§7.3 关系的运算

定义 设R是二元关系

（1）R中所有有序对的第一元素构成的集合称为R的**定义域**，记为 dom$R$；

$$\mathrm{dom}R = \{\, x \mid \exists y(<x, y> \in R)\}$$

（2）R中所有有序对的第二元素构成的集合称为R的**值域**，记为 ran$R$；

$$\mathrm{dom}R = \{\, y \mid \exists x(<x, y> \in R)\}$$

（3）R的定义域与值域的并称为R的**域**，记为 fld$R$；

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{dom}R$$

例 对二元关系

$$R = \{<2,1>,<3,1>,<4,2>,<3,2>,<4,4>\}$$

可得

$$\mathrm{dom}R = \{2, 3, 4\}，\quad \mathrm{ran}R = \{1, 2, 4\}$$

$$\mathrm{fld}R = \{1, 2, 3, 4\}$$

二元关系作为集合可进行并、交等集合运算。

定义 设R是二元关系，则二元关系

$$\{ <y, x> \mid <x, y> \in R \}$$

称为R的**逆关系**，记为 R^{-1}；

空关系∅、全域关系 E_A、恒等关系 I_A 的逆关系都是其自身。小于等于关系 L_A 的逆关系是大于等于关系。整除关系 D_A 的逆关系是倍数关系。

定义 设R是二元关系， A是集合，则二元关系

$$\{ <x, y> \mid xRy \wedge x \in A \}$$

称为R在A上的**限制**，记为 $R \upharpoonright A$；集合

$$\mathrm{ran}(R \upharpoonright A)$$

称为 A在R下的**像**，记为 $R[A]$。

例 对二元关系

$$R=\{<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,2>,<2,4>\}$$

有

$$R\upharpoonright\varnothing=\varnothing$$

$$R\upharpoonright\{1\}=\{<1,2>,<1,3>\}$$

$$R\upharpoonright\{1,2\}=\{<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,4>\}$$

$$R[\varnothing]=\varnothing$$

$$R[\{1\}]=\{2,3\}$$

$$R[\{1,2\}]=\{2,3,4\}$$

$$R[\{3\}]=\{2\}$$

定义 设F和G是两个二元关系，则二元关系

$$\{ <x, y> \mid \exists t(<x, t> \in F \wedge <t, y> \in G)\}$$

称为F与G的**右复合**，记为 $F \circ G$。

例 对二元关系

$$F = \{<1,2>,<1,3>,<3,2>,<4,4>\}$$

$$G = \{<2,2>,<2,3>,<3,4>\}$$

有

$$F \circ G = \{<1,2>,<1,3>,<1,4>,<3,2>,<3,3>\}$$

$$G \circ F = \{<2,2>,<3,4>\}$$

定理 设F是二元关系，则

（1）$(F^{-1})^{-1}=F$；

（2） $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$， $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$。

定理 设F, G, H是三个二元关系，则

（1）$(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$；

（2）$(F\circ G)^{-1}=G^{-1}\circ F^{-1}$。

证明 （2）对任意有序对$<x, y>$

$$<x, y>\in(F\circ G)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow <y, x>\in F\circ G$$

$$\Leftrightarrow \exists t(\langle y, t\rangle \in F \wedge \langle t, x\rangle \in G)$$

$$\Leftrightarrow \exists t(\langle t, x\rangle \in G \wedge \langle y, t\rangle \in F)$$

$$\Leftrightarrow \exists t(\langle x, t\rangle \in G^{-1} \wedge \langle t, y\rangle \in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in G^{-1} \circ F^{-1}$$

由此得 $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$。 ▌

定理 设R是A上的二元关系，则

$$R \circ I_A = I_A \circ R = R$$

证明 对任意有序对$\langle x, y\rangle$

$$\langle x, y\rangle \in R \circ I_A$$

$$\Leftrightarrow \exists t(<x,t>\in R \wedge <t,y>\in I_A)$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in R \wedge <y,y>\in I_A$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in R$$

由此得，$R\circ I_A = R$。同理可证，$I_A \circ R = R$。 ▌

例 考虑下列二元关系的右复合

F={ $<x, y>$ | x是y的父亲}

G={ $<x, y>$ | x是y的母亲}

$$F\circ G=\{<x,y> \mid \exists t(<x,t>\in F \wedge <t,y>\in G)\}$$

$$G\circ F=\{<x,y> \mid \exists t(<x,t>\in G \wedge <t,y>\in F)\}$$

定理 设F, G, H是三个二元关系，则

（1） $F\circ(G\cup H)=(F\circ G)\cup(F\circ H)$；

$(F\cup G)\circ H=(F\circ H)\cup(G\circ H)$；

（2） $F\circ(G\cap H)=(F\circ G)\cap(F\circ H)$；

$(F\cap G)\circ H=(F\circ H)\cap(G\circ H)$。

定理 设F为二元关系，A, B为集合，则

（1） $F\restriction(A\cup B)=(F\restriction A)\cup(F\restriction B)$；

$F\restriction(A\cap B)=(F\restriction A)\cap(F\restriction B)$；

（2） $F[A\cup B]=F[A]\cup F[B]$。

证明 仅证明（1）中第二式与（2）式。

（1）对任意有序对$<x, y>$

$$<x, y>\in F\restriction(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow <x, y>\in F\wedge(x\in A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow <x, y>\in F\wedge(x\in A\wedge x\in B)$$

$$\Leftrightarrow (<x, y>\in F\wedge<x, y>\in F)\wedge(x\in A\wedge x\in B)$$

$$\Leftrightarrow (<x, y>\in F\wedge x\in A)\wedge(<x, y>\in F\wedge x\in B)$$

$$\Leftrightarrow (<x, y>\in F\restriction A)\wedge(<x, y>\in F\restriction B)$$

$$\Leftrightarrow <x, y>\in(F\restriction A)\cap F\restriction B)$$

由此得，$F\restriction(A\cap B)=(F\restriction A)\cap(F\restriction B)$。

（2）对任意元素y

$y \in F[A \cup B]$

$\Leftrightarrow \mathrm{ran} F\restriction(A \cup B)$

$\Leftrightarrow \exists x(<x, y> \in F\restriction(A \cup B))$

$\Leftrightarrow \exists x(<x, y> \in F \wedge x \in A \cup B)$

$\Leftrightarrow \exists x(<x, y> \in F \wedge (x \in A \vee x \in B))$

$\Leftrightarrow \exists x((<x, y> \in F \wedge x \in A) \vee (<x, y> \in F \wedge x \in B))$

$\Leftrightarrow \exists x(<x, y> \in F \wedge x \in A) \vee \exists x(<x, y> \in F \wedge x \in B)$

$\Leftrightarrow (<x, y> \in F\restriction A) \vee (<x, y> \in F\restriction B)$

$\Leftrightarrow y \in \mathrm{ran} F\restriction A \vee y \in \mathrm{ran} F\restriction B$

$\Leftrightarrow y \in F[A] \vee y \in F[B]$

$\Leftrightarrow y \in F[A] \cup F[B]$

由此得，$F[A \cup B] = F[A] \cup F[B]$。 ▌

定义 设R是A上的二元关系，n是自然数，则R的n**次幂**定义为

$$R^0 = I_A,\ R^{n+1} = R^n \circ R$$

定理 设R是A上的二元关系，$m,n \in \mathbb{N}$，则

（1）$R^m \circ R^n = R^{m+n}$；

（2）$(R^m)^n = R^{mn}$。

例 设 $A=\{1,2,3\}$，

$$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

求 R 与 R^2 的关系矩阵。

解 计算得

$$R^2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2, \ldots \rangle\}$$

$M_1^5=M_1^6$

用 M_1 与 M_2 分别表示 R 与 R^2 的关系矩阵，则

$M_2=M_1^2$

$$M_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\quad M_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

逻辑加：$1+1=1+0=0+1=1$，$0+0=0$

逻辑乘：$0\times0=1\times0=0\times1=0$，$1\times1=1$

定理 设M是二元关系R的关系矩阵，则R^n的关系矩阵为M^n，这里矩阵元素的加法与乘法为逻辑加与逻辑乘。

定理 设A为有限集，R是A上的二元关系，M是R的关系矩阵，则存在自然数s和t，使$R^s=R^t$，即$M^s=M^t$。

例 设$A=\{a,b,c,d\}$，$R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$，求$R^n$。

解 首先求出R的关系矩阵为

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

依次计算M的幂，得

$$M^2=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad M^3=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M^4=M^2,\ M^5=M^3$$

所以,

$$M^{2k}=M^2=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M^{2k+1} = M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由关系矩阵还原成关系的集合表示，得

$$R^{2k}=R^2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,d\rangle\}$$

$$R^{2k+1}=R^3=\{\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$$

这里，k为任意正整数。

定理 设R是集合A上的二元关系，若存在自然数s和$t(s<t)$使得$R^s=R^t$，则

（1）对任意$k\in\mathbb{N}$有$R^{s+k}=R^{t+k}$；

（2）对任意$k,i\in\mathbb{N}$有$R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，其中$p=t-s$；

（3）令$S=\{R^0, R^1,\cdots, R^{t-1}\}$，则对任意$q\in\mathbb{N}$有$R^q\in S$。

例 设$A=\{a, b, d, e, f\}$，

$R=\{<a,b>,<b,a>,<d,e>,<e,f>, <f,d>\}$

求最小的自然数m,n使得$m<n$且$R^m=R^n$。

解 得根据关系右复合运算的定义，可得A中元素随着右复合运算有如下规律：

$$a \to b \to a \qquad d \to e \to f \to d$$

$$b \to a \to b \qquad e \to f \to d \to e$$

$$f \to d \to e \to f$$

说明a, b的变化有周期性，周期为2；d, e, f 的变化也有周期性，周期为3。取2和3的最小公倍数6，可得$R^0=R^{m+6}$。

取$m=0$，$n=6$，则有$R^0=R^6$。 ▌