§3.2 自然推理系统

定义 一个**形式系统I**是四元组

$$\langle A(I), E(I), A_X(I), R(I)\rangle$$

（1）非空的字母集$A(I)$

（2）$A(I)$中的符号构造的合式公式集$E(I)$

（3）$E(I)$中某些特殊公式组成的公理集$A_X(I)$

（4）推理规则集$R(I)$

其中$\langle A(I),E(I)\rangle$是I的**形式语言系统**，$\langle A_X(I),R(I)\rangle$是$I$的**形式演算系统**。

形式系统有两种类型：自然推理系统和公理推理系统。

自然推理系统：前提任意，结论不一定是重言式

公理推理系统：前提为给定的公理，结论为重言式

定义 设公式$A_1, A_2, \cdots, A_k$是前提，B是结论，$C_1, C_2, \cdots, C_l$是公式序列。若对任意$i(i=1,2,\cdots,l)$，C_i或是某个A_j，或是可由序列中前面的公式应用推理规则得到，并且$C_l=B$，则称序列$C_1, C_2, \cdots, C_l$是由$A_1, A_2, \cdots, A_k$是推出B的**证明**。

定义 自然推理系统 P 由以下部分组成：

1．字母表：$p, q, \cdots, p_i, q_i, \cdots$

"

$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

$(,), ,$

2．合式公式

3. 推理规则：

（1）前提引入：前提可在证明中随时引入

（2）结论引入：中间结论可作为后继证明的前提

（3）置换：证明中命题公式的子公式可用与之等值的公式置换，从而得到公式序列中又一个公式。

4. 推理定律导出的规则：9条常用的重言蕴涵式和常用等值式导出的重言蕴涵式都是推理定律。由此根据结论引入规则，可以导出下列推理规则：

（1）假言推理规则：若证明的公式序列已出现$A \to B$和A，则可将B引入命题序列。

$$\begin{array}{c} A \to B \\ A \\ \hline \therefore B \end{array}$$

（2）附加规则：

$$\frac{A}{\therefore A \vee B}$$

（3）化简规则：

$$\frac{A \wedge B}{\therefore A}$$

（4）拒取式规则：

$$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ \neg B \end{array}}{\therefore \neg A}$$

（5）假言三段论规则：

$$\frac{\begin{array}{c}A\to B\\ B\to C\end{array}}{\therefore\ A\to C}$$

（6）析取三段论规则：

$$\frac{\begin{array}{c}A\lor B\\ \neg B\end{array}}{\therefore\ A}$$

（7）合取引入规则：

$$\frac{\begin{array}{c}A\\ B\end{array}}{\therefore\ A\land B}$$

（8）构造性两难规则：

$$\begin{array}{c} A \to B \\ C \to D \\ A \lor C \\ \hline \therefore B \lor D \end{array}$$

（9）破坏性两难规则：

$$\begin{array}{c} A \to B \\ C \to D \\ \neg B \lor \neg D \\ \hline \therefore \neg A \lor \neg C \end{array}$$

例 构造下列推理的证明

前提：$p\vee q, q\rightarrow r, p\rightarrow s, \neg s$

结论：$r\wedge(p\vee q)$

证明：

① $p\rightarrow s$　　前提

② $\neg s$　　前提

③ $\neg p$　　①、②蕴涵

④ $p\vee q$　　前提

⑤ $\neg p\rightarrow q$　　④置换

⑥ q　　③、⑤蕴涵

⑦ $q\rightarrow r$　　前提

⑧ r ⑥、⑦蕴涵

⑨ $r\wedge(p\vee q)$ ④、⑧蕴涵

所以，推理正确。 ▌

例 构造下列推理的证明

若 a 是实数，则它不是有理数就是无理数。若 a 不能表示成分数，则它不是有理数。a 是实数且它不 能表示成分数。所以，a 是无理数。

证明 把给定问题符号化

p：a是实数　　q：a是有理数

r：a是无理数　　s：a能表示成分数

由此得给定问题的形式结构：

前提：$p\rightarrow(q\vee r)$，$\neg s\rightarrow\neg q$，$p\wedge\neg s$

结论：r

证明：① $p\wedge\neg s$　　前提

② p　　①蕴涵

③ $\neg s$　　①蕴涵

④ $p\rightarrow(q\vee r)$　　前提

⑤ $q\vee r$　　②、④蕴涵

⑥ $\neg s \rightarrow \neg q$　　前提

⑦ $\neg q$　　③、⑥蕴涵

⑧ $\neg q \rightarrow r$　　⑤置换

⑨ r　　⑦、⑧蕴涵

所以，推理正确。 ∎

构造证明的两个技巧：

1．附加前提法：

$$(A_1 \wedge \cdots \wedge A_k) \to (A \to B) \Leftrightarrow (A_1 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \to B$$

例 证明下列推理的有效性

前提：$p \to q, \neg q \vee \neg r$

结论：$p \to \neg r$

证明 使用附加前提法，把形式结构调整为

前提：$p \to q, \neg q \vee \neg r, p$

结论：$\neg r$

证明：① $p \to q$　　前提

② p　　前提

③ q　　①、②蕴涵

④ $\neg q \vee \neg r$　　前提

⑤ $\neg r$　　③、④蕴涵

所以，推理正确。▌

2．归谬法：

$$(A_1 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B \Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

例 构造下列推理的证明

前提：$p \rightarrow (q \vee r)$，$\neg s \rightarrow \neg q$，$p \wedge \neg s$

结论：r

证明 按照归谬法构造证明

证明：
① $\neg r$ 附加前提
② $p \wedge \neg s$ 前提
③ p ②蕴涵

④ $p \to (q \vee r)$ 前提

⑤ $q \vee r$ ③, ④蕴涵

⑥ q ①, ⑤蕴涵

⑦ $\neg s \to \neg q$ 前提

⑧ s ⑥, ⑦蕴涵

⑨ $\neg s$ ②蕴涵

⑩ $s \wedge \neg s$ ⑧, ⑨蕴涵

因为 $s \wedge \neg s \Rightarrow 0$，所以

$$(p \to (q \vee r)) \wedge (\neg s \to \neg q) \wedge (p \wedge \neg s) \wedge \neg r \Rightarrow 0$$

由此得推理正确。 ∎

小结：

1. 熟练掌握推理的形式结构

推理的有效性，常用重言蕴涵式，基本方法

2. 熟练掌握自然推理系统

形式系统，自然推理系统，推理规则

构造证明的方法

3. 掌握两种特殊的构造证明技巧

附加前提法，归谬法