

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина
Кафедра физики

ИЗУЧЕНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Методические указания к виртуальной лабораторной работе по физике

Екатеринбург

Составители: Ю.Г. Карпов, А.Н. Филанович, В.С. Черняев
Научный редактор: проф. д.ф.м.н. Ф.А.Сидоренко

ИЗУЧЕНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ:
Методические указания к виртуальной
лабораторной работе по курсу «Физика»
для студентов для студентов всех форм
обучения всех специальностей.
Екатеринбург: УрФУ, 12 с.

В работе изложена теоретические представления о сложении гармонических колебаний с близкими частотами и взаимно-перпендикулярных колебаний с неравными частотам.

Подготовлено кафедрой физики

© ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет»

1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЗАТУХАЮЩИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Колебательный контур - это электрическая цепь (рис.1), состоящая из конденсатора C , катушки индуктивности L и активного сопротивления R .

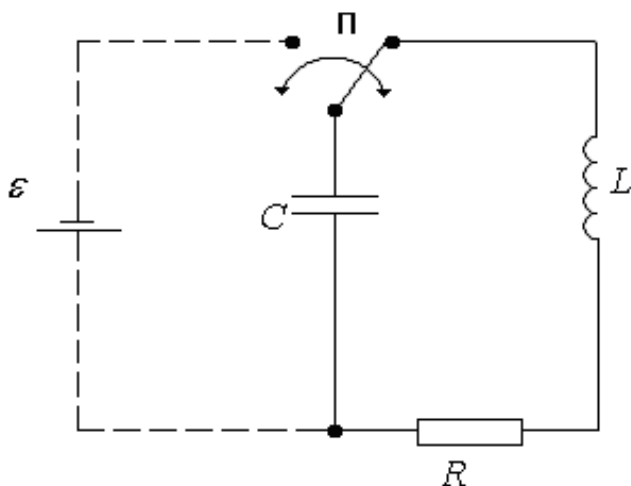


Рис. 1. Колебательный контур

Источник тока ε и переключатель Π нужны только в начальный момент для зарядки конденсатора. Напомним, что в этой цепи происходит периодический обмен энергией между электрическим полем конденсатора ($W_E = \frac{q^2}{2C}$, где q - заряд на обкладках конденсатора) и магнитным полем катушки ($W_B = \frac{LI^2}{2}$, где I - разрядный ток, протекающий через катушку).

Составим уравнение колебаний, происходящих в реальном ($R \neq 0$) колебательном контуре. По закону сохранения энергии

$$-d(W_E + W_B) = I^2 R dt. \quad (1)$$

В уравнении (1) записано, что полная энергия контура ($W = W_E + W_B$) убывает со временем (знак "-"), переходя в "джоулево" тепло (правая часть). В это уравнение вместо W_E и W_B надо подставить их значения, продифференцировать по времени и разделить обе части на произведение Ldt . Учитывая, что $I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$, и $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$ и вводя обозначения $\frac{R}{2L} = \beta$ и $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, окончательно получим

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (2)$$

Перед нами однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Решение его зависит от соотношения между ω_0^2 и β^2

Возможны три варианта:

а) при $\beta^2 < \omega_0^2$ решение уравнения (5.1.2) имеет вид

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (3)$$

из которого следует, что заряд на обкладках конденсатора изменяется по периодическому закону, а амплитудное значение убывает ("затухает") со временем по экспоненциальному закону (рис. 2).

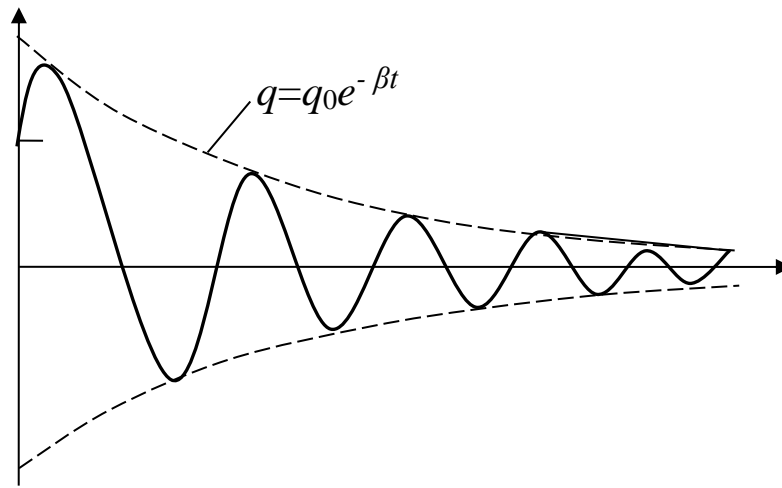


Рис.2. Амплитуда затухающих колебаний

Частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (4)$$

где $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ и $\beta = \frac{R}{2L}$, β - коэффициент затухания.

Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}; \quad (5)$$

б) из (4) и (5) видно, что с ростом β период колебаний увеличивается и при $\beta^2 \rightarrow \omega_0^2$ $T \rightarrow \infty$. При этих условиях колебания в контуре прекращаются. Значение сопротивления контура, удовлетворяющее условию $\beta_{\text{кр}}^2 = \omega_0^2$, называют критическим. Из (5) следует

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}; \quad (6)$$

в) при $\beta^2 > \omega_0^2$ решение уравнения (2) представляет собой сумму экспонент с вещественными показателями. Это означает, что электрический контур, получив энергию извне, возвращается в исходное состояние, не совершая колебаний.

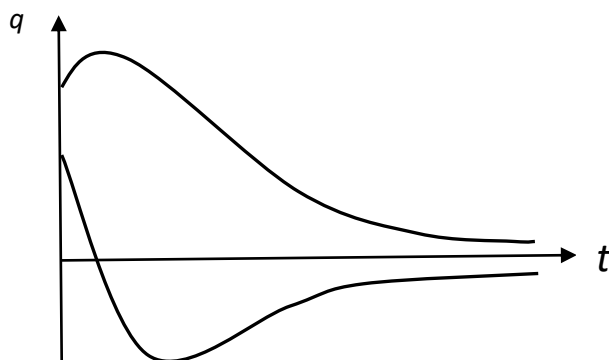


Рис. 3. Аперiodический разряд

Полученная энергия с некоторой задержкой во времени переходит в тепловую. Этот надкритический процесс получил название аперiodического (непериодического) разряда. Возможные для разных начальных условий виды зависимости $q(t)$ изображены на рис.3. Разделив на C (емкость конденсатора) левую и правую части уравнения (5.1.3), получим уравнение затухающих колебаний для напряжения на обкладках конденсатора

$$U = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (7)$$

График зависимости $U(t)$, построенный по уравнению (7), имеет вид, изображенный на рис.4. Видно, что напряжение на обкладках конденсатора изменяется периодически. При этом множитель $U_m = U_0 e^{-\beta t}$, играющий роль амплитуды колебаний, убывает со временем по экспоненциальному закону (пунктирная кривая на рис.4). Скорость уменьшения амплитуды колебаний определяется коэффициентом затухания β . По графику можно экспериментально определить значение периода колебаний T , амплитуду напряжения на конденсаторе U_0 в начальный момент времени, напряжение на конденсаторе в этот же момент времени $U_0 \cos \varphi_0$ и начальную фазу колебаний φ_0 .

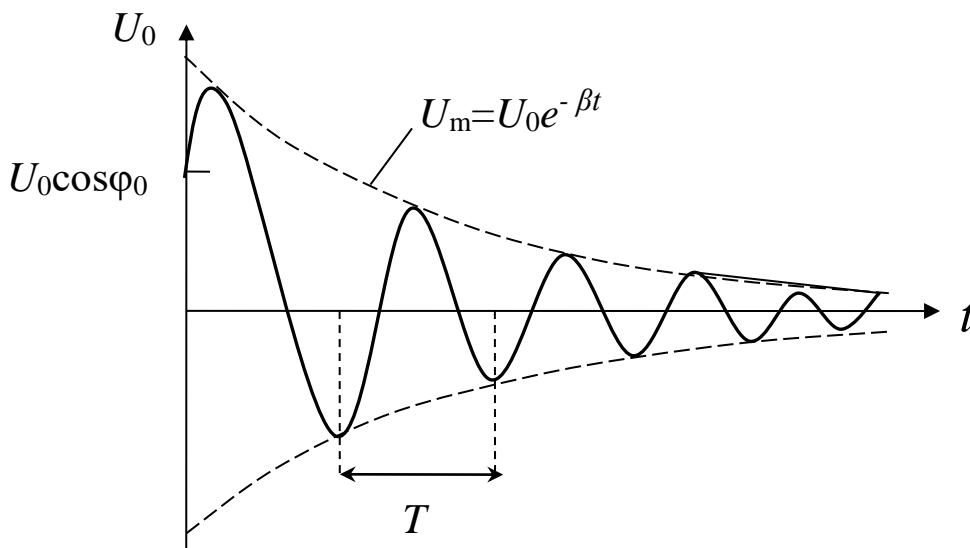


Рис.4. Зависимость $U(t)$ для затухающих колебаний

Отметим несколько характеристик, определяющих интенсивность затухания: логарифмический декремент затухания λ – натуральный логарифм отношения двух соседних амплитуд, отличающихся по времени на один период. По определению

$$\lambda = \ln \frac{U_0 e^{-\beta t}}{U_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{-\beta t + \beta t + \beta T} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (8)$$

На практике для оценки λ удобнее сравнивать амплитуды колебаний, отстоящих друг от друга во времени на N периодов:

$$\lambda = \frac{1}{N} \ln \frac{U_0 e^{-\beta t}}{U_0 e^{-\beta(t+NT)}}; \left(\frac{1}{N} \ln e^{\beta NT} = \beta T \right). \quad (9)$$

Введем в рассмотрение время релаксации τ – промежуток времени, по истечении которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз:

$$e = \frac{U_0 e^{-\beta t}}{U_0 e^{-\beta(t+\tau)}}; e = e^{\beta \tau}; \beta \tau = 1; \tau = \frac{1}{\beta}. \quad (10)$$

Число полных колебаний за время релаксации N_τ определяется по формуле $N_\tau = \frac{\tau}{T}$. Из уравнений (8) и (10) следует, что

$$N_\tau = \frac{1}{\lambda}. \quad (11)$$

Добротность колебательной системы с точностью до множителя 2π равна отношению энергии, запасенной в системе в данный момент, к убыли этой энергии за один период колебаний. В случае колебательного контура с небольшим затуханием добротность Q равна количеству полных колебаний за время релаксации, умноженному на π :

$$Q = \pi N_\tau = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (12)$$

В случае слабого затухания $\beta^2 \ll \omega_0^2$ добротность контура оценивается через его параметры по приближенной формуле

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (13)$$

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ РАБОТЫ

Работа по изучению затухающих колебаний в колебательном контуре производится на виртуальной установке, включающей осциллограф, магазин сопротивления и систему возбуждения колебаний. Большую часть панели установки занимает панель осциллографа с временной развёрткой

затухающих колебаний. Слева от экрана осциллографа расположена ручка регулировки масштаба вертикальной шкалы развёртки (в В/дел), слева от экрана – ручка регулировки масштаба горизонтальной шкалы развёртки (в мс/дел). В качестве масштабных делений рассматриваются деления крупной сетки экрана осциллографа.

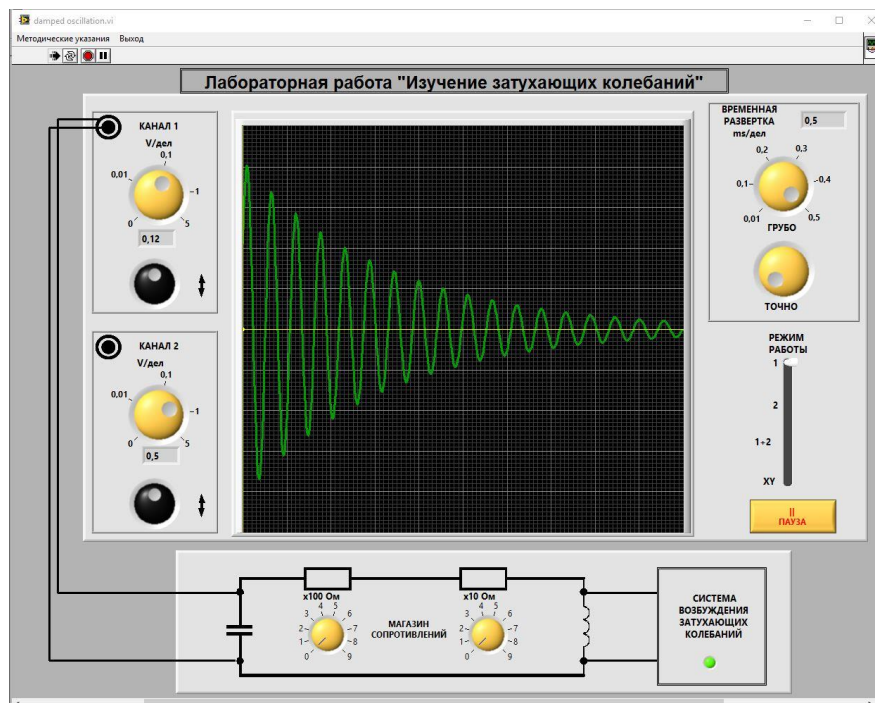


Рис. 5. Лицевая панель установки по изучению затухающих колебаний.

Порядок выполнения работы.

Задача 1. Построение графика затухающих колебаний.

Уравнение затухающих колебаний.

1.1. На магазине сопротивлений вращением соответствующих ручек регулировки установите минимальное сопротивление контура ($R_{\text{маг}} = 0$). Цену деления осциллографа по вертикали (канал 1) установите равной 0,1 В/дел, а по горизонтали (временная развёртка) – 0,2 мс/дел. На экране появится осциллограмма, аналогичная изображенной на рис. 5.

1.2. Измерьте время, равное трем периодам, и определите среднее значение периода затухающих колебаний (см. рис. 6).

1.3. Для построения графика затухающих колебаний оцените амплитудные значения напряжения $U_m = U_0 e^{-\beta t}$ через временной интервал, равный половине периода. Для этого измерьте ординаты точек 1, 3, 5,... и 2, 4, 6,... (см. рис. 6). Определите интервалы времени t_1 и t_2 (см. рис.6), временные координаты остальных точек осциллограммы считайте, прибавляя последовательно время, равное периоду T . Результаты занесите в табл. П.2.1 и 2.2 отчёта.

Измерьте $U_0 \cos \varphi_0$ в момент времени $t = 0$. По результатам измерений постройте график затухающих колебаний в координатах, ориентируясь на вид конкретной осциллограммы.

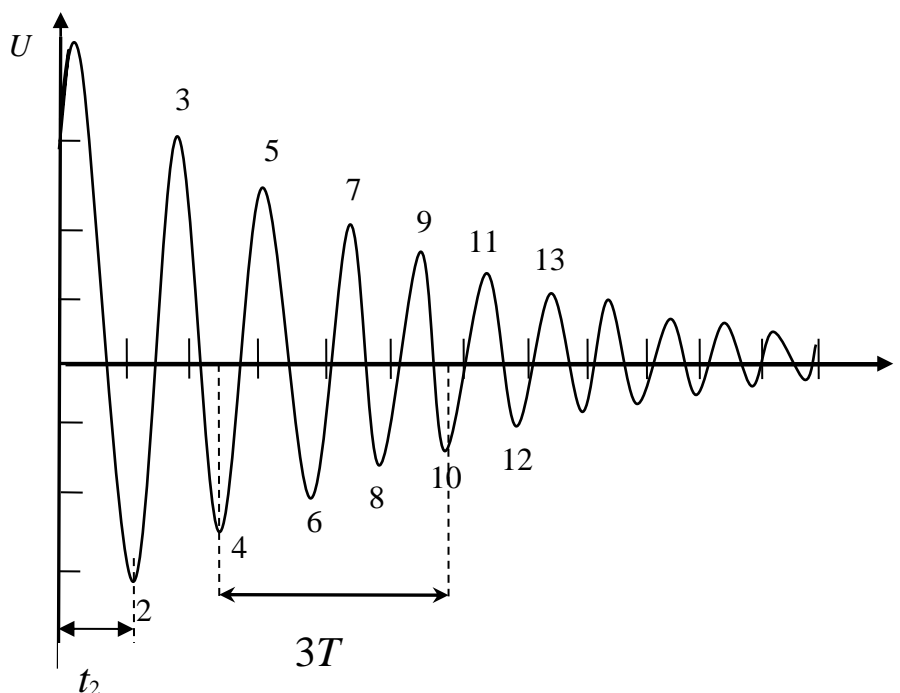


Рис. 6. Примерный вид осциллограммы.

1.4. По данным табл. П.2 отчёта постройте график уменьшения амплитуды затухающих колебаний со временем в координатах $U_m = f(t)$ (см. рис. 7). Здесь $U_m = U_0 e^{-\beta t}$.

1.5. Для определения начального напряжения на обкладках конденсатора U_0 и коэффициента β затухания воспользуйтесь формулой

$$U_m = U_0 e^{-\beta t}, \ln U_m = \ln U_0 - \beta t.$$

Посчитайте $\ln U_m$ и занесите в табл. П. 2. отчёта. Постройте график зависимости $\ln U_m = f(t)$ (см. рис. 8).

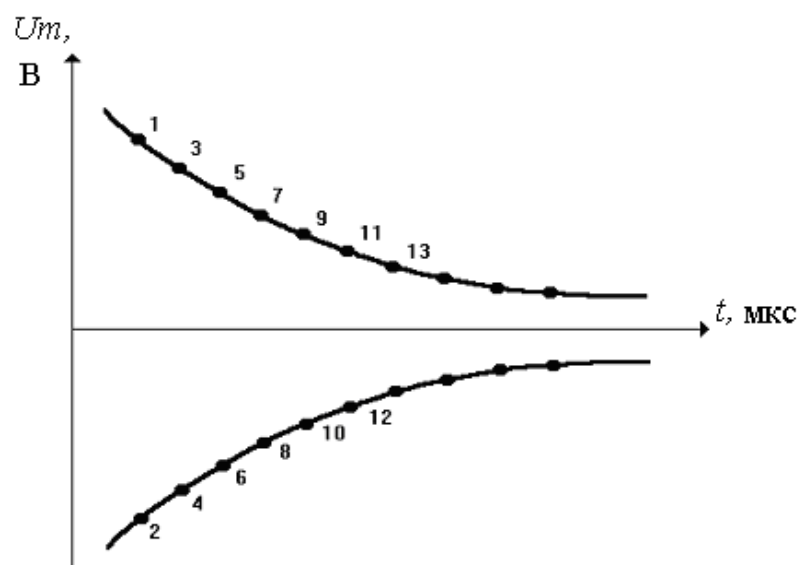


Рис.7. Примерный вид зависимости $U_m = f(t)$

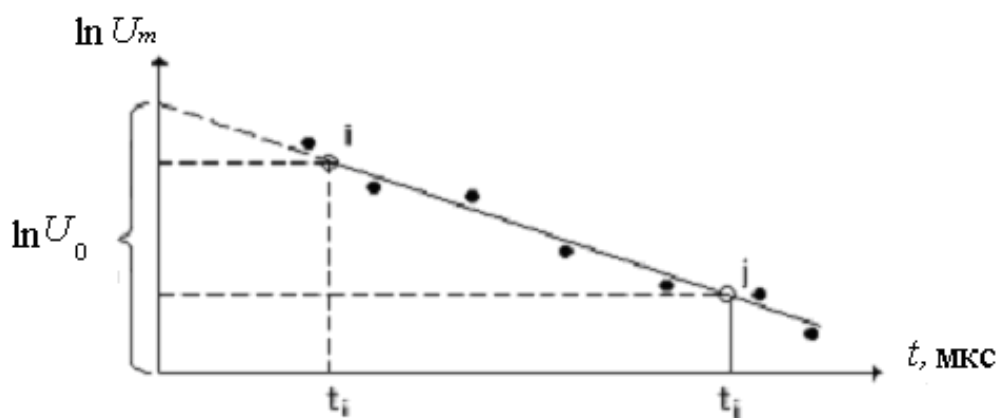


Рис.8. Примерный вид зависимости $\ln U_m = f(t)$

Продолжив прямую до пересечения с осью ординат, определите U_0 . По наклону прямой, взяв координаты достаточно далеко отстоящих точек i, j , определите β по формуле

$$\beta = \frac{\ln U_{m,i} - \ln U_{m,j}}{t_j - t_i}$$

1.6. Вычислите $\cos \varphi_0$ и величину начальной фазы φ_0 . По формуле $\omega = \frac{2\pi}{\langle T \rangle}$ рассчитайте значение циклической частоты затухающих колебаний ω .

1.7. Таким образом, экспериментально определены все параметры уравнения (2) затухающих периодических колебаний. Запишите уравнение затухающих колебаний $U = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$.

Задача 2. Определение логарифмического декремента затухания, коэффициента затухания, добротности контура в зависимости от его сопротивления

Фактическое значение активного сопротивления контура R для используемого в работе контура неизвестно и оценивается графическим способом.

2.1. Установите на магазине сопротивлений минимальное значение ($R_{\text{маг}} = 0$). Измерьте и запишите период колебаний.

2.2. Измерьте амплитуды точек, отстоящих друг от друга на N периодов (рекомендуем $N=2$). Отсчеты начинайте с третьей точки (см. рис. 7). Найдите отношение амплитуд и рассчитайте λ, β, Q по формулам:

$$\lambda = \frac{1}{N} \ln \frac{U_3^*}{U_n}; \quad \beta = \frac{\lambda}{\langle T \rangle}; \quad Q = \frac{\pi}{\lambda}.$$

2.3. Повторите измерения для других значений сопротивления $R_{\text{маг}}$, изменяя его через 10 Ом и добиваясь каждый раз устойчивого изображения осциллограммы. Полученные результаты занесите в табл. П. 3 отчёта.

Логарифмический декремент затухания λ , коэффициент затухания β , добротность Q контура

2.4. В измерениях 1.1 – 1.5 обычно $\beta^2 \ll \omega_0^2$, поэтому зависимости $\lambda(R)$ и $\beta(R)$ могут быть представлены как линейные. Это позволяет графически оценить сопротивление контура R .

Считаем, что $R = R_{\text{маг}} + R_{\text{уст}}$ ($R_{\text{уст}}$ – активное сопротивление всех остальных частей контура). Учтем, что при $\beta^2 \ll \omega_0^2$ $\lambda \approx \frac{R}{2L} 2\pi\sqrt{LC}$ (см. (7)); следовательно, график $\lambda = f(R)$ есть прямая линия, проходящая через начало координат.

Постройте вспомогательный график в координатах $\lambda = f(R_{\text{маг}})$ (см. рис. 9). Продолжите прямую до пересечения с осью x , перенесите начало отсчета сопротивления контура R в эту точку и по графику определите $R_{\text{уст}}$. Занесите в табл. П. 5 значения сопротивления контура R ($R_{\text{маг}} + R_{\text{уст}}$).

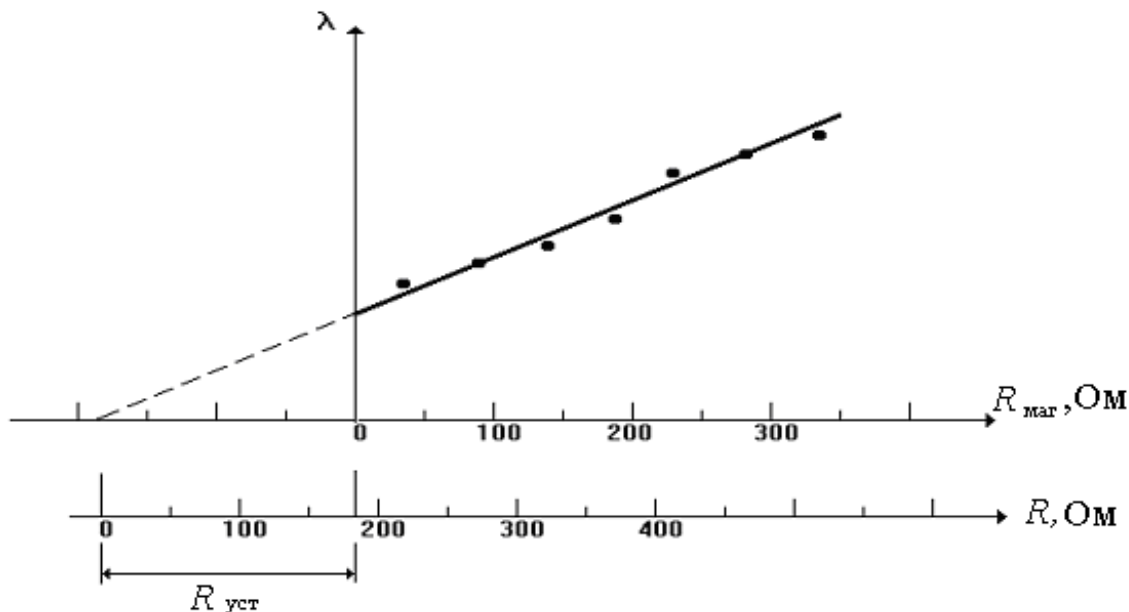


Рис. 9. Примерный вид зависимости $\lambda = f(R_{\text{mag}})$. Оценка $R_{\text{уст}}$

2.5. Постройте графики зависимости $\lambda(R)$, $\beta(R)$, $Q(R)$.

Примечание. В случае отклонения от прямолинейной зависимости при больших R повторите измерения, выбрав меньший диапазон изменения R_{mag} .

Задача 3. Аперриодический режим контура. Определение критического сопротивления

3.1. Постепенно увеличивая сопротивление магазина R_{mag} , наблюдайте за трансформацией осциллограммы затухающих колебаний. Критический режим работы достигается, когда осциллограмма примет вид, изображенный на рис. 10. Оцените значение критического сопротивления

$R_{\text{mag.кр}} = \dots\dots\dots \text{ОМ}$; $R_{\text{кр}} = R_{\text{mag.кр}} + R_{\text{уст}}$; $R_{\text{кр}} = \dots\dots\dots \text{ОМ}$.

3.2. Занесите в табл. П. 4 отчёта координаты нескольких характерных точек осциллограммы (рис. 10).

По данным табл. П. 4 постройте график $U(t)$.

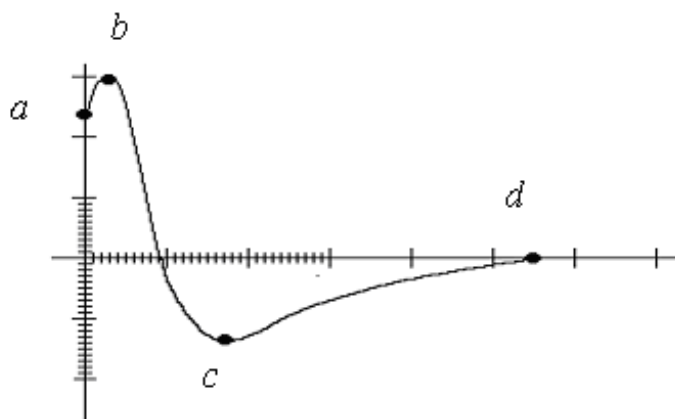


Рис. 10. Примерный вид осциллограммы в критическом режиме работы контура

Заключение

1. Коэффициент затухания β в работе оценивался двумя способами:

а) в задаче 1 – по графику зависимости $U = f(t)$, где $U_m = U_0 e^{-\beta t}$,

б) в задаче 2 – по отношению амплитуд колебаний.

Сравните полученные значения для $R_{\text{маг}} = 0$ ($R = \dots\dots\dots \text{Ом}$):

а) $\beta = \dots\dots\dots \text{с}^{-1}$, б) $\beta = \dots\dots\dots \text{с}^{-1}$.

2. Оцените индуктивность контура L

а) по результатам задачи 1, используя формулу

$$R_{\text{маг}} = 0, R = R_{\text{уст}}, L = \frac{R}{2\beta},$$

б) по результатам задачи 2 используйте графический способ оценки индуктивности, учитывая, что значение β рассчитывалось несколько раз для различных сопротивлений контура. Оцените наклон прямой, построенной по

данным табл. П. 5 в соответствии с уравнением $\beta = \frac{R}{2L}$ (см. рис. 12):

$$\frac{1}{2L} = \frac{\beta_j - \beta_i}{R_j - R_i}, \text{ отсюда находим } L.$$

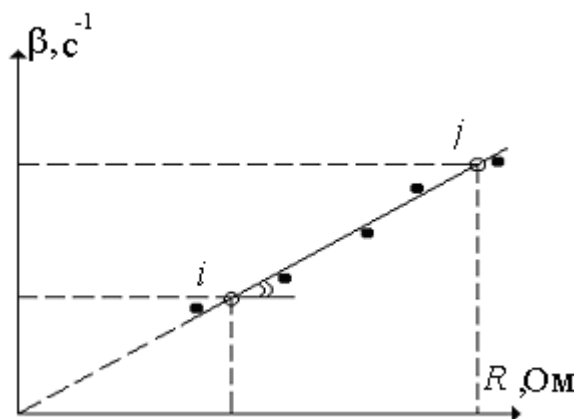


Рис. 12. Примерный вид графика $\beta(R)$

Сделайте вывод какому способу оценки L следует отдать предпочтение.

3. Оцените емкость контура. Используйте наиболее достоверное, по вашему мнению, значение L :

а) воспользуйтесь формулой Томсона $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ приближенной оценки периода затухающих колебаний

$$T \cong 2\pi\sqrt{LC}, \quad C = \frac{T^2}{4\pi^2 L}.$$

б) воспользуйтесь формулой для критического сопротивления рассчитайте электроёмкость контура.

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}; \quad C = \frac{4L}{R_{\text{кр}}^2};$$

Сделайте вывод какому способу оценки емкости следует, по вашему мнению, отдать предпочтение?

Ответьте на следующие вопросы:

В каких случаях можно пользоваться формулой $T = 2\pi\sqrt{LC}$ для расчета периода затухающих колебаний?

Выполняется ли в работе условие $\beta^2 \ll \omega_0^2$?

($\omega_0^2 = \omega^2 + \beta^2$), при малых значениях сопротивления R можно принять ($\omega_0 \cong \omega$). Если условие $\beta^2 \ll \omega_0^2$ выполняется, то, примерно, в какой области значений сопротивления контура R ?