

Es: $a_n^{1/n} \to l < 1$ — l, $l+\varepsilon$, 1

$\varepsilon > 0$ $l + \varepsilon < 1$

$l + \varepsilon < 1 \rightarrow a_n < (l+\varepsilon)^n < 1$

poiché $\sum (l+\varepsilon)$ CONVERGE $\Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE

Es: $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3/(2n)^n$

$a_n^{1/n} = \frac{n^{3/n}}{2n} = \frac{e^{3/n \cdot \ln n}}{2n} = \frac{1}{+\infty} = 0$

CONVERGE

3.2.8. TEOREMA CRITERIO RAPPORTO

Sia $a_n > 0$ $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

$l < 1$: CONVERGE; $l > 1$: DIVERGE; $l = 1$: NON SI PUÒ DEDURRE

3.2.9. SERIE CON SEGNO QUASIASI/ALTERNATO

$\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n a_n$ $a_n > 0$

$\varepsilon_n <^{1}_{-1}$ (SEGNO / ...)

$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ $a_n > 0$

3.2.10. CRITERIO DI LEIBNIZ

$\sum_0^{+\infty} (-1)^n a_n$ | $a_n > 0$, $a_n \to 0$, $a_{n+1} < a_n$

ALLORA CONVERGE

0 S1 S3 S2 S0; $a_1 + a_2$; $a_0 - a_1$

$s_0 = a_0$

$s_1 = a_0 - a_1$

$s_2 = s_1 + a_2$

$s_3 = s_2 - a_3$

Scansionato con CamScanner

FABBO ANDREA

ANALISI MATEMATICA

3. LIMITI DI FUNZIONI

4.1.1
- **PUNTI ACCUMULAZIONE, ISOLATI, INTERNI**

- $x_0 \in \mathbb{R}$ É DI ACCUMULAZIONE PER X $\quad ((x_0-r, x_0+r) \setminus \{x_0\}) \cap X \neq \emptyset$
- $x_0 \in \mathbb{R}$ É PUNTO ISOLATO PER X $\quad ((x_0-r, x_0+r)) \cap X = \{x_0\}$
- $x_0 \in \mathbb{R}$ É PUNTO INTERNO PER X $\quad ((x_0, r), x_0+r) \subseteq X$

$X = (a, b) \cup \{c\} \cup [d, +\infty)$

a, b, d ACCUMULAZIONE NO INTERNI
c ISOLATO
$(a,b) \cup (d, +\infty)$ INTERNI

4.1.2 • **DEFINIZIONE DI LIMITI x_0, $+\infty$, $-\infty$**

- x_0 $\quad f\ x \in \mathbb{R}$, x_0 ACC. X

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid \forall x \neq x_0$
$x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

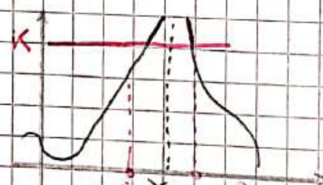
si ha $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

- $+\infty$ $\quad f\ x \in \mathbb{R}$, x_0 ACC. X

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall K > 0\ \exists \delta > 0 \mid \forall x \neq x_0$
$x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

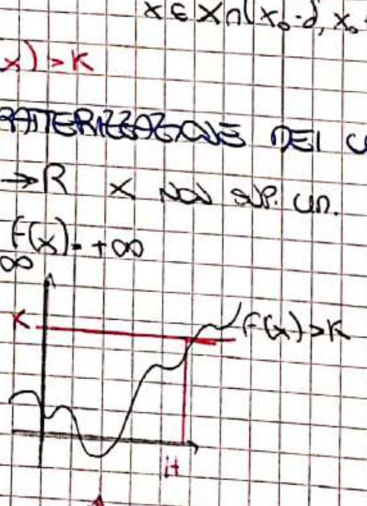
si ha $f(x) > K$



- 4.1.3 **CARATTERIZZAZIONE DEI LIMITI CON SUCCESSIONI**

$f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad X$ NON SUP. LIM.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



ESISTENZA DEL LIMITE

Teo: $f\ X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 ACC X

Allora: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ SE E SOLO SE

$\forall \{x_n\} \subset X$
$x_n \to x_0$ (NEL DOMINIO)

si ha $f(x_n) \to \ell$

VALE ANCHE CON I $\pm\infty$ SE SUP O INF LIMITATA

4.2.1. TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE

Sia x_0 ACC X, $f\ x \to \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ allora è UNICO

4.2.2. TEOREMA OPERAZIONI SUI LIMITI

x_0 ACC X, $f: x \to \mathbb{R}$ (VALE ANCHE CON $+\infty$)

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = l + l'$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = l \cdot l'$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f/g)(x) = l/l'$

4.2.3. TEOREMA DI FUNZIONE COMPOSTA

$f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$, x_0 ACC X, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$, SE y_0 ACC DI Y E $\lim\limits_{x \to x_0} g(y) = l$

supponiamo che $g \circ f$ sia definita in $((x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}) \cap X$ e $f(x) \neq y_0$ in $((x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}) \cap X$

allora $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = l$

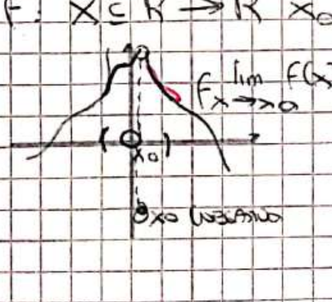
Es: $\lim\limits_{x \to 2} \underbrace{(e^x + 4)}_{y}{}^3$ ① SUPPONIAMO $f(x) = e^x + 4 \to e^2 + 4$ ③ VEDO UN $\lim\limits_{y \to e^2+4} y^3 = (e^2+4)^3$

$g(x) = y^3$ ② TENDE

4.2.4 TEOREMA PERMANENZA DEL SEGNO

$f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ x_0 ACC X, se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l > 0$, allora $\exists\, r > 0$

$f(x) > 0 \quad \forall x \in X \cap ((x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\})$



Scansionato con CamScanner

FABBO ANDREA — ANALISI MATEMATICA — 11ª LEZIONE: 27/10/23

4.2.5 TEOREMA DEL CONFRONTO

$f, g, h : X \to \mathbb{R}$, x_0 ACC X

- $f(x) \le g(x) \le h(x) \quad \forall x \in X \cap ((x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\})$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$

allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$

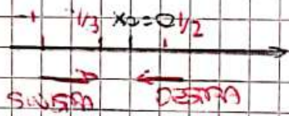
4.2.6 LIMITE DESTRO E SINISTRO E PUNTI DI ACC.

$X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 è un punto di acc a destra per X se $\forall r > 0$

$X \cap (x_0, x_0 + r) \ne \emptyset$

$X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 è un punto di acc a sinistra per X se $\forall r > 0$

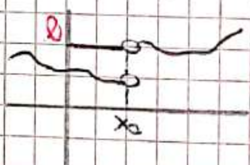
$X \cap (x_0 - r, x_0) \ne \emptyset$

Es: $X \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$  $x_0 = 0$

LIMITE DESTRO (E SINISTRO): $f : X \to \mathbb{R}$, x_0 ACC a destra per X

$\lim_{x \to x_0^{+} \text{(DESTRA)}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \quad \forall x \in X \cap (x_0, x_0 + \delta)$



$\lim_{x \to x_0^{+}} f(x) = \pm\infty$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

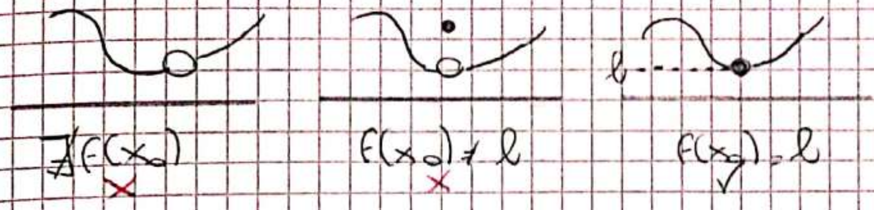
$f(x) \ge K$ ($\le -K$) $\quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$

4.2.7 LIMITI NOTEVOLI

$f : X \to \mathbb{R}$, x_0 ACC, $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $f(x) \ne 0$ per $(x_0 - r, x_0 + r)$

1. $\lim_{x \to x_0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$
2. $\lim_{x \to x_0} \frac{1 - \cos(f(x))}{(f(x))^2} = \frac{1}{2}$
3. $\lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{tg} f(x)}{f(x)} = 1$
4. $\lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{arctg} f(x)}{f(x)} = 1$
5. $\lim_{x \to x_0} (1 + f(x))^{1/f(x)} = e$
6. $\lim_{x \to x_0} \frac{\ln(1 + f(x))}{f(x)} = 1$
7. $\lim_{x \to x_0} \frac{(1 + f(x))^{\alpha} - 1}{f(x)} = \alpha$

Scansionato con CamScanner



$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

5.1.1 CONTINUITÀ IN UN PUNTO

SE x_0 È DI ACC PER X, f È CONTINUA SE

1. C'È LIMITE
2. LIMITE FINITO
3. DEVE COINCIDERE CON IL VALORE CON IL VALORE DI f NEL PUNTO

5.1.2 CONTINUITÀ SU UN INSIEME

$f: X \to \mathbb{R}$ È CONTINUA SU X SE È CONTINUA IN OGNI PUNTO DI X

ES: TUTTE LE FUNZIONI ELEMENTARI

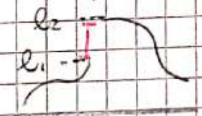
5.1.3 SPECIE DI DISCONTINUITÀ (1° SPECIE, 2° SPECIE, ELIMINABILE)

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ma $l \neq f(x_0)$

x_0 PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI TERZA SPECIE (O ELIMINABILE)

2. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$ $\quad l_1 \neq l_2$

x_0 ACC PER X



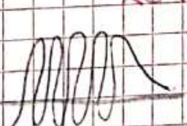
NON ESISTE LIMITE

1° SPECIE

DISTANZA: SALTO DI f in x_0

3. ALTRI CASI: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ $(o -\infty)$ o $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ $(o -\infty)$ o NON ESISTE UN LIMITE,

x_0 DI 2° SPECIE



5.1.4 PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE

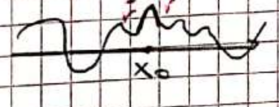
$f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ Acc per X

f È CONTINUA SOLO SE $\forall \{x_n\} \subset X$, $x_n \to x_0$ si ha $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$

5.1.5 PERMANENZA DEL SEGNO

SE $f: X \to \mathbb{R}$, x_0 ACC PER X, f È CONTINUA IN x_0 E $f(x_0) > 0$,

$\exists r > 0$ $f(x) > 0$ $\forall x \in X \cap (x_0 - r; x_0 + r)$



Scansionato con CamScanner

FALSO
ANDREA

5.1.6. OPERAZIONI ALGEBRICHE

SIANO $f, g\ X \to \mathbb{R}$ CONTINUE IN x_0

- $f+g$
- $f \cdot g$
- f/g $(g(x_0) \neq 0)$

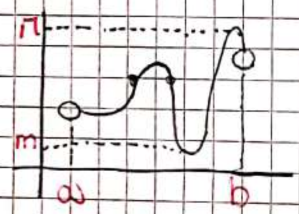
SONO CONTINUE IN x_0

5.1.7. CONTINUITÀ DELLE COMPOSIZIONI

SIANO $f\ X \to \mathbb{R}$, $g\ Y \to \mathbb{R}$ CON $f(X) \subset Y$,
f È CONTINUA IN $x_0 \in X$ E g È CONTINUA IN $y_0 = f(x_0)$,
$g \circ f$ È CONTINUA IN x_0

5.1.8 TEOREMA DI WEIERSTRASS

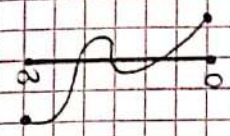
SE $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$ È CONTINUA SU $[a,b]$, f HA MASSIMO E MINIMO SU $[a,b]$



5.2.1. TEOREMA DEGLI ZERI

$f\ [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA, $f(a)\cdot f(b) < 0$ (hanno valori diversi)

ESISTE UN PUNTO IN CUI SI ANNULLA



5.2.2. TEOREMA VALORI INTERMEDI

$f\ I \to \mathbb{R}$ I INTERVALLO, f CONTINUA, f ASSUME IN I NON VALORI TRA

$\inf_{x \in I} \{f(x)\}$ e $\sup_{x \in I} \{f(x)\}$

5.2.3 CARATTERIZZAZIONE DI FUNZIONE MONOTONA

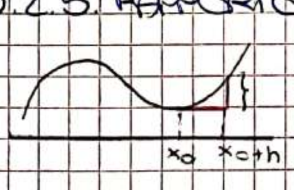
$f\ I \to \mathbb{R}$ I INTERVALLO, f MONOTONA, f È CONTINUA SU I SE $f(I)$ È UN INTERVALLO

5.2.4. CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE INVERSA

SIA $f\ I \to \mathbb{R}$, I INTERVALLO, f CONTINUA E STRET. CRESCENTE (QUINDI INVERTIBILE)

$f^{-1}\ f(I) \to \mathbb{R}$ È CONTINUA

5.2.5. RAPPORTO INCREMENTALE E DERIVATA



$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

RAPPORTO INCREMENTALE: VARIAZIONE RELATIVA DI f NEL PASSAGGIO DA x_0 A x_0+h

- SIA $f\ X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ ACC. PER X,

SI DICE CHE f È DERIVABILE IN x_0 SE ESISTE FINITO IL

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

DERIVATA PRIMA

Scansionato con CamScanner

FABBO ANDREA — ANALISI MATEMATICA — 14ª LEZIONE: 16.11.21

5.3.1 DERIVATA DESTRA E SINISTRA

DESTRA: $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$

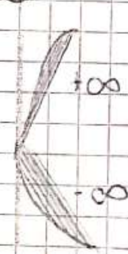
SINISTRA: $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$

5.3.2. CONDIZIONE NECESSARIA PER DERIVABILITÀ

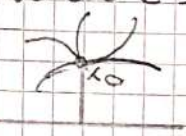
$f\ X \to \mathbb{R}$, x_0 ACCUMULAZIONE, SE f È DERIVABILE IN x_0, ALLORA È CONTINUA IN x_0

5.3.3 CLASSIFICAZIONE PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

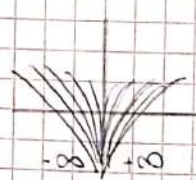
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ x_0 PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE



- $\lim\limits_{x \to x_0^+} = l_1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} = l_2 \in \mathbb{R}$ $l_1 \neq l_2$ (O UNO È $\pm\infty$) x_0 PUNTO ANGOLOSO



- $\lim\limits_{x \to x_0^+} = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} = \mp\infty$ (OPPOSTI) x_0 È UN PUNTO DI CUSPIDE



5.3.4 REGOLE DI DERIVAZIONE

$f, g\ I \to \mathbb{R}$, I INTERVALLO, x_0 INTERNO, $\exists\ f'(x_0)\ g'(x_0)$

- SOMMA $f'(x_0) + g'(x_0)$
- PRODOTTO $f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- DIVISIONE $\dfrac{f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

5.3.5. DERIVATA FUNZIONE COMPOSTA

I, J INTERVALLI APERTI, $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$, $f(I) \subset J$, $x_0 \in I$

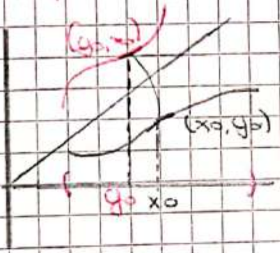
SE $\exists f'(x_0)$, $g'(f(x_0))$, allora

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

5.3.6. DERIVATA FUNZIONE INVERSA

I INTERVALLO APERTO, $f: I \to \mathbb{R}$ STRETTAMENTE MONOTONA E CONTINUA E
f DERIVABILE IN x_0 CON $f'(x_0) \neq 0$

$f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ È DERIVABILE IN $y_0 = f(x_0)$ E $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$



Scansionato con CamScanner

5.4.1. DERIVATE FUNZIONI ELEMENTARI

FUNZIONE	DERIVATA
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = 1/x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{-n-1}$
$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x \, (e^x \cdot \ln a)$ $0<a<1$ o $a>1$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = 1/x$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = 1/\ln a \cdot 1/x$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = 1/\cos^2 x$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = 1/1+x^2$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5.4.2. FUNZIONE DERIVATA

SIA $f \; I \to \mathbb{R}$, I APERTO, SE È DERIVABILE SU TUTTI I PUNTI DELL'INSIEME SI CHIAMA FUNZIONE DERIVATA $f' \; I \to \mathbb{R}, \; x \longmapsto f(x)$

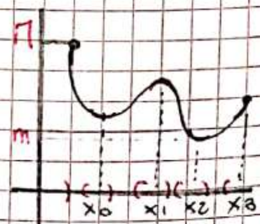
5.4.3 FUNZIONE DERIVATA SECONDA

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 - h) - f'(x_0)}{h}$$

5.4.4. MASSIMI E MINIMI RELATIVI

x_0 È UN PUNTO DI MASSIMO RELATIVO SE È MAX NELLA SUA RESTRIZIONE

ANCHE IL MAX ASSOLUTO È UN MAX RELATIVO



Scansionato con CamScanner

FERRO ANDREA

ANALISI MATEMATICA

15° LEZIONE: 9 1 21

5.4.5. TEOREMA DI FERMAT, PUNTI STAZIONARI

TEOREMA DI FERMAT: $f: I \to \mathbb{R}$, x_0 INTERNO, f DERIVABILE IN x_0. SE x_0 MAX O MIN RELATIVO $f'(x_0) = 0$

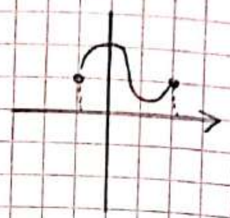
SE $f'(x_0) = 0$, x_0 È UN PUNTO STAZIONARIO

Scansionato con CamScanner

FABBO AN ANDREA — ANALISI MATEMATICA — 16° LEZIONE: 23.11.21

5.5.1. TEOREMA DI ROLLE

SIA $f\,[a,b] \to \mathbb{R}$ E:



- f CONTINUA SU $[a,b]$
- f DERIVABILE SU (a,b)
- $f(a) = f(b)$

ALLORA ESISTE UN PUNTO $c \in (a,b) \mid f'(c) = 0$ (PUNTO CRITICO)

5.5.2. TEOREMA DI CAUCHY

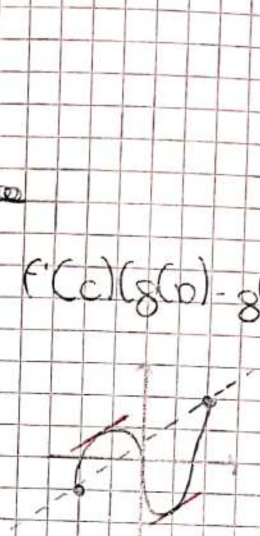
SIANO $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ E:

- f, g CONTINUE SU $[a,b]$
- f, g DERIVABILI SU (a,b)

ALLORA ESISTE UN PUNTO $c \in (a,b) \mid f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$

5.5.3. TEOREMA DI LAGRANGE

SIANO $f\,[a,b] \to \mathbb{R}$ E:



- f CONTINUA IN $[a,b]$
- f DERIVABILE IN (a,b)

ALLORA ESISTE UN PUNTO $c \in (a,b) \mid f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

CIOÈ AVENDO 1 PUNTO PARALLELO ALLA RETTA m CHE CONGIUNGE I DUE PUNTI

5.5.4 CONSEGUENZE DI LAGRANGE

- FUNZIONI CON DERIVATA NULLA SU UN INTERVALLO.

SIA f CONTINUA IN $[a,b]$
f DERIVABILE IN (a,b)
- $f'(x) = 0$ SU (a,b), ALLORA f COSTANTE IN $[a,b]$

- FUNZIONI CON LA STESSA DERIVATA SU UN INTERVALLO

SIANO f, g CONTINUE IN $[a,b]$
DERIVABILI IN (a,b)

SE $f'(x) = g'(x)\ \forall x \in (a,b)$, ALLORA $f(x) = g(x) + \text{COST.}$

Scansionato con CamScanner

5.5.5. TEST DI MONOTONIA

$f[a,b] \to \mathbb{R}$: · CONTINUA SU $[a,b]$
· DERIVABILE SU (a,b)

ALLORA $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ È STRETTAMENTE CRESCENTE SU $[a,b]$
$f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ È STRETTAMENTE DECRESCENTE SU $[a,b]$

SE $f' \geq 0$ ALLORA LA FUNZIONE CRESCE/DECRESCE, NON PER FORZA VICEVERSA!

5.5.6 CRITERIO DI MONOTONIA

$f[a,b] \to \mathbb{R}$: · CONTINUA SU $[a,b]$
· DERIVABILE SU (a,b)

ALLORA $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ È CRESCENTE SU $[a,b]$
$f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ È DECRESCENTE SU $[a,b]$

C'È IL VICEVERSA.

5.5.7 CONDIZIONE SUFFICIENTE PER DERIVABILITÀ

· f CONTINUA SU $[a,b]$
· f DERIVABILE SU (a,b)

SE ESISTE FINITO $\lim_{x \to b^-} f'(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ ALLORA $l_1 = f'_-(b)$

$\lim_{x \to a^+} f'(x) = l_2 \in \mathbb{R}$ ALLORA $l_2 = f'_+(a)$

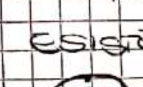
N.B. SE LA FUNZIONE NON È CONTINUA, NON È DERIVABILE!

5.5.8. TEST DERIVATA PRIMA PER PUNTI CRITICI (TROVARE MASSIMI/MINIMI)

· f CONTINUA SU $[a,b]$
· f DERIVABILE SU (a,b)

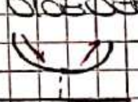
· $x_0 \in (a,b) \mid f'(x_0) = 0$ VOGLIAMO CAPIRE CHE PUNTO È?

1) SE ESISTE $\delta > 0$ $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ POS.
$f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ NEG



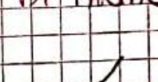
x_0 PUNTO DI MASSIMO RELATIVO

2) SE VICEVERSA



x_0 PUNTO DI MINIMO

3) SE SI MANTIENE SEMPRE ≥ 0



4) SE SI MANTIENE SEMPRE ≤ 0

Scansionato con CamScanner

FABBO ANDREA

ANALISI MATEMATICA

16° LEZIONE: 23.11.21

5.5.8 ESEMPIO DI PUNTO CRITICO: STUDIO

Es: $f(x) = xe^{-x^2}$

1. INTERVALLO APERTO: $\mathbb{R}$ NON ABBIAMO MIN/MAX.
2. DERIVATA $f'(x) = e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(1-2x^2)$ ← DOVE SI ANNULLA?

$f'(x) = 0 \longleftrightarrow x^2 = 1/2$
$x = \pm 1/\sqrt{2}$

3. SEGNO DERIVATA PRIMA

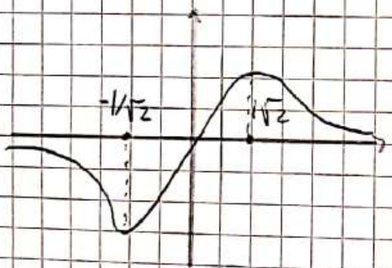
$f'(x) \geq 0$
$1-2x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 1/2$

$-1/\sqrt{2}$ — $1/\sqrt{2}$

MINIMO RELATIVO — MASSIMO RELATIVO

4. SONO ANCHE ASSOLUTI? SI

$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x^2} = 0^-$ $\quad \lim_{x \to +\infty} xe^{-x^2} = 0^+$



5.5.9. TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

SIANO $f, g \; (a,b) \to \mathbb{R}$, DERIVABILI

$g(x) \neq 0$ IN UN INTORNO DESTRO DI a E

- $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0, \; 0 \pm \infty$ (FORME NOTE)
- $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Es: $\lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin}{x^3} = \frac{0}{0}$

$\frac{\cos x - x\sin x - \cancel{\cos x}}{3x^2} = \frac{-\cancel{x}\sin x}{3x^{\cancel{2}}}$

$-\frac{1}{3} \cdot \frac{\sin x}{x} = -1/3$

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{\ln(x+1)}$ NON SI PUÒ USARE DE L'HÔPITAL

Scansionato con CamScanner

5.6.1. O PICCOLO PER FUNZIONI

f, g DEFINITE IN UN INTORNO DI x_0 E SIA $g(x) \neq 0$

f È O PICCOLO DI g PER $x \to x_0$ SE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

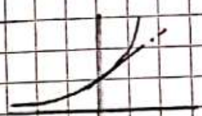
ES. $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = x^{1/3}$ $x_0 \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{x^{1/3}} = \lim_{x \to 0} x^{5/3} \cdot x^{2/3} = 0$$

- $o(g) + o(g) = o(g)$, QUALSIASI ELEMENTO ALL'INTERNO DI G, IL LORO O PICCOLO DARANNO LO STESSO O PICCOLO
- $g_1 o(g_2) = o(g_1 + g_2)$

ES:

$f(x) = e^x$ $x_0 = 0$



① VALORE IN $x_0 = 0$ (ORIGINE)? 1
② DERIVATA NELL'ORIGINE? $1 \cdot x - 0$

EQUAZIONE RETTA TANGENTE: $1 + x$

$e^x = 1 + x + o(x)$

VOGLIO CHE L'ERRORE DELL'APPROSSIMAZIONE SIA + VELOCE x^2

$e^x = 1 + x + ax^2 + o(x^2) \to e^x - 1 - x - ax^2 = o(x^2)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - ax^2}{x^2} \overset{H}{=} \frac{e^x - 1 - 2ax}{2x} \overset{H}{=} \frac{e^x - 2a}{2} = \frac{1 - 2a}{2}$$

$\frac{1 - 2a}{2} \to 0$ SE $a = 1/2$ QUINDI

$e^x = 1 + x + o(x)$ oppure $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

VA A 0 + VELOCE DI x — APPROSSIMAZIONE

VA A 0 + VELOCE DI x^2

5.6.2. POLINOMIO DI TAYLOR

POLINOMIO DI TAYLOR D'ORDINE n CENTRATO IN x_0 IL SEGUENTE POLINOMIO

$$T_n(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$T_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad f^{(0)} = f$$

$T_n(x, x_0)$ UNICO POLINOMIO DI GRADO $\leq n$ CHE HA IN COMUNE CON f IL VALORE DELLE DERIVATE IN x_0 FINO A ORDINE n

Scansionato con CamScanner

FARBO ANDREA

ANALISI MATEMATICA

17° LEZIONE: 24.11.2024

5.6.3. POLINOMIO DI MC LAURIN

SE $x_0 = 0$ $T_n(x,0) = T_n(x)$ SI CHIAMA POLINOMIO DI MC LAURIN

5.6.4. TEOREMA FORMULA DI TAYLOR (RESTO DI PEANO)

SIA $f: I \to \mathbb{R}$, I APERTO, DERIVABILE $(n-1)$ VOLTE IN I E n VOLTE IN x_0

ALLORA $f(x) = T_n(x, x_0) + \underbrace{o(x-x_0)^n}_{\text{PEANO}}$ $x \to x_0$

5.6.5 ESEMPI MC LAURIN CON EXP, LOG, COSENO

① EXP

$f(x) = e^x$ $x_0 = 0$ DERIVATE DI e^x: e^x

$e^0 : 1$

$T_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$

$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

② LOG

$f(x) = \ln(1+x)$ $(-1; +\infty) \to \mathbb{R}$ $x_0 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1$ $0!$

$f''(x) = -1(1+x)^{-2} = -1$ $-1!$

$f'''(x) = 2(1+x)^{-3} = 2$ $2!$

$f''''(x) = -2 \cdot 3(1+x)^{-4} = -2 \cdot 3$ $-3!$

$T_n(x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$

③ COSENO

$f(x) = \cos x = 1$

$f'(x) = -\sin x = 0$

$f''(x) = -\cos x = -1$

$f'''(x) = \sin x = 0$

$f''''(x) = f(x) = 1$

$T_n(x) = 1 + 0 \cdot x - \frac{1}{2}x^2 + 0 \cdot x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \dots$

$T_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \dots = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Scansionato con CamScanner

FALBO ANDREA | ANALISI MATEMATICA | 18° LEZIONE 30.11.21

5.7.1. CONDIZIONE SUFFICIENTE PER ESTREMANTE DI PUNTO CRITICO

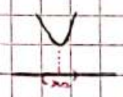
SIA $f: I \to \mathbb{R}$, I INTERVALLO APERTO, f DERIVABILE IN I $(n-1)$ VOLTE.

SE $f'(x_0) = f''(x_0) \dots f^{m}(x_0) = 0$

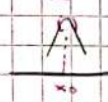
MA $f^{n}(x_0) \neq 0$ ← UNA DERIVATA NON È ZERO

• N PARI:

- $f^{(n)}\, x_0 > 0$, x_0 PUNTO DI MINIMO RELATIVO FORTE

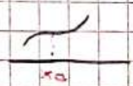


- $f^{(n)}\, x_0 < 0$, x_0 PUNTO DI MASSIMO RELATIVO FORTE



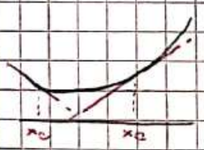
• N DISPARI

x_0 PUNTO DI FLESSO A tg ORIZZONTALE



5.7.2 CONVESSITÀ/CONCAVITÀ

• CONVESSA: $f: I \to \mathbb{R}$, I INTERVALLO, f DERIVABILE

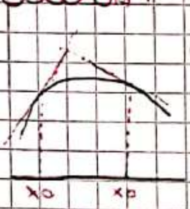


f È CONVESSA IN I SE $\forall x_0 \in I$ $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ $\forall x \in I$

IL GRAFICO STA AL DI SOPRA DI QUALSIASI RETTA TANGENTE AD UN x_0, PUÒ ANCHE ESSERE UGUALE

f È STRETTAMENTE CONVESSA SE $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

• CONCAVA: $f: I \to \mathbb{R}$, I INTERVALLO, f DERIVABILE



f È CONCAVA IN I SE $\forall x_0 \in I$ $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ $\forall x \in I$

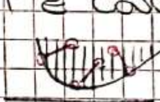
IL GRAFICO STA AL DI SOTTO DI QUALSIASI RETTA TANGENTE AD UN x_0 PUÒ ANCHE ESSERE UGUALE

f È STRETTAMENTE CONCAVA SE $f(x) < f(x_0) + f(x_0)(x - x_0)$

OSS:

f È CONVESSO SE $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad y \geq f(x) \right\}$

EPIGRAFICO



5.7.3. ESEMPI FUNZIONI ELEMENTARI

CONVESSE: x^{2n}; a^x $a > 0$, $a \neq 1$; $\log_a x$ $0 < a < 1$

CONCAVE: $\ln x$; $\log_a x$ $a > 1$

ENTRAMBE: $ax + b$

Scansionato con CamScanner

FALBO
ANDREA

ANALISI MATEMATICA

5.7.4. CONDIZIONI NECESSARIE, SUFFICIENTI 1° E 2° ORDINE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f derivabile in $[a,b]$, 2 volte in (a,b)

1. f convessa in $[a,b]$, f' crescente in $[a,b]$, $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$
2. f concava in $[a,b]$, f' decrescente in $[a,b]$, $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b)$

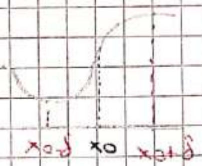
5.7.5. PUNTO DI FLESSO / TANGENTE DI FLESSO

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, x_0 interno ad I, f derivabile in I

x_0 è punto di flesso se $\exists\, \delta > 0$

f è convessa in $(x_0-\delta, x_0)$
f è concava in $(x_0, x_0+\delta)$

o viceversa



Se $f: I \to \mathbb{R}$, x_0 interno ad I, f derivabile
se x_0 punto di flesso e $\exists f''(x_0)$, allora $f''(x_0) = 0$

5.7.6 STUDIO CONCAVITÀ E CONVESSITÀ DI FUNZIONE

1. $f(x) = \frac{\ln}{x}$

• Dominio: $(0; +\infty)$

• $f'(x)$ $\quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

• $f''(x)$ $\quad f''(x) = \frac{-1/x \cdot x^2 - (1-\ln x)2x}{x^4} = \frac{x\,\overbrace{(-1-2+2\ln x)}}{x^4}$

• $f''(x) > 0$ se $\quad x \ \forall > 0$; $x^4 \ \forall \geq 0$; $2\ln x \geq 3$; $x \geq 3/2$

$e^{3/2}$: $- - - - - + + + + + + + +$ $\qquad e^{3/2}$ punto di flesso

2. $f(x) = (x-3)e^{x}$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$

D: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$-e^{-x}(2-x) + e^{-x}(-1) = (x-3)e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x} \cdot (x-3)e^{x} = e^{-x}(2-x)$ $\qquad f''(x) = (x-3)e^{-x}$

$f'(x) > 0 \to x < 2$ $\qquad f''(x) > 0 \to x > 3$ concava convessa

Tangente di flesso $y = f(3) + f'(3)(x-3)$

Scansionato con CamScanner

6.1.1 CALCOLO INTEGRALE: 2 PROBLEMI

1 ANALITICO: $f\ I \to \mathbb{R}$, $g\ I \to \mathbb{R}$ ← determinare
$G'(x) = f(x)$

2 GEOMETRICO: $f, g\ I \to \mathbb{R}$, $f(x) \le g(x)$ determinare l'area

6.1.2. DEFINIZIONE PRIMITIVA, PROPRIETÀ

$G: I \to \mathbb{R}$ È UNA PRIMITIVA DI $f\ I \to \mathbb{R}$ SE G È DERIVABILE E
$G'(x) = f(x)\ \forall x \in I$

Oss: se G primitiva di f, anche $G + \text{cost}$ primitiva di f
se G_1, G_2 primitive di $f \to G_2 = G_1 + \text{cost}$

6.1.3. PRIMITIVE IMMEDIATE, ALCUNI ESEMPI

$G(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1}\ (a \ne -1)$ $\quad G'(x) = x^a$

$G(x) = \ln x\ (0; +\infty)$, $\ln(-x)\ (-\infty; 0)$ $\quad G'(x) = \frac{1}{x}$

$G(x) = e^x$ $\quad G'(x) = e^x$

$G(x) = \sin x$ $\quad G'(x) = \cos x$

$G(x) = \cos x$ $\quad G'(x) = -\sin$

Oss: LE PRIMITIVE DI UNA SOMMA DI FUNZIONI COINCIDONO CON LA SOMMA DELLE PRIMITIVE DI CIASCUNA ~~ANCHE DEL PRODOTTO~~

Es: $x^2 + \frac{1}{x} - \sin(x)$ $\quad (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x)$

$\frac{x^3}{3} + c + \ln x + c_2 + \cos x + c_3$ $\quad g(x)$

Oss: LE PRIMITIVE DEL PRODOTTO $k \cdot f$ SONO IL PRODOTTO DI k PER LE PRIMITIVE DI f

Es: $\frac{4}{x} - \frac{x^{3/2}}{8} + \cos x$ $\quad (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x)$

$4(\ln x + c_1) - \frac{1}{8}\left(\frac{2}{5}x^{5/2} + c_2\right) + \sin x + c_3 \to 4\ln x - \frac{1}{20}x^{5/2} + \sin x + C$ $\quad g(x)$

Scansionato con CamScanner

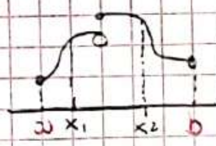
FABBO ANDREA

ANALISI MATEMATICA

GIOVEDÌ: 1.12.2021

6.1.4. SUDDIVISIONE DI UN INTERVALLO

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$, f limitata

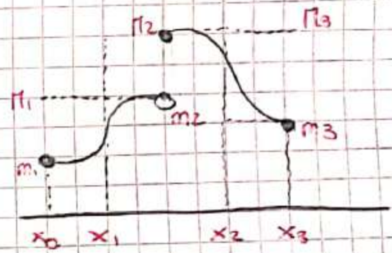


SI CHIAMA SUDDIVISIONE DI $[a,b]$ UN INSIEME FINITO DI PUNTI

$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$

6.1.5. SOMMA SUPERIORE E INFERIORE

- SOMMA SUPERIORE: $S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_{k-1} - x_{k-1})$
- SOMMA INFERIORE: $s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_{k-1} - x_{k-1})$



OSS: DATE DUE SUDDIVISIONI $P \subseteq Q$, $P \subsetneq Q$

$$s(f,P) \leq s(f,Q) \leq S(f,Q) \leq S(f,P)$$

6.1.6. DEFINIZIONE INTEGRALE DI REIMANN (DEFINITO)

$$\sup_{P \text{ suddivisione di } [a,b]} \{s(f,P)\} = \underline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}$$

$$\inf_{P \text{ suddivisione di } [a,b]} \{S(f,P)\} = \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}$$

se $=$ $\to \int_a^b f$ RIEMANN $\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$ $(f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f limitata$)$

~~6.1.7. PROPRIETÀ ...~~

6.1.7. PROPRIETÀ INTEGRALE DEFINITO

- LINEARITÀ: se f, g integrabili su $[a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

- ADDITIVITÀ: f integrabile in (a,b) e $c \in (a,b)$ allora f integrabile su (a,c) e (c,b)

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

- MONOTONIA (O CONFRONTO): f, g integrabili su $[a,b]$, $f(x) \leq g(x)$ allora

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

FALBO ANDREA

ANALISI MATEMATICA

19° LEZ: 1.12.2024

6.1.8. SOSTITUZIONE

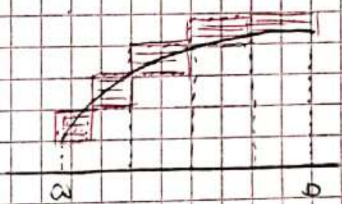
$$\int_5^3 f = -\int_3^5 f$$

6.1.9. CARATTERIZZAZIONE DELL'INTEGRABILITÀ

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f LIMITATA, ALLORA f È INTEGRABILE SU $[a,b]$ SE

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists P$ SUDDIVISIONE DI $[a,b]$ t.c.

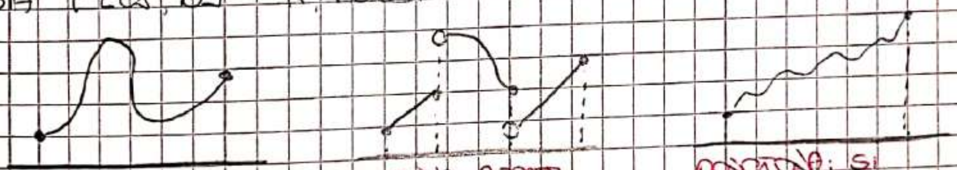
$$\underbrace{S(f,P) - s(f,P)}_{\text{IL LORO SCARTO}} < \varepsilon$$



6.1.10 TEOREMA INTEGRABILITÀ DI FUNZIONE MONOTONA, CONTINUA

• SIA $f[a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA (ANCHE A TRATTI) (E QUINDI LIMITATA), È INTEGRABILE

• SIA $f[a,b] \to \mathbb{R}$ MONOTONA, ALLORA f È INTEGRABILE



CONTINUA: SI $\downarrow$ DERIVABILE

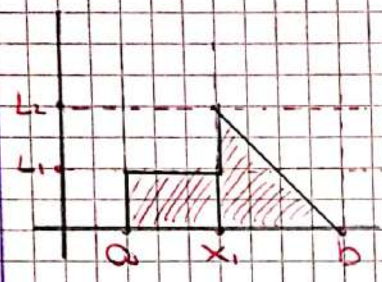
CONTINUA: A TRATTI $\downarrow$ DERIVABILE

MONOTONA: SI $\downarrow$ DERIVABILE

Scansionato con CamScanner

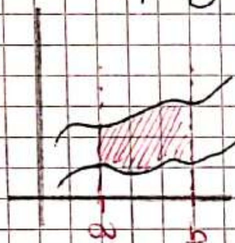
FALBO ANDREA — ANALISI MATEMATICA — 20ª LEZIONE: 14/12/2021

6.2.1. INTEGRALE DI RIEMANN COME CALCOLO DI AREE



$$\int_a^b f = L_1(x_1 - a) + \frac{L_2}{2}(b - x_1)$$

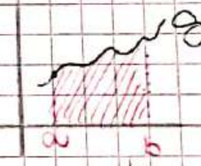
SIANO $f, g\ [a,b] \to \mathbb{R}$, INTEGRABILI E $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$



$$a(A) = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

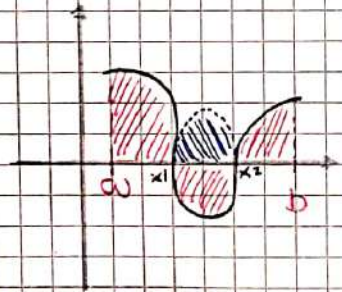
AREA DI A

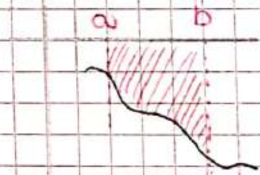
ESEMPI:



$$a(A) = \int_a^b g(x)\,dx$$

• CON VALORE ASSOLUTO:





$$a(A) = \int_a^b -g(x)\,dx$$

$a(A) = A_1 + A_2 + A_3$

$$a(A) = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} -f(x)\,dx + \int_{x_2}^{b} f(x)\,dx$$

$\Downarrow$

$$a(A) = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

OSS: $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

Scansionato con CamScanner

FORBO ANDREA — ANALISI MATEMATICA — 20ª LEZIONE: 10/12/2021

6.2.2 TEOREMA MEDIA INTEGRALE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, INTEGRABILE SE

$m = \inf f(x)$ E $M = \sup f(x)$

LA MEDIA INTEGRALE È $m(f) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f \quad | \quad m \le m(f) \le M$

N.B. SE f CONTINUA $\exists\, x_0$ tc $m(f) = F(x)$

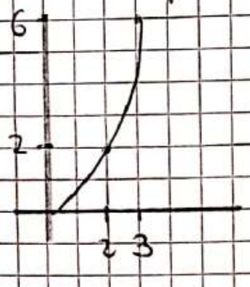
6.2.3 FUNZIONE INTEGRALE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f INTEGRABILE, $x \in [a,b]$

$$F(x) = \int_a^x f$$

FUNZIONE INTEGRALE

ES. $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 2 \\ 2 & 2 < x \le 3 \end{cases} \quad [0;3] \qquad F(x) = \int_0^x f = \begin{cases} 1(x-0) \\ 2+2(x-2) \end{cases} = \begin{cases} x & 0 \le x \le 2 \\ 2x-2 & 2 < x \le 3 \end{cases}$



6.2.6 TEOREMA CONTINUITÀ FUNZIONE INTEGRALE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f INTEGRABILE, ALLORA

$F(x) \int_a^x$ È CONTINUA SU $[a,b]$

FALBO ANDREA

ANALISI MATEMATICA

20° LEZIONE: 14.12.2021

6.2.5. 1° TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

$f\,[a,b] \to \mathbb{R}$, f CONTINUA (INTEGRABILE E LIMITATA), ALLORA

$F(x) = \int_a^x f$ È UNA PRIMITIVA DI F SU $[a,b]$ CIOÈ F DERIVABILE

E $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$

6.2.6. 2° TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f CONTINUA, SIA $G: [a,b] \to \mathbb{R}$ UNA PRIMITIVA DI f, ALLORA

$$\int_a^b f = G(b) - G(a)$$

Scansionato con CamScanner