第七章 参数估计

第一节 点估计

第三节 估计量的评选标准

第四节 区间估计

第五节 正态总体均值与方差的区间估计

教学计划：3次课-9学时

参数估计问题

复习

设总体 $X \sim F(x,\theta), \theta$ 是未知参数，

对未知参数 θ 进行估计 ---- 参数估计

方法： $EX_i = EX$ $DX_i = DX$

1) 抽样： $X_1, X_2, \cdots, X_n$ (独立且与 X 同分布)

$x_1, x_2, \cdots, x_n$

2) 构造统计量： $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ --- θ 的估计量

$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ --- θ 的估计值

$\hat{\theta}$

参数估计

点估计: 给出 θ 的估计值或近似值 $\hat{\theta}$

区间估计: 给出 θ 的估计值或近似值 $\hat{\theta}$ 的误差范围及可信程度。

参数估计问题

复习

设总体 $X \sim F(x,\theta)$, θ 是未知参数,

对未知参数 θ进行估计 ---- 参数估计

方法:

1) 抽样: $X_1, X_2, \cdots, X_n$ (独立且与X同分布)

$x_1, x_2, \cdots, x_n$

2) 构造统计量: $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ --- θ 的估计量

$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ --- θ 的估计值

$\hat{\theta}$

参数估计

点估计:

矩估计法: θ 的矩估计量

极大似然估计法: θ 的极大似然估计量

区间估计: $\hat{\theta}$ 的误差范围与可信程度

- 需要讨论估计量的评价标准: 1. 无偏性 2. 有效性

一. 无偏性

复习

设未知参数 θ 的估计量和估计值分别为：

$$\hat{\theta}=\hat{\theta}\,(X_1,X_2\cdots,X_n) \qquad \hat{\theta}=\hat{\theta}\,(x_1,x_2\cdots,x_n)$$

估计量是随机变量，对于不同的样本值会得到不同的估计值。

希望估计值在未知参数真值 θ 附近摆动，即它的期望值等于未知参数的真值 $E(\hat{\theta})=\theta$。 $\left|E(\hat{\theta})-\theta\right|$ 系统误差

$\left|E(\hat{\theta})-\theta\right| \neq 0$ $\qquad$ $\left|E(\hat{\theta})-\theta\right| = 0$

定义： 设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计量，若 $E(\hat{\theta})$ 存在且 $E(\hat{\theta})=\theta$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

复习

统计量的无偏性

设 $X \sim F(x,\theta)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 X 的一个样本

样本均值：$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$E(X)$	$E(\bar{X}) = E(X)$
样本方差：$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$	$D(X)$	$E(S^2) = D(X)$
样本 k 阶矩：$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$	$E(X^k)$	$E(A_k) = E(X^k)$

结论：$\bar{X}, S^2, A_k$ 分别是 $E(X), D(X), E(X^k)$ 的无偏估计量.

复习

二. 有效性

若 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是参数 θ 的无偏估计量，

则可通过比较 $\overset{D(\hat{\theta}_1)}{E(\hat{\theta}_1-\theta)^2}$ 和 $\overset{D(\hat{\theta}_2)}{E(\hat{\theta}_2-\theta)^2}$ 的大小来决定二者谁更优。

$E\hat{\theta}_2=\theta$　　　　$E\hat{\theta}_1=\theta$

定义：设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是 θ 的无偏估计量，且两个样本的容量相等。

若 $D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效。

练习

$E(X)=\mu$ $E(X_1)=\mu,\ E(X_2)=\mu$

设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$, X_1, X_2是来自总体X的一个样本。验证下面三个估计量:

$$(1)\ \hat{\mu}_1=\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2;\quad (2)\ \hat{\mu}_2=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2;\quad (3)\ \hat{\mu}_3=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2;$$

都是 μ 的无偏估计, 问哪一个最有效?

解:

$$E(\hat{\mu}_1)=E(\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2)=\frac{2}{3}E(X_1)+\frac{1}{3}E(X_2)=\frac{2}{3}\mu+\frac{1}{3}\mu=\mu$$

$$E(\hat{\mu}_2)=E(\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2)=\frac{1}{4}E(X_1)+\frac{3}{4}E(X_2)=\frac{1}{4}\mu+\frac{3}{4}\mu=\mu$$

$$E(\hat{\mu}_3)=E(\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2)=\frac{1}{2}E(X_1)+\frac{1}{2}E(X_2)=\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\mu=\mu$$

所以它们都是 μ 的无偏估计。

练习

$D(X)=1$ $D(X_1)=1, D(X_2)=1$

设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$, X_1, X_2是来自总体X的一个样本。验证下面三个估计量：

$$(1)\ \hat{\mu}_1=\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2;\quad (2)\ \hat{\mu}_2=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2;\quad (3)\ \hat{\mu}_3=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2;$$

都是 μ 的无偏估计, 并求出每个估计量的方差, 问哪一个最有效?

解：

$$D(\hat{\mu}_1)=D(\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2)=\frac{4}{9}D(X_1)+\frac{1}{9}D(X_2)=\frac{5}{9}\approx 0.55$$

$$D(\hat{\mu}_2)=D(\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2)=\frac{1}{16}D(X_1)+\frac{9}{16}D(X_2)=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}=0.625$$

$$D(\hat{\mu}_3)=D(\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2)=\frac{1}{4}D(X_1)+\frac{1}{4}D(X_2)=\frac{1}{2}$$

$\because D(\hat{\mu}_3)<D(\hat{\mu}_1)<D(\hat{\mu}_2)$ 所以 $\hat{\mu}_3$ 最有效。

第七章 参数估计

第一节 点估计
第三节 估计量的评选标准
第四节 区间估计
第五节 正态总体均值与方差的区间估计

教学计划：3次课-9学时

一. 置信区间

定义： 设总体 X 的概率分布 $F(x,\theta)$ 含有一个未知参数 θ，

0.05

对于给定的值 α $(0<\alpha<1)$，若由样本 $X_1, X_2 \cdots X_n$

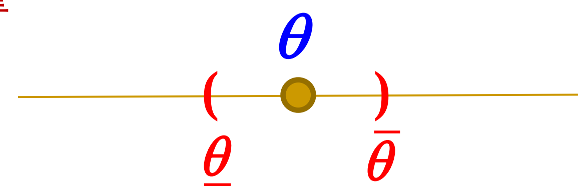
确定的两个统计量：

$$\bar{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) \text{ 和 } \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

随机变量　　　　随机变量

0.95

满足：$P(\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}) = 1-\alpha$



则称随机区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间，

$\underline{\theta}$ 和 $\bar{\theta}$ 为置信下限和置信上限.

模拟实验

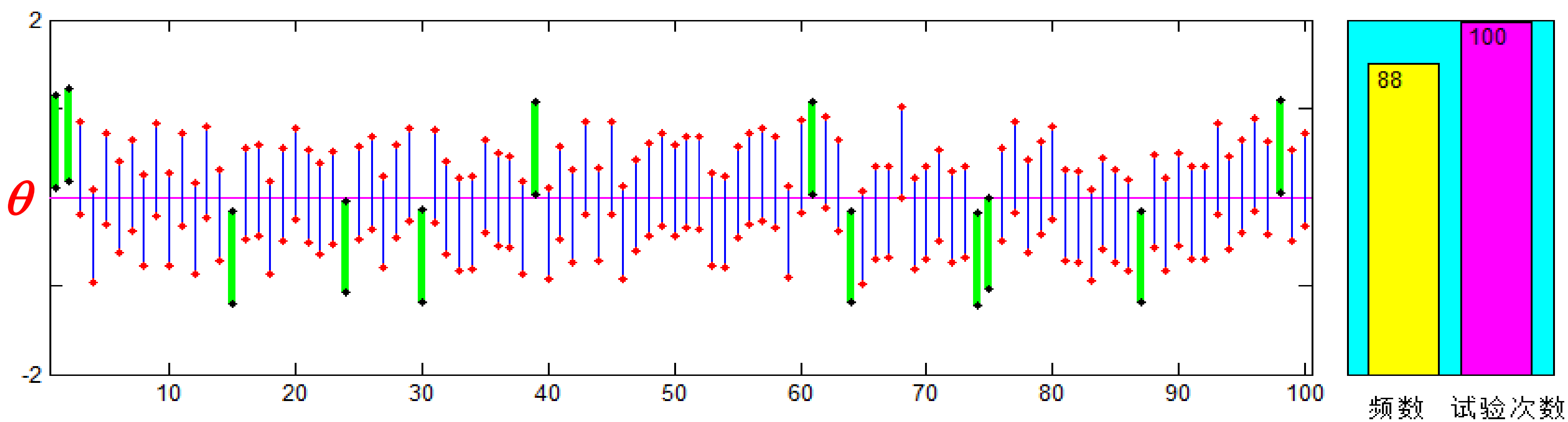
$$P(\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}) = 1 - \alpha,\quad \text{(0.9)}$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 100组样本值

$\bar{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, $\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 100个区间

称随机区间$(\underline{\theta}, \bar{\theta})$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间

置信度$1-\alpha = 0.9$，做100次试验.



$\bar{\theta}_1$ $\theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})$ $\underline{\theta}_1$

$\bar{\theta}_2$ $\theta \notin (\underline{\theta}, \bar{\theta})$ $\underline{\theta}_2$

$$\frac{\text{包含 } \theta \text{ 区间个数}}{100} \xrightarrow{P} 0.9 \quad \text{Ch5 大数定律}$$

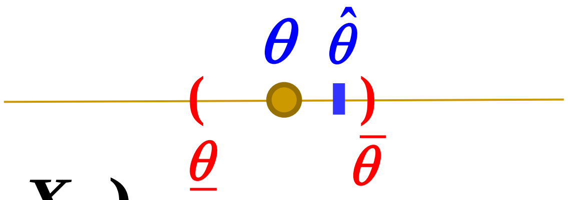
包含 θ 区间个数 $\approx 0.9 \times 100 = 90$

一. 置信区间

定义: 设总体 X 的概率分布 $F(x,\theta)$ 含有一个未知参数 θ，

对于给定的值 $\overset{0.05}{\alpha}$ $(0<\alpha<1)$，若由样本 $X_1, X_2 \cdots X_n$

确定的两个统计量:



$$\bar{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) \text{ 和 } \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

满足: $P(\underline{\theta}<\theta<\bar{\theta}) = \overset{0.95}{1-\alpha}$

- 可信程度 $1-\alpha$ 越大越好
- 估计精度 $\bar{\theta}-\underline{\theta}$ 越小越好

则称随机区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间，

$\underline{\theta}$ 和 $\bar{\theta}$ 为置信下限和置信上限.

$$P(\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}) = 1 - \alpha$$

➢对置信区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 有两个要求：

1. 要求 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 包含 θ 的可信程度尽可能大。

2. 要求估计的精度尽可能的高，

即要求区间 $\bar{\theta} - \underline{\theta}$ 尽可能短。

可信度与精度是一对矛盾，一般是在保证可信度的条件下尽可能提高精度.

第七章 参数估计

第一节 点估计

第三节 估计量的评选标准

第四节 区间估计

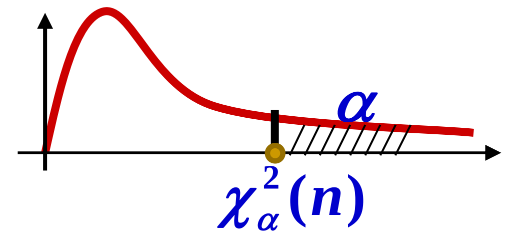
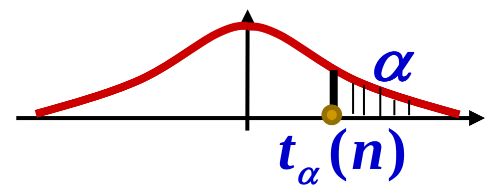
第五节 正态总体均值与方差的区间估计

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- 正态总体均值的区间估计(单个总体)
- 正态总体方差的区间估计(单个总体)

复习

常用统计量及抽样分布

χ^2 分布	$X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N(0,1)$, 独立 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$	
t 分布	$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$, 独立 $t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$	
$EX = \mu, DX = \sigma^2$ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	**Th1** $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, 独立 $\boxed{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)}$ $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$	**Th2** $\boxed{\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)}$ $\boxed{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$

二. 正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 均值的区间估计

$P(\underline{\mu}<\mu<\overline{\mu})=1-\alpha$

$\mu=E(\bar{X})$

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

1. 当方差 σ^2 已知的情形

$E(X)=\mu$

设 $X_1, X_2,\ldots, X_n$ 是取自 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，

求：均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间 $(\underline{\mu}, \overline{\mu})$.

解:

取 μ 的点估计(无偏估计)为 $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

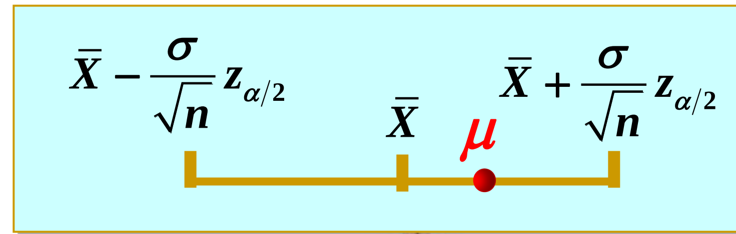
统计量： $U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

对于给定的置信度 $1-\alpha$，确定随机区间 $(\underline{\mu},\overline{\mu})$，

使：$P(\underline{\mu}<\mu<\overline{\mu})=1-\alpha$

统计量：$U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$　置信度 $1-\alpha$

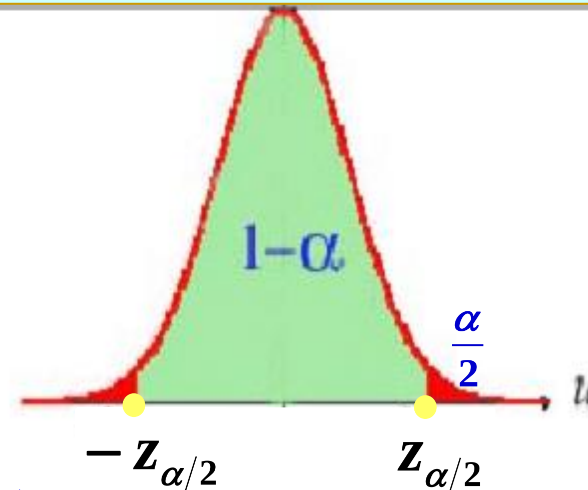
确定一个区间 $(\underline{\mu},\bar{\mu})$，使：$P(\underline{\mu}<\mu<\bar{\mu})=1-\alpha$



$$P\{-z_{\alpha/2}\le\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\le z_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

$$P\{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\le\bar{X}-\mu\le\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

$$P\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\le\mu\le\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$



于是所求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 置信区间为：

$[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}]$ 简记为：$(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})$

用 $\bar{X}$ 估计 μ 误差不超过 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$ 的可信程度为 $1-\alpha$

步骤 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是取自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本,

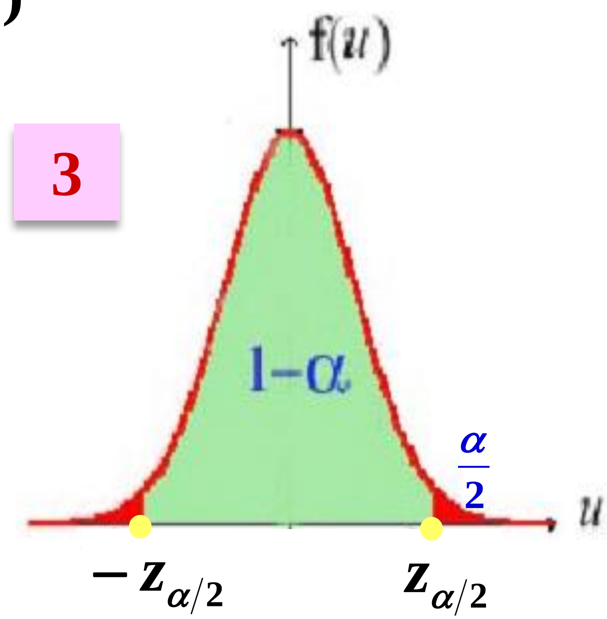
求：均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间. $P(\underline{\mu} < \mu < \overline{\mu}) = 1-\alpha$

解: 1. 当方差 σ^2 已知的情形

1 取 μ 的点估计(无偏估计)为 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

2 统计量: $U = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

3



4 $P\{-z_{\alpha/2} \le \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{\alpha/2}\} = 1-\alpha$

5 $P\{\bar{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \le \mu \le \bar{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\} = 1-\alpha$

$$[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2},\ \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}] = (\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2})$$

模拟实验

$X \sim N(\mu,1)$, σ^2已知

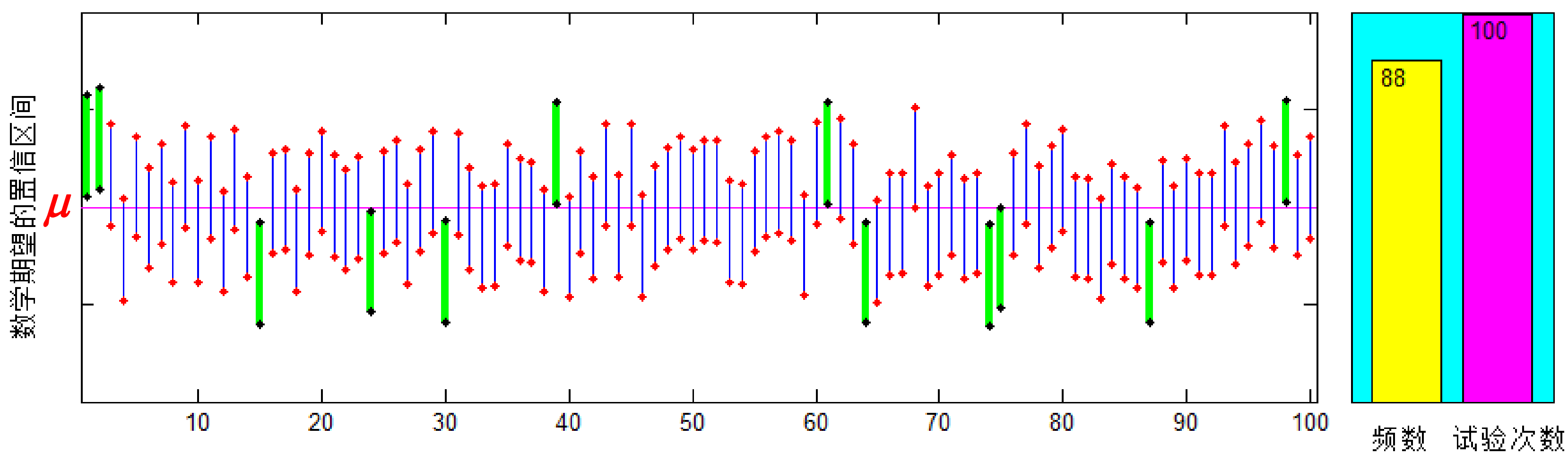
$X_1, X_2, \cdots, X_9$

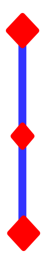
均值μ的置信度$1-\alpha$ 的置信区间

$x_1, x_2, \cdots, x_9$ 100组样本值

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=\left(\bar{X}-\frac{1}{3}z_{0.05},\ \bar{X}+\frac{1}{3}z_{0.05}\right)=\left(\bar{x}-\frac{1}{3}z_{0.05},\ \bar{x}+\frac{1}{3}z_{0.05}\right)$$ 100个区间

置信度 $1-\alpha=0.9$, $n=9$, 做 100 次试验. $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$





$\bar{x}+\frac{1}{3}z_{0.05}$

$\bar{x}$

$\bar{x}-\frac{1}{3}z_{0.05}$

$$P\left\{\bar{X}-\frac{1}{3}z_{0.05}\le\mu\le\bar{X}+\frac{1}{3}z_{0.05}\right\}=90\%$$

小结

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，对 μ,σ^2进行区间估计，置信度 $1-\alpha$

	统计量	置信区间
1)求 μ的置信区间 σ^2为已知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$(\bar{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2})$

$x_1, x_2, \cdots, x_{16}$

例1. 某实验室测量铝的比重 16 次，得平均值 $\bar{x} = 2.705$，

设总体 $X \sim N(\mu, 0.029^2)$，求：μ 的 95% 的置信区间.

$$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$$

解： 由已知：$\because\ 1-\alpha = 95\% \quad \therefore\ \alpha = 5\%$，

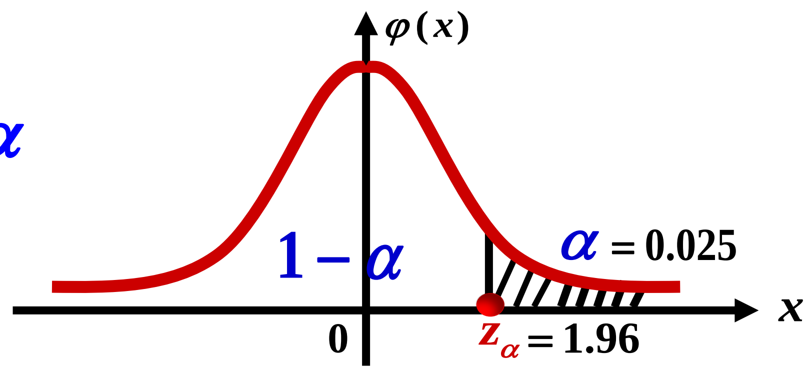
查正态分布表得：$z_{\alpha/2} = z_{0.05/2} = z_{0.025}$

$$\Phi(z_{0.025}) = 1 - 0.025 = 0.975 \qquad z_{0.025} = 1.96$$

复习

$$\Phi(z_\alpha) = \int_{-\infty}^{z_\alpha} \varphi(x)\mathrm{d}x = 1-\alpha$$

（附表2上）



$x_1, x_2, \cdots, x_{16}$

例1. 某实验室测量铝的比重 16 次，得平均值 $\bar{x} = 2.705$,

设总体 $X \sim N(\mu, 0.029^2)$，求：μ 的 95% 的置信区间.

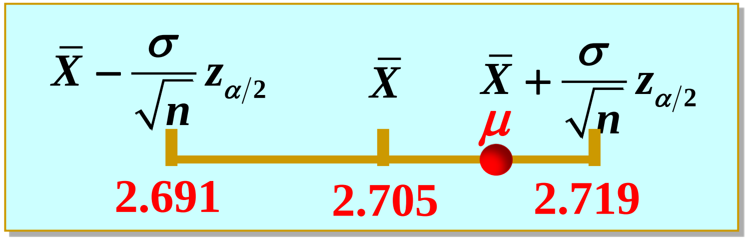
$$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$$

解: 由已知：$\because\ 1-\alpha = 95\%$ $\quad \therefore\ \alpha = 5\%$,

查正态分布表得：$z_{\alpha/2} = z_{0.05/2} = z_{0.025}$

$$\Phi(z_{0.025}) = 1 - 0.025 = 0.975 \qquad z_{0.025} = 1.96$$

得：$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} = \frac{0.029}{\sqrt{16}} \times 1.96 = 0.014$$



置信区间为：$(2.705 - 0.014,\ \ 2.705 + 0.014) = (2.691,\ 2.719)$

置信区间 (2.691, 2.719) 包含 μ 的可信程度为95%

用 $\bar{x} = 2.705$ 估计 μ 误差不会超过0.014的可信程度达到 95%

2. 方差 σ^2 未知的情形

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是取自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本,
求: 均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

$$P(\underline{\mu} < \mu < \overline{\mu}) = 1-\alpha$$

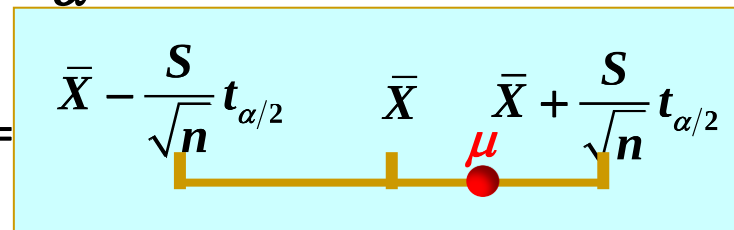
1 样本方差 S^2 是 σ^2 的无偏估计,

用 S 代替 σ 得统计量: **2** $t = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

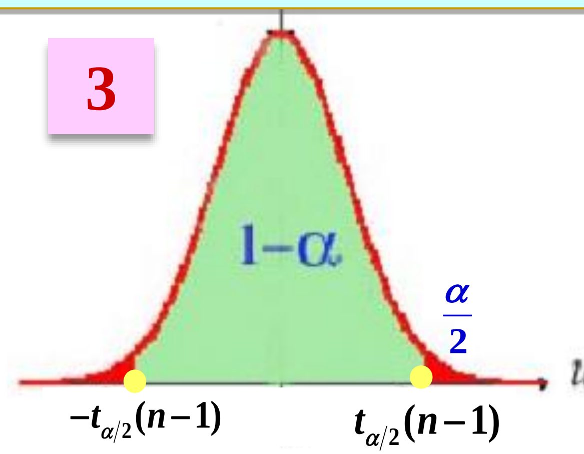
$$U = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

4 $P\{-t_{\alpha/2}(n-1) \le \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le t_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$

$P\{\overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \le \mu \le \overline{X} + \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\} =$



3



5 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 置信区间为:

$$[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1),\ \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)]$$

简记为: $(\overline{X} \pm \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$

用 $\overline{X}$ 估计 μ 误差不超过 $\dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}$ 的可信程度为 $1-\alpha$

小结

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 对 μ,σ^2进行区间估计，置信度 $1-\alpha$

	统计量	置信区间
1)求 μ的置信区间 σ^2为已知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$(\bar{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2})$
2)求 μ的置信区间 σ^2为未知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$(\bar{X} \pm \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$

x_1, x_2, x_3, x_4

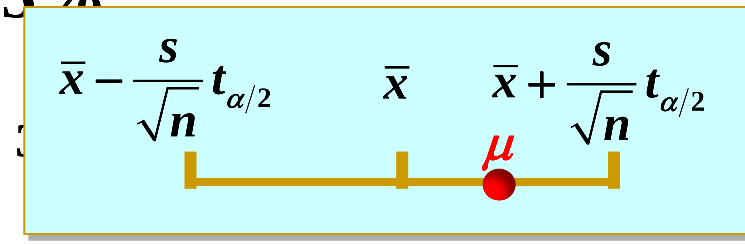
例2. 溶液的化学浓度近似服从 $N(\mu,\sigma^2)$，任取4个样品，测得样本均值为 $\bar{x}=8.34\%$， $s=0.03$ 。

$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ $\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

求：μ 的置信度为 95% 的置信区间。

$$[\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)]$$

解: 由已知：$\because\ 1-\alpha=95\%\quad\therefore\ \alpha=5\%$



查 t 分布表得：$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(3)=$

得：$\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)=\frac{0.03}{\sqrt{4}}\times3.1824=0.0477\%$

从而 μ 的95%的置信区间为：$(8.34\%\pm0.0477\%)$

$=(8.2923\%,\ 8.3877\%)$

置信区间 (8.3%, 8.4%) 包含 μ 的可信程度为95%

用 $\bar{x}$ 估计 μ 误差不超过 0.0477% 的可信程度为 95%

第七章 参数估计

第一节 点估计

第三节 估计量的评选标准

第四节 区间估计

第五节 正态总体均值与方差的区间估计

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

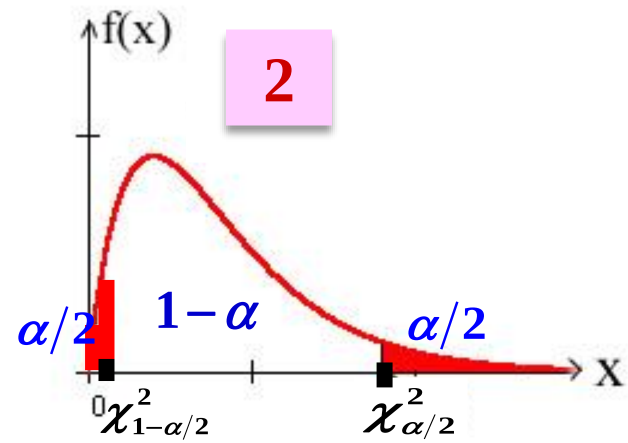
- 正态总体均值的区间估计(单个总体)
- 正态总体方差的区间估计(单个总体)

三. 正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 方差的区间估计

$P(\underline{\sigma}^2<\sigma^2<\bar{\sigma}^2)=1-\alpha$

问题：设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ，σ^2 均未知。$X_1, X_2,\dots, X_n$ 是 X 一个样本，给定置信度 $1-\alpha$，求:方差 σ^2 的置信区间。

解: 1 $\because$ S^2 是 σ^2 的无偏估计，且统计量：$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$



3 $$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$$

$$P\{\frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}>\frac{\sigma^2}{(n-1)S^2}>\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\}=1-\alpha$$

4 $$P\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}>\sigma^2>\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\}=1-\alpha$$

σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 置信区间为：$\left(\dfrac{(n-1)\cdot S^2}{\chi_{\alpha/2}{}^2(n-1)},\ \dfrac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

σ 的置信度为 $1-\alpha$ 置信区间为：$\left(\dfrac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\sqrt{\chi_{\alpha/2}{}^2(n-1)}},\ \dfrac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$

小结

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，对 μ,σ^2 进行区间估计，置信度 $1-\alpha$

	统计量	置信区间
1)求 μ 的置信区间 σ^2 为已知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$(\bar{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2})$
2)求 μ 的置信区间 σ^2 为未知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$(\bar{X} \pm \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$
3)求 σ^2 的置信区间	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

例3. 用铂球测定引力常数(单位: $10^{-11}m^3kg^{-1}s^{-2}$) ，设测定值总体为 $N(\mu,\sigma^2)$，μ，σ^2 均为未知. 用铂球测定观察值为:

6.661，6.661，6.667， 6.667，6.667， 6.664

求：σ^2 的置信度为**0.9**的置信区间。

解: $1-\alpha=0.9 \qquad \alpha=0.1$

$$\left(\frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi_{\alpha/2}{}^2(n-1)},\ \frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

$$\chi^2_{\frac{0.1}{2}}(6-1)=\chi_{0.05}{}^2(5)=11.071$$

$$\chi^2_{1-\frac{0.1}{2}}(6-1)=\chi_{0.95}{}^2(5)=1.145$$

$$\left(\frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi_{\alpha/2}{}^2(n-1)}, \frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

用铂球测定观察值为:

6.661，6.661，6.667，

6.667，6.667， 6.664

解: $\chi^2_{\frac{0.1}{2}}(6-1) = \chi_{0.05}{}^2(5) = 11.071$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$\chi^2_{1-\frac{0.1}{2}}(6-1) = \chi_{0.95}{}^2(5) = 1.145$$

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$(n-1)s^2 = 0.000036$$

σ^2 的置信度为0.9的置信区间为:

$$\left(\frac{0.000036}{11.071}, \frac{0.000036}{1.145}\right) = (0.0000038，0.0000506)$$

$$= (3.8\times 10^{-6}，50.6\times 10^{-6})$$

例3. 用铂球测定引力常数(单位: $10^{-11}m^3kg^{-1}s^{-2}$) ，设测定值总体为 $N(\mu,\sigma^2)$，μ，σ^2 均为未知. 用铂球测定观察值为:

6.661，6.661，6.667， 6.667，6.667， 6.664

求：σ^2 的置信度为**0.9**的置信区间。

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

解: $1-\alpha=0.9 \qquad \alpha=0.1$

$$(n-1)s^2=0.000036$$

$$s^2=7.2\times10^{-6}$$

σ^2的置信度为0.9的置信区间为:$(3.8\times10^{-6}, 50.6\times10^{-6})$

上述置信区间包含 σ^2 的可信程度为 90%

用s^2估计 σ^2误差不超过置信区间长度的可信程度为90%

第七章 参数估计

第一节 点估计

第三节 估计量的评选标准

第四节 区间估计

第五节 正态总体均值与方差的区间估计

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- 正态总体均值的区间估计（单个总体）
- 正态总体方差的区间估计（单个总体）

小结

总体 $X \sim F(x,\theta)$，对 θ 进行估计　$X_1 X_2,\cdots,X_n$　$x_1 x_2,\cdots,x_n$

点估计	统计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\to\theta$ 的估计量 ★1)矩估计法：　求解：$E(X^k)=A_k,\ k=1,2$ ★2)极大似然估计法：　求解：$L(\hat{\theta})=\max\limits_{\theta\in H} L(\theta)$
估计量的评选标准	★1)无偏性：$E(\hat{\theta})=\theta$ 2)有效性：$D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$
★区间估计	$P(\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta})=1-\alpha$ $(\underline{\theta},\overline{\theta})$是置信度为$1-\alpha$的置信区间 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，对 μ,σ^2进行区间估计 1) 求μ的置信区间，σ^2为已知 2) 求μ的置信区间，σ^2为未知 3) 求 σ^2的置信区间

小结

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，对 μ,σ^2进行区间估计，置信度 $1-\alpha$

	统计量	置信区间
1)求 μ的置信区间 σ^2为已知	$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2})$
2)求 μ的置信区间 σ^2为未知	$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$
3)求σ^2的置信区间	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$

统计量的无偏性

设 $X \sim F(x,\theta)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 X 的一个样本

样本均值：$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ $E(\bar{X}) = E(X)$	$E(X)$	$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} E(X)$
样本方差：$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ $E(S^2) = D(X)$	$D(X)$	
样本 k 阶矩：$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ $E(A_k) = E(X^k)$	$E(X^k)$	$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} E(X^k)$

结论: $\bar{X}, S^2, A_k$ 分别是 $E(X), D(X), E(X^k)$ 的无偏估计.

作 业　　第七章习题

授课内容	习题七
7.1 点估计(极大似然估计)	3, 4（1）（2）极大似然
7.1 点估计(矩估计) 7.3 估计量的评选标准	1, 2矩估计, 10, 11, 12, 14
7.5 正态总体均值与方差的区间估计	16均值，18,19方差

练习1

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \qquad \bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

用某种仪器间接测量温度，重复测量5次，得到以下数据（单位：度）1250 1265 1245 1260 1275，

假定重复测量所得温度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，试求 μ 的置信度为0.95的置信区间。

$$(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$$

解： $\bar{x}=\frac{1}{5}(1250+1265+1245+1260+1275)=1259$

$$s=\sqrt{\frac{1}{4}(9^2+6^2+14^2+1^2+16^2)}\approx 11.94$$

$\because\ 1-\alpha=0.95 \qquad \therefore\ \alpha=0.05 \qquad t_{\alpha/2}(4)=t_{0.025}(4)=2.7764$

μ 的置信度为0.95的置信区间为：

$$(1259\pm\frac{11.94}{\sqrt{5}}\times 2.7764)=(1259\pm 14.83)\approx(1244,1273)$$

练习2

从一批钢索中抽取10根，测得其折断力为：

578 572 570 568 572 570 570 596 584 572

若折断力 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，试求 σ^2 的置信度为0.95的置信区间。

小结

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 对 μ,σ^2进行区间估计，置信度 $1-\alpha$

	统计量	置信区间
1)求 μ的置信区间 σ^2为已知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$(\bar{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2})$
2)求 μ的置信区间 σ^2为未知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$(\bar{X} \pm \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$
3)求σ^2的置信区间	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$

练习2

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

从一批钢索中抽取10根，测得其折断力为：

578 572 570 568 572 570 570 596 584 572

$1-\alpha$

若折断力 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，试求 σ^2 的置信度为0.95的置信区间。

解： $\bar{x}=(578+572+570+568+572+570+570+596+584+572)/10=575.2$

$$9s^2=2.8^2+3.2^2+5.2^2+7.2^2+3.2^2+5.2^2+5.2^2+20.8^2+8.8^2+3.2^2=681.6$$

$$n=10,\quad \chi^2_{0.025}(9)=19.023,\quad \chi^2_{0.975}(9)=2.7$$

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

σ^2的置信度为0.95的置信区间为：

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.025}(9)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.975}(9)}\right)=\left(\frac{681.6}{19.023},\frac{681.6}{2.7}\right)=(35.80,252.44)$$

考研题

设 $Y=\ln X\sim N(\mu,1)$, X 的一组样本值为0.5, 1.25, 0.8, 2

(1) 求 $E(X)=b$

(2) 求 μ 的置信度为0.95的置信区间

(3) 求 b 的置信度为0.95的置信区间

考研题

设 $Y=\ln X\sim N(\mu,1)$, X 的一组样本值为0.5, 1.25, 0.8, 2

(1) 求 $E(X)=b$

解： $b=E(X)=E(e^{Y})$

$$t=y-\mu$$

$$dt=dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{t+\mu}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}+t}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(t-1)^2}{2}+\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}dt$$

$$=e^{\mu+\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}d(t-1)=e^{\mu+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-u^2}{2}}du=1$$

考研题

设 $Y=\ln X \sim N(\mu,1)$, X 的一组样本值为0.5，1.25，0.8，2

(2) 求 μ 的置信度为0.95的置信区间

解：

$$(1)\ b=E(X)=e^{\mu+\frac{1}{2}}$$

小结

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，对 μ,σ^2进行区间估计，置信度 $1-\alpha$

	统计量	置信区间
1) 求 μ的置信区间 σ^2为已知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$(\bar{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2})$
2) 求 μ的置信区间 σ^2为未知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$(\bar{X} \pm \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$

考研题

设 $Y=\ln X \sim N(\mu,1)$, X 的一组样本值为0.5，1.25，0.8，2

(2) 求 μ 的置信度为0.95的置信区间

$$(\bar{Y}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})$$

解：$\because 1-\alpha=0.95 \quad \therefore \alpha=0.05 \quad z_{0.05/2}=1.96$

Y_1, Y_2, Y_3, Y_4

y_1, y_2, y_3, y_4

$$(\bar{y}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}) = (0\pm\frac{1}{2}\times 1.96)$$

$$=(-0.98,\ 0.98)$$

$$(1)\ b=E(X)=e^{\mu+\frac{1}{2}}$$

$$\bar{y}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}y_i=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\ln x_i=\frac{1}{4}\ln x_1x_2x_3x_4=\frac{1}{4}\ln 1=0$$

考研题

设 $Y=\ln X\sim N(\mu,1)$, X 的一组样本值为0.5，1.25，0.8，2

(2) 求 μ 的置信度为0.95的置信区间

(3) 求 b 的置信度为0.95的置信区间

$$P(\underline{b}<b<\overline{b})=0.95$$

$$(1)\ b=E(X)=e^{\mu+\frac{1}{2}}$$

解：$\left(\bar{y}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)=(-0.98,\ 0.98)$

$$P(-0.98<\mu<0.98)=0.95$$

$$P(-0.98+0.5<\mu+\frac{1}{2}<0.98+0.5)=0.95$$

$$P(-0.48<\mu+\frac{1}{2}<1.48)=0.95$$

$$P(e^{-0.48}<e^{\mu+\frac{1}{2}}<e^{1.48})=0.95$$

b 的置信度为0.95的置信区间 $(e^{-0.48},\ e^{1.48})$

（16, 4分）

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 样本值，样本均值 $\bar{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为**0.95**的置信区间上限为**10.8**，则 μ 的置信度为**0.95**的置信区间为 **(8.2，10.8)**

解:

由于 μ 的置信度为0.95的置信区间为 $(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})$

所以 $\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}=10.8 \rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}=10.8-\bar{x}=10.8-9.5=1.3$

$$\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}=9.5-1.3=8.2$$

所以 μ 的置信度为**0.95**的置信区间为**(8.2，10.8)**

（03, 4分）

已知一批零件的长度X(cm)服从正态分布 $X\sim N(\mu,1)$，从中随机地抽取16个零件，得到长度的平均值为40(cm)，则μ的置信度为0.95的置信区间为 (39.51, 40.49) 。（ $\Phi(1.96)=0.975, \Phi(1.645)=0.95$ ）

解:

置信区间 $(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})$

由 $\alpha=0.05,\ \frac{\alpha}{2}=0.025,\ \rightarrow 1-0.025=0.975=\Phi(1.96)$

$\rightarrow z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$

所以 $(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})=(40\pm\frac{1}{\sqrt{16}}\times1.96)=(39.51, 40.49)$

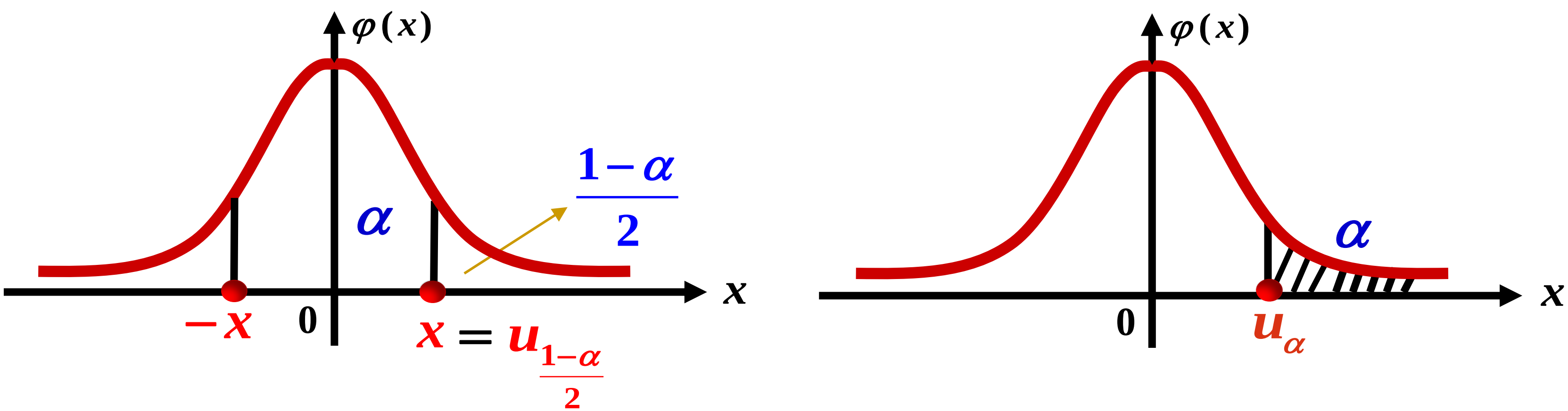
$$\boxed{\Phi(z_\alpha)=\int_{-\infty}^{z_\alpha}\varphi(x)\mathrm{d}x=1-\alpha}$$

设随机变量 $X \sim N(0,1)$，对给定 $\alpha\,(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 $x=$ <u>(C)</u>

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$　　(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　　(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　　(D) $u_{1-\alpha}$

解：

$P\{|X|<x\}=\alpha \rightarrow P\{-x<X<x\}=\alpha$　　故选(C)



（09, 4分）

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自二项分布总体$B(n, p)$的样本，$\bar{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差．若$\bar{X}+kS^2$为np^2的无偏估计量，则$k=$ ______

解:

因为$\bar{X}+kS^2$为np^2的无偏估计量，即

$$E(\bar{X}+kS^2)=np^2$$

$$E(\bar{X}+kS^2)=E(\bar{X})+kE(S^2)$$

复习

统计量的无偏性

设$X_1, X_2, \dots, X_n$是总体 X 的一个样本

样本均值：$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$E(X)$	$E\bar{X} = EX$
样本方差：$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$	$D(X)$	$ES^2 = DX$
样本 k 阶矩：$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$	$E(X^k)$	$EA_k = E(X^k)$

结论：$\bar{X}, S^2, A_k$ 分别是$E(X), D(X), E(X^k)$的无偏估计量.

（09, 4分）

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的样本，$\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差．若 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量，则 $k =$ <u>-1</u>

$E\bar{X} = EX$

$ES^2 = DX$

解：

因为 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量，即

$$E(\bar{X} + kS^2) = np^2$$

$$\begin{aligned} E(\bar{X} + kS^2) = E(\bar{X}) + kE(S^2) &= E(X) + kD(X) \\ &= np + knp(1-p) \\ &= (1+k)np - knp^2 \end{aligned}$$

于是 $np^2 = (1+k)np - knp^2 \rightarrow k(1-p) = p - 1 \rightarrow k = -1$

（08, 11分）

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，记

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,\quad T=\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2$$

(1) 证明 T 是μ^2 的无偏估计量；

(2) 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，求 $D(T)$.

（08, 11分）

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，记

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,\quad T=\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2$$

$$\boxed{E\bar{X}=EX=\mu,\ ES^2=DX=\sigma^2}$$

$$\boxed{E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2}$$

(1) 证明 T 是μ^2的无偏估计量；

解：

$$ET=E\bar{X}^2-\frac{1}{n}ES^2=D\bar{X}+(E\bar{X})^2-\frac{1}{n}ES^2=\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2-\frac{1}{n}\sigma^2=\mu^2$$

所以T 是μ^2的无偏估计量.

$$D\bar{X}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{1}{n}\sigma^2$$

（08, 11分）

设$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，记

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,\ T=\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2$$

$\bar{X}$ 与 S^2 独立

(2) 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，求 $D(T)$.

$$\boxed{\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})}$$

解：$\bar{X}\sim N(0,\frac{1}{n})\rightarrow\sqrt{n}\bar{X}\sim N(0,1)\rightarrow n\bar{X}^2\sim\chi^2(1)\rightarrow D(n\bar{X}^2)=2$

$\rightarrow n^2D(\bar{X}^2)=2\rightarrow D(\bar{X}^2)=\frac{2}{n^2}$

$$\boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)}$$

$(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)\rightarrow D[(n-1)S^2]=2(n-1)$

$\rightarrow(n-1)^2D(S^2)=2(n-1)\rightarrow D(S^2)=\frac{2}{n-1}$

$$DT=D\bar{X}^2+\frac{1}{n^2}DS^2=\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^2(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}$$

若 $\chi^2\sim\chi^2(n)$，则

$E(\chi^2)=n,\ D(\chi^2)=2n$

χ^2 分布 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自正态总体 $N(0,1)$的样本，

则统计量： $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$

性质：$E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$

证明：$X_i \sim N(0,1) \to EX_i = 0, DX_i = 1 \to EX_i^2 = DX_i + (EX_i)^2 = 1$

$$\to E(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = n$$

$$\boxed{D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

$$D(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} \{E(X_i^4) - [E(X_i^2)]^2\} = \sum_{i=1}^{n} \{E(X_i^4) - 1\} = \sum_{i=1}^{n} \{3 - 1\} = 2n$$

$$E(X_i^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

分部积分法

$$= \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^3 d e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} \{\underbrace{x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_0^{+\infty}}_{0} - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx^3\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} 3x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{-2\times 3}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x d e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{-2\times 3}{\sqrt{2\pi}} \{\underbrace{x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_0^{+\infty}}_{0} - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\} = \frac{2\times 3}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\times 3\times \frac{1}{2} = 3$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 1$$

若 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$，则

$E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$

（06, 11分）

设总体X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1\\ 1-\theta, & 1\le x<2,\\ 0, & 其他\end{cases}$ 未知参数$0<\theta<1$,

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本,记N为样本值$x_1, x_2, \ldots, x_n$

中小于1的个数，求 θ 的最大似然估计.

解:

1. 似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$ $\quad f(x_i;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x_i<1 \quad N\\ 1-\theta, & 1\le x_i<2 \quad n-N\end{cases}$

2. 取对数: $\ln L(\theta)= N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta)$

3. 求导,令其为零: $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{N}{\theta}-\dfrac{n-N}{1-\theta}=0 \rightarrow N(1-\theta)=(n-N)\theta \rightarrow \hat{\theta}=\dfrac{N}{n}$

4. 求解: $\hat{\theta}=\dfrac{N}{n}$

极大似然估计