Algebra Lineare e Geometria

~Andrea Falbo

Indice:

Capitolo 1: Algebra Lineare

Struttura Algebrica: Insieme + operazioni al suo interno.

Gruppo Abeliano: Struttura algebrica associativa, commutativa, con elemento neutro ed inversi

Spazio Vettoriale: Struttura Algebrica con:

- Insieme: V
- Campo di Scalari: K ($\mathbb{R}$)
- Due operazioni: somma e prodotto.

Spazio Vettoriale affino: Differisce dall'essere spazio vettoriale per una costante.

Sottospazio Vettoriale: Se V è spazio vettoriale, allora S è sottospazio vettoriale se:

- Tutti gli elementi di S sono contenuti in V
- Le due operazioni sono interne ad S.

Combinazione Lineare: Dati: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vettori e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ scalari,

combinazione lineare: $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n v_n$

Eg: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\9\end{pmatrix}$ vettori; $5, 0, 3$ scalari:

$$5\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\37\end{pmatrix}$$

Linearità: Se l'unico metodo per ottenere il vettore nullo è avere tutti gli scalari $= 0$, allora i vettori sono linearmente indipendenti.

Se esiste almeno una combinazione di scalari diversa da tutti 0, allora tra i vettori sono presenti dei vettori linearmente dipendenti.

Eg: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sono l.i o l.d? prendiamo 3 scalari: a_1, a_2, a_3.

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \longrightarrow a_1 = -a_3 \\ a_2 + a_3 = 0 \longrightarrow a_2 = -a_3 \\ a_2 + a_3 = 0 \longrightarrow a_3 = a_3 \end{cases}$$

Con $a_1 = -1$, $a_2 = -1$ e $a_3 = 1$ ottengo vettore nullo ed essendo diversi da 0, i vettori sono linearmente dipendenti.

Capitolo 1: Algebra Lineare

Sistema di generatori: Puoi ricostruire qualsiasi vettore appartenente al campo attraverso combinazione lineare di tali vettori.

Base: Sistema di generatori con vettori linearmente indipendenti

Vettori della base canonica: R^2: (1,0), (0,1). R^3: (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1).

Prodotto Scalare: $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, prodotto scalare $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}$: $1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = -2 + 0 + 9 = 7$

Capitolo 2: Matrici

Matrici: vettore con più colonne:

- Matrice$_{n\times m}$: $\begin{array}{c c} & \xrightarrow{m} \\ n & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$
- Matrice quadrata$_{n\times n}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- Matrice nulla$_{n\times m}$: $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
- Matrice triangolare superiore ed inferiore: sup $\begin{pmatrix} a & & & \\ 0 & b & & \\ 0 & 0 & c & \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ inf $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ & b & 0 & 0 \\ & & c & 0 \\ & & & d \end{pmatrix}$
- Matrice diagonale: $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

Somma tra matrici: $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 11 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Prodotto tra matrici: $A_{n\times m} \cdot B_{m\times q} = C_{n\times q}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 4^{*} & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}$$

$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$*$: $1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 = 4$

Rango: Numero di vettori di una matrice lin dipendenti, $\leq$ max(righe, colonne)

Gauss: Per trovare il rg di matrice si usa Gauss.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 9 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{II^{a} = II^{a} - 3I^{a} \\ III^{a} = III^{a} - 2I^{a}}]{} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & -13 & -18 \\ 0 & -10 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow[III^{a} = -13\,III^{a} + 10\,II^{a}]{} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & -13 & -18 \\ 0 & 0 & 11/3 \end{pmatrix}$$

vogliamo zeri

vogliamo 0

rg = 3, se avessi avuto righe con soli 0 il rg sarebbe diminuito.

Capitolo 2: Matrici

Determinante: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$

det matrice con vettori l.d. = 0

$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - ibd$

Teorema di Binet: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

Invertibilità matrice: Una matrice si dice invertibile se ha i vettori l.i., quindi ha $\det \neq 0$.

Kronecker: Se tutte le sottomatrici di ordine n hanno det nullo, $rg < n$

Se anche una sola sottomat. di ordine n ha det non nullo, $rg \geq n$

Matrice Inversa: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, per ottenere A^{-1} affianchiamo ad A la matrice identità e trasformiamo A nella mat. identità, ottenendo a destra la nuova matrice A^{-1}.

Eg: $\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{Id}\right) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{Id} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$

Capitolo 3: Sistemi di equazioni lineari

Sistema: Un sistema di equazioni lineare può essere visto come una matrice

Eg: $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 4x-y=2 \end{cases} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{incompleta}} \quad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)}_{\text{completa}}$

Soluzioni sistema: Un sistema può essere determinato, indeterminato, impossibile.

- impossibile sse $rg(A) \neq rg(A|b)$
- possibile sse $rg(A) = rg(A|b)$.

Rouché-Capelli: Se il sistema é possibile, n° sol: ∞^{n-r} dove n = incognite, r = rg.

Dunque se $n=r$ il sistema è determinato, altrimenti indeterminato

Capitolo 4: Applicazioni Lineari

Applicazione Lineare / Omomorfismo: Siano V e W due sottospazi e $f: V \to W$. f é lineare se:

- $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
- $f(\lambda \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot f(\vec{v}) \quad \forall \lambda \in K, v \in V$

Kernel e Immagine: Sia $f: V \to W$ lineare.

- Il Kernel di un'applicazione lineare é l'insieme di valori per cui $f(v) = 0$.
- L'immagine di un'applicazione lineare é il rango di W.

Teorema nullità rango: $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$.

Iniettività / Suriettività: Dal teorema nullità del rango consegue che:

- f é iniettiva se $\dim(\mathrm{Ker}(v)) = 0$
- f é suriettiva se $\dim(\mathrm{Im}(v)) = \dim(V)$
- Se $\dim(V) > \dim(W)$ mai iniettiva
- Se $\dim(V) < \dim(W)$ mai suriettiva
- Se $\dim(V) = \dim(W)$ iniettiva $\longleftrightarrow$ suriettiva

Matrice Associata: Ad ogni applicazione lineare possiamo associare una matrice associata. La matrice associata lo é ad una base, che può essere quella canonica così come una base qualsiasi.

Eg.: canonica

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\7\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

mat. associata: $\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\0 & -1 & 0\\7 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Eg.: non canonica

Si riconducono i vettori in forma canonica.

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix}\ f\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$$

mat associata: $\begin{pmatrix}-4 & 7 & -3\\1 & 1 & -1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Capitolo 5: Diagonalizzabilitá di Matrici

Endomorfismi / Omomorfismi: Sia $f: V \to W$ lineare. Se $V = W$ f é un endomorfismo, se $V \neq W$ omomorfismo.

Polinomio caratteristico: det della matrice con sulla diagonale il seguente valore: $x - \lambda$.

Eg.: $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$, pol. carat.: $\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 7 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

Autovalori: valori che risolvono il polinomio caratteristico.

Autovettori: vettori $\neq 0$, $\in Ker(f)$, relativi ad un autovettore

Autospazi: Spazi generati da autovalori

Molteplicitá algebrica: quante volte il valore assoluto risolve il pol. carat. (dim. autovalore)

Molteplicitá geometrica: dimensione autospazio.

Diagonalizzabilitá: A diagonalizzabile se $\exists$ M, D tc:

- M invertibile
- D diagonale
- $A = MDM^{-1}$

Riconducendoci ad autovalori/vettori/spazi, possiamo dire che la matrice é diagonalizzabile sse $m_a = m_g$ (molt. alg = molt. geom)

Eg.: $p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -12 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-2)^1(\lambda-1)^1 \to m_a = 1$

autovalori: $\lambda = 2$, $\lambda = 1$

autospazi: $\lambda = 2 \to Ker(A - 2I) = Ker \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -12 & 3 \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = y = 4x = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\} \to m_g = 1$

$\lambda = 1 \to Ker(A - I) = Ker \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = y = 3x = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \to m_g = 1$

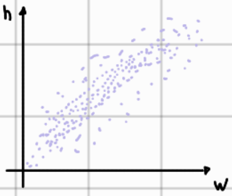
La matrice é diagonalizzabile per $\lambda = 1$, $\lambda = 2$

Teorema spettrale: matrice simmetrica $\longleftrightarrow$ diagonalizzabile

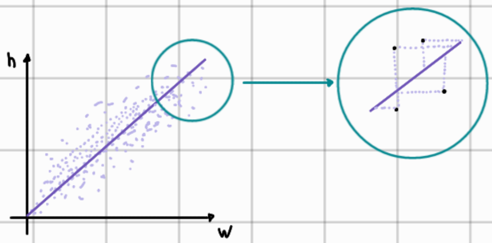
Capitolo 6: Regressione Lineare

Regressione lineare: Tecnica creata per analizzare una serie di dati dipendenti da valori.

E.g.: correlazione tra peso e altezza.



Retta di regressione lineare: retta $y = \bar{\alpha}x + \bar{\beta}$ che minimalizza la somma quadratica degli scarti.



Scarto quadratico: $\sum_{i=1}^{n} (w_i - \bar{\alpha} h_i - \bar{\beta})^2$

Scarto quadratico medio: $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (w_i - \bar{\alpha} h_i - \bar{\beta})^2$

Baricentro: punto di coordinate: $(\hat{x}, \hat{y})$, da cui la retta passa.

$\hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \hat{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$

Formule $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$: $\bar{\alpha} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{x})(y_i - \hat{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{x})^2} \qquad \bar{\beta} = \hat{y} - \bar{\alpha}\hat{x}$

Capitolo 6: Regressione Lineare

Eg.: Dati i punti $A=(2,9)$, $B=(-1,16)$, $C=(-2,1)$, trova $\bar{\beta}$.

1. Controllo se i punti sono allineati

$$\text{Det}\begin{pmatrix} A_x-B_x & A_y-B_y \\ C_x-B_x & C_y-B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 9-16 \\ -2+1 & 1-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & -15 \end{pmatrix} = -45-7=-52 \neq 0 \rightarrow \text{non sono allineati;}$$

2. Trovo $\hat{x}$ e $\hat{y}$ (medie)

$$\hat{x} = \frac{2-1-2}{3} = -1/3 \qquad \hat{y} = \frac{9+16+1}{3} = \frac{26}{3}$$

3. Formula per trovare $\bar{\alpha}$

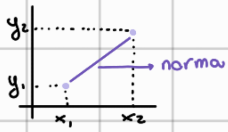
$$\bar{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{x})(y_i-\hat{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{x})^2} = \frac{(2+1/3)(9-\frac{26}{3}) + (-1+1/3)(16-\frac{26}{3}) + (-2+1/3)(1-\frac{26}{3})}{(2+1/3)^2+(-1+1/3)^2+(-2+1/3)^2} = 1$$

4. Formula per trovare $\bar{\beta}$

$$\bar{\beta} = \hat{y} - \bar{\alpha}\hat{x} = \frac{26}{3} + \frac{1}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

Capitolo 7: Geometria analitica

Norma: distanza tra (x_1, y_1) e (x_2, y_2).



norma di $v = \|v\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$

Ortogonalità: due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare é $=0$

Ortonormali: due vettori sono ortonormali se sono ortogonali e la loro norma $=1$

Prodotto angolare: dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ il loro prodotto angolare é $\alpha = \arccos\left(\frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}\right)$

Proiezione: dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, la proiezione di $\vec{w}$ su $\vec{v}$ é $= p_v(\vec{w}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|v\|^2}$

Perpendicolarità: due rette v e w sono perpendicolari se $v \cdot w = 0$

Paralleli: due rette v e w sono paralleli se $v \wedge w = 0$

Par. distinte: $v \neq w$ Par. coincidenti: $v = w$

Complanare: due rette v e w sono complanare se sono incidenti o parallele.

Incidenti: due rette v e w sono incidenti se hanno un solo punto in comune e non divide il piano in 4 angoli retti (perpendicolari)

Sghembe: due rette v e w sono sghembe se non sono incidenti ne parallele

Coniche: é l'insieme delle soluzioni di un'equazione del tipo: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

Eg: $3x^2 + 5xy - y^2 - 2x + 5y - 1 = 0$

Degenere o genere: Presa una conica stabiliamo se genera o meno attraverso il determinante della matrice

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix} \begin{cases} = 0 & \text{degenere} \\ \neq 0 & \text{genere} \end{cases}$$

Classificazione: Se la conica é genere, possiamo stabilire che cos'é con un altro determinante

$$\det(B) = \det\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{cases} > 0 & \text{ellisse} \\ = 0 & \text{parabola} \\ < 0 & \text{iperbole} \end{cases}$$