第七章 参数估计

第一节 点估计

✗第二节 基于截尾样本的最大似然估计

第三节 估计量的评选标准

第四节 区间估计

第五节 正态总体均值与方差的区间估计

✗ 第六节 (0-1)分布参数的区间估计

✗ 第七节 单侧置信区间

第七章 参数估计

第一节 点估计

第三节 估计量的评选标准

第四节 区间估计

第五节 正态总体均值与方差的区间估计

教学计划：3次课-9学时

数理统计研究解决的问题

$X \sim B(1,p)$

$X \sim B(n,p)$

$X \sim P(\lambda)$

$X \sim U(a,b)$

$X \sim E(\theta)$

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

设总体 $X \sim F(x,\theta)$, θ是未知参数

概率论的任务： 用 $F(x,\theta)$计算 $P(x_1 < X \le x_2)$

统计学的任务： 对未知参数θ 进行统计推断

统计推断的方法： 样本推断总体

$E(X), D(X)$

具体做法：

样本均值 $\bar{X}$

样本方差 S^2

1) 抽样： $X_1, X_2, \cdots, X_n$ (独立且与 X 同分布)

$x_1, x_2, \cdots, x_n$

2) 构造统计量： $g(X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim$ 抽样分布 (Ch6)

$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

3) 统计推断： 对未知参数 θ 进行统计推断 $\begin{cases} \text{参数估计(Ch7)}\surd \\ \text{假设检验(Ch8)}\times \end{cases}$

复习

常用统计量及抽样分布

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $E(X)=\mu$ 未知

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ $D(X)=\sigma^2$ S^2

	统计量	概率分布	
χ^2统计量	$\chi^2=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$	$\sim \chi^2(n)$	$X_i \sim N(0,1)$ $i=1,2,\cdots,n$ 独立
t 统计量	$t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$	$\sim t(n)$	$X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 独立
样本均值	$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
样本方差	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\sim \chi^2(n-1)$	$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$
	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$\sim t(n-1)$	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}(\dfrac{X_i-\bar{X}}{\sigma})^2$ μ

(99, 7分)

总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,

$X_1, X_2,\ldots, X_9$ 是总体 X 的样本,

$X_1, X_2, \cdots, X_6 \quad X_7, X_8, X_9$

证明: $Z = \dfrac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} \sim t(2)$

$$Y_1 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} X_i$$

$$Y_2 = \frac{1}{3}\sum_{i=7}^{9} X_i$$

$$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

小结

常用统计量及抽样分布

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$

	统计量	概率分布	
χ^2统计量	$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$	$\sim \chi^2(n)$	$X_i \sim N(0,1)\ i=1,2,\cdots,n$ 独立
t 统计量	$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$	$\sim t(n)$ √	$X \sim N(0,1),\ Y \sim \chi^2(n),$ 独立
样本均值	$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ √	$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
样本方差	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\sim \chi^2(n-1)$ √	$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$
	$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$\sim t(n-1)$	

总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,

$X_1, X_2,\dots, X_9$ 是总体 X 的样本,

$X_1, X_2, \cdots, X_6 \quad X_7, X_8, X_9$

证明：$Z = \dfrac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} \sim t(2)$

证明：

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$Y_1 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{6})$$

$$Y_2 = \frac{1}{3}\sum_{i=7}^{9} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{3})$$

$$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2$$

$$V = \frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$$

$$\frac{U}{\sqrt{V/2}} \sim t(2)$$

$U \sim N(0,1)$

$V \sim \chi^2(2)$

总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,

$X_1, X_2,\ldots, X_9$ 是总体 X 的样本,

$X_1, X_2, \cdots, X_6 \quad X_7, X_8, X_9$

$$Y_1 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{6})$$

$$Y_2 = \frac{1}{3}\sum_{i=7}^{9} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{3})$$

$$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2$$

证明: $Z = \dfrac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} \sim t(2)$

$$V = \frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$$

证明:

$$\because Y_1, Y_2 \text{ 独立}, \therefore Y_1 - Y_2 \sim N(\overset{?}{0}, \frac{\overset{?}{\sigma^2}}{2})$$

$$E(Y_1 - Y_2) = E(Y_1) - E(Y_2) = \mu - \mu = 0$$

$$D(Y_1 - Y_2) = D(Y_1) + D(-Y_2) = D(Y_1) + (-1)^2 D(Y_2) = D(Y_1) + D(Y_2)$$

$$= \frac{\sigma^2}{6} + \frac{\sigma^2}{3} = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\frac{U}{\sqrt{V/2}} \sim t(2)$$

$U \sim N(0,1)$

$V \sim \chi^2(2)$

总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

$$Y_1 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{6})$$

$X_1, X_2, \ldots, X_9$ 是总体 X 的样本,

$X_1, X_2, \cdots, X_6 \quad X_7, X_8, X_9$

$$Y_2 = \frac{1}{3}\sum_{i=7}^{9} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{3})$$

证明: $Z = \dfrac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} \sim t(2)$

$$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2$$

证明:

$$V = \frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$$

$\because Y_1, Y_2$ 独立, $\therefore Y_1 - Y_2 \sim N(0, \dfrac{\sigma^2}{2})$

$$U = \frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}} \sim N(0,1)$$

$\because U, V$ 独立, $\quad Z = \dfrac{Y_1 - Y_2}{S/\sqrt{2}} = \dfrac{\dfrac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}}{\sqrt{\dfrac{2S^2}{2\sigma^2}}} = \dfrac{U}{\sqrt{V/2}} \sim t(2)$

$U \sim N(0,1)$

$V \sim \chi^2(2)$

（97, 3分）

设随机变量X和Y相互独立都是服从$N(0,3^2)$，而$X_1,X_2,\cdots,X_9$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$分别是来自总体X和Y的样本。

则统计量$U=\dfrac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}$服从______分布，自由度为______。

小结

常用统计量及抽样分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $X_1, X_2, \cdots, X_n$

	统计量	概率分布	
χ^2统计量	$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$	$\sim \chi^2(n)$ √	$X_i \sim N(0,1)$ $i=1,2,\cdots,n$ 独立
t 统计量	$t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$	$\sim t(n)$ √	$X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 独立
样本均值	$\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$\sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
样本方差	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\sim \chi^2(n-1)$	$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$
	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$\sim t(n-1)$	

$Y_i \sim N(0,3^2)$

（97, 3分）

设随机变量X和Y相互独立都是服从$N(0,3^2)$，而 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$ 分别是来自总体X和Y的样本。 $X_i \sim N(0,3^2)$

则统计量 $U=\dfrac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}$ 服从 __t__ 分布，自由度为 __9__ 。

解： $X_1+\cdots+X_9 \sim N(0,\ 9\times 3^2)$ $\qquad \dfrac{Y_i}{3} \sim N(0,1)$

$$X=\frac{1}{9}(X_1+\cdots+X_9) \sim N(0,1) \qquad Y=(\frac{Y_1}{3})^2+\cdots+(\frac{Y_9}{3})^2 \sim \chi^2(9)$$

X与Y相互独立，

$Y_i \sim N(0,1)$ 独立 $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \sim \chi^2(n)$

$$U=\frac{(X_1+\cdots+X_9)}{\sqrt{(Y_1^2+\cdots+Y_9^2)}}=\frac{\frac{1}{9}(X_1+\cdots+X_9)}{\sqrt{\frac{1}{81}(Y_1^2+\cdots+Y_9^2)}} \sim t(9)$$

$X \sim N(0,1),\ Y \sim \chi^2(n),$ 独立 $t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$

(17, 4分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,1)$ 的样本，则下面结论不正确的是 ______

(A) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2$ 分布

(B) $2(X_n - X_1)^2 \sim \chi^2$ 分布

(C) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2$ 分布

(D) $n(\bar{X}-\mu)^2 \sim \chi^2$ 分布

小结

常用统计量及抽样分布

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$

	统计量	概率分布	
χ^2统计量	$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$	$\sim \chi^2(n)$ √	$X_i \sim N(0,1)\ i=1,2,\cdots,n$ 独立
t 统计量	$t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$	$\sim t(n)$	$X \sim N(0,1),\ Y \sim \chi^2(n)$, 独立
样本均值	$\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$\sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$ √	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
样本方差	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\sim \chi^2(n-1)$ √	$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$
	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$\sim t(n-1)$	

(17, 4分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的样本，则下面结论**不正确**的是 ______

(A) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2$ 分布 ×

(B) $2(X_n - X_1)^2 \sim \chi^2$ 分布

(C) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2$ 分布 ×

(D) $n(\bar{X}-\mu)^2 \sim \chi^2$ 分布

解： $X_i \sim N(\mu,1) \rightarrow X_i - \mu \sim N(0,1) \rightarrow \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$ (A)对

$$(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$$ (C)对

$X_i \sim N(0,1)$ 独立

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

(17, 4分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,1)$ 的样本，则下面结论不正确的是 ___(B)___

(A) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2$ 分布 ×

(B) $2(X_n - X_1)^2 \sim \chi^2$ 分布

(C) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2$ 分布 ×

(D) $n(\bar{X}-\mu)^2 \sim \chi^2$ 分布 ×

解： $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n}) \rightarrow \sqrt{n}(\bar{X}-\mu) \sim N(0,1) \rightarrow n(\bar{X}-\mu)^2 \sim \chi^2(1)$ (D)对

$X_n, X_1 \sim N(\mu,1) \rightarrow X_n - X_1 \sim N(0,2) \rightarrow \frac{X_n - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

$\rightarrow \frac{1}{2}(X_n - X_1)^2 \sim \chi^2(1)$

$X_i \sim N(0,1)$ 独立

$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$

$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

(B)不对，故选(B)

$X_i \sim N(0,4)$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$$

（98, 3分）

设X_1, X_2, X_3, X_4是来自正态总体$N(0,2^2)$的样本，

$$X = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$$

则当$a =$ ____ , $b =$ ____ 时，统计量X服从 χ^2分布，其自由度 ____。

解：由于X_1, X_2, X_3, X_4独立且服从正态分布$N(0,2^2)$，则有：

$$X_1 - 2X_2 \sim N(0,20) \rightarrow \frac{X_1 - 2X_2}{\sqrt{20}} \sim N(0,1)$$

$$E(X_1 - 2X_2) = E(X_1) - 2E(X_2) = 0$$

$$D(X_1 - 2X_2) = D(X_1) + D(-2X_2) = D(X_1) + 4D(X_2) = 4 + 4 \times 4 = 20$$

$$3X_3 - 4X_4 \sim N(0,100) \rightarrow \frac{3X_3 - 4X_4}{\sqrt{100}} \sim N(0,1)$$

$$E(3X_3 - 4X_4) = 3E(X_3) - 4E(X_4) = 0$$

$$D(3X_3 - 4X_4) = 9D(X_3) + 16D(X_4) = 9 \times 4 + 16 \times 4 = 100$$

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$$

（98, 3分）

设X_1, X_2, X_3, X_4是来自正态总体$N(0,2^2)$的样本，

$$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$$

则当$a=\frac{1}{20}$，$b=\frac{1}{100}$时，统计量X服从 χ^2分布，其自由度 ___2___。

解： 由于X_1, X_2, X_3, X_4独立且服从正态分布$N(0,2^2)$，则有：

$$X_1-2X_2\sim N(0,20)\to\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}\sim N(0,1)$$

$$3X_3-4X_4\sim N(0,100)\to\frac{3X_3-4X_4}{\sqrt{100}}\sim N(0,1)$$

$$\left(\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}\right)^2+\left(\frac{3X_3-4X_4}{\sqrt{100}}\right)^2\sim\chi^2(2)$$

$$X=\frac{1}{20}(X_1-2X_2)^2+\frac{1}{100}(3X_3-4X_4)^2\sim\chi^2(2)\qquad\therefore a=\frac{1}{20},b=\frac{1}{100}$$

（94,3分 ）

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，$\bar{X}$ 是样本均值，

记 $S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$， $S_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$， $S_3^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$， $S_4^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$

则服从自由度为**n-1**的*t*分布的随机变量是 ______

(A) $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_1 / \sqrt{n-1}}$ (B) $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_2 / \sqrt{n-1}}$

(C) $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_3 / \sqrt{n}}$ (D) $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_4 / \sqrt{n}}$

小结

常用统计量及抽样分布

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$
$X_1, X_2, \cdots, X_n$

	统计量	概率分布	
χ^2统计量	$\chi^2=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$	$\sim \chi^2(n)$	$X_i \sim N(0,1)$ $i=1,2,\cdots,n$ 独立
t 统计量	$t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$	$\sim t(n)$	$X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 独立
样本均值	$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
样本方差	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\sim \chi^2(n-1)$	$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ √
	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$\sim t(n-1)$ √	

（94,3分 ）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\bar{X}$ 是样本均值，

记 $S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$， $S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$， $S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ ×， $S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ ×

则服从自由度为**n-1**的*t*分布的随机变量是 ___(B)___

(A) $t=\frac{\bar{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$ ×　　(B) $t=\frac{\bar{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$

(C) $t=\frac{\bar{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$ ×　　(D) $t=\frac{\bar{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$ ×

$$\boxed{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)}$$

$$\boxed{S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$

解： $(n-1)S_1^2=nS_2^2 \rightarrow S_1=\sqrt{\frac{n}{n-1}}S_2$

$$\frac{(\bar{X}-\mu)}{S_1/\sqrt{n}}\sim t(n-1)\rightarrow \frac{(\bar{X}-\mu)}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}S_2\Big/\sqrt{n}}\sim t(n-1)\rightarrow \frac{(\bar{X}-\mu)}{S_2/\sqrt{n-1}}\sim t(n-1)$$

第七章 参数估计

第一节 点估计
第三节 估计量的评选标准
第四节 区间估计
第五节 正态总体均值与方差的区间估计

参数估计研究解决的问题

设总体 $X \sim F(x,\theta)$, θ 是未知参数，

对未知参数 θ 进行估计 ---- 参数估计

方法：

1) 抽样：$X_1, X_2, \cdots, X_n$ (独立且与X同分布)

$x_1, x_2, \cdots, x_n$

不含任何未知量

2) 构造统计量：$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ --- θ 的估计量

$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ --- θ 的估计值

$\hat{\theta}$

参数估计

点估计：给出 θ 的估计值或近似值 $\hat{\theta}$

区间估计：给出 θ 的估计值或近似值 $\hat{\theta}$ 的误差范围与可信程度。

参数估计研究解决的问题

设总体 $X \sim F(x,\theta)$, θ是未知参数，

对未知参数 θ进行估计 ---- 参数估计

方法：

1) 抽样：$X_1, X_2, \cdots, X_n$ (独立且与X同分布)

$x_1, x_2, \cdots, x_n$

2) 构造统计量：$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ --- θ的估计量

$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ --- θ的估计值

$\hat{\theta}$

参数估计

- 点估计:
  - 矩估计法: θ 的矩估计量 § 7.1
  - 极大似然估计法: θ 的极大似然估计量 § 7.1
- 区间估计: $\hat{\theta}$ 的误差范围与可信程度 § 7.4, § 7.5

➢ 需要讨论估计量的评价标准 § 7.3

第七章 参数估计

第一节 点估计

第三节 估计量的评选标准

第四节 区间估计

第五节 正态总体均值与方差的区间估计

第七章 参数估计

第一节 点估计

- 矩估计法
- 极大似然法

构造统计量的方法

2. 极大似然法

极大似然法是在总体类型已知条件下使用的一种参数估计方法。

这个方法是英国统计学家费歇（**Fisher**）在1922年提出来的，是一种应用非常广泛的统计方法。

Fisher

极大似然法的客观依据

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$\mu=E(X)$$

引例. 总体(零件直径) $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2未知。今取 8 个零件，其直径为 $X_1,\ X_2,\cdots,X_8$ 。测得直径(cm)如下：求：μ 的估计值。

74.001, 74.005, 74.003, 74.001, 74.000, 73.998, 74.006, 74.002

$$\bar{x}=\frac{1}{8}(74.001+74.005+74.003+74.001+74.000+73.998+74.006+74.002)=74.002$$

零件平均直径的估计值为：$\hat{\mu}=74.002$

问题: 这个估计值的可信程度有多大？

极大似然法的客观依据:

因为是用样本值计算估计值，所以样本值出现的概率越大，估计值的可信程度就越大。因此希望取未知参数的估计使样本值出现的概率最大。

1 2

极大似然估计

极大似然估计法的步骤：

$X_1, X_2, \cdots, X_n$
$x_1, x_2, \cdots, x_n$
独立且同分布

(1) 总体 X 是离散型随机变量

甲乙比赛，甲得分为X

例1. 设总体 $X \sim B(1, p)$, p 未知。 $X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自 X 的样本，

1,1,0,1,1,0,0,0,…1,1

$x_1, x_2, \ldots, x_n$是样本值。求 p 的极大似然估计量 $\hat{p}$

X	0	1
P_k	$1-p$	p

分布律：$P\{X = x\} = p^x (1-p)^{1-x}$, $x = 0, 1$

$$P\{X_1 = x_1\} = p^{x_1} (1-p)^{1-x_1}, \quad x_1 = 0, 1$$

$$P\{X_2 = x_2\} = p^{x_2} (1-p)^{1-x_2}, \quad x_2 = 0, 1$$

$$P\{X_n = x_n\} = p^{x_n} (1-p)^{1-x_n}, \quad x_n = 0, 1$$

1) 计算样本值出现的概率：

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\} = P\{X_1 = x_1\} \cdot P\{X_2 = x_2\} \cdots P\{X_n = x_n\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i} = L(p)$$ ---似然函数

例1. 设总体 $X \sim B(1,p)$, p 未知。 $X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自 X 的样本，

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是样本值。求 p 的极大似然估计量 $\hat{p}$

1,1,0,1,0,1,1,0,1,1

分布律：$P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x}$, $x=0,1$

1) 计算样本值出现的概率(似然函数)： $L(p)=p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$

2) 计算似然函数的最大值点：

取对数：$\ln L(p)=(\sum_{i=1}^{n} x_i)\ln p+(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)\ln(1-p)$

求导,令其为零：$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p}-\dfrac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}=0 \Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p}=\dfrac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}$

求解：$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i-\cancel{(\sum_{i=1}^{n} x_i)p}=np-\cancel{(\sum_{i=1}^{n} x_i)p}$

$\Rightarrow \hat{p}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i=\bar{x}$ p 的极大似然估计值 $\hat{p}=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i=\dfrac{7}{10}=0.7$

$\hat{p}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i=\bar{X}$ p 的极大似然估计量

极大似然估计法的步骤：

$$X_1, X_2, \cdots, X_n$$
$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

独立且同分布

$X \sim B(1, p)$

$X \sim B(n, p)$

$X \sim P(\lambda)$

(1) 总体 X 是离散型随机变量，其分布律为：

$$P(X = x) = p(x, \theta), \quad \theta \text{ 为未知参数.}$$

又设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的一组样本值.

1) 计算样本值出现的概率：

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\}$$

$$= P\{X_1 = x_1\} \cdot P\{X_2 = x_2\} \cdots P\{X_n = x_n\}$$

$$= p(x_1, \theta) \cdot p(x_2, \theta) \cdots p(x_n, \theta)$$

$$P(X_1 = x_1) = p(x_1, \theta),$$
$$P(X_2 = x_2) = p(x_2, \theta),$$
$$P(X_n = x_n) = p(x_n, \theta).$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \theta) \text{ —— } \theta \text{ 的函数}$$

$$= L(\theta) \text{ —— } X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ 的似然函数}$$

独立且同分布 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

5, 10, 27, 34, 147

极大似然估计法的步骤:

(1) 分布律为: $X \sim p(x,\theta)$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$是样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的一组样本值

1) 计算样本值出现的概率(似然函数):

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta)$$

$$P(X_1 = 5) = \frac{\lambda^5 e^{-\lambda}}{5!}$$

$$P(X_2 = 10) = \frac{\lambda^{10} e^{-\lambda}}{10!}$$

$$P(X_3 = 27) = \frac{\lambda^{27} e^{-\lambda}}{27!}$$

例如: $X \sim P(\lambda)$ $\quad P(X = x) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \cdots$

$$L(\lambda) = P\{X_1 = 5, X_2 = 10, X_3 = 27, X_4 = 34, X_5 = 147\}$$

$$= P\{X_1 = 5\} \cdot P\{X_2 = 10\} \cdot P\{X_3 = 27\} \cdot P\{X_4 = 34\} \cdot P\{X_5 = 147\}$$

$$= \frac{\lambda^5 e^{-\lambda}}{5!} \cdot \frac{\lambda^{10} e^{-\lambda}}{10!} \cdot \frac{\lambda^{27} e^{-\lambda}}{27!} \cdot \frac{\lambda^{34} e^{-\lambda}}{34!} \cdot \frac{\lambda^{147} e^{-\lambda}}{147!}$$

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$
$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

极大似然估计法的步骤：

(1) 分布律为：$X \sim p(x, \theta)$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$是样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的一组样本值。

1) 计算样本值出现的概率(似然函数)：

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta)$$

2) 计算似然函数的最大值点：

选择参数的估计值，使样本值出现的概率最大。

即取 $\hat{\theta} \in \Theta$, 使 $L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$

称：$\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2 \cdots, x_n)$ 为参数 θ 的极大似然估计值；

$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2 \cdots, X_n)$ 为参数 θ 的极大似然估计量。

(1) 分布律为：$X \sim P(x,\theta)$ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是样本值.

1) 计算似然函数：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta)$

2) 计算似然函数的最大值点：即取 $\hat{\theta}\in\Theta$，使 $L(\hat{\theta})=\max_{\theta\in\Theta} L(\theta)$

求 $\max_{\hat{\theta}\in\Theta} L$ $\xrightarrow{\text{a) 可微}}$ 求 $L(\theta)$的驻点：$\dfrac{\mathrm{d}L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$

$\xrightarrow{\text{b) } lnx\text{单调}}$ 求 $\ln L(\theta)$ 的驻点：$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$

求解方程得：$\hat{\theta}$ 为极大似然估计值(量).

c) 当似然函数不可微或方程无解时，则应直接寻求能使 $L(\theta)$ 达到最大值的解 $\hat{\theta}$ 作为极大似然估计值(量).

（02, 7分）

例2. 设总体 X 的分布律为：

X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

$0<\theta<1/2$

利用总体X的如下样本值：3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3

求 θ 的极大似然估计值.

（02, 7分）

例2. 设总体 X 的分布律为：$0 < \theta < 1/2$

X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

利用总体X的如下样本值：3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3　$n = 8$

求 θ 的极大似然估计值.

解：1.似然函数　$X_1, X_2, \cdots, X_8$
$x_1, x_2, \cdots, x_8$

$$L(\theta) = P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_8 = x_8\}$$

$$= P\{X_1 = x_1\} \cdot P\{X_2 = x_2\} \cdots P\{X_8 = x_8\}$$

$$= P\{X_1 = 3\} \cdot P\{X_2 = 1\} P\{X_3 = 3\} P\{X_4 = 0\}$$

$$\cdot P\{X_5 = 3\} \cdot P\{X_6 = 1\} P\{X_7 = 2\} P\{X_8 = 3\}$$

$$= (1-2\theta)^4 \cdot [2\theta(1-\theta)]^2 \cdot \theta^2 \cdot \theta^2$$

（02, 7分）

例2. 设总体 X 的分布律为：

X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

$0<\theta<1/2$

利用总体X的如下样本值：3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3　$n=8$

求 θ 的极大似然估计值.　$X_1, X_2, \cdots, X_8$

$x_1, x_2, \cdots, x_8$

解：

1. 似然函数 $L(\theta)=(1-2\theta)^4\cdot[2\theta(1-\theta)]^2\cdot\theta^2\cdot\theta^2$

2. 取对数：$\ln L(\theta)=4\ln(1-2\theta)+2\ln 2\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln\theta$

3. 求导,令其为零：$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{8}{1-2\theta}+\dfrac{2}{\theta}-\dfrac{2}{1-\theta}+\dfrac{4}{\theta}=0$

4. 求解：$12\theta^2-14\theta+3=0\rightarrow\theta=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{12}$　取：$\hat{\theta}=\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$　$\left(\dfrac{7+\sqrt{13}}{12}>\dfrac{1}{2}\right)$

极大似然估计值

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\theta)$$

极大似然估计法的步骤：

(2) 总体 X 是连续型随机变量，概率密度：$f(x,\theta),\theta$ 为未知参数.

设 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 是样本 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 的一组样本值.

1) 计算似然函数：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=f(x_1,\theta)\cdot f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)$

例如：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$L(\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdots\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

2) 计算似然函数的最大值点：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L(\mu,\sigma^2)=0\\ \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln L(\mu,\sigma^2)=0\end{aligned}\right\}\rightarrow\hat{\mu},\hat{\sigma}^2$$

(2) 总体 X 的概率密度：$f(x,\theta)$，θ 为未知参数.

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的一组样本值.

1) 计算似然函数：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = f(x_1,\theta)\cdot f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)$

计算样本取样本值的概率：

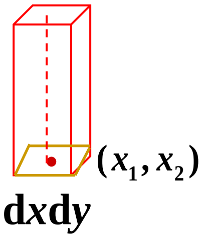
计算 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 在 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的邻域里的概率P，比如：

计算 (X_1, X_2) 在 (x_1, x_2) 的邻域里的概率P_1

$P_1 =$ (X_1, X_2) 的概率密度 $f(x,y)$ 在 (x_1, x_2) 的邻域 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的积分

= 曲顶柱体的体积≈平顶柱体的体积

$= f(x_1, x_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(x_1,\theta) f(x_2,\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （X_1, X_2独立）



同理有：

$$P \approx \underbrace{f(x_1,\theta)\cdot f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)}_{L(\theta)}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

极大似然估计法的步骤：

(1) 总体 X 的分布律为： $P(X=x)=p(x,\theta)$,

(2) 总体 X 的概率密度为：$f(x,\theta)$,

θ 为未知参数.

又设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的一组样本值.

1. 似然函数(样本值出现的概率)：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)=p(x_1,\theta)\cdot p(x_2,\theta)\cdots p(x_n,\theta)$$

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=f(x_1,\theta)\cdot f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)$$

2. 取对数：$\ln L(\theta)$

3. 求导,令其为0：$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$

4. 求解：$\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$　　$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

极大似然估计值　　极大似然估计量

例3. 设 $X_1, X_2, \ldots X_n$ 是取自总体 X 的一个样本,其概率密度为:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad \text{其中 } \theta>0$$

求 θ 的极大似然估计.

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$$

解: 1. 似然函数:

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=f(x_1,\theta)\cdot f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)$$

$$=\begin{cases}\theta x_1^{\theta-1}\cdot\theta x_2^{\theta-1}\cdots\theta x_n^{\theta-1} & 0<x_1,x_2,\cdots,x_n<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{\theta-1}=\theta^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta-1}, & 0<x_1,x_2,\cdots,x_n<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

解：1. 似然函数：

$$L(\theta)=\begin{cases}\theta^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta-1}, & 0<x_1,x_2,\cdots,x_n<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

2. 取对数：

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \quad 0<x_1,x_2,\cdots,x_n<1$$

3. 求导,令其为0：$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$,

4. 求解：

$$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i} \qquad \hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$$

极大似然估计值　　　极大似然估计量

例4. 设总体 $X \sim U(a,b)$, a, b未知，$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自X的样本，$x_1, x_2, \ldots, x_n$是样本值。求a, b的极大似然估计量$\hat{a}, \hat{b}$.

解:

$$f(x,a,b)=\begin{cases} 1/(b-a), & a \le x \le b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

1. 似然函数:

$$L(a,b)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,a,b)$$

$$= f(x_1,a,b)\cdot f(x_2,a,b)\cdots f(x_n,a,b)$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)^n}, & a \le x_1, x_2, \cdots, x_n \le b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例4. $X \sim U(a,b)$, 求a, b的极大似然估计量 $\hat{a}, \hat{b}$.

解:

1. 似然函数: $L(a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)^n}, & a \le x_1, x_2, \cdots, x_n \le b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

2. 取对数: $\ln L(a,b) = -n\ln(b-a)$

3. 取偏数: $\dfrac{\partial \ln L}{\partial a} = \dfrac{n}{b-a} > 0 \qquad a\uparrow, \ln L\uparrow, L\uparrow$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial b} = -\frac{n}{b-a} < 0 \qquad b\downarrow, \ln L\uparrow, L\uparrow$$

例4. $X \sim U(a,b)$, 求a, b的极大似然估计量 $\hat{a}, \hat{b}$.

解:

1\. 似然函数： $L(a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)^n}, & a \le x_1, x_2, \cdots, x_n \le b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

4\. 取a, b使似然函数达到最大:

$$L(a,b) = \frac{1}{(b-a)^n}, \quad a \le x_1, x_2, \cdots, x_n \le b$$

1,2,3,1,3,1,1,2,1,3

$$\le \frac{1}{(\hat{b}-\hat{a})^n}, \quad \hat{a} = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = 1, \quad \hat{b} = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = 3$$

$a\uparrow, b\downarrow, \ L\uparrow$

a,b的极大似然估计值： $\hat{a} = \min\limits_{1\le i\le n} x_i$, $\hat{b} = \max\limits_{1\le i\le n} x_i$

a,b的极大似然估计量： $\hat{a} = \min\limits_{1\le i\le n} X_i$, $\hat{b} = \max\limits_{1\le i\le n} X_i$

第七章 参数估计

第一节 点估计

- 矩估计法
- 极大似然法

作 业　　第七章习题

授课内容	习题七
7.1 点估计(极大似然估计)	3, 4（1）（2）极大似然
7.1 点估计(矩估计) 7.3 估计量的评选标准	1, 2矩估计, 10, 11, 12, 14
7.5 正态总体均值与方差的区间估计	16均值，18,19方差

（17, 11分）

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做n次测量，该物体的质量 μ 是已知的。设n次测量结果是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，该工程师记录的是n次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu|, i = 1, 2, \cdots, n$ ，利用 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 估计σ 。

(1)求 Z_i 的概率密度；

(2)利用一阶矩求σ的矩估计量;

(3)求σ的极大似然估计量 $\hat{\sigma}$。

（17, 11分）

$X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，

$Z_i = |X_i - \mu|$

$$\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

(1)求 Z_i 的概率密度；

解：设 Z_i 的分布函数是 $F(z)$，概率密度是 $f(z)$

当 $z \le 0$ 时, $F(z) = P(Z_i \le z) = 0$

当 $z > 0$ 时, $F(z) = P(Z_i \le z) = P(|X_i - \mu| \le z) = P\left(\left|\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right| \le \frac{z}{\sigma}\right)$

$$= P\left(-\frac{z}{\sigma} \le \frac{X_i - \mu}{\sigma} \le \frac{z}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{z}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - 1$$

$$f(z) = F'(z) = \frac{2}{\sigma}\varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, z > 0$$

（17, 11分）

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，

$Z_i = |X_i - \mu|$，利用 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 估计 σ 。

$z_1, z_2, \cdots, z_n$

$$f(z) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, z > 0$$

(3)求 σ 的极大似然估计量 $\hat{\sigma}$

$$\prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{z_1^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{z_2^2}{2\sigma^2}} \cdots e^{-\frac{z_n^2}{2\sigma^2}}$$

解：

1. 似然函数 $L(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} f(z_i, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2}$

2. 取对数：$\ln L(\sigma) = n\ln\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right) - n\ln(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2$

3. 求导,令其为零：$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) = -\frac{2\sigma}{\sigma^4}$$

4. 求解：$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2}$ $\quad$ $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2}$

极大似然估计值 $\quad$ 极大似然估计量

（18, 11分）

设总体X的概率密度为$f(x,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty<x<+\infty$, $\sigma>0$ 是未知参数， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体X 的样本，

(1)求 σ 的极大似然估计量 $\hat{\sigma}$；

(2)求 $E\hat{\sigma}$ 和 $D\hat{\sigma}$ 。

（18, 11分）

设总体X的概率密度为 $f(x,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty<x<+\infty,$ $\sigma>0$ 是未知参数， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体X 的样本，

(1)求 σ 的极大似然估计量 $\hat{\sigma}$；

解：1. 似然函数 $L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x_i|}{\sigma}},\quad -\infty<x_i<+\infty$

$$=\frac{1}{(2\sigma)^n}e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$$

2. 取对数：$\ln L(\sigma)=-n\ln(2\sigma)-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

3. 求导,令其为零：$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$

4. 求解： $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ $\qquad$ $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$

极大似然估计值 $\qquad$ 极大似然估计量

设总体X的概率密度为 $f(x,\sigma)=\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty$

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

$\sigma>0$ 是未知参数， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体X 的样本，

(2)求 $E\hat{\sigma}$ 和 $D\hat{\sigma}$

$$E|X_i|=E|X|$$

$$\boxed{\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|}$$

解：

$$E\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|=E|X|=\frac{1}{2\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|e^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sigma}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}(-\frac{x}{\sigma})=-\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}e^{-\frac{x}{\sigma}}$$

$$=-(xe^{-\frac{x}{\sigma}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x)=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x$$

$$=-\sigma\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}(-\frac{x}{\sigma})=-\sigma e^{-\frac{x}{\sigma}}\Big|_0^{+\infty}=\sigma$$

（18, 11分）

设总体X的概率密度为 $f(x,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty<x<+\infty$,

$\sigma>0$ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体X 的样本，

(2)求 $E\hat{\sigma}$ 和 $D\hat{\sigma}$

$D|X_i|=D|X|$

$\boxed{\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|}$

解：$D\hat{\sigma}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D|X_i|=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D|X|=\frac{1}{n^2}\cdot nD|X|$

$\boxed{E\hat{\sigma}=E|X|=\sigma}$

$$=\frac{1}{n}D|X|=\frac{1}{n}[EX^2-(E|X|)^2]$$

$$EX^2=\frac{1}{2\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma}\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x=2\sigma^2$$

$$D\hat{\sigma}=\frac{1}{n}[2\sigma^2-\sigma^2]=\frac{\sigma^2}{n}$$

练习1

求总体 X 的概率密度函数为：$f(x)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x}, & x\ge 0,\theta>0\\ 0, & x<0\end{cases}$

$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$

今从 X 中抽取10个个体，得到数据如下：样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$

1050 1100 1080 1200 1300 1250 1340 1060 1150 1150

试求未知参数 θ 的极大似然估计值。

解： 1. 似然函数：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = f(x_1,\theta)\cdot f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)$

$$=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\theta e^{-\theta x_i}=\theta e^{-\theta x_1}\cdot\theta e^{-\theta x_2}\cdots\theta e^{-\theta x_n} & x_1,x_2,\cdots,x_n\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i}, & x_1,x_2,\cdots,x_n\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

练习1

求总体 X 的概率密度函数为：$f(x)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x}, & x\ge 0,\theta>0\\ 0, & x<0\end{cases}$

今从 X 中抽取10个个体，得到数据如下：样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$

$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$

1050 1100 1080 1200 1300 1250 1340 1060 1150 1150

试求未知参数 θ 的极大似然估计值。

解： 1. 似然函数：$L(\theta)=\begin{cases}\theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i}, & x_1,x_2,\cdots,x_n\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

2. 取对数：$\ln L(\theta)=n\ln\theta-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i,$ 当 $x_1,x_2,\cdots,x_n\ge 0$

3. 求导,令其为零：$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0,$

4. 求解：$\hat{\theta}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}=\dfrac{1}{\bar{x}},$ $\bar{x}=1168,$ $\hat{\theta}=\dfrac{1}{\bar{x}}=\dfrac{1}{1168}\approx 0.00086$

练习2

设总体 X 的概率密度函数为:

$$f(x,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$$ 其中未知参数 $\beta>1$,

$x_1,\ x_2,\cdots,x_n$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，求:

求 β 的极大似然估计量.

解: 1. 似然函数 $L(\beta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\beta)=f(x_1,\beta)\cdot f(x_2,\beta)\cdots f(x_n,\beta)$

$$=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{\beta}{x_i^{\beta+1}}\\ 0,\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x_1^{\beta+1}}\cdot\dfrac{\beta}{x_2^{\beta+1}}\cdots\dfrac{\beta}{x_n^{\beta+1}}=\dfrac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}} & x_1,x_2,\cdots x_n>1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

2. 取对数: $\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

练习2

设总体 X 的概率密度函数为：$f(x,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$

$x_1,\ x_2,\cdots,x_n$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，求：

求 β 的极大似然估计量。

解：1. 似然函数 $L(\beta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\beta)=\dfrac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}$　　$x_1,x_2,\cdots x_n>1$

2. 取对数：$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

3. 求导,令其为零：$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\beta)}{\mathrm{d}\beta}=\dfrac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

4. 求解：$\hat{\beta}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$　　$\hat{\beta}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

β 的极大似然估计值　　β 的极大似然估计量

（05, 4分）

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geq 2)$是来自总体 $N(0,1)$ 的样本， $\bar{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则______

(A) $n\bar{X} \sim N(0,1)$

(B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$

(C) $\dfrac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$

(D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1)$

（05, 4分）

$X_i \sim N(0,1)$

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geq 2)$是来自总体 $N(0,1)$ 的样本， $\bar{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则______

(A) $n\bar{X} \sim N(0,1)$ ×

(B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$

(C) $\dfrac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$

(D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1)$

解： $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$n\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(0,n)$, (A)不对

（05, 4分）

$X_i \sim N(0,1)$

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geq 2)$是来自总体 $N(0,1)$ 的样本， $\bar{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则______

(A) $n\bar{X} \sim N(0,1)$ ×

(B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$ ×

(C) $\dfrac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$ ×

(D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1)$

解：

$$(n-1)S^2 = \frac{(n-1)S^2}{1} \sim \chi^2(n-1),$$ (B)不对

$$\boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)}$$

$$\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S} = \frac{\bar{X}-0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$ (C)不对

$$\boxed{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)}$$

（05, 4分）

$X_i \sim N(0,1)$

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geq 2)$是来自总体 $N(0,1)$ 的样本， $\bar{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则 (D)

(A) $n\bar{X} \sim N(0,1)$ ×

(B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$ ×

(C) $\dfrac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$ ×

(D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1)$

解： $X_1^2 \sim \chi^2(1)$, $\sum_{i=2}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$, X_1^2 与 $\sum_{i=2}^{n} X_i^2$ 相互独立，

$$\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2} = \frac{X_1^2 / 1}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2 \Big/ n-1} \sim F(1, n-1)$$

$X \sim \chi^2(n_1)$,

$Y \sim \chi^2(n_2)$, 独立

$$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$$