§7.7 偏序关系

定义 设R是非空集A上的二元关系，若R是自反的、反对称的、传递的，则称R为A上的**偏序关系**。

对偏序关系R，若$<x,y>\in R$，则称x**小于或等于**y，记为 $x\preccurlyeq y$。

例 在实数域$\mathbb{R}$、正整数集合$\mathbb{N}^*$、幂集$P(A)$上，有如下的偏序关系：

$$L_{\mathbb{R}}=\{<x,y>\mid x,y\in\mathbb{R}\wedge x\leq y\}$$

$$D_{\mathbb{N}^*}=\{<x,y>\mid x,y\in\mathbb{N}^*\wedge x\text{能整除}y\}$$

$$R_{\subseteq}=\{<x,y>\mid x,y\in P(A)\wedge x\subseteq y\}$$

定义 定义了偏序关系$\preccurlyeq$的集合A称为**偏序集**，记为 $<A, \preccurlyeq>$。

上例中的三个集合都是偏序集：

$<\mathbb{R}, L_{\mathbb{R}}>$，$<\mathbb{N}^*, D_{\mathbb{N}^*}>$，$<P(A), R_{\subseteq}>$

注 在偏序集 $<A, \preccurlyeq>$ 中，规定：

（1）x小于y $(x \prec y) \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge x \neq y$；

（2）x与y可比 $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$

（3）若A中任意两个元素都可比，则称$<A, \preccurlyeq>$为全序集，此时称$\preccurlyeq$为全序关系。

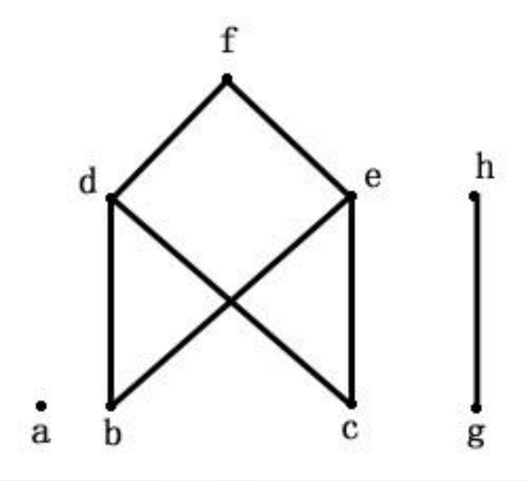
定义 设$<A,\preccurlyeq>$是偏序集，任取$x,y\in A$。若$x\prec y$且不存在$z\in A$，使$x\prec z\prec y$，则称y**覆盖**x。

哈斯图：对偏序关系$<A,\preccurlyeq>$，用顶点表示A的元素，若$x\prec y$，则x画在y的下方；若y覆盖x，则用一条线连接x和y。

例 已知集合$A=\{1,2,\cdots,9\}$及偏序关系D_A（整除），求偏序集$<A,D_A>$的哈斯图。

例 已知集合$A=\{a,b,c\}$及偏序关系$R_{\subseteq}$（包含），求偏序集$<P(A),R_{\subseteq}>$的哈斯图。

例 已知偏序集$\langle A,\preccurlyeq\rangle$的哈斯图，这里 $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$，求该偏序关系。



解 根据哈斯图中从下向上的链，还原关系$\preccurlyeq$中的有序对：

b-d-f： $\langle b,d\rangle$, $\langle b,f\rangle$, $\langle d,f\rangle$

b-e-f： $\langle b,e\rangle$, $\langle b,f\rangle$, $\langle e,f\rangle$

c-e-f： $\langle c,e\rangle$, $\langle c,f\rangle$, $\langle e,f\rangle$

c-d-f： $\langle c,d\rangle$, $\langle c,f\rangle$, $\langle d,f\rangle$　　　g-h： $\langle g,h\rangle$

由此得$\preccurlyeq$包含上述13个有序对以及I_A中的8个有序对。▮

定义 设$<A, \preccurlyeq>$是偏序集，$B\subseteq A$，$y\in B$

（1）若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立，则称$y$是$B$的**最小元**；

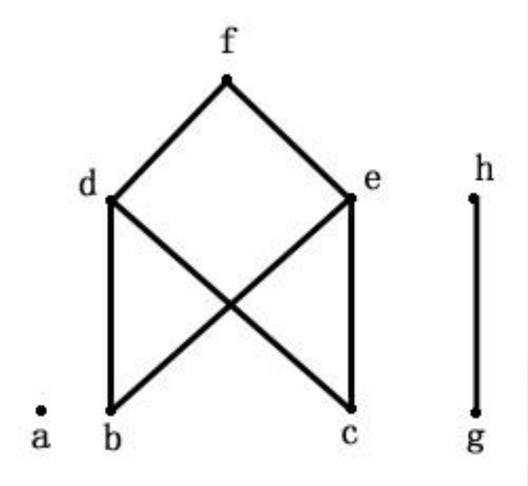
（2）若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立，则称$y$是$B$的**最大元**；

（3）若$\forall x(x\in B \wedge x$与$y$可比$\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立，则称$y$是$B$的**极小元**；

（4）若$\forall x(x\in B \wedge x$与$y$可比$\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立，则称$y$是$B$的**极大元**。

注 最元具有全可比性，但极元未必，极元肯定存在，但最元未必。

例 已知偏序集$<A,\preccurlyeq>$的哈斯图，



这里 $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$。取 $B=\{b,c,d\}$，求B的最元与极元。

定义 设$<A, \preccurlyeq>$是偏序集，$B \subseteq A$，$y \in A$

（1）若$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$成立，则称$y$是$B$的**上界**；

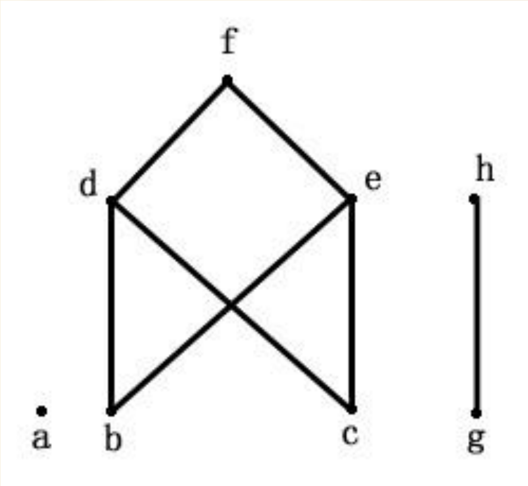
（2）若$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$成立，则称$y$是$B$的**下界**；

（3）若$C=\{y \mid y$为B的上界$\}$有最小元，则称之为B的**最小上界**或**上确界**；

（4）若$C=\{y \mid y$为B的下界$\}$有最大元，则称之为B的**最大下界**或**下确界**。

注 B的最元在B中，B的界在A中，B的界可能不存在。

例 已知偏序集$<A,\preccurlyeq>$的哈斯图，



这里 $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$。取 $B=\{b,c,d\}$，求B的界。

至少满足反自反性和传递性的二元关系称为**拟序关系**。

使每个非空子集都有最小元的全序关系称为**良序关系**。

小结：

1. 熟练二元关系的基本概念

   笛卡尔积，二元关系，关系矩阵，关系图

2. 熟练关系的运算与性质

   并，交，逆，右复合，幂，闭包

3. 熟练掌握等价关系

   自反性、对称性、传递性，集合划分，关系图与关系矩阵特性

4. 熟练掌握偏序关系

   反对称性，哈斯图，最元与极元，界