§14.3 图的连通性

性质 设G是一个无向图，$u,v\in V(G)$。若G中存在(u,v)-路径，则称顶点u与v是**连通的**。

若G是平凡图或任意两个项点都连通，则称G是**连通图**，否则称G是**分离图**。

在$V(G)$上定义二元关系R

$$R=\{\langle u,v\rangle \mid u,v\in V(G)\wedge u\text{与}v\text{连通}\}$$

则R是等价关系，其确定的等价类记为$V_1,V_2,\cdots,V_k$，称子图$G[V_i]$（$i=1,2,\cdots,k$）为G的**连通分支**，用$p(G)$表示G的连通分支的数目。

定义 设G是一个无向图，$u,v\in V(G)$。若u与v连通，则称长度最小的(u,v)-路径为(u,v)-**短程线**，其长度称为u与v的**距离**，记为$d(u,v)$；若u与v不连通，则称u与v的距离为∞。

注 设G是一个无向图，$u,v,w\in V(G)$，则

① $d(u,v)\geq 0$，等号成立当且仅当$u=v$；

② $d(u,v)=d(v,u)$；

③ $d(u,v)+d(v,w)\geq d(u,w)$。

定义 设$G=<V,E>$是无向图，若存在$V'\subset V$使得$p(G-V')>p(G)$，但对任意$V''\subset V'$，均有$p(G-V'')=p(G)$，则称V'是G的**点割集**。若点割集$V'=\{v\}$，则称v是G的**割点**。

若存在$E'\subset E$使得$p(G-E')>p(G)$，但对任意$E''\subset E'$，均有$p(G-E'')=p(G)$，则称E'是G的**边割集**。若边割集$E'=\{e\}$，则称e是G的**割边**。

点割集与边割集反映出要破坏无向图的连通性所需要删除的顶点或边的数目。

定义 设G是无向连通图且不是完全图，则称

$$\kappa(G)=\min\{\,|V'|\,\big|\,V'\text{是}G\text{的点割集}\}$$

为G的（点）**连通度**；对K_n $(n\geq 1)$，规定其连通度为$n-1$；分离图的连通度规定为0。若$\kappa(G)\geq k$，则称图G是**k-连通的**。

令

$$\lambda(G)=\min\{\,|E'|\,\big|\,E'\text{是}G\text{的边割集}\}$$

则称之为G的**边连通度**。规定分离图的边连通度为0。若$\lambda(G)\geq r$，则称图G是**r边-连通的**。

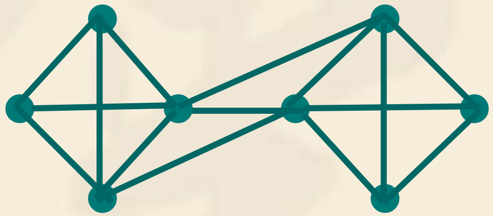
图的连通度是刻画图的连通性强弱的数量指标。

定理 对任何无向图G，有

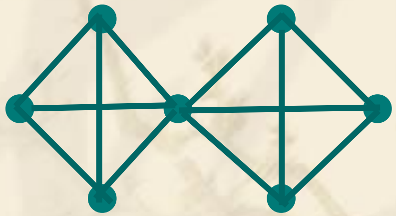
$$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$$

例 对$n \ge 4$，有 $\kappa(C_n) = \lambda(C_n) = \delta(C_n) = 2$。

例 考虑下列两个图的连通度：



G



H

例 设G是一个n阶无向简单图，$n\geq 4$, $\delta(G)\geq 3$，则G中存在长度至少是4的圈。

定义 设D是一个有向图，$u,v\in V(D)$。若D中存在(u,v)-路径，则称从u**可达**v，记为$u\rightarrow v$；若$u\rightarrow v$且$v\rightarrow u$，则称u与v**相互可达**，记为$u\leftrightarrow v$。

定义 对有向图D，若D的基础图连通，则称D是**弱连通的**，简称**连通图**；若 $\forall u,v\in V(D)$，均有$u\rightarrow v$或$v\rightarrow u$，则称D是**单向连通的**；若$\forall u,v\in V(D)$均有$u\leftrightarrow v$，则称D是**强连通的**（或**双向连通的**）。

定理 设D是一个有向图，则D是强连通的充要条件是D中存在经过每个顶点至少一次的回路。

例 设D是一个有向图，则D单向连通的充要条件是：D存在经过每个顶点至少一次的通路。