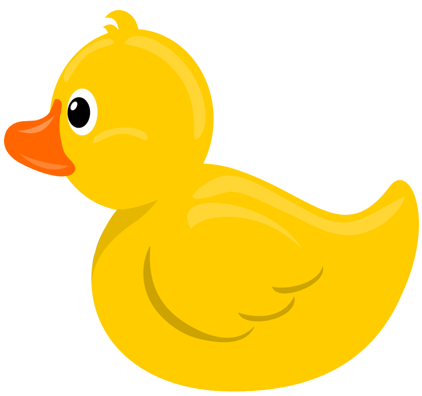
# PSI: Capitolo 4

Ver 1.1

**Falbo Andrea**

A.A 2022/2023
Prof. Caravenna, Masiero
LilQuacky



# Indice

# Capitolo 1

# Teoremi di Convergenza

## 1.1 Teoria

### 1.1.1 Campione Aleatorio Casuale

Il modello probabilistico fondamentale per la statistica è la successione $X_i, ..., X_n$ di variabili aleatorie **indipendenti ed identicamente distribuite** (v.a i.i.d.)

**Definizione**: Chiameremo **campione aleatorio casuale** di ampiezza n le $X_i, ..., X_n$ osservabili.

**Osservazione**: Uno dei pochi casi in cui è facile conoscere la distribuzione del campione aleatorio è il caso del **campione gaussiano** $X_i, ..., X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ in quanto possiamo calcolare la media campionaria $\overline{X_N}$ con la tavola della distribuzione.

**Obiettivo**: Per ottenere il nostro obiettivo, ovvero quello di conoscere la distribuzione di un campione aleatorio $X_i, ..., X_n$, dovremo ricondurre il campione aleatorio ad una gaussiano $N(0, 1)$

**Definizione**: Per standardizzare un campione aleatorio $X_i, ..., X_n$ dovremo prendere la somma di tale campione, sottrarre la sua media e dividere per la radice della varianza:

$$\frac{X_i + ... + X_n - E[X]}{\sqrt{Var[X]}}$$

**Osservazioni**: Guardiamo ora le distribuzioni di $X_i, ..., X_n$ per campioni non normali. Avremo che le densità si riconducono a quella di una normale *all'aumentare di n.*

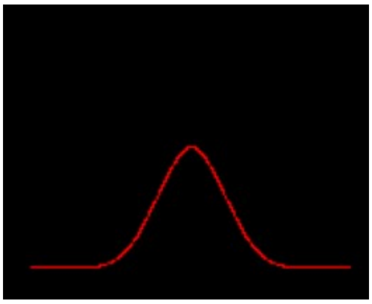


Figura 1.1: Uniforme Continua di parametro $U(0,1)$ con n=16

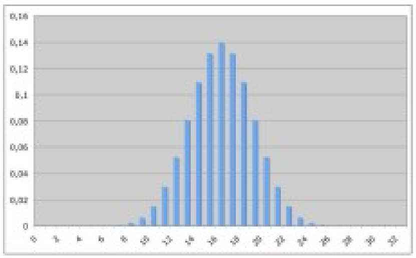


Figura 1.2: Bernoulli di parametro $Be(1/2)$ con n=32

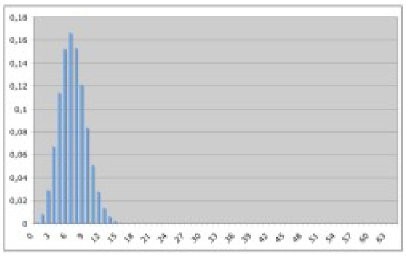


Figura 1.3: Bernoulli di parametro $Be(1/10)$ con n=64

### 1.1.2 Teorema del Limite Centrale

**Definizione**: Il **Teorema del Limite Centrale** (TLC) afferma che la somma o la media di un grande numero di v.a. i.i.d e è approssimativamente normale per n grande ($n \geq 30$). Siano $E[X_i] = \mu$ e $Var[X_i] = \sigma^2$ allora

$$\text{Media: } \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X_N} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq x\right) \sim P(Z \leq x)$$

$$\text{Somma: } \mathbb{P}\left(\frac{X_i + ... + X_n - \mu}{\sigma} \leq x\right) \sim P(Z \leq x)$$

### 1.1.3 Correzioni di Continuità

**Definizione**: La correzione di continuità si applica quando si standardizza una distribuzione discreta ad una normale. Afferma che bisogna ampliare di $1/2$ gli estremi dell'intervallo per ottenere un valore ben approssimato

**Definizione**: La correzione di continuità di una **binomiale** afferma che dato se $np \geq 5$ e $n(1-p) \geq 5$ allora la sua correzione è

$$X \sim Bin(np, np(1-p))$$

**Definizione**: Se non ci troviamo nel caso di prima, quindi $np \leq 5$ e $n(1-p) \leq 5$ allora approssimiamo con la correzione di continuità di una **Poisson**:

$$X \sim Pois(n(1-p))$$

## Variabili aleatorie discrete

Variabile aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ discreta: quantità finita o numerabile di valori assunti

$$X(\Omega) = \{x_i\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

- Densità discreta: $\mathrm{p}_X(x_i) = \mathrm{P}(X = x_i)$ $\quad (\, \mathrm{p}_X(x) = 0 \text{ se } x \notin \{x_i\}\,)$
- Distribuzione: $\mathrm{P}(X \in A) = \sum_{x_i \in A} \mathrm{p}_X(x_i)$
- Valore medio: $\mathrm{E}[X] = \sum_{x_i} x_i \cdot \mathrm{p}_X(x_i)$

$$\mathrm{E}[X + c] = \mathrm{E}[X] + c \qquad \mathrm{E}[cX] = c\,\mathrm{E}[X] \qquad \mathrm{E}[X + Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$$

se $X = c$ (costante) allora $\mathrm{E}[X] = c$ $\qquad$ se $X \geq 0$ allora $\mathrm{E}[X] \geq 0$

- Varianza: $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2$ $\quad$ con $\quad \mathrm{E}[X^2] = \sum_{x_i} x_i^2 \cdot \mathrm{p}_X(x_i)$

$$\mathrm{Var}[X + c] = \mathrm{Var}[X] \qquad \mathrm{Var}[cX] = c^2\,\mathrm{Var}[X]$$

se $X$ e $Y$ sono indipendenti: $\quad \mathrm{Var}[X + Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$

$$X = c \text{ (costante)} \iff \mathrm{Var}[X] = 0$$

- Deviazione standard: $\mathrm{SD}[X] = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$

### Distribuzioni notevoli discrete

| *Distribuzione* | $X(\Omega)$ | $\mathrm{p}_X(k)$ per $k \in X(\Omega)$ | $\mathrm{E}[X]$ | $\mathrm{Var}[X]$ |
|---|---|---|---|---|
| **Bernoulli**<br>$\mathrm{Be}(p)$<br>$p \in [0,1]$ | $\{0,1\}$ | $\begin{cases} p & \text{se } k = 1 \\ 1-p & \text{se } k = 0 \end{cases}$ | $p$ | $p(1-p)$ |
| **Binomiale**<br>$\mathrm{Bin}(n,p)$<br>$n \in \{1,2,\dots\}$ $\; p \in [0,1]$ | $\{0,1,\dots,n\}$ | $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ | $np$ | $np(1-p)$ |
| **Poisson**<br>$\mathrm{Pois}(\lambda)$<br>$\lambda \in (0,\infty)$ | $\mathbb{N}_0 = \{0,1,\dots\}$ | $\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ | $\lambda$ | $\lambda$ |
| **Geometrica**<br>$\mathrm{Geo}(p)$<br>$p \in (0,1]$ | $\mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$ | $p(1-p)^{k-1}$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ |

## Variabili aleatorie assolutamente continue

Variabile aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ assolutamente continua con densità $f_X(x)$:

- Distribuzione: $\mathrm{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)\,\mathrm{d}x$
- Valori assunti: $X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} : \ f_X(x) > 0\}$
- Valore medio: $\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$

$$\mathrm{E}[X+c] = \mathrm{E}[X] + c \qquad \mathrm{E}[cX] = c\,\mathrm{E}[X] \qquad \mathrm{E}[X+Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$$

se $X = c$ (costante) allora $\mathrm{E}[X] = c$ se $X \geq 0$ allora $\mathrm{E}[X] \geq 0$

- Varianza: $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2$ con $\mathrm{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$

$$\mathrm{Var}[X+c] = \mathrm{Var}[X] \qquad \mathrm{Var}[cX] = c^2\,\mathrm{Var}[X]$$

se $X$ e $Y$ sono indipendenti: $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$

$X = c$ (costante) $\iff$ $\mathrm{Var}[X] = 0$

- Deviazione standard: $\mathrm{SD}[X] = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$

### Distribuzioni notevoli assolutamente continue

| *Distribuzione* | $X(\Omega)$ | $f_X(x)$ per $x \in X(\Omega)$ | $F_X(x)$ per $x \in X(\Omega)$ | $\mathrm{E}[X]$ | $\mathrm{Var}[X]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Uniforme continua**<br>$\mathrm{U}(a,b)$<br>$a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ | $[a,b]$ | $\frac{1}{b-a}$ | $\frac{x-a}{b-a}$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ |
| **Esponenziale**<br>$\mathrm{Exp}(\lambda)$<br>$\lambda \in (0,\infty)$ | $[0,\infty)$ | $\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$ | $1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ |
| **Normale**<br>$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$<br>$\mu \in \mathbb{R}$ $\sigma \in (0,\infty)$ | $(-\infty,+\infty)$ | $\frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ | $\Phi(x)$ | $\mu$ | $\sigma^2$ |

## Tavola della distribuzione normale

La tabella seguente riporta i valori di $\Phi(z) := \int_{-\infty}^{z} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x$, la funzione di ripartizione della distribuzione normale standard $N(0,1)$, per $0 \leq z \leq 3.5$.

I valori di $\Phi(z)$ per $z < 0$ possono essere ricavati grazie alla formula

$$\Phi(z) \;=\; 1 - \Phi(-z)\,.$$

| $z$ | **0.00** | **0.01** | **0.02** | **0.03** | **0.04** | **0.05** | **0.06** | **0.07** | **0.08** | **0.09** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.0** | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| **0.1** | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| **0.2** | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| **0.3** | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| **0.4** | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| **0.5** | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| **0.6** | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| **0.7** | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| **0.8** | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| **0.9** | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| **1.0** | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| **1.1** | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| **1.2** | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| **1.3** | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| **1.4** | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| **1.5** | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| **1.6** | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| **1.7** | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| **1.8** | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| **1.9** | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| **2.0** | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| **2.1** | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| **2.2** | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| **2.3** | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| **2.4** | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| **2.5** | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| **2.6** | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| **2.7** | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| **2.8** | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| **2.9** | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| **3.0** | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| **3.1** | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| **3.2** | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| **3.3** | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| **3.4** | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |

## 1.2 Pratica

### 1.2.1 Esercizi

**Esercizio 1: TLC con assolutamente continua**

**Traccia**: Una lampada ha un tempo di vita che segue una legge esponenziale di media 10 giorni. Non appena la lampada smette di funzionare, viene sostituita con una nuova.

a. Qual è la probabilità che 40 lampade siano sufficienti per un anno?

b. Qual è il numero minimo n di lampade comprare affinché la probabilità dell'evento "n lampade siano sufficienti per un anno" sia almeno 0.95?

**Soluzione a**:

1. Ricavo dalla traccia che ho 40 lampade con legge esponenziale di media 10 giorni. Ricavo dalla tabella che se $E[X] = {}^1\!/\!_\lambda = 10$, allora $\lambda = {}^1\!/\!_{10}$ Riscrivo come $X_1, ..., X_{40}$ v.a. i.i.d. $\sim exp({}^1\!/\!_{10})$

2. La richiesta è $\mathbb{P}(X_1 + ... + X_{40} > 365)$. Dato che $n = 40$ è abbastanza grande, possiamo stimare questa probabilità con il TLC.

3. Dobbiamo standardizzare la somma delle nostre v.a. Per farlo abbiamo bisogno di conoscere valore medio $E[X] = {}^1\!/\!_\lambda$ e varianza $Var[X] = {}^1\!/\!_{\lambda^2}$:

   - Per la linearità della media, $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$:

     $$E[X_1 + ... + X_{40}] = E[X_1] + ... + E[X_{40}] = 10 + ... + 10 = 400$$

   - Per l'indipendenza delle v.a., $Cov[X+Y] = 0$ quindi $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$:

     $$Var[X_1+...+X_{40}] = Var[X_1]+...+Var[X_{40}] = 100+...+100 = 4000$$

4. Standardizziamo con la formula: $\dfrac{X_i + ... + X_n - E[X]}{\sqrt{Var[X]}}$:

$$\mathbb{P}(X_1 + ... + X_{40} > 365) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + ... + X_{40} - 400}{\sqrt{4000}} > \frac{365 - 400}{\sqrt{4000}}\right)$$

   - Semplifichiamo e cambiamo $>$ in $\leq$:

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + ... + X_{40} - 400}{\sqrt{4000}} \leq \frac{-35}{20\sqrt{10}}\right)$$

- Essendo $\sim N(0,1)$ usando il TLC avremo:

$$\simeq 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{-35}{20\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-35}{20\sqrt{10}}\right)$$

- Essendo l'argomento negativo diventa:

$$1 - 1 - \Phi\left(\frac{35}{20\sqrt{10}}\right) = \Phi(0.55) = 0.7088$$

5. La probabilità che 40 lampade siano sufficienti per un anno è 71%

**Soluzione b**:

1. Abbiamo $X_1 + ... + X_n \sim exp(1/10)$. L'incognita ora è n. Cerchiamo il minimo n tc $\mathbb{P}(X_1 + ...X_N > 365) \geq 0.95)$
2. Sicuramente n deve essere $> 40$ in quanto al punto a. dava probabilità 0.71 e a noi serve 0.95. Essendo n grande, il TLC è applicabile con buona approssimazione.
3. Dobbiamo standardizzare la somma delle nostre v.a. Calcoliamo valore medio e varianza:
   - $E[X_1 + ... + X_n] = E[X_1] + ... + E[X_n] = 10n$
   - $Var[X_1 + ... + X_n] = Var[X_1] + ... + Var[X_n] = 100n$
4. Standardizzo:

$$\mathbb{P}(X_1 + ... + X_n > 365) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + ... + X_n - 10n}{\sqrt{100n}} \leq \frac{365 - 10n}{\sqrt{10\sqrt{n}}}\right)$$

5. Avrò numeratore negativo perché $n > 40$ quindi per TLC:

$$\Phi\left(\frac{10n - 365}{10\sqrt{n}}\right)$$

6. Calcoliamo il minimo n tc.

$$\Phi\left(\frac{10n - 365}{10\sqrt{n}}\right) \geq 0.95$$

7. Calcolo con la fdr lo $z^*$ tc $\Phi(z^*) = 0.95$ e trovo $\Phi(1.645)$:

$$\Phi\left(\frac{10n - 365}{10\sqrt{n}}\right) \geq \Phi(1.645) = \frac{10n - 365}{10\sqrt{n}} \geq 1.645 = \qquad (\sqrt{n} = x)$$

$$= 10x^2 - 16.45x - 365 \geq 0 \rightarrow x = 6.92 = n \sim 47.89$$

8. Il minimo numero di lampadine da compare è 48

**Esercizio 2: TLC con discreta + CC**

**Traccia**: Qual è la probabilità di ottenere almeno 29 teste in 50 lanci di una moneta equilibrata?

**Soluzione**:

1. Definiamo $X_1, ..., X_{50}$ v.a. i.i.d $\sim Be(1/2)$
2. Cerco il numero di teste nei 50 lanci: $\mathbb{P}(X_1 + ... + X_{50} \geq 29)$, ovvero $Bin(50, \frac{1}{2})$ con numero di successi $k = 29$
3. Devo usare la CC di una binomiale, dunque devo rispettare due condizioni:
   (a) $np \geq 5$: $np = 50 \cdot 1/2 = 25 \geq 5$
   (b) $n(1-p) \geq 5$: $n(1-p) = 50 \cdot 1/2 = 25 \geq 5$
4. Essendo entrambe le condizioni confermate, posso approssimare con una binomiale della forma:
   $$X \sim Bin(np, np(1-p)) = Bin(25, 25/2$$
5. Approssimo con la CC ed ottengo:
   $$\mathbb{P}(X_1 + ... + X_{50} \geq 28.5) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + ... + X_{50} - 25}{\sqrt{\frac{25}{2}}}\right)$$
6. Applico il TLC:
   $$\mathbb{P}(X_1 + ... + X_{50} \geq 28.5) \sim 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{7}{\sqrt{50}}\right) = 1 - \Phi(0.99) = 0.1611$$
7. La probabilità di ottenere almeno 29 teste in 50 lanci è del 16%