Министерство образования и науки Российской Федерации

Уральский федеральный университет

имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

СЛОЖЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Методические указания к виртуальной лабораторной работе № 15 по физике

Екатеринбург

УрФУ

2016

УДК 537.86 (076.5)

Составители: Ю. Г. Карпов, А. Н. Филанович, В. С. Черняев, Н. Д. Ватолина

Научный редактор – д-р физ.-мат. наук, проф. Ф. А. Сидоренко

Сложение электрических колебаний : методические указания к лабораторной работе № 15 по физике / сост. Ю. Г. Карпов, А. Н. Филанович, В. С. Черняев, Н. Д. Ватолина. – Екатеринбург : УрФУ, 2016. – 21 с.

В работе изложен метод определения частоты колебаний, основанный на сложении колебаний известной частоты с колебаниями неизвестной частоты. Рассматриваются сложения однонаправленных колебаний с близкими частотами – биения и сложение взаимно перпендикулярных колебаний – фигуры Лиссажу.

Указания предназначены для студентов всех специальностей всех форм обучения.

Табл. 2. Рис. 7. Прил. 1.

Подготовлено кафедрой физики

СЛОЖЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Цель настоящей лабораторной работы – изучение сложения электромагнитных колебаний.

Работа содержит две задачи: в первой предстоит познакомиться со сложением колебаний одного направления и измерить частоту промышленной электрической сети методом биений; во второй – изучить сложение взаимно перпендикулярных колебаний и измерить ту же частоту методом фигур Лиссажу. В обеих задачах результат сложения колебаний наблюдается на экране осциллографа.

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

1. Колебательный контур. Электрическая цепь, изображенная на рис. 1, называется колебательным контуром. Основными элементами в ней являются: катушка индуктивности L, конденсатор C и активное сопротивление R. Пусть в начальный момент конденсатор заряжен. Напомним, что в этой цепи происходит периодический обмен энергией между электрическим полем конденсатора и магнитным полем катушки. Дважды за период колебаний электрическая энергия $W_E = q^2/2C$, где q – заряд, сосредоточенный на обкладках конденсатора, полностью (идеальный контур) или частично (реальный контур) переходит в энергию магнитного поля катушки ($W_B = LI^2/2$, где I – разрядный ток, протекающий через катушку). В реальном контуре собственные колебания являются затухающими.

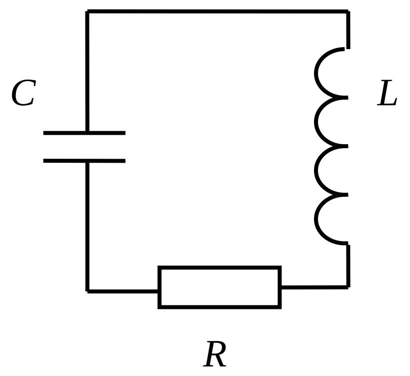


Рис. 1. Колебательный контур

2. Основные уравнения электрических колебаний. Исходным уравнением для любого (по физической природе) колебания является дифференциальное уравнение второго порядка, составленное с учетом конкретных условий. Получим это уравнение для идеального колебательного контура ($R = 0$). Используем закон сохранения энергии в этой цепи:

$$W_E + W_B = \text{const}, \text{ или } \frac{d}{dt}\left(W_E + W_B\right) = 0 \; . \qquad (1)$$

С учетом значений W_E и W_B перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}\right) = 0 \, , \qquad (2)$$

где q и I – мгновенные значения заряда и тока в контуре. Дифференцируя (2), имеем

$$\frac{2q}{2C} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{2LI}{2} \cdot \frac{dI}{dt} = 0 \, .$$

Разделив обе части на LI и обозначив

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2, \quad \frac{dl}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \, ,$$

получим исходное дифференциальное уравнение собственных незатухающих электрических колебаний в контуре:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0 q = 0 \, . \qquad (3)$$

Его решение в тригонометрической форме имеет вид

$$q = q_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) \qquad (4)$$

и носит название уравнения незатухающего гармонического колебания. В уравнении (4), таким образом, q – мгновенное значение заряда в момент времени t; q_0 – амплитудное (наибольшее) значение заряда в контуре; $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ – фаза колебания; φ_0 – начальная фаза; $\omega_0 = 2\pi/T$ – циклическая частота; T – период колебаний.

И, наконец, разделив обе части уравнения (4) на C (емкость конденсатора), получим уравнение незатухающих гармонических электрических колебаний, записанное для напряжения на обкладках конденсатора:

$$U = U_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right). \qquad (5)$$

Конечно, условие $R = 0$ в реальном контуре невыполнимо, и в системе должны возникнуть затухающие колебания. Чтобы колебания остались гармоническими, потерю энергии необходимо восполнить работой внешнего источника тока. В этом случае установившиеся вынужденные колебания являются колебаниями незатухающими и могут быть описаны уравнением

$$U = U_0 \cos\left(\omega t + \varphi_0\right), \qquad (6)$$

где амплитуда колебаний U_0 и начальная фаза φ_0 сложным образом зависят от параметров контура и характеристик внешнего сигнала, а частота колебаний ω определяется частотой внешнего сигнала. Именно такой электрический сигнал (временную развертку синусоидального переменного напряжения, получаемого в контуре) вы будете наблюдать на экране электронного осциллографа при выполнении лабораторной работы.

3. Сложение гармонических электрических колебаний. На отклоняющие пластины осциллографа можно одновременно подать два независимых электрических сигнала. Если источники этих сигналов соединены последовательно и подключены к одному входу осциллографа, то электронный луч на экране нарисует временну́ю развертку результирующего колебания. Если же оба источника электрических колебаний подключить раздельно на горизонтальный и вертикальный входы осциллографа, то электронный луч на экране будет двигаться по траектории результирующего колебания, получающегося при сложении взаимно перпендикулярных колебаний.

Сложение колебаний одного направления с близкими частотами (биения). При сложении двух колебаний, происходящих вдоль одного направления, согласно уравнениям

$$U_1 = U_{01} \cos\left(\omega_1 t + \varphi_{01}\right), \qquad (6а)$$

$$U_2 = U_{02}\cos\left(\omega_2 t + \varphi_{02}\right) \tag{6б}$$

(при условии $\omega_1 = \omega_2 = \omega$), получается результирующее колебание с той же частотой ω.

Используя представления о сложении двух колебаний одного направления с помощью векторной диаграммы, амплитуду результирующего колебания найдем по теореме косинусов

$$U_0^2 = U_{01}^2 + U_{02}^2 + 2U_{01}U_{02}\cos\Delta\varphi, \tag{7}$$

где $\Delta\varphi$ – разность фаз складываемых колебаний. Из выражения (7) видно, что если колебания синфазны $\left(\Delta\varphi = 0\right)$, то $U_0 = U_{01} + U_{02}$. В этом случае колебания максимально усиливают друг друга. И, напротив, если колебания происходят в противофазе $\left(\Delta\varphi = \pi\right)$, то $U_0 = \left|U_{01} - U_{02}\right|$, и при $U_{01} = U_{02}$ наблюдается полное гашение колебаний $\left(U_0 = 0\right)$.

Биения возникают вследствие того, что разность фаз складываемых колебаний (6а), (6б) с близкими частотами все время изменяется так, что оба колебания в какой-то момент оказываются в фазе, а через некоторое время – в противофазе, затем снова в фазе и снова в противофазе и т. д. В итоге возникают **периодические** изменения амплитуды результирующего колебания. Покажем это. Фраза «почти одинаковые частоты складываемых колебаний» означает, что $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 << \omega_1$ (или ω_2). Приняв для простоты $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$ и $U_{01} = U_{02} = U_0$, после тригонометрических преобразований («сумма косинусов двух углов») получаем

$$U = U_1 + U_2 = U_0\cos\omega_1 t + U_0\cos\left(\omega_1 + \Delta\omega\right)t = 2U_0\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\cos\left(\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t.$$

Учитывая, что $\Delta\omega << \omega_1$ и что $\omega_1 \approx \omega_2 = \omega$, окончательно получим уравнение биений

$$U = 2U_0\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\cos\omega t. \tag{8}$$

Уравнение (8) описывает колебание $U = U_0(t)\cos\omega t$ с частотой ω, амплитуда которого $U_0(t)$ меняется со временем по периодическому закону

$$U(t) = \left|2U_0 \cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|, \qquad (9)$$

где $\frac{\Delta\omega}{2}$ – циклическая частота биений.

На рис. 2 изображены графики результирующего колебания (а) и амплитуды биений (б). Период изменения амплитуды называют периодом биений $T_Б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$, а биения квадрата амплитуды происходят с частотой $\Delta\omega$.

Из рис. 2 видно, что циклическая частота биений равна $\Delta\omega$ (а не $\Delta\omega/2$), т. е. разности частот складываемых колебаний. Изучение биений представляет практический интерес, поскольку это один из вариантов осуществления амплитудной модуляции колебаний.

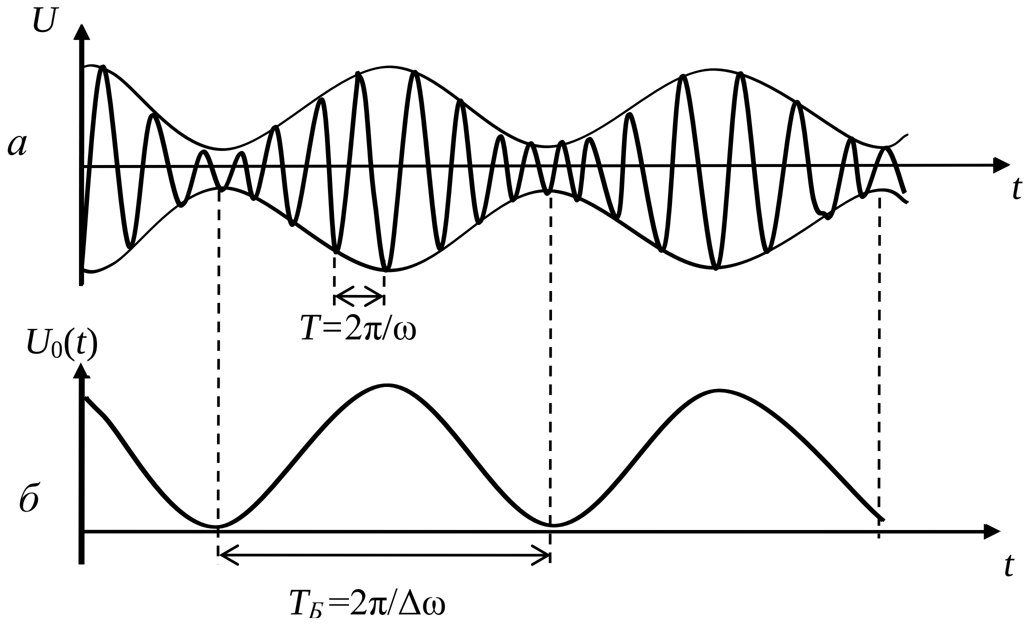


Рис. 2. Биения

Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.

Фигуры Лиссажу. Для простоты вначале рассмотрим случай, когда частоты складываемых колебаний одинаковы. Тогда вид уравнения результирующего колебания и его траектория будут определяться разностью фаз складываемых колебаний:

$$\left.\begin{aligned} U_x &= U_{01}\cos\left(\omega t + \varphi_{01}\right) \\ U_y &= U_{02}\cos\left(\omega t + \varphi_{02}\right) \end{aligned}\right\} \quad \Delta\varphi = \varphi_{01} - \varphi_{02}\,. \tag{10}$$

Если эти колебания синфазны $\left(\Delta\varphi = 0\right)$, то уравнение траектории (прямой) имеет вид

$$y = \frac{U_{01}}{U_{02}}\,x. \tag{11}$$

Если же складываемые колебания противофазны $\left(\Delta\varphi = \pi\right)$, то результирующее колебание происходит вдоль прямой во втором квадранте:

$$y = -\frac{U_{02}}{U_{01}}\,x\,. \tag{12}$$

Уравнения (11) и (12) получены из уравнений (10) путем исключения времени и переобозначений: $U_x = x$, а $U_y = y$.

Следовательно, в случае $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ и $\Delta\varphi = 0$, или $\Delta\varphi = \pi$, результирующее колебание происходит с частотой ω вдоль прямой (11) или (12) с амплитудой $U_0 = \sqrt{U_{01}^2 + U_{02}^2}$. Рис. 3 поясняет это.

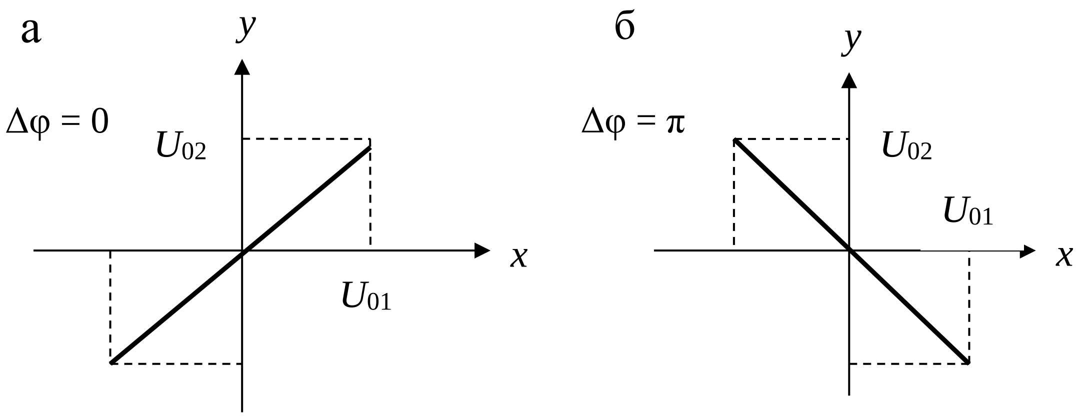


Рис. 3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Пусть теперь разность фаз складываемых колебаний $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$:

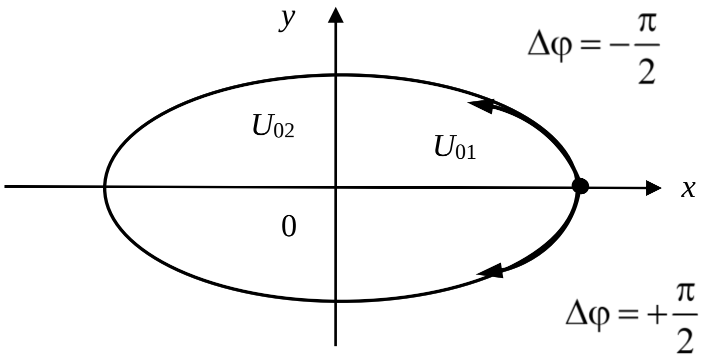


Рис. 4. Гармонические колебания по эллипсу

$$U_x = U_{01}\cos\omega t;$$

$$U_y = U_{02}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Снова переобозначая $U_x = x$, $U_y = y$ и учитывая, что $\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\omega t$,

получим

$$\begin{cases} \dfrac{x}{U_{01}} = \cos\omega t, \\ \dfrac{y}{U_2} = \sin\omega t. \end{cases} \qquad (13)$$

Возводя обе части этих уравнений в квадрат и почленно складывая их, получим уравнение эллипса, приведенного к осям *x* и *y:*

$$\frac{x^2}{U_{01}^2} + \frac{y^2}{U_{02}^2} = 1.$$

Полуоси эллипса равны U_{01} и U_{02}. Результирующее движение электронного луча происходит по эллипсу, изображенному на рис. 4. Направление движения определяется знаком величины $\Delta\varphi$ ($+\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$). При $U_{01} = U_{02}$ эллипс вырождается в окружность.

Если частоты складываемых перпендикулярных колебаний не одинаковы $(\omega_1 \neq \omega_2)$, то траектории результирующего движения представляют собой сложные кривые. Если отношение частот равно отношению целых чисел, то траектории оказываются замкнутыми фигурами, называемыми фигурами Лиссажу. В качестве примера рассмотрим сложение взаимно перпендикулярных колебаний, частоты которых отличаются в два раза:

$$\left.\begin{aligned} U_X &= U_{01}\cos\left(\omega_X t + \varphi_{01}\right) \\ U_Y &= U_{02}\cos\left(\omega_Y t + \varphi_{02}\right) \end{aligned}\right\} \quad \frac{\omega_X}{\omega_Y} = \gamma = 2\,,\ \Delta\varphi = 0\left(\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0\right).$$

Снова используя переобозначения и тригонометрические преобразования, перепишем уравнения

$$\begin{cases} x = U_{01}\cos\omega t, \\ y = U_{02}\cos\dfrac{\omega}{2}t = U_{02}\sqrt{\dfrac{1+\cos\omega t}{2}}. \end{cases} \tag{14}$$

Исключив из системы уравнений (14) время t, получим уравнение параболы

$$\frac{2y^2}{U_{02}^2} - \frac{x}{U_{01}} = 1\,, \tag{15}$$

вершина которой находится в точке ($-U_{01}$, 0), ось параболы совпадает с осью x, вогнутость обращена вправо (рис. 5).

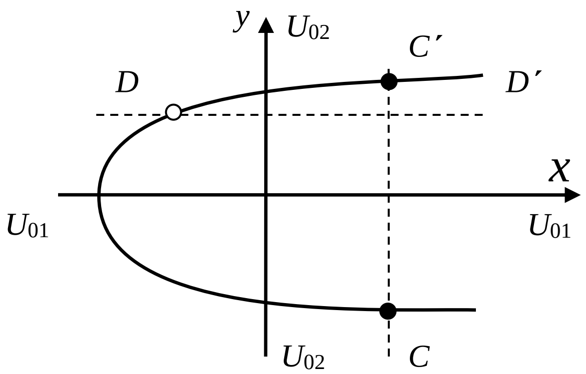
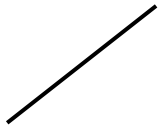
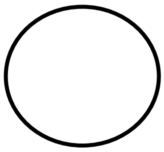
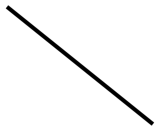
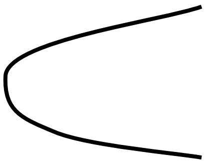
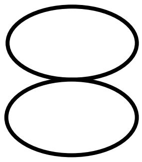
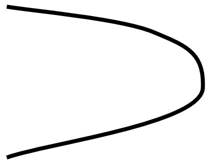
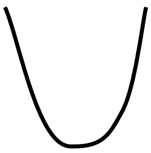
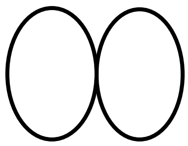
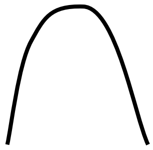
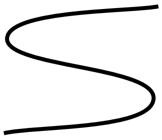
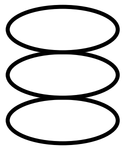
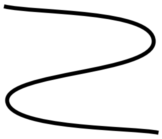
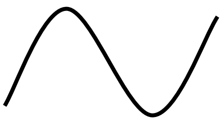
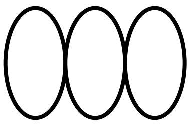
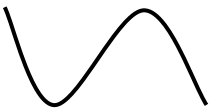
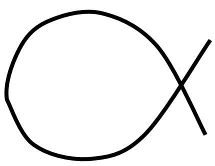
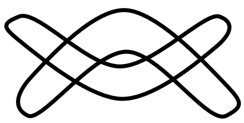
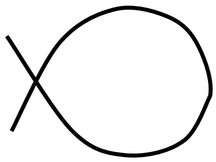


Рис. 5. Колебания по параболической кривой

Надо иметь в виду, что фазы складываемых колебаний φ_{01} и φ_{02} на практике медленно изменяются со временем, соответственно и разность фаз $\Delta\varphi$ претерпевает изменения со временем. В результате наблюдаемая на экране осциллографа картина неизбежно «плывет»: фигура Лиссажу постепенно трансформируется, принимая различные, но характерные для данного значения γ формы, соответствующие всевозможным значениям $\Delta\varphi$ в пределах от 0 до 2π .

Таблица 1. Фигуры Лиссажу для различных отношений частот

Отношение частот γ	Разность фаз $\Delta\varphi$		
	0	$\pi/2$	π
$\gamma = \frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{1}$			
$\gamma = \frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{2}{1}$			
$\gamma = \frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{2}$			
$\gamma = \frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{3}{1}$			
$\gamma = \frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{3}$			
$\gamma = \frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{2}{3}$			

Отношение частот складываемых колебаний можно легко определить по форме фигуры Лиссажу. Для этого достаточно провести две вспомогательные линии (это линии CC' и DD' на рис. 5), перпендикулярные осям x и y , и подсчитать количество пересечений этими линиями фигуры Лиссажу. В нашем примере на рис. 5

$$\gamma = \frac{\omega_X}{\omega_Y} = \frac{2}{1} ,$$

где 2 – число пересечений для линии CC', 1 – число пересечений для линии DD'.

В табл. 1 представлены фигуры Лиссажу для разных соотношений частот γ и разностей фаз $\Delta\varphi$.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ РАБОТЫ

Задача 1. Измерение частоты переменного электрического тока методом биений.

Цель работы

1. Приобретение начальных сведений об измерениях электрических величин с помощью осциллографа и звукового генератора.

2. Изучение сложения гармонических электрических колебаний с близкими частотами (биений) и использование этого метода для измерения частоты переменного тока.

Порядок выполнения работы

1. Регулятор «временная развертка ms/дел» перевести в положение «10» ms/дел.
2. Переключатель «Режим работы» перевести в положение «2» – вы увидите осциллограмму **сетевого** сигнала, поданного на **2-й канал** осциллографа.
3. Учитывая, что цена **большого** деления шкалы по оси напряжения для этого канала устанавливается ручкой «V/дел» в блоке «КАНАЛ 2», измерить амплитуду сетевого сигнала, занести в п. 1.1 отчета (U_{01}).
4. Переключатель «Режим работы» перевести в положение «1» – вы увидите осциллограмму сигнала с **генератора**, поданного на **1-й канал** осциллографа.

5. С помощью регулятора «Амплитуда, В» на панели генератора установить амплитуду сигнала с генератора равной амплитуде сетевого сигнала. Занести амплитуду сигнала генератора (U_{02}) в п. 1.1 отчета.
6. С помощью регуляторов частоты генератора установить частоту сигнала, равную 51,5 Гц.
7. Переключатель «Режим работы» перевести в положение «1 + 2»; вы увидите картину биений.
8. Регулятор «временная развертка ms/дел» перевести в положение «200 ms/дел» – при этом цена **большого** деления по оси времени составит 200 мс.
9. В момент, когда на экране видны два соседних максимума биений, щелкнуть кнопку «пауза».
10. С помощью горизонтальной оси времени измерить период биений $T_б$ (для измерения периода необходимо измерить интервал времени между двумя соседними максимумами), а с помощью вертикальной оси напряжения – амплитуду биения $2U_0$, занести в п. 1.1 отчета.
11. Вновь щелкнуть кнопку «пауза».
12. Регулятор «временная развертка ms/дел» перевести в положение «10 ms/дел», щелкнуть кнопку «пауза».
13. Измерить период колебаний, повторно щелкнуть кнопку «пауза».
14. Записать уравнение биений, определить частоту сетевого сигнала $f^{\,с}$ по формуле $f^{\,с} = f^{\,ЗГ} - \nu_Б$, где $\nu_Б = 1/T_б$, а $f^{\,ЗГ}$ – частота генератора (п. 1.1 и 1.3 отчета).

Задача 2. Измерение частоты переменного электрического тока с помощью фигур Лиссажу

1. Используя значение частоты сетевого напряжения $f^{\,C}$, найденное в задаче 1, из формулы $\gamma = f_i^{\,ГП} / f^{\,C}$ рассчитать предварительные частоты $f_i^{\,ГП}$,

которые необходимо будет выставлять на генераторе, чтобы получить все значения для γ (γ = 1/1, 1/2, 2/1, 2/3, 3/2, 3/4, 4/3).

2. Установить частоту сигнала генератора равной первому из рассчитанных значений $f_i^{ГГ}$ (γ = 1/1).
3. Переключатель «Режим работы» перевести в положение «*XY*»: вы увидите результат сложения взаимно перпендикулярных сигналов, соответствующий равенству частот обоих источников $\gamma = f^{x} / f^{y} = f^{\text{канал1}} / f^{\text{канал2}} = f^{\text{г}} / f^{\text{с}} = 1/1 = 1$
4. С помощью регуляторов десятых долей Герца генератора подобрать такую частоту генератора $f_i^{Г}$, чтобы наблюдаемая фигура Лиссажу не «раздваивалась» (линии фигуры должны быть максимально возможно тонкими – как показаны в таблице 1).
5. С помощью регулятора «начальная фаза» просмотреть возможные варианты фигуры Лиссажу при данном соотношении частот. Зарисовать один из вариантов фигуры в таблицу отчета. Определить число пересечений фигуры горизонтальной (n_y) и вертикальной (n_x) линиями и также занести в таблицу отчета.
6. Последовательно устанавливая все рассчитанные значения частоты генератора $f_i^{ГГ}$, получить новые фигуры для отношения частот (γ = 1/2, 2/1, 2/3, 3/2, 3/4, 4/3) и каждый раз выполнять действия п. 4-5.
7. Закрыть программу измерений.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какая электрическая цепь называется колебательным контуром? Какие процессы в ней происходят? Почему эта цепь так называется?

2. Запишите уравнения изменения заряда, тока и напряжения в идеальном колебательном контуре.

3. Что такое биения? Как можно наблюдать картину биений? Как определить частоту биений?

4. Как получить на экране осциллографа фигуры Лиссажу? От чего зависит форма фигуры? Как по форме фигуры Лиссажу определить отношение частот складываемых колебаний?

5. Изменяется ли частота промышленной электрической сети, и от чего она зависит?

Учебное издание

СЛОЖЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Составители: **Карпов** Юрий Григорьевич
Филанович Антон Николаевич
Черняев Валентин Сергеевич
Ватолина Наталья Дмитриевна

Редактор *В. И. Новикова*
Компьютерный набор *Н. Н. Суслиной*

Подписано в печать г. Формат 60×84 1/16.
Бумага писчая. Плоская печать. Усл. печ. л. 1,27.
Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел УрФУ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
rio@ustu.ru

Отпечатано в типографии Издательско-полиграфического центра УрФУ
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
E-mail.: press.info@usu.ru