第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

3.2 向量组的秩

3.3 齐次线性方程组解的结构

3.4 非齐次线性方程组解的结构

教学计划：4次课-12学时

复习

3.1 和 3.2 解决的核心问题

向量空间中任意向量的表示问题 ← 极大无关组

(1)向量与向量组的关系：$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\ \beta\in R^n$

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m \Leftrightarrow span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$$

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$$

计算1

(2)向量组的线性相关：$A:\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，若存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$

线性无关：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0\rightarrow k_1=k_2\cdots=k_m=0$

(3)向量组的极大无关组：$A:\underline{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r},\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_m$

A_0 线性无关　A中任意向量可由A_0线性表示

作用：$A=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$

(4)向量组的秩：向量组极大无关组所含向量的个数

(5)极大无关组的计算：定理3.10

计算2

定理小结

复习

定理3.3 向量β可由$A:\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$ 有解.

定理3.6 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关 $\Leftrightarrow$ $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 有非零解.

线性无关 $\Leftrightarrow$ 只有零解.

定理3.8 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$

线性相关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$

定理3.9 向量组线性无关，添加分量所得向量组仍线性无关.

定理3.10 $A\xrightarrow{\text{行变换}}B$, 则 A, B 对应列向量有相同的 线性关系.

定理3.11 矩阵的列秩 = 行秩 = $r(A)$

定理3.12 n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow$ 其行(列)向量组线性无关$\Leftrightarrow |A|\neq 0$

$\Leftrightarrow r(A)=n$

第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

3.2 向量组的秩

3.3 齐次线性方程组解的结构

3.4 非齐次线性方程组解的结构

教学计划：4次课-12学时

第三章 线性方程组

3.3 齐次线性方程组解的结构

- 齐次线性方程组解的性质
- 齐次线性方程组的基础解系、通解

复习

齐次线性方程组解的情况

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{0}$$

齐次线性方程组：$Ax = 0$

$$r(A)\begin{cases} = n, Ax = 0 \text{ 有唯一解----零解} \\ < n, Ax = 0 \text{ 有无穷多解---非零解} \end{cases}$$

阶梯阵

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad r(A) = n = 3 \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad r(A) = 2 < n = 3 \Leftrightarrow |A| = 0$$

求通解

行简化阶梯阵

设 A为n阶方阵，则 $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0$

$Ax = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

第三章 线性方程组

3.3 齐次线性方程组解的结构

- 齐次线性方程组解的性质
- 齐次线性方程组的基础解系、通解

1. 齐次线性方程组解的性质

定理3.15 设 ξ_1 及 ξ_2 都是 $Ax=0$ 的解，则 $\xi_1+\xi_2$ 也是 $Ax=0$ 的解.

证明： $\because A\xi_1=0,\quad A\xi_2=0 \qquad \therefore A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=0+0=0.$

即 $\xi_1+\xi_2$ 是 $Ax=0$ 的解.

定理3.16 设 ξ 是 $Ax=0$ 的解，k 是实数，

则 $k\xi$ 也是 $Ax=0$ 的解.

证明： $\because A(k\xi)=kA\xi=k\cdot 0=0,$

所以 $k\xi$ 是 $Ax=0$ 的解.

1. 齐次线性方程组解的性质

定理3.15 设 ξ_1 及 ξ_2 都是 $Ax=0$ 的解，则 $\xi_1+\xi_2$ 也是 $Ax=0$ 的解. ——对加法封闭

定理3.16 设 ξ 是 $Ax=0$ 的解，k 是实数，则 $k\xi$ 也是 $Ax=0$ 的解. ——对数乘封闭

结论:

(1) $Ax=0$ 解向量 ξ_1,ξ_2 的线性组合仍是它的解向量.

即 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 是 $Ax=0$ 的解.

(2) $Ax=0$ 全体解向量的集合 $S=\{x \mid Ax=0\}$ 是一个向量空间，称为齐次线性方程组的解空间.

通解 $\Leftarrow$ 极大无关组 = 基础解系

第三章 线性方程组

3.3 齐次线性方程组解的结构

- 齐次线性方程组解的性质
- 齐次线性方程组的基础解系、通解

2. 齐次线性方程组的基础解系 通解

解空间 $S=\{x \mid Ax=0\}$ 的极大无关组称为该方程组的基础解系.

基础解系的定义：

设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一组解，$A\eta_i=0$

若满足：

(1) $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性无关；

(2) $Ax=0$ 的任意解都可由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性表示，

则称 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的一组基础解系. ⇦ 如何找？

$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$ 称为 $Ax=0$ 的通解.

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 是任意常数.

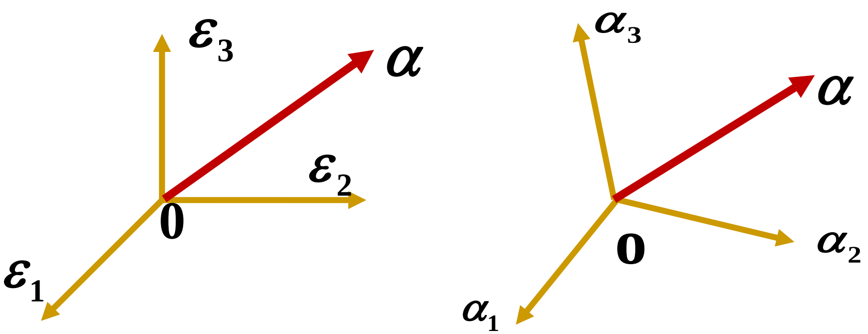
问题：如何找最简单的基础解系？

复习

例： 求 $R^3=\{(x_1,x_2,x_3)|x_i\in R\}$ 的极大无关组及秩 =3

(1) $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 是 R^3 的一个极大无关组. **最方便！**

$$\alpha=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$



(2) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 也是 R^3 的一个极大无关组.

$$\alpha=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

——求解非齐次方程组的唯一解

基础解系的最简单的求法:

$Ax=0$

设 A 为 5×6 矩阵, 且 $r(A)=3$,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{pmatrix}$$

$$Ax=0 \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基础解系的最简单的求法:

$Ax = 0$

设 A 为 5×6 矩阵, 且 $r(A)=3$,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ 0 & 1 & 0 & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ 0 & 0 & 1 & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

行简化阶梯阵

因为$Ax = 0$的有效方程个数= 3 , 所以自由变量个数= $n-r=6\text{-}3=3$,

$$Ax=0 \longrightarrow \begin{cases} x_1+b_{14}x_4+b_{15}x_5+b_{16}x_6=0 \\ x_2+b_{24}x_4+b_{25}x_5+b_{26}x_6=0 \\ x_3+b_{34}x_4+b_{35}x_5+b_{36}x_6=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1=-b_{14}x_4-b_{15}x_5-b_{16}x_6 \\ x_2=-b_{24}x_4-b_{25}x_5-b_{26}x_6 \\ x_3=-b_{34}x_4-b_{35}x_5-b_{36}x_6 \end{cases}$$

$Ax = 0$的解空间 $S=\{x \mid Ax=0\}$ 的秩= 自由变量的个数=$n\text{-}r(A)$

$Ax = 0$

基础解系的最简单的求法:

$$\begin{cases} x_1 = -b_{14}\overset{0}{x_4} - b_{15}\overset{0}{x_5} - b_{16}\overset{0}{x_6} \\ x_2 = -b_{24}x_4 - b_{25}x_5 - b_{26}x_6 \\ x_3 = -b_{34}x_4 - b_{35}x_5 - b_{36}x_6 \end{cases}$$

取 $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{14} \\ -b_{24} \\ -b_{34} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -b_{15} \\ -b_{25} \\ -b_{35} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -b_{16} \\ -b_{26} \\ -b_{36} \end{pmatrix}$$

从而得 $Ax = 0$ 的 $n-r=3$ 个解:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{14} \\ -b_{24} \\ -b_{34} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{15} \\ -b_{25} \\ -b_{35} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} -b_{16} \\ -b_{26} \\ -b_{36} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

—— 线性无关

下面证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 $Ax=0$ 解空间的一个基础解系.√

(1) 证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关

(2) 证明对 $\forall\xi\in S=\{x\,|\,Ax=0\}$ 都可由 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性表示

设 $\xi=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6)^T$

$$\xi=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\\\lambda_5\\\lambda_6\end{pmatrix}=\lambda_4\underbrace{\begin{pmatrix}-b_{14}\\-b_{24}\\-b_{34}\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\xi_1}+\lambda_5\underbrace{\begin{pmatrix}-b_{15}\\-b_{25}\\-b_{35}\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\xi_2}+\lambda_6\underbrace{\begin{pmatrix}-b_{16}\\-b_{26}\\-b_{36}\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\xi_3}$$

$$\begin{cases}x_1=-b_{14}x_4-b_{15}x_5-b_{16}x_6\\x_2=-b_{24}x_4-b_{25}x_5-b_{26}x_6\\x_3=-b_{34}x_4-b_{35}x_5-b_{36}x_6\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}\lambda_1=-b_{14}\lambda_4-b_{15}\lambda_5-b_{16}\lambda_6\\\lambda_2=-b_{24}\lambda_4-b_{25}\lambda_5-b_{26}\lambda_6\\\lambda_3=-b_{34}\lambda_4-b_{35}\lambda_5-b_{36}\lambda_6\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\lambda_4\begin{pmatrix}-b_{14}\\-b_{24}\\-b_{34}\end{pmatrix}+\lambda_5\begin{pmatrix}-b_{15}\\-b_{25}\\-b_{35}\end{pmatrix}+\lambda_6\begin{pmatrix}-b_{16}\\-b_{26}\\-b_{36}\end{pmatrix}$$

$Ax=0$

基础解系的最简单的求法:

$$\begin{cases} x_1 = -b_{14}x_4 - b_{15}x_5 - b_{16}x_6 \\ x_2 = -b_{24}x_4 - b_{25}x_5 - b_{26}x_6 \\ x_3 = -b_{34}x_4 - b_{35}x_5 - b_{36}x_6 \end{cases}$$

取 $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{14} \\ -b_{24} \\ -b_{34} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -b_{15} \\ -b_{25} \\ -b_{35} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -b_{16} \\ -b_{26} \\ -b_{36} \end{pmatrix}$

从而得 $Ax=0$ 的 $n-r=3$ 个解:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{14} \\ -b_{24} \\ -b_{34} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{15} \\ -b_{25} \\ -b_{35} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} -b_{16} \\ -b_{26} \\ -b_{36} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

—— 线性无关

—— $Ax=0$的一个基础解系

基础解系中向量个数为$n-r(A)$

$Ax=0$的基础解系唯一吗？

$Ax=0$的解空间 $S=\{x \mid Ax=0\}$ 的秩= 自由变量的个数=$n-r(A)$

$Ax = 0$

基础解系的求法:

$$\begin{cases} x_1 = -b_{14}\overset{1}{x_4} - b_{15}\overset{0}{x_5} - b_{16}\overset{0}{x_6} \\ x_2 = -b_{24}x_4 - b_{25}x_5 - b_{26}x_6 \\ x_3 = -b_{34}x_4 - b_{35}x_5 - b_{36}x_6 \end{cases}$$

取 $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{14} \\ -b_{24} \\ -b_{34} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c_{15} \\ c_{25} \\ c_{35} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c_{16} \\ c_{26} \\ c_{36} \end{pmatrix}$

从而得 $Ax = 0$ 的 $n-r=3$ 个解:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{14} \\ -b_{24} \\ -b_{34} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} c_{15} \\ c_{25} \\ c_{35} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} c_{16} \\ c_{26} \\ c_{36} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

—— 线性无关

—— $Ax=0$ 的一个基础解系

$Ax = 0$ 的基础解系不唯一

Ax = 0

基础解系的最简单的求法:

$$\begin{cases} x_1 = -b_{14}x_4 - b_{15}x_5 - b_{16}x_6 \\ x_2 = -b_{24}x_4 - b_{25}x_5 - b_{26}x_6 \\ x_3 = -b_{34}x_4 - b_{35}x_5 - b_{36}x_6 \end{cases}$$

取 $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{14} \\ -b_{24} \\ -b_{34} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -b_{15} \\ -b_{25} \\ -b_{35} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -b_{16} \\ -b_{26} \\ -b_{36} \end{pmatrix}$

从而得 $Ax = 0$ 的 $n-r=3$ 个解:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{14} \\ -b_{24} \\ -b_{34} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{15} \\ -b_{25} \\ -b_{35} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} -b_{16} \\ -b_{26} \\ -b_{36} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

—— 线性无关

—— $Ax = 0$的一个基础解系

基础解系中向量个数为$n-r(A)$

$Ax = 0$的解空间 $S = \{x \mid Ax = 0\}$ 的秩= 自由变量的个数 $= n-r(A)$

定理3.17

设 A是 $m\times n$矩阵，且 $r(A)=r$，则 $Ax=0$ 的基础解系由 $n-r$ 个向量组成.

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r(A)}$ 是 $Ax=0$ 基础解系

则其通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r(A)}\xi_{n-r(A)}$

例1 求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0 \\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = 2/7\,c_1 + 3/7\,c_2 \\ x_2 = 5/7\,c_1 + 4/7\,c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 = 2/7\,x_3 + 3/7\,x_4 \\ x_2 = 5/7\,x_3 + 4/7\,x_4 \end{cases}$$

行简化阶梯阵

$r(A)=2,$ 自由变量个数 $= n - r(A) = 2$

基础解系： $\xi_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 通解： $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例2 求解 $\begin{cases} 3x_1+6x_2+2x_3+12x_4-x_5=0 \\ -2x_1-4x_2-x_3-5x_4+x_5=0 \\ 2x_1+4x_2+2x_3+19x_4+x_5=0 \\ 6x_1+12x_2+6x_3+47x_4+x_5=0 \end{cases}$ $r(A)=3$

解

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 12 & -1 \\ -2 & -4 & -1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 19 & 1 \\ 6 & 12 & 6 & 47 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 19 & 1 \\ 6 & 12 & 6 & 47 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯阵

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行简化阶梯阵

例2 求解 $\begin{cases} 3x_1+6x_2+2x_3+12x_4-x_5=0 \\ -2x_1-4x_2-x_3-5x_4+x_5=0 \\ 2x_1+4x_2+2x_3+19x_4+x_5=0 \\ 6x_1+12x_2+6x_3+47x_4+x_5=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1=-2x_2-3x_4 \\ x_3=\quad\quad -4x_4 \\ x_5=\quad\quad -5x_4 \end{cases}$$

解

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 12 & -1 \\ -2 & -4 & -1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 19 & 1 \\ 6 & 12 & 6 & 47 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 \\ 0 & & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$r(A)=3 \quad n-r(A)=5-3=2$

通解: $x=k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} \quad \xi_2=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

例3. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = 0 \end{cases}$

讨 a, b, c 满足何种关系时, 方程组只有零解? 有非零解?

设 A_n，$Ax = 0$ 的解的情况： 若 $|A| \neq 0$, 只有零解

若 $|A| = 0$, 有无穷多非零解

例3. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = 0 \end{cases}$

讨 a, b, c 满足何种关系时, 方程组只有零解? 有非零解?

$|A| \neq 0,\quad |A| = 0$

解:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

1) 当 a, b, c 互不相等时, $|A| \neq 0$, 方程组只有零解.

2) 当 $a = b = c$ 时, $|A| = 0$, 方程组有非零解. 方程组为:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$n - r = 3 - 1 = 2$

通解为 $x = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

基础解系中向量个数为 $n - r = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = 0 \end{cases}$$

2) 当 $a = b = c$ 时, $|A| = 0$, 方程组有非零解.

3) 当 $a = b \neq c$ 时, $|A| = 0$, 方程组有非零解.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & c \\ a^2 & a^2 & c^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & c^2-a^2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$n - r = 3 - 2 = 1$ 基础解系中向量个数为 $n - r = 1$

通解为 $x = k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 类似地,可处理下述两种情况: 1) $a = c \neq b$

2) $b = c \neq a$

例3. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = 0 \end{cases}$

讨 a, b, c 满足何种关系时, 方程组只有零解? 有非零解?

解:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

1) 当 a, b, c 互不相等时, $|A| \neq 0$, 方程组只有零解.

2) 当 $a = b = c$ 时, $|A| = 0$, 方程组有非零解: $x = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$n - r = 3 - 1 = 2$ 解空间的维数为 2

3) 当 $a = b \neq c$ 时, $|A| = 0$, 方程组有非零解: $x = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$n - r = 3 - 2 = 1$ 解空间的维数为 1

第三章 线性方程组

3.3 齐次线性方程组解的结构

- 齐次线性方程组解的性质
- 齐次线性方程组的基础解系、通解

第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

3.2 向量组的秩

3.3 齐次线性方程组解的结构

3.4 非齐次线性方程组解的结构

第三章 线性方程组

3.4 非齐次线性方程组解的结构

- 非齐次线性方程组解的情况
- 非齐次线性方程组解的性质
- 非齐次线性方程组的通解

复习

非齐次线性方程组解的情况

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 10x_3 = 1 \end{cases}$$

非齐次线性方程组：$Ax = b$

$$Ax = b \text{ 有解} \Leftrightarrow r(A) = r(A,b)\begin{cases} = n, \text{有唯一解} \\ < n, \text{有无穷解} \end{cases}$$

$Ax = b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A) < r(A,b)$ 有矛盾方程

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array} \\ (A,b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

$|A| \neq 0$

$r(A) = r(A,b) = n = 3$ 求唯一解

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A) = r(A,b) = 2 < n = 3$ $|A| = 0$

求通解

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2 < r(A,b) = 3$ $|A| = 0$

矛盾方程

第三章 线性方程组

3.4 非齐次线性方程组解的结构

- 非齐次线性方程组解的情况
- 非齐次线性方程组解的性质
- 非齐次线性方程组的通解

非齐次线性方程组解的性质

定理3.18 设 η_1 及 η_2 都是 $Ax=b$ 的解，则 $\eta_1-\eta_2$ 是对应的齐次方程组 $Ax=0$ 的解.

证明 $\because A\eta_1=b,\quad A\eta_2=b$

$$\therefore A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=b-b=0.$$

即 $\eta_1-\eta_2$ 是 $Ax=0$ 的解.

定理3.19 设 η 是 $Ax=b$ 的解，ξ 是 $Ax=0$ 的解，则 $\eta+\xi$ 仍是 $Ax=b$ 的解.

证明 $A(\eta+\xi)=A\eta+A\xi=b+0=b,$

即 $\eta+\xi$ 是 $Ax=b$ 的解.

非齐次线性方程组解的性质

$Ax = b$	$Ax = 0$
$\eta_1 \quad \eta_2$	$\eta_1 - \eta_2$
η	ξ
$\eta + \xi$	

第三章 线性方程组

3.4 非齐次线性方程组解的结构

- 非齐次线性方程组解的情况
- 非齐次线性方程组解的性质
- 非齐次线性方程组的通解

非齐次线性方程组的通解：$r(A)=r(A,b)<n$, $Ax=b$ 有无穷解

设 $r(A)=r$, 则 $\boxed{Ax=b}$ 的通解为：

不是向量空间

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*$$

其中 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 是 $\boxed{Ax=0}$ 的通解，

η^*是 $Ax=b$ 的任意一个特解.

向量空间

证明：设 x 是 $Ax=b$ 的任意解，η^*是 $Ax=b$ 的某一特解，

$\therefore x-\eta^*$ 是 $Ax=0$ 的任意解，定理3.18

$\therefore x-\eta^*$ 是 $Ax=0$ 的基础解系的线性组合，

$$\text{即 } x-\eta^* = k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*$$

$Ax=b$ 的通解 = $Ax=0$的通解 +$Ax=b$的特解

例1 求解方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2. \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + c_2 + 1/2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = \quad 2c_2 + 1/2 \\ x_4 = \quad c_2 \end{cases}$$

解

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & \\ 0 & & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix} \end{array}$$

行简化阶梯阵

$n-r$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_3 = \quad 2x_4 + 1/2 \end{cases}$$ 非齐次

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = \quad 2x_4 \end{cases}$$ 齐次

$r(A) = r(A,b) = 2 < 4$ 故方程组有无穷多解

特解 基础解系 通解

$$\eta^* = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Ax = b$ 的通解 $=$ $Ax = 0$ 的通解 $+$ $Ax = b$ 的特解

例2 线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-5x_4=-1 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-6x_4=5 \\ 0x_1-x_2+bx_3-3x_4=-3 \\ x_1-x_2+0x_3+ax_4=8 \end{cases}$ 讨论a,b取何值时，方程组无解?有唯一解?有无穷多解?

解

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & -6 & 5 \\ 0 & -1 & b & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & a & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & b-3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 2 \end{pmatrix}$$

阶梯阵

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

设 A_n, $Ax=b$ 的解的情况:

若 $|A|\neq 0$, 有唯一解

若 $|A|=0$, $r(A)<n$ $\begin{cases} r(A)=r(A,b)<n, & \text{有无穷多解} \\ r(A)<r(A,b), & \text{无解} \end{cases}$

例2 线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-5x_4=-1 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-6x_4=5 \\ 0x_1-x_2+bx_3-3x_4=-3 \\ x_1-x_2+0x_3+ax_4=8 \end{cases}$ 讨论a,b取何值时，方程组无解?有唯一解?有无穷多解?

解

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & -6 & 5 \\ 0 & -1 & b & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & a & 8 \end{pmatrix} \to \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & b-3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{matrix}}\ \begin{matrix} -1 \\ 7 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}\right)$$

1)当 $a\neq-1$, $b\neq3$ 时, $|A|\neq0$ 即 $r(A)=r(A,b)=4=n$, 方程组有唯一解.

2)当 $a=-1$, b 任意时, $|A|=0$ 即 $r(A)=3, r(A,b)=4$, 方程组无解.

3)当 $b=3$ 时, 有

$|A|=0$

$$(A,b)\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4a-2 \end{pmatrix}$$

3)当$b=3$时,有

$|A|=0$

$$(A,b)\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-5&-1\\0&1&-3&4&7\\0&0&0&1&4\\0&0&0&a+1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-5&-1\\0&1&-3&4&7\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&-4a-2\end{pmatrix}$$

(1)当 $a\neq-0.5$ 时, $r(A)=3<r(A,b)=4$, 方程组无解.

(2)当 $a=-0.5$ 时, $r(A)=r(A,b)=3<4$, 方程组有无穷多解.

$$(A,b)\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-5&-1\\0&1&-3&4&7\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}x_1&x_2&x_3&x_4&\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&&0&\\0&1&&0&\\0&0&&1&\\0&0&0&0&\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\begin{cases}x_1=3x_3+1\\x_2=3x_3-9\\x_4=\quad\quad 4\end{cases}$$

$n-r(A)=1$

故通解为
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}3\\3\\1\\0\end{pmatrix}\begin{array}{c}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{array}+\begin{pmatrix}1\\-9\\0\\4\end{pmatrix}$$

$Ax=0$ 的通解 $\quad Ax=b$ 的特解

例2 线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-5x_4=-1 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-6x_4=5 \\ 0x_1-x_2+bx_3-3x_4=-3 \\ x_1-x_2+0x_3+ax_4=8 \end{cases}$ 讨论a,b取何值时，方程组无解?有唯一解?有无穷多解?

解

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & -6 & 5 \\ 0 & -1 & b & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & a & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & b-3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 2 \end{pmatrix}$$

1)当$a\neq -1, b\neq 3$时,方程组有唯一解.

2)当$a=-1, b$ 任意时，方程组无解.

3)当$b=3$时,有

(1)当 $a\neq -0.5$ 时, 方程组无解.

(2)当 $a=-0.5$ 时, 方程组有无穷多解.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

第三章 线性方程组

3.4 非齐次线性方程组解的结构

- 非齐次线性方程组解的情况
- 非齐次线性方程组解的性质
- 非齐次线性方程组的通解

第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

3.2 向量组的秩

3.3 齐次线性方程组解的结构

3.4 非齐次线性方程组解的结构

第三章 作业

授课内容	习题二
3.1(1)向量定义与运算	1,2 向量运算， 1(1)(2)（P162 习题三）
3.1(2) 向量与向量组的关系	3,4 线性表示
3.1(3) 线性相关性	5(1)(2)(3), 6, 9,10,12,13线性相关与线性无关
3.2(1)(2)极大无关组，秩	22(2)(3), 23极大无关组
3.3 齐次方程组解的结构	31(1)(3)
3.4 非齐次方程组解的结构	32(1)(2),33,40,44

（02,6分）

已知4阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为4维列向量，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$, 如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 求解方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

$Ax=0$ $\qquad$ $Ax=\beta$

解：非齐次的通解 = 齐次的通解 + 非齐次的特解

由于 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，且 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$ $\therefore r(A)=3$

因此 $Ax=0$ 的基础解系中向量个数 = $n - r(A)=4-3=1$

因此找 $Ax=0$ 的一个非零解：

$$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3 \Rightarrow \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0 \Rightarrow \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+0\alpha_4=0$$

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=0 \Leftrightarrow Ax=0$$

因此 $Ax=0$ 的基础解系是 $(1,-2,1,0)^T$

（02,6分）

已知4阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为4维列向量，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$, 如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 求解方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

解：非齐次的通解 = 齐次的通解 + 非齐次的特解

$$\underset{Ax=\beta}{\text{非齐次的通解}} = \underset{Ax=0}{\text{齐次的通解}} + \text{非齐次的特解}$$

$Ax=0$ 的基础解系是 $(1,-2,1,0)^T$

因为 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=\beta$

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta \Leftrightarrow Ax=\beta$ 特解 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

所以 $Ax=\beta$ 的通解是 $x=k\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}}_{Ax=0\text{ 的通解}}+\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{Ax=b\text{ 的特解}}$ 其中 k 为任意常数.

（00, 3分）

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是4元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解向量，且 $r(A)=3$，$\alpha_1=(1,2,3,4)^T,\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^T$，$c$ 表示任意常数，则方程组 $Ax=b$ 的通解是 (C)

$Ax=0$ 的通解 $Ax=b$ 的特解

(A) $c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ (B) $c\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ (C) $c\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ (D) $c\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$

解：由于 $Ax=0$ 的基础解系中向量个数 $=n\text{-}r(A)=4-3=1$,

$$A\alpha_1=b,\ A\alpha_2=b,\ A\alpha_3=b\Rightarrow A(2\alpha_1)=2b,\ A(\alpha_2+\alpha_3)=2b,$$

$$\Rightarrow A[2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)]=0$$

$\Rightarrow 2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)$ 是 $Ax=0$ 的非零解向量

$$2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)=2(1,2,3,4)^T-(0,1,2,3)^T=(2,3,4,5)^T$$

故应选(C)

（11, 4分）

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是3元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的3个线性无关的解，则方程组 $Ax=b$ 的通解是 ________

$Ax=0$ 的通解 $\quad$ $Ax=b$ 的特解

(A) $k_1(\alpha_2-\alpha_1)+\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2}$ ×

(B) $k_1(\alpha_2-\alpha_1)+\dfrac{\alpha_2-\alpha_3}{2}$ ×

(C) $\underline{k_1(\alpha_2-\alpha_1)+k_2(\alpha_3-\alpha_1)}+\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2}$

(D) $k_1(\alpha_2-\alpha_1)+k_2(\alpha_3-\alpha_1)+\dfrac{\alpha_2-\alpha_3}{2}$

解：因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $Ax=b$ 的3个的解，$\therefore A\alpha_1=b, A\alpha_2=b, A\alpha_3=b$

$\therefore A(\alpha_2-\alpha_1)=0, A(\alpha_3-\alpha_1)=0,$ 所以 $\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$ 是 $Ax=0$ 的2个解。

$$k_1(\alpha_2-\alpha_1)+k_2(\alpha_3-\alpha_1)=0\Rightarrow -(k_1+k_2)\alpha_1+k_1\alpha_2+k_2\alpha_3=0\Rightarrow -(k_1+k_2)=k_1=k_2=0$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以 $\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$ 线性无关，

是 $Ax=0$ 的2个线性无关的解. 而 $Ax=0$ 的基础解系中向量个数

$$n-r(A)=3-r(A)\geq 2\Rightarrow r(A)\leq 1 \text{ 显然 } r(A)\geq 1, \therefore r(A)=1$$

因此 $Ax=0$ 的基础解系中向量个数为2个，即为 $\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$

（11, 4分）

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是3元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的3个线性无关的解，则方程组 $Ax=b$ 的通解是 ___(C)___

(A) $k_1(\alpha_2-\alpha_1)+\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2}$ ×

(B) $k_1(\alpha_2-\alpha_1)+\dfrac{\alpha_2-\alpha_3}{2}$ ×

$Ax=0$ 的通解 $Ax=b$ 的特解

(C) $\underline{k_1(\alpha_2-\alpha_1)+k_2(\alpha_3-\alpha_1)}+\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2}$

(D) $k_1(\alpha_2-\alpha_1)+k_2(\alpha_3-\alpha_1)+\dfrac{\alpha_2-\alpha_3}{2}$

解：因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $Ax=b$ 的3个的解，

$$A\alpha_2=b, A\alpha_3=b \Rightarrow A(\alpha_2+\alpha_3)=2b \Rightarrow A\left(\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\right)=b,$$

因此 $Ax=b$ 的一个特解为 $\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2}$ ，故应选(C)

（00, 3分）

已知3元线性方程组 $Ax=b$ 无解，则 $a=$ <u>-1</u>，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}.$$

解1：方程组 $Ax=b$ 无解 $\Rightarrow |A|=0$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-1&a\\0&a-2&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&a\\a-2&-3\end{vmatrix}=-(a-3)(a+1)=0$$

$$\Rightarrow a=3,a=-1$$

当 $a=3$ 时，$r(A)=r(A,b)=2<3$，方程组有无穷解

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&5&3\\1&3&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&3&1\\0&1&-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

（00, 3分）

已知3元线性方程组 $Ax=b$ 无解，则 $a=$ <u>-1</u>，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}.$$

解2：方程组 $Ax=b$ 无解的充要条件为 $r(A)<r(A,b)$

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-2&-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&-a&-1\\0&a-2&-3&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&-a&-1\\0&0&a^2-2a-3&a-3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a^2-2a-3=0,\ a-3\neq 0\Rightarrow (a-3)(a+1)=0,\ a\neq 3\Rightarrow a=-1$$

第5题 判别下列向量组是否线性相关：

(1) $(1,1,1),(1,2,3),(1,3,6)$; 向量组(1)线性无关

解：$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}=1\neq 0$

(2) $(1,2,3,4),(1,0,1,2),(3,-1,-1,0),(1,2,0,5)$; 向量组(2)线性无关

解：$\begin{vmatrix}1&1&3&1\\2&0&-1&2\\3&1&-1&0\\4&2&0&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3&1\\2&0&-1&2\\2&0&-4&-1\\2&0&-6&3\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&-1&2\\1&-4&-1\\1&-6&3\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&-3&-3\\0&-5&1\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1\\-5&1\end{vmatrix}=36\neq 0$

(3) $(1,1,1),(0,2,5),(1,3,6)$; 向量组(3)线性相关

解：$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&2&3\\1&5&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&5&5\end{vmatrix}=0$

第6题

证明：若 α_1,α_2 线性无关，则 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2$ 也线性无关.

证明： $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_1-\alpha_2)=0$

$$(k_1+k_2)\alpha_1+(k_1-k_2)\alpha_2=0$$

因为 α_1,α_2 线性无关，故 $\begin{cases} k_1+k_2=0 \\ k_1-k_2=0 \end{cases}$

$\because \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ 所以，齐次方程组只有零解，即

$$k_1=k_2=0$$

所以，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2$ 线性无关。

第9题

证明：若 α,β 线性相关的充要条件是它们的分量对应成比例.

证明：设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots b_n)$,

α,β 线性相关的充要条件是存在不全零的数 λ,μ

使得 $\lambda\alpha+\mu\beta=0$　不妨设 $\lambda\neq 0$　则 $\alpha=-\dfrac{\mu}{\lambda}\beta$

即 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}=-\dfrac{\mu}{\lambda}$　即它们的分量对应成比例.

第10题

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，

证明： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性无关.

证明：

设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n+k\beta=0$

若 $k\neq 0$, 则 $\beta=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\frac{k_2}{k}\alpha_2-\cdots-\frac{k_2}{k}\alpha_n$

矛盾，所以 $k=0$.

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，所以 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性无关.

第12题

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，问参数 s, t 满足什么条件时，$s\alpha_2-\alpha_1, t\alpha_3-\alpha_2, \alpha_1-\alpha_3$ 也线性无关？

解：设 $k_1(s\alpha_2-\alpha_1)+k_2(t\alpha_3-\alpha_2)+k_3(\alpha_1-\alpha_3)=0,$

$$(-k_1+k_3)\alpha_1+(sk_1-k_2)\alpha_2+(tk_2-k_3)\alpha_3=0,$$

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故 $\begin{cases}-k_1+0k_2+k_3=0\\ sk_1-k_2+0\,k_3=0\\ 0k_1+tk_2-k_3=0\end{cases}$

$$\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ s & -1 & 0\\ 0 & t & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ s & -1 & 0\\ -1 & t & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}s & -1\\ -1 & t\end{vmatrix}=st-1$$

当 $st\neq1$ 时，可得 $k_1=k_2=k_3=0$, 此时 $s\alpha_2-\alpha_1, t\alpha_3-\alpha_2, \alpha_1-\alpha_3$ 线性无关

第13题

设 $\alpha=(1,2,a)^T$，$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ b & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$，问 a, b 满足什么条件时，$\alpha, A\alpha$ 线性相关？

解：

因 $A\alpha=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ b & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ a+b+2\\ 4\end{pmatrix}$

由于 $\alpha, A\alpha$ 线性相关充要条件是它们分量对应成比例，

即 $\frac{1}{a}=\frac{2}{a+b+2}=\frac{a}{4}$ 解得 $a=2,b=0$ 或 $a=-2,b=-4$