大学物理

力 学

MECHANICS

在自然科学的各个分支中,力学最早形成一门完整、系统的学科。

早在公元前四世纪，我国的墨子及其弟子在《墨经》中就论述了时空概念、力、杠杆原理等力学知识。

墨子

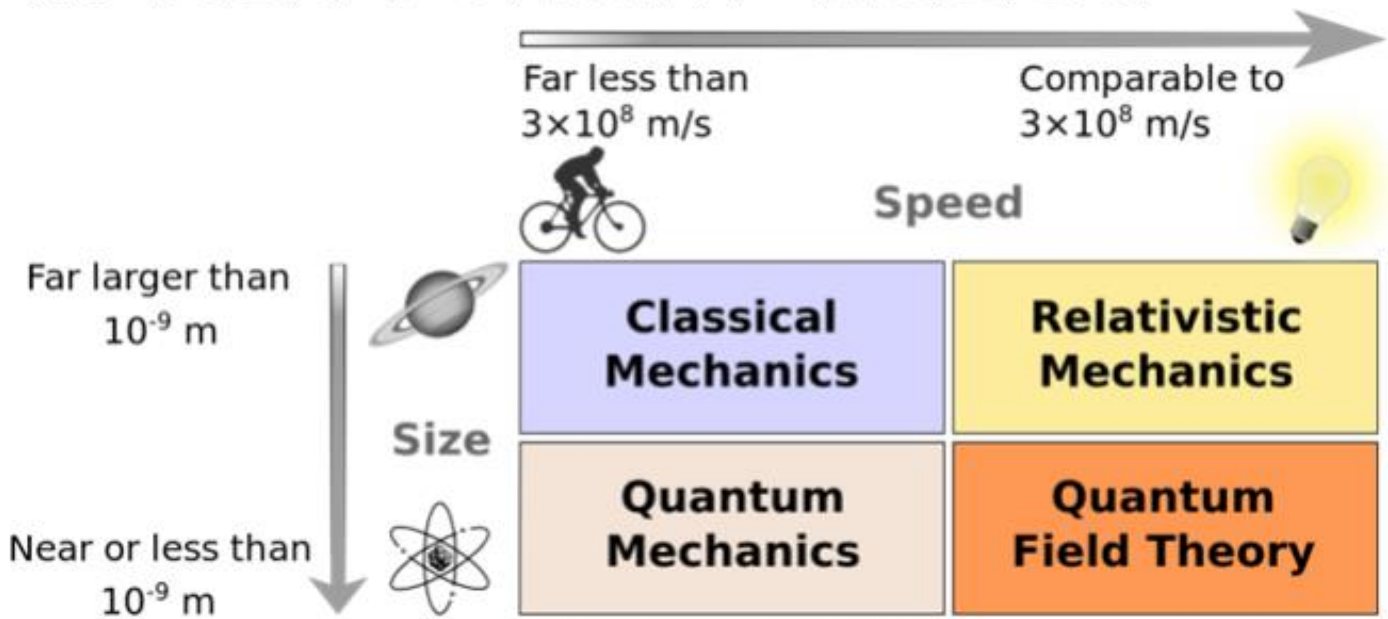
在西方，古希腊的亚里斯多德（约前384—前322）和阿基米德（约前287—前212）研究了物体的运动和平衡问题。

15世纪，文艺复兴促进了力学在欧洲的发展

17世纪，牛顿运动定律和万有引力定律的提出，标志着经典力学基础的奠定，之后经典力学获得了长足的发展。

到19世纪，力学已发展成为一门相对完善的学科。

20世纪初，近代物理学的两大支柱相对论和量子力学诞生，它们的建立明确了经典力学的适用领域。经典力学适用于宏观物体的低速运动。



尽管力学有着悠久的历史，但仍然极具生命力，不断涌现出新兴的学科分支，比如爆炸力学、生物力学，等离子体动力学、空气动力学等。

科技发展的日新月异的今天，在载人飞船的发射、机械制造和天体运行等方面的探索中，力学规律仍然是诸多研究的基础和有力工具。

力学的研究对象：

物体机械运动的规律及其应用

运动学 Kinematics	从几何观点研究物体位置随时间的变化
动力学 Dynamics	研究物体的运动与物体间相互作用的联系，阐明物体运动状态发生变化的原因
静力学 Static Equilibrium	研究物体在相互作用下的平衡问题，可看作动力学的一部分

第一章　质点力学

1.1 质点的运动

1.2 牛顿运动定律及其应用

1.3 动量

1.4 角动量

1.5 功和能

1.1 质点的运动

几个概念:

质点: 如果物体的大小比问题中所涉及的距离小的多，就可以忽略物体的形状和大小，而把它看作是几何的点, 叫做质点. 质点用一定的质量 m 表示. 有一定质量，但是没有大小和形状的物体。

力学中典型的理想模型

- 质点
- 刚体
- 完全弹性体
- 理想流体

参照系: 由于运动是相对的，因此确定质点的位置时，需要选定一个或一组保持相对静止的物体作为参照物, 称为参照系. 对物体运动的描述，随参照系的不同而不同，这个事实称为运动的相对性原理.

坐标系: 为了定量地研究物体的运动，需要在参照系中建立坐标系，最常用的是直角坐标系 $o\text{-}xyz$,质点的位置用它的三个直角坐标 (x,y,z) 表示.

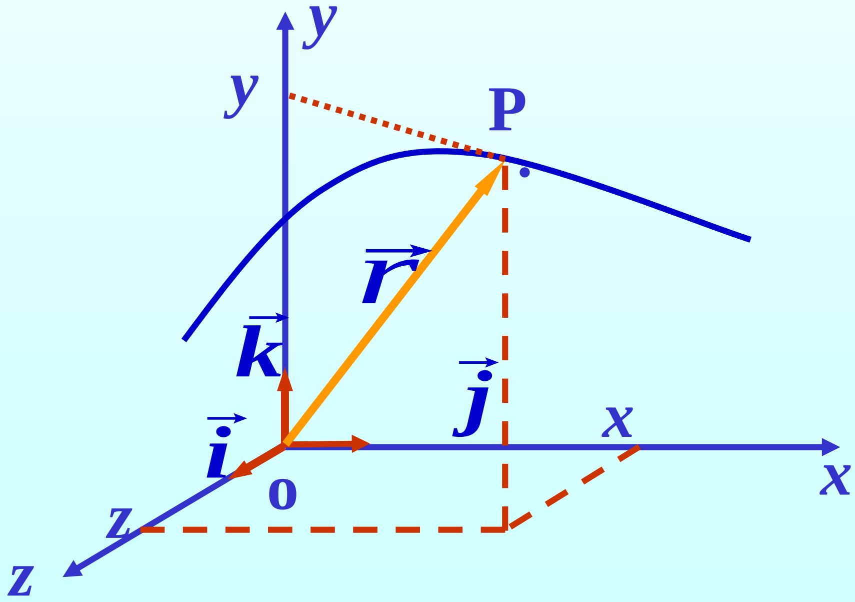
坐标系是参照系的数学抽象

直角坐标系，极坐标系，自然坐标系…

位置矢量和位移 ：

一、位置矢量

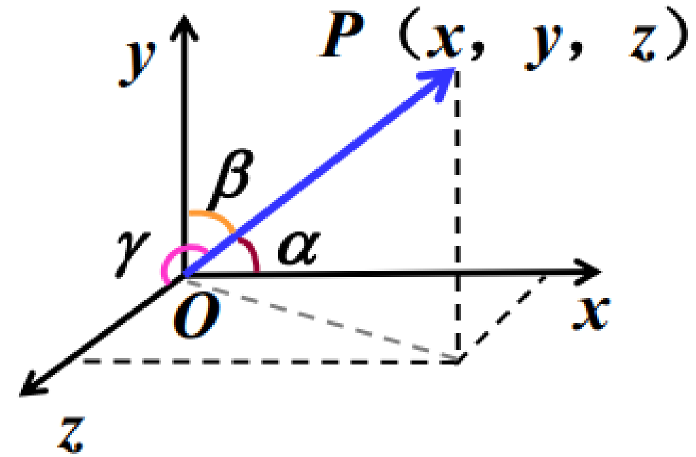
质点的位置可用坐标（x,y,z）表示, 也可用矢径 $\vec{r}$ 表示。 如图. 矢径也称为位置矢量, 简称位矢。



直角系中的解析表达式

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

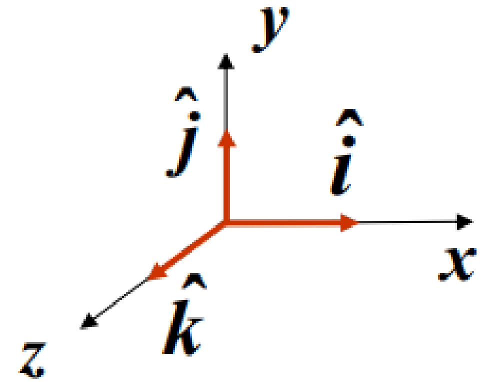
$$\left|\vec{r}\right| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\vec{r}\right|}$$ α：位矢与x轴的夹角

$$\cos\beta = \frac{y}{\left|\vec{r}\right|}$$ β：位矢与 y 轴的夹角

$$\cos\gamma = \frac{z}{\left|\vec{r}\right|}$$ γ：位矢与 z 轴的夹角

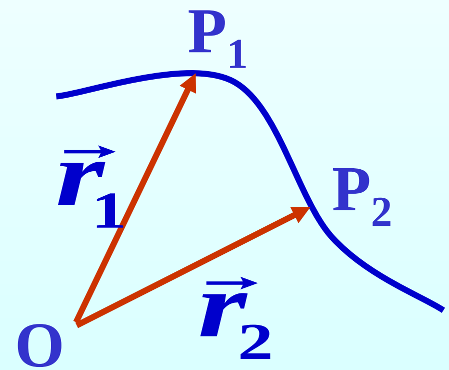


$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

位置矢量 $\vec{r}$的性质：

1. 矢量性：$\vec{r}$有大小，有方向。

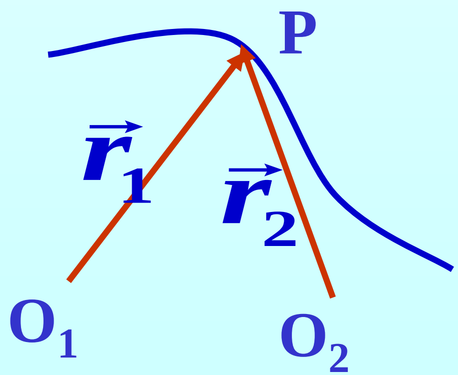
2. 瞬时性：质点在不同时刻t，对应不同位置P。$\vec{r}$也不同。即：$\vec{r}(t)$是t 的函数。



3. 相对性：质点P在同一时刻t

相对于参照系O_1的位置为$\vec{r}_1$，

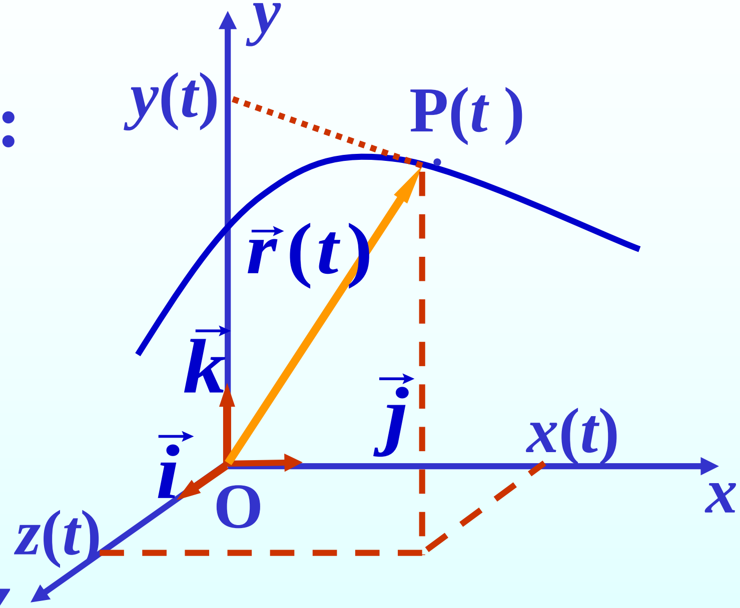
相对于参照系O_2的位置为$\vec{r}_2$。



运动函数:

当质点运动时, 位置发生变化,
因此其坐标就成为时间t 的函数:

$$\vec{r}=\vec{r}(t)\quad\left\{\begin{aligned} x&=x(t)\\ y&=y(t)\\ z&=z(t)\end{aligned}\right.$$



上式称为质点的运动方程(函数)

运动方程的矢量表达式 $\vec{r}=\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

此式表明, 质点的运动可以看作是各分运动的矢量合成, 这个结论称为运动的叠加原理.

轨迹方程：

注意运动
方程与轨道方程
的区别

轨道：质点在空间运动的路径

$$x = x(y) \quad 或 \quad y = y(x)$$

注意：它是坐标间的关系，一般不含时间 t

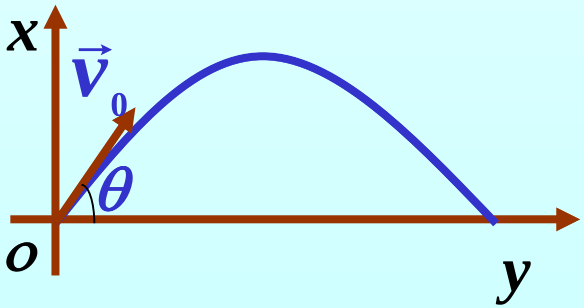
例如：斜抛运动

运动方程：

$$x = v_0 \cos\theta\, t, \quad y = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

轨道方程：

$$y = \tan\theta\, x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2$$

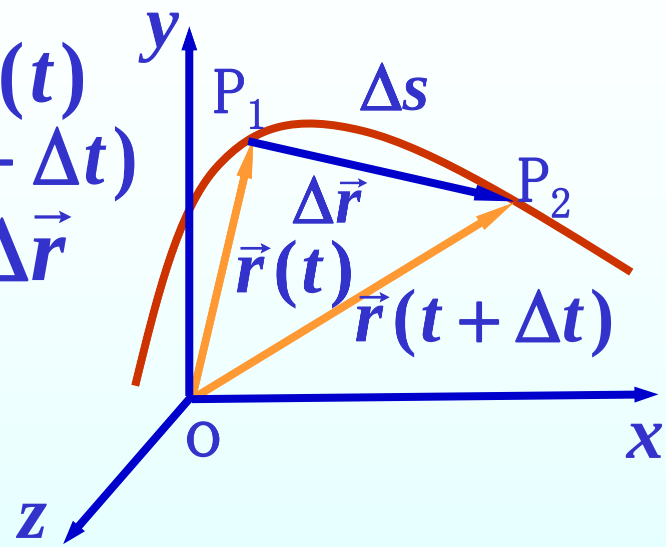


位移：位置矢量的增量

设：t 时刻，质点在P_1点, 位矢为 $\vec{r}(t)$

$t+\Delta t$ 时刻, 质点在P_2点, 位矢为$\vec{r}(t+\Delta t)$

则从P_1到P_2的有向线段(位移)记为$\Delta\vec{r}$



注意

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$$

单位：米（m）

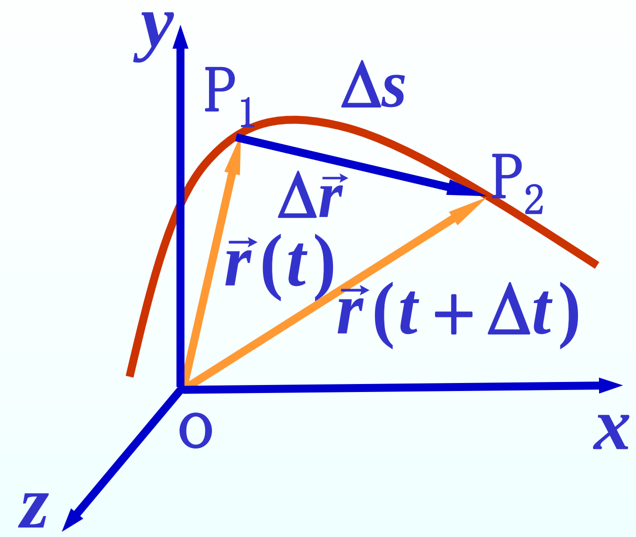
位移的大小和方向　由　$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

$\Delta\vec{r}=\Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}+\Delta z\vec{k}$　　$\Delta x,\Delta y,\Delta z$表示$\Delta\vec{r}$的三个分量

大小：$|\Delta\vec{r}|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$

方向：$\cos\alpha=\dfrac{\Delta x}{|\Delta\vec{r}|}$　$\cos\beta=\dfrac{\Delta y}{|\Delta\vec{r}|}$　$\cos\gamma=\dfrac{\Delta z}{|\Delta\vec{r}|}$

讨论 位移与路程的区别

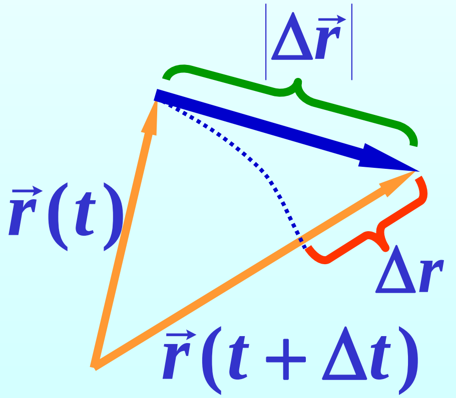


位移是矢量，路程是标量

1. $\Delta\vec{r}$是矢量。

2. $\left|\Delta\vec{r}\right| \neq \Delta r$，$\Delta r = r(t+\Delta t) - r(t)$。

3. $\left|\Delta\vec{r}\right| \neq \Delta s$，　Δs----路程(标量)。



只有在极限 $\Delta t \to 0$ 时，$\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = ds$

思考：下面哪个表述是正确的

(a) Δr 表示位移的大小

(b) $|\Delta\vec{r}|$ 表示位移的大小

(c) Δr 表示位矢的增量

(d) Δr 表示位矢模的增量

速度

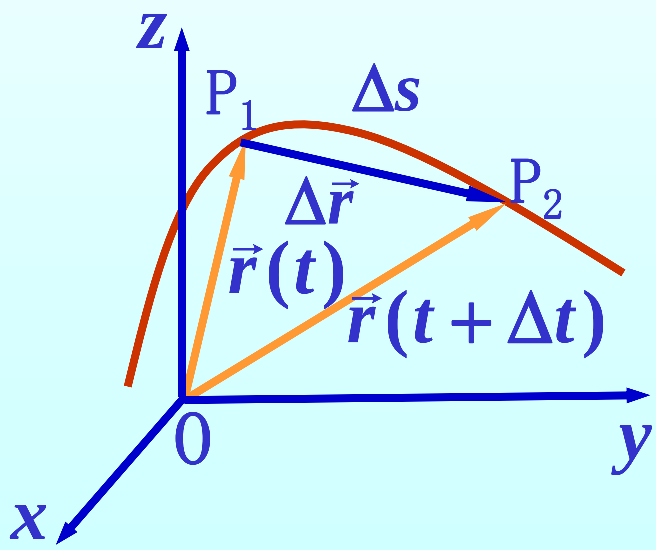
〈1〉 速度的定义：描述物体运动快慢的物理量

平均速度 $\bar{\vec{v}} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

矢量 方向：与位移方向一致

单位：m/s

瞬时速度 $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

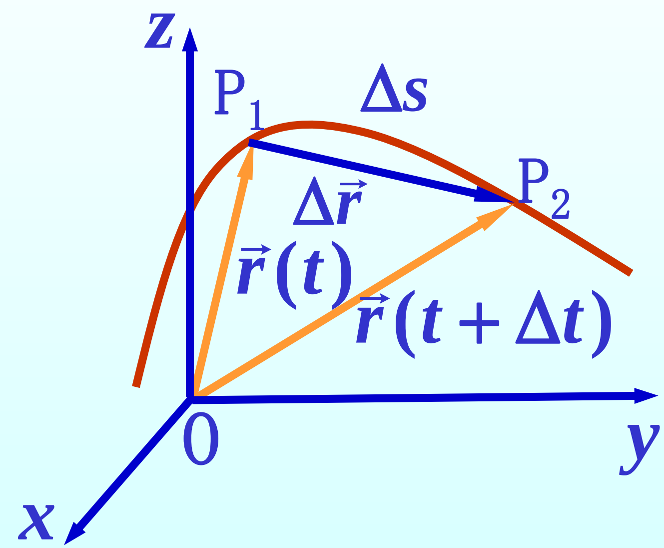


〈2〉速度的方向：

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

沿该时刻该位置轨道的切线方向并指运动的前方。

〈3〉速度的大小（速率）：



$$v = \left|\vec{v}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\Delta \vec{r}\right|}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$ 瞬时速率

瞬时速度的大小被称为瞬时速率，简称速率 v。

典 型 速 率

单位：m/s

光在真空	3×10^8
北京正负电子对撞机的电子	99.999998%光速
太阳绕银河系中心的运动	3.0×10^5
地球公转	3.0×10^4
人造地球卫星	7.9×10^3
赤道上一点因地球自转的速率	4.6×10^2
空气分子热运动的平均速率（0° C）	4.5×10^2
猎豹奔跑	2.8×10
百米赛跑世界记录（最快时）	1.2×10

〈4〉直角坐标系中，速度表达式

$$\vec{v}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$$

$$\vec{v}=\vec{v}_x+\vec{v}_y+\vec{v}_z$$

速度的叠加原理：质点的速度是各分速度的矢量和

速率　$v=\left|\vec{v}\right|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$

方向　α β γ 求法同 $\vec{r}$

瞬时速度 $\vec{v}$ 的性质：　矢量性、瞬时性、相对性

例**1**：　　已知运动方程 $\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 \end{cases}$

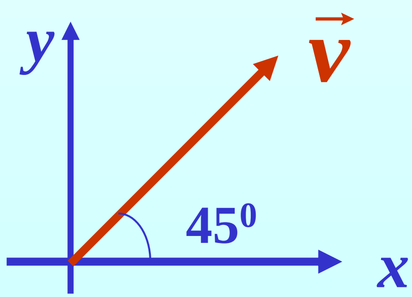
求：　　$\vec{v}(t)$ 及 1 秒时的速率

解：$\vec{v} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} \quad = 2\vec{i} + 2t\,\vec{j}$

1秒时的速度：$\vec{v}_{t=1} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$

1秒时的速率　$v = |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

方向：　$\tan\alpha = \dfrac{v_y}{v_x} = 1 \quad \alpha = 45^0$



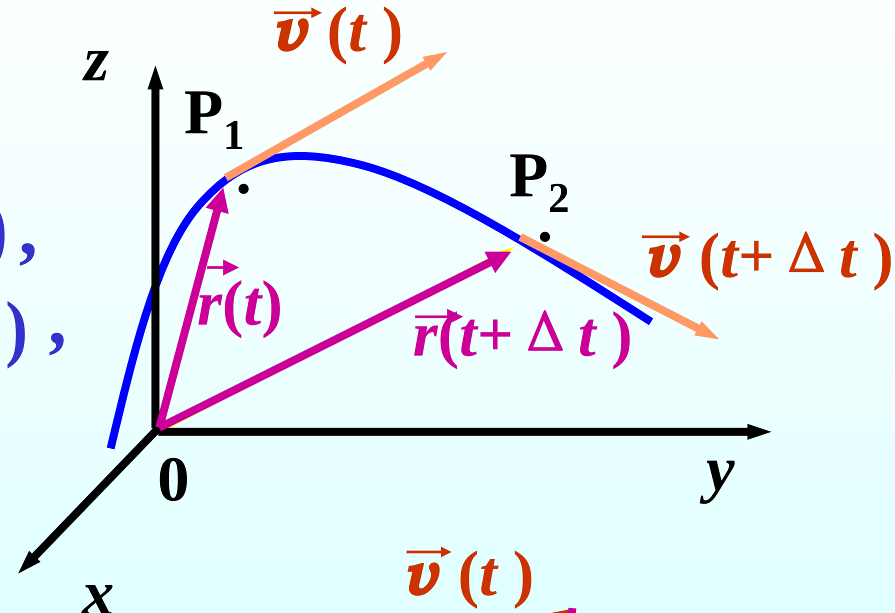
错误做法：1 秒钟时的速率：

$x_{t=1} = 2t = 2 \quad y_{t=1} = t^2 = 1$ 得出 $\vec{v} = 0$

又如：$|\vec{v}| = \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| = \dfrac{d|\vec{r}|}{dt} = \dfrac{d\sqrt{x^2 + y^2}}{dt}$

加速度（acceleration）

〈1〉加速度的定义

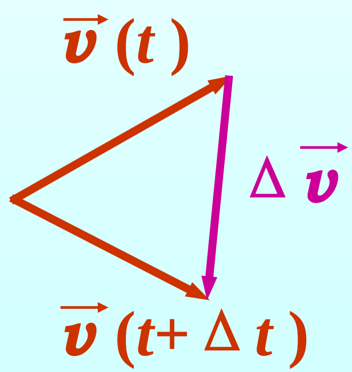


设：t 时刻质点的速度为 $\vec{v}(t)$，

$t+\Delta t$时刻的速度为$\vec{v}(t+\Delta t)$，

$$\Delta\vec{v}=\vec{v}_{(t+\Delta t)}-\vec{v}_{(t)}$$

平均加速度 $\bar{\vec{a}}=\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$



瞬时加速度

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

瞬时加速度$\vec{a}$的性质：矢量性、瞬时性、相对性

〈2〉加速度的方向 $\vec{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

其方向即为 当$\Delta t\to 0$时，速度增量$\Delta\vec{v}$的极限方向

而$\Delta\vec{v}$的极限方向一般不同于速度$\vec{v}$的方向，因而加速度的方向与同一时刻速度的方向一般不一致。

〈3〉直角坐标系中，加速度表达式

$$\vec{a}=\frac{dv_x}{dt}\vec{i}+\frac{dv_y}{dt}\vec{j}+\frac{dv_z}{dt}\vec{k}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$ 〈加速度的合成〉

加速度的大小： $a=\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

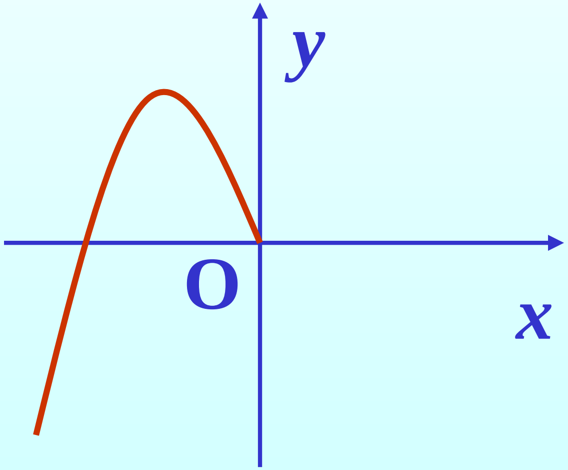
方向：α β γ 求法同 $\vec{r}$

例2. 一质点运动函数为 $\begin{cases} x = -t^2 \\ y = -t^4 + 2t^2 \end{cases}$ (SI)

求：质点的运动轨道以及$x=-4$时（$t>0$）粒子的速度、速率、加速度。

解：质点的运动轨道方程为： $y = -x^2 - 2x$

$x=-4$时，$t=2$

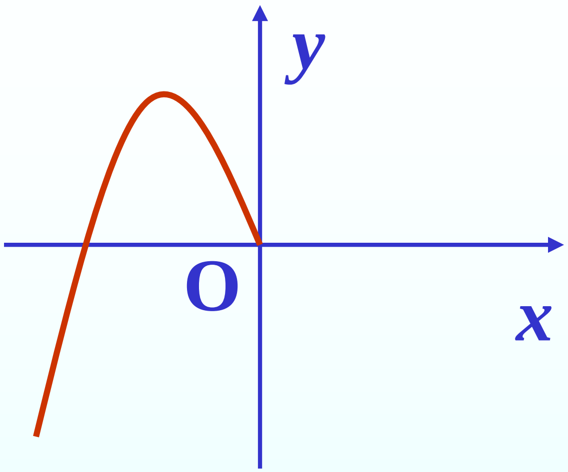


$$v_x = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=2} = -2t\big|_{t=2} = -4(\mathrm{m/s})$$

$$v_y = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2} = -4t^3 + 4t\big|_{t=2} = -24(\mathrm{m/s})$$

速度：$\vec{v} = -4\vec{i} - 24\vec{j}$

速率：$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 4\sqrt{37}(\mathrm{m/s})$

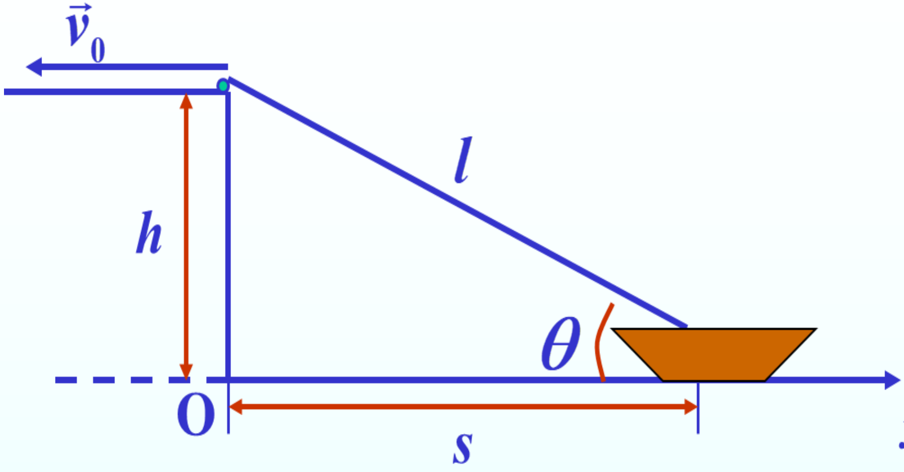


$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=2} = -2\big|_{t=2} = -2(\mathrm{m/s^2})$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=2} = -12t^2 + 4\big|_{t=2} = -44(\mathrm{m/s^2})$$

加速度：$\vec{a} = -2\vec{i} - 44\vec{j}$

例3. 一人站在岸上，以恒定速度v_0拉小船，如图所示



求：船靠岸的速率。

解：

$$S=\sqrt{l^2-h^2}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}\frac{2l\dfrac{dl}{dt}}{\sqrt{l^2-h^2}}$$

$$v_0=-\frac{dl}{dt} \qquad v_{船}=-\frac{ds}{dt}$$

$$v_{船}=\frac{l}{s}v_0=\frac{v_0}{\cos\theta}$$

θ：l绳与s夹角。

小结

直角坐标系中

位矢(m)	$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$
位移(m)	$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}$
速度 (m/s)	$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\hat{i} + \dfrac{dy}{dt}\hat{j} + \dfrac{dz}{dt}\hat{k} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$ 速度等于运动函数对时间的变化率。
加速度 (m/s^2)	$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{dv_x}{dt}\hat{i} + \dfrac{dv_y}{dt}\hat{j} + \dfrac{dv_z}{dt}\hat{k}$ $= \dfrac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\hat{k} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ 加速度等于速度对时间的变化率。

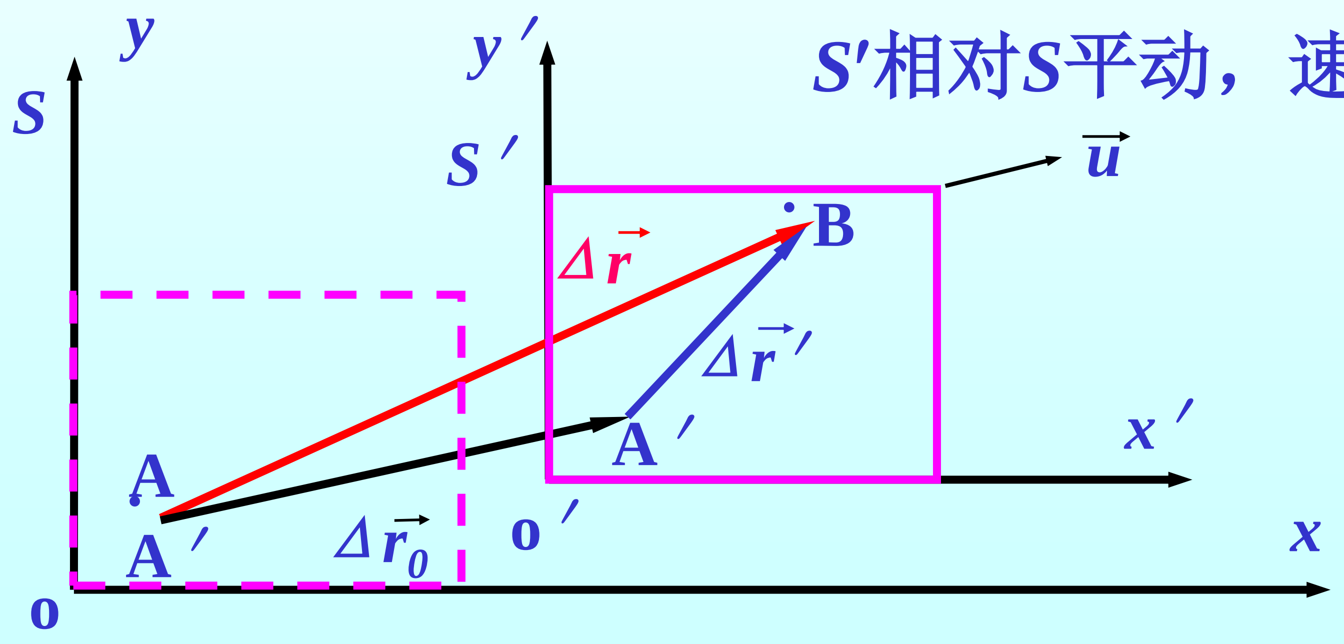
相对运动（relative motion）

在不同的参照系, 对同一质点的运动状态进行描述。

例：一列车（S'系）相对于地面（S系）作匀速直线运动, 一人在车厢内运动 。在 S',S系分别对其进行描述

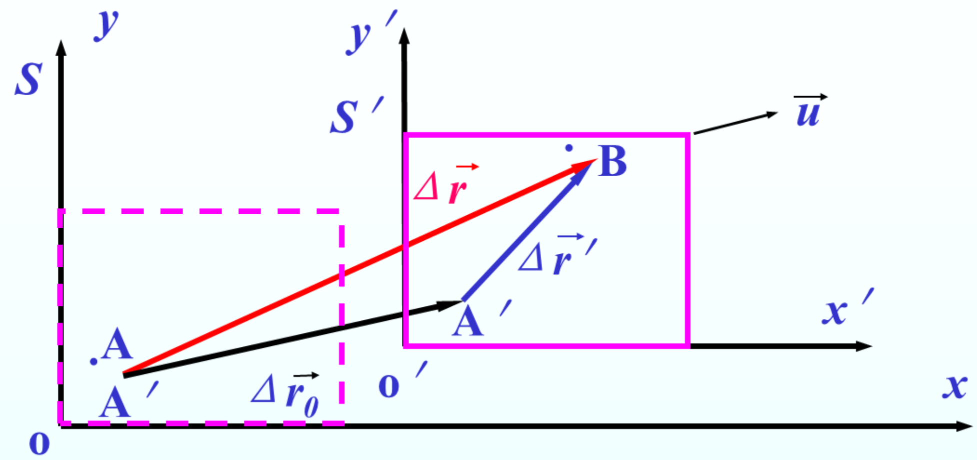
设：$t=0$时，两坐标系原点重合。t 时刻的运动情况如下

S'相对S平动，速度为$\vec{u}$



位移变换关系式

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}\,' + \Delta\vec{r}_0$$



$$\Delta\vec{r}_{人地} = \Delta\vec{r}\,'_{人车} + \Delta\vec{r}_{车地}$$

两边除Δt，取极限

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}$$

绝对速度

相对速度

牵连速度

<u>伽里略速度变换</u>

牛顿绝对时空观的必然结果

相对加速度

对上式求导得 $\vec{a} = \vec{a}\,'$

在不同惯性参照系中，加速度是相同的.

注意

伽利略变换的应用前提:

1. 以上结论是在绝对时空观下得出的:

伽利略变换式来源于位移矢量叠加，这里我们假定“长度的测量不依赖于参考系”（即空间的绝对性成立），得出位移关系。

而要想得到速度关系式，还必须假定“时间的测量不依赖于参考系”，即假定在S和S'中分别测得的时间间隔$\mathrm{d}t$ 与 $\mathrm{d}t'$ 相等（即时间的绝对性成立）。

从相对论的观点来看，绝对时空观只在$u \ll c$时才成立。

2. 运动的合成与分解和伽利略速度变换的区别:

区别: 叠加 发生在同一个参考系,是矢量性的表现
变换 涉及不同参考系,只在$u \ll c$时才成立。

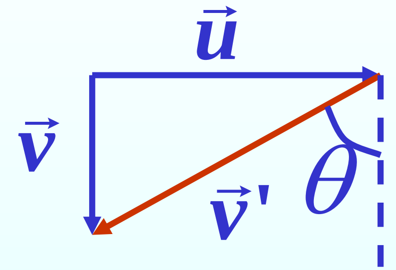
3. $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_o$ 只适用于相对运动为平动的情形

例1. 雨天一辆客车在水平马路上以20m/s的速度向东开行，雨滴在空中以10m/s的速度垂直下落。

求：雨滴相对于车厢的速度的大小与方向。

解：已知 $v = 10\,\text{m/s}$ 方向向南

$u = 20\,\text{m/s}$ 方向向东



$$\vec{v}_{雨对地} = \vec{v}'_{雨对车} + \vec{u}_{车对地}$$

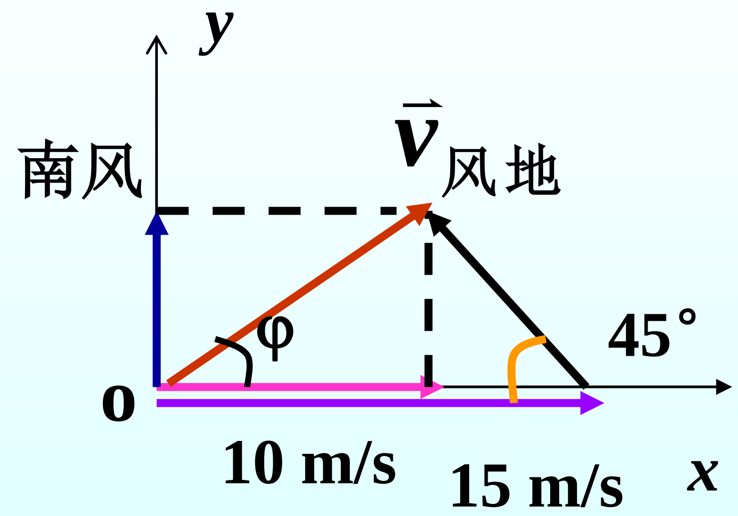
$$\vec{v}'_{雨对车} = \vec{v}_{雨对地} - \vec{u}_{车对地}$$

$$v' = \sqrt{v^2 + u^2} = 22.4\,(\text{m/s}) \qquad \tan\theta = \frac{u}{v} = 2 \qquad \theta = 63.4^\circ$$

所以雨滴相对于车厢的速度大小为22.4 m/s，方向为南偏西63.4°。

例：一人骑车向东而行，当速度为10 m/s时感到有南风，速度增加到15 m/s时，感到有东南风，求风的速度。

解：$$\vec{v}_{风地}=\vec{v}_{风人}+\vec{v}_{人地}$$



$$\vec{v}_{风地}=10\vec{i}+5\vec{j}$$

$$v_{风地}=\sqrt{10^2+5^2}=11.2\ \text{m/s}$$

$$\tan\varphi=\frac{5}{10}\qquad \varphi=27^\circ$$

匀加速运动
（uniformly acceleration motion）

质点做匀加速运动时 $\vec{a}$ 为常矢量

1. 速度方程：

设初始条件：t=0时的位矢和速度分别为（$\vec{r}_0, \vec{v}_0$）

由定义：$d\vec{v} = \vec{a}dt$

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a}dt \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$\vec{v}_0$与$\vec{a}$的方向不一定相同，也不一定共线。

用直角坐标系表示：
$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + a_x t \\ v_y = v_{0y} + a_y t \\ v_z = v_{0z} + a_z t \end{cases}$$

2. 运动方程： $d\vec{r}=\vec{v}dt$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}=\int_0^t(\vec{v}_0+\vec{a}t)dt \qquad \vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

用直角坐标系表示：

$$\begin{cases} x=x_0+v_{0x}t+\frac{1}{2}a_xt^2 \\ y=y_0+v_{0y}t+\frac{1}{2}a_yt^2 \\ z=z_0+v_{0z}t+\frac{1}{2}a_zt^2 \end{cases}$$

运动学所要求解的两类典型问题：

1. 微分法： 已知 $\vec{r}\xrightarrow{\text{微分}}\vec{v}\xrightarrow{\text{微分}}\vec{a}$

2. 积分法： 已知 $\vec{a}\xrightarrow{\text{积分}}\vec{v}\xrightarrow{\text{积分}}\vec{r}$

匀加速直线运动
(uniformly accelerated rectilinear motion)

一、条件：1. $\vec{a}$为常矢量；

2. $\vec{v}_0=0$ 或 $\vec{v}_0$与 $\vec{a}$ 共线。

二、常用公式

若取质点初始位置为原点，以质点运动方向为x轴。

$$v=v_0+at \qquad x=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \qquad v^2-v_0^2=2ax$$

$\boxed{\text{典型运动：}}$ 自由落体 $\vec{a}=\vec{g}$

取y 轴向下，下落点为原点。$t=0$时，$y_0=0$，$v_{0y}=0$

$$v=gt \qquad y=\frac{1}{2}gt^2 \qquad v^2=2gy$$

抛体运动 (projectilemotion)

一、条件：1. $\vec{a}=\vec{g}$

2. $\vec{v}_0 \neq 0$

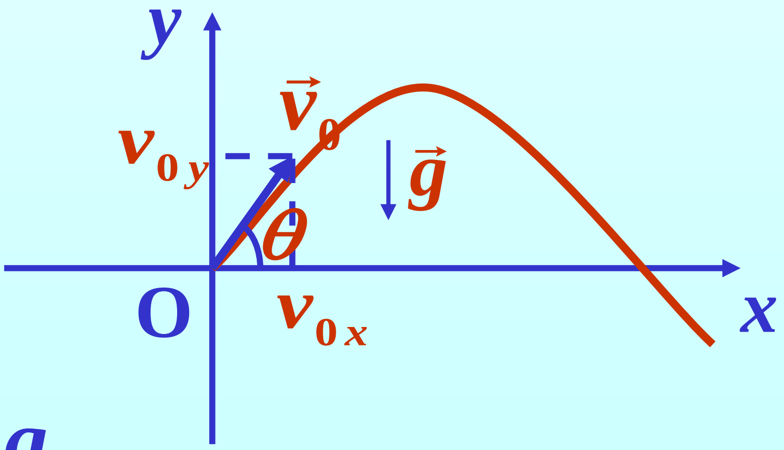
二、常用公式

通常取质点初始位置为原点，以水平方向和竖直向上的方向分别为x轴和y轴。

初始条件：$x_0 = y_0 = 0$

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta$$

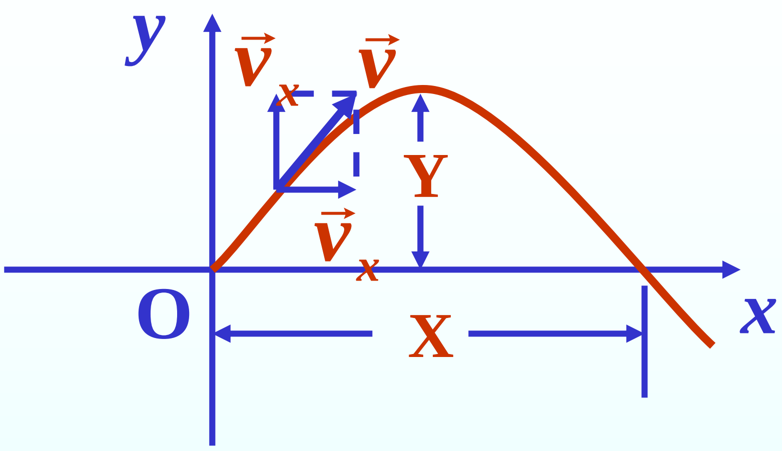
$$v_{0y} = v_0 \sin\theta$$



已知条件：

$$a_x = 0 \quad a_y = -g$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_0 \sin\theta - gt \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = v_0 \cos\theta \cdot t \\ y = v_0 \sin\theta \cdot t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

射高： $Y = \dfrac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$　　射程： $X = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$

抛体的轨道方程：

$$y = x \tan\theta - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$$

例：质点沿直线运动 $a=2t^2, t=0$时，$x_0=3, v_0=-2$

求：$x(t)$

解：由 $a=\dfrac{dv}{dt}$

$$\int_{-2}^{v} dv=\int_{t=0}^{t} a\,dt \qquad v-\left(-2\right)=\int_0^t 2t^2\,dt=\frac{2}{3}t^3$$

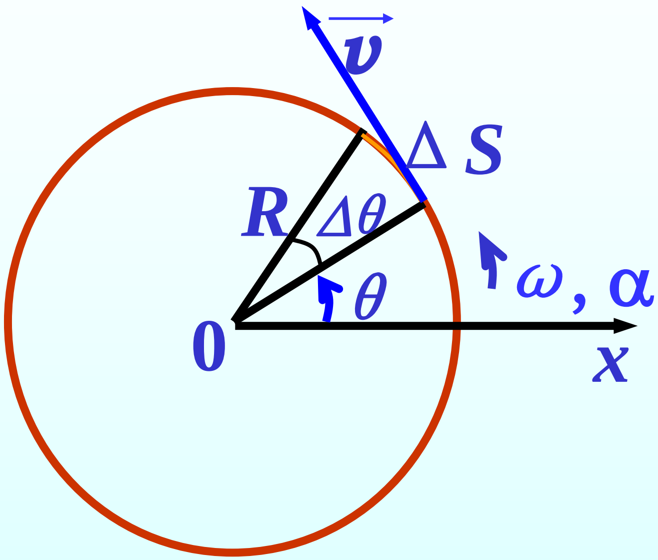
$$v=\frac{2}{3}t^3-2$$

$$\frac{dx}{dt}=v \qquad \int_3^x dx=\int_0^t v\,dt=\int_0^t \left(\frac{2}{3}t^3-2\right)dt=\frac{1}{6}t^4-2t$$

$$x=\frac{1}{6}t^4-2t+3$$

圆周运动（circular motion）

一. 圆周运动中的速度



当质点沿圆周运动时, 其速率v 也叫线速度，以s 表示质点运动所经历的弧长, 则速率（线速度）为

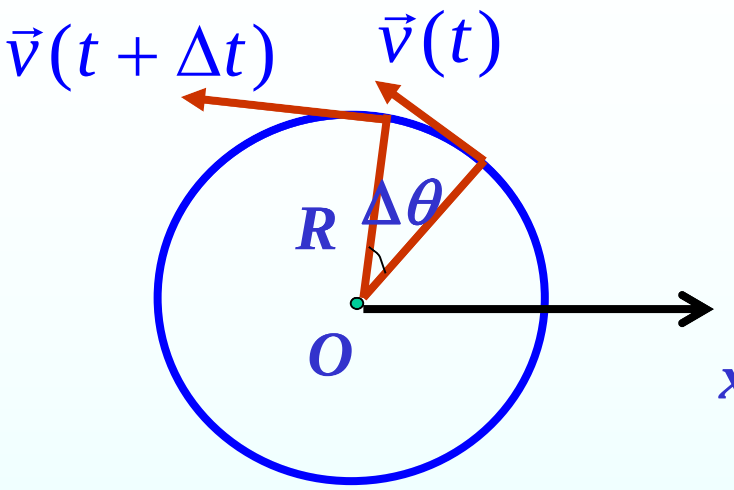
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

如果质点在Δt 时间内所转过的角度为$\Delta\theta$

角速度 $$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$ 单位为弧/秒.

$$v = R\omega$$

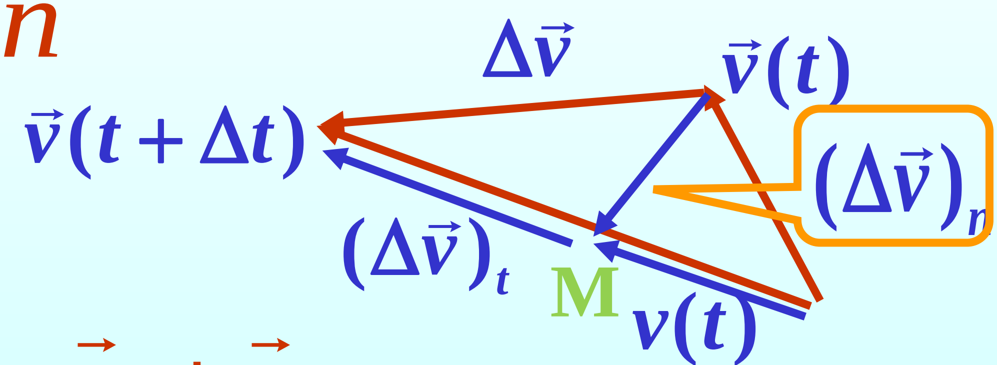
二．变速圆周运动中的加速度



由定义 $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

选取自然坐标：

原点 o 切向 $\hat{t}$ 内法向 $\hat{n}$

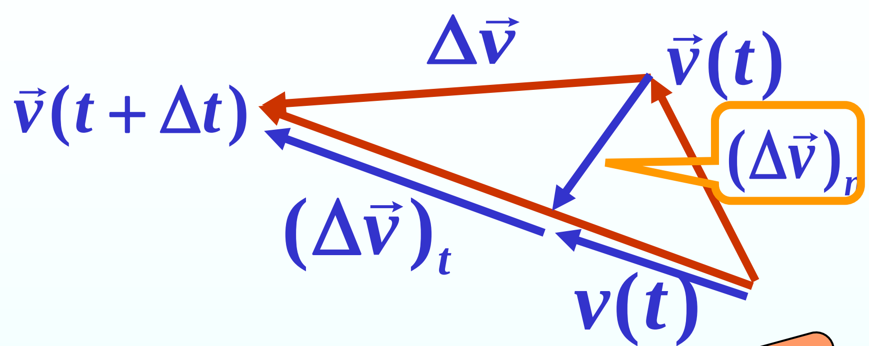


$$\Delta\vec{v} = (\Delta\vec{v})_n + (\Delta\vec{v})_t$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(\Delta\vec{v}_t + \Delta\vec{v}_n\right)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_t}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}$$

1. 切向加速度 $\vec{a}_t$



$$\left|(\Delta\vec{v})_t\right| = v(t+\Delta t) - v(t) = \Delta v$$

$(\Delta\vec{v})_t$ 的大小为速率的变化

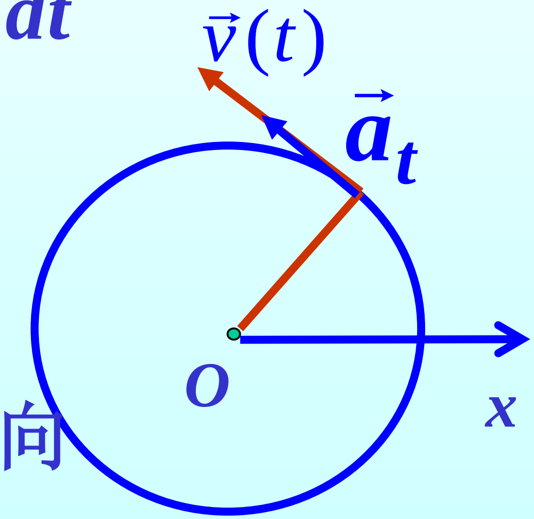
线速度

角加速度

$$a_t = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\Delta\vec{v}_t\right|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

$a_t = \dfrac{dv}{dt} = R\alpha$ 反映速度大小的变化

角加速度 $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$



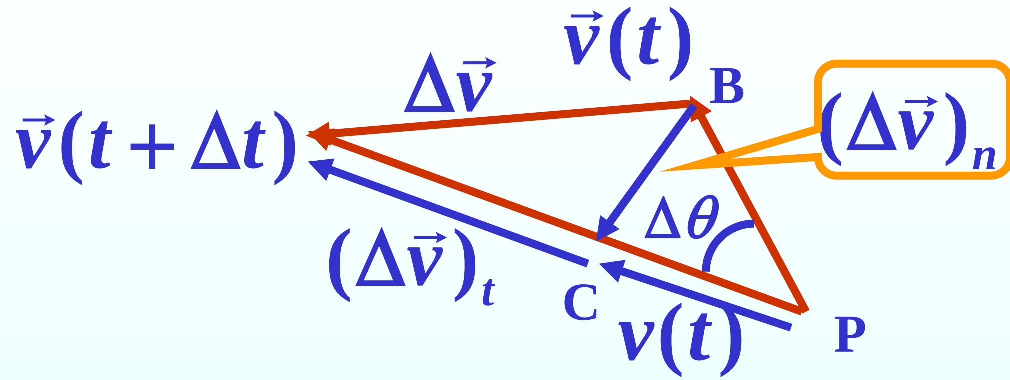
$\vec{a}_t$ 的方向为 $\Delta t \to 0$ 时，$(\Delta\vec{v})_t$ 的极限方向

即 $\vec{v}(t)$ 的方向，也就是切线方向。

切向加速度描述了速度大小变化的快慢情况。

2. 法向加速度(向心加速度) $\vec{a}_n$

$$\left|(\Delta\vec{v})_n\right| \approx v(t)\cdot\Delta\theta$$



$$a_n = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|(\Delta\vec{v})_n\right|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}[v(t)\cdot\frac{\Delta\theta}{\Delta t}] = v(t)\cdot\omega$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 \qquad v = R\omega$$

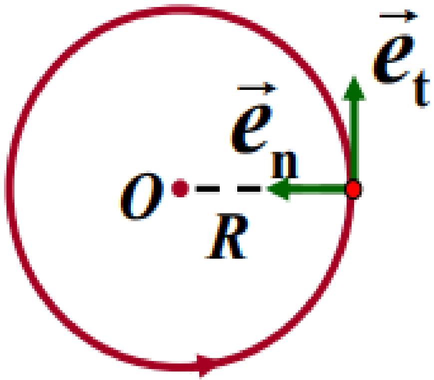
方向： $\Delta t \to 0, \Delta\theta \to 0 \qquad \Delta\vec{v}_n \perp \vec{v}(t)$

$\vec{a}_n$ 的方向为法线方向，指向圆心。

小结 圆周运动的法向与切向加速度

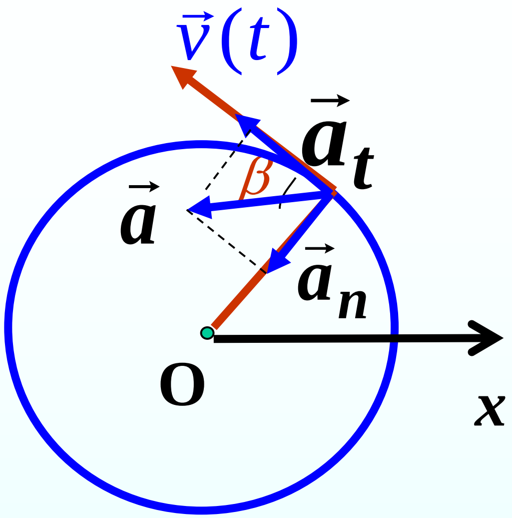
1) 法向加速度

- 大小：$a_{\mathrm{n}} = R\omega^2 = \dfrac{v^2}{R}$
- 方向：轨道法线方向
  沿半径指向圆心



2) 切向加速度

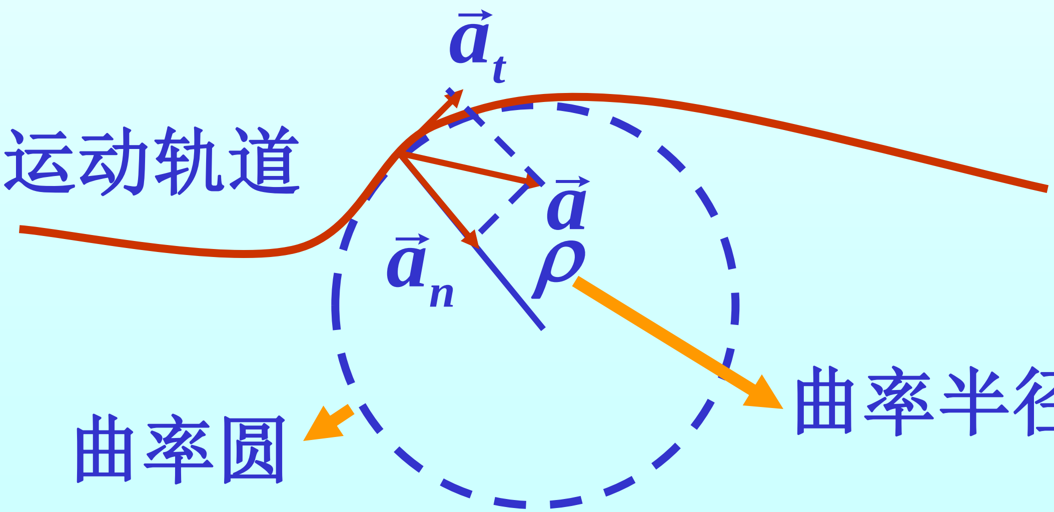
- 大小：$a_{\mathrm{t}} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\beta$
- 方向：轨道的切线方向，
  以速度方向为正向
  - 若 $a_{\mathrm{t}} > 0$，速率随时间增大，
    方向与速度同
  - 若 $a_{\mathrm{t}} < 0$，速率随时间减小，
    方向与速度反



$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{a_n}{a_t}$$

曲线运动：不同点曲率中心及曲率半径不同



$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

讨论

用加速度 $\vec{a}=\vec{a}_n+\vec{a}_t$ 判定质点的运动

(1) $\vec{a}_n \neq 0, \vec{a}_t \neq 0$ 变速率曲线运动：$\vec{v}$ 方向改变，大小改变。

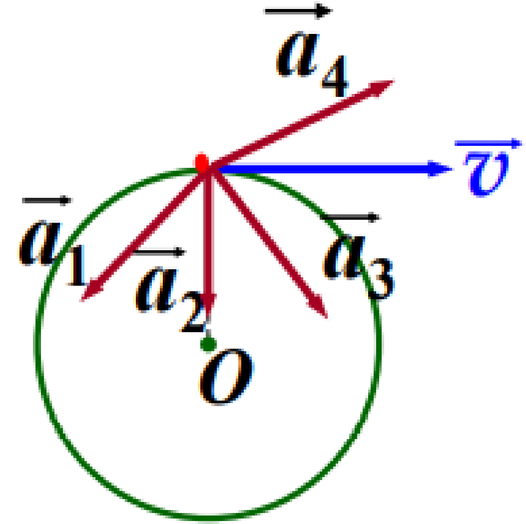
(2) $\vec{a}_n \neq 0, \vec{a}_t = 0$ 匀速率曲线运动：$\vec{v}$ 方向改变，大小不变。

(3) $\vec{a}_n = 0, \vec{a}_t \neq 0$ 变速率直线运动：$\vec{v}$ 方向不变，大小改变。

(4) $\vec{a}_n = 0, \vec{a}_t = 0$ 匀速率直线运动：$\vec{v}$ 方向不变，大小不变。

如图, 质点沿圆顺时针运动,对于图中的 4 种情形，以下说法正确的是

A. 情形 1中，质点的运动速率在减小
B. 情形 2中，质点的运动速率恒定
C. 情形 3中，质点的运动速率在减小
D. 情形 4 不存在



例. 已知:一质点按顺时针方向沿半径为R 的圆周运动. 其路程与时间关系为

$$S = V_0 \cdot t - \frac{1}{2} b \cdot t^2$$ 其中V_0, b为常数

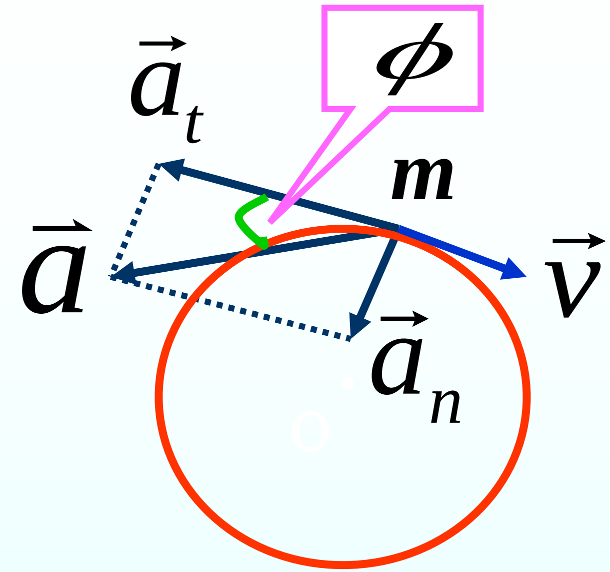
求:（1）t 时刻，质点的加速度 $\vec{a} = ?$

（2）t =? 时,$|\vec{a}| = b$，此时质点已沿圆周运行了多少圈?

（3）质点何时开始逆时针方向运动?

解:(1)
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{v^2}{R} \\ a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \dfrac{(V_0 - bt)^2}{R} \\ a_t = -b \end{cases}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$



大小: $a = \sqrt{\dfrac{(V_0 - bt)^4}{R^2} + b^2}$

方向: $\phi = \arctan\left(\dfrac{a_n}{a_t}\right) = \arctan \dfrac{(V_0 - bt)^2}{Rb}$

（2） $|\vec{a}| = b$ 时 $\sqrt{\dfrac{(V_0 - bt)^4}{R^2} + b^2} = b$

$(V_0 - bt)^4 + R^2 b^2 = R^2 b^2$ $\quad t = \dfrac{V_0}{b}$

t 时刻路程 $S_t = V_0 t - \frac{1}{2} b t^2$

$$= V_0 \frac{V_0}{b} - \frac{1}{2} b \left(\frac{V_0}{b} \right)^2 = \frac{V_0^2}{b} - \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{b} = \frac{V_0^2}{2b}$$

圈数： $N = \frac{S_t}{2\pi \cdot R} = \frac{V_0^2}{4\pi \cdot Rb}$

(3) 由前面 $a_t = -b$ 可知，质点作减速率圆周运动.
当 V 减到0值时，质点将终止顺时针转，而开始逆时针转. 此时刻记为 t'

$$V = V_0 - bt' = 0 \qquad \therefore t' = \frac{V_0}{b}$$

也正是前求 $a = b$ 的时刻 t .

本章中心：

质点运动学是描述质点的位置随时间的变化

一. 描述质点运动的特点。

〈1〉运动本身具有绝对性，运动描述具有相对性。

〈2〉质点运动具有瞬时性，方向性。

〈3〉运动具有迭加性

如斜抛运动 $\begin{cases} \text{水平匀速直线运动} \\ \text{垂直向上匀减速直线运动} \end{cases}$

二. 引入描述质点运动的物理量。

$$\vec{r} \quad \Delta\vec{r} \quad \vec{v} \quad \vec{a}$$

质点运动学

知识点

- 参考系，直角坐标系，极坐标系（选学）
- 位置矢量，运动函数，轨道函数，位移
- 速度，加速度，匀加速运动，抛物运动
- 伽利略速度变换
- 圆周运动（角速度、角加速度、法向加速度、切向加速度）
- 一般的平面曲线运动