§3.3 消解证明法

利用消解规则，借鉴归谬法的思想，可以构造出一种证明方法——消解证明法。

假设要证明如下的推理是否正确：

前提：$A_1, A_2, \cdots, A_k$

结论：B

归谬法是要证明

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B$$

为矛盾式。实际做法是证明

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B \Rightarrow C' \wedge \neg C'$$

这里，C'是命题公式。

把公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B$ 化为合取范式

$$S = B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_l$$

以 $B_1, B_2, \cdots, B_l$ 为前提，利用消解规则得到S的消解序列$C_1, C_2, \cdots, C_n$，因

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B \text{ 与 } S$$

等值，又 S 与 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 有相同的可满足性，故若$C_n = \lambda$（S有否证），则说明 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B$ 不可满足，即

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B$$

为重言式，此时由前提 $A_1, A_2, \cdots, A_k$导出结论B的推理正确。

例 用消解法证明下面推理

前提：$q \to p$，$q \leftrightarrow s$，$s \leftrightarrow t$，$t \wedge r$

结论： $p \wedge q \wedge s$

解 先求前提中各公式的合取范式

$$q \to p \Leftrightarrow \neg q \vee p \Leftrightarrow p \vee \neg q$$

$$q \leftrightarrow s \Leftrightarrow (q \to s) \wedge (s \to q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg q \vee s) \wedge (\neg s \vee q) \Leftrightarrow (\neg q \vee s) \wedge (q \vee \neg s)$$

$$s \leftrightarrow t \Leftrightarrow (s \to t) \wedge (t \to s)$$

$$\Leftrightarrow (\neg s \vee t) \wedge (\neg t \vee s) \Leftrightarrow (\neg s \vee t) \wedge (s \vee \neg t)$$

$$t \wedge r \Leftrightarrow r \wedge t$$

把结论的否定化为合取范式

$$\neg(p\wedge q\wedge s) \Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee\neg s$$

把原推理的前提改成新的形式。

前提：$p\vee\neg q, \neg q\vee s, q\vee\neg s, \neg s\vee t, s\vee\neg t, r, t, \neg p\vee\neg q\vee\neg s$

证明：① $s\vee\neg t$　　前提

② t　　前提

③ s　　①②消解

④ $q\vee\neg s$　　前提

⑤ q　　③④消解

⑥ $p\vee\neg q$　　前提

⑦	p	⑤⑥消解
⑧	$\neg p \vee \neg q \vee \neg s$	前提
⑨	$\neg q \vee \neg s$	⑦⑧消解
⑩	$\neg s$	⑤⑨消解
⑪	λ	③⑩消解

因为最终得到空式，所以该推理正确。 ■

小结：

1. 熟练掌握推理的形式结构

   推理的有效性，常用重言蕴涵式，基本方法

2. 熟练掌握自然推理系统

   形式系统，自然推理系统，推理规则

构造证明的方法

3. 掌握两种特殊的构造证明技巧

   附加前提法，归谬法