第十六章　树

- **树**是一种特殊的图，在信息编码、计算机技术、特别是逻辑结构与数据结构方面都有广泛应用。

§16.1 无向树及其性质

定义 连通且无圈的无向图称为**无向树**，简称**树**。至少有两个连通分支的无圈无向图称为**森林**，平凡图称为**平凡树**。

无向树中，悬挂点称为**树叶**，度大于或等于2的顶点称为**分支点**。

例 若G是连通无向图，则 $|E(G)| \geq |V(G)|-1$。

证明 对G的顶点数 $|V(G)|$ 做归纳法：

$|V(G)|=1$时，结论显然成立。

设 $|V(G)|=k\ (k\geq 1)$ 时，结论成立。

考虑 $|V(G)|=k+1$ 的情况：设$\Gamma=v_0,v_1,\cdots,v_l$是$G$中的最长路径，则$l\geq1$且$v_0$只与$\Gamma$上的顶点相邻。而$G$连通，故$G-v_0$仍是连通图，$|V(G-v_0)|=k$。根据归纳假设，$|E(G-v_0)|\geq|V(G-v_0)|-1$。于是，

$$|E(G)| \geq |E(G-v_0)|+1\geq|V(G-v_0)|+1-1= |V(G)|-1$$

结论由此得证。▌

一个连通图通过删除边，可以逐渐消除所有圈，但仍保持连通。最后得到的就是树。

定理 设$G=<V,E>$是一个有m条边的n阶无向图，则下面说法等价：

（1）G是树

（2）G中任意两顶点间存在唯一路径

（3）G中无圈且$m=n-1$

（4）G连通且$m=n-1$

（5）G连通且G的每条边都是割边

（6）G不含圈，但G中任两个顶点间加一条新边，在所得图中得到唯一的一个含新边的圈。

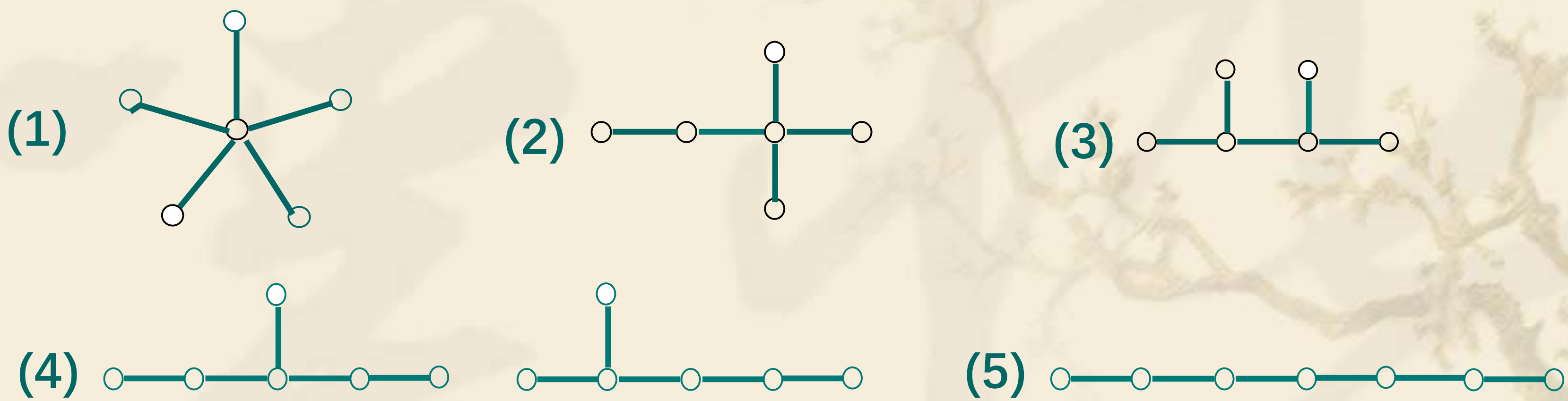
定理 非平凡无向树至少有两片树叶。

证明 设T是非平凡无向树，有x片树叶，则

$$2(|V(T)|-1)=\sum_{v\in V(T)} d(v)\geq x+2(|V(T)|-x)$$

由此得 $x\geq 2$。 ∎

例 画出全部6阶非同构的无向树。



例 已知一棵7阶无向树有三片树叶，一个3度点，其余顶点的度非1、非3。画出对应的非同构的无向树。

解 若T是7阶无向树，则 $|E(T)|=6$。设其余3个顶点为v_1,v_2,v_3，则

$$2\times 6=1\times 3+3\times 1+d(v_1)+d(v_2)+d(v_3)$$

从而

$$d(v_1)+d(v_2)+d(v_3)=6$$

已知$1<d(v_i)\leq 6$，故它们只可能取2,2,2，据此得

*T*的度序列为1,1,1,2,2,2,3。