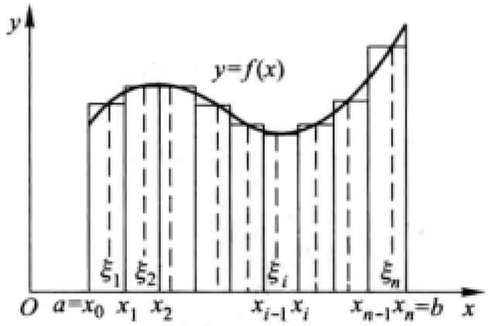
第5章 定积分

第1节 定积分的概念与性质

- 定积分的概念

简单来说：求面积



$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

- 定积分的性质（ $a<b$ ）

1. $\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)+\int_c^b f(x)dx$
3. $\int_a^b dx=b-a$
4. $\int_a^b f(x)dx\geq 0$, $(f(x)\geq 0$在$[a,b]$上恒成立$)$
5. $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$, $(f(x)\geq g(x)$在$[a,b]$上恒成立$)$
6. $\int_a^b|f(x)|dx\geq|\int_a^b f(x)dx|$
7. $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$, $(m,M$分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最小最大值。$)$
8. $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a),(a\leq\xi\leq b)$（积分中值定理）

第2节 微积分基本公式

- 变限函数的导数

1. $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$
   $\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)}f(t)dt=f(g(x))$
2. $\phi(x)=\int_a^x f(t)dt$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数。

- 牛顿-莱布尼茨公式（微积分基本公式）

$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b$ （$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数）

第3节 定积分的换元法和分部积分法

同不定积分，但是带上了上下限。

第4节 反常积分

- 无穷限的反常积分

1. $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx$

2. $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx$

若极限存在则反常积分收敛，且极限为反常积分的值。
反之则反常积分发散。

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$

- 无界函数的反常积分

瑕点和瑕积分：若函数 $f(x)$ 在点 a 的任一邻域内都无界，那么点 a 称为函数 $f(x)$ 的瑕点。无界函数的反常积分称为瑕积分。

1. $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ （ a 为瑕点）上的反常积分为
   $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t \to +a^+} \int_t^b f(x)dx$

2. $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ （ b 为瑕点）上的反常积分为
   $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t \to +b^-} \int_a^t f(x)dx$

若极限存在则反常积分收敛，且极限为反常积分的值。
反之则反常积分发散。

3. $f(x)$ 在区间 $[a,c) \cup (c,b]$ （ c 为瑕点）上的反常积分为
   $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t \to +c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim\limits_{t \to +c^+} \int_t^b f(x)dx$