第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

3.2 向量组的秩

3.3 齐次线性方程组解的结构

3.4 非齐次线性方程组解的结构

教学计划：4次课-12学时

复习

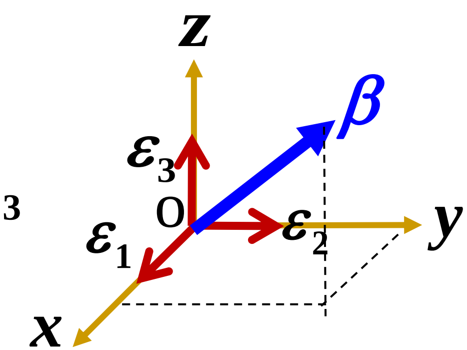
3.1 3.2 解决的核心问题：

向量空间中任意向量的表示问题

任意向量如何表示 ← 极大无关组

$$\beta=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1\begin{array}{c}\varepsilon_1\\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\end{array}+a_2\begin{array}{c}\varepsilon_2\\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\end{array}+a_3\begin{array}{c}\varepsilon_3\\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}$$

三维向量空间 R^3



$$\beta=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3$$ 线性表示

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$ —— 线性无关 (不共面) —— R^3 的极大无关组

复习

向量空间

定义3.2 设V为n维向量的集合，如果集合V非空，且集合V对于向量加法及数乘两种运算封闭，则称集合V为实数域上的向量空间.

注释： (1) 集合V对于加法及数乘两种运算封闭是指

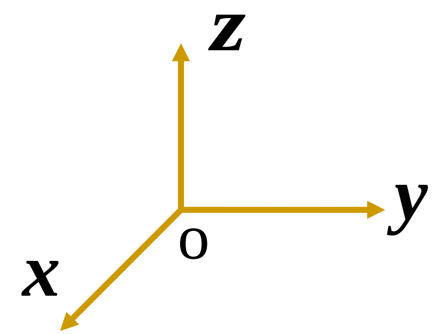
若$\forall \alpha, \beta \in V$，则$\alpha + \beta \in V$；

若$\forall \alpha \in V, \lambda \in R$，则$\lambda\alpha \in V$.

(2) 向量空间 $\left\{ \begin{array}{l} \text{集合}V\text{非空（含有零向量）} \\ \text{对加法封闭} \\ \text{对数乘封闭} \end{array} \right.$

重要的向量空间

复习



1) 三维向量全体构成的集合

$R^3=\{(x_1,x_2,x_3)^T \mid x_i\in R\}$ 是一个向量空间.

坐标面：$xoy,\ xoz,\ yoz$ 都是向量空间

坐标轴：x轴, y轴, z轴 都是向量空间

2) 齐次线性方程组解向量的集合

$V=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid Ax=0\right\}$ 是一个向量空间.

3) 非齐次线性方程组解向量的集合

$S=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid Ax=b\right\}$ 不是一个向量空间.

重要的向量空间

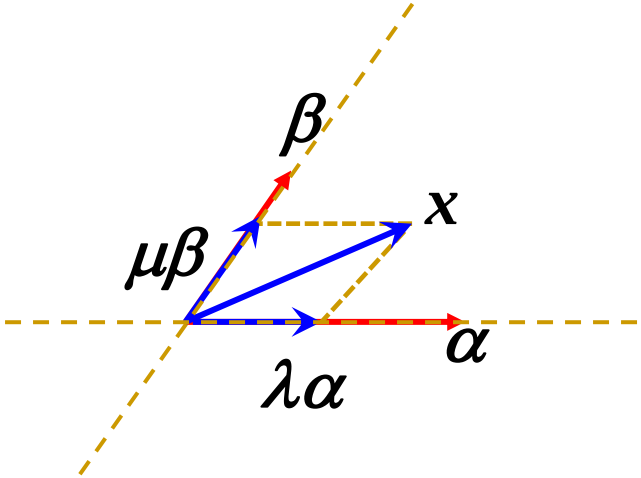
4) 设 α,β 为已知的n维向量,

$\text{span}\{\alpha,\beta\}=\{x=\lambda\alpha+\mu\beta\mid\lambda,\mu\in R\}$ 是一个向量空间.

称为由向量α,β所生成的向量空间.

⇩

α,β 所张成的平面(三维情况下)



推广 由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 生成向量空间

$$\text{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}=\{x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m\mid\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in R\}$$

第三章 线性方程组

复习

3.1 向量的线性相关性

- 向量定义及其运算
- 向量的线性相关性
  - 向量与向量组的关系 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\ \beta\in R^n$
- 向量组的线性相关与线性无关 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

$$\Leftrightarrow \beta \in span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\} = \{x = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m \mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m \in R\}$$

$$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta \text{ 有解}$$

线性方程组的表示：

复习

$$
(1)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}
$$

(2) 矩阵乘积形式：$Ax = b$

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

复习

(3) 向量形式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \quad & \alpha_n \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\ b \end{array}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$$

复习

线性方程组的表示：

(1) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(2) 矩阵乘积形式： $Ax = b$

(3) 向量形式： $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$

练习1

已知 $\alpha_1=(1,2,5)^T,\alpha_2=(2,3,4)^T,\alpha_3=(3,4,3)^T$，$\beta=(4,5,2)^T$，问 β 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？若能，写出表示式。

解： $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ 求解方程组 $Ax=\beta$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\beta$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\5&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$Ax=\beta$$

增广矩阵

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\5&4&3&2\end{pmatrix} \\ \alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\beta\end{array}\longrightarrow\begin{array}{c}x_1\quad x_2\quad x_3\\ \begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

行简化阶梯阵

$r(A)=r(A,\beta)=2<3$，方程组有无穷多解.

$$\begin{cases}x_1=x_3-2\\x_2=-2x_3+3\end{cases}\qquad \text{通解}\begin{cases}x_1=c-2\\x_2=-2c+3\\x_3=c\end{cases}$$

练习1

已知 $\alpha_1=(1,2,5)^T,\alpha_2=(2,3,4)^T,\alpha_3=(3,4,3)^T$，$\beta=(4,5,2)^T$，问 β 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？ 若能, 写出表示式。

解： $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$

增广矩阵 行简化阶梯阵

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\5&4&3&2\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\beta\end{array}\end{array}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$$

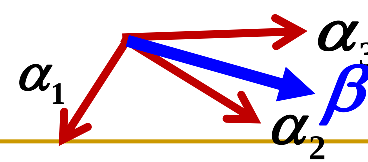
$Ax=\beta$ 有无穷多解.

通解 $\begin{cases}x_1=\quad c-2\\x_2=-2c+3\\x_3=c\end{cases}$

β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 表示法不唯一.

$$\begin{aligned}\beta&=(c-2)\alpha_1+(-2c+3)\alpha_2+c\alpha_3\\&=(c-2)\alpha_1+(-2c+3)\alpha_2+c(-\alpha_1+2\alpha_2)\\&=\cancel{c\alpha_1}-2\alpha_1-\cancel{2c\alpha_2}+3\alpha_2-\cancel{c\alpha_1}+\cancel{2c\alpha_2}\\&=-2\alpha_1+3\alpha_2\end{aligned}$$

共面



练习2

已知 $\alpha_1=(4,3,11)^T,\alpha_2=(2,-1,3)^T,\alpha_3=(-1,2,0)^T,\ \beta=(2,10,8)^T$，问 β 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？若能，写出表示式。

解：$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$

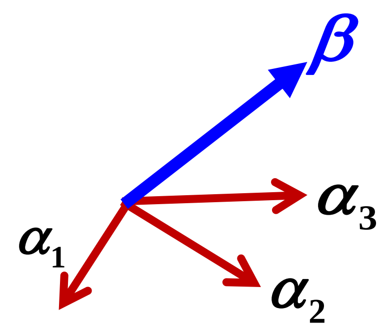
增广矩阵 $\longrightarrow$ 阶梯阵

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta \end{array} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & 10 & -11 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix}$$

$r(A)=2<r(A,b)=3$，

方程组无解

β 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.



共面

第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

- 向量的线性相关性
  - 向量与向量组的关系 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m,\ \beta \in R^n$
  - 向量组的线性相关与线性无关 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$
    - 向量组线性相关与线性无关的定义
    - 向量组线性相关与线性无关的判别

1. 向量组线性相关与线性无关的定义

例1 (1) 向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \rightarrow |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=0$

线性组合

$$(0)\alpha_1+(0)\alpha_2+(0)\alpha_3=0 \rightarrow 0\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

没意义！

是否存在一组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,

$$(\lambda_1)\alpha_1+(\lambda_2)\alpha_2+(\lambda_3)\alpha_3=0$$

$$(2)\alpha_1+(1)\alpha_2+(0)\alpha_3=0 \rightarrow$$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 有线性关系

$$2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

有意义！

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。

1. 向量组线性相关与线性无关的定义

例1 (2) 向量组 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$(0)\varepsilon_1+(0)\varepsilon_2+(0)\varepsilon_3=0$$

是否存在一组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,

$(\lambda_1)\varepsilon_1+(\lambda_2)\varepsilon_2+(\lambda_3)\varepsilon_3=0 \rightarrow$ 向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 没有线性关系

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

则称向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 线性无关。

1. 向量组线性相关与线性无关的定义

例1 (1) 向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$(2)\alpha_1+(1)\alpha_2+(0)\alpha_3=0 \rightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 有线性关系

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。

(2) 向量组 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rightarrow \varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 没有线性关系

$(\lambda_1)\varepsilon_1+(\lambda_2)\varepsilon_2+(\lambda_3)\varepsilon_3=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

则称向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 线性无关。

1. 向量组线性相关与线性无关的定义

定义3.5 设向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m (m\geq 1)$,

若存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

则称向量组A是线性相关的。

否则称向量组A是线性无关的。

例2 向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\2\\5\end{pmatrix}$

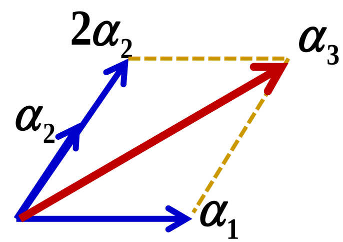
由于 $(1)\alpha_1+(2)\alpha_2+(-1)\alpha_3=0 \rightarrow 1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}5\\2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

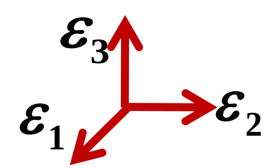
所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。

例2 向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\2\\5\end{pmatrix}$ 线性相关

$(1)\alpha_1+(2)\alpha_2+(-1)\alpha_3=0 \rightarrow \alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$ 线性相关等价定义

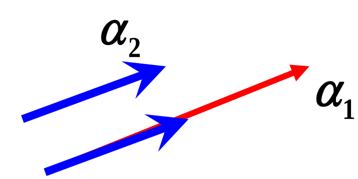
线性相关的几何意义：





$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 共面

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不共面



α_1,α_2 线性相关 $\Leftrightarrow$ α_1,α_2 共线(平行) $\alpha_2=k\alpha_1$

α_1,α_2 线性无关 $\Leftrightarrow$ α_1,α_2 不共线(不平行) $k\alpha_1-\alpha_2=0$

注释： 向量组线性相关的概念是几何空间中两个向量共线，三个向量共面的推广。

线性相关的等价定义

例2 向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\2\\5\end{pmatrix}$

由于 $(1)\alpha_1+(2)\alpha_2+(-1)\alpha_3=0$ 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。

$\rightarrow\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$ α_3 可由其余两个线性表示

$\rightarrow\alpha_1=\alpha_3-2\alpha_2$ α_1 可由其余两个线性表示

$\rightarrow\alpha_2=\frac{1}{2}\alpha_3-\frac{1}{2}\alpha_1$ α_2 可由其余两个线性表示

结论： $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 至少有一个向量可由其余两个线性表示

线性相关的等价定义

定理3.5 向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geq 1)$ 线性相关 $\Leftrightarrow$

其中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示

证明：略

注释： 至少有一个向量可由其余向量线性表示，

而不是每个向量可由其余向量线性表示。

例3 向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\because \lambda\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu\\0\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

由于 $\alpha_1=0\cdot\alpha_3+0\cdot\alpha_2\rightarrow(-1)\alpha_1+0\cdot\alpha_3+0\cdot\alpha_2=0$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。但 $\alpha_2\neq\lambda\alpha_1+\mu\alpha_3$

向量组线性无关的定义

$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,$

存在 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零,使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

则A是线性相关的，否则线性无关。

$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关

$\Leftrightarrow$ 不是线性相关

$\Leftrightarrow$ 不存在任何一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

$\Leftrightarrow$ 对任何一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{令 } k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0 \longrightarrow k_1=k_2=\cdots=k_m=0}$

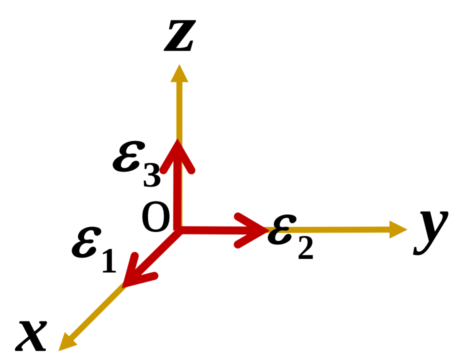
例4 证明n维单位坐标向量组线性无关。

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)^T,\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)^T$$

证明：$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=0$

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=0=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\Rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_n=0$$

所以n维单位坐标向量组线性无关。



特别：三维单位坐标向量组线性无关

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$ —— 线性无关 (不共面)

例5 已知向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

证明：向量组 $3\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,4\alpha_3-5\alpha_1$ 也线性无关。

证明：

$$k_1(3\alpha_1+2\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)+k_3(4\alpha_3-5\alpha_1)=0 \rightarrow k_1=k_2=k_3=0$$

$$\underline{(3k_1-5k_3)}\alpha_1+\underline{(2k_1+k_2)}\alpha_2+\underline{(4k_3-k_2)}\alpha_3=0$$

因为 $A:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以

齐次线性方程组

$$\begin{cases}3k_1-5k_3=0\\2k_1+k_2=0\\4k_3-k_2=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}3k_1+0k_2-5k_3=0\\2k_1+k_2+0k_3=0\\0k_1-k_2+4k_3=0\end{cases}\quad D=\begin{vmatrix}3&0&-5\\2&1&0\\0&-1&4\end{vmatrix}=22\neq0$$

故方程组只有零解，即 $k_1=k_2=k_3=0$，该向量组线性无关。

例6 判断向量组$A:0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关性

$$\because 1\cdot 0+0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\cdots+0\cdot\alpha_m=0\rightarrow\ 0=0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\cdots+0\cdot\alpha_m$$

所以该向量组线性相关。

结论： 包含零向量的向量组都线性相关。

第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

- 向量的线性相关性
  - 向量与向量组的关系 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\ \beta\in R^n$
  - 向量组的线性相关与线性无关 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$
    - 向量组线性相关与线性无关的定义
    - 向量组线性相关与线性无关的判别

2. 向量组线性相关与线性无关的判别

定理3.6 向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 齐次方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\mathbf{0}$$ 有非零解

线性方程组的表示：

(1) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(2) 矩阵乘积形式：$Ax = b$

(3) 向量形式：$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$ 非齐次

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$ 齐次

2. 向量组线性相关与线性无关的判别

定理3.6 向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 齐次方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$$ 有非零解

证明:

$\Leftarrow$ 若方程组有一组非零解 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 则有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

从而向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关。

$\Rightarrow$ 设向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则存在不全为零的一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

则 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是方程组的一组非零解。

定理小结

定理3.3 向量 β 可由 A: $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$ 有解.

定理3.6 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 有非零解.

线性无关 $\Leftrightarrow$ 只有零解.

判断向量组的线性相关性

对于一般的向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\cdots,\alpha_s=\begin{pmatrix}a_{1s}\\a_{2s}\\\vdots\\a_{ns}\end{pmatrix}$

$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 有非零解

线性无关　只有零解

$$\Downarrow$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2s}\\\vdots&\vdots&A\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{ns}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0$$

(1) 当 $n<s$，线性相关

(2) 当 $n=s$，

当 $|A|\neq 0$，线性无关

当 $|A|=0$，线性相关

$|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s|$

方程个数 n = 维数，变量个数 s = 向量个数

例7

判断向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\2\\5\end{pmatrix}$ 的线性相关性。

当 $|A|\neq 0$，线性无关

当 $|A|=0$，线性相关

解：

$$|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&2&5\\2&0&2\\3&1&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&0&-5\\2&0&2\\3&1&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-5&-5\\2&2\end{vmatrix}=0$$

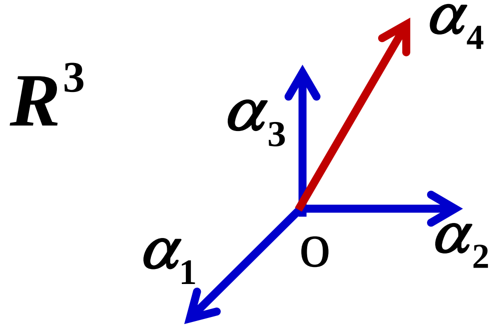
$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。

例8 判断下面向量组的线性相关性

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

解： 4个3维向量一定线性相关。 $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$



例9 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是一组互不相等的数，

$$\alpha_1=(1,a_1,a_1^2,\cdots,a_1^{n-1})^T,\alpha_2=(1,a_2,a_2^2,\cdots,a_2^{n-1})^T,\cdots,\alpha_n=(1,a_n,a_n^2,\cdots,a_n^{n-1})^T$$

证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关。

当 $|A|\neq 0$，线性无关

当 $|A|=0$，线性相关

证明：

$$|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(a_i-a_j)\neq 0$$

所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关。

练习1

判断向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$ 的线性相关性。

解：

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关 $\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$ 有非零解

线性无关　只有零解

$\Leftrightarrow$ 系数矩阵行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=0$

$\neq 0$

$$\begin{array}{c}\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\5&4&3\end{vmatrix}\\ \alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\end{array}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&-6&-12\end{vmatrix}=(-6)(-1)\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}=0$$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$

练习2

判断向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ 的线性相关性。

解:

向量维数3 $<$ 向量个数4,

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关。

练习3

判断向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-6\\4\\-10\end{pmatrix}$ 的线性相关性。

解：

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关 $\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$ 有非零解

线性无关　　只有零解

$\Leftrightarrow$ 系数矩阵行列式 $|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)|=0$

$\neq 0$

$$\begin{array}{c}\begin{vmatrix}3 & 4 & -6\\ 1 & -1 & 4\\ -1 & 3 & -10\end{vmatrix}\\ \alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\end{array}=\begin{vmatrix}0 & 7 & -18\\ 1 & -1 & 4\\ 0 & 2 & -6\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}7 & -18\\ 2 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7 & 18\\ 2 & 6\end{vmatrix}=42-36=6\neq 0$$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

- 向量的线性相关性
  - 向量与向量组的关系 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\ \beta\in R^n$
  - 向量组的线性相关与线性无关 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$
    - 向量组线性相关与线性无关的定义
    - 向量组线性相关与线性无关的判别

第三章 作业

授课内容	习题二
3.1(1)向量定义与运算	1,2 向量运算， 1(1)(2)（P162 习题三）
3.1(2) 向量与向量组的关系	3,4 线性表示
3.1(3) 线性相关性	5(1)(2)(3), 6, 9,10,12,13线性相关与线性无关
3.2(1)(2)极大无关组，秩	22(2)(3), 23极大无关组
3.3 齐次方程组解的结构	31(1)(3)
3.4 非齐次方程组解的结构	32(1)(2),33,40,44