

# Probabilità e Statistica per l'Informatica

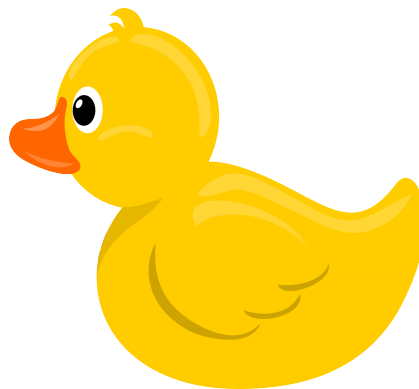
Ver 1.1

**Falbo Andrea**

A.A 2022/2023

Prof. Caravenna

 LilQuacky



# Indice

<b>1</b>	<b>Statistica Descrittiva</b>	<b>3</b>
1.1	Introduzione . . . . .	3
1.2	Descrivere i dati . . . . .	3
1.2.1	Frequenze, Istogrammi, Classi . . . . .	3
1.2.2	Dati Bivariati . . . . .	6
1.3	Riassumere i dati . . . . .	7
1.3.1	Indici di Posizione . . . . .	7
1.3.2	Indici di Dispersione . . . . .	10
1.3.3	Correlazione . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Spazi di Probabilità</b>	<b>12</b>
2.1	Introduzione . . . . .	12
2.2	Assiomi della Probabilità . . . . .	12
2.3	Calcolo Combinatorio . . . . .	14
2.3.1	Disposizioni con Ripetizione . . . . .	14
2.3.2	Disposizioni Semplici . . . . .	14
2.3.3	Combinazioni . . . . .	15
2.4	Probabilità Condizionata . . . . .	16
2.5	Indipendenza di eventi . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Variabili aleatorie</b>	<b>19</b>
3.0.1	Introduzione . . . . .	19
3.1	Variabili Aleatorie Discrete . . . . .	19
3.1.1	Valore Medio di Variabile Aleatoria Discreta . . . . .	21
3.1.2	Varianza e Deviazione Standard . . . . .	21
3.2	Distribuzioni Notevoli Discrete . . . . .	23
3.2.1	Bernoulli . . . . .	23
3.2.2	Binomiale . . . . .	24
3.2.3	Poisson . . . . .	25
3.2.4	Geometrica . . . . .	26
3.3	Var. Aleatorie Assolutamente Continue . . . . .	27

3.3.1	Uniforme Continua . . . . .	28
3.3.2	Esponenziale . . . . .	29
3.3.3	Normale . . . . .	30
3.4	Vettori Aleatori . . . . .	35
3.4.1	Vettori Aleatori Discreti . . . . .	35
3.4.2	Vettori Aleatori Assolutamente Continui . . . . .	36
3.4.3	Indipendenza . . . . .	36
3.4.4	Covarianza e Correlazione . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Teoremi di Convergenza</b>	<b>39</b>
4.1	Teoria . . . . .	39
4.1.1	Campione Aleatorio Casuale . . . . .	39
4.1.2	Teorema del Limite Centrale . . . . .	41
4.1.3	Correzioni di Continuità . . . . .	41
4.2	Pratica . . . . .	42
4.2.1	Formule Utili . . . . .	42
4.2.2	Esercizi . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Statistica Inferenziale</b>	<b>47</b>
5.1	Introduzione . . . . .	47
5.2	Stimatori . . . . .	48
5.2.1	Stima Puntuale . . . . .	48
5.2.2	Distribuzione delle Statistiche Campionarie . . . . .	49
5.3	Stima per Intervalli . . . . .	50

# Capitolo 1

## Statistica Descrittiva

### 1.1 Introduzione

#### Statistica Descrittiva, Statistica Inferenziale e Probabilità

La statistica è l'arte di imparare dai dati. Possiamo suddividerla in:

- **Statistica Descrittiva:** *Describe* e riassume i dati
- **Statistica Inferenziale:** *Trae* conclusioni dai dati

Per poter trarre conclusioni dai dati, bisogna tenere conto del ruolo che gioca il caso. Definiamo quindi la **probabilità** come la descrizione matematica di eventi *casuali*.

### 1.2 Descrivere i dati

#### 1.2.1 Frequenze, Istogrammi, Classi

##### Frequenza Assoluta e Relativa

Misuriamo una certa variabile in un campione, ottenendo un insieme di dati. Se i dati non sono distinti, ovvero *abbiamo ripetizioni*, possiamo riassumerli in una **tabella delle frequenze**. Possiamo definire dunque:

- **Frequenza Assoluta**  $f_i$  := numero di volte in cui  $i$  compare nel campione di dati.
- **Frequenza Relativa**  $p_i$  :=  $f_i/N$  = numero di volte in cui compare  $i$  rispetto al totale.

**Esempio:** Marta intervista i suoi  $N = 20$  compagni di classe e chiede la squadra di calcio preferita, ottenendo le risposte:

*Juve, Milan, Inter, Atalanta, Juve, Milan, Nessuna, Nessuna, Inter, Milan, Juve, Nessuna, Atalanta, Juve, Nessuna, Milan, Inter, Milan, Nessuna, Nessuna.*

Squadre di Calcio		
Valori	Frequenze assolute	Frequenze relative
Juve	4	$4/20 = 0.20$
Milan	5	$5/20 = 0.25$
Inter	3	$3/20 = 0.15$
Nessuna	6	$6/20 = 0.30$
Atalanta	2	$2/20 = 0.10$

## Istogramma

È utile rappresentare le frequenze mediante un grafico a barre detto **istogramma**.

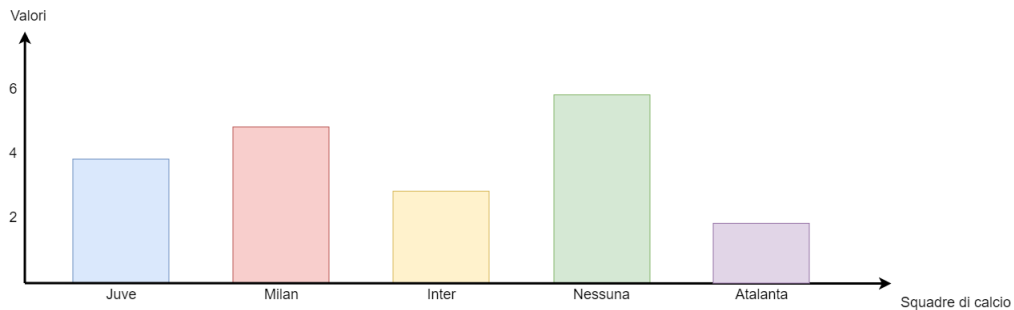


Figura 1.1: Istogramma sulle frequenze assolute delle squadre di calcio

## Classi

Può capitare di avere insiemi di dati che assumono un numero elevato di valori distinti. In tal caso conviene *suddividere* i valori assunti in intervalli detti **classi**.

**Esempio:** Vengono misurati i livelli di colesterolo nel sangue di un insieme di  $N = 40$  individui:

213 174 193 796 220 183 194 200 192 200 200 199 178 183 188 193 187  
181 193 205 196 211 202 213 216 206 195 191 171 194 184 191 221 212  
221 204 204 191 183 227

Molti valori sono distinti e dunque hanno  $f_i = 1$ . Scegliamo le classi:

[170, 180) [180, 190) [190, 200) [200, 210) [210, 220) [220, 230)

Livelli di colesterolo		
Valori	Frequenze assolute	Frequenze relative
[170, 180)	3	$3/40 = 7.5$
[180, 190)	7	$7/40 = 17.5$
[190, 200)	13	$13/40 = 32.5$
[200, 210)	8	$8/40 = 20$
[210, 220)	5	$5/40 = 12.5$
[220, 230)	4	$4/40 = 10$

### 1.2.2 Dati Bivariati

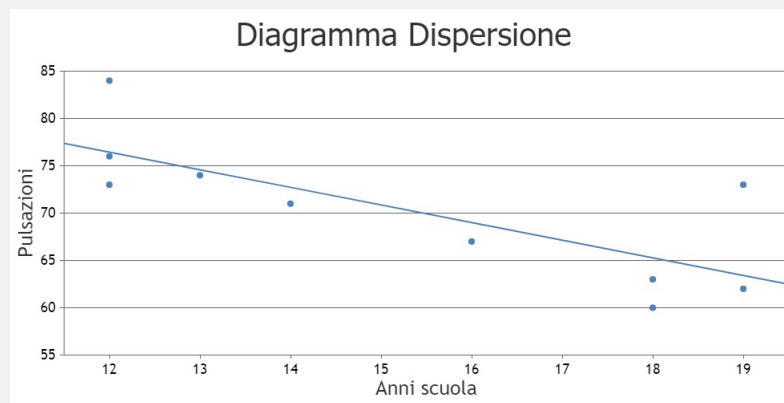
I **dati bivariati** ci permettono di mostrare *due variabili* per ogni singolo elemento dell'insieme. Per un elemento  $i$ , indichiamo con  $x_i$  la prima variabile e con  $y_i$  la seconda.

#### Diagramma Di Dispersione

Un **diagramma di dispersione** rappresenta i punti  $(x_i, y_i)$ , in modo da evidenziare una possibile *correlazione* tra i due valori.

**Esempio:** Rileviamo il numero di anni di scuola (prima variabile) e le pulsazioni a riposo (seconda variabile) in un campione di  $N=10$  individui. I dati  $(x_i, y_i)$  sono

(12,73) (16,67) (13,74) (18,63) (19,73) (12,84) (18,60) (19,62) (12,76)  
(14,71)



Possiamo evidenziare una correlazione negativa tra i due valori.

## 1.3 Riassumere i dati

Una **statistica** campionaria riassume l'insieme di dati mediante una quantità numerica.

### 1.3.1 Indici di Posizione

Un **indice di posizione** *sintetizza la posizione* di una distribuzione sostituendo l'insieme dei dati con un unico valore tale da fornire una rappresentazione globale.

#### Media Campionaria

Per definire il valore medio dell'insieme dei dati, definiamo la **media campionaria** come

$$\bar{x} := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i$$

In generale, sapendo le frequenze assolute dei valori, possiamo scrivere la media campionaria come

$$\bar{x} = \frac{z_1 \cdot f_1 + z_2 \cdot f_2 + \cdots + z_M \cdot f_M}{N}$$

con  $N = f_1 + f_2 + \cdots + f_M$ , dove  $z_i$  sono i valori e  $f_i$  sono le frequenze assolute associate.

**Osservazione:** La media è lineare:  $\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$

#### Mediana Campionaria

Un'altra misura del centro dell'insieme dei dati è la **mediana campionaria**, ovvero quel valore che, ordinati i dati, si trova in *posizione centrale*. In base al numero di dati, si calcola in due modi:

- **N dispari:** la mediana è il dato di posto  $\frac{N+1}{2}$  :

$$m := x_{\left(\frac{N+1}{2}\right)}$$

- **N pari:** la mediana è la media aritmetica tra il dato di posto  $\frac{N}{2}$  e quello di posto  $\frac{N}{2} + 1$  :

$$m := \frac{x_{\left(\frac{N}{2}\right)} + x_{\left(\frac{N}{2}+1\right)}}{2}$$



## Percentile Campionario

Fissiamo un numero  $k \in [0, 100]$ . Definiamo il **k-esimo percentile campionario** il valore  $t$  per cui:

- almeno il  $k\%$  dei dati è  $\leq t$
- almeno il  $(100 - k)\%$  dei dati è  $\geq t$

## Quartili

I casi più importanti sono:

- **Primo Quartile**  $q_1$ :  $p = \frac{1}{4}$ ,  $k = 100p$
- **Secondo Quartile**  $q_2$ :  $p = \frac{1}{2}$ ,  $k = 100p$
- **Terzo Quartile**  $q_3$ :  $p = \frac{3}{4}$ ,  $k = 100p$

Come per la mediana, si calcola in due modi:

- Se  $N \cdot p$  non è intero,  $t = x_{(i)}$  è il dato di posizione  $i$  definito come l'intero successivo a  $N \cdot p$
- Se  $N \cdot p$  è intero,  $t = \frac{x_{(N \cdot p)} + x_{(N \cdot p + 1)}}{2}$

**Esempio:** Ai 1000 abitanti di un piccolo comune viene chiesto di esprimere un giudizio su un nuovo servizio comunale, usando una scala da 0 a 4. 251 persone hanno votato 0, 260 persone hanno votato 1, 80 persone hanno votato 2, 154 persone hanno votato 3 mentre 255 persone hanno votato 4

Vogliamo calcolare i 3 indici di posizione: Media, Mediana, Quartili.

- **Media:**  $\bar{x} = \frac{0 \cdot 251 + 1 \cdot 260 + 2 \cdot 80 + 3 \cdot 154 + 4 \cdot 255}{1000} = 1,902 \simeq 1,9$

- **Mediana:**  $m = \frac{x_{(500)} + x_{(501)}}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$

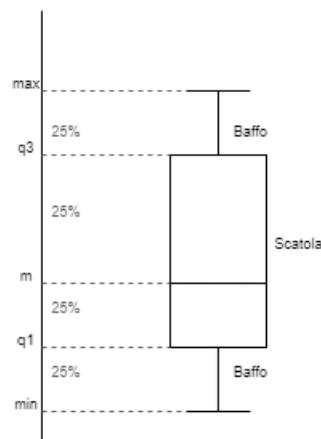
- **Primo quartile:**  $1000 \cdot \frac{1}{4} = 250, q_1 = \frac{x_{(250)} + x_{(251)}}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0$

- **Secondo quartile:** mediana = 1

- **Terzo quartile:**  $1000 \cdot \frac{3}{4} = 750, q_3 = \frac{x_{(750)} + x_{(751)}}{2} = \frac{4 + 4}{2} = 4$

## Box Plot

Una rappresentazione grafica di mediana e quartili viene fornita dal **box plot**:



### 1.3.2 Indici di Dispersione

Un **indice di dispersione** descrive la *variabilità di distribuzione* quantitativa dei dati, ovvero quanto i valori presenti distano da un valore centrale.

#### Scarti

Gli **scarti** sono la distanza di ogni singolo elemento dal valore medio. La somma di tutti gli scarti è nulla.

$$w := (x_i - \bar{x})$$

#### Varianza Campionaria

Considerando gli scarti elevati al quadrato e facendone una sorta di media, otteniamo la **varianza campionaria** come:

$$s^2 := \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

#### Deviazione Standard

Per ottenere una statistica omogenea ai dati, si definisce **deviazione standard** come:

$$s := \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

#### Scarto Interquartile

Un altro indicatore di dispersione rispetto alla mediana  $m$  è lo **scarto interquartile**. Per costruzione, questo intervallo contiene almeno il 50% dei dati. Il suo valore è:

$$IQR = \Delta := q_3 - q_1$$

**Osservazione:** La varianza e la deviazione standard non sono lineari.

### 1.3.3 Correlazione

Consideriamo un insieme di dati bivariati. Vogliamo quantificare la correlazione tra le due variabili  $x$  e  $y$ , ossia la *tendenza* per cui a valori di  $x$  grandi corrispondo valori di  $y$  grandi o piccoli. Definiamo quindi il **coefficiente di correlazione lineare**:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(N-1) \cdot s_x \cdot s_y} \quad \text{oppure} \quad r = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i - N \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{(N-1) \cdot s_x \cdot s_y}$$

Il coefficiente di correlazione lineare può assumere valori  $\in [-1, 1]$ . Nello specifico diremo che:

- $|r| \gtrsim 0,7$  avremo correlazione *significativa*
- $|r| \lesssim 0,3$  avremo correlazione *debole*.

**Esercizio Completo:** Prendiamo un campione di  $N = 10$  elementi e assegnamo  $x$  = numero anni di scuola e  $y$  = pulsazioni. Otteniamo i seguenti valori

(12, 73) (16, 67) (13, 74) (18, 63) (19, 73) (12, 84) (18, 60) (19, 62)  
(12, 76) (14, 71)

Calcoliamo  $\bar{x}, m, s^2, s, r$ .

$$\cdot \bar{x} = \frac{12+16+13+18+19+19+12+18+19+12+14}{10} = 15,3$$

$$\cdot s_x^2 = \frac{(12+16+13+18+19+19+12+18+19+12+14)^2 - 10 \cdot (15,3)^2}{9} \simeq 9,12$$

$$\cdot s_x = \sqrt{s_x^2} \simeq 3,02$$

$$\cdot \bar{y} = \frac{73+67+74+63+73+84+60+62+76+71}{10} = 70,3$$

$$\cdot s_y^2 = \frac{(73+67+74+63+73+84+60+62+76+71)^2 - 10 \cdot (70,3)^2}{9} \simeq 54,23$$

$$\cdot s_y = \sqrt{s_y^2} \simeq 7,36$$

$$\cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i = 12 \cdot 73 + 16 \cdot 67 + 13 \cdot 74 + \dots + 14 \cdot 71 = 10603$$

$$\cdot r = \frac{10603 - 10 \cdot 15,3 \cdot 70,3}{9 \cdot 3,02 \cdot 7,36} \simeq -0,76$$

Il valore di  $r$  conferma che  $x$  e  $y$  mostrano una significativa correlazione negativa

# Capitolo 2

## Spazi di Probabilità

### 2.1 Introduzione

Il **calcolo delle probabilità** è una teoria matematica che permette di descrivere gli *esperimenti aleatori*, ovvero fenomeni il cui esito non è prevedibile con certezza a priori.

### 2.2 Assiomi della Probabilità

#### Spazio Campionario, Evento, Probabilità

La descrizione matematica di esperimento aleatorio si descrive in 3 passi:

1. **Spazio Campionario:** Insieme  $\Omega$  che contiene tutti i possibili esiti dell'esperimento.
2. **Eventi:** Affermazioni sull'esito dell'esperimento aleatorio.  $A \subseteq \Omega$ .
3. **Probabilità:** Funzione  $P$  che associa a ogni evento  $A \subseteq \Omega$  un valore  $\in [0, 1]$  che soddisfa opportune proprietà. Ci sono almeno due interpretazioni su che cos'è  $P(A)$ :
  - **Soggettivista:**  $P(A)$  = prezzo equo di una scommessa che paga 1 se si verifica  $A$ , altrimenti 0.
  - **Frequentista:**  $P(A)$  = frazione asintotica di volte in cui si verifica  $A$  ripetendo l'esperimento.

In ogni caso la probabilità deve soddisfare due proprietà:

- $P(\Omega) = 1$
- Se  $A$  e  $B$  sono eventi disgiunti, cioè  $A \cap B = \emptyset$ , allora:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**Esempio:** Se prendiamo in considerazione un dado a sei facce, avremo:

- Spazio Campionario:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Evento:  $A = \text{esce un numero pari} = \{2, 4, 6\}$
- Probabilità di  $A = 0.5 = 50\%$

La coppia  $(\Omega, P)$  è detta **spazio di probabilità**.

Indichiamo con  $|A|$  la cardinalità di un insieme  $A$ . La **probabilità uniforme** su un insieme finito  $\Omega$  si definisce come:

$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Abbiamo dunque che per ogni  $w \in \Omega$ ,  $P(w) = \frac{1}{|\Omega|}$

### Proprietà di base

Fissiamo uno spazio di probabilità  $(\Omega, P)$ . Valgono le seguenti proprietà:

1. **Insieme Vuoto:**  $P(\emptyset) = 0$
2. **Regola del complementare:**  $P(A^C) = 1 - P(A)$
3. **Regola dell'addizione di probabilità:**  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. **Monotonia:** se  $A \subseteq B$  allora  $P(A) \leq P(B)$

## 2.3 Calcolo Combinatorio

In uno spazio di probabilità uniforme, calcolare una probabilità significa contare gli elementi di un insieme. Contare è un problema non banale per insiemi grandi. Le tecniche di conteggio formano il **Calcolo combinatorio**.

**Principio fondamentale:** Consideriamo un esperimento costituito da due parti:

1. prima parte:  $n$  esiti possibili
2. seconda parte:  $m$  esiti possibili

Allora l'esperimento totale può avere  $n \cdot m$  esiti possibili.

**Esempio:** Se lancio due dadi a 6 facce ho  $\Omega = 6^2 = 36$  esiti possibili, se lancio tre dadi a 6 facce ho  $\Omega = 6^3 = 216$  esiti possibili ecc.

### 2.3.1 Disposizioni con Ripetizione

Le **disposizioni con ripetizioni** sono sequenze ordinate di  $k$  elementi, *anche ripetuti*, scelti tra  $n$  possibili. Sono in numero

$$n^k$$

**Esempio:** Estraggo casualmente  $k$  persone: qual è la probabilità che siano nate tutte e  $k$  in primavera?

$$|\Omega| = 365^k$$

$A = \text{"Tutti nati in primavera"} = \text{"20 marzo - 20 giugno"} = 92 \text{ giorni}$

$$|A| = 92^k$$

$$P(A) = \left(\frac{92}{365}\right)^k \simeq \frac{1}{4^k}$$

### 2.3.2 Disposizioni Semplici

Le **disposizioni semplici** sono sequenze ordinate di  $k$  elementi **distinti** scelti tra  $n$  possibili. Sono in numero

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

**Osservazione:** Se  $n=k$  si parla di permutazioni, in questo caso sono in numero  $n!$

**Esempio:** Estraggo casualmente  $k$  persone: qual è la probabilità che almeno due abbiano lo stesso compleanno?

$$|\Omega| = 365^k$$

$A$  = "almeno due persone hanno lo stesso compleanno"

$A^C$  = "tutti hanno compleanni distinti"

$$P(A^C) = 365 \cdot 364 \cdots (365 - k + 1)$$

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{|A^C|}{|\Omega|} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - k + 1)}{365^k} = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdots \frac{(365 - k + 1)}{365}$$

- con  $K=10$  persone avremo il 12% di trovare due persone con lo stesso compleanno.
- con  $K=23$  persone avremo il 50% di trovare due persone con lo stesso compleanno.
- con  $K=50$  persone avremo il 97% di trovare due persone con lo stesso compleanno.

### 2.3.3 Combinazioni

Fino ad ora abbiamo considerato l'ordine importante. Ad esempio, nel lancio di due dadi,  $(2,5) \neq (5,2)$ . Le combinazioni si possono ottenere dalle disposizioni semplici dimenticando l'ordine degli elementi.

Le **combinazioni** sono collezioni *non ordinate* di  $k$  elementi distinti scelti tra  $n$  possibili. Sono in numero

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Esempio:** In una mano a Poker un giocatore riceve 5 carte su un mazzo di 52. Le possibili combinazioni sono quindi

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5! \cdot 47!} = 2.598.960$$



## 2.4 Probabilità Condizionata

Consideriamo uno spazio di probabilità  $(\Omega, P)$ . Consideriamo un evento  $A \subseteq \Omega$  con probabilità  $P(A)$ . Supponiamo di ricevere informazioni su un evento  $B$  che si è verificato.

La **probabilità condizionata** è l'aggiornamento della probabilità di  $A$  dopo un *informazione aggiuntiva*. la probabilità condizionata di  $A$  dato  $B$  si scrive come

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Esempio:** Qual è la probabilità che la somma di due dadi a 6 facce valga 4, sapendo che il primo dado vale 2?

$$|\Omega| = 6^2 = 36$$

$$A = \text{"la somma vale 4"} = (1,3) (2,2) (3,1), |A| = 3$$

$$B = \text{"il primo vale 2"} = (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), |B| = 6$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1}{6} \simeq 16,7\%$$

### Proprietà

- **Regola del prodotto:**  $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$
- **Formula di disintegrazione:**  $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$
- **Formula delle probabilità totali:**  $P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^C) \cdot P(B^C)$
- **Secondo elemento fissato:**  $P(*|B)$  è una probabilità:  $P(A^C|B) = 1 - P(A|B)$
- **Formula di Bayes:**  $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$

**Esempio:** Per rilevare la presenza di un virus viene effettuato un test con le seguenti caratteristiche:

- Sensibilità: se il virus è presente, il test dà esito positivo al 99%
- Specificità: se il virus è assente, il test dà esito negativo al 99.7%
- Prevalenza: è noto che 4 persone su 1000 hanno il virus.

Estraendo un cittadino a caso, qual è la probabilità che l'esito sia positivo? E qual è la probabilità che abbia effettivamente il virus se l'esito è positivo?

Introduciamo gli eventi e le relative probabilità:

- A: "il test dà esito positivo"
- B: "l'individuo ha il virus"
- $P(A|B) = 0.99$
- $P(A^C|B^C) = 0.997$
- $P(B) = 0.004$

Dai seguenti valori ricaviamo che:

- $P(A|B^C) = 1 - P(A^C|B^C) = 1 - 0.997 = 0.003$
- $P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - 0.004 = 0.996$

Ora possiamo usare la formula delle probabilità totali per trovare  $P(A)$ , ovvero la probabilità che il test sia positivo:

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^C) \cdot P(B^C) \simeq 0,004 + 0,003 = 0.007$$

Adesso vogliamo sapere  $P(B|A)$ , ovvero la probabilità che abbia effettivamente il virus se risulta positivo al test, e per farlo usiamo la Formula di Bayes:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{0.99 \cdot 0.004}{0.007} \simeq 57\%$$

## 2.5 Indipendenza di eventi

Due eventi sono **indipendenti** se al verificarsi di uno, la probabilità che si verifichi l'altro non cambia:

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Esempio:** Consideriamo

A = "il primo dado vale 2" e C = "somma = 7" e D = "somma = 4".

A = {(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)} |A| = 6 P(A) = 1/6

C = {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)} |C| = 6 P(C) = 1/6

D = {(1, 3), (2, 2), (3, 1)} |D| = 3 P(D) = 1/12

$A \cap C = \{(2, 5)\}$  |A ∩ C| = 1 P(A ∩ C) = 1/36

Dato che  $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$  A e C sono indipendenti

$A \cap D = \{(2, 2)\}$  |A ∩ D| = 1 P(A ∩ D) = 1/36

Dato che  $P(A \cap D) \neq P(A) \cdot P(D)$  A e D sono dipendenti

**Osservazione:** Se A e B sono indipendenti, lo sono anche A e B<sup>c</sup>, A<sup>c</sup> e B, A<sup>c</sup> e B<sup>c</sup>

**Osservazione:** Eventi indipendenti ≠ eventi disgiunti! Due eventi indipendenti non possono essere disgiunti.

### Estensioni

Tre eventi A,B,C si dicono indipendenti se valgono *tutte* le seguenti regole:

- $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

# Capitolo 3

## Variabili aleatorie

### 3.0.1 Introduzione

Consideriamo uno spazio di probabilità  $(\Omega, P)$ . Spesso non siamo interessati a tutti i dettagli dell'esito dell'esperimento, ma solo a una *quantità determinata dall'esito* dell'esperimento. Tale quantità è detta **variabile aleatoria**. Una variabile aleatoria può essere descritta come una **funzione**  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$

**Osservazione:** Evento e variabile aleatoria sono diverse ma in relazione. Ogni variabile aleatoria mi permette di determinare più eventi. Sia  $X$  una variabile aleatoria e  $x$  un suo possibile valore:  $\{X = x\}$  è un evento.

### 3.1 Variabili Aleatorie Discrete

Una variabile aleatoria  $X$  si dice **discreta** se i valori che può assumere sono un insieme finito o un insieme infinito numerabile.

Ad ogni variabile aleatoria discreta  $X$  possiamo associare un indice chiamato **Densità Discreta**:

$$P_X(x_i) := P(X = x_i)$$

#### Proprietà

- Se  $x$  non è un valore assunto da  $X$ , si pone  $P_X(x) := 0$
- $P_X$  è una funzione da  $\mathbb{R}$  a  $[0, 1]$
- $P_X(x_i) \geq 0$

$$\cdot \sum_{i \geq 1} P_X(x_i) = 1$$

**Osservazione:** La densità discreta ci risulta utile quando ci interessa sapere la densità di un sottoinsieme:

$$P(X \in B) = \sum_{x_i \in B} P_X(x_i)$$

**Esempio:** Una pasticceria prepara 3 torte al giorno. Sappiamo che:

- il 20% dei giorni nessun cliente ordina una torta
- il 30% dei giorni un cliente ordina una torta
- il 35% dei giorni due clienti ordinano una torta
- il restante dei giorni tre o più clienti ordinano una torta

Sia  $X$  il numero di torte invendute.

1. Qual è la densità discreta di  $X$ ?
2. Qual è la probabilità  $q$  che il numero di torte invendute sia pari?

Sappiamo che:

- $P_X(3) = P(X = 3) = 20\%$
- $P_X(2) = P(X = 2) = 30\%$
- $P_X(1) = P(X = 1) = 35\%$

Ricaviamo che

$$P_X(0) = P(X = 0) = 1 - P(X = 3) - P(X = 2) - P(X = 1) = 15\%$$

La probabilità che il numero di torte invendute sia pari è

$$P_X(0) + P_X(2) = 45\%$$

### 3.1.1 Valore Medio di Variabile Aleatoria Discreta

Sia  $X$  una variabile aleatoria discreta. Si definisce **valore medio di  $X$** :

$$E[X] := \sum_{i=1}^N x_i \cdot p_X(x_i)$$

#### Proprietà Valore Medio

Per ogni variabile aleatoria  $X, Y$  e per ogni costante  $c \in \mathbb{R}$  avremo:

- *Traslazione*:  $E[X + c] = E[X]$
- *Moltiplicazione*:  $E[c \cdot X] = c \cdot E[X]$
- *Somma*:  $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
- *Formula di trasferimento*:  $E[f(x)] = \sum_{i=1}^N f(x_i) \cdot P_X(x_i)$

#### Osservazioni

- Il valore medio è un operatore *lineare*:  $E[Z] = X + c$ .
- *Momento Secondo*:  $E[X^2] = \sum_{i=1}^N (x_i)^2 \cdot P_X(x_i)$
- Il valore medio  $E[X]$  non è necessariamente un valore  $x_i$  assunto da  $X$
- Il valore medio  $E[X]$  è quel valore tale per cui se ripetiamo un esperimento più volte, la media di tale esperimenti si avvicinerà a  $E[X]$ . Questo fenomeno è detto **Legge dei Grandi Numeri**:

$$\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \simeq E[X]$$

### 3.1.2 Varianza e Deviazione Standard

Sia  $X$  una variabile aleatoria discreta e  $\mu = E[X]$ . Definiamo la **varianza** come:

$$Var[X] := E[(X - \mu)^2]$$

A livello di calcolo, risulta più semplice utilizzare la formula:

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

Definiamo la *deviazione standard* come:

$$Sd[X] := \sqrt{Var[X]}$$

## Proprietà della Varianza

Per ogni variabile aleatoria  $X$  e per ogni costante  $c \in \mathbb{R}$  avremo:

- $\text{Var}[X + c] = \text{Var}[X]$
- $\text{Var}[c \cdot X] = c^2 \text{Var}[X]$

**Esempio Completo:** Sia  $X$  il numero di figli maschi in una famiglia con due figli. Trovare:  $P_X, E[X], \text{Var}[X], \text{Sd}[X]$   
*Spazio Campionario*

$$\Omega = \{MM, MF, FM, FF\}$$

*Densità Discreta*

$$P_X(2) = \frac{1}{4} \quad P_X(1) = \frac{1}{2} \quad P_X(0) = \frac{1}{4}$$

*Valore Medio*

$$E[X] = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

*Momento Secondo*

$$E[X^2] = 0^2 \cdot P(X=0) + 1^2 \cdot P(X=1) + 2^2 \cdot P(X=2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \cdot \frac{3}{2}$$

*Varianza*

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

*Deviazione Standard*

$$\sqrt{\text{Var}[X]} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

## Variabili Indipendenti

Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie. Il valore della loro somma dipende da come sono "legate":

- Consideriamo  $Y = X$ . Allora  $\text{Var}[Y] = \text{Var}[X]$ , quindi

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[2X] = 4 \cdot \text{Var}[X]$$

- Consideriamo invece  $Y = -X$ . Allora

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X - X] = \text{Var}[0] = 0$$

Gli esempi precedenti sono casi estremi di dipendenza. Definiamo invece  $X$  e  $Y$  come variabili **indipendenti** se gli eventi  $\{X = x\}$  e  $\{Y = y\}$  sono indipendenti, ovvero

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

**Definizione:** Se  $X$  e  $Y$  sono indipendenti allora

$$Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$$

## 3.2 Distribuzioni Notevoli Discrete

Consideriamo una variabile aleatoria  $X$  in un certo esperimento aleatorio:  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Possiamo calcolare  $P(X \in A)$  per ogni  $A \subseteq \mathbb{R}$ . L'insieme di tali probabilità definisce la **Distribuzione della variabile aleatoria  $X$** .

**Osservazione:** Per variabili aleatorie discrete, la distribuzione di  $X$  è determinata dalla densità discreta e quindi, con abuso di notazione, si può dire che la distribuzione è la densità discreta.

### 3.2.1 Bernoulli

Variabile aleatoria  $X$  che può assumere soltanto i valori 0 e 1. Scriveremo  $X \sim \text{Be}(p)$ . Sia  $p := P(X = 1)$ . Dato che

$$\sum_{i=1}^N P_X(x_i) = P_X(0) + P_X(1) = 1$$

si ottiene:

$$P(X = x) = \begin{cases} p & \text{se } x = 1 \\ (1 - p) & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Allora, nel caso della variabile aleatoria di Bernoulli troviamo che:

- Il **valore medio**  $E[X] = p$ .
- La **varianza**  $Var[X] = p(1 - p)$



### 3.2.2 Binomiale

Consideriamo un esperimento aleatorio costituito da prove ripetute ed indipendenti dove abbiamo solo due esiti. Siano  $n$  il numero di prove e  $p$  la probabilità di successo di ciascuna e  $X$  il numero di successi.

La distribuzione di  $X$  è detta **binomiale** di parametri  $n$  e  $p$  indicata con  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ . La densità discreta è data da:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

dove:

- $P(X = k)$  è esattamente il numero  $k$  di successi in  $n$  prove
- $p^k$  è la probabilità di  $k$  successi fissati
- $(1 - p)^{n-k}$  è la probabilità di  $(n - k)$  insuccessi fissati
- $\binom{n}{k}$  scelte di quali prove hanno successo

Introduciamo le variabili:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima prova ha successo} \\ 0 & \text{se la } i\text{-esima prova non ha successo} \end{cases} \quad (3.2)$$

Possiamo allora scrivere:

$$X = \sum_{i=1}^N X_i$$

Avremo che ogni  $X_i \sim \text{Be}(p)$  e quindi sappiamo valore medio e varianza. Otteniamo allora:

- **Valore medio**  $E[X] = n \cdot p$
- **Varianza**  $\text{Var}[X] = n \cdot p \cdot (1 - p)$

**Esempio:** Sia  $X$  numero di figli maschi in una famiglia con 2 figli. Abbiamo  $\Omega = \{MM, MF, FM, FF\}$  e avremo :

$$P_X(0) = \frac{1}{4} \quad P_X(1) = \frac{1}{2} \quad P_X(2) = \frac{1}{4}$$

Allora  $X \sim \text{Bin}(2; \frac{1}{2})$ :

$$P_X(k) = \binom{2}{k} \cdot \frac{1}{2}^k \cdot \frac{1}{2}^{2-k} = \frac{2}{k! \cdot (2-k)!} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k! \cdot (2-k)!}$$

Infatti, se sostituiamo  $k=0$ , ritroveremo  $P_X(0) = \frac{1}{4}$ , se  $k=1$  avremo  $P_X(1) = \frac{1}{2}$  e con  $k=2$  avremo  $P_X(2) = \frac{1}{4}$

### 3.2.3 Poisson

Una variabile aleatoria  $X$  si dice di Poisson di parametro  $\lambda \in (0, \infty)$  ovvero  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$  se  $X(\Omega) = \mathbb{N}_0$  e

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

**Approssimazione di Poisson:** Possiamo ottenere  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$  attraverso una variabile aleatoria binomiale  $Y \sim \text{Bin}(n, p)$  quando:

$$n \rightarrow \infty \quad p \rightarrow 0 \quad \text{allora} \quad n \cdot p = \lambda$$

Allora avremo che:

- Il **Valore medio**  $E[X] = \lambda$
- La **Varianza**  $\text{Var}[X] = \lambda$

**Osservazione:** Le variabili aleatorie di Poisson sono approssimazioni per variabili aleatorie che contano il numero di successi quando si considera una grande quantità di prove la cui probabilità di successo è piccola.

**Esempio:** In un ospedale nascono mediamente 2,2 bambini ogni giorno. Qual è la probabilità che nessun bambino nasca in ogni giorno. E qual è la probabilità che ne nascono più di 3?  
Sia  $X$  il numero di nascite in un giorno. Supponiamo  $X \sim Pois(\lambda)$ . Sappiamo che  $E[X] = \lambda$  e per ipotesi  $E[X] = 2,2$ . calcoliamo:

$$\begin{aligned} \cdot P(X = 0) &= e^{-\lambda} \cdot \frac{e^0}{0!} = e^{-2,2} \simeq 11\% \\ \cdot P(X > 3) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) = \\ &= 1 - e^{-\lambda} \left( 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6} \right) = 18\% \end{aligned}$$

### 3.2.4 Geometrica

Una variabile aleatoria  $X$  si dice **Geometrica** di parametro  $p \in (0, 1]$  e si scrive  $X \sim Geo(p)$  se

$$P(X = k) = p \cdot (1 - p)^{k-1}$$

**Osservazione:** Se  $p$  è 1, allora possiamo dire che, per quanto piccola sia la probabilità, l'evento prima o poi accadrà.

Possiamo ottenere una variabile aleatoria geometrica partendo da una successione di prove ripetute dove consideriamo  $T$  l'istante del primo successo. Avremo che

$$P(T = k) = P(X_1 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = 1) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$$

Allora troviamo:

$$\begin{aligned} \cdot \text{il Valore medio } E[X] &= \frac{1}{p} \\ \cdot \text{la Varianza } Var[X] &= \frac{1 - p}{p^2} \end{aligned}$$

**Osservazione:** Possiamo calcolare la probabilità di coda:

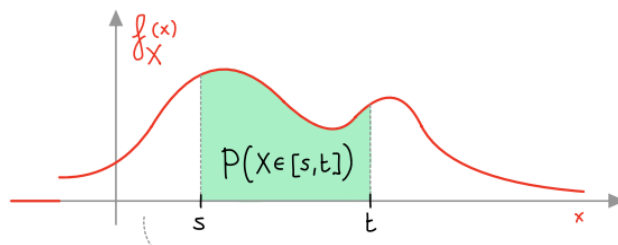
$$P(T > n) = (1 - p)^n \quad P(T \leq n) = \sum_{k=1}^n P_T(k) = 1 - (1 - p)^n$$

### 3.3 Var. Aleatorie Assolutamente Continue

Consideriamo una classe complementare di variabili aleatorie, dette **assolutamente continue**, che assumono un insieme *infinito più che numerabile di valori*, come ad esempio un intervallo in  $\mathbb{R}$ .

Una variabile  $X$  è assolutamente continua se la sua distribuzione è determinata da una funzione  $f_X(x)$  a valori positivi detta **densità della variabile aleatoria  $X$**  nel modo seguente:

$$P(X \in [s, t]) = \int_s^t f_X(x) dx$$



**Osservazione:** Troviamo una analogia tra una variabile aleatoria discreta ed una assolutamente continua:

$$\text{V.A. discreta: } \sum_{x \in [s, t]} P_X(x_i) \quad \text{V.A. assolutamente continua: } \int_s^t f_X(x)$$

Notiamo anche delle differenze importanti: se  $X$  è assolutamente continua  $\forall x \in \mathbb{R} : P(X = x) = 0$ . In particolare, tranne per  $f_X(x) = 0$ :

$$f_X(x) \neq P(X = x)$$

#### Densità

La **densità** di una variabile aleatoria assolutamente continua  $X$  è una funzione  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile tale che:

$$f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

#### Valore medio e varianza di v.a. assolutamente continue

Le definizioni di valore medio e varianza di v.a. assolutamente continue ricalcano quelle delle v.a. discrete:

- $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$
- $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$
- $Sd[X] = \sqrt{Var[X]}$

Anche le proprietà definite per le variabili discrete continuano a valere.

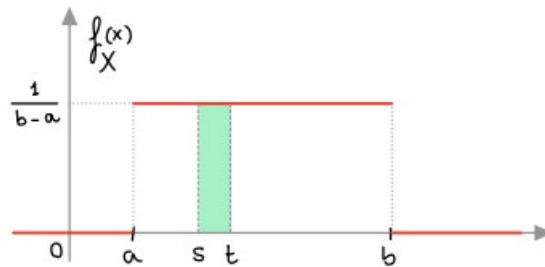
### 3.3.1 Uniforme Continua

Una variabile aleatoria  $X$  è **uniforme continua in  $[0,1]$**  e si indica con  $X \sim U(0,1)$  se è definita da una funzione:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{se } x \notin [0,1] \end{cases} \quad (3.3)$$

Una variabile aleatoria  $X$  è **uniforme continua in  $[a,b]$**  e si indica con  $X \sim U(a,b)$  se è definita da una funzione:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } x \in [a,b] \\ 0 & \text{se } x \notin [a,b] \end{cases} \quad (3.4)$$



Dato un intervallo  $[s, t] \subseteq [a, b]$  avremo che

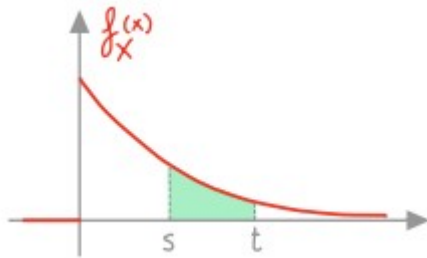
$$P(X \in [s, t]) = \int_s^t f(x) dx = \int_s^t \frac{1}{b-a} dx = \frac{t-s}{b-a}$$

**Osservazione:** Poiché la variabile aleatoria uniforme continua assume un'infinita quantità di valori in un intervallo continuo  $[0,3]$ , la probabilità di ottenere un valore specifico  $x$  è zero. In altre parole, la probabilità di ottenere un risultato esatto in una variabile aleatoria continua è sempre zero.

### 3.3.2 Esponenziale

Una variabile aleatoria **esponenziale** è spesso utilizzata per descrivere il tempo tra gli arrivi di eventi casuali indipendenti di un processo di Poisson. Misuriamo il tempo medio di evento come  $\tau$ , avremo che  $\lambda = \frac{1}{\tau}$ . La funzione che la descrive è

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (3.5)$$



Una variabile aleatoria  $X$  con tale densità è detta esponenziale di parametro  $\lambda \in (0, \infty)$  e si scrive  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Avremo che:

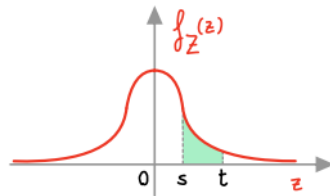
- $P(X \in [s, t]) = \int_s^t f_X(x) dx = e^{-\lambda \cdot s} - e^{-\lambda \cdot t}$
- $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- $\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

### 3.3.3 Normale

Abbiamo già visto due classi notevoli assolutamente continue: uniforme continua ed esponenziale. Consideriamo ora la più importante: **variabili aleatorie normali** (o gaussiane).

Una variabile aleatoria  $X$  si dice **normale standard** e si indica con  $Z \sim N(0, 1)$  se è assolutamente continua e ha densità:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)}$$



Una variabile aleatoria normale standard avrà:

- $E[Z] = 0$
- $\text{Var}[Z] = 1$
- $P(Z \in [s, t]) = \int_s^t f_Z(z) dz$

Purtroppo l'integrabile non è calcolabile, allora si introduce la **funzione di ripartizione di  $Z$**  indicata con:

$$\Phi(z) := F_Z(z) = P(Z \leq z) = \int_s^t f_Z(t) dt$$

Anche questa non è calcolabile esplicitamente ma i valori che può assumere sono riportati in una tabella.

$z$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	0.99995	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	0.99997									
5.0	0.9999997									
6.0	0.999999990									

**Osservazione:** per valori negativi si applica la formula:

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$



Una variabile aleatoria  $X$  si dice **normale** con media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$  e si scrive con  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  se  $X$  è assolutamente continua con:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

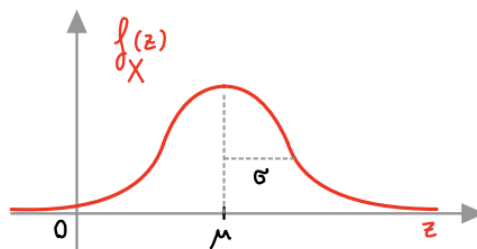


Figura 3.1: grafico a campana centrato in  $\mu$  di ampiezza  $\sigma^2$

**Osservazione:** Ci si può sempre ricondurre da una variabile normale ad una normale standard e viceversa:

- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow Z := \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$
- $Z \sim N(0, 1) \rightarrow X := \sigma \cdot Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$

**Osservazione:** Da questi trasformazioni, se abbiamo  $X$  v.a. normale standard, allora  $Z$  v.a. normale ha media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow E[Z] = \mu \quad Var[Z] = \sigma^2$$

### Teoremi

Se  $X$  è normale,  $Y = a \cdot X + b$  è normale.

Se  $X$  e  $Y$  sono normali indipendenti allora  $X + Y$  è normale

**Esempio:**  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim N(0, 1)$  allora

$$X + Y \sim N(0, 2) \quad X - Y = X + (-1) \cdot (Y) \sim N(0, 2)$$

## Funzione di ripartizione

Finora abbiamo studiato le v.a. discrete e assolutamente continue. Introduciamo un nuovo oggetto per v.a. generica: **funzione di ripartizione**

$$F_X(x) := P(X \leq x)$$

- $F_X$  è ben definita per ogni v.a.
- $F_X$  determina la distribuzione della v.a.  $X$ :

$$P(X \in (s, t]) = F_X(t) - F_X(s)$$

- $F_X$  è legata alla densità discreta/densità di  $X$ :

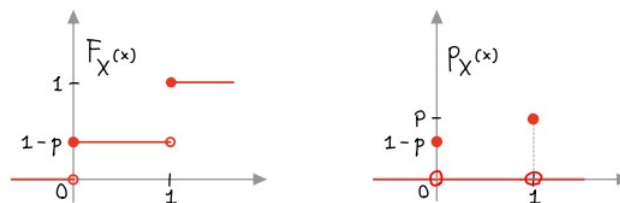
$$F_X(x) = \begin{cases} \sum_{x_i \in (-\infty, x]} P_X(x_i) & \text{se } x \text{ è discreta} \\ \int_{-\infty}^x f_X(t) dt & \text{se } x \text{ è assolutamente continua} \end{cases} \quad (3.6)$$

**Esempio:** Funzione di ripartizione per variabile discreta: Bernoulli.  
Sia  $X \sim Be(p)$  con  $p \in (0, 1)$ :

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad p_X(0) = 1 - p \quad p_X(1) = p$$

Allora  $F_X(x) = P(X \leq x)$  vale:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - p & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

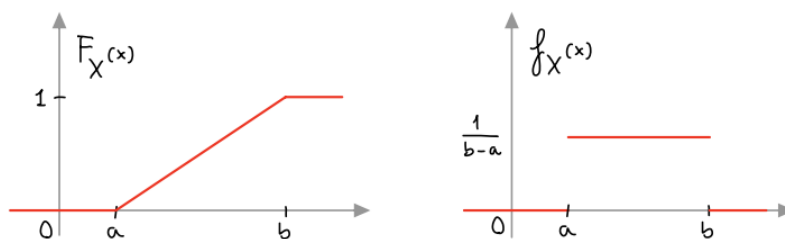


**Esempio:** Funzione di ripartizione per variabile uniforme continua  
Sia  $X \sim U(a, b)$ :  $X(\Omega) = [a, b]$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{se } x < a \text{ o } x > b \end{cases} \quad (3.8)$$

Allora  $F_X(x) = P(X \leq x)$  vale:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases} \quad (3.9)$$



### Teorema di ripartizione di v.a. discrete

- $X$  è una variabile aleatoria discreta  $\iff F_X$  è costante a tratti
- Valori assunti  $x_i \iff$  punti di discontinuità di  $F_X$
- Densità discreta  $\iff$  ampiezze dei salti
- $P_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_i^-)$  dove  $x_i^- = \lim_{t \rightarrow x_i^-} F_X(t)$

### Teorema di ripartizione di v.a. assolutamente continue

- $X$  è una v.a. assolutamente continua (con densità continua a tratti)  
 $\iff F_X$  è una funzione continua ed è derivabile a tratti
- Densità  $F_X(x) = (F_x)'(x)$

## 3.4 Vettori Aleatori

Abbiamo studiato le v.a. individualmente, ma spesso è interessante lo studio *congiunto* di v.a. relative allo stesso esperimento aleatorio.

$$(\Omega, P) = \begin{cases} X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} & \text{variabile aleatoria} \\ Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R} & \text{variabile aleatoria} \end{cases} \quad (3.10)$$

La coppia  $(X, Y)$  è detta **vettore aleatorio**:

$$(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$$

### 3.4.1 Vettori Aleatori Discreti

Un vettore  $(X, Y)$  si dice **discreto** se i valori che può assumere sono contenuti in un insieme finito o numerabile  $\{(x_i), (y_i)\}$

Si definisce **densità discreta congiunta** come:

$$P_{(X,Y)}(x_i, y_i) := P(X = x_i, Y = y_i)$$

La relazione tra densità discreta congiunta e la densità discreta delle singole variabili aleatorie è definita come **densità discreta marginale**:

$$P_X(x_i) = \sum_{y_i} P_{(X,Y)}(x_i, y_i) \quad P_Y(y_i) = \sum_{x_i} P_{(X,Y)}(x_i, y_i)$$

Il valore medio del prodotto tra due variabili aleatorie discrete  $X$  e  $Y$  è

$$E[XY] = \sum_{x_i} \sum_{y_i} x_i \cdot y_i \cdot P_{X,Y}(x_i, y_i)$$

**Esempio:** Lancio due monete dove  $X$  è prima moneta testa e  $Z$  numero totale di teste.

$$X(\Omega) = 0, 1$$

$$Z(\Omega) = 0, 1, 2$$

$$P_{(X,Z)}(x, z) = P(X = x, Z = z)$$

$x \backslash z$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

### 3.4.2 Vettori Aleatori Assolutamente Continui

Un vettore  $(X, Y)$  si dice assolutamente continuo se esiste una funzione  $f_{(X,Y)}(x, y) \geq 0$  detta **densità congiunta** di  $X$  e  $Y$  tale che

$$P(X \in [s, t], Y \in [u, v]) = \int_s^t \left( \int_u^v f_{(X,Y)}(x, y) dy \right) dx$$

Si definiscono **densità marginali** come:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y) dy \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y) dx$$

Il valore medio del prodotto tra due v.a. assolutamente continue  $X$  e  $Y$  è

$$E[X \cdot Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f_{(X,Y)}(x, y) dx dy$$

### 3.4.3 Indipendenza

Consideriamo due v.a.  $X$  e  $Y$  che insieme formano un vettore aleatorio  $(X, Y)$ . Si dice che  $X$  e  $Y$  sono **indipendenti** se

$$P(X \in [s, t], Y \in [u, v]) = P(X \in [s, t] \cdot Y \in [u, v])$$

Da questa formula si può ricavare che  $X$  e  $Y$  sono indipendenti se conoscendo il valore che assume  $Y$  *non cambia la distribuzione* di  $X$ :

$$P(X \in [s, t] | Y \in [u, v]) = P(X \in [s, t])$$

**Osservazione:** Per vettori discreti o assolutamente continui, l'indipendenza ha una riformulazione equivalente:

$(X, Y)$  discreto,  $X$  e  $Y$  sono indipendenti sse  $p_{X,Y}(x_i, y_i) = p_X(x_i) \cdot p_Y(y_i)$

$(X, Y)$  assolut. continuo,  $X$  e  $Y$  sono indipendenti sse  $f_{(X,Y)}(x, y) = f(x) \cdot f(y)$

**Osservazione:** Quando le v.a. non sono indipendenti, le densità marginali forniscono meno informazioni della congiunta. Quando le v.a. sono dipendenti, le densità dei singoli fornisce la stessa quantità di informazioni della congiunta.

Il valore medio del prodotto tra due variabili aleatorie indipendenti  $X$  e  $Y$  è

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$$

### 3.4.4 Covarianza e Correlazione

Consideriamo due v.a.  $X$  e  $Y$  che insieme formano un vettore aleatorio  $(X, Y)$ . Indichiamo i valori medi con  $\mu_X = E[X]$  e  $\mu_Y = E[Y]$ .

Si definisce **covarianza** di  $X$  e  $Y$ :

$$Cov[X, Y] := E[(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)]$$

La covarianza misura il *grado di associazione* tra  $X$  e  $Y$ :

$Cov[X, Y] > 0$ : a valori grandi di  $X$  corrispondono valori grandi di  $Y$

$Cov[X, Y] < 0$ : a valori grandi di  $X$  corrispondono valori piccoli di  $Y$

**Osservazione:** la covarianza si può riscrivere come

$$Cov[X, Y] = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$$

#### Proprietà della covarianza

- Annullamento:  $Var[X] = Cov[X, X]$
- Simmetria:  $Cov[X, Y] = Cov[Y, X]$
- Costanti:  $Cov[X, c] = 0$
- Bilinearità:  $Cov[a \cdot X, Y] = a \cdot Cov[X, Y]$
- Bilinearità:  $Cov[X + Z, Y] = Cov[X, Y] + Cov[Z, Y]$
- **Formula della somma:**  $Var[X] + Var[Y] + 2 \cdot Cov[X, Y]$

Si definisce **coefficiente di correlazione lineare**:

$$\rho[X, Y] := \frac{Cov[X, Y]}{Sd[X] \cdot Sd[Y]}$$

Si tratta di una versione normalizzata della covarianza:

- $-1 \leq \rho[X, Y] \leq 1$
- $\rho = \pm 1 \iff Y = a \cdot X + b$

Se  $Cov[X, Y] = 0$ ,  $X$  e  $Y$  si dicono **scorrelate**.

**Osservazione:** Se abbiamo due variabili aleatorie indipendenti, allora sicuramente sono scorrelate, ma *non vale viceversa*

**Esempio:** Lancio due dadi regolari a 6 facce. Siano  $X$  la somma dei risultati e  $Y$  la differenza. Allora  $X$  e  $Y$  sono scorrelate:

$$\begin{aligned}
 Cov[X, Y] &= Cov[A + B, A - B] \\
 &= Cov[A, A] - Cov[A, B] - Cov[B, A] - Cov[B, B] \\
 &= Cov[A, A] - Cov[B, B] \\
 &= Var[A] - Var[B] = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Tuttavia  $X$  e  $Y$  non sono indipendenti. Per esempio:

$$P(X = 12) = \frac{1}{6} \quad P(Y = 5) = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 12, Y = 5) = 0$$

$$0 \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

# Capitolo 4

## Teoremi di Convergenza

### 4.1 Teoria

#### 4.1.1 Campione Aleatorio Casuale

Il modello probabilistico fondamentale per la statistica è la successione  $X_1, \dots, X_n$  di variabili aleatorie **indipendenti ed identicamente distribuite** (v.a i.i.d.)

**Definizione:** Chiameremo **campione aleatorio casuale** di ampiezza  $n$  le  $X_1, \dots, X_n$  osservabili.

**Osservazione:** Uno dei pochi casi in cui è facile conoscere la distribuzione del campione aleatorio è il caso del **campione gaussiano**  $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$  in quanto possiamo calcolare la media campionaria  $\bar{X}_n$  con la tavola della distribuzione.

**Obiettivo:** Per ottenere il nostro obiettivo, ovvero quello di conoscere la distribuzione di un campione aleatorio  $X_1, \dots, X_n$ , dovremo ricondurre il campione aleatorio ad una gaussiano  $N(0, 1)$

**Definizione:** Per standardizzare un campione aleatorio  $X_1, \dots, X_n$  dovremo prendere la somma di tale campione, sottrarre la sua media e dividere per la radice della varianza:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - E[X]}{\sqrt{Var[X]}}$$



**Osservazioni:** Guardiamo ora le distribuzioni di  $X_i, \dots, X_n$  per campioni non normali. Avremo che le densità si riconducono a quella di una normale *all'aumentare di  $n$* .

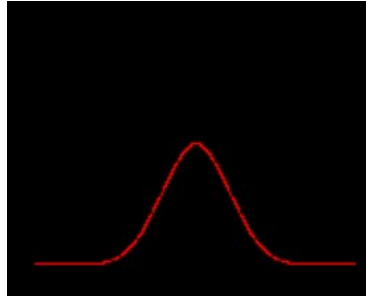


Figura 4.1: Uniforme Continua di parametro  $U(0, 1)$  con  $n=16$

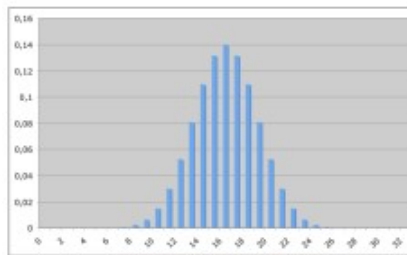


Figura 4.2: Bernoulli di parametro  $Be(1/2)$  con  $n=32$

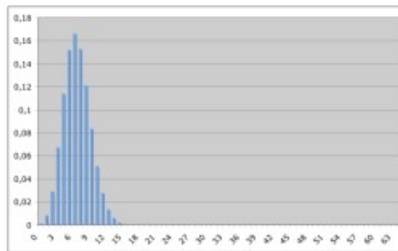


Figura 4.3: Bernoulli di parametro  $Be(1/10)$  con  $n=64$

### 4.1.2 Teorema del Limite Centrale

**Definizione:** Il **Teorema del Limite Centrale** (TLC) afferma che la somma o la media di un grande numero di v.a. i.i.d è approssimativamente normale per n grande ( $n \geq 30$ ). Siano  $E[X_i] = \mu$  e  $Var[X_i] = \sigma^2$  allora

$$\text{Media: } \mathbb{P} \left( \frac{\overline{X_N} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq x \right) \sim P(Z \leq x)$$

$$\text{Somma: } \mathbb{P} \left( \frac{X_i + \dots + X_n - \mu}{\sigma} \leq x \right) \sim P(Z \leq x)$$

### 4.1.3 Correzioni di Continuità

**Definizione:** La correzione di continuità si applica quando si standardizza una distribuzione discreta ad una normale. Afferma che bisogna ampliare di  $1/2$  gli estremi dell'intervallo per ottenere un valore ben approssimato

**Definizione:** La correzione di continuità di una **binomiale** afferma che dato se  $np \geq 5$  e  $n(1-p) \geq 5$  allora la sua correzione è

$$X \sim \text{Bin}(np, np(1-p))$$

**Definizione:** Se non ci troviamo nel caso di prima, quindi  $np \leq 5$  e  $n(1-p) \leq 5$  allora approssimiamo con la correzione di continuità di una **Poisson**:

$$X \sim \text{Pois}(n(1-p))$$

## 4.2 Pratica

### 4.2.1 Formule Utili

Distribuzioni notevoli discrete					
<i>Distribuzione</i>	$X(\Omega)$	$p_X(k)$ per $k \in X(\Omega)$	$E[X]$	$\text{Var}[X]$	
<b>Bernoulli</b>					
Be( $p$ ) $p \in [0, 1]$	$\{0, 1\}$	$\begin{cases} p & \text{se } k = 1 \\ 1 - p & \text{se } k = 0 \end{cases}$	$p$	$p(1 - p)$	
<b>Binomiale</b>					
Bin( $n, p$ ) $n \in \{1, 2, \dots\}$ $p \in [0, 1]$	$\{0, 1, \dots, n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$np$	$np(1 - p)$	
<b>Poisson</b>					
Pois( $\lambda$ ) $\lambda \in (0, \infty)$	$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\lambda$	$\lambda$	
<b>Geometrica</b>					
Geo( $p$ ) $p \in (0, 1]$	$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$	$p(1 - p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1 - p}{p^2}$	
Distribuzioni notevoli assolutamente continue					
<i>Distribuzione</i>	$X(\Omega)$	$f_X(x)$ per $x \in X(\Omega)$	$F_X(x)$	$E[X]$	$\text{Var}[X]$
<b>Uniforme continua</b>					
U( $a, b$ ) $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$	$[a, b]$	$\frac{1}{b - a}$	$\frac{x - a}{b - a}$	$\frac{a + b}{2}$	$\frac{(b - a)^2}{12}$
<b>Esponenziale</b>					
Exp( $\lambda$ ) $\lambda \in (0, \infty)$	$[0, \infty)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
<b>Normale</b>					
N( $\mu, \sigma^2$ ) $\mu \in \mathbb{R}$ $\sigma \in (0, \infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$\frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$	$\Phi(x)$	$\mu$	$\sigma^2$

$z$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	0.99995	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	0.99997									
5.0	0.9999997									
6.0	0.9999999990									

**Standardizzazione:**  $\frac{X_i + \dots + X_n - E[X]}{\sqrt{Var[X]}}$

**TLC:**

$$\text{Media: } \mathbb{P} \left( \frac{\overline{X_N} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq x \right) \sim P(Z \leq x)$$

$$\text{Somma: } \mathbb{P} \left( \frac{X_i + \dots + X_n - \mu}{\sigma} \leq x \right) \sim P(Z \leq x)$$

**CC:** Riduzione di  $1/2$  del dominio per approssimare V.A. discrete

**CC Binomiale:** se  $np \geq 5$  e  $n(1-p) \geq 5$  allora:  $X \sim Bin(np, np(1-p))$

**CC Poisson:** se  $np \leq 5$  e  $n(1-p) \leq 5$  allora:  $X \sim Pois(n(1-p))$

## 4.2.2 Esercizi

### Esercizio 1: TLC con assolutamente continua

**Traccia:** Una lampada ha un tempo di vita che segue una legge esponenziale di media 10 giorni. Non appena la lampada smette di funzionare, viene sostituita con una nuova.

- Qual è la probabilità che 40 lampade siano sufficienti per un anno?
- Qual è il numero minimo  $n$  di lampade comprare affinché la probabilità dell'evento "n lampade siano sufficienti per un anno" sia almeno 0.95?

### Soluzione a:

- Ricavo dalla traccia che ho 40 lampade con legge esponenziale di media 10 giorni. Ricavo dalla tabella che se  $E[X] = 1/\lambda = 10$ , allora  $\lambda = 1/10$ . Riscrivo come  $X_1, \dots, X_{40}$  v.a. i.i.d.  $\sim \exp(1/10)$
- La richiesta è  $\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{40} > 365)$ . Dato che  $n = 40$  è abbastanza grande, possiamo stimare questa probabilità con il TLC.
- Dobbiamo standardizzare la somma delle nostre v.a. Per farlo abbiamo bisogno di conoscere valore medio  $E[X] = 1/\lambda$  e varianza  $Var[X] = 1/\lambda^2$ :

· Per la linearità della media,  $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$ :

$$E[X_1 + \dots + X_{40}] = E[X_1] + \dots + E[X_{40}] = 10 + \dots + 10 = 400$$

· Per l'indipendenza delle v.a.,  $Cov[X+Y] = 0$  quindi  $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$ :

$$Var[X_1 + \dots + X_{40}] = Var[X_1] + \dots + Var[X_{40}] = 100 + \dots + 100 = 4000$$

- Standardizziamo con la formula:  $\frac{X_i + \dots + X_n - E[X]}{\sqrt{Var[X]}}$ :

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{40} > 365) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_{40} - 400}{\sqrt{4000}} > \frac{365 - 400}{\sqrt{4000}}\right)$$

· Semplifichiamo e cambiamo  $>$  in  $\leq$ :

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_{40} - 400}{\sqrt{4000}} \leq \frac{-35}{20\sqrt{10}}\right)$$

- Essendo  $\sim N(0, 1)$  usando il TLC avremo:

$$\simeq 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{-35}{20\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-35}{20\sqrt{10}}\right)$$

- Essendo l'argomento negativo diventa:

$$1 - 1 - \Phi\left(\frac{35}{20\sqrt{10}}\right) = \Phi(0.55) = 0.7088$$

5. La probabilità che 40 lampade siano sufficienti per un anno è 71%

**Soluzione b:**

1. Abbiamo  $X_1 + \dots + X_n \sim \exp(1/10)$ . L'incognita ora è  $n$ . Cerchiamo il minimo  $n$  tc  $\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > 365) \geq 0.95$
2. Sicuramente  $n$  deve essere  $> 40$  in quanto al punto a. dava probabilità 0.71 e a noi serve 0.95. Essendo  $n$  grande, il TLC è applicabile con buona approssimazione.
3. Dobbiamo standardizzare la somma delle nostre v.a. Calcoliamo valore medio e varianza:

$$\cdot E[X_1 + \dots + X_n] = E[X_1] + \dots + E[X_n] = 10n$$

$$\cdot Var[X_1 + \dots + X_n] = Var[X_1] + \dots + Var[X_n] = 100n$$

4. Standardizzo:

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > 365) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - 10n}{\sqrt{100n}} \leq \frac{365 - 10n}{\sqrt{10\sqrt{n}}}\right)$$

5. Avrò numeratore negativo perché  $n > 40$  quindi per TLC:

$$\Phi\left(\frac{10n - 365}{10\sqrt{n}}\right)$$

6. Calcoliamo il minimo  $n$  tc.

$$\Phi\left(\frac{10n - 365}{10\sqrt{n}}\right) \geq 0.95$$

7. Calcolo con la fdr lo  $z^*$  tc  $\Phi(z^*) = 0.95$  e trovo  $\Phi(1.645)$ :

$$\Phi\left(\frac{10n - 365}{10\sqrt{n}}\right) \geq \Phi(1.645) = \frac{10n - 365}{10\sqrt{n}} \geq 1.645 = \quad (\sqrt{n} = x)$$

$$= 10x^2 - 16.45x - 365 \geq 0 \rightarrow x = 6.92 = \sqrt{n} \sim 47.89$$

8. Il minimo numero di lampadine da comprare è 48

## Esercizio 2: TLC con discreta + CC

**Traccia:** Qual è la probabilità di ottenere almeno 29 teste in 50 lanci di una moneta equilibrata?

**Soluzione:**

1. Definiamo  $X_1, \dots, X_{50}$  v.a. i.i.d  $\sim Be(1/2)$
2. Cerco il numero di teste nei 50 lanci:  $\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{50} \geq 29)$ , ovvero  $Bin(50, \frac{1}{2})$  con numero di successi  $k = 29$
3. Devo usare la CC di una binomiale, dunque devo rispettare due condizioni:
  - (a)  $np \geq 5$ :  $np = 50 \cdot 1/2 = 25 \geq 5$
  - (b)  $n(1 - p) \geq 5$ :  $n(1 - p) = 50 \cdot 1/2 = 25 \geq 5$
4. Essendo entrambe le condizioni confermate, posso approssimare con una binomiale della forma:

$$X \sim Bin(np, np(1 - p)) = Bin(25, 25/2)$$

5. Approssimo con la CC ed ottengo:

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{50} \geq 28.5) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_{50} - 25}{\sqrt{\frac{25}{2}}}\right)$$

6. Applico il TLC:

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{50} \geq 28.5) \sim 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{7}{\sqrt{50}}\right) = 1 - \Phi(0.99) = 0.1611$$

7. La probabilità di ottenere almeno 29 teste in 50 lanci è del 16%

# Capitolo 5

## Statistica Inferenziale

### 5.1 Introduzione

**Statistica:** Dato un campione casuale, si definisce statistica una funzione del campione, ossia una v.a.  $T$  della forma  $T: g(X_1, \dots, X_n)$

Lo scopo della **statistica inferenziale** è definire in modo non ambiguo e quantitativo una *plausibilità*.

**Esempio:** Siamo interessati a sapere quanti italiani adulti (40 mln) usano i social media. Sappiamo che su un campione di 1000 individui, 850 usa i social media.

- Sapere che 850 italiani usano i social media è irrilevante in confronto alla popolazione di italiani adulti
- Sappiamo che più dell'80% degli italiani usa i social media: non è conseguenza logica dei dati ma è *plausibile*
- Almeno 39 mln di italiani adulti usa i social media: non contraddice i dati ma *non è plausibile*

**Osservazione:** La plausibilità di una statistica inferenziale dipende dal modo in cui è stato selezionato il campione. La metodologia corretta è la scelta *casuale*.

**Osservazione:** Un'analisi statistica ha una forte correlazione con un processo:

1. Ipotesi investigativa: creo un ipotesi statistica come più dell'80% di italiani usa i social media



2. Indagine della polizia: raccoglimento dati
3. Presentazione dei risultati
4. Giuria equa: metodi rigorosi per accettare o rifiutare l'ipotesi statistica.

**Statistica Parametrica:** è la parte della statistica inferenziale che studia una popolazione supponendo di conoscere la legge di probabilità  $X$  che la governa a meno di alcuni parametri, ovvero supponendo che  $X$  appartenga a una famiglia parametrizzata di leggi. Ad esempio, nell'esempio dei social media,  $F$  è  $Be(p)$  con  $p$  incognito.

**Modello Statistico parametrico:** Famiglia di leggi note a meno di uno o più parametri discreti o continui.

## 5.2 Stimatori

### 5.2.1 Stima Puntuale

**Stimatori:** Gli stimatori sono particolari statistiche che servono a stimare parametri incognite.

**Definizione:** Uno stimatore si dice **non distorto** o **corretto** se il loro valore atteso è uguale al valore medio che vogliamo stimare:

$$E[T]_{\Theta} = E[g(X_1, \dots, X_n)]_{\Theta} = \Theta$$

**Media Campionaria:** Qualunque sia il campione casuale  $X_1, \dots, X_n$ , e conoscendo media  $\mu = E[X_1]$  la media campionaria  $\overline{X}_N$  è un campione non distorto di  $\mu$ . Quindi è non distorto per:

- $p$  in un modello  $Be(p)$
- $\lambda$  in un modello  $Pois(\lambda)$
- $\frac{1}{\lambda}$  in un modello  $Exp(\lambda)$
- $\mu$  in un modello  $N(\mu, \sigma^2)$

**Osservazione:** La proprietà di essere non distorto non è stabile a trasformazioni non lineari.

**Definizione:** Uno stimatore non distorto di  $\Theta$  si dice consistente se quando  $n \rightarrow +\infty$

$$Var_{\Theta}(T) \rightarrow 0 \quad T = g(X_1, \dots, X_n)$$

**Definizione:** Supponiamo di considerare un campione casuale con media  $\mu$  incognita mentre varianza  $\sigma$  nota. Se si pensa  $\overline{X_N}$  come stimatore di  $\mu$ ,  $Sd(\overline{X_N})$  prende il nome di *errore standard* e rappresenta un errore commesso stimando  $\mu$  con  $\overline{X_N}$

**Definizione:** Introduciamo la varianza campionaria in un modello con varianza  $\sigma^2$  e media  $\mu$  incognite, ovvero lo stimatore:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \overline{X_N})^2$$

Si può verificare che  $E[S_n^2] = \sigma^2$  è non distorto. Se il campione ha momento quarto finito è anche consistente.

**Osservazione:** Se indichiamo con  $\mu$  il campione da stimare, il valore stimato si indica con  $\hat{\mu}$ . Lo stimatore è una v.a., la stima è un numero.

**Definizione:** Se nel modello statistico con varianza  $\sigma^2$  incognito la media è nota, si ha un nuovo stimatore corretto di  $\sigma^2$ :

$$\overline{S_n^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \quad \mu = E[X_1]$$

## 5.2.2 Distribuzione delle Statistiche Campionarie

Abbiamo introdotto 3 modelli di stima puntuale per un campione normale  $X_1, \dots, X_n$ :

1. Media campionaria:  $\overline{X_N}$
2. Varianza campionaria:  $S_n^2$
3. Varianza campionaria con media nota:  $\overline{S_n^2}$

**Definizione:** Per caratterizzare le leggi delle varianze campionarie dobbiamo introdurre una nuova distribuzione continua  $\chi^2(n)$ : chi quadrato con n gradi

di libertà. Consiste nella legge di una v.a. che otteniamo ottenendo la somma di  $n$  v.a.i.i.d  $\sim N(0,1)$  elevandole al quadrato:

$$Y = \sum_{i=1}^n Z_i^2$$

**Osservazioni:**

- si ha  $E[Y]=n$ ;  $\text{Var}[Y]= 2n$
- per  $n = 2$  è la legge di  $\exp(1/2)$
- per  $n$  grande vale l'approssimazione della legge con una  $N(n, 2n)$  dal TLC dato che  $Y \sim X^2(n)$

**Definizione:** Sia  $\overline{X_N}$  un campione casuale estratto da una popolazione  $N(\mu, \sigma^2)$ :

1.  $\sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim X^2(n)$
2.  $\sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \overline{X_N}}{\sigma} \right)^2 \sim X^2(n-1)$
3. se  $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \overline{X_N}}{\sigma} \right)^2$  allora  $(n-1) \frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim X^2(n-1)$
4.  $S_n^2$  e  $\overline{X_N}$  sono indipendenti

**Osservazione:** Osservando i punti 1) e 2), possiamo notare che ogni volta che stimiamo un parametro con chi quadrato, perdiamo un grado di libertà

## 5.3 Stima per Intervalli