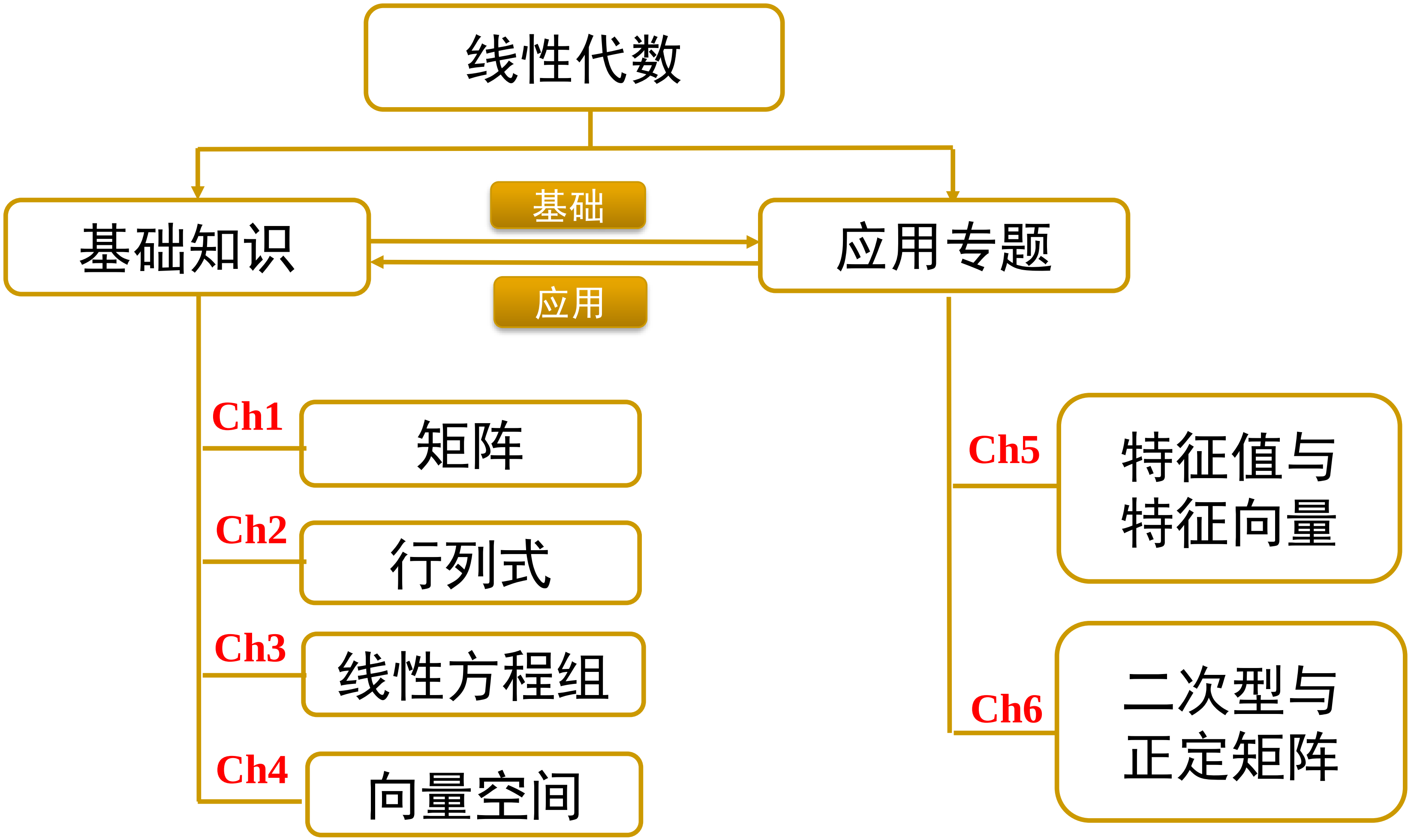
线性代数期末复习

知识结构图


线性代数
基础
应用
基础知识
应用专题
Ch1
矩阵
Ch2
行列式
Ch3
线性方程组
Ch4
向量空间
Ch5
特征值与
特征向量
Ch6
二次型与
正定矩阵

第一章

矩阵运算

- $A\pm B,\ \lambda A,\ AB,\ A^T,\ A$的分块
- ★A^{-1}
  - 概念：$AB=E \rightarrow A^{-1}=B, B^{-1}=A$
  - 性质：$(A^{-1})^{-1}=A,\quad (\lambda A)^{-1}=\lambda^{-1}A^{-1},\quad (A^T)^{-1}=(A^{-1})^T,$
    $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
  - 判别：$r(A)=n, |A|\neq 0,$ 列向量组线性无关
- ★$A \xrightarrow{\text{行变换}} B$，$r(A)=r(B)$
  - 求解 $Ax=b$
  - 求 A^{-1}
  - 求解 $AX=B$
  - 求 $r(A)$

第一章 矩阵

基本计算

- 求解方程组
- 求矩阵的逆阵
- 求解矩阵方程
- 矩阵的秩

初等行变换求解线性方程组(齐次)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$$

齐次线性方程组：$Ax = 0$

$$r(A)\begin{cases} = n, Ax = 0 \text{ 有唯一解----零解} \\ < n, Ax = 0 \text{ 有无穷多解---非零解} \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ A = & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \end{pmatrix}} \end{array}$$

设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r(A)}$ 是 $Ax = 0$ 基础解系

则其通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r(A)}\xi_{n-r(A)}$

设 A为n阶方阵，则 $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0$

$Ax = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

例1 求解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0 \\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \underset{\text{阶梯阵}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \to \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \end{array} \underset{\text{行简化阶梯阵}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$n=4$

$r(A)=2$, 自由变量个数 $=n-r(A)=2$

$$\begin{cases} x_1=2/7\,x_3+3/7\,x_4 \\ x_2=5/7\,x_3+4/7\,x_4 \end{cases}$$

基础解系: $\xi_1=\begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 通解: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$$

非齐次线性方程组：$Ax = b$

$$Ax = b \text{ 有解} \Leftrightarrow r(A) = r(A,b) \begin{cases} = n, \text{有唯一解} \\ < n, \text{有无穷解} \end{cases}$$

$$(A,b) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -10 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$Ax = b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A) < r(A,b)$ 有矛盾方程

设 A_n，$Ax = b$ 的解的情况：

若 $|A| \neq 0$，有唯一解

$$\text{若 } |A| = 0,\ r(A) < n \begin{cases} r(A) = r(A,b) < n, & \text{有无穷多解} \\ r(A) < r(A,b), & \text{无解} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

例2 求解方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2. \end{cases}$

解

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}} & 0 & \boxed{\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1/2\\1/2\end{matrix}} \\ 0 & & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

行简化阶梯阵

$n - r(A) = 2$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_3 = \quad\quad 2x_4 + 1/2 \end{cases} \quad \text{非齐次}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = \quad\quad 2x_4 \end{cases} \quad \text{齐次}$$

$r(A) = r(A,b) = 2 < 4$ 故方程组有无穷多解

特解

$$\eta^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}$$

基础解系

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Ax = b$ 的通解 = $Ax = 0$的通解 + $Ax = b$的特解

例3 线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-5x_4=-1 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-6x_4=5 \\ 0x_1-x_2+bx_3-3x_4=-3 \\ x_1-x_2+0x_3+ax_4=8 \end{cases}$ 讨论a,b取何值时，方程组无解?有唯一解?有无穷多解?

解1

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & -6 & 5 \\ 0 & -1 & b & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & a & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & b-3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 2 \end{pmatrix}$$

1)当 $a\neq -1,\ b\neq 3$ 时，$|A|\neq 0$ 即 $r(A)=r(A,b)=4=n$，方程组有唯一解.

2)当 $a=-1$，b 任意时，$|A|=0$ 即 $r(A)=3<r(A,b)=4$，方程组无解.

3)当 $b=3$ 时，有

$|A|=0$

$$(A,b)\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4a-2 \end{pmatrix}$$

3)当 $b=3$ 时,有

$|A|=0$

$$(A,b)\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-5&-1\\0&1&-3&4&7\\0&0&0&1&4\\0&0&0&a+1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-5&-1\\0&1&-3&4&7\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&-4a-2\end{pmatrix}$$

(1)当 $a\neq-0.5$ 时, $r(A)=3<r(A,b)=4$, 方程组无解.

(2)当 $a=-0.5$ 时, $r(A)=r(A,b)=3<4$, 方程组有无穷多解.

$$(A,b)\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-5&-1\\0&1&-3&4&7\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1&x_2&x_3&x_4&\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&0&-3&0&1\\0&1&-3&0&-9\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

行简化阶梯阵

$$\begin{cases}x_1=3x_3+1\\x_2=3x_3-9\\x_4=\qquad 4\end{cases}$$

$n-r(A)=1$

通解 $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}3\\3\\1\\0\end{pmatrix}\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{matrix}+\begin{pmatrix}1\\-9\\0\\4\end{pmatrix}$$

$Ax=0$ 的通解 $\quad Ax=b$ 的特解

例3 线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-5x_4=-1 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-6x_4=5 \\ 0x_1-x_2+bx_3-3x_4=-3 \\ x_1-x_2+0x_3+ax_4=8 \end{cases}$ 讨论a,b取何值时，方程组无解?有唯一解?有无穷多解?

解2

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 \\ 2 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & b & -3 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & b-3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix}=(b-3)(a+1)$$

1)当 $a\neq -1,\ b\neq 3$ 时, $|A|\neq 0$，方程组有唯一解.

2)当 $a=-1$, b 任意时, $|A|=0$ 即 $r(A)=3<r(A,b)=4$, 方程组无解.

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & -6 & 5 \\ 0 & -1 & b & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & b-3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

例3 线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 5 \\ 0x_1 - x_2 + bx_3 - 3x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 + 0x_3 + ax_4 = 8 \end{cases}$ 讨论a,b取何值时,

方程组无解?有唯一解?

有无穷多解?

解2

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 \\ 2 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & b & -3 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & b-3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = (b-3)(a+1)$$

1)当 $a \neq -1,\ b \neq 3$ 时, $|A| \neq 0$, 方程组有唯一解.

2)当 $a = -1$, b 任意时, $|A| = 0$ 即 $r(A) = 3 < r(A,b) = 4$, 方程组无解.

3)当 $b = 3$ 时, 有

$|A| = 0$

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & -6 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & a & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4a-2 \end{pmatrix}$$

3)当$b=3$时,有 $|A|=0$

$$(A,b)\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-5&-1\\0&1&-3&4&7\\0&0&0&1&4\\0&0&0&a+1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-5&-1\\0&1&-3&4&7\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&-4a-2\end{pmatrix}$$

(1)当 $a\neq-0.5$ 时, $r(A)=3<r(A,b)=4$, 方程组无解.

(2)当 $a=-0.5$ 时, $r(A)=r(A,b)=3<4$, 方程组有无穷多解.

$$(A,b)\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-5&-1\\0&1&-3&4&7\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}x_1&x_2&x_3&x_4&\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&-3&0&1\\0&1&-3&0&-9\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\qquad\begin{cases}x_1=3x_3+1\\x_2=3x_3-9\\x_4=\quad\ \ 4\end{cases}$$

行简化阶梯阵

$n-r(A)=1$

通解 $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}3\\3\\1\\0\end{pmatrix}\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{matrix}+\begin{pmatrix}1\\-9\\0\\4\end{pmatrix}$$

$Ax=0$ 的通解 $\quad Ax=b$ 的特解

第一章 矩阵

矩阵初等行变换的应用

- 求解方程组
- 求矩阵的逆阵
- 求解矩阵方程
- 矩阵的秩

用初等行变换求逆阵的方法：

设A是n阶可逆矩阵，下面给出求逆阵的通用方法：

$$(A \vdots E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \vdots A^{-1})$$

例4

用初等行变换求矩阵的逆矩阵： $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

解： $(A,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)=(E\,\vdots\,A^{-1})$

$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

第一章 矩阵

矩阵初等行变换的应用

- 求解方程组
- 求矩阵的逆阵
- 求解矩阵方程
- 矩阵的秩

利用初等行变换求解矩阵方程:

例5 求矩阵X，使 $AX=B$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}.$

若A是可逆矩阵,

解: $AX=B \longrightarrow X=A^{-1}B$

$$(A \vdots B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \vdots A^{-1}B)$$

解： $X = A^{-1}B.$ $(A, B) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1}B)$

$$(A \vdots B) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \div (-1)]{\substack{r_1 + r_2 \\ r_3 - r_2}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1 + 2r_3]{r_2 + 5r_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\qquad\qquad E \qquad\qquad A^{-1}B$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

第一章 矩阵

矩阵初等行变换的应用

- 求解方程组
- 求矩阵的逆阵
- 求解矩阵方程
- 矩阵的秩

矩阵秩的计算：

例6 求矩阵A的秩.

解：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&-3&-6&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 阶梯阵

$r(A)=2$

第二章

行列式的定义、性质、展开定理

行列式的计算
- 1)行列式的性质
- 2)化成三角行列式
- 3)展开定理降阶
- 4)各行加到第一行(列)

行列式的应用
- 公式：$AA^* = |A|E$ $\quad |A^*| = (|A|)^{n-1} \; (|A| \neq 0)$
- Cramer法则：$|A| \neq 0 \Rightarrow Ax = b$ 有唯一解
  $|A| = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$ 有非零解

结论： 方阵A可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \quad |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

行列式的性质：

若 $A \xrightarrow{\text{行变换}} B$, 则$A, B$的行列式的变化：

性质2　若$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$, $|B| = -|A|$

性质3　若$A \xrightarrow{r_i \times k} B$, $|B| = k|A|$

性质5　若$A \xrightarrow{r_i + kr_j} B$, $|B| = |A|$

性质1　$|A^T| = |A|$

性质4　拆行(列)

性质6　$|AB| = |A||B|$

第二章 行列式

基本计算：计算行列式的值

1)行列式的性质

2)化成三角行列式

3)展开定理降阶

4)各行加到第一行(列)

例1　计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal{c_1+c_2+\ldots+c_n} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}.$$

第二章 行列式

基本计算

计算行列式的值

1)行列式的性质
2)化成三角行列式
3)展开定理降阶
4)各行加到第一行(列)

例2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

解:

$$D=(-1)^{2+5}2\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=-2\cdot 5\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_3+r_1}{\overset{r_2+(-2)r_1}{=\!=\!=\!=}}-10\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix}=-10\cdot(-2)\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}=-1080.$$

例3 判断下列矩阵是否可逆？

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

解：

$$|B|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-2$$

故 B 可逆.

向量空间中任意向量的表示问题 ← 极大无关组

(1)向量与向量组的关系： $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\ \beta\in R^n$

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m \Leftrightarrow span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$$

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$$

计算1

(2)向量组的线性相关： $A:\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，若存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$

线性无关： $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0\rightarrow k_1=k_2\cdots=k_m=0$

(3)向量组的极大无关组： $A:\underline{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r},\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_m$

A_0 线性无关　　A 中任意向量可由 A_0 线性表示

作用：$A=\text{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$

(4)向量组的秩： 向量组极大无关组所含向量的个数

(5)极大无关组的计算： 定理3.10

计算2

判断线性相关性：

$$\text{向量组 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \alpha_s = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix},$$

(1) 当 $n < s$，线性相关.

(2) 当 $n = s$，

当 $|A| \neq 0$，线性无关.

当 $|A| = 0$，线性相关.

$$|A| = |\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s|$$

第三章 线性方程组

基本计算

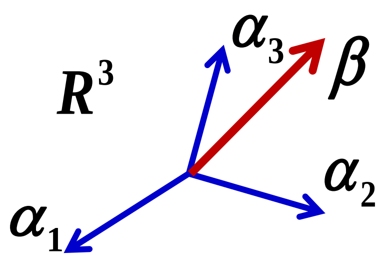
- 一个向量由一个向量组线性表示
- 求一个向量组的极大无关组
- 向量组线性相关性判别

例1 设 $\alpha_1=(1,2,-3)^T,\alpha_2=(-3,4,7)^T,\alpha_3=(7,-3,2)^T$，$\beta=(2,-1,3)^T$，问 β 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？若能，写出表示式。

一般性讨论：

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ 非齐次方程组

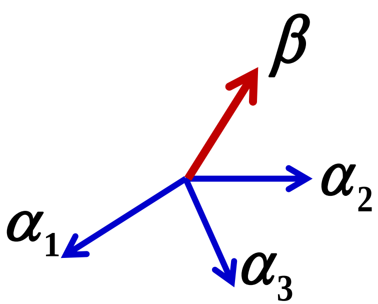
情况1： R^3



线性无关 $R^3=span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$

β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示法唯一。方程组有唯一解

情况2：

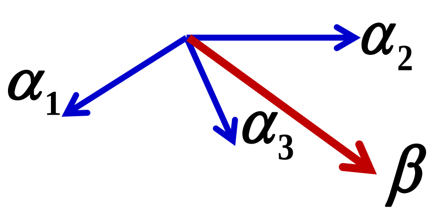


线性相关 $R^2=span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$

β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

方程组无解

情况3：



线性相关 $R^2=span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$

β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示法不唯一。方程组有无穷解

例1 设 $\alpha_1=(1,2,-3)^T,\alpha_2=(-3,4,7)^T,\alpha_3=(7,-3,2)^T$，$\beta=(2,-1,3)^T$，问 β 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？ 若能，写出表示式。

解： $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$

$$(A,\beta)=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} & A & \qquad \beta\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc:c}1&-3&7&2\\2&4&-3&-1\\-3&7&2&3\end{array}\right)\end{array}\rightarrow\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_1&x_2&x_3\end{array}\qquad\quad\\ \left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&-27/98\\0&1&0&19/98\\0&0&1&20/49\end{array}\right)\end{array}$$

方程组有唯一解： $x_1=-27/98,x_2=19/98,x_3=20/49$

表示法唯一： $\beta=-27/98\alpha_1+19/98\alpha_2+20/49\alpha_3$

例2 已知 $\alpha_1=(1,2,5)^T,\alpha_2=(2,3,4)^T,\alpha_3=(3,4,3)^T$，$\beta=(4,5,2)^T$，问 β 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？若能，写出表示式。

解：$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$

增广矩阵

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\5&4&3&2\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\beta\end{array}\end{array} \to \begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x_1&x_2&x_3&\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array} \to \begin{cases}x_1 = x_3 - 2\\ x_2 = -2x_3 + 3\end{cases}$$

行简化阶梯阵

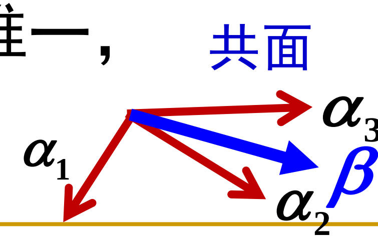
$$\to \begin{cases}x_1 = c-2\\ x_2 = -2c+3\\ x_3 = c\end{cases}$$

$r(A)=r(A,b)=2<$ 变量个数3，

方程组有无穷多解，

β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示法不唯一，

$$\beta = (c-2)\alpha_1 + (-2c+3)\alpha_2 + c\alpha_3$$



第三章 线性方程组

基本计算

- 一个向量由一个向量组线性表示
- 求一个向量组的极大无关组
- 向量组线性相关性判别

例3 求向量组 $\alpha_1=(1,2,1,2)^T,\alpha_2=(1,0,3,1)^T,$

$\alpha_3=(2,-1,0,1)^T,\alpha_4=(2,1,-2,2)^T,\alpha_5=(2,2,4,3)^T$

的一个极大无关组，并把其余列用极大无关组线性表示.

解：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5)\xrightarrow{\text{初等行变换}} B$ (行简化阶梯阵)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=B$$

$B=(\beta_1,\beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\beta_5)$

β_1,β_2,β_3 线性无关，$\beta_4=\beta_1-\beta_2+\beta_3$，$\beta_5=\beta_1+\beta_2$.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2$.

所以 β_1,β_2,β_3 是向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$ 的极大无关组,

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的极大无关组

第三章 线性方程组

基本计算

- 一个向量由一个向量组线性表示
- 求一个向量组的极大无关组
- 向量组线性相关性判别

练习1

判断向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$ 的线性相关性。

解：

$$\begin{array}{c}\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\5&4&3\end{vmatrix}\\ \alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\end{array}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&-6&-12\end{vmatrix}=(-6)(-1)\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}=0$$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。

练习2

判断向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\6\\10\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\-3\\-5\end{pmatrix}$ 的线性相关性。

解:

向量维数3 < 向量个数4,

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关。

练习3

判断向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-6\\4\\-10\end{pmatrix}$ 的线性相关性。

解:

$$\begin{array}{c}\begin{vmatrix}3 & 4 & -6\\ 1 & -1 & 4\\ -1 & 3 & -10\end{vmatrix}\\ \alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\end{array}=\begin{vmatrix}0 & 7 & -18\\ 1 & -1 & 4\\ 0 & 2 & -6\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}7 & -18\\ 2 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7 & 18\\ 2 & 6\end{vmatrix}=42-36=6\neq 0$$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

第四章

向量空间的概念：向量空间V(对加法，数乘封闭)

向量空间基，维数，坐标

1)向量空间V中向量的表示方法：

找V中的一个基：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 则 $\forall\alpha\in V$ $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$

2)同一向量在不同基下坐标的关系：

基变换公式： $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)P$

坐标变换公式：$P(y_1,y_2,\cdots,y_r)^T=(x_1,x_2,\cdots,x_r)^T$

3)找最好的基----标准正交基： 向量空间V $\xrightarrow{\text{内积}}$ 欧氏空间

$$\alpha=k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ie_i+\cdots+k_re_r \quad k_i=(\alpha,e_i)$$

施密特正交化： $\underset{\text{线性无关}}{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r} \longrightarrow \underset{\text{两两正交}}{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r} \longrightarrow \underset{\text{标准正交基}}{e_1,e_2,\cdots,e_r}$

例1 在 R^3 中取两个基 (1) $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$

(2) $\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(3,4,1)^T$

1）求两个基之间的关系.

解： β_1,β_2,β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，即

P 过渡矩阵

$$\begin{cases}\beta_1=k_{11}\alpha_1+k_{21}\alpha_2+k_{31}\alpha_3\\ \beta_2=k_{12}\alpha_1+k_{22}\alpha_2+k_{32}\alpha_3\\ \beta_3=k_{13}\alpha_1+k_{23}\alpha_2+k_{33}\alpha_3\end{cases}\Rightarrow(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\underbrace{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}_{B}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{A}P \text{ ---基变换公式}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{pmatrix}\qquad \Rightarrow B=AP\ \Rightarrow A^{-1}B=P$$

$$B=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&1\end{pmatrix}\qquad (A\mid B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\mid A^{-1}B)$$

解： $(A\,|\,B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E\,|\,A^{-1}B)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 - 3r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -6 \end{array}\right) \qquad A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & 22 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$E \qquad\qquad A^{-1}B$$

例1 在 R^3 中取两个基 $(1)\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$

$(2)\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(3,4,1)^T$

1）求两个基之间的关系.

解：β_1,β_2,β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，即

P 过渡矩阵

$$\begin{cases}\beta_1=k_{11}\alpha_1+k_{21}\alpha_2+k_{31}\alpha_3\\ \beta_2=k_{12}\alpha_1+k_{22}\alpha_2+k_{32}\alpha_3\\ \beta_3=k_{13}\alpha_1+k_{23}\alpha_2+k_{33}\alpha_3\end{cases}\Rightarrow(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\underbrace{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}_{B}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{A}P \text{ ---基变换公式}$$

$$\Rightarrow B=AP\ \Rightarrow A^{-1}B=P$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&1\end{pmatrix}$$

$$(A\mid B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\mid A^{-1}B)$$

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix}2&1&9\\4&2&22\\-1&0&-6\end{pmatrix}$$

例1 在 R^3 中取两个基 $(1)\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$

$(2)\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(3,4,1)^T$

1）求两个基之间的关系.

解：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$ ---基变换公式，过渡矩阵 $P=\begin{pmatrix}2&1&9\\4&2&22\\-1&0&-6\end{pmatrix}$

2）已知 ξ 在基(2)下的坐标为1,1,1，求在 ξ 基(1)下的坐标.

$$\xi=\beta_1+\beta_2+\beta_3=1\cdot\beta_1+1\cdot\beta_2+1\cdot\beta_3=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\xi=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+y_3\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$\xi=\overset{A}{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\overset{A}{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}2&1&9\\4&2&22\\-1&0&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\28\\-7\end{pmatrix}$$

坐标变换公式

第五,六章

- 特征值与特征向量
- 矩阵对角化
- 二次型

一. 特征值与特征向量

$$\varphi(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n$$

$$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_n\lambda^n$$

定义： $Ax=\lambda x, x\neq 0$

计算：
- $|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=0\rightarrow\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$
- $(\lambda E-A)x=0$ 的非零解-----特征向量(无穷多)
- 基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$， $k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_{n-r}\xi_{n-r}$

性质：
- 1)若 λ 是A的特征值，则 $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值
- 2) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

  $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$
- 3) 方阵每个特征值的几何重数 $\leq$ 它的代数重数
- 4) 实对称阵每个特征值的几何重数 = 它的代数重数
- 5) 方阵不同特征值相应的特征向量线性无关
- 6) 实对称阵不同特征值相应的特征向量正交

若 λ 是 A 的特征值，则：

λ^k 是 A^k 的特征值，

$k\lambda$ 是 kA 的特征值，

$\varphi(\lambda)$是 $\varphi(A)$ 的特征值，

A可逆，$\dfrac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值，

A可逆，$\dfrac{|A|}{\lambda}$是 A^* 的特征值.

例1 $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 2\end{pmatrix}$，求 $A, A^2, 2A, A^2-3A+E, A^{-1}, A^*$ 的特征值.

解

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 3\\ 2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-2)-6$$

$$=\lambda^2-3\lambda-4$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-4)$$

特征值：$\lambda_1=-1, \lambda_2=4$

A	-1	4
A^2	1	16
$2A$	-2	8
A^2-3A+E	5	5
A^{-1}	-1	1/4
A^*	4	-1

第五,六章

- 特征值与特征向量
- 矩阵对角化
- 二次型

二. 矩阵对角化

定义：存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$

相似矩阵有相同的特征值，行列式和迹

充要条件：

n阶方阵A能对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow$ 每个 λ_i 几何重数 = 代数重数

$\Leftarrow$ A有n个不同的特征值

★实对称阵A一定能对角化 $\Rightarrow$ 存在正交阵 Q 使

$$Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$$

- 特征值与特征向量
- 矩阵对角化
- 二次型

三. 二次型

定义： n元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$, A是实对称阵

化简：★正交变换： $x=Qy$ $\quad Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$

$$f=x^TAx=(Qy)^TA(Qy)=(y^TQ^T)A(Qy)=y^T(Q^TAQ)y=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$$

正定二次型
正定矩阵：

定义： 对$\forall x\neq 0, x^TAx>0$

★判别：

实对称阵A正定 $\Leftrightarrow x^TAx$是正定二次型

$\Leftrightarrow A$的特征值全大于0

$\Leftrightarrow A$的顺序主子式全大于0

$\Rightarrow |A|>0$

$\Rightarrow A^{-1}, kA(k>0), A^*$ 正定

第五、六章 矩阵对角化及二次型

基本计算

- 矩阵对角化
- 二次型通过正交变化化为标准形
- 判别正定二次型

例2 $A=\begin{pmatrix}5&-6&-6\\-1&4&2\\3&-6&-4\end{pmatrix}$ 计算 A^n $P^{-1}AP=\Lambda$

解：(1) 求A的特征值 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5&6&6\\1&\lambda-4&-2\\-3&6&\lambda+4\end{vmatrix}$

$$\overset{c_2-c_3}{=}\begin{vmatrix}\lambda-5&0&6\\1&\lambda-2&-2\\-3&\underset{-(\lambda-2)}{2-\lambda}&\lambda+4\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-5&0&6\\1&1&-2\\-3&-1&\lambda+4\end{vmatrix}\overset{r_3+r_2}{=}(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-5&0&6\\1&1&-2\\-2&0&\lambda+2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-5&6\\-2&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)((\lambda-5)(\lambda+2)+12)$$

$$(\lambda-2)(\lambda-1)$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda-5\lambda-10+12)=(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+2)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

A的三个特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=1$ 验算：$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=5$

例2 $A=\begin{pmatrix}5 & -6 & -6\\ -1 & 4 & 2\\ 3 & -6 & -4\end{pmatrix}$ 计算 A^n

$P^{-1}AP=\Lambda$

$(\lambda E-A)x=0$

解: (1) A的三个特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=1$

(2) 求A的特征向量 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ (2E-A)x=0$

代数重数 = 2

$$2E-A=\begin{pmatrix}2-5 & 6 & 6\\ 1 & 2-4 & -2\\ -3 & 6 & 2+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 6\\ 1 & -2 & -2\\ -3 & 6 & 6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -3 & 6 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_1 & x_2 & x_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

线性无关

$n-r(2E-A)=3-1=2$

几何重数 = 2

例2 $A=\begin{pmatrix}5 & -6 & -6\\ -1 & 4 & 2\\ 3 & -6 & -4\end{pmatrix}$ 计算 A^n $(\lambda E-A)x=0$

$P^{-1}AP=\Lambda$

解: (1) A的三个特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=1$

(2) 求A的特征向量 $\lambda_3=1,\ (E-A)x=0$

代数重数 = 1

$$E-A=\begin{pmatrix}1-5 & 6 & 6\\ 1 & 1-4 & -2\\ -3 & 6 & 1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 6 & 6\\ 1 & -3 & -2\\ -3 & 6 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -3 & -2\\ -4 & 6 & 6\\ -3 & 6 & 5\end{pmatrix}\to\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1/3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}\end{array}$$

几何重数 = 1

$n-r(E-A)=3-2=1$

得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\ -1/3\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$$

(1) 特征值： $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=1$

(2) 特征向量： $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\quad \xi_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\quad \xi_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$ 线性无关

(3) 求可逆矩阵P，将A化成对角阵 $P^{-1}AP=\Lambda$

令$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&0&-1\\0&1&3\end{pmatrix}$是可逆矩阵

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$$

矩阵对角化的步骤： $P^{-1}AP=\Lambda$

例2 $A=\begin{pmatrix}5&-6&-6\\-1&4&2\\3&-6&-4\end{pmatrix}$

(1) 特征值：$\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=1$

(2) 特征向量：$\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ $\xi_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$ 线性无关

(3) 求可逆矩阵P，将A化成对角阵

令$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}2&2&3\\0&1&-1\\1&0&3\end{pmatrix}$是可逆矩阵，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(4) 求 A^n

$$PP^{-1}APP^{-1}=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \Rightarrow A=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$A^n=\left(P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}P^{-1}\right)^n=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}^n P^{-1}=P\begin{pmatrix} 2^n & & \\ & 2^n & \\ & & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & & \\ & 2^n & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & -3\cdot 2^{n+1}+6 & -3\cdot 2^{n+1}+6 \\ -2^n+1 & 3\cdot 2^n-2 & 2^{n+1}-2 \\ 3\cdot 2^n-3 & -6\cdot 2^n+6 & -5\cdot 2^n+6 \end{pmatrix}$$

第五、六章 矩阵对角化及二次型

基本计算

- 矩阵对角化
- 二次型通过正交变化化为标准形
- 判别正定二次型

例3 将二次型 $f=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$

通过正交变换 $x=Qy$ 化成标准形. $Q^{-1}AQ=\Lambda$

解 **1. 写出二次型的矩阵**

$$A=\begin{pmatrix}17 & -2 & -2\\ -2 & 14 & -4\\ -2 & -4 & 14\end{pmatrix}$$ 实对称阵

2. 求特征值

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-17 & 2 & 2\\ 2 & \lambda-14 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-14\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-17 & 0 & 2\\ 2 & \lambda-18 & 4\\ 2 & 18-\lambda & \lambda-14\end{vmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}17&-2&-2\\-2&14&-4\\-2&-4&14\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-17&2&2\\2&\lambda-14&4\\2&4&\lambda-14\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-17&0&2\\2&\lambda-18&4\\2&\underbrace{18-\lambda}_{-(\lambda-18)}&\lambda-14\end{vmatrix}=(\lambda-18)\begin{vmatrix}\lambda-17&0&2\\2&1&4\\2&-1&\lambda-14\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-18)\begin{vmatrix}\lambda-17&0&2\\2&1&4\\4&0&\lambda-10\end{vmatrix}=(\lambda-18)\underbrace{\begin{vmatrix}\lambda-17&2\\4&\lambda-10\end{vmatrix}}_{(\lambda-17)(\lambda-10)-8}$$

$$=(\lambda-18)(\underbrace{\lambda^2-27\lambda+162}_{(\lambda-18)(\lambda-9)})=(\lambda-18)^2(\lambda-9)=0$$

特征值: $\lambda_1=9,\ \lambda_2=\lambda_3=18$　验算: $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=45$

3. 求特征向量 $Q^{-1}AQ=\Lambda$

$(\lambda E-A)x=0$

$$A=\begin{pmatrix}17 & -2 & -2\\ -2 & 14 & -4\\ -2 & -4 & 14\end{pmatrix}$$

$\lambda_1=9$ 求解 $(9E-A)x=0$ 的基础解系

$$9E-A=\begin{pmatrix}9-17 & 2 & 2\\ 2 & 9-14 & 4\\ 2 & 4 & 9-14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 2 & 2\\ 2 & -5 & 4\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_1 & x_2 & x_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

$n-r(9E-A)=3-2=1$

几何重数 = 1

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1/2\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

3. 求特征向量 $Q^{-1}AQ=\Lambda$

$(\lambda E-A)x=0$

$$A=\begin{pmatrix}17 & -2 & -2\\ -2 & 14 & -4\\ -2 & -4 & 14\end{pmatrix}$$

$\lambda_2=\lambda_3=18$ 求解 $(18E-A)x=0$ 的基础解系

$$18E-A=\begin{pmatrix}18-17 & 2 & 2\\ 2 & 18-14 & 4\\ 2 & 4 & 18-14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 4\\ 2 & 4 & 4\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_1 & x_2 & x_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ $\xi_3=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

$n-r(18E-A)=3-1=2$

几何重数 = 2

$$A=\begin{pmatrix}17 & -2 & -2\\ -2 & 14 & -4\\ -2 & -4 & 14\end{pmatrix}$$

2. 求特征值 $\lambda_1=9 \qquad \lambda_2=\lambda_3=18$

3. 求特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \qquad \xi_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \xi_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

$\xi_1^T\xi_2=0, \quad \xi_1^T\xi_3=0$

$\xi_2^T\xi_3=4\neq 0$

4. 将特征向量正交化及单位化

取 $\alpha_1=\xi_1,\ \alpha_2=\xi_2,\ \alpha_3=\xi_3-\dfrac{(\alpha_2,\xi_3)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}-\dfrac{4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2/5\\-4/5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}$

得正交向量组 $\overset{9}{\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}} \qquad \overset{18}{\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}} \qquad \overset{18}{\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}}$

单位化 $\eta_1=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix},\quad \eta_3=\begin{pmatrix}2/\sqrt{45}\\4/\sqrt{45}\\-5/\sqrt{45}\end{pmatrix}.$

$$\begin{array}{ccc} 9 & 18 & 18 \\ \end{array}$$

正交单位化 $\eta_1=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix},\quad \eta_3=\begin{pmatrix}2/\sqrt{45}\\4/\sqrt{45}\\-5/\sqrt{45}\end{pmatrix}.$

5. 得到正交矩阵Q

$$Q=\begin{pmatrix}1/3 & -2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45}\\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45}\\ 2/3 & 0 & -5/\sqrt{45}\end{pmatrix}$$

满足 $Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{pmatrix}9 & & \\ & 18 & \\ & & 18\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}17 & -2 & -2\\ -2 & 14 & -4\\ -2 & -4 & 14\end{pmatrix}$$

6. 用正交变换将二次型化为标准形

$$A=\begin{pmatrix}17 & -2 & -2\\ -2 & 14 & -4\\ -2 & -4 & 14\end{pmatrix}$$

所求正交变换为 $x=Qy$，即

$$Q=\begin{pmatrix}1/3 & -2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45}\\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45}\\ 2/3 & 0 & -5/\sqrt{45}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & -2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45}\\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45}\\ 2/3 & 0 & -5/\sqrt{45}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix},$$

$$f=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

$$=x^TAx$$

$$=(Qy)^TA(Qy)=(y^TQ^T)A(Qy)=y^T(Q^TAQ)y$$

$$=(y_1,y_2,y_3)\begin{pmatrix}9 & & \\ & 18 & \\ & & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

$$=9y_1^2+18y_2^2+18y_3^2$$

$$Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{pmatrix}9 & & \\ & 18 & \\ & & 18\end{pmatrix}$$

第五、六章 矩阵对角化及二次型

基本计算

- 矩阵对角化
- 二次型通过正交变化化为标准形
- 判别正定二次型

小结

常用的等价条件：

1) 二次型 $x^T A x$ 是正定二次型；

2) A是正定矩阵；

3) A的特征值都是正数；

4) A的顺序主子式都大于零.

例4 判断实对称矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ 是否正定.

解 由于

$$3>0,\quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11 > 0,\quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 46 > 0,$$

故这个矩阵是正定的.

例5 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2+4x_2x_3-2x_1x_3,$$

当 t 为何值时，上述二次型为正定二次型.

解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}$,

二次型正定的充要条件是A的各阶顺序主子式 >0

$$1>0,\quad \begin{vmatrix}1 & t\\ t & 1\end{vmatrix}=(1-t^2)>0,\quad |A|=\begin{vmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{vmatrix}=-5t^2-4t>0,$$

解得 $-\dfrac{4}{5}<t<0$, $\therefore -\dfrac{4}{5}<t<0$ 时，二次型为正定二次型.

第五、六章 矩阵对角化及二次型

基本计算

- 矩阵对角化
- 二次型通过正交变化化为标准形
- 判别正定二次型

线性代数

基本概念与基本计算

一. 基本概念

	基本概念
第1章	可逆矩阵，初等矩阵，矩阵的秩，对称矩阵
第2章	代数余子式，伴随矩阵，行列式的性质
第3章	线性相关，线性无关，极大无关组，向量组的秩，基础解系
第4章	向量空间，基，标准正交基，正交矩阵
第5章	特征值，特征向量，相似矩阵，矩阵对角化
第6章	二次型，正定矩阵，正交变换，顺序主子式

二. 基本计算

	基本计算
第1章	求解线性方程组，求矩阵的逆，求解矩阵方程，求矩阵的秩
第2章	计算行列式
第3章	判断线性相关性，将一个向量由向量组线性表示，求极大无关组
第4章	施密特正交化，基变换，坐标变换
第5章	求特征值与特征向量，矩阵相似对角化，实对称矩阵相似对角化
第6章	用正交变换将二次型化为标准形，判断二次型及实对称矩阵是否正定