线性代数考研题

初等变换

(20, 4分)

设矩阵A经过初等列变换变成B，则 **(B)**

(A) 存在矩阵P，使得 $PA=B$ ✗

(B) 存在矩阵P，使得 $BP=A$

(C) 存在矩阵P，使得 $PB=A$ ✗

(D) 方程组$Ax=0$与$Bx=0$同解

解：

因为A经过初等列变换变成B，所以存在初等阵 $P_1P_2\cdots P_k$ 使得

$AP_1P_2\cdots P_k=B$， 令$P_1P_2\cdots P_k=Q$，则Q为可逆矩阵，于是

$$AQ=B \rightarrow A=BQ^{-1} \xrightarrow{令Q^{-1}=P} A=BP$$ 故选(B).

方程组$Ax=0$与$Bx=0$同解 $\leftrightarrow A \xrightarrow{初等行变换} B$

即存在可逆矩阵P使得 $PA=B$

故(D)错.

(03, 4分)

可逆矩阵

设n维向量 $\alpha=(a,0,\cdots,0,a)^T,a<0$，矩阵$A=E-\alpha\alpha^T$, $B=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T$,

且 $A^{-1}=B$，则 $a=$ ________

解：

$$\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}a\\0\\\vdots\\0\\a\end{pmatrix}(a,0,\cdots,0,a)=\begin{pmatrix}a^2&0&\cdots&0&a^2\\0&0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0&0\\a^2&0&\cdots&0&a^2\end{pmatrix}\neq O$$

$$\alpha^T\alpha=(a,0,\cdots,0,a)\begin{pmatrix}a\\0\\\vdots\\0\\a\end{pmatrix}=2a^2$$

(03, 4分)

设n维向量 $\alpha=(a,0,\cdots,0,a)^T, a<0$，矩阵$A=E-\alpha\alpha^T, B=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T$，

且 $A^{-1}=B$，则 $a=$ <u>-1</u>

$\alpha^T\alpha=2a^2$

$\alpha\alpha^T\neq O$

解：因为 $A^{-1}=B$

$$\therefore E=AB=(E-\alpha\alpha^T)(E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T)$$

$$=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-\alpha\alpha^T-\underline{\alpha\alpha^T(\frac{1}{a}\alpha\alpha^T)}\ -\frac{1}{a}\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T$$

$$=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-\alpha\alpha^T-\frac{1}{a}\alpha\underbrace{(\alpha^T\alpha)}_{2a^2}\alpha^T$$

$$=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-\alpha\alpha^T-2a\alpha\alpha^T=E+(\frac{1}{a}-1-2a)\alpha\alpha^T$$

$$\Rightarrow(\frac{1}{a}-1-2a)\alpha\alpha^T=O\Rightarrow(\frac{1}{a}-1-2a)=0$$ 因为$a<0, \therefore a=-1$

$$\Rightarrow 2a^2+a-1=0\Rightarrow(2a-1)(a+1)=0\Rightarrow a=\frac{1}{2} \text{ 或 } a=-1$$

(01, 3分)

矩阵的秩

设4阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$，且 $r(A)=3$，则$k=$ ______

结论： 可逆矩阵行列式 $\neq 0$

不可逆矩阵行列式 $= 0$

解：

由于 $r(A)=3<4 \rightarrow |A|=0$

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} k+3 & 1 & 1 & 1 \\ k+3 & k & 1 & 1 \\ k+3 & 1 & k & 1 \\ k+3 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}$$

$$=(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix}=(k+3)(k-1)^3=0 \rightarrow k=1 \text{ 或 } k=-3$$

(01, 3分)

设4阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$, 且 $r(A)=3$, 则$k=$ <u>-3</u>

解: $r(A)=3 \rightarrow |A|=0 \rightarrow k=1$ 或 $k=-3$

但当 $k=1$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r(A)=1,$$

矛盾

所以 $k=-3$

(96, 3分)

计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = (a_1a_4 - b_1b_4)(a_2a_3 - b_2b_3)$

$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

解：交换第2, 4列，再交换第2, 4行

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{cc|cc} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{array}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1a_4 - b_1b_4)(a_2a_3 - b_2b_3)$$

(14, 4分)

计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -(ad-cb)^2$

$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

解:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \overset{c_1 \leftrightarrow c_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2 = -(ad-cb)^2$$

(05, 4分)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为3维列向量，矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),|A|=1$

$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$， 则$|B|=$ 2

解：用行列式的性质.

$$|B|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\overset{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3},\overset{-\alpha_1-2\alpha_2-4\alpha_3}{\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3}|\quad (c_3-c_2,c_2-c_1)$$

$$=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,\overset{-\alpha_2-3\alpha_3}{\alpha_2+5\alpha_3}|\quad (c_3-c_2)$$

$$=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_3|\ \text{提出公因子2,}$$

$$=2|\alpha_1+\alpha_2+\overset{-\alpha_3}{\alpha_3},\alpha_2+\overset{-3\alpha_3}{3\alpha_3},\alpha_3|\ (c_2-3c_3,c_1-c_3)$$

$$=2|\alpha_1+\overset{-\alpha_2}{\alpha_2},\alpha_2,\alpha_3|\quad (c_1-c_2)$$

$$=2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|$$

$$=2$$

(95, 6分)

设A为n阶矩阵，满足 $AA^T=E$，$|A|<0$，求 $|A+E|$.

解1：

$$|A+E|=|A+AA^T|=|A(E+A^T)|=|A||(\overset{E^T}{E}+A^T)|=|A||(E+A)^T|$$

$$=|A||E+A|$$

$|A|=|A^T|$

$|AB|=|A||B|$

$(1-|A|)|E+A|=0$ 因为 $(1-|A|)>0$ 所以 $|E+A|=0$

解2：

$|A+E|=|A||E+A|=-|E+A|$ $\therefore |E+A|=0$

因为 $AA^T=E$，$|A|<0$，

$$\therefore |AA^T|=|E| \rightarrow |A||A^T|=|E|=1 \rightarrow |A|^2=1 \rightarrow |A|=-1$$

初等行变换求解线性方程组(齐次)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$$

齐次线性方程组：$Ax = 0$

$$r(A)\begin{cases} = n, Ax = 0 \text{ 有唯一解----零解 } |A| \neq 0 \\ < n, Ax = 0 \text{ 有无穷多解---非零解 } |A| = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \end{array}$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \end{pmatrix}} \underset{x}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = \underset{0}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \end{array}$$

$$A = \underset{\text{方阵}}{\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}} \to \underset{\text{阶梯阵}}{\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$|A| \neq 0$

$r(A) = n = 3$

唯一零解

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \underset{\text{阶梯阵}}{\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \to \underset{\text{行简化阶梯阵}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$|A| = 0$

$r(A) = 2 < n = 3$

无穷多非零解，求通解

齐次方程组的通解

(04, 9分)

设齐次线性方程组

$m=n$

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=0\\2x_1+(2+a)x_2+2x_3+\cdots+2x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\nx_1+nx_2+nx_3+\cdots+(n+a)x_n=0\end{cases}$$

其中 $n\geq 2$, 试讨论a为何值时，方程组只有零解，有无穷多组解？并求其通解。

解：$Ax=0$只有零解$\Leftrightarrow|A|\neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\2&2+a&2&\cdots&2\\3&3&3+a&\cdots&3\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n&n&n&\cdots&n+a\end{vmatrix}=(a+\frac{1}{2}n(n+1))\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\2&2+a&2&\cdots&2\\3&3&3+a&\cdots&3\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n&n&n&\cdots&n+a\end{vmatrix}$$

(04, 9分)

解： $Ax=0$只有零解$\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = (a+\frac{1}{2}n(n+1)) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}$$

$$= (a+\frac{1}{2}n(n+1)) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+\frac{1}{2}n(n+1))a^{n-1}$$

(04, 9分)

解： $Ax=0$只有零解$\Leftrightarrow |A|\neq 0$

$|A|=(a+\frac{1}{2}n(n+1))a^{n-1}$

(1) 当$a\neq 0$ 且 $a+\frac{1}{2}n(n+1)\neq 0$ 时，方程组只有零解。

(2) 当 a=0 时，方程组有无穷多非零解，求通解。

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=0\\ 2x_1+(2+a)x_2+2x_3+\cdots+2x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ nx_1+nx_2+nx_3+\cdots+(n+a)x_n=0\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\2&2&2&\cdots&2\\3&3&3&\cdots&3\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n&n&n&\cdots&n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\Rightarrow x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=0$$

行简化阶梯阵

$r(A)=1<n$

(04, 9分)

解： $Ax=0$只有零解$\Leftrightarrow |A|\neq 0$ $\quad |A|=(a+\frac{1}{2}n(n+1))a^{n-1}$

(1) 当$a\neq 0$ 且 $a+\frac{1}{2}n(n+1)\neq 0$时，方程组只有零解。

(2) 当$a=0$时，方程组有无穷多非零解，求通解。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=0$$

$$r(A)=1<n$$

$$\begin{cases} x_1=-k_1-k_2-\cdots-k_{n-1} \\ x_2=k_1 \\ x_3=k_2 \\ \quad\vdots \\ x_n=k_{n-1} \end{cases}$$

通解：
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\cdots+k_{n-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(04, 9分)

解： $Ax=0$只有零解$\Leftrightarrow |A|\neq 0$　　$|A|=(a+\frac{1}{2}n(n+1))a^{n-1}$

(1) 当$a\neq 0$ 且 $a+\frac{1}{2}n(n+1)\neq 0$ 时，方程组只有零解。

(2) 当 a=0 时，方程组有无穷多非零解，求通解。

(3) 当 $a=-1/2\,n(n+1)$ 时，方程组有无穷多非零解，求通解。

$$A=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i-ir_1} \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ -3a & 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[i\geq 2]{r_i\div a} \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_i} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & & x_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1+x_2=0 \\ -3x_1+x_3=0 \\ \cdots \\ -nx_1+x_n=0 \end{cases}$$

行简化阶梯阵　$r(A)=n-1<n$

(04, 9分)

解： $Ax=0$只有零解$\Leftrightarrow |A|\neq 0$

$$|A|=(a+\frac{1}{2}n(n+1))a^{n-1}$$

(1) 当$a\neq 0$ 且 $a+\frac{1}{2}n(n+1)\neq 0$时，方程组只有零解。

(2) 当 $a=0$ 时，方程组有无穷多非零解。

(3) 当$a=-1/2\,n(n+1)$时，方程组有无穷多非零解。

$$A=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-2x_1+x_2=0\\ -3x_1+x_3=0\\ \cdots\\ -nx_1+x_n=0\end{cases}$$

$$r(A)=n-1<n$$

$$\begin{cases}x_1=c\\ x_2=2c\\ x_3=3c\\ \vdots\\ x_n=nc\end{cases}$$

通解：$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ \vdots\\ n\end{pmatrix}$

初等行变换求解线性方程组(非齐次)

$$(A,b)=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

非齐次线性方程组: $Ax=b$

$$Ax=b \text{ 有解} \Leftrightarrow r(A)=r(A,b)\begin{cases} =n, \text{ 有唯一解} \ |A|\neq 0 \\ <n, \text{ 有无穷多解} \ |A|=0 \end{cases}$$

$$Ax=b \text{ 无解} \Leftrightarrow r(A)<r(A,b) \quad \text{有矛盾方程} \ |A|=0$$

方阵 阶梯阵 行简化阶梯阵

$$(A,b)=\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

$|A|\neq 0$

$r(A)=r(A,b)=n=3,$

求唯一解

$$(A,b)=\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$|A|=0$

$r(A)=r(A,b)=2<n=3,$

求通解

$$(A,b)=\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}\to\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \end{array}\to \text{矛盾方程}$$

$|A|=0$

$r(A)=2<r(A,b)=3,$

无解

非齐次方程组求解

(12, 11分)

已知4元线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

(1) 计算行列式 $|A|$;

(2) 当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，并求其通解.

(12, 11分)

已知4元线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

(1) 计算行列式 $|A|$;

解：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\0&-a^2&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\0&0&a^3&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\0&0&0&1-a^4\end{vmatrix}=1-a^4$$

(12, 11分)

已知4元线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

(1) 计算行列式 $|A|$;

解:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}-a\cdot\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\end{vmatrix}=1-a^4$$

(12, 11分)

已知4元线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$|A|=1-a^4$

$|A|=0,\ r(A)<n$

$$\begin{cases}r(A)=r(A,b)<n,\text{无穷多解}\\ r(A)<r(A,b),\quad\text{无解}\end{cases}$$

(2) 当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，并求其通解.

解：当 $|A|=1-a^4=0$ 时，即$a=1$,或$a=-1$时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解或无解两种情况.

1) 当$a=1$时，因为 $r(A)=3<r(A,b)=4$，所以方程组 $Ax=b$ 无解.

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&-1&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

阶梯阵

(12, 11分)

$$A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

(2) 当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，并求其通解.

解：当 $|A|=1-a^4=0$ 时，即$a=1$,或$a=-1$时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解或无解两种情况.

2) 当$a=-1$时，因为 $r(A)=r(A,b)=3<4$, 所以$Ax=b$ 有无穷解.

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&-1&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&-1&1&0\end{pmatrix}\to\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}}_{\text{行阶梯阵}}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\underbrace{\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1&x_2&x_3&x_4&\ \end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}}_{\text{行简化阶梯阵}}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_4\\x_2=x_4-1\\x_3=x_4\end{cases}$$

(12, 11分)

$$A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

(2) 当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，并求其通解.

解：当 $|A|=1-a^4=0$ 时，即 $a=1$,或 $a=-1$时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解或无解两种情况.

2）当 $a=-1$时，因为 $r(A)=r(A,b)=3<4$，所以 $Ax=b$ 有无穷解.

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x_1&x_2&x_3&x_4\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_4\\x_2=x_4-1\\x_3=x_4\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=c\\x_2=c-1\\x_3=c\\x_4=c\end{cases}$$

通解：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ 其中c为任意常数.

(10, 11分)

已知3元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有2个不同的解，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

(1) 求λ, a;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

已知3元线性方程组 $Ax=b$ 有2个不同的解，其中 **(10, 11分)**

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

(1) 求 λ, a;

解： 因为 $Ax=b$ 有2个不同的解，既有无穷多解，所以 $|A|=0$

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ \lambda & 1 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2-1)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda=1 \text{ 或 } \lambda=-1$$

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-1)$$

(10, 11分)

已知3元线性方程组 $Ax=b$ 有2个不同的解，其中

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

(1) 求λ, a;

解：因为 $Ax=b$ 有2个不同的解，所以 $|A|=0 \Rightarrow \lambda=1$ 或 $\lambda=-1$

当 $\lambda=1$ 时，$r(A)<r(A,b)$　　$Ax=b$ 无解

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(10, 11分)

已知3元线性方程组 $Ax=b$ 有2个不同的解，其中

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

$r(A)=r(A,b)=2<3,$

方程组有无穷多解

(2) 求方程组 $Ax=b$ 的通解.

解：因为 $Ax=b$ 有2个不同的解，所以 $|A|=0\Rightarrow\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$

无解

当 $\lambda=-1$ 时，

行阶梯阵

$$(A,b)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

当 $a=-2$ 时，

$$\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & -3/2\\ 0 & 1 & 0 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 3/2\\ 0 & 1 & 0 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

行简化阶梯阵

(10, 11分)

已知3元线性方程组 $Ax=b$ 有2个不同的解，其中

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}.$$

$r(A)=r(A,b)=2<3,$

方程组有无穷多解

(2) 求方程组 $Ax=b$ 的通解.

解：因为 $Ax=b$ 有2个不同的解，所以 $|A|=0\Rightarrow\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$

无解

当 $\lambda=-1, a=-2$ 时，

$$(A,b)\rightarrow\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 3/2\\ 0 & 1 & 0 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{cases}x_1=x_3+3/2\\ x_2=-1/2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1=c+3/2\\ x_2=\quad -1/2\\ x_3=c\end{cases}$$

通解：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3/2\\-1/2\\0\end{pmatrix}$ 其中c为任意常数