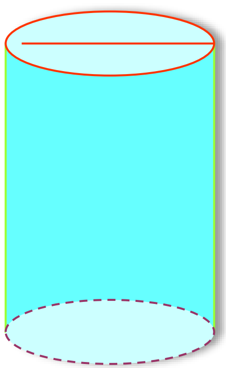
第二章 一维随机变量及其分布

教学计划：4次课-12学时

问题的提出

在很多实际问题中，需要研究随机变量间存在的函数关系，也就是研究他们在概率分布上的关系.

例如：已知圆轴截面直径 X 的概率分布，即 $f_X(x)$



截面面积 $Y = \pi\left(\frac{X}{2}\right)^2 = \frac{\pi X^2}{4}$

求Y的概率分布，即 $f_Y(y)$

研究问题：已知随机变量 X 及概率分布，

要求 $Y = g(X)$ 的概率分布.

第二章 一维随机变量及其分布

第五节 随机变量函数的分布

- 随机变量的函数的定义
- 离散型随机变量的函数的分布
- 连续型随机变量的函数的分布

一. 随机变量的函数的定义

定义： 设 $g(x)$是定义在随机变量X的一切可能取值 x 的集合上的函数，如果对于X 的每一个可能取值 x ,有另一个随机变量 Y 的相应取值 $y = g(x)$与之对应，则称Y为X 的函数，记为$Y = g(X)$.

本节的任务: 根据 X 的分布，求出$Y = g(X)$ 的分布。

（这个问题无论在实际中还是在理论上都是重要）

第二章 一维随机变量及其分布

第五节 随机变量函数的分布

- 随机变量的函数的定义
- 离散型随机变量的函数的分布
- 连续型随机变量的函数的分布

二. 离散型随机变量的函数的分布

若 X 是离散型随机变量, 则 $Y = g(X)$也是一个离散型随机变量, 则 $Y = g(X)$ 的分布律可由 X 的分布律直接求出.

例1. 已知 X 的概率分布为:

X	5	10
P_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

求: $Y = 2X$ 的概率分布(分布律).

求: $Y=2X$的概率分布(分布律).

X	5	10
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

解:

Y	10	20
X	5	10
P_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$P(Y=10)=P(X=5)=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=20)=P(X=10)=\frac{2}{3}$$

从而得$Y=2X$的分布律为:

Y	10	20
P_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

例2. 已知 X 的概率分布为:

X	0	1	2	3	4	5
P_k	1/12	1/6	1/3	1/12	2/9	1/9

求: $Y=(X-2)^2$ 的概率分布(分布律)

解:

Y	4	1	0	1	4	9
X	0	1	2	3	4	5
P_k	1/12	1/6	1/3	1/12	2/9	1/9

$$Y=(X-2)^2$$

解:

Y	4	1	0	1	4	9
X	$\boxed{0}$	1	2	3	$\boxed{4}$	5
P_k	1/12	1/6	1/3	1/12	2/9	1/9

$$(Y=4)=(X=0)\cup(X=4)$$

$$P(Y=4)=P(X=0)+P(X=4)=\frac{1}{12}+\frac{2}{9}=\frac{11}{36}$$

$$P(Y=1)=P(X=1)+P(X=3)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$$

$$P(Y=0)=P(X=2)=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=9)=P(X=5)=\frac{1}{9}$$

Y	0	1	4	9
P_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{9}$

归纳：

若X是离散型随机变量，X的分布律为

X	$x_1 \quad x_2 \cdots x_n \cdots$
P_k	$p_1 \quad p_2 \cdots p_n \cdots$

则 $Y = g(X)$ 的分布律为：

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$
P_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

注意： 如果$g(x_k)$中有一些是相同的，则应把它们作适当并项即可.

练习1 已知 X 的概率分布为:

X	-2	-1	0	1	3
P_k	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

求: $Y = X^2$ 的概率分布(分布律)

解:

Y	4	1	0	1	9
X	-2	-1	0	1	3
P_k	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

练习1

$Y = X^2$

解:

Y	4	1	0	1	9
X	-2	-1	0	1	3
P_k	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

$$(Y=1)=(X=-1)\cup(X=1)$$

$$P(Y=1) = P(X=-1)+P(X=1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{15}=\frac{7}{30}$$

Y	0	1	4	9
P_k	1/5	7/30	1/5	11/30

$$\sum_{k=1}^{4} p_k = 1$$

第二章 一维随机变量及其分布

第五节 随机变量函数的分布

- 随机变量的函数的定义
- 离散型随机变量的函数的分布
- 连续型随机变量的函数的分布

三. 连续型随机变量的函数的分布

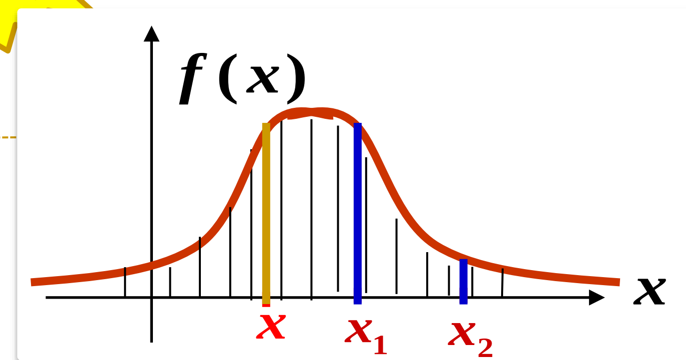
问题：已知 $Y=g(X)$ 和 $f_X(x)$，求 $f_Y(y)$

分布函数法： (1) 求 $F_Y(y)$

(2) $F_Y'(y)=f_Y(y)$

难点

复习



分布函数：$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$

概率计算：$P(x_1<X\le x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t=F(x_2)-F(x_1)$

概率密度性质：$F'(x)=f(x)$

高数求导：$Z(x)=\int_{p(x)}^{g(x)} z(t)\mathrm{d}t \Rightarrow Z'(x)=z[g(x)]\,g'(x)-z[p(x)]\,p'(x)$

复习

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

	正态分布	
	$N(\mu,\sigma^2)$	
概率密度	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty<x<\infty$	
分布函数	$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$ $-\infty<x<\infty$	
概率计算	$P(a\le X\le b)=\int_{x_1}^{x_2}f(t)\mathrm{d}t=F(x_2)-F(x_1)$	

复习

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

	正态分布	
	$N(\mu,\sigma^2)$	$N(0,1)$
概率密度	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty<x<\infty$	$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $-\infty<x<\infty$
分布函数	$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$ $-\infty<x<\infty$	$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ 查表 $-\infty<x<\infty$
概率计算	$F(x)=P(X\le x)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x-\mu}{\sigma})=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ $P(a\le X\le b)=P(\frac{a-\mu}{\sigma}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{b-\mu}{\sigma})=\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$	

例3. 设 X 服从区间 $(0, 2)$ 上的均匀分布.

求：$Y = X^2$ 的概率密度 $f_Y(y)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

解: 分布函数法 (1) 求 $F_Y(y)$

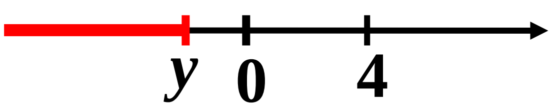
(2) $F_Y'(y) = f_Y(y)$

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

(1) 求$F_Y(y)$

$\because$ X 的取值在$(0,2)$内, $\therefore$ Y 的取值在$(0,4)$内

当 $y < 0$ 时,



$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\Phi) = 0$$

求分布函数：

1）分布函数定义在Y轴上；

2）用Y的取值分区间；

3）分区间求分布函数值。

求：$Y=X^2$ 的概率密度 f_Y

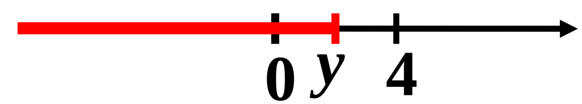
$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{1}{2}\sqrt{y} & 0\le y<4\\ 1 & 4\le y\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0<x<2\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$P(x_1<X\le x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f_X(t)\mathrm{d}t=F_X(x_2)-F_X(x_1)$$

解：(1) 求 $F_Y(y)$

当 $y<0$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)=0$



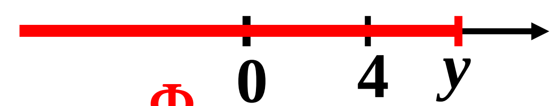
Φ

当 $0\le y<4$ 时有， $(Y\le y)=(-\infty<Y\le 0)\cup(0<Y\le y)$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(0<Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{y}}^{0} \overset{0}{f_X(x)}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\sqrt{y}} \overset{1/2}{f_X(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{y}$$

当 $y\ge 4$ 时，



$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\{(Y\in\overset{\Phi}{(-\infty,0]})\cup(Y\in(0,4))\cup(\overset{\Phi}{Y\in[4,y]})\}$$

$$=P\{Y\in(0,4)\}=1$$

求：$Y=X^2$ 的概率密度 $f_Y(y)$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{1}{2}\sqrt{y} & 0\le y<4\\ 1 & 4\le y\end{cases}$$

解：分布函数法

(2) $$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$(\sqrt{y})'=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

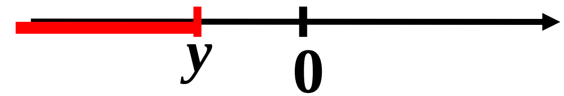
类似： 设连续型随机变量X的概率密度为 $f_X(x)\quad(-\infty,+\infty)$

求 $Y=X^2$ 的概率密

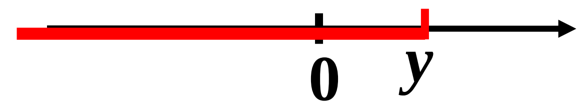
$$P\{x_1<X\le x_2\}=F_X(x_2)-F_X(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f_X(t)\mathrm{d}t$$

解： (1) 求 $F_Y(y)$ $\quad\because x\in(-\infty,+\infty)\ \therefore y\in(0,+\infty)$

当 $y<0$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\Phi)=0$



当 $y\ge 0$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$



$$=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})\overset{1}{=}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\mathrm{d}x$$

(2) $f_Y(y)=F_Y'(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})-\dfrac{-1}{2\sqrt{y}}f_X(-\sqrt{y})\qquad y>0$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})] & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

求分布函数：
1）分布函数定义在**Y**轴上；
2）用**Y的取值**分区间；
3）分区间求分布函数值。

$$(Y\le y)=\overset{\Phi}{(-\infty<Y\le 0)}\cup\overset{X^2}{(0<Y\le y)}$$

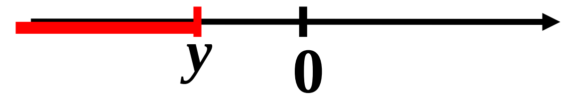
类似： 设连续型随机变量X的概率密度为 $f_X(x)$ $(-\infty,+\infty)$

求 $Y=X^2$ 的概率

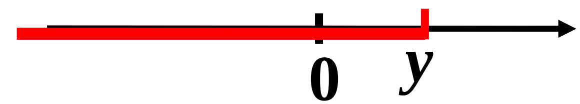
$$P\{x_1<X\le x_2\}=F_X(x_2)-F_X(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f_X(t)\mathrm{d}t$$

解： (1) 求$F_Y(y)$ $\because x\in(-\infty,+\infty)$ $\therefore y\in(0,+\infty)$

当 $y<0$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\Phi)=0$



当 $y\ge 0$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$



$$=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})\overset{2}{=}F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

(2) $$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})-\frac{-1}{2\sqrt{y}}f_X(-\sqrt{y}) \qquad y>0$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})] & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

$$\boxed{F_X'(x)=f_X(x)}$$

$$\Phi'(x)=\varphi(x)$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

例4. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $\quad \dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

求：$Y=a+bX$ 的概率密度 (分布函数法)

解： 当$b>0$时， $\because x\in(-\infty,+\infty)\ \therefore y\in(-\infty,+\infty)$

(1) $$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(a+bX\le y)=P(X\overset{\ge}{\le}\frac{y-a}{b})$$

$$=\overset{1-}{P}(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{y-a-b\mu}{b\sigma})=\overset{1-}{\Phi}(\frac{y-(a+b\mu)}{b\sigma})$$

(2) $$f_Y(y)=F_Y'(y)$$

当$b<0$时，

$$\boxed{P(X\le x)=F_X(x)}$$

$$=\frac{1}{-b\sigma}\varphi(\frac{y-(a+b\mu)}{b\sigma})=\frac{1}{-b\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[y-(a+b\mu)]^2}{2(b\sigma)^2}}$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{|b|\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[y-(a+b\mu)]^2}{2(b\sigma)^2}}$$

求分布函数：

1）分布函数定义在Y轴上；

2）用Y的取值分区间；

3）分区间求分布函数值。

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

例4. 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

求：$Y=a+bX$ 的概率密度

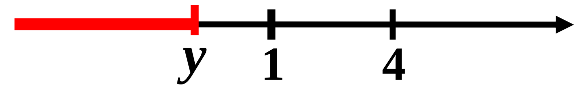
解：

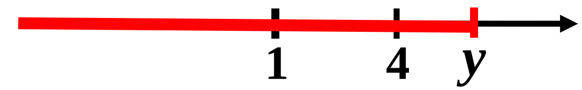
$$f_Y(y)=\frac{1}{|b|\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[y-(a+b\mu)]^2}{2(b\sigma)^2}}$$

得到：$Y=a+bX \sim N(a+b\mu,\sigma^2 b^2)$

结论： 正态分布的线性函数仍服从正态分布。

练习2　求随机变量Y的概率密度 $f_Y(y)$





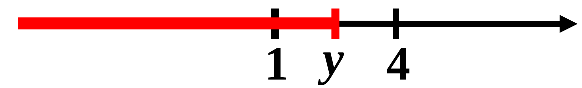
$$Y = 3X+1,\quad f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$\boxed{F_X'(x)=f_X(x)}$

$\boxed{P\{X\le x\}=F_X(x)}$

解： 分布函数法

$\because$ X 的取值在(0,1)内, $\therefore$ Y 的取值在(1,4)内



当 $1\le y<4$ 时,

(1) $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{3X+1\le y\}=P\{X\le \dfrac{y-1}{3}\}\overset{1}{=}F_X(\dfrac{y-1}{3})$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=\begin{cases}0 & y<1\\ 1 & y\ge 4\end{cases}$$

$$\overset{2}{=}\int_{-\infty}^{\frac{y-1}{3}} f_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{y-1}{3}} 1\,\mathrm{d}x=\frac{y-1}{3}$$

求分布函数：

1）分布函数定义在Y轴上；

2）用**Y的取值**分区间；

3）分区间求分布函数值。

$1\le y<4$

(2) $f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(\dfrac{y-1}{3})\cdot\dfrac{1}{3}=1\cdot\dfrac{1}{3},\ 0<\dfrac{y-1}{3}<1$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1/3 & 1<y<4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

即 Y 服从(1,4)上的均匀分布

练习3 求随机变量Y的概率密度$f_Y(y)$

$F'_X(x)=f_X(x)$

$F_X(x)=P\{X\le x\}$

$$Y=3-X,\quad f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2 & -1<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

分布函数法

$$\underset{2}{\;}\quad \overset{\;}{}\text{2}\;\; y\;\; 4$$

解：X的取值在(-1,1)内，Y的取值在(2,4)内

当 $2\le y<4$ 时，

$$\overset{1}{=}1-P\{X\le 3-y\}=1-F_X(3-y)$$

(1) $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{3-X\le y\}=P\{X\ge 3-y\}$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=\begin{cases}0 & y<2\\ 1 & y\ge 4\end{cases}$$

$$\overset{2}{=}\int_{3-y}^{\infty}f_X(x)\,\mathrm{d}x=3/2\int_{3-y}^{1}x^2\,\mathrm{d}x$$

$$=1/2\,x^3\Big|_{3-y}^{1}=1/2[1-(3-y)^3]$$

$2\le y<4$

(2) $f_Y(y)=F'_Y(y)=-f_X(3-y)\cdot(-1)$

$$=\frac{3}{2}(3-y)^2,\ -1<3-y<1$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}(3-y)^2 & 2<y<4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求分布函数：
1）分布函数定义在Y轴上；
2）用Y的取值分区间；
3）分区间求分布函数值。

第二章 一维随机变量及其分布

第五节 随机变量函数的分布

- 随机变量的函数的定义
- 离散型随机变量的函数的分布
- 连续型随机变量的函数的分布

第二章 一维随机变量及其分布

第二章小结

计算 $P(x_1 < X \le x_2)$ 的方法

随机变量

离散型：分布律 分布函数 $\longrightarrow P(x_1 < X \le x_2)$

$$P(x_1 < X \le x_2) = \sum_{x_1 < x_k \le x_2} p_k = F(x_2) - F(x_1)$$

非离散型：

连续型：概率密度 分布函数 $\longrightarrow P(x_1 < X \le x_2)$

$$P(x_1 < X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t = F(x_2) - F(x_1)$$

非连续型：分布函数 $\longrightarrow P(x_1 < X \le x_2)$

$$P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

分布律	概率密度
$X \sim (0,1)$	$X \sim U(a,b)$
$X \sim B(n,p)$	$X \sim E(\theta)$
$X \sim P(\lambda)$	$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

小结

	随机变量	
	离散型随机变量	连续型随机变量
	1）(0-1)分布 $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	1）$U(a,b)$★ $f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a<x<b\\ 0, & 其它\end{cases}$
重要分布	2）$B(n,p)$★ $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\cdots n$	2）$E(\theta)$ ★ $f(x)=\begin{cases}1/\theta\, e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$
	3）$P(\lambda)$ $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2\cdots$	3）$N(\mu,\sigma^2)$ ★ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
函数的分布 $Y=g(X)$	X的分布律 → Y的分布律	★★ $f_X(x)$ → $f_Y(y)=F_Y'(y)$

作 业

授课内容	习题二
2.2 离散型随机变量及其分布律	2(1),3分布律，6, 7二项分布， 12, 泊松分布
2.3 随机变量的分布函数	17(1)(2)， 19
2.4 连续型随机变量概率密度	20,21, 23,概率密度， 24指数分布， 26,27,29正态分布
2.5 随机变量函数的分布	33离散, 34（1）, 35（1）（2）（3）连续

14, 11分

设随机变量X的分布律为 $P(X=1)=P(X=2)=1/2,$

在给定$X=i$的条件下，随机变量Y服从均匀分布$U(0,i)(i=1,2)$

(1)求Y的分布函数 $F_Y(y)$;

(2)求 EY。

在给定$X=1$的条件下, $Y \sim U(0,1)$ $\quad f_1(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

在给定$X=2$的条件下, $Y \sim U(0,2)$ $\quad f_2(x)=\begin{cases}1/2 & 0<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

14, 11分

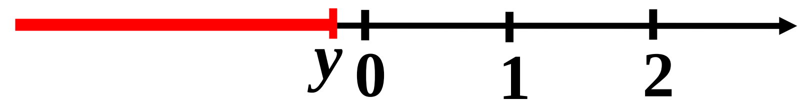
X的分布律为 $P(X=1)=P(X=2)=1/2$,

在给定X=1的条件下, $Y\sim U(0,1)$

在给定X=2的条件下, $Y\sim U(0,2)$

$$f_2(x)=\begin{cases}1/2 & 0<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

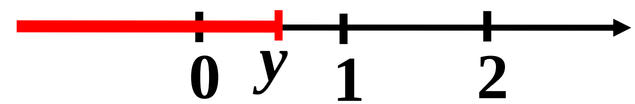
(1)求Y的分布函数 $F_Y(y)$;



解: $F_Y(y)=P(Y\le y)$ 全概率公式

$$=\underbrace{P(X=1)}_{1/2}\boxed{P(Y\le y|X=1)}+\underbrace{P(X=2)}_{1/2}\boxed{P(Y\le y|X=2)}$$

当 $y\le 0$ 时, $F_Y(y)=P(Y\le y)=0$



当 $0\le y<1$ 时,

$$P(Y\le y|X=1)=\int_{-\infty}^{y}f_1(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}y+\int_{0}^{y}1\mathrm{d}y=y$$

$$P(Y\le y|X=2)=\int_{-\infty}^{y}f_2(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}y+\int_{0}^{y}\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}y$$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=\frac{1}{2}\cdot y+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}y=\frac{3}{4}y$$

14, 11分

X的分布律为 $P(X=1)=P(X=2)=1/2$,

在给定X=1的条件下, $Y \sim U(0,1)$

在给定X=2的条件下, $Y \sim U(0,2)$

(1)求Y的分布函数 $F_Y(y)$;

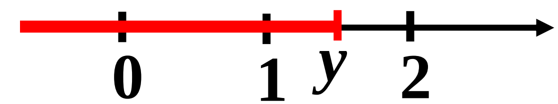
$$f_2(x)=\begin{cases}1/2 & 0<x<2\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$f_1(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

解: $F_Y(y)=P(Y\le y)$

$$=\underset{1/2}{P(X=1)}\boxed{P(Y\le y|X=1)}+\underset{1/2}{P(X=2)}\boxed{P(Y\le y|X=2)}$$

当 $1\le y<2$ 时,



$$P(Y\le y|X=1)=\int_{-\infty}^{y}f_1(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}1\mathrm{d}y+\int_{1}^{y}0\mathrm{d}y=1$$

$$P(Y\le y|X=2)=\int_{-\infty}^{y}f_2(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}y+\int_{0}^{y}\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}y$$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}y$$

14, 11分

X的分布律为 $P(X=1)=P(X=2)=1/2$,

在给定X=1的条件下, $Y\sim U(0,1)$

在给定X=2的条件下, $Y\sim U(0,2)$

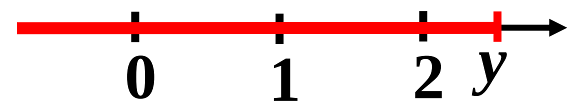
$$f_1(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}1/2 & 0<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

(1)求Y的分布函数 $F_Y(y)$;

解: $F_Y(y)=P(Y\le y)$

$$=\underset{1/2}{P(X=1)}\boxed{P(Y\le y\,|\,X=1)}+\underset{1/2}{P(X=2)}\boxed{P(Y\le y\,|\,X=2)}$$

当 $y\ge 2$ 时,



$$P(Y\le y\,|\,X=1)=\int_{-\infty}^{y}f_1(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}1\mathrm{d}y+\int_{1}^{y}0\mathrm{d}y=1$$

$$P(Y\le y\,|\,X=2)=\int_{-\infty}^{y}f_2(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}y+\int_{0}^{2}\frac{1}{2}\mathrm{d}y+\int_{2}^{y}0\mathrm{d}y=1$$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1=1$$

14, 11分

设随机变量X的分布律为$P(X=1)=P(X=2)=1/2$,

在给定$X=i$的条件下，随机变量Y服从均匀分布$U(0,i)(i=1,2)$

(1)求Y的分布函数$F_Y(y)$;

解：$F_Y(y)=P(Y\le y)$

$$=\underset{1/2}{P(X=1)}P(Y\le y|X=1)+\underset{1/2}{P(X=2)}P(Y\le y|X=2)$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \dfrac{3}{4}y, & 0\le y<1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}y, & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

14, 11分

设随机变量X的分布律为$P(X=1)=P(X=2)=1/2$,

在给定$X=i$的条件下，随机变量Y服从均匀分布$U(0,i)(i=1,2)$

(2)求 EY。

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3}{4}y, & 0\le y<1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}y, & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

解:

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}3/4, & 0\le y<1\\ 1/4, & 1\le y<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \frac{3}{4}y\mathrm{d}y+\int_1^2\frac{1}{4}y\mathrm{d}y$$

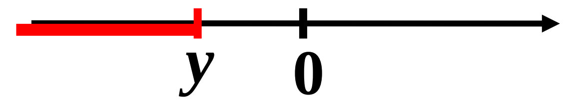
$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^1+\frac{1}{4}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_1^2=\frac{3}{4}$$

例5. 设随机变量 X 在 $(0, 1)$上服从均匀分布，$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

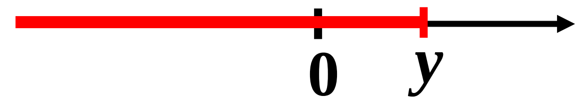
求：$Y=-2\ln X$ 的概率密度.

解： 因为在 $(0, 1)$上，函数 $\ln x<0$ 故，$y=-2\ln x>0$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0$



当 $y\ge 0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-2\ln X\le y)$



$$=P(\ln X\ge -\frac{y}{2})=P(X\ge e^{-\frac{y}{2}})$$

由于 $\ln x$单调上升，所以

$$=1-P(X\le e^{-\frac{y}{2}})$$

$$=1-\int_{-\infty}^{e^{-\frac{y}{2}}} f_X(x)dx \qquad (0<e^{-\frac{y}{2}}<1)$$

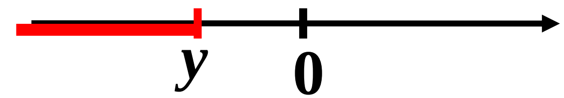
$$=1-\int_{0}^{e^{-\frac{y}{2}}} f_X(x)dx$$

例5. 设随机变量 X 在 (0, 1)上服从均匀分布， $f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

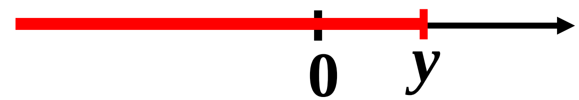
求：$Y= - 2\ln X$ 的概率密度.

解： 因为在 (0, 1)上, 函数 $\ln x<0$ 故， $y=-2\ln x>0$

当 $y<0$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)=0$



当 $y\ge 0$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)$



$$=1-\int_0^{e^{-\frac{y}{2}}} f_X(x)dx \qquad (0<e^{-\frac{y}{2}}<1)$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=-f_X(e^{-\frac{y}{2}})\cdot e^{-\frac{y}{2}}(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} \qquad y\ge 0$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y\ge 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

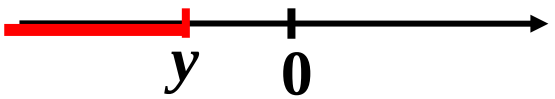
即Y服从参数为2的指数分布.

例5. 设随机变量 X 在 (0, 1)上服从均匀分布， $f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

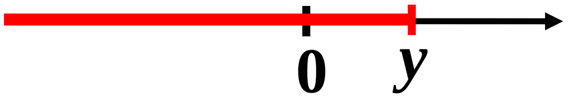
求：$Y=-2\ln X$ 的概率密度.

解： 因为在 (0, 1)上, 函数 $\ln x<0$ 故， $y=-2\ln x>0$

当 $y<0$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)=0$



当 $y\ge 0$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)$



$$=1-\int_0^{e^{-\frac{y}{2}}} f_X(x)dx \qquad (0<e^{-\frac{y}{2}}<1)$$

$$=1-e^{-\frac{y}{2}}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y\ge 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

例6 设随机变量 X 服从参数为1/2的指数分

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & y\in(0,1)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

证明：$Y=1-e^{-2X}$ 在区间(0,1)上服从均匀分布.

解：

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$\because x>0 \quad \therefore e^{2x}>1 \quad \therefore 0<\dfrac{1}{e^{2x}}<1$

$\therefore 0<1-e^{-2x}<1 \qquad \therefore 0<y<1$

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & y\in(0,1)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

例6 设随机变量 X 服从参数为1/2的指数分布，

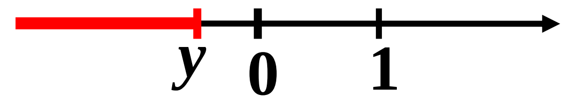
证明：$Y=1-e^{-2X}$ 在区间(0,1)上服从均匀分布.

解：

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

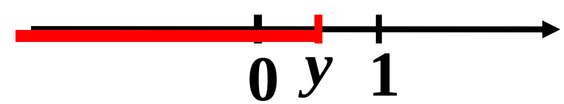
$$0<y<1$$

当$y\le 0$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=0$



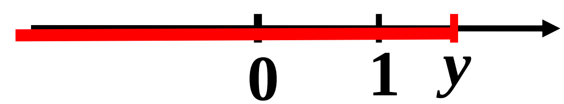
当$y\in(0,1)$时，$0<1-y<1,\quad \ln(1-y)<0,\quad -\frac{1}{2}\ln(1-y)>0$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-e^{-2X}\le y\}$$



$$=P\{e^{-2X}\ge 1-y\}=P\{-2X\ge \ln(1-y)\}$$

$$=P\{X\le -\frac{1}{2}\ln(1-y)\}=\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}\ln(1-y)} f_X(x)dx$$



当$y\ge 1$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{0<Y<1\}=1$

例6 设随机变量 X 服从参数为1/2的指数分布

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & y\in(0,1)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

证明: $Y=1-e^{-2X}$ 在区间(0,1)上服从均匀分布.

解: $0<y<1$

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

当$y\le 0$时, $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=0$

$$-\frac{1}{2}\ln(1-y)>0$$

当$y\in(0,1)$时, $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}\ln(1-y)} f_X(x)dx$

当$y\ge 1$时, $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=1$

当$y\in(0,1)$时, $f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X[-\frac{1}{2}\ln(1-y)][\frac{1}{2(1-y)}]$

$$=2e^{-2[-\frac{1}{2}\ln(1-y)]}[\frac{1}{2(1-y)}]=1$$

当$y\notin(0,1)$时, $f_Y(y)=F_Y'(y)=0$