

实验四 刚体转动惯量的测定

转动惯量的测定，在涉及刚体转动的机电制造、航空、航天、航海、军工等工程技术和科学研究中具有十分重要的。测定转动惯量常采用扭摆法或恒力矩转动法，本实验采用恒力矩转动法测定转动惯量。

一、实验目的

1、学习用恒力矩转动法测定刚体转动惯量的原理和方法。

2、观测刚体的转动惯量随其质量，质量分布及转轴不同而改变的情况，验证平行轴定理。

二、实验仪器

转动惯量实验仪，通用计数器，砝码和挂钩，待测试样、水平仪等。

三、实验原理

1、恒力矩转动法测定转动惯量的原理

根据刚体的定轴转动定律：

$$M = J\beta \quad (1)$$

只要测定刚体转动时所受的合外力矩 M 及该力矩作用下刚体转动的角加速度 β ，则可计算出该刚体的转动惯量 J 。

设以某初始角速度转动的空实验台转动惯量为 J_1 ，未加砝码时，在摩擦阻力矩 M_μ 的作用下，实验台将以角加速度 β_1 作匀减速运动，即：

$$-M_\mu = J_1\beta_1 \quad (2)$$

将质量为 m 的砝码用细线绕在半径为 R 的实验台塔轮上，并让砝码下落，系统在恒外力矩作用下将作匀加速运动。若砝码的加速度为 a ，则细线所受张力为 $T = m(g - a)$ 。其中 m 是砝码和托盘或挂钩的质量之和。若此时实验台的角加速度为 β_2 ，则绕线塔轮边沿处的切向加速度 $a_\tau = a = R\beta_2$ 。经线施加给实验台的力矩为 $TR = m(g - R\beta_2)R$ ，此时有：

$$m(g - R\beta_2)R - M_\mu = J_1\beta_2 \quad (3)$$

将 (2)、(3) 两式联立消 M_μ 后，可得：
$$J_1 = \frac{mR(g - R\beta_2)}{\beta_2 - \beta_1} \quad (4)$$

同理，若在实验台上加上被测物体后系统的转动惯量为 J_2 ，加砝码前后的角加速度分

$$\text{别为 } \beta_3 \text{ 与 } \beta_4, \text{ 则有: } J_2 = \frac{mR(g - R\beta_4)}{\beta_4 - \beta_3} \quad (5)$$

$$\text{由转动惯量的迭加原理可知, 被测试件的转动惯量 } J_3 \text{ 为: } J_3 = J_2 - J_1 \quad (6)$$

测得 R 、 m 及 β_1 、 β_2 、 β_3 、 β_4 , 由 (4), (5), (6) 式即可计算被测试件的转动惯量。

2、 β 的测量

实验中采用通用计数器计录遮挡次数和相应的时间。固定的载物台圆周边缘相差 π 角的两遮光细棒, 每转动半圈遮挡一次固定在底座上的光电门, 即产生一个计数光电脉冲, 计数器计下遮挡次数 k 和相应的时间 t 。若从第一次挡光 ($k=0, t=0$) 开始计次, 计时, t_m 作为第 k_m 次遮挡时所用的总时间, 且初始角速度为 ω_0 , 则对于匀变速运动中测量得到的任意两组数据 (k_m, t_m) , (k_n, t_n) , 相应的角位移 $\Delta\theta_m$, $\Delta\theta_n$ 分别为:

$$\Delta\theta_m = k_m\pi = \omega_0 t_m + \frac{1}{2}\beta \cdot t_m^2 \quad (7)$$

$$\Delta\theta_n = k_n\pi = \omega_0 t_n + \frac{1}{2}\beta \cdot t_n^2 \quad (8)$$

从 (7)、(8) 两式中消去 ω_0 , 可得:

$$\beta = \frac{2\pi(k_n t_m - k_m t_n)}{t_n^2 t_m - t_m^2 t_n} \quad (9)$$

由 (9) 式即可计算角加速度 β 。

关于计算角加速度 β , 最好测出角位移 θ 和时间 (时刻) t 的关系, 通过曲线拟合计算匀加速或者匀减速时的角加速度。

3、平行轴定理

理论分析表明, 质量为 m 的物体围绕通过质心的转轴转动时的转动惯量 J_c 最小。当转轴平行移动距离 d 后, 绕新转轴转动的转动惯量为:

$$J_{\text{平行}} = J_c + md^2 \quad (10)$$

在上式等式两端都加上系统支架的转动惯量 J_0 ，则有：

$$J_{\text{平行}} + J_0 = J_c + J_0 + md^2$$

令 $J_{\text{平行}} + J_0 = J$ ，又 J_c ， J_0 都为定值，则台与待测物的总转动惯量 J 与 d^2 呈线性关系，实验中若测得此关系，则验证了平行轴定理。

四、J 的“理论”公式

设待测的圆盘（或圆柱）质量为 m 、半径为 R ，则圆盘、圆柱绕几何中心轴的转动惯量理论值为

$$J = \frac{1}{2} mR^2 \quad (11)$$

待测的圆环质量为 m ，内外半径分别为 $R_{\text{内}}$ 、 $R_{\text{外}}$ ，圆环绕几何中心轴的转动惯量理论值为

$$J = \frac{m}{2} (R_{\text{外}}^2 + R_{\text{内}}^2) \quad (12)$$

四、实验仪器

1、转动惯量实验仪

转动惯量实验仪如图 1 所示，绕线塔轮通过特制的轴承安装在主轴上，使转动时的摩擦力矩很小。载物台用螺钉与塔轮连接在一起，随塔轮转动。随仪器配的被测试样有 1 个圆盘，1 个圆环，两个圆柱；圆柱试样可插入载物台上的不同孔由内向外半径 $d=50\text{mm}$ 或 $d=75\text{mm}$ ，便于验证平行轴定理。小滑轮的转动惯量与实验台相比可忽略不计。2 只光电门 1 只作测量，1 只作备用。

仪器的主要技术参数如下：

- (1) 塔轮半径为 15, 20, 25, 30mm 共 4 挡；
- (2) 挂钩（45g）和 5g、10g、20g 的砝码组合，产生大小不同的力矩；
- (3) 圆盘：质量约 486g，半径 $R=100\text{mm}$ ；
- (4) 圆环：质量约 460g，外半径 $R_{\text{外}}=100\text{mm}$ ，内半径 $R_{\text{内}}=90\text{mm}$ ；
- (5) 圆柱体： $R=15\text{mm}$ ， $h=25\text{mm}$ 。

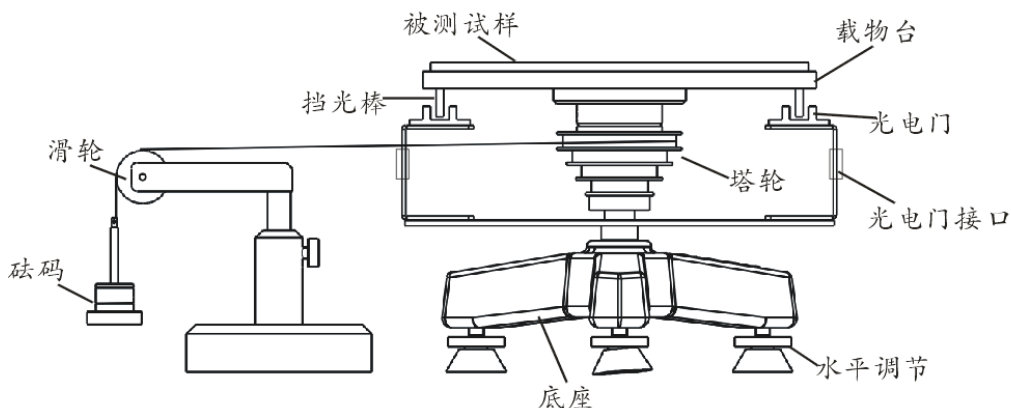


图 1. 转动惯量实验仪

2、通用计数器使用方法

1、将一只光电门与计数器的传感器 I（或光电门 I）连接起来，检查载物台下方的两个挡光棒在转台旋转过程中是否有效触发光电门。

2、开启计数器电源，进入角加速度测量功能，将“设置次数”设定为 50 次，由于挡光棒选择的是两只，所以将“设置弧度”设定为 1π 。

3、参数设定好后，按“开始”准备测量；然后释放砝码，载物台开始旋转同时计数器开始计时，挡光棒没经过光电门一次，计数次数+1，直到达到设定的次数为 50 次时停止计时，并自动测试出 B1（匀加速阶段的角加速度）和 B2（匀减速阶段的角加速度），B1 和 B2 是通过测得的数据，单片机内部通过数据拟合得到，准确度较高。

4、数据测试完后，可以按“保存”对数据进行存储，点击进入“数据查询”功能，可以查询测量的数据，数据中的 t01-t50 为对应的 n 次挡光总时间，根据时间和弧度关系，也可以计算匀加速阶段的角加速度 B1 和匀减速阶段的角加速度 B2，可以借助 Excel 完成。

5、关于计数器的详细使用说明请参见《DHTC-1A 通用计数器》使用说明书。

五、实验内容及步骤

1、实验准备

在桌面上放置转动惯量实验仪，并利用基座上的调平螺钉，将仪器调平（用水平仪）。将滑轮支架放置在实验台面边缘，调整滑轮高度及方位，使滑轮槽与选取的绕线塔轮槽等高，且其方位相互垂直，如图 1 所示。

将实验仪中的 1 路光电门与计数器的传感器 I（或光电门 I）连接起来，另外 1 路光电门备用；挡光棒 2 只， 180° 均布；将计数器测量次数设定为 50 次，弧度设置为 π ，然后开始试验。

2、测量并计算实验台的转动惯量 J_1

(1) 测量 β_1 和 β_2

调整实验台位置使绕线放完时，托盘或挂钩恰好落到地面，调水平。选择塔轮半径

$R = 15\text{mm}$ 及 $m_{\text{砝码}}$ 质量分别为 50g、55g、65g，将细线一端沿塔轮不重叠的密绕于所选定半径的轮上，另一端通过滑轮连接砝码托上的挂钩或托盘上，用手将载物台稳住；按计数器“开始”键使仪器进入工作等待状态；释放载物台，砝码重力产生的恒力矩使实验台产生匀加速转动；当绕线释放完毕后，载物台将在系统阻力的作用下作匀减速运动。

(2) 计时完毕后，记录计数器测出的 B1 和 B2，分别对应匀加速阶段的角加速度 β_1 和匀减速阶段的角加速度 β_2 ，由(4)式即可算出 J_1 的值。

3、测量并计算载物台放上试样后的转动惯量 J_2 ，计算试样的转动惯量 J_3 并与理论值比较。将待测试样放上载物台并使试样几何中心轴与转轴中心重合，按与测量 J_1 同样的方法可分别测量未加砝码时的匀减速阶段角加速度 β_3 与加砝码后的匀加速阶段的角加速度 β_4 。由(5)式可计算 J_2 ，由(6)式可计算试样的转惯量 J_3 。

已知圆盘、圆柱绕几何中心轴转动的转动惯量理论值为： $J_c = mR^2 / 2$ (11)

圆环绕几何中心轴的转动惯量理论值为： $J_c = \frac{m}{2}(R_{\text{外}}^2 + R_{\text{内}}^2)$ (12)

4、验证平行轴定理

将两圆柱体对称插入载物台上与中心距离为 d 的圆孔中，测量并计算两圆柱体在此位置的转动惯量。将测量值与由(11)、(10)式所得的计算值比较，若一致即验证了平行轴定理。

5、选择不同的塔轮半径 R，重复 1-4 的实验。

六、注意事项

- 1、绕线放完时，托盘或挂钩恰好落到地面。绕线要紧密且不能重叠。
- 2、滑轮绕线水平，其延长线过塔轮切线位置。旋紧挡光棒，防止触碰光电门。
- 3、释放砝码瞬间，挡光棒不要离光电门太近，避免误触发。
- 4、圆柱体测量时，转速不要过快，防止圆柱体脱落（砝码可以加得小一点）。
- 5、计算牵引力矩 $m_{\text{砝码}}$ 为砝码挂钩和砝码质量的总和。

实验数据记录

表 1 测量实验台的角加速度

	R 塔轮=15mm					
	m 砝码=50g		m 砝码=55g		m 砝码=65g	
数据组	$\beta_1(\text{rad/s}^2)$	$\beta_2(\text{rad/s}^2)$	$\beta_1(\text{rad/s}^2)$	$\beta_2(\text{rad/s}^2)$	$\beta_1(\text{rad/s}^2)$	$\beta_2(\text{rad/s}^2)$
1						
2						
3						
平均值						
J_1						

表 1 中 $J_1 = \frac{mR(g - R\beta_2)}{\beta_2 - \beta_1}$ 。(m 为砝码质量, R 为塔轮半径)

表 2 测量实验台加圆盘试样后的角加速度

	R 圆盘=100mm, m 圆盘=485.9g					
	R 塔轮=15mm					
	m 砝码=50g		m 砝码=55g		m 砝码=65g	
数据组	$\beta_3(\text{rad/s}^2)$	$\beta_4(\text{rad/s}^2)$	$\beta_3(\text{rad/s}^2)$	$\beta_4(\text{rad/s}^2)$	$\beta_3(\text{rad/s}^2)$	$\beta_4(\text{rad/s}^2)$
1						
2						
3						
平均值						
J_2						
$J_3 = J_2 - J_1$						
理论值 J_3'						
误差						

表 2 中 J_1 为表 1 中对应的计算值;

表 2 中 $J_2 = \frac{mR(g - R\beta_4)}{\beta_4 - \beta_3}$; (m 为砝码质量, R 为塔轮半径)

表 2 中, J_3' 为圆盘转动惯量的理论值, 其计算公式如下:

$$J_3' = \frac{1}{2} m_{\text{圆盘}} R_{\text{圆盘}}^2$$

表 3 测量实验台加圆环试样后的角加速度

	R _外 =100mm, R _内 =90mm, m _{圆环} =460.6g					
	R _{塔轮} =15mm					
	m _{砝码} =50g		m _{砝码} =55g		m _{砝码} =65g	
数据组	$\beta_3(\text{rad/s}^2)$	$\beta_4(\text{rad/s}^2)$	$\beta_3(\text{rad/s}^2)$	$\beta_4(\text{rad/s}^2)$	$\beta_3(\text{rad/s}^2)$	$\beta_4(\text{rad/s}^2)$
1						
2						
3						
平均值						
J ₂						
J ₃ =J ₂ -J ₁						
理论值 J ₃ '						
误差						

表 3 中 J₁ 为表 1 中对应的计算值；

表 3 中 $J_2 = \frac{mR(g - R\beta_4)}{\beta_4 - \beta_3}$ ；(m 为砝码质量，R 为塔轮半径)

表 2 中，J₃' 为圆环转动惯量的理论值，其计算公式如下： $J_3' = \frac{1}{2}m_{\text{圆环}}(R_{\text{外}}^2 + R_{\text{内}}^2)$

表 4 测量两圆柱试样中心与转轴距离 d 时的角加速度

	R _{圆柱} =15mm, m _{圆柱} =138g, d=75mm					
	R _{塔轮} =15mm					
	m _{砝码} =50g		m _{砝码} =55g		m _{砝码} =65g	
数据组	$\beta_3(\text{rad/s}^2)$	$\beta_4(\text{rad/s}^2)$	$\beta_3(\text{rad/s}^2)$	$\beta_4(\text{rad/s}^2)$	$\beta_3(\text{rad/s}^2)$	$\beta_4(\text{rad/s}^2)$
1						
2						
3						
平均值						
J ₂						
J ₃ =(J ₂ -J ₁)/2						
理论值 J ₃ '						
误差						

表 4 中 J₁ 为表 1 中对应的计算值；

表 4 中 $J_2 = \frac{mR(g - R\beta_4)}{\beta_4 - \beta_3}$ ；(m 为砝码质量，R 为塔轮半径)

表 4 中，J₃' 为对称圆柱绕转轴距离 d 时转动惯量的理论值： $J_3' = \frac{1}{2}m_{\text{圆柱}}R_{\text{圆柱}}^2 + m_{\text{圆柱}}d^2$

验证性实验：

1. 结果和理论值比较，实验数据吻合，结论正确。
2. 实验数据不吻合，说明原因，
3. 单位：千克*米²。