第一章 矩阵

1.1 矩阵及其运算 $A\pm B$ λA AB A^n A^T

1.2 分块矩阵

1.3 可逆矩阵

1.4 高斯消元法

1.5 矩阵的秩与初等变换

教学计划：5次课-15学时

复习

矩阵乘法应注意的几点

$$(1)\ AB \xcancel{=} BA$$

$$(2)\ AB = 0 \xcancel{\Rightarrow} A = 0 \ or\ B = 0$$

$$(3)\ \cancel{A}B = \cancel{A}C,\ \text{若}\ A \neq 0 \xcancel{\Rightarrow} B = C$$

$$(4)\ (AB)^m \xcancel{=} A^m B^m$$

$$(5)\ (A \pm B)^2 \xcancel{=} A^2 \pm 2AB + B^2$$

$$(6)\ (A + B)(A - B) \xcancel{=} A^2 - B^2$$

复习

线性方程组的表示

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

增广矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

系数矩阵

线性方程组的表示

复习

将线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

写成矩阵乘积的形式.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \longrightarrow Ax = b$$

系数矩阵 A $\qquad x \qquad b$

转置矩阵的性质

复习

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

(4) $(AB)^T = B^T A^T$

若方阵A满足为 $A^T = A$， 则称A为对称矩阵.

若方阵A满足为 $A^T = -A$， 则称A为反对称矩阵.

第一章 矩阵

第一章 矩阵

1.2 分块矩阵

- ➡ 分块矩阵的概念
- 分块矩阵的运算规则

1. 分块矩阵的概念

对于行数和列数较高的矩阵，为了简化运算，经常采用分块法，将大矩阵的运算转化成小矩阵的运算.

分块的方法：

例

$$A=\left(\begin{array}{cccc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

子块

$\longrightarrow$ 3×1分块矩阵

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} C_1 & O \\ C_3 & C_2 \end{pmatrix}$$

例

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\quad O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=(A_1, A_2, A_3, A_4)$$

其中 $A_1=\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $A_2=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ $A_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$

第一章 矩阵

1.2 分块矩阵

- 分块矩阵的概念
- 分块矩阵的运算规则

2. 分块矩阵的运算规则

分块的原则：

(1) 分块的目的是为了简化矩阵运算；

(2) 矩阵分块后必须使子块能够运算。

1) 矩阵乘法

设A为$m\times k$ 矩阵, B为$k\times n$ 矩阵, 分块成

$k=9$

$$A=\begin{pmatrix} \overbrace{A_{11}}^{3} & \cdots \overbrace{A_{1j}}^{4} \cdots & \overbrace{A_{1t}}^{2} \\ A_{i1} & \cdots A_{ij} \cdots & A_{it} \\ A_{s1} & \cdots A_{sj} \cdots & A_{st} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots B_{1j} \cdots & B_{1p} \\ B_{i1} & \cdots B_{ij} \cdots & B_{ip} \\ B_{t1} & \cdots B_{tj} \cdots & B_{tp} \end{pmatrix}\begin{matrix} \}\ 3 \\ \}\ 4 \\ \}\ 2 \end{matrix}$$

其中 $A_{i1},A_{ij},\cdots,A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j},B_{ij},\cdots,B_{tj}$ 的行数,

$$\text{则 } AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots C_{1j} \cdots & C_{1p} \\ C_{i1} & \cdots C_{ij} \cdots & C_{ip} \\ C_{s1} & \cdots C_{sj} \cdots & C_{sp} \end{pmatrix},$$

分块规则:

A的列的分法与

B的行的分法相同

$$\text{其中 } C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+\cdots+A_{ij}B_{ij}+\cdots+A_{it}B_{tj}$$

例1

设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$，$B=$

$$A_1=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}\quad B_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$B_{21}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}\quad B_{22}=\begin{pmatrix}4&1\\2&0\end{pmatrix}$$

解:

$$A=\left(\begin{array}{c|c}\underset{E}{\overbrace{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}^{2}}&\underset{0}{\overbrace{\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}}^{2}}\\ \hline \underset{A_1}{\begin{matrix}-1&2\\1&1\end{matrix}}&\underset{E}{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}\end{array}\right)\qquad B=\begin{array}{c}2\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}\right.\\2\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}\right.\end{array}\left(\begin{array}{c|c}\underset{B_{11}}{\begin{matrix}1&0\\-1&2\end{matrix}}&\underset{E}{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}\\ \hline \underset{B_{21}}{\begin{matrix}1&0\\-1&-1\end{matrix}}&\underset{B_{22}}{\begin{matrix}4&1\\2&0\end{matrix}}\end{array}\right)$$

则 $$AB=\begin{pmatrix}E&O\\A_1&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&E\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&E\\\boxed{A_1B_{11}}+B_{21}&A_1+B_{22}\end{pmatrix}.$$

$$A_1=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\quad B_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$B_{21}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}\quad B_{22}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$A_1B_{11}+B_{21}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$A_1+B_{22}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix}B_{11} & E\\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ \hline -2 & 4 & 3 & 3\\ -1 & 1 & 3 & 1\end{array}\right).$$

例1

设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix}$, 求 AB.

解:

$$A=\begin{array}{c}\overbrace{\qquad\qquad}^{2}\ \overbrace{\qquad\qquad}^{2}\\ \left(\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \hdashline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)\end{array} \qquad \begin{matrix}E&\mathbf{0}\\A_1&E\end{matrix}$$

$$B=\begin{array}{c}2\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}\right.\\2\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}\right.\end{array}\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\ \hdashline 1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{array}\right) \qquad \begin{matrix}B_{11}&E\\B_{21}&B_{22}\end{matrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}B_{11}&E\\ A_1B_{11}+B_{21}&A_1+B_{22}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\ \hdashline -2&4&3&3\\-1&1&3&1\end{array}\right)$$

2) 分块对角阵

设A为n阶方阵，若A的分块矩阵只有主对角线上有非零子块，其余子块都为零子块， 即:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & O \\ & & \ddots & \\ & O & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_i\ (i = 1, 2, \cdots s)$ 都是方阵，则称 A 为分块对角矩阵.

2) 分块对角阵

例

$$A=\left(\begin{array}{c|cc} & & \color{red}{0}\\ 5&0&0\\ \hline 0&3&1\\ \color{red}{0} & & \\ 0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix},\qquad A_1=(5),\qquad A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a&1&0&0\\ \color{red}{A_1}& & \color{red}{0} & \\ 0&a&0&0\\ \hline 0&0&b&1\\ \color{red}{0}& & \color{red}{A_2} & \\ 0&0&1&b\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}$$

分块对角阵的性质

$$(1)\ \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

$$(2)\ A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}, \quad A^k = \begin{pmatrix} A_1^k & & & \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^k \end{pmatrix}$$

分块对角阵的性质

(2) $$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}, \quad A^k = \begin{pmatrix} A_1^k & & & \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^k \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^2 & & & \\ & A_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^2 \end{pmatrix}$$

分块对角阵的性质

$$(1)\quad \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

$$(2)\quad A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}, \quad A^k = \begin{pmatrix} A_1^k & & & \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^k \end{pmatrix}$$

练习1

设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$ 求 AB.

解

$$A=\left(\begin{array}{c:c} \overbrace{\begin{matrix} a & 1 \\ 0 & a \end{matrix}}^{2}\ A_1 & \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}^{2}\ 0 \\ \hdashline \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\ 0 & \begin{matrix} b & 1 \\ 1 & b \end{matrix}\ A_2 \end{array}\right) \qquad B=\begin{array}{r} 2\left\{\vphantom{\begin{matrix} a \\ 1 \end{matrix}}\right. \\ 2\left\{\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}}\right. \end{array}\!\left(\begin{array}{c:c} \begin{matrix} a & 0 \\ 1 & a \end{matrix}\ B_1 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\ 0 \\ \hdashline \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\ 0 & \begin{matrix} b & 0 \\ 1 & b \end{matrix}\ B_2 \end{array}\right)$$

$$AB=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 \\ 0 & A_2B_2 \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc:cc} a^2+1 & a & 0 & 0 \\ a & a^2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 2b & b^2 \end{array}\right)$$

$$A_1B_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}, \quad A_2B_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b^2+1 & b \\ 2b & b^2 \end{pmatrix},$$

第一章 矩阵

1.2 分块矩阵

- ✓ 分块矩阵的概念
- ✓ 分块矩阵的运算规则

第一章 矩阵

1.1 矩阵及其运算 $A \pm B, \lambda A, AB, A^T$

1.2 分块矩阵

➡ 1.3 可逆矩阵 ★

1.4 高斯消元法

1.5 矩阵的秩与初等变换 ★

第一章 矩阵

1.3 可逆矩阵

- ➡ 逆矩阵的概念
- 逆矩阵的性质
- 逆矩阵的计算

逆矩阵的引出

数的除法 $\longrightarrow$ 矩阵的除法

$ab=ba=1$ $\longrightarrow$ 称a,b互为倒数， 记 $a=b^{-1}, b=a^{-1}$

$\downarrow$ $\downarrow$

$AB=BA=E$ $\longrightarrow$ 称A,B互为逆矩阵，记 $A=B^{-1}, B=A^{-1}$

A,B都必须是与E同阶的方阵

$$\frac{a}{b}=ab^{-1} \longrightarrow AB^{-1} \cancel{=} \frac{A}{B}$$

注意： $a\neq 0 \Rightarrow a^{-1}$ 存在

但 $A\neq 0 \cancel{\Rightarrow} A^{-1}$ 存在

1. 逆矩阵的概念

定义1.9　对于n阶方阵A，若存在n阶方阵B，

使得 $AB = BA = E$,

则称矩阵A是可逆的，矩阵B为A的逆矩阵.

定理1.1 若方阵A可逆，则它的逆矩阵是唯一的.

证明:　设 B 和 C 是 A 的逆矩阵,

$$AB = BA = E, \quad AC = CA = E,$$

$$B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C.$$

所以 A 的逆矩阵是唯一的。

注意：

- ➤A的逆矩阵记为 $B = A^{-1}$，于是 $AA^{-1} = E$

1.逆矩阵的概念

定义1.9 对于n阶方阵A,若存在n阶方阵B,

使得 $AB = BA = E$,

则称矩阵A是可逆的, 矩阵B为A的逆矩阵.

定理1.1 若方阵A可逆，则它的逆矩阵是唯一的.

注意：

- ➢A的逆矩阵记为$B = A^{-1}$，于是 $AA^{-1} = E$
- ➢并非所有方阵都可逆. 例: 零方阵不可逆

问题： 方阵满足什么条件一定可逆？—— **Ch2**

第一章 矩阵

1.3 可逆矩阵

- ✓ 逆矩阵的概念
- ➡ 逆矩阵的性质
- 逆矩阵的计算

2. 逆矩阵的性质

$AB = BA = E$

定理1.2 对于n 阶方阵A, B, 若 $AB = E$ (或 $BA = E$),

则方阵A, B是可逆的, 且 $B = A^{-1}, A = B^{-1}$.

证明： 见2.3节

$$
\begin{gathered}
AB = E \\
\Downarrow \\
(AB)B^{-1} = EB^{-1} \\
\Downarrow \\
AE = B^{-1} \\
\Downarrow \\
A = B^{-1} \\
\Downarrow \\
BA = BB^{-1} = E
\end{gathered}
$$

注意：只有确定逆矩阵存在的情况下才能使用。

$AB = E$

2. 逆矩阵的性质

(1) 若A可逆，则A^{-1}亦可逆，且 $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

证明： $AA^{-1} = E$

(2) 若A可逆，数 $\lambda \neq 0$， 则 λA 可逆， 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

证明： $(\lambda A)(\frac{1}{\lambda} A^{-1}) = (\lambda \cdot \frac{1}{\lambda})(AA^{-1}) = E$

(3) 若A, B为同阶方阵且均可逆， 则AB亦可逆,且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

证明： $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$

$$= AEA^{-1}$$

$$= AA^{-1} = E.$$

2. 逆矩阵的性质

(1) 若A可逆，则 A^{-1} 亦可逆，且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

(2) 若A可逆，数 $\lambda\neq 0$，则 λA 可逆，且 $(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$

(3) 若A,B为同阶方阵且均可逆，则AB亦可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

推广：$\left(A_1A_2\cdots A_m\right)^{-1}=A_m^{-1}\ldots A_2^{-1}\ A_1^{-1}$

(4) 若A可逆，则A^T 也可逆，且$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

证明： $\because\ A^T(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=E^T=E,$

$\therefore\ (A^T)^{-1}=(A^{-1})^T.$

$(AB)^T=B^TA^T$

注意： (5) $(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$

验证：$(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=$

$E+AB^{-1}+BA^{-1}+E$

第一章 矩阵

1.3 可逆矩阵

- ✓ 逆矩阵的概念
- ✓ 逆矩阵的性质
- ➡ 逆矩阵的计算

3. 逆矩阵的计算

定理1.2 对于n 阶方阵A, B，若 $AB = E$ (或 $BA = E$),
则方阵A, B是可逆的，且 $B = A^{-1}, A = B^{-1}$

求逆矩阵方法:

(1) 利用 $AB = E$ 求逆 $A\,(B?\,) = E$

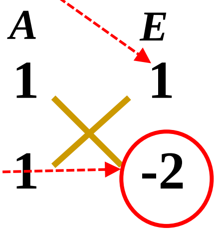
例1 已知 $A_n, A^2 = E$, 求 A^{-1}.

解: $\because\ A^2 = E$, 即 $A\,A = E$, $\therefore\ A^{-1} = A$

(1) 利用 $AB=E$ 求逆

$$(A+E)B=E$$

例2 设A是n阶方阵，满足$A^2=A$，求$(A+E)^{-1}$



解： $A^2=A \Rightarrow A^2-A=0$

$$\Rightarrow A^2-A-2E=-2E$$

$$\Rightarrow (A+E)(A-2E)=-2E$$

$$\Rightarrow (A+E)[-1/2(A-2E)]=E$$

$$\Rightarrow (A+E)^{-1}=-1/2(A-2E)$$

练习2

设方阵A满足$A^2+A-4E=0$

$$(A-E)B=E$$

证明: $A, A-E$ 都可逆, 并求它们的逆矩阵.

证明:

$$A^2+A-4E=0$$

↓

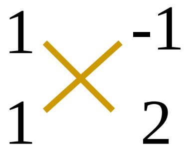
$$A(A+E)=4E$$

↓

$$A\left(\frac{A+E}{4}\right)=E$$

由定理，A可逆.

且 $A^{-1}=\dfrac{A+E}{4}$



$$A^2+A-4E=0$$

↓

$$A^2+A-2E=2E$$

↓

$$(A-E)(A+2E)=2E$$

↓

$$(A-E)\left(\frac{A+2E}{2}\right)=E$$

由定理，$A-E$可逆.

且 $(A-E)^{-1}=\dfrac{A+2E}{2}$

(2) 用待定系数法求逆

例3 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求A的逆阵.

解： 设 A 的逆矩阵为 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

则 $AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -a & -b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+c=1, \\ 2b+d=0, \\ -a=0, \\ -b=1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0, \\ b=-1, \\ c=1, \\ d=2. \end{cases}$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

求矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

一般地：当 $ad-bc\neq 0$ 时, A可逆,

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$ (由第二章的知识)

练习 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解： $ad-bc=6-10=-4\neq 0$, $\therefore$ A 是可逆阵.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{6}{-4} & \frac{-2}{-4} \\ \frac{-5}{-4} & \frac{1}{-4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

练习 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解： $ad-bc=6-10=-4\neq 0$, $\therefore$ A 是可逆阵.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{6}{-4} & \dfrac{-2}{-4}\\[2ex] \dfrac{-5}{-4} & \dfrac{1}{-4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2}\\[2ex] \dfrac{5}{4} & -\dfrac{1}{4}\end{pmatrix}$$ √

验算：

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2}\\[2ex] \dfrac{5}{4} & -\dfrac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(3) 分块对角阵的逆阵

结论： 设方阵A是分块对角阵，则A可逆，且

即 $$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix} \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

其中A_i可逆 $(i=1,2,\cdots,s)$

证明：

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

证明：

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1A_1^{-1} & & & \\ & A_2A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_sA_s^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_s \end{pmatrix}=E$$

(3) 分块对角阵的逆阵

结论： 设方阵A是分块对角阵，则A可逆，且

$$即\ A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

其中A_i可逆 $(i=1,2,\cdots,s)$

特别： $$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad 则\ A^{-1}=\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_i \neq 0$

例4 求可逆矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解: A可逆, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & n^{-1}\end{pmatrix}$

例5 设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解：

$$A=\left(\begin{array}{c:cc}5&0&0\\ \hdashline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix},$$

$$A_1=(5),$$

$$A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix},$$

$$A_1^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right);$$

$$A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&0\\0&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c:cc}1/5&0&0\\ \hdashline 0&1&-1\\0&-2&3\end{array}\right)$$

第一章 矩阵

1.3 可逆矩阵

- ✓ 逆矩阵的概念
- ✓ 逆矩阵的性质
- ✓ 逆矩阵的计算
  - (1)利用$AB=E$求逆
  - (2)待定系数法求逆
  - (3)分块对角阵求逆
  - (4)利用行列式求逆 Ch2 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$
  - (5)初等行变换求逆 1.5

第一章 矩阵

1.3 可逆矩阵

有待解决的问题：

- ✓ 逆矩阵的概念 — **方阵可逆的充要条件**
- ✓ 逆矩阵的性质
- ✓ 逆矩阵的计算 — **方阵求逆的通用方法**

例6 设三阶方阵A, B 满足关系:

$$A^{-1}BA = 6A + BA, \text{且 } A = \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ & 1/4 & \\ & & 1/7 \end{pmatrix}, \quad \text{求 } B.$$

⇩

解:

$$\underline{A^{-1}BA} - \underline{BA} = 6A \qquad (\text{右提}BA)$$

$$\Rightarrow (A^{-1} - E)B\underline{A} = 6\underline{A} \qquad (\text{两边右乘}A^{-1})$$

$$\Rightarrow (A^{-1} - E)B = 6E \qquad (\text{两边左乘}(A^{-1} - E)^{-1})$$

$$\Rightarrow B = 6(A^{-1} - E)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 4 & \\ & & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} - E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1} - E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/3 & \\ & & 1/6 \end{pmatrix}$$

例7 设 $A=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & {}^{A_1}4 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & {}_{A_2}1 & 2 \end{array}\right)$, $B=(E-A)(E+2A)^{-1}$，求 $(B-E)^{-1}$.

解:

$$\because B-E=(E-A)\underline{(E+2A)^{-1}}-\overset{E}{(E+2A)\underline{(E+2A)^{-1}}}$$ （小技巧）

$$=[(E-A)-(E+2A)](E+2A)^{-1}$$ （右提）

$$=-3A(E+2A)^{-1}$$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (B-E)^{-1}=[-3A(E+2A)^{-1}]^{-1}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{3}(E+2A)A^{-1}$$

$$A_1^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{3}(A^{-1}+2E)$$

$$A_2^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

例7 设 $A=\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&0&0\\3&\overset{A_1}{4}&0&0\\ \hline 0&0&3&4\\0&0&\overset{A_2}{1}&2\end{array}\right)$，$B=(E-A)(E+2A)^{-1}$，求 $(B-E)^{-1}$.

解：

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}\qquad A_1^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{pmatrix}$$

$$(B-E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A^{-1}+2E)\qquad A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\-1/2&3/2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&-\dfrac{1}{3}&0&0\\-\dfrac{1}{2}&-\dfrac{1}{2}&0&0\\0&0&-1&\dfrac{2}{3}\\0&0&\dfrac{1}{6}&-\dfrac{7}{6}\end{pmatrix}\Leftarrow A^{-1}=\left(\begin{array}{cc|cc}-2&1&0&0\\3/2&-1/2&0&0\\ \hline 0&0&1&-2\\0&0&-1/2&3/2\end{array}\right)$$

例8 若 $A=\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$ 求 A^{-1}. 其中 A_1, A_2 都是可逆矩阵.

解: 待定系数法

设 $A^{-1}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ 则 $AA^{-1}=\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$

$$OX_{11}+A_1X_{21}=E \rightarrow X_{21}=A_1^{-1}$$

$$OX_{12}+A_1X_{22}=O \rightarrow X_{22}=O$$

$$A_2X_{11}+OX_{21}=O \rightarrow X_{11}=O$$

$$A_2X_{12}+OX_{22}=E \rightarrow X_{12}=A_2^{-1}$$

⇩

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix}$$

作 业 习题一

授课内容	习题一
1.1 矩阵及运算	9,10 矩阵运算，11(3)(4)(5) ,13(6)(7)乘法，14(1) 矩阵运算
1.2 分块矩阵	42 分块矩阵乘法 √
1.3 可逆矩阵	34,35,36,40,41(1)(2)求逆，45(1)分块矩阵逆阵，50 √
1.4 高斯消元法	1(1)(4)消元法， 3,5消元法(含参)
1.5 矩阵秩 初等变换	30(1)(4) ,31求逆，39解矩阵方程，24(2),25秩，45(2)分块矩阵逆阵

（94, 3分）

矩阵运算

已知 $\alpha=(1,2,3),\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$, 设 $A=\alpha^T\beta$, 则 $A^n=$__________

解:

$$A=\alpha^T\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}\qquad \beta\alpha^T=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3$$

$$A^n=(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\cdots(\alpha^T\beta)=\alpha^T(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T)\cdots(\beta\alpha^T)\beta$$

$$=3^{n-1}\alpha^T\beta=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$$

（03,4分）

设 α 是3维列向量，若 $\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，则 $\alpha^T\alpha=$ **3**

解：

$$\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}(1,-1,1),\quad \therefore \alpha^T\alpha=(1,-1,1)\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=3$$

（04, 4分）

设 $A=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$, $B=P^{-1}AP$, 则 $B^{2004}-2A^{2}=$ ______

解：

$$\because B=P^{-1}AP,\quad \therefore B^{2004}=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)=P^{-1}A^{2004}P$$

$$=P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots(PP^{-1})AP$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{2}=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & 0 \\ & 0 \\ 0 \quad 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}^{2}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2} & 0 \\ 0 & (-1)^{2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

本题考查方阵幂运算：

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{n}=\begin{pmatrix} A^{n} & 0 \\ 0 & B^{n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}^{n}=\begin{pmatrix} a_1^{n} & & \\ & a_2^{n} & \\ & & a_3^{n} \end{pmatrix}$$

（04, 4分）

设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $B=P^{-1}AP$, 则 $B^{2004}-2A^2=$ ________

解：

$$\because B=P^{-1}AP,\quad \therefore B^{2004}=P^{-1}A^{2004}P$$

$$A^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=(A^2)^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^2$$

$$=\begin{pmatrix}(-1)^2&0&0\\0&(-1)^2&0\\0&0&(1)^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

本题考查方阵幂运算：

$$\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}A^n&0\\0&B^n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_1&&\\&a_1&\\&&a_1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a_1^n&&\\&a_2^n&\\&&a_3^n\end{pmatrix}$$

（04, 4分）

设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, B=P^{-1}AP,$ 则 $B^{2004}-2A^2=$ ________

解:

$$\because B=P^{-1}AP, \quad \therefore B^{2004}=P^{-1}A^{2004}P=P^{-1}EP=E$$

$$A^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^{2004}=(A^4)^{501}=E^{501}=E$$

$$A^4=E$$

$$B^{2004}-2A^2=E-2\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

本题考查方阵幂运算:

$$\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}A^n&0\\0&B^n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_1&&\\&a_1&\\&&a_1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a_1^n&&\\&a_2^n&\\&&a_3^n\end{pmatrix}$$

（96,6分）

设n阶矩阵$A = E - \xi\xi^T, \xi \neq 0$,

证明：(1) $A^2 = A \Leftrightarrow \xi^T\xi = 1$

(2) 当 $\xi^T\xi = 1$ 时，A是不可逆矩阵.

（96,6分）

设n阶矩阵$A = E - \xi\xi^T, \xi \neq 0,$

$$\xi = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \neq 0,$$

证明：(1) $A^2 = A \Leftrightarrow \xi^T\xi = 1$

证明:

$$A^2 = (E - \xi\xi^T)(E - \xi\xi^T) = E - \xi\xi^T - \xi\xi^T + \xi(\xi^T\xi)\xi^T$$

$$= E - 2\xi\xi^T + (\xi^T\xi)\xi\xi^T = E + [\xi^T\xi - 2]\xi\xi^T$$

$$A^2 = A \Leftrightarrow E + [\xi^T\xi - 2]\xi\xi^T = E - \xi\xi^T$$

$$\Leftrightarrow [\xi^T\xi - 2]\xi\xi^T = -\xi\xi^T \Leftrightarrow [\xi^T\xi - 1]\xi\xi^T = 0$$

$$\because \xi \neq 0, \ \therefore \xi\xi^T \neq 0,$$

$$\Leftrightarrow [\xi^T\xi - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \xi^T\xi = 1$$

（96,6分）

设n阶矩阵$A = E - \xi\xi^T, \xi \neq 0$,

证明：(2) 当 $\xi^T\xi = 1$ 时，A是不可逆矩阵.

证明：

反证法： 若当 $\xi^T\xi = 1$ 时，A是可逆矩阵,

$$A^2 = A \Rightarrow A^{-1}A^2 = A^{-1}A \Rightarrow A = E$$

$$A = E - \xi\xi^T = E \Rightarrow \xi\xi^T = 0 \Rightarrow \xi = 0$$

矛盾，所以A是不可逆矩阵。