第7章 微分方程

第1节 微分方程的基本概念

- 微分方程：用来表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程。
  （简单来说就是一种方程。）

- 微分方程的阶：微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数。
  eg. $x^3y''' + x^2y'' + xy' = 1$ 就是一个3阶方程。
  （类似于多项式的次数：多项式中最高次项的次数。）

- 微分方程的解：带入方程后能使方程成为恒等式的函数。
  （和普通的方程一样，微分方程也有解，只不过是函数而已。）

- 微分方程的通解：含有和微分方程的阶数相同的个数的常数的解。
  （就是微分方程所有解的表达通式。）

- 微分方程的特解：将通解中的常数确定下来后的解。

- 初值条件：给定的条件

第2节 可分离变量的微分方程

- 可分离变量的微分方程：形如 $g(y)dy = f(x)dx$ 的方程或可以变形成这种形式的方程。
  （如：$\frac{dy}{dx} = x^3y$ ，它可化为 $\frac{1}{y}dy = x^3dx$ ）

- $g(y)dy = f(x)dx$ 型的解法

  - 对2边同时积分 $\int g(y)dy = \int f(x)dx$
    得到 $G(y) = F(x) + C$
    进而化简为 $y = \phi(x) + C$ 的形式，即原方程的解。

第3节 齐次方程

- 齐次方程：可化为 $\frac{dy}{dx} = \phi(\frac{y}{x})$ 形式的一阶微分方程。（如：$\frac{dy}{dx} = 3\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 1$ ）

- ### $\frac{dy}{dx} = \phi(\frac{y}{x})$ 型的解法

1. 令 $u = \frac{y}{x}$ ，将 y 与 $\frac{dy}{dx}$ 用 u 表示
   得到 $y = ux, \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$
2. 带回原方程得 $u + x\frac{du}{dx} = \phi(u)$
   即 $x\frac{du}{dx} = \phi(u) - u = f(u)$
   即 $\frac{1}{f(u)}du = \frac{1}{x}dx$ （是不是回到了可分离变量的微分方程的形式）
3. 接下来按着可分离变量的微分方程的解法即可解出：
   $g(u) = \ln|x|$
4. 再将 $u = \frac{y}{x}$ 带回上式即可得到解 $g(\frac{y}{x}) = \ln|x|$ （可以进一步化简成 $y = \psi(x) + C$ 的形式）

第4节　一阶线性微分方程

- 一阶线性微分方程：形如 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的方程
  （如： $y'+(x^2+x+1)y=3x$ ）

- 齐次线性微分方程：当 $Q(x)\equiv 0$ 时的一阶线性微分方程。
  即形如 $y'+P(x)y=0$ 的方程。
  （ $y'+P(x)y=0$ 的形式）
  （一般称 $y'+P(x)y=0$ 为对应于非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的齐次线性微分方程）

- 非齐次线性微分方程： 当 $Q(x)\equiv 0$ 不成立时的一阶线性微分方程。

• $y'+P(x)y=0$ 型的解法

1. 分离变量得 $\frac{1}{y}dy=-P(x)dx$
2. 两端积分得 $\ln|y|=-\int P(x)dx+C_1$
   即方程的通解 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$，$(C=\pm C_1)$

• $y'+P(x)y=Q(x)$ 型的解法

1. 先解出对应齐次线性微分方程的通解： $y=Ce^{-\int P(x)dx}$
2. 再用常数变易法将常数 C 替换为未知函数 $u(x)$
   得到 $y=ue^{-\int P(x)dx}$
   进而 $y'=u'e^{-\int P(x)dx}-uP(x)e^{-\int P(x)dx}$
3. 带回原方程得 $u'e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$
   （上式中的 $-uP(x)e^{-\int P(x)dx}$部分会和原式中的 $P(x)y$ 的部分消掉，可以用这一性质检验自己当前的计算是否有误）
4. 接下来就可以方便的解出 $u(x)$
   即 $u'=Q(x)e^{\int P(x)dx}$
   两端积分得 $u=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$
5. 再将 $u(x)$ 带回 $y=ue^{-\int P(x)dx}$就可以得到最后的通解：
   $y=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$
   （解的特点：
   $y=Ce^{-\int P(x)dx}$的部分是对应的齐次线性微分方程的通解，
   $e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ 的部分是方程的一个特解，有些时候可以用此性质快速得到答案。）

（注：不建议直接记结论，太过复杂。其实只要掌握关键的步骤就可以顺利的写下完整步骤）

第5节　可降阶的高阶微分方程

本节讨论了三种高阶微分方程的解法。

• 第1种： $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程

解法：持续对两边同时积分，直到积出 $y=g(x)$ 的形式就方程的通解。

- 第2种： $y''=f(x,y')$ 型的微分方程

  如： $(1+x^2)y''=2xy'$

  - 解法：

  1. 设 $y'=p(x)$ 则 $y''=p'$
     原方程就可化为 $p'=f(x,p)$ （即只和 x,p 有关的一阶微分方程，一般是可分离变量的）
  2. 可以解出该方程的通解 $p=y'=g(x,C_1)$
     进一步积分得到 $y=\int g(x,C_1)dx+C_2$ 的通解形式。
     （纯看推理非常枯燥，做几道例题结合起来看会容易理解一些。）

- 第3种： $y''=f(y,y')$ 型的微分方程

  - 解法：

  1. 令 $y'=p$ 则 $y''=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\cdot\frac{dp}{dy}$
     带入原式得 $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$ （一般是可分离变量的）
  2. 可以解出该方程的通解 $p=g(y,C_1)$
     即 $y'=g(y,C_1)$
  3. 分离变量并积分得到通解： $\int\frac{1}{g(y,C_1)}dy=x+C_2$

第6节 高阶线性微分方程

以二阶微分方程为主

- 高阶微分方程： $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$
- 二阶微分方程： $y''+P(x)y'+Q(x)=f(x)$

- 线性微分方程的解的结构

可以联想一下线性代数中的方程组的解的结构的相关知识。

- 若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个解
  那么 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 也是方程的解，其中 C_1，C_2 为任意常数

- 若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个线性无关的特解
  那么 $y=C_1y_1+C_2y_2$ （ C_1，C_2 为任意常数）就是方程的通解

- 若 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解， $Y(x)$ 是对应齐次线性微分方程的通解
  则 $y=Y+y^*$ 就是二阶非齐次线性微分方程的通解。

- （解的叠加原理）若
  $y_1^*(x)$ 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$ 的一个特解
  $y_2^*(x)$ 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$ 的一个特解
  则 $y=y_1^*(x)+y_2^*(x)$ 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的一个特解

- 以上4条结论可以推广到高阶线性微分方程

第7节 常系数齐次线性微分方程

- 二阶常系数齐次线性微分方程： $y'' + py' + qy = 0$ 的解法

1. 写出微分方程对应的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ （ y 换成 r ，阶数换成相同的指数）
2. 求出特征方程的两个根 r_1, r_2
3. 根据两个根之间的关系写出通解

r_1, r_2 的关系	通解
两个不相等的实根 r_1, r_2	$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

- n 阶常系数齐次线性微分方程： $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$ 的解法

1. 写出微分方程对应的特征方程 $r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r + a_n = 0$ （ y 换成 r ，阶数换成相同的指数）
2. 求出特征方程的根 $r_1, r_2, \ldots, r_n$
3. 根据根的种类，对应组合写出通解

根	通解中的对应项
单实根 r	Ce^{rx}
一对单复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$
k 重实根 r	$e^{rx}(C_1 + C_2x + \ldots + C_kx^{k-1})$
一对 k 重 复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y = e^{\alpha x}[(C_1 + C_2x + \ldots + C_kx^{k-1})\cos\beta x + (D_1 + D_2x + \ldots + D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

第8节 常系数非齐次线性微分方程

主要讲述二阶常系数非齐次线性微分方程在2种常见形式下的解法

- 二阶常系数非齐次线性微分方程： $y'' + py' + qy = f(x)$
- 二阶常系数非齐次线性微分方程的通解 $y = Y(x) + y^*(x)$
  $Y(x)$ 是对应齐次方程的通解（用上一节的方法求出）
  $y^*(x)$ 是方程的一个特解（本节重点）

- $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型（ $P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m$ ）

方程的特解为 $y^*=x^kR_m(x)e^{\lambda x}$ （ $R_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m$ ）
当 λ 分别 不是特征方程的根、是特征方程的单根、是特征方程重根 时， k 分别取 $0,1,2$
（简明原因：将特解 $y^*=R_m(x)e^{\lambda x}$ 带入方程后
得 $R''_m(x)+(2\lambda+p)R'_m(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)R_m(x)=P_m(x)$
当 λ 不是特征方程的根时， $2\lambda+p$ 和 $\lambda^2+p\lambda+q$ 均不为 0 ，所以左右两端已经相等， k 取 0
当 λ 是特征方程的单根时， $\lambda^2+p\lambda+q=0$ ，所以 k 取 1 补上 1 次使左右两端相等
当 λ 是特征方程的重根时， $2\lambda+p$ 和 $\lambda^2+p\lambda+q$ 均为 0 ，所以 k 取 2 补上 2 次使左右两端相等）

- $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x]$ 型

方程的特解为 $y^*=x^ke^{\lambda x}[A_m(x)\cos\omega x+B_m(x)\sin\omega x]$ （ $m=\max(l,n)$ ）
当 $\lambda+\omega i$ 分别 不是特征方程的根、是特征方程的单根 时， k 分别取 $0,1$