第三章 多维随机变量及其分布

第一节 二维随机变量及其联合分布

第二节 边缘分布

第三节 条件分布 ✖

第四节 相互独立的随机变量

第五节 两个随机变量的函数的分布

教学计划：3次课-9学时

两章关系	第二章 一维 X	第一节 二维(X,Y)	第二节 边缘分布	第三节 相依(条件分布)	第四节 独立
分布函数	$F(x)$	$F(x,y)$	$F_X(x)$ $F_Y(y)$	$P(A\|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$	$P(AB)=P(A)P(B)$
离散型分布律	$P\{X=x_k\}$ $=p_k$	$P\{X=x_i,Y=y_j\}$ $=p_{ij}$	$P\{X=x_i\}$ $P\{Y=y_i\}$	$P\{Y=y_j\|X=x_i\}$ $P\{X=x_i\|Y=y_j\}$	$P\{X=x_i,Y=y_j\}$ $=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}$
连续型概率密度	$f(x)$	$f(x,y)$	$f_X(x)$ ★ $f_Y(y)$	$f_Y(y\|X=x)$ $f_X(x\|Y=y)$	$f(x,y)=$ $f_X(x)\cdot f_Y(y)$
算概率	$P(x_1<X\le x_2)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x$ $=\sum\limits_{x_1<x_k\le x_2}p_k$		$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ★ $=\sum\limits_{(x_i,y_j)\in G}p_{ij}$		
函数分布	$Y=g(X)$ $f_X(x)\rightarrow f_Y(y)=F_Y'(y)$		$Z=g(X,Y)$ 第五节 $f(x,y)\rightarrow f_Z(z)=F_Z'(z)$ 分布函数法 ★★		

第三章 多维随机变量及其分布

- 第一节 二维随机变量及其联合分布
- 第二节 边缘分布
- 第四节 相互独立的随机变量
- 第五节 两个随机变量的函数的分布

第三章 多维随机变量及其分布

第一节 二维随机变量及其联合分布函数

- 二维随机变量及分布函数
- 二维离散型随机变量及其分布
- 二维连续型随机变量及其分布

一. 二维随机变量及分布函数

1. 二维随机变量产生的背景

在实际问题中，有很多情况下随机试验的结果需要同时用两个随机变量来描述：

例： 为了研究某一地区学龄前儿童的发育情况，对这一地区的儿童进行抽查。对于每个抽查儿童都测量和记录他(她)的体重 W 和身高 H 。

样本空间 $S=\{e\}=\{$该地区抽查到的儿童$\}$

而 $W(e)$ 和 $H(e)$ 是定义在 S 上的两个随机变量

$(W(e), H(e))$称为二维随机变量

一. 二维随机变量及分布函数

1. 二维随机变量产生的背景

在实际问题中，有很多情况下随机试验的结果需要同时用两个随机变量来描述：

例： 炮弹的弹着点的位置需要由它的横坐标和纵坐标来确定。

样本空间 $S=\{e\}=\{$炮弹的弹着点的位置$\}$

$X(e)$ 表示弹着点位置的横坐标

$Y(e)$ 表示弹着点位置的纵坐标

则 $X(e)$ 和 $Y(e)$ 是定义在 S 上的两个随机变量

$(X(e), Y(e))$称为二维随机变量

一. 二维随机变量及分布函数

2. 二维随机变量的定义

定义1 设$S=\{e\}$是随机试验E的样本空间,

$X=X(e)$, $Y=Y(e)$ 是定义在S上的随机变量,

由它们构成的向量(X, Y)称为二维随机变量.

注:
- X, Y要求定义在同一个样本空间S上.
- (X, Y)的几何意义:

 可以将二维随机变量(X,Y)看成是平面上的一个随机点的坐标。

第三章 多维随机变量及其分布

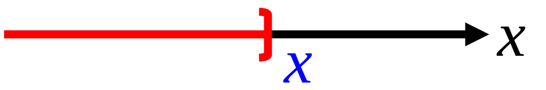
第一节 二维随机变量及其联合分布函数

- 二维随机变量及分布函数
- 二维离散型随机变量及其分布
- 二维连续型随机变量及其分布

3. 二维随机变量的分布函数

复习：一维随机变量的分布函数

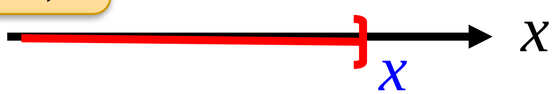
设 X 是一个一维随机变量，



$$F(x) = P(X \le x)$$

3. 二维随机变量的分布函数

$F(x)=P(X\le x)$



定义2 设 (X,Y) 是二维随机变量，对任意的实数 x, y，

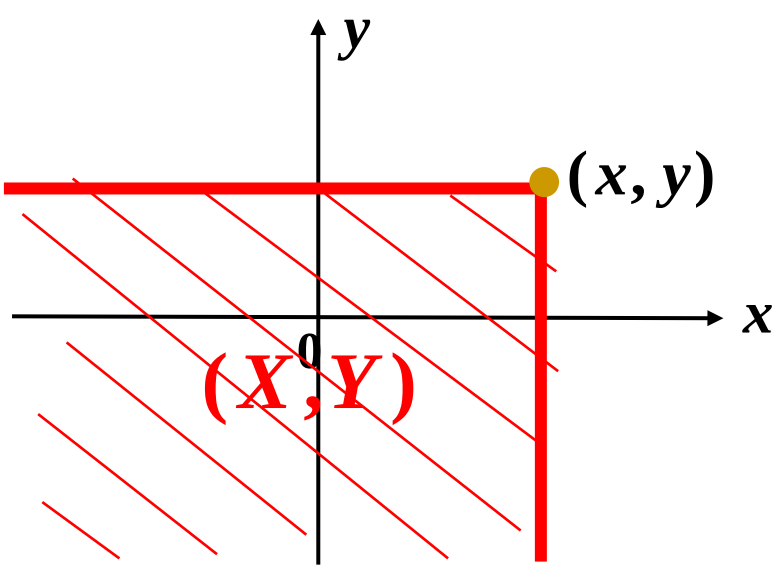
二元函数 $F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$ (积事件) 称为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数或 X与Y 的联合分布函数。

注:

- $F(x, y)$ 定义在整个平面上。
- $F(x, y)$ 几何意义：

  将(X, Y)看成是随机点的坐标，则

  $F(x, y)$ = 随机点 (X,Y)落在以 (x, y) 为顶点的左下方无穷矩形内的概率.



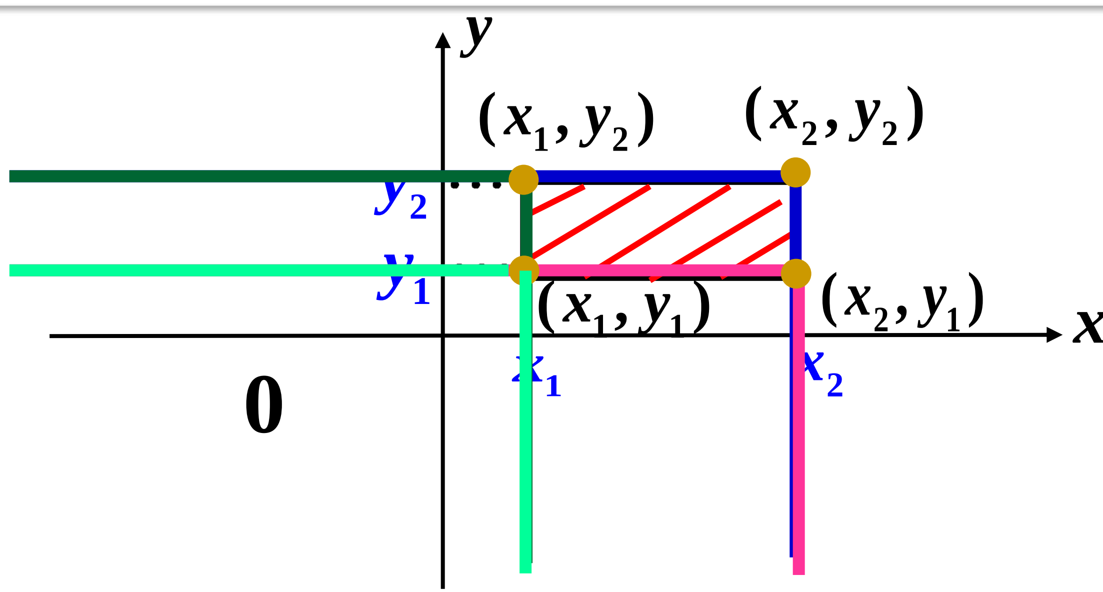
$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$$

$$P(x_1<X\le x_2)=F(x_2)-F(x_1)$$

➤(X, Y)落在矩形区域: $x_1<x\le x_2$, $y_1\le y\le y_2$ 的概率为:

$$P(x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2)$$

$$=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)$$



第三章 多维随机变量及其分布

第一节 二维随机变量及其联合分布函数

- 二维随机变量及分布函数
- 二维离散型随机变量及其分布
- 二维连续型随机变量及其分布

二. 二维离散型随机变量及其分布

1. 二维离散型随机变量的定义

如果二维随机变量(X,Y)可能的取值是有限对或可列对，则称(X,Y)为二维离散型随机变量.

2. 二维离散型随机变量的分布律

设(X,Y)的所有可能取的值为：(x_i, y_j)，$i, j = 1,2\cdots$

其相应的概率为：$P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) \quad i, j = 1,2,\cdots\cdots$

称为二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布或分布律，或称为X与Y联合分布律.

(X,Y): $(x_i, y_j), i,j=1,2\cdots\cdots$

$$P_{ij}=P(X=x_i, Y=y_j) \quad i,j=1,2,\cdots\cdots$$

注：➢ 同一维离散型随机变量类似，联合分布律可用下列表格形式表示：

X \ Y	y_0	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_0	p_{00}	p_{01}	$\cdots$	p_{0j}	$\cdots$
x_1	p_{10}	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
$\vdots$					
x_i	p_{i0}	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

$$P(X=x_0, Y=y_0)=p_{00}$$

$$P(X=x_0, Y=y_1)=p_{01}$$

$$P(X=x_1, Y=y_0)=p_{10}$$

➢联合分布律需满足：(1) $p_{ij}\geq 0$，(2) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$

例1 从 $1,2,3,\cdots\cdots21$ 数中任取一个数n,

当 n 能被 2 整除时，随机变量 $X=1$;

当 n 不能被 2 整除时，随机变量 $X=0$;

当 n 能被 3整除时， 随机变量 $Y=1$;

当 n 不能被 3 整除时，随机变量 $Y=0$.

求: (X,Y)的分布律

解: 由题意可知：X 取值为0, 1；Y 的取值为 0, 1

(X,Y): (0,0) (0,1) (1,0) (1,1)

解: (X,Y): $(0,0)$ $(0,1)$ $(1,0)$ $(1,1)$

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{7}{21}$	$\frac{4}{21}$
1	$\frac{7}{21}$	$\frac{3}{21}$

$$P(X=0,Y=0)=\frac{7}{21}$$

1,5

$$P(X=0,Y=1)=\frac{4}{21}$$

3,9

$$P(X=1,Y=0)=\frac{7}{21}$$

2,4,8,10,14,16,20这7个数不能被3整除,但能被2整除

$$P(X=1,Y=1)=\frac{3}{21}$$

6,12,18这3个数能被2整除,又能被3整除

不难验证: $p_{ij}>0,\quad \sum_{0}^{1}\sum_{0}^{1} p_{ij}=\frac{7}{21}+\frac{4}{21}+\frac{7}{21}+\frac{3}{21}=1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,
13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21

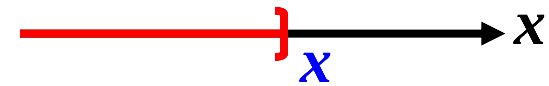
第三章 多维随机变量及其分布

第一节 二维随机变量及其联合分布函数

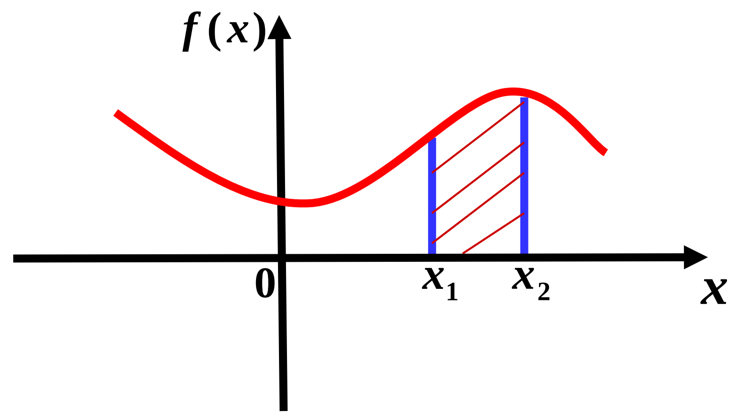
- 二维随机变量及分布函数
- 二维离散型随机变量及其分布
- 二维连续型随机变量及其分布

复习：一维连续型随机变量

X 为连续型随机变量：



$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$



性质1 $f(x) \ge 0$

性质2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

性质3 $P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$

性质4 $F'(x) = f(x)$

三. 二维连续型随机变量及其分布

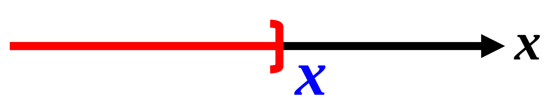
1. 二维连续型随机变量的定义及概率密度

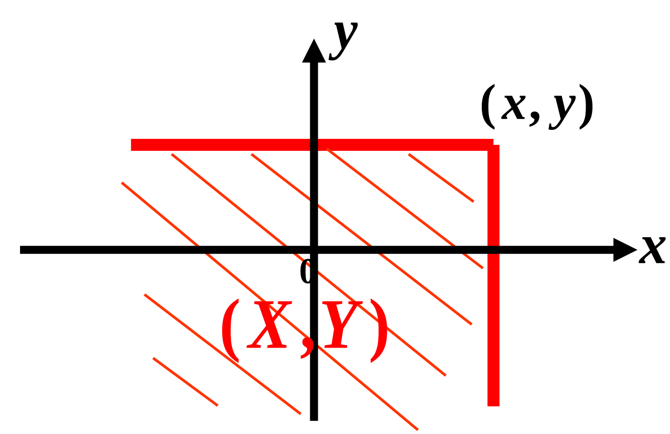
定义3 对于二维随机变量(X,Y) 的分布函数$F(x, y)$，若存在非负函数 $f(x, y)$, 对任意的x, y有：

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

则称 (X,Y) 是二维连续型随机变量，$f(x, y)$为 (X,Y) 的联合概率密度.

$$\boxed{P(X\le x)=F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t}$$





2. 概率密度的性质

1 $f(x)\geq 0$

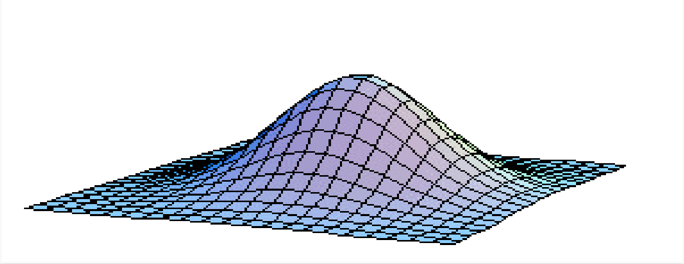
2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

3 $P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$

4 $F'(x) = f(x)$

性质1 $f(x,y)\geq 0$

性质2 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$



概率密度曲面下面的体积是1

性质3 若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续，

则：$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y} = f(x,y)$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$

$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

性质4 设 G 是 XOY 平面上的一个区域，则点(X,Y)落在G内的概率为:

★ $P\{(X,Y)\in G\} = \iint\limits_{G} f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

注：一维连续型随机变量的三种常用分布可推广到二维随机变量上。

复习：

$X \sim U(a,b)$ $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$X \sim E(\lambda)$ $$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \qquad \lambda=\frac{1}{\theta}$$

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<x<\infty$$

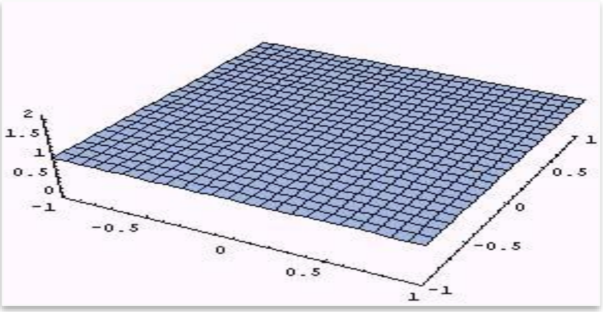
注： 一维连续型随机变量的三种常用分布可推广到二维随机变量上。

1^0 若 $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)} & \boxed{\begin{matrix}a_1\le x\le b_1\\ a_2\le y\le b_2\end{matrix}}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

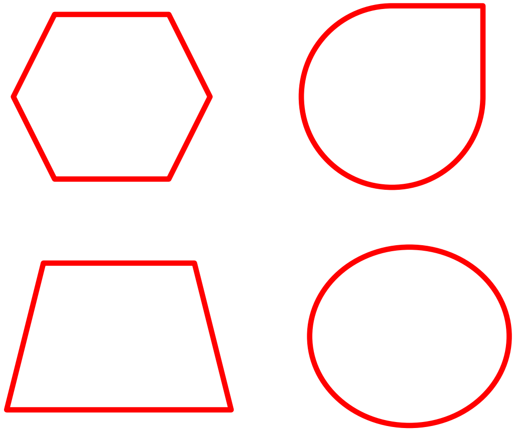
则称 (X,Y) 在矩形区域上服从均匀分布。

$X\sim U(a,b)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



注： 一维连续型随机变量的三种常用分布可推广到二维随机变量上。



1^0 若 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

则称 (X,Y) 平面区域D上服从均匀分布，A是D的面积。

$X \sim U(a,b)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$$

(X,Y) 只能在平面有限区域上服从均匀分布。

注: 一维连续型随机变量的三种常用分布可推广到二维随机变量上。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$$

2^0 若 $f(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

则称 (X,Y) 服从参数为 λ 的指数分布.

$X\sim E(\lambda)$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$X\sim E(\theta)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

注: 一维连续型随机变量的三种常用分布可推广到二维随机变量上。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$$

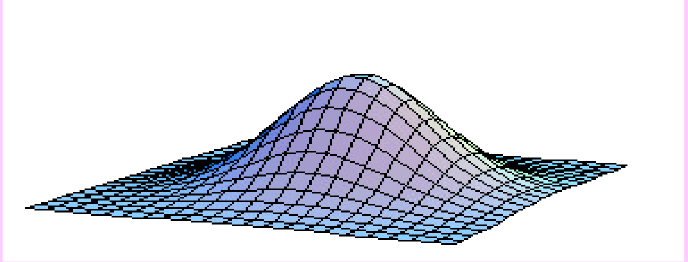
3^0 若 $f(x,y)$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

其中: $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 为5个常数,

则称 (X,Y)服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的正态分布.

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$



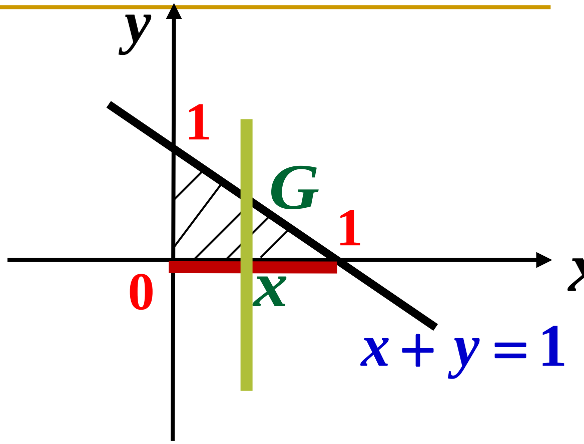
正态曲面下面的体积是1

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $\quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

例2 设 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

求: (X,Y) 落在 G 内的概率

G: $x+y=1$ 及 x 轴，y 轴所围区域



解: $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_G e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} e^{-(x+y)}\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} e^{-x}e^{-y}\mathrm{d}y=-\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{1-x} e^{-y}\mathrm{d}(-y)$$

$$=-\int_0^1 e^{-x}\left(e^{-y}\Big|_0^{1-x}\right)\mathrm{d}x=-\int_0^1 e^{-x}(e^{x-1}-1)\mathrm{d}x=-\int_0^1 (e^{-1}-e^{-x})\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 (e^{-x}-e^{-1})\mathrm{d}x=\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x-\int_0^1 e^{-1}\mathrm{d}x=-\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}(-x)-e^{-1}\int_0^1 \mathrm{d}x$$

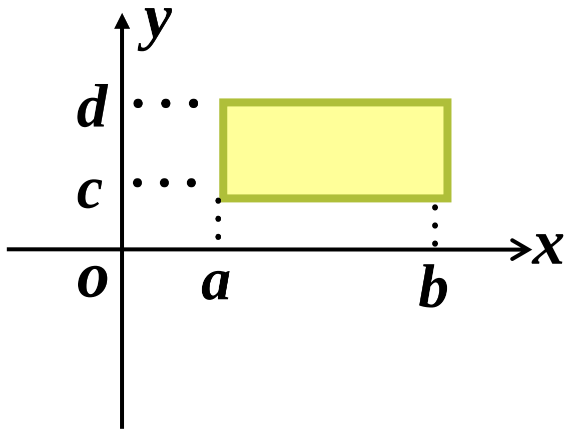
$$=-e^{-x}\Big|_0^1-e^{-1}x\Big|_0^1=-(e^{-1}-1)-e^{-1}(1-0)=1-2e^{-1}\approx 0.2642$$

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例3. 设随机变量 (X,Y) 在矩形域: $a \le x \le b, c \le y \le d$ 内服从均匀分布。

求: (1) (X,Y)联合概率密度

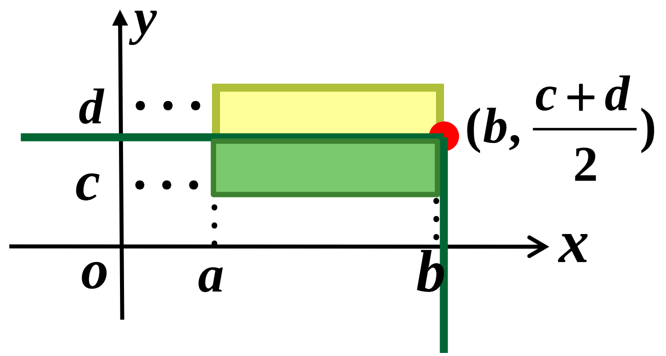
(2) $P(X \le b, Y \le \frac{c+d}{2})$



解: (1) 由题意在 $a \le x \le b, c \le y \le d$ 区域内 (X,Y) 服从均匀分布，所以联合概率密度为:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & a \le x \le b, c \le y \le d \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(2) $P\left(X \le b, Y \le \dfrac{c+d}{2}\right)$



$$= \iint\limits_{G} f(x, y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{\frac{c+d}{2}} f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{a}^{b} \int_{c}^{\frac{c+d}{2}} \frac{1}{(b-a)(c-d)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_{a}^{b} \int_{c}^{\frac{c+d}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{(b-a)\left(\dfrac{c+d}{2} - c\right)}{(b-a)(d-c)}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{2}(d-c)}{d-c} = \frac{1}{2}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & a \le x \le b,\ c \le y \le d \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

例4 设二维随机变

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

03, 4分

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le y\le 1 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ ----概率密度取值非零区域

求 $P\{X+Y\le 1\}$

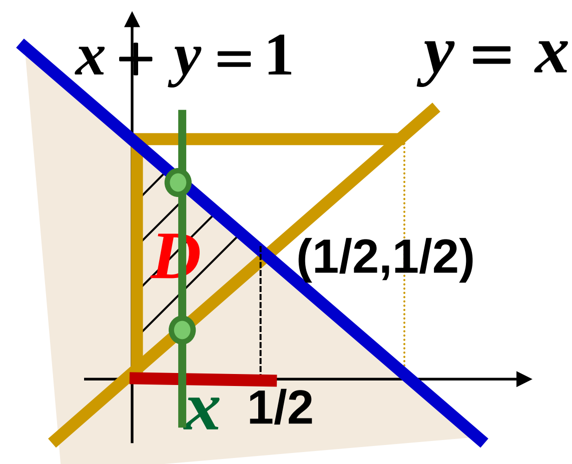
解： $$P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{G:\,x+y\le 1} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D} 6x\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{1-x}6x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}6x\mathrm{d}x\int_x^{1-x}\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}6x(y\Big|_x^{1-x})\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}6x(1-2x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}(6x-12x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}6x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{1}{2}}12x^2\mathrm{d}x=6\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}-12\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=3[(\frac{1}{2})^2-0]-4[(\frac{1}{2})^3-0]=\frac{1}{4}$$



➢ D是积分区域G和概率密度取值非零区域的交集

归纳题目类型:

$f(x,y) \longrightarrow P\{(X,Y)\in G\}$ ★

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- D是积分区域G和概率密度取值非零区域的交集。

第三章 多维随机变量及其分布

第一节 二维随机变量及其联合分布函数

- 二维随机变量及分布函数
- 二维离散型随机变量及其分布
- 二维连续型随机变量及其分布

练习

设随机变量 (X,Y) 的概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), & 0\le x\le 2, 2\le y\le 4 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

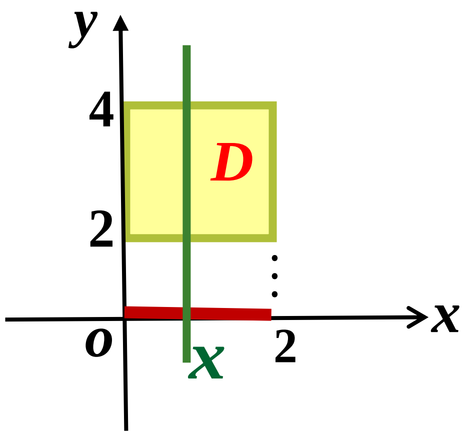
求: (1) 常数k;

(2) $P(X\le 1, Y\le 3)$, $P(X\le 1.5)$;

(3) $P(X+Y\le 4)$.

练习 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), & 0\le x\le 2, 2\le y\le 4 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



求: (1) 常数k;

解: (1)

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_2^4 k(6-x-y)\mathrm{d}y$$

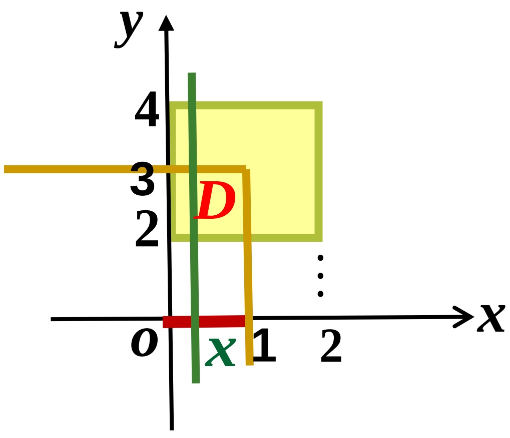
$$=k\int_0^2\mathrm{d}x\left[\int_2^4(6-x)\mathrm{d}y-\int_2^4 y\mathrm{d}y\right]=k\int_0^2\left[(6-x)y\Big|_2^4-\frac{1}{2}y^2\Big|_2^4\right]\mathrm{d}x$$

$$=k\int_0^2[2(6-x)-6]\mathrm{d}x=k\int_0^2(6-2x)\mathrm{d}x=k\left[6x\Big|_0^2-x^2\Big|_0^2\right]=8k$$

$$\therefore k=1/8$$

练习 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}1/8(6-x-y), & 0\le x\le 2, 2\le y\le 4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



求: (2) $P(X\le 1, Y\le 3)$, $P(X\le 1.5)$;

解: $P(X\le 1,Y\le 3)=\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{3} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1\mathrm{d}x\left[\int_2^3(6-x)\mathrm{d}y-\int_2^3 y\mathrm{d}y\right]=\frac{1}{8}\int_0^1\left[(6-x)y\Big|_2^3-\frac{1}{2}y^2\Big|_2^3\right]\mathrm{d}x$$

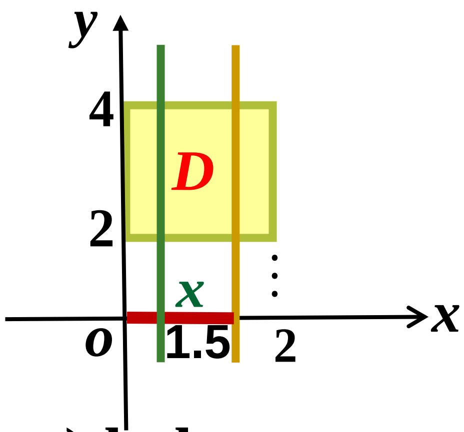
$$=\frac{1}{8}\int_0^1\left[(6-x)-\frac{5}{2}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int_0^1\left(\frac{7}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{2}x\Big|_0^1-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$$

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

练习 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}1/8(6-x-y), & 0\le x\le 2, 2\le y\le 4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



求: (2) $P(X\le 1, Y\le 3)$, $P(X\le 1.5)$;

解: $$P(X\le 1.5)=\int_{-\infty}^{1.5}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{1.5}\mathrm{d}x\int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\int_0^{1.5}[(6-x)y\Big|_2^4-\frac{1}{2}y^2\Big|_2^4]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{1.5}[2(6-x)-6]\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int_0^{1.5}(6-2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}(6x\Big|_0^{1.5}-x^2\Big|_0^{1.5})$$

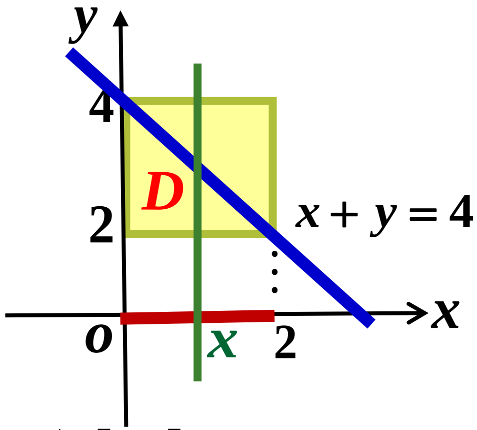
$$=\frac{1}{8}(9-2.25)=\frac{6.75}{8}=0.84375$$

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

练习

设随机变量 (X,Y) 的概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}1/8(6-x-y), & 0\le x\le 2, 2\le y\le 4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



求: (3) $P(X+Y\le 4)$.

解: $$P(X+Y\le 4)=\iint\limits_{x+y\le 4} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\int_0^2\Big[\int_2^{4-x}(6-x)\mathrm{d}y-\int_2^{4-x}y\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^2\Big[(6-x)y\Big|_2^{4-x}-\frac{1}{2}y^2\Big|_2^{4-x}\Big]\mathrm{d}x=\frac{1}{16}\int_0^2[12-8x+x^2]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{16}\Big[12x-4x^2+\frac{1}{3}x^3\Big]\Big|_0^2$$

$$=\frac{1}{16}\Big[24-16+\frac{8}{3}\Big]=\frac{2}{3}$$

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

第三章 多维随机变量及其分布

第一节 二维随机变量及其联合分布

第二节 边缘分布

第四节 相互独立的随机变量

第五节 两个随机变量的函数的分布

第三章 多维随机变量及其分布

第二节 边缘分布

- 离散型随机变量的边缘分布律
- 连续型随机变量的边缘概率密度

复习

一维离散型随机变量的分布律

X 的分布律：

X	0	1	2	3	4	5
P_k	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

- 分布律需满足：$(1)\ p_k \geq 0$，$(2)\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

一. 离散型随机变量的边缘分布律

已知 $P(X=x_i, Y=y_j)=P_{ij}$ 为 (X,Y) 的联合分布律

$X \backslash Y$	y_0	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	
x_0	p_{00}	p_{01}	$\cdots$	p_{0j}	$\cdots$	
x_1	p_{10}	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	
$\vdots$						
x_i	p_{i0}	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
$P(Y=y_j)$						

$$\because \{Y=y_0\}=\{X=x_0,Y=y_0\}\cup\{X=x_1,Y=y_0\}$$
$$\cup\cdots\cup\{X=x_i,Y=y_0\}\cup\cdots$$
$$\therefore P\{Y=y_0\}=P\{X=x_0,Y=y_0\}+P\{X=x_1,Y=y_0\}$$
$$+\cdots+P\{X=x_i,Y=y_0\}+\cdots$$

一. 离散型随机变量的边缘分布律

已知 $P(X=x_i, Y=y_j)=P_{ij}$ 为 (X,Y) 的联合分布律

$X \backslash Y$	y_0	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	
x_0	p_{00}	p_{01}	$\cdots$	p_{0j}	$\cdots$	
x_1	p_{10}	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	
$\vdots$						
x_i	p_{i0}	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
$P(Y=y_j)$	$P_{\bullet 0}$					

$$\therefore P\{Y=y_0\}=P\{X=x_0,Y=y_0\}+P\{X=x_1,Y=y_0\}$$

$$+\cdots+P\{X=x_i,Y=y_0\}+\cdots$$

$$=\sum_{i=0}^{+\infty} p_{i0}=p_{\bullet 0}$$

一. 离散型随机变量的边缘分布律

已知 $P(X=x_i, Y=y_j)=P_{ij}$ 为 (X,Y) 的联合分布律

$X \backslash Y$	y_0	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P(X=x_i)$
x_0	p_{00}	p_{01}	$\cdots$	p_{0j}	$\cdots$	$P_{0\bullet}$
x_1	p_{10}	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$P_{1\bullet}$
$\vdots$						$\vdots$
x_i	p_{i0}	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$P_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$P(Y=y_j)$	$P_{\bullet 0}$	$P_{\bullet 1}$	$\cdots$	$P_{\bullet j}$	$\cdots$	1

$+\infty$

$P_{i\bullet}$

注意:

1. 习惯上常将边缘分布律写在联合分布律表格的边缘上，由此得出边缘分布这个名词.
2. 由联合分布律可以确定边缘分布律，但由边缘分布律一般不能确定联合分布律.

例1. 设随机变量 X 在 1, 2, 3, 4 四个整数中等可能地取值；另一随机变量 Y 在 $1 \sim X$ 中等可能地取一整数.

求：二维随机变量 (X,Y) 的边缘分布律 $P_{i.}$ 与 $P_{.j}$

解: 先出求出 (X,Y) 的联合分布律

(1) 因为 X 的取值是1, 2, 3, 4, 所以 Y 的取值也是1, 2, 3, 4.

$X \backslash Y$	1	2	3	4	$P_{i.}$
1					
2					
3					
4					
$P_{.j}$					

例1. 设随机变量 X 在

另一随机变量Y 在

求：二维随机变量

解: 先出求出 (X,Y) 的

(1) 因为 X 的取值是1,

$P(X=1,Y=1)=P(X$

$X \backslash Y$	1	2	3	4	$P_{i\cdot}$
1	1/4	0	0	0	$1/4$
2	1/8	1/8	0	0	$1/4$
3	1/12	1/12	1/12	0	$1/4$
4	1/16	1/16	1/16	1/16	$1/4$
$P_{\cdot j}$	$25/48$	$13/48$	$7/48$	$3/48$	1

$$P(X=1,Y=2)=P(X=1)\cdot P(Y=2|X=1)=1/4\cdot 0=0$$

$$P(X=1,Y=3)=1/4\cdot 0=0 \quad P(X=1,Y=4)=1/4\cdot 0=0$$

$$P(X=2,Y=1)=P(X=2)\cdot P(Y=1|X=2)=1/4\cdot 1/2=1/8$$

$$P(X=2,Y=2)=P(X=2)\cdot P(Y=2|X=2)=1/4\cdot 1/2=1/8$$

$$P(X=2,Y=3)=P(X=2)\cdot P(Y=3|X=2)=1/4\cdot 0=0$$

$$P(X=2,Y=4)=1/4\cdot 0=0$$

(1) (X,Y)的联合分布律为：

$X \backslash Y$	1	2	3	4	$P_{i\cdot}$
1	1/4	0	0	0	1/4
2	1/8	1/8	0	0	1/4
3	1/12	1/12	1/12	0	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
$P_{\cdot j}$	25/48	13/48	7/48	3/48	1

(2) (X,Y)的边缘分布律为：

X	1	2	3	4
P_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	1	2	3	4
P_k	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{48}$

练习

把一枚均匀硬币抛掷三次，设 X 为三次抛掷中正面出现的次数，Y 为正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值.

求：(X,Y)的联合分布律与边缘分布律.

解：X ---三次抛掷中正面出现的次数，　故可取值：0, 1, 2, 3

三次抛掷中反面出现的次数，　可取值：3, 2, 1, 0

Y ---正面次数与反面次数差的绝对值，可取值：3, 1, 1, 3

(X, Y)可取值：(0,3), (1,1), (2,1), (3,3)

$$P(X=0,Y=3)=(1/2)^3=1/8$$

$$P(X=1,Y=1)=C_3^1(1/2)^3=3/8$$

$$P(X=2,Y=1)=C_3^2(1/2)^3=3/8$$

$$P(X=3,Y=3)=(1/2)^3=1/8$$

联合分布律：

X \ Y	1	3	
0	0	1/8	
1	3/8	0	
2	3/8	0	
3	0	1/8	

X ---三次抛掷中正面出现的次数，　故可取值：0, 1, 2, 3

三次抛掷中反面出现的次数，　可取值：3, 2, 1, 0

Y ---正面次数与反面次数差的绝对值，可取值：3, 1, 1, 3

(X, Y)可取值：(0,3), (1,1), (2,1), (3,3)

求：X, Y 的边缘分布律

X	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

Y	1	3
P	3/4	1/4

联合分布律：

X \ Y	1	3	$P(X=x_i)$
0	0	1/8	1/8
1	3/8	0	3/8
2	3/8	0	3/8
3	0	1/8	1/8
$P(Y=y_j)$	6/8	2/8	1

第三章 多维随机变量及其分布

第二节 边缘分布

- 离散型随机变量的边缘分布律
- 连续型随机变量的边缘概率密度

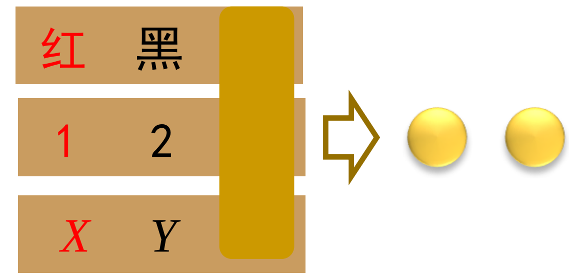
作业

授课内容	习题三
3.1 二维随机变量	1(1)(2)离散，3连续
3.2 边缘分布	6离散，7, 8, 9连续
3.4 相互独立的随机变量	16(2), 18, 19连续,
3.5 随机变量函数的分布	21(1),22

09, 11分

袋中有红黑白球数分别为1,2,3。现**有放回**从袋中取球两次，每次取一个球。以X,Y,Z分别表示两次取球所取得的红黑白球的个数。(1) 求 $P\{X=1|Z=0\}$; (2) 求二维随机变量(X,Y)的概率分布。

解:



(1) $P\{X=1|Z=0\}=\dfrac{P\{X=1,Z=0\}}{P\{Z=0\}}=\dfrac{4}{9}$

$$P\{X=1,Z=0\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{36}$$

$$P\{Z=0\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=0\}+P\{X=0,Y=2\}$$

$$=2\times\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{9}{36}$$

解2: $P\{X=1|Z=0\}=P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{9}$

09, 11分

袋中有红黑白球数分别为1,2,3。现有放回从袋中取球两次，每次取一个球。以X,Y,Z分别表示两次取球所取得的红黑白球的个数。(1) 求 $P\{X=1|Z=0\}$; (2) 求二维随机变量(X,Y)的概率分布。

解:

(2) $P\{X=0,Y=0\}=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{9}{36}$　　$P\{X=0,Y=1\}=2\times\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{12}{36}$

$$P\{X=0,Y=2\}=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{4}{36}$$

红	黑	白
1	2	3
X	Y	Z

$$P\{X=1,Y=0\}=2\times\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{6}{36}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=2\times\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{4}{36}$$

$$P\{X=1,Y=2\}=0$$

$$P\{X=2,Y=0\}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

X \ Y	0	1	2
0	9/36	12/36	4/36
1	6/36	4/36	0
2	1/36	0	0

09, 11分

袋中有红黑白球数分别为1,2,3。现有放回从袋中取球两次，每次取一个球。以X,Y,Z分别表示两次取球所取得的红黑白球的个数。(1) 求 $P\{X=1|Z=0\}$; (2) 求二维随机变量(X,Y)的概率分布。

解：

(3) 求X,Y的边缘分布律

X	0	1	2
P	25/36	10/36	1/36

Y	0	1	2
P	16/36	16/36	4/36

(4) X,Y是否相互独立？

显然不相互独立。

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	$\boxed{9/36}$	12/36	4/36	$\boxed{25/36}$
1	6/36	4/36	0	10/36
2	1/36	0	0	1/36
	$\boxed{16/36}$	16/36	4/36	