Ricerca Operativa e Pianificazione Risorse

Modelli nella Ricerca Operativa

Un **problema di ottimizzazione** consiste nel determinare, se esistono, uno o più punti di minimo/massimo x* assegnando i valori alle variabili decisionali della funzione obiettivo tra i punti che appartengono alla regione ammissibile.

Un problema di ottimizzazione prende il nome di problema di **programmazione matematica** quando l'insieme delle soluzioni ammissibili viene espresso attraverso un sistema di equazioni e disequazioni.

La **regione ammissibile** è data dal soddisfacimento dei vari vincoli (rette e semipiani); da un punto di vista geometrico, corrisponde ad un poliedro convesso in Rn e può essere limitata (politopo) o illimitata.

La risoluzione di un problema di programmazione matematica consiste nel trovare una soluzione ammissibile che sia un **ottimo globale**.

Introduzione alla Programmazione Lineare

Interpretazioni grafiche per trovare soluzione di problema PL:

- **unica soluzione ottima**: in un vertice del poligono convesso che delimita la regione ammissibile
- **infinite soluzioni ottime**: in un lato del poligono convesso che delimita la regione ammissibile
- **non ammette soluzione**:
  - perché la regione ammissibile è illimitata e la funzione obiettivo è illimitata superiormente (se è di massimizzazione) o illimitata inferiormente (se è di minimizzazione)
  - perché la regione ammissibile è vuota

In un problema di programmazione lineare sono valide 4 assunzioni implicite:

- **Proporzionalità**: il contributo di ogni variabile decisionale, al valore della funzione obiettivo, è proporzionale rispetto al valore assunto dalla variabile stessa.
- **Additività**: ogni funzione è la somma dei contributi delle variabili decisionali.
- **Continuità**: qualunque valore delle variabili decisionali in R^n è accettabile.
- **Certezza**: il valore assegnato ad ogni parametro è assunto essere noto e costante.

Simplesso: Concetti Geometrici

Il modello può essere in forma:

- **non standard**: non rispetta i vincoli formali di un problema;
- **standard**: rispetta i vincoli formali di un problema;
  - massimizzazione, vincoli di <=, variabili di decisione non negative;
  - minimizzazione, vincoli di >=, variabili di decisione non negative.
- **aumentata**: modello standard con variabili slack / surplus;

Vertici **adiacenti**: due vertici che condividono (n-1) frontiere di vincoli (con n variabili decisionali).

Spigolo: segmento che collega due vertici adiacenti, giace sull'intersezione delle frontiere dei vincoli condivisi.

Test di Ottimalità: se una soluzione vertice non ammette soluzioni vertice a lei adiacenti con valore della funzione obiettivo migliore, allora la soluzione in questione è ottimale.

Concetti chiave:

1. **Vertici**: Il metodo del simplesso ispeziona solo soluzioni ammissibili sui vertici. Per ogni problema di PL che ammetta almeno una soluzione ottimale, trovarne una, richiede di trovare solamente il vertice ammissibile cui compete il miglior valore della funzione obiettivo.
2. **Iterativo**: Il metodo del simplesso è un algoritmo iterativo con la seguente struttura:
   a. inizializzazione: scelta di una soluzione;
   b. test di ottimalità: la soluzione è ottimale?
      i. no: torna ad a) per trovare una soluzione migliore di quella corrente;
      ii. si: termina algoritmo.
3. **Zero Iniziale**: Quando sia possibile, l'inizializzazione del metodo del simplesso seleziona l'origine (i valori di tutte le variabili di decisione vengono posti uguali a 0) come soluzione iniziale
4. **Adiacente**: Ad ogni iterazione, se l'algoritmo si sposta dal vertice corrente, verso un vertice con valore migliore della funzione obiettivo, lo fa per muoversi in un vertice a lui adiacente. Nessuna altra soluzione viene considerata.
5. **Miglioramento**: Il metodo del simplesso valuta e compara i tassi di miglioramento della funzione obiettivo lungo la direzione degli spigoli che conducono dal vertice corrente ai vertici adiacenti. Tra i vertici adiacenti con un tasso di miglioramento positivo per la funzione obiettivo, il metodo del simplesso sceglie di muoversi lungo lo spigolo cui compete il massimo valore di incremento. Il vertice selezionato diviene il nuovo vertice corrente.

6. **Ottimale**: Il test di ottimalità consiste nel verificare se esiste uno spigolo con tasso positivo di miglioramento. Se tale condizione non è soddisfatta allora la soluzione corrente è ottimale.

Simplesso: Concetti Algebrici

Una variabile di **slack**:

- serve a convertire i vincoli di diseguaglianza in vincoli di uguaglianza;
- è la quantità che manca affinché la diseguaglianza sia verificata con l'uguaglianza;
- se il suo valore è:
    - zero → soluzione del suo vincolo giace sulla frontiera;
    - positivo → soluzione del suo vincolo giace nella regione ammissibile;
    - negativo → soluzione del suo vincolo giace nella regione non ammissibile.

Proprietà di una **soluzione di base**:

1. **Variabile**: una variabile può essere o una variabile di base o una variabile non di base.
2. **Numero**: il numero delle variabili di base eguaglia il numero dei vincoli funzionali (equazioni). Pertanto, il numero delle variabili non di base eguaglia il numero totale delle variabili meno il numero dei vincoli funzionali.
3. **Zero**: le variabili non di base vengono poste a zero.
4. **Valori**: i valori delle variabili di base sono ottenuti come risoluzione simultanea del sistema di equazioni lineari (vincoli funzionali in forma aumentata).
5. **Ammissibile**: se le variabili di base soddisfano i vincoli di non negatività, la soluzione di base è una soluzione ammissibile di base

Due soluzioni di base ammissibili sono **adiacenti** se sono caratterizzate dal condividere le stesse variabili non di base eccetto una. Questo implica che tutte le loro variabili di base sono uguali eccetto una.

Determinazione:

1. della **direzione** di spostamento:
    a. Aumento il valore di una variabile non di base a partire da zero
    b. Scelgo la variabile non di base col maggior tasso di miglioramento
    c. Questa variabile sarà quella che entrerà in base.
2. dell'**incremento**:
    a. Determino di quanto aumentare la variabile entrante in base
    b. L'incremento aumenterà anche il valore della Funzione Obiettivo, ricordandomi che non devo uscire dalla regione ammissibile
    c. Il valore di qualche altra variabile dovrà diminuire di conseguenza
    d. Si usa il test del minimo rapporto per scegliere quale variabile far uscire dalla base
3. della **nuova soluzione di base**:
    a. Convertire il sistema lineare in forma Gaussiana al fine di applicare il test di ottimalità

    b. Applicare eliminazione di Gauss-Jordan
    c. Ottengo una nuova soluzione di base ammissibile

Simplesso: Concetti Tabellari

La forma **tabellare** evita di memorizzare i simboli delle variabili in ogni equazione, ma cosa ancor più importante è rappresentata dal fatto che è possibile evidenziare i numeri che sono coinvolti nelle computazioni ed è possibile memorizzare in modo compatto tali numeri.

Inizializzazione partendo da un PL in forma standard:
- Aggiungere le variabili slack
- Selezionare le variabili di decisione da porre a 0
- Selezionare le variabili slack come variabili di base

Test di ottimalità: soluzione di base è ottimale solo se tutti i coefficienti della sua riga (0) sono non negativi (ci si arresta) → altrimenti iterazione per ottenere una nuova soluzione di base ammissibile (una variabile non di base viene trasformata in una variabile di base e viceversa, ottenendo nuova soluzione)

Iterazione:
1. Passo 1: identificare variabile entrante come quella con il minimo coefficiente negativo (colonna corrispondente viene denominata come colonna pivot)
2. Passo 2: determinare variabile di base uscente tramite il test del rapporto minimo:
    a. selezionare i coefficienti strettamente positivi della colonna pivot
    b. dividere i termini noti per questi coefficienti (riga omologa)
    c. selezionare la riga cui corrisponde il più piccolo rapporto calcolato al punto ii.
    d. la variabile di base di quella riga è la variabile di base uscente, la si rimpiazza con la variabile entrante
3. Passo 3: determinare nuova sol. di base applicando eliminazione Gaussiana
    a. Dividere la riga pivot per il numero pivot, ottenendo un nuovo numero pivot ed una nuova riga pivot.
    b. Ad ogni altra riga (inclusa la riga 0) che abbia coefficiente negativo nella colonna pivot, sommare a questa riga il prodotto del valore assoluto del coefficiente per la nuova riga pivot
    c. Ad ogni altra riga (inclusa la riga 0) che abbia coefficiente positivo nella colonna pivot, sottrarre a questa riga il prodotto del valore assoluto del coefficiente per la nuova riga pivot
4. Passo 4: applico test di Ottimalità (se tutti i coeff. sono non negativi la soluzione corrente è ottimale, altrimenti nuova iterazione)

Simplesso: Tie Breaking

Situazioni nelle quali le regole adottate non portino a decisioni univoche, a causa di casi multipli o di ambiguità di vario genere:
- Alternative multiple per la variabile entrante in base;
- Alternative multiple per la variabile uscente dalla base (degenerazione);
- Mancanza di una variabile uscente (funzione obiettivo illimitata);
- Molteplici soluzioni ottimali.

Alternative multiple per la variabile entrante in base

Se durante il passo 1 dell'iterazione abbiamo più minimi uguali. La scelta di quale variabile debba entrare in base può essere effettuata arbitrariamente. La soluzione ottimale verrà comunque ottenuta, indipendentemente dalla variabile scelta come variabile entrante in base, e non si può prevedere quale scelta condurrà più rapidamente alla soluzione ottimale.

Alternative multiple per la variabile uscente dalla base (degenerazione)

Se durante il passo 2 dell'iterazione abbiamo più minimi uguali, fa differenza la variabile che scegliamo:
- Quando il valore della variabile entrante viene aumentato, le variabili di base selezionabili come variabili uscenti dalla base, raggiungono il valore zero. Pertanto, le variabili non selezionate come variabili uscenti avranno comunque un valore nullo nella nuova soluzione di base.
- Se una variabile degenere mantiene il proprio valore nullo fino ad un'iterazione successiva, dove viene selezionata come variabile uscente, la corrispondente variabile entrante in base deve rimanere nulla (dato che non può essere aumentata senza far assumere un valore negativo alla variabile uscente). Pertanto, il valore della funzione obiettivo resta invariato.
- Se il valore della funzione obiettivo resta costante invece di aumentare ad ogni iterazione, il metodo del simplesso potrebbe entrare in loop, ripetendo la medesima sequenza di soluzioni senza raggiungere la soluzione ottimale.

Mancanza di una variabile uscente (funzione obiettivo illimitata)

Se il valore della variabile entrante può essere aumentato illimitatamente senza implicare che il valore di almeno una variabile di base divenga negativo. Nella forma tabellare significa che ogni coefficiente della colonna pivot, esclusa la riga 0, assume valore non positivo.

Molteplici soluzioni ottimali

Ogni problema di PL che ammetta soluzioni ottimali multiple (con regione ammissibile limitata) ha almeno due vertici ammissibili ottimali. Ogni soluzione ottimale è una combinazione convessa di questi vertici ammissibili ottimali. Di conseguenza, nella forma aumentata del problema di PL, ogni soluzione ottimale risulta essere una combinazione convessa delle soluzioni di base ammissibili ottimali.

Standardizzazione

Minimo → Massimo: cambiare segno alla funzione obiettivo
Equazione → 2 disequazioni: un vincolo di = viene sostituito con due vincoli, uno di >= e uno di <=
Disequazione con >=: cambiare segno al vincolo
Mancanza di vincolo di non negatività: introduzione di due variabili non negative: x_i' e x_i''
Vincolo di negatività: introduzione di una variabile non negativa, tale che $x_i = -x_i'$

Teoria del Simplesso

Dato un problema di PL con n variabili decisionali e regione ammissibile limitata avremo che:

- un **vertice ammissibile** giace all'intersezione di n equazioni di frontiera
- uno **spigolo** della regione ammissibile è un segmento che giace all'intersezione di n-1 equazioni di frontiera, dove ogni vertice estremo giace su un'equazione di frontiera addizionale (tale che gli estremi siano vertici ammissibili)
- due vertici ammissibili sono **adiacenti** se il segmento che li collega è uno spigolo della regione ammissibile
- da ogni vertice ammissibile emanano **spigoli**, ognuno conduce ad uno degli vertici ammissibili adiacenti
- ogni **iterazione** del metodo del simplesso si sposta dal corrente vertice ammissibile ad un vertice ammissibile adiacente muovendosi su questi spigoli

Proprietà dei vertici ammissibili:

1. **Esistenza**:
    a. se esiste solo una soluzione ottimale, allora questa è un vertice ammissibile.
    b. se esistono soluzioni ottime multiple (e la regione ammissibile è limitata) allora almeno due di queste soluzioni sono vertici ammissibili tra loro adiacenti
2. **Finito** : Esiste un numero finito di vertici ammissibili
3. **Ottimale**: Se un vertice ammissibile non ammette vertici ammissibili a lui adiacenti che coincidono con soluzioni con valore migliore della funzione obiettivo , allora non esistono soluzioni ottimali migliori di quella che coincide con il vertice ammissibile in esame.

Insieme **convesso**: collezione di punti tali che, per ogni coppia di punti appartenenti alla collezione, l'intero segmento che collega la coppia di punti, appartiene anch'esso alla colllezione.

Teoria della Dualità

Ogni problema di programmazione lineare ha associato un altro problema di programmazione lineare chiamato **duale**.

Proprietà di dualità **debole**: se x è una soluzione ammissibile per P, e y è una soluzione ammissibile per il corrispondente D, allora vale la seguente diseguaglianza: $cx \leq yb$

Proprietà di dualità **forte**: se x’ è una soluzione ottimale per P, e y’ è una soluzione ottimale per il corrispondente D, allora vale la seguente uguaglianza: $cx' = y'b$

Proprietà delle **soluzioni complementari**: ad ogni iterazione, il metodo del simplesso identifica simultaneamente una soluzione vertice ammissibile x per P e una soluzione complementare y per il D dove $cx = yb$. Se x non è ottimale per P, allora y non è ammissibile per D.

Proprietà delle **soluzioni ottimali complementari:** all’iterazione finale, il metodo del simplesso identifica simultaneamente una soluzione ottimale x’ per P e una soluzione ottimale complementare y’ per D, dove $cx' = y'b$. Le componenti y_i’ sono i prezzi ombra di P.

Un **prezzo ombra** yi* è interpretabile come il contributo al profitto per unità di risorsa "i" quando il corrente insieme di variabili di base viene utilizzato per ricavare la soluzione del primale.

Proprietà di **simmetria**: per ogni P e relativo D, tutte le relazioni tra loro devono essere simmetriche in quanto, il problema duale di D è P, in quanto il problema duale del duale è il problema primale.

Teorema di dualità: le sole relazioni possibili tra P e D sono:

- se un problema ha soluzioni ammissibili e funzione obiettivo limitata, allora la stessa cosa vale per l'altro problema, per cui sia la proprietà debole della dualità che la proprietà forte della dualità sono applicabili;
- se un problema ha soluzioni ammissibili e funzione obiettivo illimitata, allora l'altro problema non ha soluzioni ammissibili.
- se un problema non ha soluzioni ammissibili, allora l'altro problema o non ha soluzioni ammissibili o ha una funzione obiettivo illimitata.

Proprietà delle **soluzioni di base complementari**: estensione alla proprietà delle soluzioni complementari. Ogni soluzione di base di P ha una soluzione di base complementare in D, in modo tale che i rispettivi valori delle funzioni obiettivo (Z e W) siano uguali.

Proprietà delle **soluzioni ottimali complementari aumentate**: estensione alla proprietà delle soluzioni ottimali complementari. Una soluzione di base ottimale x* di P ha una soluzione di base ottimale complementare di D, tale che i valori delle rispettive funzioni obiettivo (Z e W) sono identici.

Proprietà di **complementary slackness** permette di identificare quali siano le variabili di base e quali siano le variabili non di base a partire da una soluzione di base complementare. Dato un problema, avremo le variabili del primale e le variabili del duale associato. Allora:

- Se nel primale abbiamo una variabile di decisione x_j, nel duale associato avremo la variabile surplus z_j - c_j.
- Se nella variabile primale abbiamo una variabile slack xn+1 avremo che nella variabile duale associata avremo una variabile di decisione y_i.

Questa associazione permette di affermare allora che una variabili primale di base avrà associata una non di base nel duale associato, e che le variabili non di base del primale sono di base nel duale associato

Le soluzioni di base sono classificabili secondo due criteri:

- **ammissibilità**: tutte le variabili della soluzione aumentata sono non negative
- **ottimalità**: i coefficienti della riga (0) sono non negativi

Di conseguenza date due soluzioni ci troveremo in 4 casi:

- **né ammissibile né ottimale**: se la soluzione primale risulta inammissibile e la soluzione corrispondente duale anche
- **sub-ottimale**: se la soluzione primale risulta ammissibile mentre la corrispondente duale no
- **super-ottimale**: se la soluzione primale risulta inammissibile e la corrispondente duale ammissibile
- **ottimale** se la soluzione risulta ammissibile per entrambi i problemi

Metodo **SOB** è un metodo utilizzato per poter passare da un problema primale ad un problema duale, evitando di passare da duale non standard, a duale standard, a primale non standard a primale standard. Si sviluppa nei seguenti punti:

1. Se il problema primale è formulato in termini di minimizzazione, il duale sarà in termini di massimizzazione e viceversa
2. Si etichettano le diverse forme di vincoli funzionali e variabili decisionali del primale nella seguente forma. Ponendoci nel problema di massimizzazione avremo la seguente forma:
    a. Sensible: Vincolo funzionale i <= → variabile decisionale i >= 0
    b. Odd: Vincolo funzionale i = → variabile decisionale i non vincolata
    c. Bizarre: Vincolo funzionale i >= → variabile decisionale i' <= 0

    d. Sensible: Variabile decisionale j >= → vincolo funzionale j >=
    e. Odd: Variabile decisionale j non vincolato → vincolo funzionale j =
    f. Bizarre: Variabile decisionale j' <= → vincolo funzionale j <=
3. Per ogni vincolo su una variabile di decisione del duale, utilizziamo la stessa etichetta del vincolo funzionale del primale
4. Per ogni vincolo su un vincolo funzionale del duale, utilizziamo la stessa etichetta della variabile decisionale del primale