

§ 5.2 前束范式

定义 设 A 是谓词公式，若 A 有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_kx_kB$$

其中 $Q_i(1\leq i\leq k)$ 为 \forall 或 \exists ， B 为不含量词的公式，则称 A 为**前束范式**。

定理 一阶逻辑中的任何谓词公式都存在与之等值的前束范式。

例 求下列公式的前束范式

(1) $\forall xF(x) \wedge \neg \exists xG(x)$

(2) $\forall x F(x) \rightarrow \exists xG(x)$

(3) $\exists xF(x,y) \rightarrow \exists yG(x,y)$

解 (1) **法一** $\forall xF(x) \wedge \neg \exists xG(x)$

$$\Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \neg \exists yG(y)$$

换名规则

$$\Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall y \neg G(y)$$

量词否定

$$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge \forall y \neg G(y))$$

辖域扩张

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \wedge \neg G(y))$$

辖域扩张

法二 $\forall xF(x) \wedge \neg \exists xG(x)$

$$\Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \neg \exists yG(y)$$

换名规则

$$\Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall y \neg G(y)$$

量词否定

$$\Leftrightarrow \forall y(\forall xF(x) \wedge \neg G(y))$$

辖域扩张

$$\Leftrightarrow \forall y \forall x (F(x) \wedge \neg G(y))$$

辖域扩张

法三 $\forall xF(x) \wedge \neg \exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall x \neg G(x)$

量词否定

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge \neg G(x))$

量词分配

(2) 法一 $\forall xF(x) \rightarrow \exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \neg \forall xF(x) \vee \exists xG(x)$

蕴涵等值

$\Leftrightarrow \exists x \neg F(x) \vee \exists xG(x)$

量词否定

$\Leftrightarrow \exists x(\neg F(x) \vee G(x))$

量词分配

$\Leftrightarrow \exists x(F(x) \rightarrow G(x))$

蕴涵等值

法二 $\forall xF(x) \rightarrow \exists xG(x)$

$$\Leftrightarrow \neg \forall xF(x) \vee \exists xG(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg F(x) \vee \exists xG(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg F(x) \vee \exists yG(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(\neg F(x) \vee \exists yG(y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y(\neg F(x) \vee G(y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y(F(x) \rightarrow G(y))$$

蕴涵等值

量词否定

换名规则

辖域扩张

辖域扩张

蕴涵等值

$$(3) \quad \forall x F(x, y) \rightarrow \exists y G(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x, t) \rightarrow \exists y G(s, y)$$

代替规则

$$\Leftrightarrow \neg \forall x F(x, t) \vee \exists y G(s, y)$$

蕴涵等值

$$\Leftrightarrow \exists x \neg F(x, t) \vee \exists y G(s, y)$$

量词否定

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg F(x, t) \vee \exists y G(s, y))$$

辖域扩张

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg F(x, t) \vee G(s, y))$$

辖域扩张

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x, t) \rightarrow G(s, y))$$

蕴涵等值