第一章 矩阵

第一章 矩阵

1.5 矩阵的秩与初等变换

- 初等矩阵
  - 三种初等矩阵
  - 用初等行变换求逆矩阵
  - 用初等行变换求解矩阵方程
- 矩阵的秩

初等矩阵

复习

1) $r_i \leftrightarrow r_j$
$c_i \leftrightarrow c_j$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_3]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=E(2,3)$$

2) $r_i \times k$
$c_i \times k$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3\times(-5)]{r_3\times(-5)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-5\end{pmatrix}=E(3(-5))$$

3) $r_i + kr_j$
$c_j + kc_i$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2+4c_3]{r_3+4r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{pmatrix}=E(3,2(4))$$

初等矩阵的作用：

复习

定理1.4 设A是 $m\times n$ 矩阵,

对A施行一次行变换 ⟷ A左乘以相应的m阶初等矩阵;

对A施行一次列变换 ⟷ A右乘以相应的n阶初等矩阵.

例 $$E_3(1,2)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&9&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&9&8&1\\1&2&3&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$AE_4(1,2)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&9&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&3&1\\9&1&8&1\\0&1&2&2\end{pmatrix}$$

初等矩阵的作用：初等变换可转化为矩阵与初等阵的乘积

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -18 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times 1/2]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -18 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-7r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} = B$$

$$E(3,2(-7))\cdot E(2(\frac{1}{2}))\cdot E(2,3)\cdot E(3,1(1))\cdot E(2,1(-3))\cdot E(1,2)(A,b)=B$$

复习

初等矩阵的逆阵：

定理1.5 初等阵是可逆矩阵，逆矩阵是同类型的初等阵。

$$E(i,j)^{-1} = E(i,j)$$

$$E(i(k))^{-1} =$$

$$E(i,j(k))^{-1} =$$

验证： $E_3(1,2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3(1,2)$

复习

初等矩阵的逆阵：

定理1.5 初等阵是 可逆 矩阵，逆矩阵是 同类型的初等阵。

$$E(i,j)^{-1} = E(i,j)$$

$$E(i(k))^{-1} = E(i(\tfrac{1}{k}))$$

$$E(i,j(k))^{-1} =$$

验证：

$$E_3(2(k))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/k & \\ & & 1 \end{pmatrix} = E_3(2(\frac{1}{k}))$$

复习

初等矩阵的逆阵：

定理1.5 初等阵是可逆矩阵，逆矩阵是同类型的初等阵。

$$E(i,j)^{-1} = E(i,j)$$

$$E(i(k))^{-1} = E(i(\tfrac{1}{k}))$$

$$E(i,j(k))^{-1} = E(i,j(-k))$$

验证： $E_3(1,2(k))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3(1,2(-k))$

可逆矩阵的性质：

复习

定理1.6　方阵A可逆 $\Rightarrow$ $A \xrightarrow{\text{行变换}} E$

定理1.8　n阶方阵A可逆 $\Leftrightarrow$ $r(A)=n$

n阶方阵A不可逆 $\Leftrightarrow$ $r(A)<n$

定理1.7　方阵A可逆 $\Leftrightarrow$ $A=P_1P_2\cdots P_l$

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}}_{\text{可逆}} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{阶梯阵}} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{行简化阶梯阵}} = E \qquad r(A)=4$$

用初等行变换求逆阵的方法：

复习

设A是n阶可逆矩阵，下面给出求逆阵的通用方法：

$$A^{-1}(A \vdots E)=(A^{-1}A \vdots A^{-1}E)=(E \vdots A^{-1})$$

$$P_1P_2\cdots P_l(A \vdots E)=(P_1P_2\cdots P_lA \vdots P_1P_2\cdots P_lE)=(E \vdots A^{-1})$$

$$(A \vdots E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E \vdots A^{-1})$$

当A可逆时，有 $A^{-1}=P_1P_2\cdots P_l$

第一章 矩阵

1.5 矩阵的秩与初等变换

- 初等矩阵
  - 三种初等矩阵
  - 用初等行变换求逆矩阵
  - 用初等变换求解矩阵方程
- 矩阵的秩

利用初等行变换求解矩阵方程：

例1 求矩阵X，使 $AX=B$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}$.

若A是可逆矩阵，

解： $AX=B \longrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \longrightarrow X=A^{-1}B$

$$A^{-1}\left(A \vdots B\right)=\left(A^{-1}A \vdots A^{-1}B\right)=\left(E \vdots A^{-1}B\right)$$

$$P_1P_2\cdots P_l\left(A \vdots B\right)=\left(P_1P_2\cdots P_lA \vdots P_1P_2\cdots P_lB\right)=\left(E \vdots A^{-1}B\right)$$

$$\left(A \vdots B\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(E \vdots A^{-1}B\right)$$

当A可逆时，有 $A^{-1}=P_1P_2\cdots P_l$

解： 因为A可逆，所以 $X = A^{-1}B$. $(A, B) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1}B)$

$$(A \vdots B) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \div (-1)]{\substack{r_1 + r_2 \\ r_3 - r_2}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1 + 2r_3]{r_2 + 5r_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$E \qquad A^{-1}B$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

练习1

求解下面的矩阵方程：$AX = B$, $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

$$X = A^{-1}B$$

解：$(A,B)=\left(\begin{array}{cc:cc}3 & 5 & 1 & 2\\ 5 & 9 & 3 & 4\end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \div 3} \left(\begin{array}{cc:cc}1 & 5/3 & 1/3 & 2/3\\ 5 & 9 & 3 & 4\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{r_2 - 5r_1} \left(\begin{array}{cc:cc}1 & 5/3 & 1/3 & 2/3\\ 0 & 2/3 & 4/3 & 2/3\end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \times \frac{3}{2}} \left(\begin{array}{cc:cc}1 & 5/3 & 1/3 & 2/3\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 - \frac{5}{3}r_2} \left(\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{array}\right) \qquad X=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\qquad E \qquad\qquad A^{-1}B$$

利用初等列变换求解矩阵方程：

求矩阵X，使$AX=B$

若A可逆，$XA=C$，求 X

解：$XA=C \longrightarrow XA\,A^{-1}=C\,A^{-1} \longrightarrow X=CA^{-1}=CP_1P_2\cdots P_l$

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} AA^{-1} \\ CA^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ CA^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} P_1P_2\cdots P_l = \begin{pmatrix} AP_1P_2\cdots P_l \\ CP_1P_2\cdots P_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ CA^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ CA^{-1} \end{pmatrix}$$

方阵A^{-1}可逆 $\Leftrightarrow$ $A^{-1}=P_1P_2\cdots P_l$

练习2

求解下面的矩阵方程：$XA = B$，$A=\begin{pmatrix}3&5\\5&9\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

解：$X = BA^{-1}$

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\5&9\\1&2\\3&4\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\div 3}\begin{pmatrix}1&5\\5/3&9\\1/3&2\\1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2-5c_1}\begin{pmatrix}1&0\\5/3&2/3\\1/3&1/3\\1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2\times\frac{3}{2}}\begin{pmatrix}1&0\\5/3&1\\1/3&1/2\\1&-3/2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1-\frac{5}{3}c_2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1/2&1/2\\7/2&-3/2\end{pmatrix}\begin{matrix}E\\ \\BA^{-1}\end{matrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-1/2&1/2\\7/2&-3/2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1\\7&-3\end{pmatrix}$$

$$X=BA^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&-5\\-5&3\end{pmatrix}$$

第一章 矩阵

1.5 矩阵的秩与初等变换

- 初等矩阵
  - 三种初等矩阵
  - 用初等行变换求逆矩阵
  - 用初等行变换求解矩阵方程
- 矩阵的秩

复习

矩阵的秩

定义1.11 矩阵A用初等行变换化成阶梯阵中非零行数称为矩阵的秩，记为 $r(A)$.

矩阵秩的计算：初等行变换的方法

例2 求矩阵A的秩.

解：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&-3&-6&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 阶梯阵

$r(A)=2$

矩阵等价

定义1.12 设A,B是同型矩阵, 若A经有限次初等变换化为B, 则称A相抵于B(与B等价)，记作 $A \cong B$

例: $A \cong B \cong C$　$r(A)=r(B)=3$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \xrightarrow{r_2 - r_1} \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \xrightarrow{r_3 - r_2} \underset{C}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

阶梯阵

结论： $A \cong B \underset{\Leftarrow}{\Rightarrow} r(A)=r(B)$

注释： 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩。

定理1.9 $r(A)=r(B) \Leftrightarrow A \cong B$ (证明略)

第一章 矩阵

1.5 矩阵的秩与初等变换

- 初等矩阵
  - 三种初等矩阵
  - 用初等行变换求逆矩阵
  - 用初等行变换求解矩阵方程
- 矩阵的秩

第一章 矩阵

第一章小结

矩阵运算

- $A \pm B$, λA, AB, A^T, A的分块
- ★A^{-1}
  - 概念：$AB = E \Rightarrow A^{-1} = B, B^{-1} = A$
  - 性质：$(A^{-1})^{-1} = A$, $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $r(A) = n$
  - 计算：行变换
  - 结论：A可逆$\Leftrightarrow A = P_1 P_2 \cdots P_s$, $A \xrightarrow{\text{行变换}} E$
- $A \xrightarrow{\text{行变换}} B$，$r(A) = r(B)$
  - ★求解 $Ax = b$
  - ★求 A^{-1}　　$(A, E) \to (E, A^{-1})$
  - ★求解 $AX = B$　　$(A, B) \to (E, A^{-1}B)$
  - ★求 $r(A)$　　$A \to$ 阶梯阵

作业 习题一

授课内容	习题一
1.1 矩阵及运算	9,10 矩阵运算，11(3)(4)(5) ,13(6)(7)乘法，14(1) 矩阵运算
1.2 分块矩阵	42 分块矩阵乘法
1.3 可逆矩阵	34,35,36,40,41(1)(2)求逆，45(1)分块矩阵逆阵，50
1.4 高斯消元法	1(1)(4)消元法， 3,5消元法(含参)
1.5 矩阵秩 初等变换	30(1)(4) ,31求逆，45(2)分块矩阵逆阵 39解矩阵方程，√ 24(2),25秩√

第1(1)题

$r(A)=r(A,b)=4<5$ 有无穷多解　　增广矩阵

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4+0x_5=1 \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3 \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{阶梯阵}} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{行简化阶梯阵}}$$

第1(1)题

行简化阶梯阵 $r(A)=r(A,b)=4<5$ 方程组有无穷多解

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1/2x_5 + 0 \\ x_2 = -1/2x_5 - 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -1/2x_5 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2c \\ -1/2c \\ 0 \\ -1/2c \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

第3题

$$\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda^2 \end{cases}$$

增广矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda^2 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-\lambda r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \text{阶梯阵} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \overset{-(\lambda+2)(\lambda-1)}{2-\lambda-\lambda^2} & \overset{(\lambda+1)(\lambda-1)}{\lambda^2-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

(1) 当 $\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$ 时，有唯一解. $r(A)=r(A,b)=3$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -(\lambda+2) & \lambda+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda+1/\lambda+2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (\lambda+1)^2/\lambda+2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/\lambda+2 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda+1/\lambda+2 \end{pmatrix}$$

有唯一解. $\begin{cases} x_1=(\lambda+1)^2/\lambda+2 \\ x_2=1/\lambda+2 \\ x_3=-\lambda+1/\lambda+2 \end{cases}$

第3题

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

增广矩阵

$$\xrightarrow[r_3-\lambda r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & \lambda^2-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

阶梯阵

$-(\lambda+2)(\lambda-1)$ $(\lambda+1)(\lambda-1)$

(2) 当 $\lambda=1$ 时，有无穷多解. $r(A)=r(A,b)=1<3$

通解

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{cases} x_1 = -c_1 - c_2 + 1 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

c_1, c_2 为任意常数

第3题

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

增广矩阵

$$\xrightarrow[r_3-\lambda r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \text{阶梯阵} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \underset{-(\lambda+2)(\lambda-1)}{2-\lambda-\lambda^2} & \underset{(\lambda+1)(\lambda-1)}{\lambda^2-1} \end{pmatrix}$$

(2) 当$\lambda=-2$ 时，无解. $r(A)=2<r(A,b)=3$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

第5题

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 + bx_2 + x_3 = -b \\ (a+1)x_1 + (b+1)x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

增广矩阵 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 1 & b & 1 & -b \\ a+1 & b+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1} \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & -b \\ a & 1 & 1 & a \\ a+1 & b+1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-(a+1)r_1]{r_2-ar_1} \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & -b \\ 0 & 1-ab & 1-a & a+ab \\ 0 & 1-ab & 1-a & b+ab \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & -b \\ 0 & 1-ab & 1-a & a+ab \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{pmatrix} \end{array}$$

阶梯阵

第5题

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 + bx_2 + x_3 = -b \\ (a+1)x_1 + (b+1)x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 1 & b & 1 & -b \\ a+1 & b+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ 增广矩阵

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & -b \\ 0 & 1-ab & 1-a & a+ab \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}$$ 阶梯阵

$r(A) = 2 < r(A,b) = 3$

(1) 当 $a \neq b$ 时，无解.

(2) 当 $a = b$ 时，

$$\to \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -a \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & a+a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) 当$a = b = 1$ 时，无解.

$r(A) = 1 < r(A,b) = 2$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第5题

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 + bx_2 + x_3 = -b \\ (a+1)x_1 + (b+1)x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 1 & b & 1 & -b \\ a+1 & b+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ 增广矩阵

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & -b \\ 0 & 1-ab & 1-a & a+ab \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{pmatrix} \end{array}$$ 阶梯阵

$r(A) = 2 < r(A,b) = 3$

(1) 当 $a \neq b$ 时，无解.

(2) 当 $a = b$ 时，

$$\to \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -a \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & a+a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) 当$a = b \neq 1$ 时，有无穷多解.

$$\to \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -a \\ 0 & 1+a & 1 & a(1+a)/(1-a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2a/(1-a) \\ 0 & 1+a & 1 & a(1+a)/(1-a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$r(A) = r(A,b) = 2 < 3$

行简化阶梯阵

第5题

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 + bx_2 + x_3 = -b \\ (a+1)x_1 + (b+1)x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 1 & b & 1 & -b \\ a+1 & b+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

增广矩阵

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & -b \\ 0 & 1-ab & 1-a & a+ab \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{pmatrix} \end{array}$$

阶梯阵

$r(A) = 2 < r(A,b) = 3$

(1) 当 $a \neq b$ 时，无解.

(2) 当 $a = b$ 时，

$$\to \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -a \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & a+a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) 当$a = b \neq 1$ 时，有无穷多解.

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2a/(1-a) \\ 0 & 1+a & 1 & a(1+a)/(1-a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{cases} x_1 = c - 2a/(1-a) \\ x_2 = c \\ x_3 = -(a+1)c + a(1+a)/(1-a) \end{cases}$$

第5题

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=a \\ x_1+bx_2+x_3=-b \\ (a+1)x_1+(b+1)x_2+2x_3=0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 1 & b & 1 & -b \\ a+1 & b+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ 增广矩阵

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & -b \\ 0 & 1-ab & 1-a & a+ab \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{pmatrix} \end{array}$$ 阶梯阵

$r(A)=2<r(A,b)=3$

(1) 当 $a \neq b$ 时, 无解.

(2) 当 $a=b$ 时,

$$\to \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -a \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & a+a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) 当$a=b\neq 1$ 时, 有无穷多解.

通解

$$\begin{cases} x_1=c-2a/(1-a) \\ x_2=c \\ x_3=-(a+1)c+a(1+a)/(1-a) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -(a+1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2a/(1-a) \\ 0 \\ a(1+a)/(1-a) \end{pmatrix}$$

c为任意常数

（12, 4分）

初等矩阵

设A是3阶方阵，　且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$,则 $Q^{-1}AQ=$ $\underline{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}}$

解:

$$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1},$$

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

（04, 4分）

设A是3阶方阵，将A的第1列与第2列交换得B，再将B的第2列加到第3列得C，则满足 $AQ=C$的可逆矩阵

$Q=$ ___(D)___

$$(A)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}\quad(B)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\quad(C)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\quad(D)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

解：

$$A\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B,\quad B\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=C,$$

$$A\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=C,\ Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

（06, 4分）

设A是3阶方阵，将A的第2行加到第1行得B，再将B的第1列的-1倍加到第2列得C，

记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 (B)

(A) $C=P^{-1}AP$ (B) $C=PAP^{-1}$ (C) $C=P^{T}AP$ (D) $C=PAP^{T}$

解：$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A=B$，$B\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=C$，

$$C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=PAP^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}1&k&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-k&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

（01，6分）

矩阵方程

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，

且X 矩阵满足 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$，求X.

解：$AXA+BXB=AXB+BXA+E$

$$\underline{AX}A-\underline{AX}B+\underline{BX}B-\underline{BX}A=E$$

$$AX(A-B)+BX(B-A)=E,$$

$$AX\underline{(A-B)}-BX\underline{(A-B)}=E$$

$$(A-B)X(A-B)=E$$

$$X=(A-B)^{-1}E(A-B)^{-1}$$

$$X=[(A-B)^{-1}]^2$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$r(A-B)=3$$

矩阵A-B可逆

（01，6分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，

且X 矩阵满足 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$，求X .

解： $X=[(A-B)^{-1}]^2$

$$(A-B\,\vdots\,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&2\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)=(E\,\vdots\,(A-B)^{-1})$$

$$(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

（01，6分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，

且X 矩阵满足 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$，求X.

解： $X=[(A-B)^{-1}]^2$

$$(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

（99, 3分）

设矩阵A, B满足 $AB-B=A$，且$B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

则 $A=$______

解：

$$AB-B=A \Rightarrow AB-A=B \Rightarrow A(B-E)=B \Rightarrow A=B(B-E)^{-1}$$

$$B-E=\begin{pmatrix}0&-2&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

阶梯阵

没有零行，所以B-E可逆

分块对角阵，判断B-E可逆

（99，3分）

设矩阵A,B满足 $AB-B=A$，且$B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

则 $A=$______

解：

$$A=B(B-E)^{-1},\qquad B-E=\begin{pmatrix}0&-2&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}0&-2&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1/2&0\\-1/2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/2\\-1/2&0\end{pmatrix}$$

本题知识点：

$$\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\0&B^{-1}\end{pmatrix}$$

（99, 3分）

设矩阵A, B满足 $AB-B=A$, 且$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

则 $A=$______

解： $A=B(B-E)^{-1}$,

$$(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 0\\ -1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc:c}1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 2\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc:c}0 & 1/2 & 0\\ -1/2 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 0\\ -1/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ -1/2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ -1/2 & 1\end{pmatrix}$$

本题知识点：

$$\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & 0\\ 0 & B^{-1}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & B_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_2 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1A_2 & 0\\ 0 & B_1B_2\end{pmatrix}$$

非齐次方程组的求解

（13, 11分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}.$

试讨论a，b为何值时，存在矩阵C使得 $AC\text{-}CA=B$，并求所有矩阵C.

解：设 $C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，则 $AC=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+ax_3 & x_2+ax_4\\ x_1 & x_2\end{pmatrix}$,

$$CA=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2 & ax_1\\ x_3+x_4 & ax_3\end{pmatrix},$$

$$AC-CA=\begin{pmatrix}x_1+ax_3 & x_2+ax_4\\ x_1 & x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1+x_2 & ax_1\\ x_3+x_4 & ax_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax_3-x_2 & x_2+ax_4-ax_1\\ x_1-x_3-x_4 & x_2-ax_3\end{pmatrix}$$

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$.

试讨论a，b为何值时，存在矩阵C使得 $AC\text{-}CA=B$，并求所有矩阵C .

解：设$C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，　则 $AC-CA=\begin{pmatrix}ax_3-x_2 & x_2+ax_4-ax_1\\ x_1-x_3-x_4 & x_2-ax_3\end{pmatrix}$

$$AC-CA=B\Rightarrow\begin{pmatrix}ax_3-x_2 & x_2+ax_4-ax_1\\ x_1-x_3-x_4 & x_2-ax_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\ -ax_1+x_2+ax_4=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases}$$

非齐次方程组

（13, 11分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$. $AC-CA=B$ $C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$

解：$\begin{cases} -x_2+ax_3 = 0\\ -ax_1+x_2+ax_4 = 1\\ x_1-x_3-x_4 = 1\\ x_2-ax_3 = b\end{cases}$ 因为C存在，所以该方程组有解，求其通解。增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 0 & -1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+ar_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a\\ 0 & -1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{array}\right) \xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{array}\right)$$

（13, 11分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$. $AC-CA=B$ $C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$

解：
$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\ -ax_1+x_2+ax_4=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases}$$

因为C存在，所以该方程组有解，求其通解。增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{cccc|c}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-r_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{array}\right)$$

（13, 11分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$. $AC-CA=B$ $\quad C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$

解：$\begin{cases} -x_2+ax_3 & =0\\ -ax_1+x_2+ax_4 & =1\\ x_1-x_3-x_4 & =1\\ x_2-ax_3 & =b\end{cases}$

因为C存在，所以该方程组有解，求其通解。增广矩阵为

行简化阶梯阵

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{array}\right)$$

因为方程组有解，所以

a = -1, b=0

带入方程组有，

$r(A)=r(A,b)=2<4,$

方程组有无穷多解

$$\begin{cases} x_1-x_3-x_4 & =1\\ x_2+x_3 & =0\end{cases}\Leftarrow\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{array}\\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\end{array}$$

（13, 11分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$. $AC-CA=B$　$C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$ a = -1, b=0

解:
$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 1\\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 1\\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1+k_2+1\\ -k_1\\ k_1\\ k_2\end{pmatrix}\qquad \therefore C=\begin{pmatrix}k_1+k_2+1 & -k_1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}$$

其中k_1, k_2为任意常数.

（04, 13分）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

试问：当a, b为何值时，

(1) 方程组无解；

(2) 方程组有唯一解；

(3) 方程组有无穷多解，并求通解.

（04, 13分）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

试问：当a, b为何值时，

(1) 方程组无解；

解：

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(1) 当 $a = 0,\ b \neq 0$ 时，$r(A) = 2 < r(A,b) = 3$，方程组无解.

$a = 0, b = 0$　$r(A) = 1 < r(A,b) = 2$，方程组无解.

（04, 13分）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

试问：当a, b为何值时，

(2) 方程组有唯一解；

解：

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-1/a \\ 0 & 1 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

(2) 当 $a \neq 0, a \neq b$ 时，

$r(A) = r(A,b) = 3$，方程组有唯一解 $\begin{cases} x_1 = 1 - 1/a \\ x_2 = 1/a \\ x_3 = 0 \end{cases}$

（04, 13分）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

试问：当a, b为何值时，

(3) 方程组有无穷多解，并求通解.

解：

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(3)当 $a = b \neq 0$时，

$r(A) = r(A,b) = 2 < 3,$

方程组有无穷多组解，

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-1/a \\ 0 & 1 & -1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

通解：

$$\begin{cases} x_1 = 1-1/a \\ x_2 = c+1/a \\ x_3 = c \end{cases} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-1/a \\ 1/a \\ 0 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-1/a \\ 1/a \\ 0 \end{pmatrix}$$