高等数学笔记

目录

1 曲线积分与曲面积分

1.1 对弧长的曲线积分

1.1.1 对弧长的曲线积分的概念与性质

第一类曲线积分，记为 $\int_L f(x,y)ds$，$\int_\Gamma f(x,y,z)ds$

若曲线是闭合的，记为 $\oint_L f(x,y)ds$

性质

1. $\int_L [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]ds=\alpha\int_L f(x,y)ds+\beta\int_L g(x,y)ds$
2. $\int_L f(x,y)ds=\int_{L_1} f(x,y)ds+\int_{L_2} f(x,y)ds$
3. 若 $f(x,y)\le g(x,y)$，则 $\int_L f(x,y)ds\le\int_L g(x,y)ds$

   $\left|\int_L f(x,y)ds\right|=\int_L |f(x,y)|ds$

1.1.2 对弧长的曲线积分的计算法

若曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=g(t) \\ y=h(t) \end{cases}$

则曲线积分 $\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[g(t),h(t)]\sqrt{g'^2(t)+h'^2(t)}dt,(\alpha<\beta)$

1.2 对坐标的曲线积分

1.2.1 对坐标的曲线积分的概念与性质

第二类积分，对函数 $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$

$P(x,y)$ 在 L 上对 x 坐标的曲线积分为 $\int_L P(x,y)dx$（L 在 x 方向上的积分）

$Q(x,y)$ 在 L 上对 y 坐标的曲线积分为 $\int_L Q(x,y)dy$（L 在 y 方向上的积分）

对空间函数同理

本积分主要应用于向量函数的积分

$\int_L \vec{F}(x,y)d\vec{r}=\int_L [P(x,y)dx+Q(x,y)dy]$ 其中 $d\vec{r}=dx\vec{i}+d\vec{j}$

性质

1. α,β 为常数，则
$$\int_L [\alpha\vec{F_1}(x,y)d\vec{r}+\beta\vec{F_2}(x,y)d\vec{r}]=\alpha\int_L \vec{F_1}(x,y)d\vec{r}+\beta\int_L \vec{F_2}(x,y)d\vec{r}$$
2. 若有向曲线弧 L 可分成两段光滑的有向曲线弧 L_1,L_2，则
$$\int_L \vec{F}(x,y)d\vec{r}=\int_{L_1}\vec{F}(x,y)d\vec{r}+\int_{L_2}\vec{F}(x,y)d\vec{r}$$
3. L^- 是 L 的反向曲线弧，则
$$\int_{L^-}\vec{F}(x,y)d\vec{r}=-\int_L \vec{F}(x,y)d\vec{r}$$

注：由此可知，在对坐标曲线积分时，我们必须注意积分弧段的方向

1.2.2 对坐标的曲线积分的计算法

L 的参数方程为 $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$

$$\int_L [P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = \int_\alpha^\beta \{P[g(t),h(t)]g'(t) + Q[g(t),h(t)]h'(t)\}dt$$

计算时，只要把 x, y, dx, dy 依次替换为 $g(t), h(t), g'(t)dt, h'(t)dt$ 然后从起点到终点积分即可。

注意：下限 α 对应于 L 的起点，上限 β 对应于 L 的终点，α 不一定小于 β

空间曲线计算同理

1.2.3 两类曲线积分之间的联系

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds$$

1.3 格林公式及其应用

1.3.1 格林公式

在平面 D 上的二重积分可以通过沿闭区域 D 的边界曲线 L 上的曲线积分来表示。

- 单连通区域：无洞的区域
- 复连通区域：有洞的区域

格林公式：$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$

2

2.1

2.1.1