Ricerca Operativa e Pianificazione Risorse

Lezione 1 - Pre Requisiti

Una matrice $_{m \times n}$ è una tabella contenente numeri costituita da m righe e n colonne:

- Una matrice $_{m \times m}$ viene detta quadrata.
- Una matrice $_{1 \times m}$ viene detta vettore riga m dimensionale.
- Una matrice $_{m \times 1}$ viene detta vettore colonna m dimensionale.
- Se A = $[a_{ij}]$ è una matrice $_{m \times n}$, la matrice n x m = A_t= $[a_{ji}]$ viene detta trasposta di A.
- Se A è una matrice $_{m \times p}$ e B è una matrice $_{p \times n}$ esiste una matrice prodotto C $_{m \times n}$ dove ogni posizione contiene la somma dei prodotti della riga di A e colonna di B.
- La matrice somma è una somma posizione a posizioni tra due matrici $_{m \times n}$.
- Una matrice quadrata che ha esclusi gli elementi sulla diagonale tutti 0 viene definita matrice diagonale.
- Una matrice che ha 1 sulla diagonale e 0 il resto viene definita matrice identità I.

I vettori vengono detti linearmente indipendenti se nessun vettore può essere espresso come una combinazione degli altri, altrimenti vengono detti linearmente dipendenti.

Una matrice è singolare se ha vettori linearmente dipendenti. Se una matrice è singolare allora non esiste la sua inversa. La matrice inversa è definita come la matrice A_{-1} tale per cui A x A_{-1} = I. Una matrice singolare è una matrice con determinante nullo.

La seguente equazione $ax_1 + bx_2 = c$ viene detta equazione lineare in quanto l'insieme delle sue soluzioni è rappresentato da una retta nello spazio R_2. Viene detta soluzione dell'equazione lineare ogni coppia di numeri tali da verificare l'uguaglianza.

Le equazioni messe a sistema creano un sistema di m equazioni lineari in n variabili e una soluzione del sistema lineare è il punto geometrico nelle quali le equazioni si incontrano:

- consistente: ammette almeno una soluzione.
- determinato: numero di incognite uguale al numero di eqauzioni.
- sovradeterminato: m>n.
- sottodeterminato: m<n.

Si definisce rango della matrice A il minimo tra il massimo numero di righe e colonne linearmente indipendenti.

Data la matrice dei coefficienti A, si dice matrice aumentata la matrice $C = A|b$ ottenuta aggiungendo il vettore dei termini noti:

- $r(C) > r(A)$ no soluzioni, altrimenti:
    - $m > =n$ se ho $r(A) = n$ soluzione unica, altrimenti ho $r(A) < n$ e infinite soluzioni.
    - $m < n$ se $r(A) <= m$ allora ho infinite soluzioni.

Il metodo di eliminazione di Gauss è utilizzato per risolvere sistemi di equazioni lineari attraverso tre tipi di operazioni:

- moltiplicare un'equazione per scalare nullo.
- sommare un'equazione per scalare ad un altra equazione.
- scambiare due equazioni.

Lezione 2 - Pre Requisiti

Si dice funzione una terna (A, B, f) con A e B due insiemi non vuoti e f una legge che ad ogni elemento x di a associa uno ed un solo elemento di B detto f(x):
A è detto dominio di f, B è detto codominio della funzione f
Data una funzione f: A -> B, il limite viene chiamato derivata della funzione f nel punto x_0 e viene indicato con $f'(x_0)$
Una funzione viene detta crescente in un intervallo quando ogni coppia di punti x_1, x_2 con $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) < f(x_2)$. Se risulta $f(x_1) > f(x_2)$ diremo decrescente.

Data una funzione continua f: [a,b] → R possiamo affermare che:
- essa è crescente (decrescente) in un punto x se la sua derivata prima è positiva (negativa) in x.
- i punti di stazionarietà avvengono quando la derivata prima è nulla
- è detta lineare se la sua derivata prima è costante

I punti di minimo e massimo sono detti locali se a sinistra e a destra del punto a funzione cresce o decresce immediatamente. Viene detto assoluto il punto massimo o il minimo tra i locali.

Una funzione f: Rn → R è una funzione in n variabili indipendenti, mentre l'output y viene definito variabile dipendente:

Le curve di livello sono ottenute disegnando gli n punti in cui la funziona ha valore costante k

Data una funzione a 2 variabili:
- si dice derivata parziale rispetto a x1 la funzione in cui considero x2 costante
- si dice derivata parziale rispetto a x2 la funzione in cui considero x1 costante
- si dice gradiente il vettore i cui coefficienti sono le derivate parziali
- si dice derivata parziale seconda rispetto a x1 e x1 (x2 e x2) la derivata in cui derivo due volte x1 (x2)
- si dice derivata parziale seconda rispetto a x1 e x2 (o x2 e x1) la derivata in cui derivo prima x1 e poi x2 (x2 e poi x1)

Si dice matrice hessiana la matrice quadrata delle derivate parziali.
Un punto (x1, x2) può essere un punto critico solo se il suo gradiente nel punto è nullo.

Se è un punto critico, calcoliamo la matrice Hessiana e abbiamo i seguenti casi:
det(H) > 0 e fx1x1 > 0 allora il punto è un minimo relativo
det(H) > 0 e fx1x1 < 0 allora il punto è un massimo relativo
det(H) < 0 allora è un punto di sella

Se siamo nel primo caso possiamo anche dire che la funzione f è convessa.

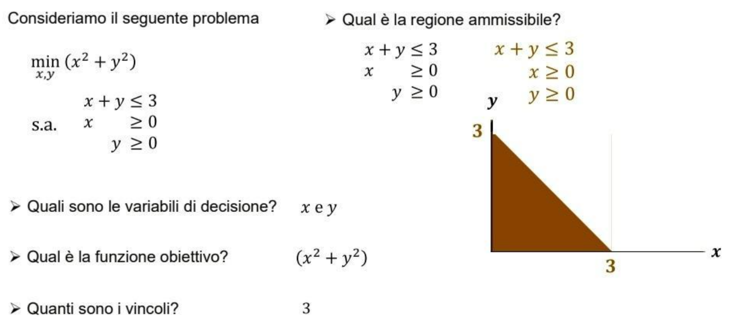
Lezione 3 - Modelli nella Ricerca Operativa

Un problema di ottimizzazione consiste nel determinare, se esistono, uno o più punti di minimo o massimo, della funzione obiettivo f tra i punti x che appartengono alla regione ammissibile X, assegnando dei valori alle variabili decisionali x. Abbiamo diversi tipi:

- non vincolata: avviene su tutto lo spazio di definizione delle variabili di decisione
- vincolata: avviene su un sottoinsieme dello spazio
- intera: le variabili assumono solo valori interi
- binaria: le variabili assumono solo 0 e 1.
- mista: intera e binaria

Quando l'insieme X delle soluzioni ammissibili di un problema di ottimizzazione viene espresso attraverso un sistema di equazioni e disequazioni, esso prende il nome di problema di Programmazione Matematica

Esempio:

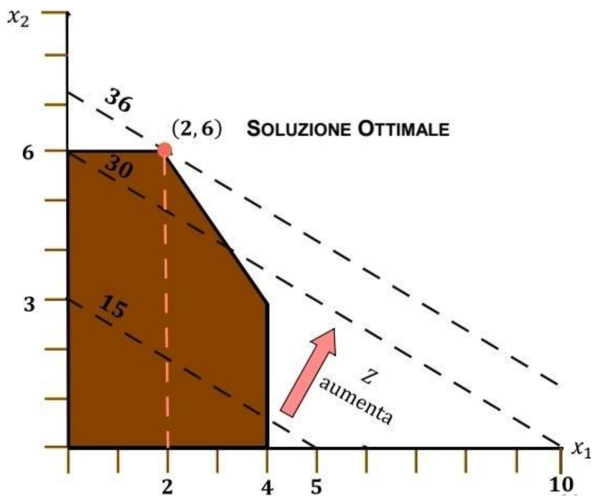


La risoluzione di un problema di programmazione matematica consiste nel trovare una soluzione ammissibile che sia un ottimo globale.

Osservazione: Un problema di ottimizzazione può avere più di un ottimo locale, ma anche più di un ottimo globale.

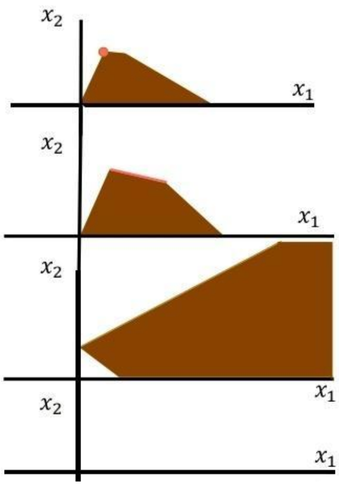
Lezione 4 - Introduzione alla Programmazione Lineare

Da un punto di vista grafico, è facile osservare come, costruendo la regione ammissibile dati i vincoli, il punto di massimo o minimo saranno dati dalle variabili decisionali che modificano (alzano o abbassano) la funzione obiettivo.



Il punto in cui funzione obiettivo e regione ammissibile si intersecano è la soluzione.

In un problema di programmazione lineare con n variabili decisionali ed m vincoli avremo:



- Z = valore della misura di prestazione
- xj = livello dell'attività j
- cj = incremento della misura di prestazione Z corrispondente all'incremento di un'unità del valore dell'attività xj
- bi = quantità di risorsa i allocabile alle attività xj
- aij = quantità di risorsa i consumata da ogni attività xj

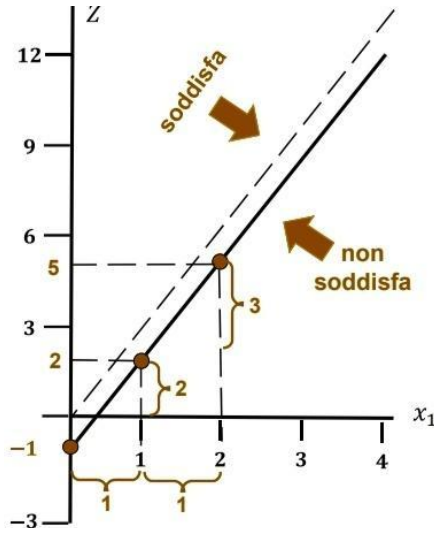
La regione ammissibile, che da un punto di vista geometrico corrisponde ad un poliedro convesso, se limitata è detta politopo.

Vediamo ora i 4 casi di un problema di PL:

- il problema PL ammette un'unica soluzione ottima in un vertice del poligono convesso
- il problema PL ammette infinite soluzione ottimale in un lato del poligono se la direzione di decrescita è perpendicolare ad un lato del poligono
- il problema PL non ammette soluzione perché la regione ammissibile è illimitata e la funzione obiettivo è illimitata superiormente o inferiormente
- il problema PL non ammette soluzione perché la regione ammissibile è vuota

Un problema di programmazione lineare si poggia su 4 assunzioni implicite.

Proporzionalità: il contributo di ogni variabile decisionale, al valore della funzione obiettivo, è proporzionale rispetto al valore assunto dalla variabile stessa. Come si può osservare dala immagine, la linea continua , avendo un costo di inizializzazione, mostra un incremento di 2 sull'asse delle y rispetto ad 1 sull'asse delle x, mentre successivamente incrementa di 3 nelle y.



Additività: ogni funzione è la somma dei contributi delle variabili decisionali.

	Valore del vincolo		
	Additività	Additività violata	
(X_1,X_2)	rispettata	Caso 3	Caso 4
(2, 0)	6	6	6
(0, 3)	6	6	6
(2, 3)	12	15	10.8

Continuità: qualunque valore delle variabili decisionali in R_n è accettabile. In altri termini, le variabili decisionali sono continue, anche se in alcune condizioni può capitare che non possano assumere valore interi (costruire un terzo di finestra).

Certezza: il valore assegnato ad ogni parametro è assunto essere noto e costante.

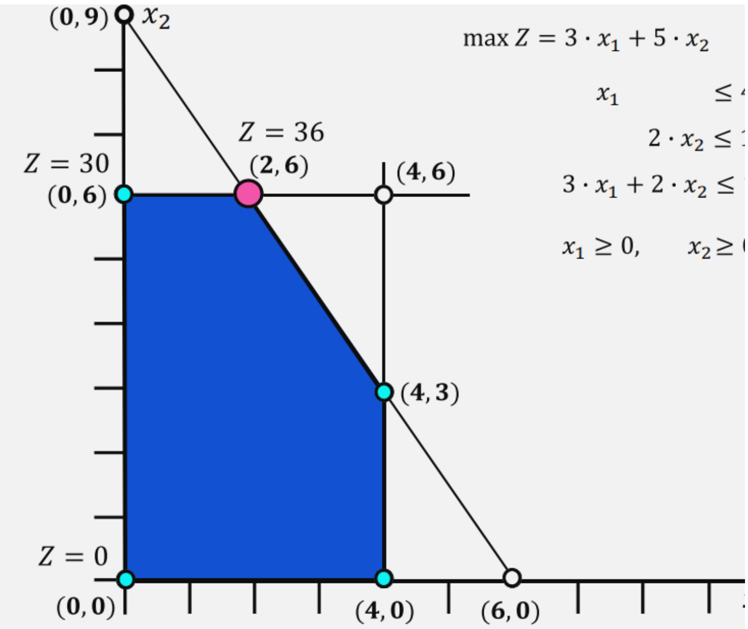
Lezione 5 - Metodo del Simplesso

Concetti Chiave

Il metodo del simplesso è un metodo utilizzato per risolvere problemi di PL.

Nel Metodo del Simplesso ci sono sei concetti chiave.

Concetto chiave 1: il metodo del simplesso ispeziona solo soluzioni ammissibili corrispondenti ai vertici. Per ogni problema di PL che ammetta una soluzione ottimale, trovarne una richiede di trovare il vertice ammissibile cui compete il miglior valore della funzione obiettivo. La sola restrizione è che il problema possegga vertici ammissibile, garantito dal fatto che la regione ammissibile sia limitata.



Concetto chiave 2: Il metodo simplesso è un algoritmo iterativo con la seguente struttura:
Inizializzazione: scelta di una soluzione
Test di ottimalità: la soluzione è ottimale?
Se si termina algoritmo
Altrimenti torna al punto 1) per trovare una soluzione migliore di quella corrente

Concetto chiave 3: la prima inizializzazione, se possibile, inizia dal punto (0,0) per evitare di ricorrere a procedure algebriche per determinare la soluzione iniziale

Concetto chiave 4: In termini computazionali è più conveniente acquisire informazioni solo sui vertici adiacenti piuttosto che altri.

Concetto chiave 5: Tra i vertici adiacenti che comportano un miglioramento per la funzione obiettivo Z, il metodo del simplesso si muove lungo lo spigolo che porta il massimo valore di incremento.

Concetto chiave 6: Il test di ottimalità consiste nel verificare se esiste uno spigolo con tasso positivo di miglioramento. Se tale condizione non è soddisfatta allora la soluzione corrente è ottimale

L'algoritmo del simplesso viene eseguito su calcolatori che non sono in grado di interpretare procedure geometriche, è necessaria una traduzione di essa in termini algebrici, e per farlo useremo un sistema di equazioni lineari. Il primo passo da compiere sarà quello di tradurre i vincoli funzionali di diseguaglianza in uguaglianza.

Interpretazione Geometrica

Viene introdotto il concetto di variabile slack, ovvero la quantità che manca al termine sinistro della disuguaglianza affinché verifichi l'uguaglianza.

Il problema in forma originale verrà chiamato in forma standard, mentre il nuovo problema con le variabili slack viene nominato modello in forma aumentata.

$$
\begin{aligned}
&\max Z = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \\
&x_1 \leq 4 \\
&2 \cdot x_2 \leq 12 \\
&3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 18 \\
&x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

MODELLO IN FORMA STANDARD

$$
\begin{aligned}
&\max Z = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \\
&x_1 + x_3 = 4 \\
&2 \cdot x_2 + x_4 = 12 \\
&3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_5 = 18 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

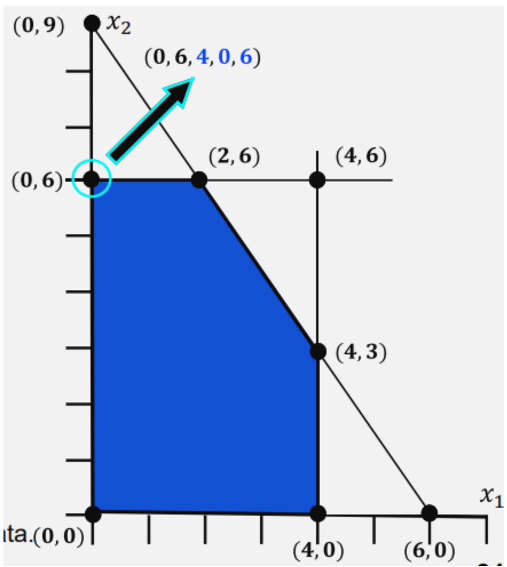
slack

MODELLO IN FORMA AUMENTATA

Si definisce soluzione aumentata una soluzione del modello in forma standard che viene aumentata tramite i valori delle variabili slack.

Si definisce soluzione di base un vertice del modello in forma aumentata, e viene detta ammissibile se esiste una soluzione.

In un modello in forma aumentata con 5 variabili, di cui 2 decisionali e 3 slack, con 3 equazioni. Abbiamo a disposizione 5-3= 2 gradi di libertà per risolvere il sistema lineare (5 variabili e 3 equazioni)



Una soluzione di base gode delle seguenti proprietà:

- una variabile può essere di base o non di base
- numero variabili di base = numero equazioni
- le variabili non di base vengono poste a zero
- i valori delle variabili di base sono ottenuti come risoluzione simultanea del sistema di equazioni lineari.
- se le variabili di base soddisfano i vincoli di non negatività, la soluzione è soluzione ammissibile di base.

Due soluzioni di base ammissibili sono adiacenti se sono caratterizzate dal condividere le stesse variabili non di base eccetto una.

Interpretazione Aritmetica

L'interpretazione geometrica fa riferimento al modello in forma standard.
L'interpretazione algebrica fa riferimento al modello in forma aumentata (slack).

Inizializzazione: scelgo x_1 e x_2 poste uguali a 0 per ottenere la soluzione iniziali di base.
Test di ottimalità: scelgo delle due variabili non di base il coefficiente che porta il maggior tasso di miglioramento.

Determinazione della direzione di Spostamento: l'algoritmo del simplesso sceglie una variabile non di base da incrementare, il che la fa divenire una variabile di base nella nuova soluzione di base, e prende il nome di variabile entrante.

$$
\begin{aligned}
&\max Z = \boxed{3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2} \\
&x_1 + x_3 = 4 \\
&2 \cdot x_2 + x_4 = 12 \\
&3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_5 = 18 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

MODELLO IN FORMA AUMENTATA

Determinazione dell'Incremento: l'algoritmo determina di quanto aumentare il valore della variabile entrante, desiderando di aumentare il più possibile ma evitando di abbandonare la regione ammissibile. Questo implica anche che una variabile di base diminuisce a zero per prima trasformandola in variabile di base, chiamata uscente.

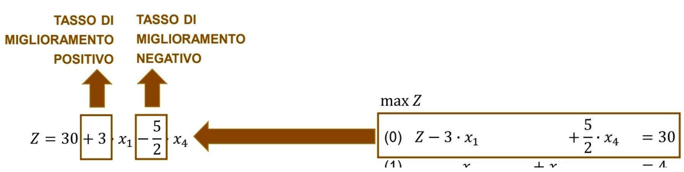
$$
\begin{aligned}
&\max Z = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \\
&\boxed{\begin{aligned} &x_1 + x_3 = 4 \\ &2 \cdot x_2 + x_4 = 12 \\ &3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_5 = 18 \end{aligned}} \\
&\boxed{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0}
\end{aligned}
$$

MODELLO IN FORMA AUMENTATA

Determinazione della Nuova Soluzione di Base: utilizzo l'eliminazione Gaussiana al fine di applicare il test di ottimalità e ottenere una nuova soluzione di base ammissibile. Utilizziamo il modello con la funzione obiettivo. che fa parte delle equazioni:

$$
\begin{array}{llcl}
\max Z & & & \\
(0) & Z - 3 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 & 0 & = 0 \\
(1) & x_1 + x_3 & 0 & = 4 \\
(2) & 2 \cdot x_2 & + x_4 & = 12 \\
(3) & 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 & 0 & + x_5 = 18
\end{array}
$$

- Eseguo eliminazione per la variabile entrante
- Questa procedura è nota con il nome di eliminazione di Gauss-Jordan, ogni variabile di base viene eliminata da tutte le equazioni tranne dove ha coefficiente 1.



Una volta che ricavo Z dalle equazioni, controllo se posso ottenere un tasso di miglioramento, in tal caso torno al passo 1, altrimenti ho soluzione ottimale.

Forma Tabellare

La forma algebrica non è la più adeguata per effettuare la computazioni mostrate, meglio la forma tabellare che registra l'essenziale:

- coefficienti delle variabili,
- termini noti delle equazioni,
- variabili di base per ogni equazioni.

Passo 1: Identificare la variabile entrante come quella cui corrisponde il minimo coefficiente negativo nell'equazione (0). La colonna corrispondente viene identificata come colonna pivot.

FORMA ALGEBRICA	FORMA TABELLARE								
	VARIABILE DI BASE	Eq.	COEFFICIENTE						TERMINE NOTO
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(0) $\mathbf{Z} - 3x_1 - 5x_2 = 0$	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
(1) $x_1 + \mathbf{x_3} = 4$	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
(2) $2x_2 + \mathbf{x_4} = 12$	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
(3) $3x_1 + 2x_2 + \mathbf{x_5} = 18$	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18

Passo 2: Si effettua il test del rapporto minimo

- si selezionano i coefficienti strettamente positivi della colonna pivot
- si dividono i termini noti per questi coefficienti
- si seleziona la riga cui corrisponde il più piccolo rapporto , viene chiamato riga pivot
- la variabile di base di quella riga è la uscente
- il coefficiente che interseca la colonna pivot e la riga pivot si chiama numero pivot

FORMA ALGEBRICA	FORMA TABELLARE								
	VARIABILE DI BASE	Eq.	COEFFICIENTE						TERMINE NOTO
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(0) $\mathbf{Z} - 3x_1 - 5x_2 = 0$	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
(1) $x_1 + \mathbf{x_3} = 4$	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
(2) $2x_2 + \mathbf{x_4} = 12$	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
(3) $3x_1 + 2x_2 + \mathbf{x_5} = 18$	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18

Iterazione 3: Determinare la nuova soluzione di base applicando l'eliminazione Gaussiana:

- Dividere la riga pivot per il numero pivot, ottenendone di nuovi
- Sommare ad ogni riga negativa il prodotto del modulo coefficiente e il nuovo pivot
- Sottrarre ad ogni riga positiva il prodotto del modulo coefficiente e il nuovo pivot

Quando tutti i coefficienti della riga 0, ovvero della funzione obiettivo, sono non negativi, la soluzione corrente è la ottimale.

ITERAZIONE	VARIABILE DI BASE	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	TERMINE NOTO
0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	x_3	(1)	0						
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	(3)	0	3	0	0	-1	1	6

Tie Breaking

Nelle lezioni precedenti non abbiamo detto nulla riguardo a situazioni in cui le regole adottate non portino a decisioni univoche, chiamate Tie Breaking. I casi possibili sono i seguenti:

- alternative per la variabile entrante
- alternative per la variabile uscente (degenerazione)
- mancanza di una variabile uscente (funzione obiettivo illimitata)
- molteplici soluzioni ottimali

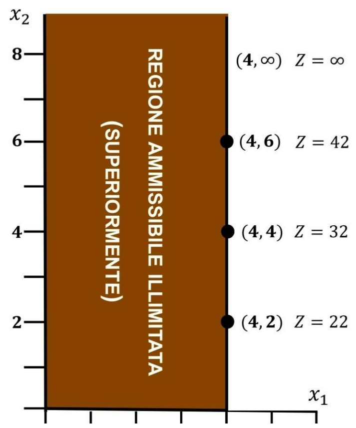
Variabile Entrante: si verifica quando due o più variabili non di base hanno lo stesso valore minimo. Non cambia la soluzione in base a quale scelgo, ma impiegheranno tempi diversi. Attualmente non esiste un algoritmo che mi fa sapere quale impiegherà meno tempo

$$\max Z$$

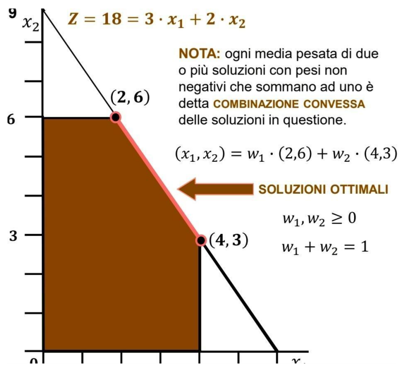
$$\begin{array}{llllllll}
\boxed{(0) & Z - 3\cdot x_1 & - 3\cdot x_2 & & & & = 0} \\
(1) & x_1 & & + x_3 & & & = 4 \\
(2) & & 2\cdot x_2 & & + x_4 & & = 12 \\
(3) & 3\cdot x_1 & + 2\cdot x_2 & & & + x_5 & = 18
\end{array}$$

Variabile Uscente: si verifica quando due o più variabili di base competono per uscire:

- quando le possibili variabili uscenti raggiungono insieme il valore zero e non sono la nuova variabile uscente, vengono chiamate variabili degeneri.
- se una variabile degenere mantiene il proprio valore fino all'iterazione successiva, la corrispondente entrante deve rimanere nulla, dunque entriamo in una situazione di loop perpetuo. Tuttavia accade raramente e sono state sviluppate strategie apposite



Nessuna Variabile Uscente: il passo 2 può portare ad un altro problema, ovvero se il valore della variabile entrante può essere aumentato illimitatamente senza implicare che il valore di almeno una variabile di base diventa negativo.



Molteplici Soluzioni Ottimali: se un problema ha più di una soluzione di base ottimale, almeno una delle variabili non di base ha un coefficiente nullo nella riga (0) il che implica che incrementare il valore di una qualsiasi di tali variabili non cambia il valore della funzione Z. Quindi queste altre soluzioni

sono identificabili iterando ancora, scegliendo ogni volta una variabile non di base con coefficiente nullo come variabile entrante.

Pertanto otterremo due basi che, al cambiare dei loro due coefficienti, generano tutte le soluzioni ottimali.

ITER	VARIABILE DI BASE	Eq.	COEFFICIENTE Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	TERMINE NOTO	SOLUZIONE OTTIMALE
0	Z	(0)	1	-3	-2	0	0	0	0	NO
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12	
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18	
1	Z	(0)	1	0	-2	3	0	0	12	NO
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12	
	x_5	(3)	0	0	2	-3	0	1	6	
2	Z	(0)	1	0	0	**0**	0	1	18	SI
	$\boxed{x_1}$	(1)	0	$\boxed{1}$	0	1	0	0	$\boxed{4}$	
	$\boxed{x_4}$	(2)	0	0	0	3	$\boxed{1}$	-1	$\boxed{6}$	
	$\boxed{x_2}$	(3)	0	0	$\boxed{1}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\boxed{3}$	
Extra	Z	(0)	1	0	0	0	**0**	1	18	SI
	x_1	(1)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	
	x_3	(2)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	
	x_2	(3)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	

Forme Alternative

Finora abbiamo presentato il problema del simplesso assumendo che il problema fosse in forma standard. Vediamo come trasformare un problema in forma generica in una forma standard.

Tale trasformazione avverrà nell'inizializzazione:

- problema di minimizzazione: utilizzo la seguente formula: min Z = -max (-Z)
- mancanza di vincolo di non negatività: sostituisco la variabile con due sue forme che si annullano
- equazione in disequazione: un vincolo di = viene rimpiazzato con due vincoli, uno di <= e uno di >=
- vincolo di >= : moltiplicare l'equazione per -1 trasformando >= in <=
- rinominazione variabile: rinominare le variabili per consistenza notazionale: $x_{2'}$ e $x_{2''}$ diventano x_2 e x_3

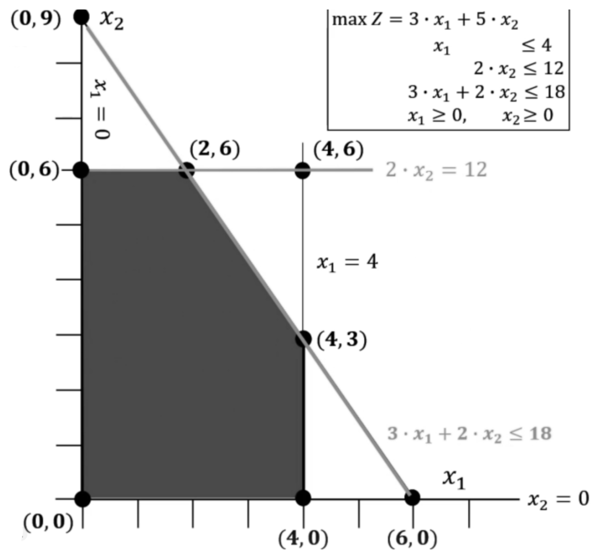
FORMA NON STANDARD	FORMA STANDARD
$\min Z$	$\max(-Z)$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \geq b_i$	$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq -b_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \qquad -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq -b_i$
x_j non vincolata in segno	$x_j = x_j^+ - x_j^- \qquad x_j^+ \geq 0 \qquad x_j^- \geq 0$

Inoltre se trasformiamo un modello in forma non standard con un >= in forma aumentata con =, la variabile slack introdotta si chiamerà variabile surplus.

Lezione 6 - Teoria del Simplesso

Terminologia

Come è possibile generalizzare i concetti del simplesso quando i problemi di programmazione lineare hanno un maggior numero di variabili decisionali e un maggior numero di vincoli?

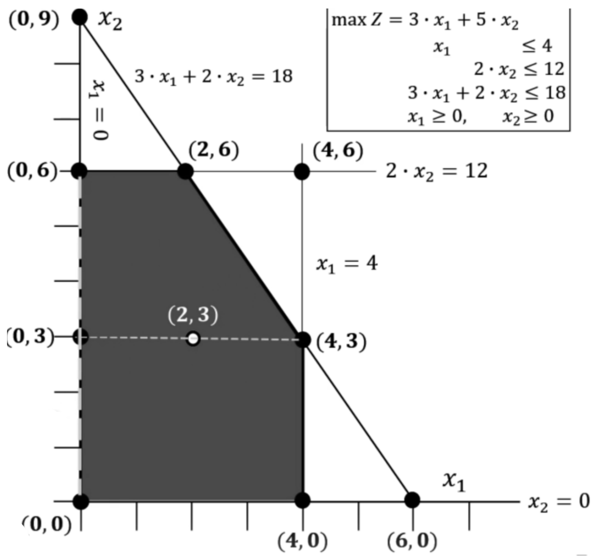


Ogni equazione definisce una figura geometrica piatta che prende il nome di iperpiano nello spazio n-dimensionale.

La frontiera della regione ammissibile contiene solo quelle soluzioni ammissibili che soddisfano una o più equazioni di frontiera.

Un vertice ammissibile è una soluzione ammissibile che non giace su un segmento che connette altre due soluzioni ammissibili:

- (2,3) non è un vertice ammissibile, giace sul segmento che collega (0,3) e (4,3).
- (0,3) non è un vertice ammissibile, giace sul segmento che collega (0,0) e (0,6).
- (0,0) è un vertice ammissibile, non esistono due soluzioni ammissibili tali per cui esso giaccia sul segmento che collega tra loro tali soluzioni ammissibili.



Se il numero di variabili di decisione è maggiore di 3, la definizione appena fornita non è sufficiente. Si dimostrerà più utile interpretare queste soluzioni in termini algebrici.

In ogni problema di programmazione lineare con n variabili di decisione, ogni vertice ammissibile giace all'intersezione di n frontiere di altrettanti vincoli. vale a dire ogni vertice è la soluzione simultanea di un sistema di n equazioni, ognuna rappresentante la frontiera di uno degli n vincoli. Le situazioni in cui questo non avviene sono:

- vertice non ammissibile
- sistema senza soluzioni
- soluzioni multiple dovute a equazioni ridondanti
- situazione degenere

Situazione degenere: situazione in cui è possibile che più di un sistema costituito da n equazioni abbia il medesimo vertice come soluzione.

Vertice Ammissibile Adiacente

In un problema di programmazione logica con più di 3 variabili è normale porsi le seguenti domande:

- Che cammino segue il metodo del simplesso?
- Cos’è un vertice ammissibile adiacente?

Partiamo con l’affrontare queste domande dal punto di vista geometrico, poi passeremo all’interpretazione algebrica

Dato un problema di PL con n variabili decisionali e regione ammissibile limitata avremo che:

- un vertice ammissibile giace al intersezione di n equazioni di frontiera
- uno spigolo della regione ammissibile è un segmento che giace all'*intersezione di n-1 equazioni di frontiera*
- due vertici ammissibili sono adiacenti se il segmento che li collega è uno spigolo della regione ammissibile
- da *ogni vertice ammissibile emanano n spigoli*, ognuno conduce ad uno degli n vertici ammissibili adiacente
- ogni iterazione del metodo del simplesso si sposta dal corrente vertice ammissibile ad un amissibile adiacente muovendosi su questi spigoli.

Passando all’interpretazione algebrica avremo che l’intersezione delle equazioni di frontiera equivale alla loro risoluzione simultanea in termini del corrispondente sistema lineare.

Passando all’interpretazione algebrica avremo che l’intersezione delle equazioni di frontiera equivale alla loro risoluzione simultanea in termini del corrispondente sistema lineare.

Alcune implicazioni di quanto abbiamo appena presentato sono:

- quando si sceglie la variabile entrante, scegliamo uno degli spigoli che emanano dal vertice ammissibile corrente.
- Aumentare il valore della variabile entrante, a partire dal valore zero, e contemporaneamente variare il valore delle restanti variabili di base, corrisponde a muoversi lungo lo spigolo scelto.
- Il valore della variabile uscente, viene ridotto fino a raggiungere il valore zero, il che significa il raggiungimento della frontiera del vincolo che si trova all’altro estremo dello spigolo.

Proprietà dei vertici ammissibili

Presentiamo tre proprietà basi dei vertici ammissibili per un problema di PL che abbia soluzioni ammissibili e con regione ammissibile limitata.

Proprietà 1:

- se esiste solo una soluzione ottimale, allora questa è un vertice ammissibile.
- se esistono soluzioni ottime multiple (e la regione ammissibile è limitata), allora almeno due di queste soluzioni sono vertici ammissibili tra loro adiacenti.

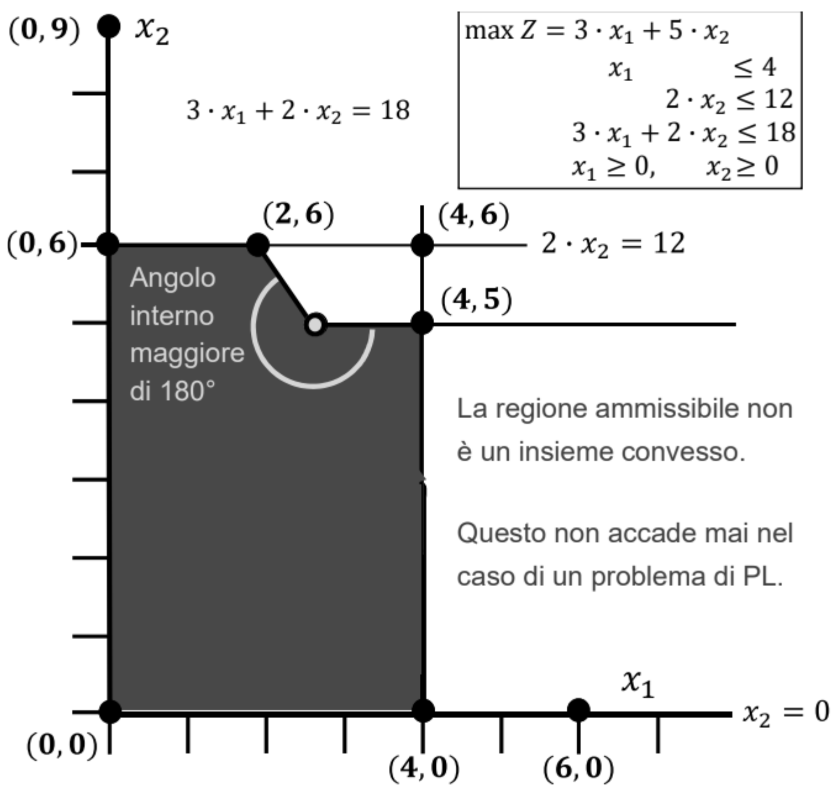
Proprietà 2:

- Esiste un numero finito di vertici ammissibili.

Proprietà 3:

- Se un vertice ammissibile non ammette vertici ammissibili a lui adiacenti che coincidono con soluzioni con valore migliore della funzione obiettivo, allora non esistono soluzioni ottimali migliori di quella che coincide con il vertice ammissibile in esame.

La motivazione base per la quale la proprietà 3 è sempre valida in un problema di PL è che la regione ammissibile è sempre un insieme convesso



Lezione 7 - Teoria della Dualità

Essenza della Teoria

Ogni problema di programmazione lineare ha associato un altro problema di programmazione lineare chiamato duale. Le relazioni esistenti tra il problema duale ed il problema originale, chiamato problema primale, si dimostrano utili da diversi punti di vista.

Problema Primale	Problema Duale
massimizzazione	minimizzazione
coefficienti in Z	termini noti
termini noti	coefficienti in Z
coefficienti di ogni variabile nei vincoli del primale	coefficienti del vincolo corrispondente del duale

Problema Primale

Forma Algebrica

$$
\begin{aligned}
\max Z &= 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \\
1 \cdot x_1 &\leq 4 \\
2 \cdot x_2 &\leq 12 \\
3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &\leq 18 \\
x_1 \geq 0, &\quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema Duale

$$
\begin{aligned}
\min W &= 4 \cdot y_1 + 12 \cdot y_2 + 18 \cdot y_3 \\
1 \cdot y_1 + 3 \cdot y_3 &\geq 3 \\
2 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 &\geq 5 \\
y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0, &\; y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Origine del Duale

Il problema duale può essere visto come una diversa formulazione dell'obiettivo del metodo del simplesso:

- Prima di ottenere una soluzione del problema primale che soddisfi il test:
    - il vettore y della riga 0 del tableau corrente deve essere inammissibile per il problema duale
- Ottenuta una soluzione del problema primale che soddisfi il test:
    - il corrispondente vettore y della riga 0 è soluzione ottimale y* per il problema duale

Inoltre il valore ottimale di W è il valore ottimale di Z, pertanto i valori ottimale dei due problemi sono uguali.

Relazioni Primale-Duale

Introduciamo due proprietà della relazione tra problema primale e duale:

- proprietà di dualità debole: se x è una soluzione ammissibile per il problema primale e y è una soluzione ammissibile per il corrispondente duale, allora vale $cx \le yb$.
- proprietà di dualità forte: se x^*, oltre ad essere ammissibile, è anche la ottimale, e vale lo stesso per y^*, allora vale $cx^* = y^*b$

Abbiamo inoltre due proprietà per quanto riguarda le iterazioni del simplesso:

- proprietà delle soluzioni complementari: ad ogni iterazione, il simplesso identifica una soluzione ammissibile x per il primale e una soluzione complementare y per il duale dove $cx = yb$. Se x non è ottimale, allora y non è ammissibile
- proprietà delle soluzioni ottimali complementari: all'iterazione finale, il simplesso identifica una soluzione ottimale x^* per il primale e una soluzione ottimale complementare y per il duale dove $cx^* = y^*b$.

Un'altra proprietà interessante è la seguente:

- proprietà di simmetria: per ogni problema primale e relativo duale, tutte le relazioni tra loro devono essere simmetriche.

L'ultima proprietà che presentiamo riassume le relazioni in tutti i casi possibili:

1. Se un problema *ha* soluzioni ammissibili e funzione obiettivo *limitata*, allora vale lo stesso per il problema corrispondente, per cui le proprietà debole e forte della dualità sono applicabili.
2. Se un problema *ha* soluzioni ammissibili e funzione obiettivo *illimitata*, allora il corrispondente non ha soluzioni ammissibili
3. Se un problema *non* ha soluzioni ammissibili, allora il corrispondente *non* ha soluzioni ammissibili o ha funzione obiettivo *illimitata*.

Si nota come i vincoli funzionali m influiscono molto di più rispetto alle variabili di decisione n. Se $m > n$ allora il problema duale ha meno vincoli del funzionale e quindi applicare il complesso sul duale porta a riduzione in termini computazionali.

Relazioni Primale - Duale pt.2

Estendiamo la proprietà delle soluzioni complementari con:

- proprietà delle soluzioni di base complementari: ogni soluzione di base del primale x ha una soluzione di base complementare nel problema duale, in modo tale che i valori delle funzioni obiettivo Z e W sono uguali.

Per identificare quali siano le variabili di base e non a partire di una soluzione complementare:

- proprietà di complementary slackness: se nel primale abbiamo variabili di base, nel duale saranno m variabili non di base. Se nel primale abbiamo variabili non di base, avremo n variabili di base.

Attraverso questa proprietà possiamo dedurre quali delle soluzioni di base del problema primale sono ammissibili o meno nel duale. Si note come il numero di ammissibili nel primale è uguale a quello di non ammissibili nel duale e lo stesso vale per le soluzioni non ammissibili. L'unica soluzione di base ammissibile in entrambi i problemi è la soluzione ottimale.

	PROBLEMA PRIMALE			PROBLEMA DUALE	
No.	**SOLUZIONE DI BASE**	**AMMISSIBILE**	$Z = W$	**AMMISSIBILE**	**SOLUZIONE DI BASE**
1	$(0, 0, 4, 12, 18)$	SI	0	NO	$(0, 0, 0, -3, -5)$
2	$(4, 0, 0, 12, 6)$	SI	12	NO	$(3, 0, 0, 0, -5)$
3	$(6, 0, -2, 12, 0)$	NO	18	NO	$(0, 0, 1, 0, -3)$
4	$(4, 3, 0, 6, 0)$	SI	27	NO	$\left(-\frac{9}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0, 0\right)$
5	$(0, 6, 4, 0, 6)$	SI	30	NO	$\left(0, \frac{5}{2}, 0, -3, 0\right)$
6	$(2, 6, 2, 0, 0)$	SI	36	SI	$\left(0, \frac{3}{2}, 1, 0, 0\right)$
7	$(4, 6, 0, 0, -6)$	NO	42	SI	$\left(3, \frac{5}{2}, 0, 0, 0\right)$
8	$(0, 9, 4, -6, 0)$	NO	45	SI	$\left(0, 0, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)$

Relazioni tra Soluzioni di Base Complementari

Estendiamo la proprietà delle soluzioni ottimali complementari alla forma aumentata dei due problemi: Data la riga (0) del tableau del metodo del simplesso, corrispondente alla soluzione ottimale del primale x*, la soluzione ottimale complementare del duale (y*, z* - c) viene ricavata come segue: da x_{n+1} a x_{n+m} avremo y*, mentre z* - c sarà tra x_1 e x_n

ITERAZIONE	VARIABILE DI BASE	EQ	COEFFICIENTE									TERMINE NOTO
			Z	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}	
OGNI	Z	(0)	1	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$\cdots$	$z_n - c_n$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	W

Le soluzioni di base sono classificabili secondo due criteri:
- condizione di ammissibilità: tutte le variabili della soluzione aumentata sono non negative
- condizione di ottimalità: i coefficienti della riga (0) sono non negativi

Dunque potremmo trovarci in 4 casi:

	Ottimale (Ammissibile Duale)	Non Ottimale (Non ammissibile Duale)
Ammissibile	Ottimale	Sub-Ottimale
Non Ammissibile	Super-Ottimale	Né ammissibile né ottimale

	PROBLEMA PRIMALE			PROBLEMA DUALE	
No.	SOLUZIONE DI BASE	AMMISSIBILE	$Z = W$	AMMISSIBILE	SOLUZIONE DI BASE
1	$(0, 0, 4, 12, 18)$	SI	0	NO	$(0, 0, 0, -3, -5)$
2	$(4, 0, 0, 12, 6)$	SI	12	NO	$(3, 0, 0, 0, -5)$
3	$(6, 0, -2, 12, 0)$	NO	18	NO	$(0, 0, 1, 0, -3)$
4	$(4, 3, 0, 6, 0)$	SI	27	NO	$\left(-\frac{9}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0, 0\right)$
5	$(0, 6, 4, 0, 6)$	SI	30	NO	$\left(0, \frac{5}{2}, 0, -3, 0\right)$
6	$(2, 6, 2, 0, 0)$	SI	36	SI	$\left(0, \frac{3}{2}, 1, 0, 0\right)$
7	$(4, 6, 0, 0, -6)$	NO	42	SI	$\left(3, \frac{5}{2}, 0, 0, 0\right)$
8	$(0, 9, 4, -6, 0)$	NO	45	SI	$\left(0, 0, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)$

- Le righe 1,2,4 e 5 sono sub-ottimali in quanto sono ammissibili per il primale ma non lo sono per il duale
- Le righe 7 e 8 sono super-ottimali in quanto non sono ammissibili per il primale ma lo sono per il duale
- La riga 3 non è ne ammissibile ne super ottimale
- La riga 6 è ottimale

Introduciamo nuovi termini per descrivere una coppia di soluzione di base complementari che vengono dette:
- primale ammissibili: la soluzione di base primale è ammissibile per il primale
- duale ammissibili: la soluzione di base primale è ammissibile per il duale

Usando queste terminologia, il metodo del simplesso visita soluzioni primale ammissibili, cercando di ottenere ammissibilità duale, quando questo avviene troviamo la soluzione ottimale

Soluzione di Base del Primale	Soluzione di Base Complementare del Duale	Entrambe Soluzioni di Base	
		Primale Ammissibile	Duale Ammissibile
sub-ottimale	super-ottimale	SI	NO
ottimale	ottimale	SI	SI
super-ottimale	sub-ottimale	NO	SI
ne ammissibile ne super-ottimale	ne ammissibile ne super-ottimale	NO	NO

Metodo Sensible-Odd-Bizarre

Proprietà di Simmetria: tutte le relazioni esistenti tra problema primale e relativo problema duale devono essere simmetriche.

Nella forma non standard del problema primale possono non essere presenti tutti i vincoli di uguaglianza variabili decisionali vincolate in segno. Per queste due forme esiste una scorciatoia (invece di primale non standard → primale standard → duale non standard → duale standard) chiamato metodo SOB.

Il metodo Sensible-Odd-Bizarre è descrivibile come segue:

- Se il primale è di massimazione, il duale sarà minimizzazione e viceversa
- Etichettiamo i vincoli funzionali sulle variabili decisionali come Sensible, Odd, Bizarre
- Vincolo decisionale sul duale ha la medesima etichetta sul funzionale del primale e viceversa.

Problema Primale

$$\max \; -Z = -0.4 \cdot x_1 - 0.5 \cdot x_2$$

(S) $0.3 \cdot x_1 + 0.1 \cdot x_2 \leq 2.7$

(O) $0.5 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 = 6$

(B) $0.6 \cdot x_1 + 0.4 \cdot x_2 \geq 6$

(S) $x_1 \geq 0,$

(S) $x_2 \geq 0$

Problema Duale

$$\min W \quad 2.7 \cdot y_1 + 6 \cdot y_2 + 6 \cdot y_3'$$

$y_1 \geq 0$

y_2 non vincolata

$y_3' \leq 0$

$0.3 \cdot y_1 + 0.5 \cdot y_2 + 0.6 \cdot y_3' \geq -0.4$

$0.1 \cdot y_1 + 0.5 \cdot y_2 + 0.4 \cdot y_3' \geq -0.5$

Etichetta	**Problema Primale (o Problema Duale)**	**Problema Duale (o Problema Primale)**
	max Z (o W)	min W (o Z)
	Vincolo *i* :	Variabile y_i (o x_i):
Sensible	$\leq$	$y_i \geq 0$
Odd	$=$	non vincolata
Bizarre	$\geq$	$y'_i \leq 0$
	Variabile x_j (o y_j):	Vincolo *j* :
Sensible	$x_j \geq 0$	$\geq$
Odd	non vincolata	$=$
Bizarre	$x'_i \leq 0$	$\leq$

un problema	**altro problema**
Vincolo *i*	Variabile *i*
Funzione Obiettivo	Termine noto destro

Lezione 8 - Programmazione Lineare Intera

Programmazione Lineare Intera

Introduzione

Una limitazione chiave che non abbiamo ancora affrontato è l'ipotesi di divisibilità, che richiede che le variabili decisionali siano del dominio reale.

Se si richiede che le variabili di decisione assumono valori interi allora si parla di programmazione Lineare Intera.

Se solo alcune delle variabili di decisione devono essere intere allora si parla di programmazione Lineare Mista.

In un problema di programmazione binaria generico avremo
- Variabili binarie, dunque che assumono solo valore 0 o 1.
- Vincoli di budget, come nei classici problemi di PL
- Vincolo di **mutua esclusione** tra le variabili: rappresentabile come $x_i + x_j \leq 1$
- Condizione di **contingenza**:se vogliamo che un valore sia contenuto rispetto ad un altro: $x_i \leq x_j$
- Funzione obiettivo da massimizzare o minimizzare.

Uso delle variabili binarie:
- Analisi di investimento: ha senso investire o no?
- Selezione di siti: una località è valida o no?
- Spedizione di beni: un percorso è da seguire o no?
- Compagnie aeree: un velivolo deve essere usato o no?
- Schedulazione di attività: una attività deve iniziare in un dato istante o no?

Condizioni Logiche

Le variabili binarie permettono di introdurre condizioni logiche.

Vincolo di tipo **either-or**: dati due vincoli almeno uno di questi deve essere soddisfatto. Allora scriviamo i due vincoli aggiungendo al termine noto della prima equazione M*y e nell'altra equazione M*(1-y), dove M è un numero positivo molto grande, y binaria:
- Se y=0 allora la prima equazione rimane invariata, mentre la seconda può essere eliminata in quanto sempre soddisfatta dato M grande
- Se y=1, allora la seconda equazione rimane invariata, mentre la prima può essere eliminata in quanto sempre soddisfatta per M grande.

Dati N vincoli, **solo K presenti**: assegniamo per ogni vincolo M*y dove M è un numero molto grande e y_i binario. Aggiungiamo poi al sistema: $\sum_{i=1}^{N} y_i = N - K$

La funzione assume **solo N possibili valori**: considero N variabili binarie y_i. Allora avremo che: $f(x_1, x_2, ..., x_n = \sum_{i=1}^{N} d_i y_i \; tale\ che \; \sum_{i=1}^{N} y_i = 1$

Costo fisso: Supponiamo che si voglia intraprendere un attività j il cui costo sia caratterizzato dalla seguente funzione $f(x) = k + cx, \; se\, x > 0 \,|\, 0 \; se\, x = 0$ dove k > denota il costo fisso, x >= 0 è il livello di attività e c il costo per ogni unità incrementale. La minimizzazione di tale funzione può essere espressa attraverso il seguente modello PLI: $min\, z = (ky + cx)$ soggetto ai seguenti vincoli.

- $x - My \leq 0$
- $y \in \{0, 1\} \, e \, x \geq 0$

dove M denota un numero molto grande. Notiamo che:

- se y = 0 allora si ha x = 0 e z = 0
- se y = 1 allora x può assumere qualsiasi valore e z = k + cx

Rappresentazione binarie di variabili intere generiche: Si supponga di avere un problema PLI puro dove tutte le variabili sono binarie eccetto una intera x che assume valore nell'intervallo [0, u]. Chiamiamo N l'intero tale che: $2^N \leq u \leq 2^{N+1}$.

La rappresentazione binaria di x è data da $x = \sum_{i=0}^{N} 2^i y_i$ con y_i variabili aggiuntive.

Così facendo si passa da un problema misto ad un problema binario.

Rilassamento Lineare

Per un qualsiasi problema PLI è possibile formulare il corrispettivo problema PL, ovvero lo stesso problema senza i vincoli di interezza. Tale problema prende il nome di **rilassamento lineare**:

- Se x_i appartiene a Z, allora nel problema rilassato presenta il vincolo di non negatività
- Se x_i è binaria, allora nel problema rilassato è vincolata tra 0 e 1.

Quando si affronta un problema PLI è comune partire risolvendo il problema rilassato in quanto possiamo verificare se la soluzione ottima sia intera. In caso non trovassimo la soluzione ottimale, otteniamo comunque un upper/lower bound del problema.

Osservazione: Se la soluzione ottimale trovata al problema rilassato è intera, allora la soluzione ottimale è valida anche per il problema di PLI.

In generale, la soluzione ottima di un problema PLI può non corrispondere ad una delle sue soluzioni intere ottenute arrotondando le variabili non intere. La soluzione arrotondata potrebbe essere non ottimale o non ammissibile.