第二章 行列式

复习

行列式的性质：

若 $A \xrightarrow{\text{行变换}} B$，则$A, B$的行列式的变化：

性质2　若 $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$，　$|B| = -|A|$

性质3　若 $A \xrightarrow{r_i \times k} B$，　$|B| = k|A|$

性质5　若 $A \xrightarrow{r_i + k r_j} B$，　$|B| = |A|$

性质1　$|A^T| = |A|$

性质4　拆行(列)

性质6　$|AB| = |A||B|$

性质7　$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$

A,B方子块

结论1：行变换不会改变方阵行列式是否为零的性质.

结论2：可逆矩阵行列式 $\neq 0$

不可逆矩阵行列式 $= 0$

第二章 行列式

2.1 行列式的定义

2.2 行列式的性质

2.3 行列式的展开定理

2.4 克莱姆法则

第二章 行列式

2.3 行列式的展开定理

- 行列式按一行(列)展开
- 伴随矩阵与矩阵求逆

1. 行列式按一行(列)展开

定义2.5 在 n 阶行列式中, 把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后, 剩下来的n-1阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij}. $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}.$$

$$M_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=M_{44}.$$

注意: a_{ij} 的代数余子式仅与 i, j 有关, 与 a_{ij} 无关.

定理2.3 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$, 则 A 的行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和, 即

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i, j = 1,2,\cdots,n)$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad \text{(证明略)}$$

如:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \end{array}$$

定理2.3 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$, 则 A 的行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和, 即

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i, j = 1,2,\cdots,n)$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad \text{(证明略)}$$

说明:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

定理2.3 $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i, j = 1,2,\cdots,n)$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

推论： 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A|, i = j. \\ 0, \quad i \neq j. \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} |A|, i = j. \\ 0, \quad i \neq j. \end{cases}$$

推论：行列式某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|, i=j.\\ 0, \quad i\neq j.\end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}|A|, i=j.\\ 0, \quad i\neq j.\end{cases}$$

如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$$

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=|A|$$

$$a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}=0$$

$$a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}=|A|$$

证明： 把行列式 $|A|$ 按第 j 行展开，有

$$0=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$$

第 j 行

所以当 $i \neq j$ 时，$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,$

同理可证明列的情况.

例1 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

解:

按第~~4~~列展开：

$$D = 2A_{14} + 5A_{24} + 1A_{34} + 4A_{44} + 5A_{54}$$ —— 计算5个4阶行列式

麻烦！

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$ —— 4阶行列式

例1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

解:

按第 5 列展开:

$D=0A_{15}+2A_{25}+0A_{35}+0A_{45}+0A_{55}$ —— 计算1个4阶行列式

方便!

$A_{15}=(-1)^{1+5}\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ —— 4阶行列式

例1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

解:

$$D=(-1)^{2+5}2\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=-2\cdot 5\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+(-2)r_1}-10\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix}=-10\cdot(-2)\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}=120\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1080.$$

评注：利用行列式的性质将所给行列式的某行(列)化成只含有一个非零元素，再按该行展开.

例2 计算n阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & a-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & a-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & a-1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$

D_{n-1}

D_{n-2}

解：递推法

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & a-1 & 0 & 0 \\ 1 & a & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & a & a-1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a & a-1 & 0 \\ 1 & a & a-1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & a-1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \qquad D_1 = a$$

解： 递推法

$$D_4=\begin{vmatrix} a & a-1 & 0 & 0 \\ 1 & a & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & a & a-1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \quad D_3=\begin{vmatrix} a & a-1 & 0 \\ 1 & a & a-1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} \quad D_2=\begin{vmatrix} a & a-1 \\ 1 & a \end{vmatrix}$$

$$D_4=a\,D_3+(-1)^{1+2}(a-1)\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 0 \\ 0 & a & a-1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$=a\,D_3-(a-1)\times 1\times(-1)^{1+1}\,D_2$$

$$=aD_3-(a-1)D_2$$

例2 计算n阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & a-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & a-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & a-1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$

解： 递推法

$$D_n = a\,D_{n-1} + (-1)^{1+2}(a-1)\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & a-1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \quad n-1\text{阶}$$

$$D_n = aD_{n-1} - (a-1)D_{n-2}$$

D_{n-2}

解： 递推法

$$D_n = aD_{n-1} - (a-1)D_{n-2} \qquad (\text{等号两端减}D_{n-1})$$

$$D_{\boxed{n}} - D_{n-1} = aD_{n-1} - D_{n-1} - (a-1)D_{n-2} = (a-1)D_{n-1} - (a-1)D_{n-2}$$

$$= (a-1)(D_{\boxed{n-1}} - D_{n-2})$$ —— 关于D_n-D_{n-1}的递推公式

$$= (a-1)^2(D_{n-2} - D_{n-3})$$

$$D_{\boxed{n-1}} - D_{n-2} = (a-1)(D_{\boxed{n-2}} - D_{n-3})$$

....

$$D_{n-1} = D_{n-2} + (a-1)^{n-1}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & a-1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a + 1, D_1 = a$$

$$= (a-1)^{n-2}(D_2 - D_1)$$

$$D_2 - D_1 = (a-1)^2$$

$$= (a-1)^n$$

$$D_{\boxed{n}} = D_{\boxed{n-1}} + (a-1)^n$$ —— 关于D_n的递推公式

$$= D_{n-2} + (a-1)^{n-1} + (a-1)^n$$

$$= \underset{D_1}{a} + (a-1)^2 + \cdots + (a-1)^{n-1} + (a-1)^n = \begin{cases} n+1 & a = 2 \\ a + \dfrac{(a-1)^2 - (a-1)^{n+1}}{2-a} & a \neq 2 \end{cases}$$

例3 计算n阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & a_2 & b & \cdots & b \\ b & b & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix}$, $b\neq a_i$, $i=1,\ldots,n$.

解：加边法

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_1 & b & \cdots & b \\ 0 & b & a_2 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=D_n$$

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a_1 & b & b \\ 0 & b & a_2 & b \\ 0 & b & b & a_3 \end{vmatrix}$$

$$=D_3$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a_1 & b & b \\ 0 & b & a_2 & b \\ 0 & b & b & a_3 \end{vmatrix} \overset{r_i - r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ -1 & a_1 - b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & a_2 - b & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a_3 - b \end{vmatrix}$$

$b \neq a_i,\ \ i=1,2,3$

$$= (a_1-b)(a_2-b)(a_3-b)\begin{vmatrix} 1 & \frac{b}{a_1-b} & \frac{b}{a_2-b} & \frac{b}{a_3-b} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1-b)(a_2-b)(a_3-b)\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{a_i-b} & \frac{b}{a_1-b} & \frac{b}{a_2-b} & \frac{b}{a_3-b} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1-b)(a_2-b)(a_3-b)(1+\sum_{i=1}^{3}\frac{b}{a_i-b}) \rightarrow (a_1-b)(a_2-b)\cdots(a_n-b)(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{a_i-b})$$

例3 计算n阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & a_2 & b & \cdots & b \\ b & b & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix}$, $b\neq a_i$, $i=1, \ldots, n$.

解： 加边法

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_1 & b & \cdots & b \\ 0 & b & a_2 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix} \overset{r_i - r_1}{\underset{i=2,\cdots,n}{=}} \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ -1 & a_1-b & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & b & b & \cdots & b\\ -1 & a_1-b & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & a_2-b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b\end{vmatrix}=\begin{array}{c}(a_1-b)\\(a_2-b)\\ \vdots\\(a_n-b)\end{array}\begin{vmatrix}1 & \dfrac{b}{a_1-b} & \dfrac{b}{a_2-b} & \cdots & \dfrac{b}{a_n-b}\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{array}{c}(a_1-b)\\(a_2-b)\\ \vdots\\(a_n-b)\end{array}\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{b}{a_i-b} & \dfrac{b}{a_1-b} & \dfrac{b}{a_2-b} & \cdots & \dfrac{b}{a_n-b}\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=(a_1-b)(a_2-b)\cdots(a_n-b)(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{a_i-b})$$

范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_{n-1}, x_n$$

$$\begin{aligned} &=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\cdots(x_n-x_1) \\ &\quad (x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2) \\ &\quad (x_4-x_3)\cdots(x_n-x_3) \\ &\quad \cdots\cdots \\ &\quad (x_n-x_{n-1}) \end{aligned}$$

例

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \end{vmatrix}=(3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4)$$

范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j)$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_{n-1}, x_n$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)\cdots(x_n - x_1)$$
$$(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\cdots(x_n - x_2)$$
$$(x_4 - x_3)\cdots(x_n - x_3)$$
$$\cdots\cdots$$
$$(x_n - x_{n-1})$$

例

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 9 \\ 2^2 & 6^2 & 4^2 & 9^2 \\ 2^3 & 6^3 & 4^3 & 9^3 \end{vmatrix} = (6-2)(4-2)(9-2)$$
$$(4-6)(9-6)$$
$$(9-4)$$

证明：

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\\x_1^3&x_2^3&x_3^3&x_4^3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=4,3,2]{r_i-x_1r_{i-1}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1&x_4-x_1\\0&x_2(x_2-x_1)&x_3(x_3-x_1)&x_4(x_4-x_1)\\0&x_2^2(x_2-x_1)&x_3^2(x_3-x_1)&x_4^2(x_4-x_1)\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}}(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\underbrace{\begin{vmatrix}1&1&1\\x_2&x_3&x_4\\x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix}}_{D_3}$$

证明：

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\\x_1^3&x_2^3&x_3^3&x_4^3\end{vmatrix}=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\underbrace{\begin{vmatrix}1&1&1\\x_2&x_3&x_4\\x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix}}_{D_3}$$

$$\xlongequal[i=3,2]{r_i-x_2r_{i-1}}(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&x_3-x_2&x_4-x_2\\0&x_3(x_3-x_2)&x_4(x_4-x_2)\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}}(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)\underbrace{\begin{vmatrix}1&1\\x_3&x_4\end{vmatrix}}_{D_2}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)$$

计算行列式常用方法：

小结

1. 利用定义；
2. 利用性质化为上(下)三角形行列式；
3. 行列式按行(列)展开降阶；
4. 每行和为常数,列相加,再提取公因子；
5. 相邻两行(列)依次相减, 化简行列式；
6. 利用拆列性质；
7. 递推法；
8. 加边法；
9. 范德蒙行列式.

练习1

计算下面行列式的值

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{r_3-2r_4}{\underset{r_1-2r_4}{=}} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & -10 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

解：

$$= 1\cdot(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 4 & -1 & -10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & -14 \end{vmatrix} \overset{r_1-4r_2}{\underset{r_1-10r_2}{=}} - \begin{vmatrix} 0 & -9 & -18 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -17 & -34 \end{vmatrix}$$

$$= -1\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -9 & -18 \\ -17 & -34 \end{vmatrix} = (-9)(-17) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

第二章 行列式

2.3 行列式的展开定理

- 行列式按一行(列)展开
- 伴随矩阵与矩阵求逆

2. 伴随矩阵与矩阵求逆

(1) 伴随矩阵

定义2.6 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为矩阵A 的伴随矩阵.

练习2

写出矩阵B的伴随矩阵B^*

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

解：

$$B^* = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1+2=1$$

$$B_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+2) = -1$$

$$B_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1+1=0$$

性质 $AA^* = A^*A = |A|E$

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = |A|$$
$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \cdots + a_{1n}A_{2n} = 0$$

证明:

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|E$$

(2) 逆矩阵的求法

方阵A的A^*总存在，但 A^{-1}不一定存在.

定理2.4 方阵A可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$， 且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$

行列式法

其中 A^* 为矩阵A的伴随矩阵.

证明:

必要性

$\Rightarrow$ 若A可逆，则存在 A^{-1} 使 $AA^{-1} = E$

所以 $|A||A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1$，因此 $|A| \neq 0$ 且 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

充分性

$\Leftarrow \because |A| \neq 0$， 由 $AA^* = A^*A = |A|E$

有 $A(\frac{A^*}{|A|}) = (\frac{A^*}{|A|})A = E$ 所以 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$

(2)逆矩阵的求法

定理2.4 方阵A可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

定理1.8 n阶方阵A可逆 $\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$

定理2.4 方阵A可逆$\Leftrightarrow |A| \neq 0$，且 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^*$

结论： 若方阵A可逆，则A的伴随矩阵 A^* 也可逆.

并求 $(A^*)^{-1}, |A^*|$

证明1 $\because |A| \neq 0,$ 由 $AA^* = A^*A = |A|E$

有 $\left(\dfrac{A}{|A|}\right)A^* = A^*\left(\dfrac{A}{|A|}\right) = E$ $\therefore$ $\boxed{(A^*)^{-1} = \dfrac{A}{|A|}}$

$$AA^* = |A|E \rightarrow \quad |A||A^*| = |AA^*| = ||A|E| = (|A|)^n|E| = (|A|)^n$$

$$\rightarrow \boxed{|A^*| = (|A|)^{n-1}}$$

证明2 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^* \rightarrow |A|A^{-1} = A^* \rightarrow (A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = \dfrac{A}{|A|}$

定理2.4 方阵A可逆$\Leftrightarrow |A| \neq 0$，且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$

结论： 若方阵A可逆，则A的伴随矩阵 A^* 也可逆.

$$(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|} \qquad |A^*| = (|A|)^{n-1}$$

推论： 方阵A不可逆$\Leftrightarrow |A| = 0$

小结

1. 代数余子式的性质

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|, & \text{当 } i=j,\\ 0, & \text{当 } i\neq j.\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. 伴随矩阵的性质

$$AA^*=|A|E$$

3. 伴随矩阵

矩阵A可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ $\qquad |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

$$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A \qquad |A^*|=(|A|)^{n-1}$$

定理2.4 方阵A可逆$\Leftrightarrow |A| \neq 0$，且 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^*$

完成定理1.2的证明:

定理1.2 对于n阶方阵 A, B，若 $AB = E$，

则方阵 A, B 是可逆的，且 $B = A^{-1}, A = B^{-1}$

证明: 由 $AB = E$，有 $|A||B| = |AB| = |E| = 1,$

所以，$|A| \neq 0, |B| \neq 0$ 从而 A, B 均可逆。

在 $AB = E$ 两端左乘 A^{-1}, 有 $B = A^{-1}$

在 $AB = E$ 两端右乘 B^{-1}, 有 $A = B^{-1}$

例4 判断下面矩阵是否可逆, 若可逆, 求其逆矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

解: $|A|=1\times 3-2\times(-2)=7\neq 0$ 故 A 可逆.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

注释: 求逆矩阵的行列式法只适用于低阶矩阵.

例5 判断下列矩阵是否可逆, 若可逆, 求其逆矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 4\\ -1 & -5 & -4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

解:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 4\\ -1 & -5 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 7 & 4\\ -1 & -7 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7 & 4\\ -7 & -4\end{vmatrix}=0$$

故 A 不可逆.

例5 判断下列矩阵是否可逆, 若可逆, 求其逆矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 4\\ -1 & -5 & -4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

解:

$$|B|=\begin{vmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-2$$

故 B 可逆.

例5 判断下列矩阵是否可逆, 若可逆, 求其逆矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&3&4\\-1&-5&-4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$B_{21}=-(-2-1)=3$$
$$B_{22}=(0-1)=-1$$
$$B_{23}=-(0+2)=-2$$

解: $\because |B|=-2,$ 故 B 可逆.

不方便!

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}B^{*}=\frac{1}{|B|}\begin{pmatrix}B_{11}&B_{21}&B_{31}\\B_{12}&B_{22}&B_{32}\\B_{13}&B_{23}&B_{33}\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&3&5\\-1&-1&-1\\0&-2&-2\end{pmatrix}$$

注释: 求逆矩阵的行列式法只适用于低阶矩阵.

求逆矩阵的通用方法是初等行变换法.

例6 设n阶方阵B可逆，方阵A满足 $A^2 - A = B$

证明：A可逆，并求其逆.

证明： 因为方阵B可逆，则

$$A^2 - A = B \Rightarrow A(A-E) = B$$

$$\Rightarrow |A||A-E| = |B| \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0$$

所以矩阵A可逆.

$$A(A-E) = B \Rightarrow (A-E)^{-1}A^{-1} = B^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = (A-E)B^{-1}$$

第二章 行列式

2.3 行列式的展开定理

- 行列式按一行(列)展开
- 伴随矩阵与矩阵求逆

作 业　习题四

授课内容	作业
2.1 行列式定义	4,5(1)(2)(4) 定义
2.2 行列式性质	6(3)(4)(5)(7)(8)(9)，7(1)(2)性质
2.3 行列式展开定理	8(1)(3),9(1)(2)降阶，10(1)(2)性质， 18(1)-(5) 伴随阵， 21(1)(2)行列式求逆
2.4 克莱姆法则	12(1), 13

第6(4)题

计算下列行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

解：

$$D\overset{\substack{c_1-c_2\\ \\ c_3-c_4}}{=}\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ x & 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & y & 1-y \end{vmatrix}=xy\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}\overset{\substack{c_2-c_1\\ c_4-c_1\\ \\ c_4-c_3}}{=}xy\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -y \end{vmatrix}$$

$$=x^2y^2$$

第6(8)题

计算下列行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}=(-1)^{(n-1)}\frac{1}{2}(n+1)!$$

解：

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_3+c_4 \\ c_2+c_3}}{\underset{c_1+c_2}{=}} \begin{vmatrix} 1+2+3+4 & 2+3+4 & 3+4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{(4-1)}(4-1)!\frac{1}{2}(1+4)4=(-1)^{(4-1)}\frac{1}{2}(4+1)!$$

第6(8)题

计算下列行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

解：

$$D \overset{\substack{c_{n-1}+c_n \\ c_{n-2}+c_{n-1}}}{\underset{c_1+c_2}{=}} \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(1+n)n & & & & \\ & -1 & & * & \\ & & -2 & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & -(n-2) & \\ & & & & -(n-1) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-1)^{(n-1)}(n+1)!$$