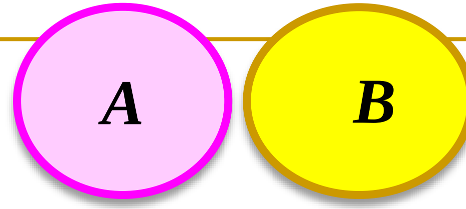
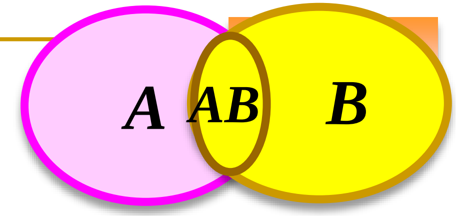
第一章 随机事件与概率

教学计划：3次课-9学时

概率的性质





性质1 $P(\Phi)=0 \quad P(A)=0 \not\Rightarrow A=\Phi$

性质2 $P(A\cup B)=P(A)+P(B) \qquad AB=\Phi$

性质4 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad AB\neq\Phi$

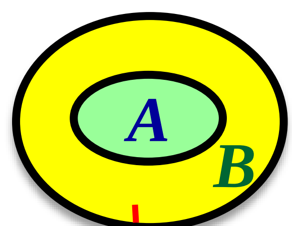
$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

性质3 $P(B-A)=P(B)-P(A) \qquad A\subset B$

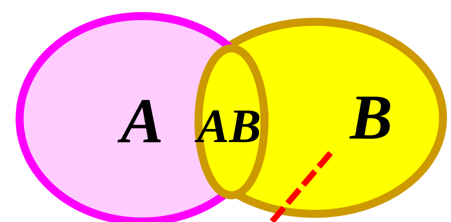
$P(B-A)=P(B\bar{A})=P(B)-P(AB) \qquad A\not\subset B$

性质5 $P(\bar{A})=1-P(A)$

条件概率 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{k}{m}$



$B-A$



$B-A=B-AB$

$=B\bar{A}$

第一章 随机事件与概率

第一节 随机试验

第二节 样本空间与随机事件

第三节 频率与概率

第四节 等可能概型(古典概型)

第五节 条件概率

第六节 独立性

教学计划：3次课-9学时

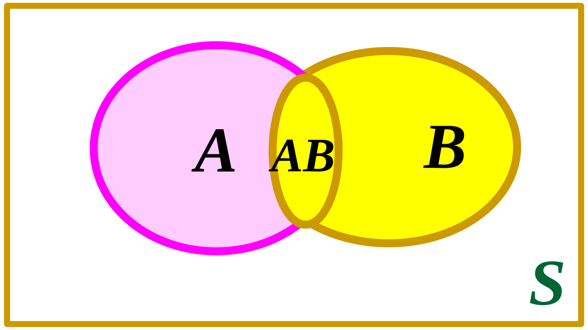
第一章 随机事件与概率

第五节 条件概率

- 条件概率
- 乘法定理 $P(A\cup B),\ P(A-B),\ P(AB)=?$
- 全概率公式
- 贝叶斯公式

二. 乘法定理

由条件概率的定义：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$，$P(B)>0$



若已知$P(B)$, $P(A|B)$时, 可以反求$P(AB)$. 即有：

定理1 设 $P(B)>0$ 或 $P(A)>0$，则:

$$P(AB)=P(B)P(A|B)$$

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

二. 乘法定理

定理1 设 $P(B)>0$ 或 $P(A)>0$，则:

$$P(AB)=P(B)P(A|B)$$

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

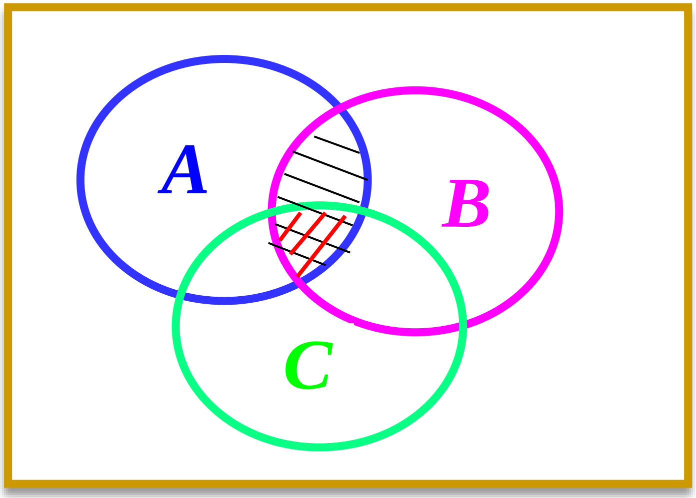
注： 乘法定理可推广到多个事件的积事件的情形：

$$(1)\ P(ABC)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB)$$

证明：

$$P(ABC)=P(AB)\cdot P(C|AB)$$

$$=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB)$$



二. 乘法定理

定理1 设 $P(B)>0$ 或 $P(A)>0$，则:

$$P(AB)=P(B)P(A|B)$$

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

注: 乘法定理可推广到多个事件的积事件的情形:

(1) $P(ABC)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB)$

(2) $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\cdot$

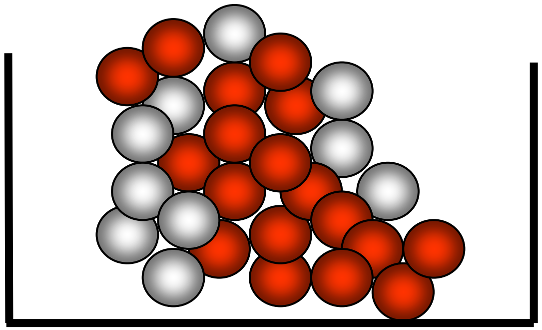
$$\cdots\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots\cdots A_{n-1})$$

例1　波里亚罐子模型

一个罐子中包含 b 个白球和 r 个红球. 随机地抽取一个球, 观看颜色后放回罐中, 并且再加进c个与所取出的球具有相同颜色的球, 连续进行四次.

试求：第一、二次取到白球,

第三、四次取到红球的概率.



b个白球, r 个红球

解:

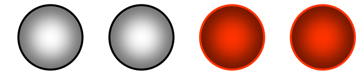
设W_i={ 第 i 次取出的是白球 },

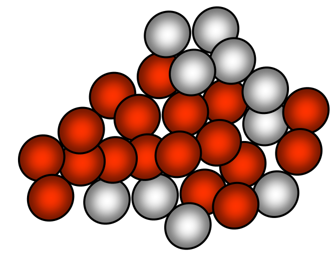
R_j={ 第 j 次取出的是红球 },

$i, j = 1, 2, 3, 4$

求：$P(W_1W_2R_3R_4)$

$$\text{罐中}\begin{cases} b\text{个白球} + 2c\text{个白球} \\ r\text{个红球} + c\text{个红球} \end{cases}$$





设 W_i={ 第 i 次取出的是白球 },

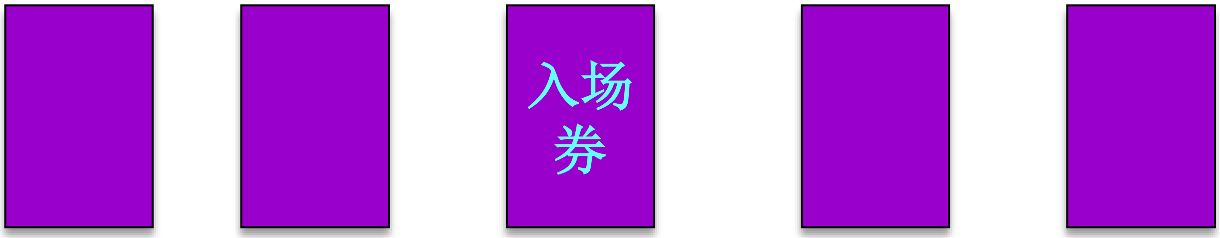
R_j={ 第 j 次取出的是红球 },

由乘法定理：

$$P(W_1W_2R_3R_4) = P(W_1)\,P(W_2|W_1)\,P(R_3|W_1W_2)\,P(R_4|W_1W_2R_3)$$

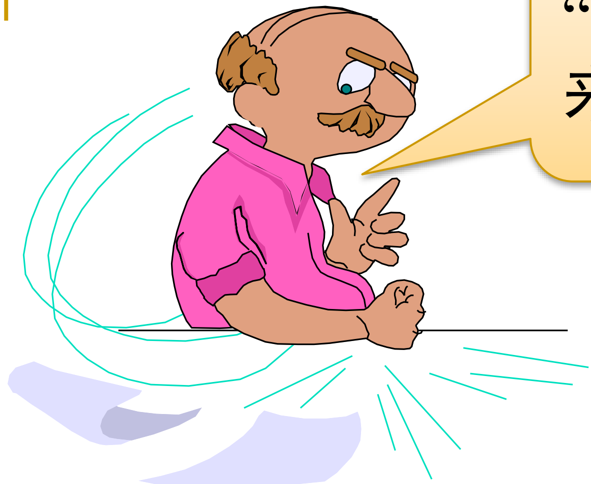
$$= \frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{b+r+c}\cdot\frac{r}{b+r+2c}\cdot\frac{r+c}{b+r+3c}$$

例2. 一场精彩的足球赛将要举行, 5个球迷好不容易才搞到一张入场券. 大家都想去, 只好用抽签的方法来解决.



5 张同样的卡片,只有一张上写有“入场券”，其余的什么也没写. 将它们放在一起洗匀,让5个人依次抽取.

问：后抽的人要比先抽的人吃亏吗?

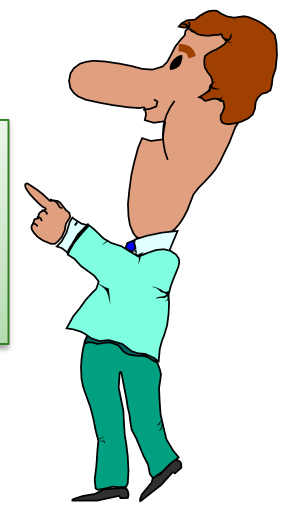


“大家不必争先恐后，一个一个按次序来, 大家抽到‘入场券’ 的机会都一样大.”

到底谁说的对呢？

请用已学的条件概率、乘法定理来计算一下,每个人抽到“入场券”的概率到底有多大?

“先抽的人肯定要比后抽的人抽到的机会大”



设 A_i ={第 i 个人抽到入场券}， $i=1,2,3,4,5.$

则 $\bar{A}_i$ ={第 i 个人未抽到入场券}

显然 $P(A_1)=1/5$， $P(\bar{A}_1)=4/5$

即 第1个人抽到入场券的概率是1/5.

由于 $A_2=\bar{A}_1A_2$

因为若第2个人抽到了入场券，则第1个人肯定没抽到.

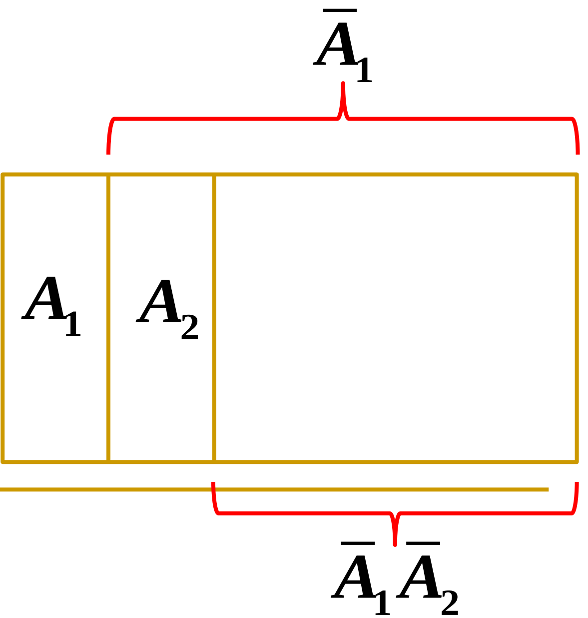
由乘法公式

$$P(A_2)=P(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2\mid\bar{A}_1)$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$$

$$P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)=\frac{3}{4}$$

即第2个人抽到入场券的概率也是1/5.



同理，第3个人要抽到“入场券”，必须第1、第2个人都没有抽到，即 $A_3=\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$

因此 $P(A_3)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)P(A_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)$

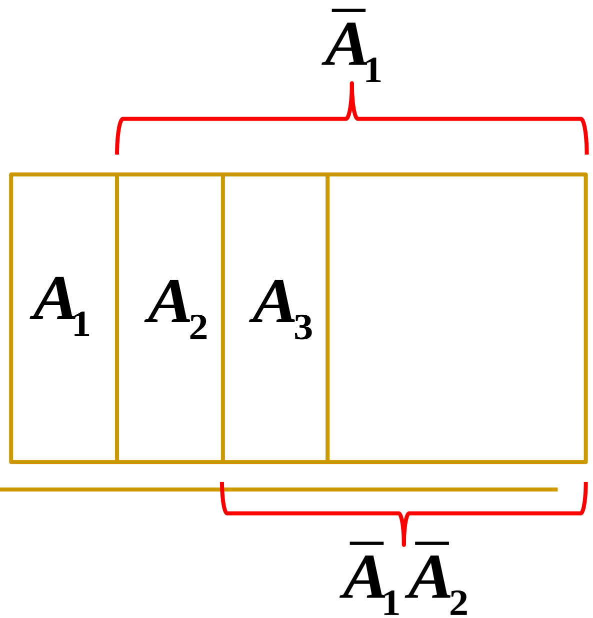
$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$

$$P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)=\frac{3}{4}$$

继续做下去就会发现，每个人抽到“入场券”的概率都是1/5.

因此,抽签顺序问题的正确答案:

抽签不必争先恐后,人人机会均等



例3. 箱子中装有10瓶形状相同的名酒,其中部优名酒7瓶, 国优名酒3瓶, 今有三人从箱子中随机的取酒, 每人只拿2瓶.

10瓶名酒 $\begin{cases}\text{部优7瓶}\\ \text{国优3瓶}\end{cases}$

问: 恰好第一个人拿到两瓶部优名酒,

第二个人拿到部优、国优名酒各一瓶,

第三个人拿到两瓶国优名酒的可能性有多大?

解: 设 A ={第一个人拿到两瓶部优名酒}

B ={第二个人拿到部优、国优名酒各一瓶}

C ={第三个人拿到两瓶国优名酒}

显然, 所求事件的概率为: $P(ABC)$

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB)$$

$$P(A)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=0.437$$

$$P(B|A)=\frac{C_5^1\cdot C_3^1}{C_8^2}=0.536$$

$$P(C|AB)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=0.067$$

10瓶名酒 $\begin{cases}\text{部优7瓶}\\ \text{国优3瓶}\end{cases}$

↓

8瓶名酒 $\begin{cases}\text{部优5瓶}\\ \text{国优3瓶}\end{cases}$

↓

6瓶名酒 $\begin{cases}\text{部优4瓶}\\ \text{国优2瓶}\end{cases}$

从而：$P(ABC)=0.467\times 0.536\times 0.067=0.017$

10瓶名酒 $\begin{cases}\text{部优7瓶}\\ \text{国优3瓶}\end{cases}$

A={第一个人拿到2瓶部优名酒}

B={第二个人拿到部优、国优名酒各1瓶}

C={第三个人拿到2瓶国优名酒}

第一章 随机事件与概率

第五节 条件概率

- 条件概率
- 乘法定理
- 全概率公式
- 贝叶斯公式

三. 全概率公式

全概率公式适用的情况：

全概率公式主要用于计算比较复杂的事件的概率。若一个事件的概率不容易计算，则可将它分解成若干个互斥事件的概率和。

引例 有三个箱子，分别编号为1,2,3,

1号箱装有1个红球4个白球；

2号箱装有2个红球3个白球；

3号箱装有3个红球2个白球；

某人从三箱中任取一箱，从中任意摸出一球，

求: 取得红球的概率.

解： 记 A = {取得红球}， B_i = {从i号箱取球}, i =1, 2, 3;

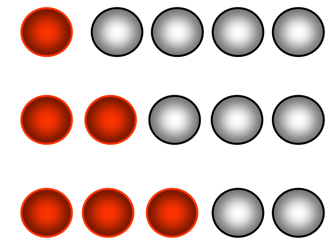
$A = AB_1 \cup AB_2 \cup AB_3$，由于 B_1, B_2, B_3 两两互斥，

所以 AB_1, AB_2, AB_3 两两互斥

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + P(AB_3)$$

$$= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

记 $A = \{$取得红球$\}$



$B_i = \{$从i号箱取球$\}$, $i = 1, 2, 3$;

$\boxed{A = AB_1 \cup AB_2 \cup AB_3,}$ 由于 $\boxed{B_1, B_2, B_3}$ 两两互斥,

所以 AB_1, AB_2, AB_3 两两互斥

样本空间的划分

(1) $S = B_1 \cup B_2 \cup B_3$

(2) $B_i B_j = \Phi$

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + P(AB_3)$$

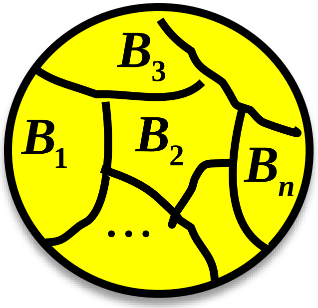
$$= \underbrace{P(B_1)}_{1/3}\underbrace{P(A|B_1)}_{1/5} + \underbrace{P(B_2)}_{1/3}\underbrace{P(A|B_2)}_{2/5} + \underbrace{P(B_3)}_{1/3}\underbrace{P(A|B_3)}_{3/5}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

将此引例中所用的方法推广到一般的情形，就得到在概率计算中常用的全概率公式. ⇨ 化繁为简，各个击破

三. 全概率公式

1. 样本空间的划分



定义： 设S为试验E的样本空间,

$B_1, B_2, \cdots B_n$是E的一组事件,

若：(1) $B_i B_j = \Phi \quad i \neq j, \quad i, j = 1,2,\cdots\cdots n$

(2) $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$

则称 $B_1, B_2, \cdots B_n$是样本空间S的一个划分,

或是一个互斥事件完备组。

三. 全概率公式

1. 样本空间的划分

$$(1)\ B_iB_j = \Phi$$
$$(2)\ B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$$

例:

E: 掷一颗骰子, 观察其点数

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

E的一组事件 $B_1 = \{1,2,3\}$, $B_2 = \{4,5\}$, $B_3 = \{6\}$

是S的一个划分.

E的另一组事件 $C_1 = \{1,2,3\}$, $C_2 = \{3,4\}$, $C_3 = \{5,6\}$

不是S的一个划分.

2. 全概率公式

若$P(A)$不易求,但却容易找到S 的一个划分时,

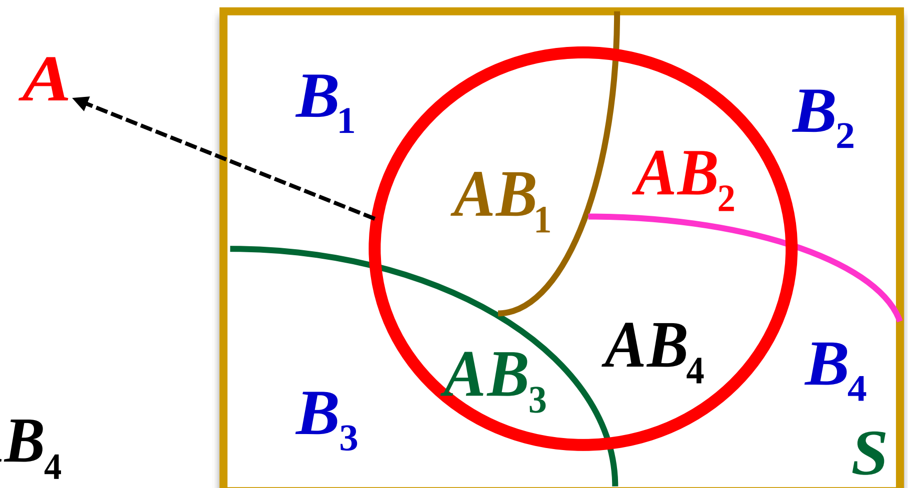
用全概率公式计算概率比较方便。

定理2 设试验E的样本空

$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为S 的一个划分,

则 $P(A)=P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)\cdot P(A|B_n)$

称为全概率公式。



注: ➢全概率公式的意义:

$$A=AB_1\cup AB_2\cup AB_3\cup AB_4$$

$$\therefore P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+P(AB_3)+P(AB_4)$$

$$=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)+P(B_4)P(A|B_4)$$

2. 全概率公式

$$P(A)=P(A\boxed{B_1})+\cdots+P(A\boxed{B_i})+\cdots+P(A\boxed{B_n})$$

$$=P(B_1)\cdot P(A|B_1)+\cdots+P(B_i)\cdot P(A|B_i)+\cdots+P(B_n)\cdot P(A|B_n)$$

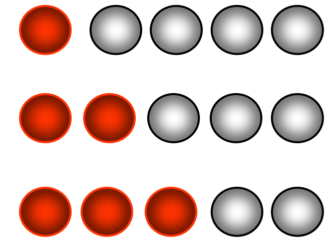
注： ➢划分中的事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 可以理解为导致事件A发生的一组原因。

$P(AB_i) = P(B_i)\, P(A|B_i)$ 可以理解为原因 B_i导致事件A发生的概率。

➢因此全概率公式可以这样理解：

事件A发生的概率是各原因 B_i 导致 A 发生的概率的总和.

引例 $A=\{$取得红球$\}$, $B_i=\{$从i号箱取球$\}$, $i=1,2,3$;



$A=AB_1\cup AB_2\cup AB_3$,

B_1,B_2,B_3 两两互斥

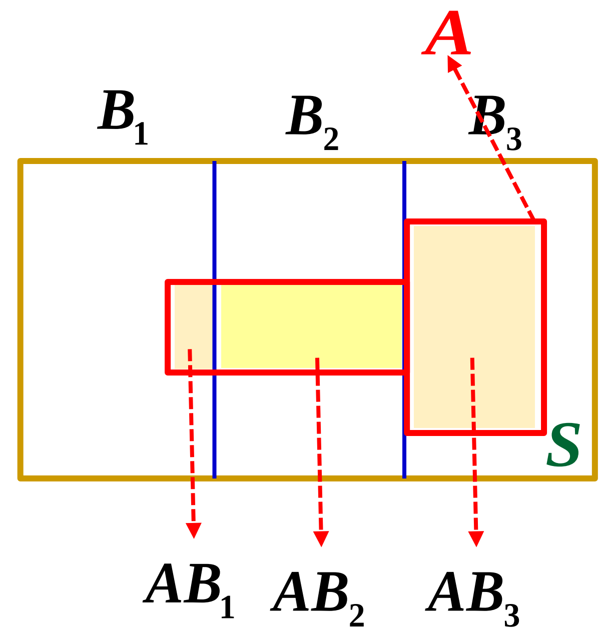
样本空间的划分

$$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+P(AB_3)$$

$$=\underbrace{P(B_1)}_{1/3}\underbrace{P(A|B_1)}_{1/5}+\underbrace{P(B_2)}_{1/3}\underbrace{P(A|B_2)}_{2/5}+\underbrace{P(B_3)}_{1/3}\underbrace{P(A|B_3)}_{3/5}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}$$

$$=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}=\frac{2}{5}$$

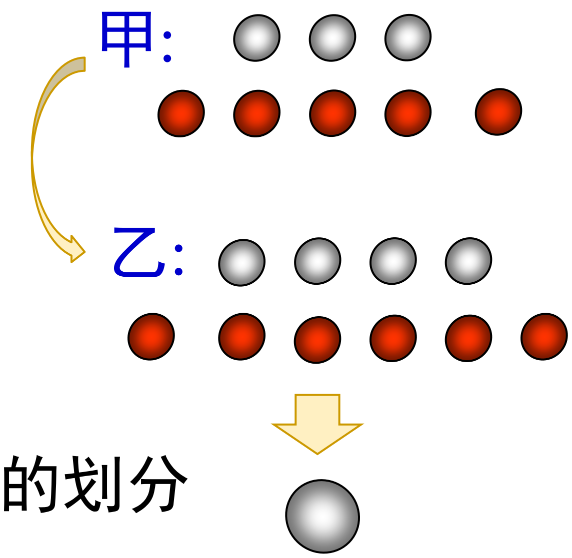


$$P(A|B_1)=\frac{P(AB_1)}{P(B_1)}=\frac{1}{5}$$

$$P(AB_1)=P(B_1)P(A|B_1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$$

例1. 设甲袋中有3个白球,5个红球， 乙袋中有4个白球, 6个红球, 现从甲袋中任取一个球放入 乙袋中, 再从乙袋中任取一球。

求：从乙袋中取得白球的概率。



解： 设A={从乙袋中取得白球}

B_1={从甲袋中取白球放入乙袋中}

B_2={从甲袋中取红球放入乙袋中}

$A = AB_1 \cup AB_2$, B_1, B_2 是一个样本空间的划分

$$\therefore P(A) = \underline{P(B_1)} \cdot \underline{P(A|B_1)} + \underline{P(B_2)} \cdot \underline{P(A|B_2)}$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{11} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{11} = \frac{35}{88} = 0.398$$

例2. 某工厂有四条流水线生产同一种产品, 四条流水线的产量分别占该产品总产量的15%, 20%, 25%, 40%, 且四条流水线产品的次品率分别是 0.01, 0.02, 0.03, 0.025,

求: 从出厂的这种产品中任取一件恰是次品的概率.

0.15	0.20	0.25	0.40
0.01	0.02	0.03	0.025

解: 设 $A=\{$任取一件是次品$\}$

$B_i=\{$取到的产品来自第i条流水线$\}$ $i=1,2,3,4$

$A=AB_1\cup AB_2\cup AB_3\cup AB_4$, B_1,B_2,B_3,B_4 是一个划分

$$P(A)=\underline{P(B_1)}\,\underline{P(A|B_1)}+\underline{P(B_2)}\,\underline{P(A|B_2)}+\underline{P(B_3)}\,\underline{P(A|B_3)}+\underline{P(B_4)}\,\underline{P(A|B_4)}$$

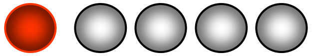
$$=\underline{0.15}\times\underline{0.01}+\underline{0.2}\times\underline{0.02}+\underline{0.25}\times\underline{0.03}+\underline{0.4}\times\underline{0.025}=0.023$$

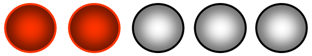
第一章 随机事件与概率

第五节 条件概率

- 条件概率
- 乘法定理
- 全概率公式
- 贝叶斯公式

引例 有三个箱子，分别编号为1,2,3,

1号箱装有1个红球4个白球；

2号箱装有2个红球3个白球；

它所求的是已知结果发生条件下，求某原因发生的可能性大小。即求在导致*A*发生的诸多原因中，该原因所起的作用的大小。

求：该球是取自1号箱的概率。B_1, B_2, B_3 是一个划分

解：设 $A=\{取得红球\}$ $B_i=\{球取自i号箱\},\ i=1,2,3;$

求: $P(B_1|A)=\dfrac{P(AB_1)}{P(A)}$

$$A=AB_1\cup AB_2\cup AB_3$$

$$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+P(AB_3)$$

$$=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)}$$

$$=\frac{1/3\cdot1/5}{1/3\cdot1/5+1/3\cdot2/5+1/3\cdot3/5}=\frac{1}{6}$$

贝叶斯公式

它所求的是已知结果发生条件下，求某原因发生的可能性大小。即求在导致A发生的诸多原因中，该原因所起的作用的大小。

求：该球是取自1号箱的概率。B_1, B_2, B_3 是一个划分

解：设 A ={取得红球} B_i ={球取自i号箱}, i=1,2,3;

求：$P(B_1|A)=\dfrac{P(AB_1)}{P(A)}$

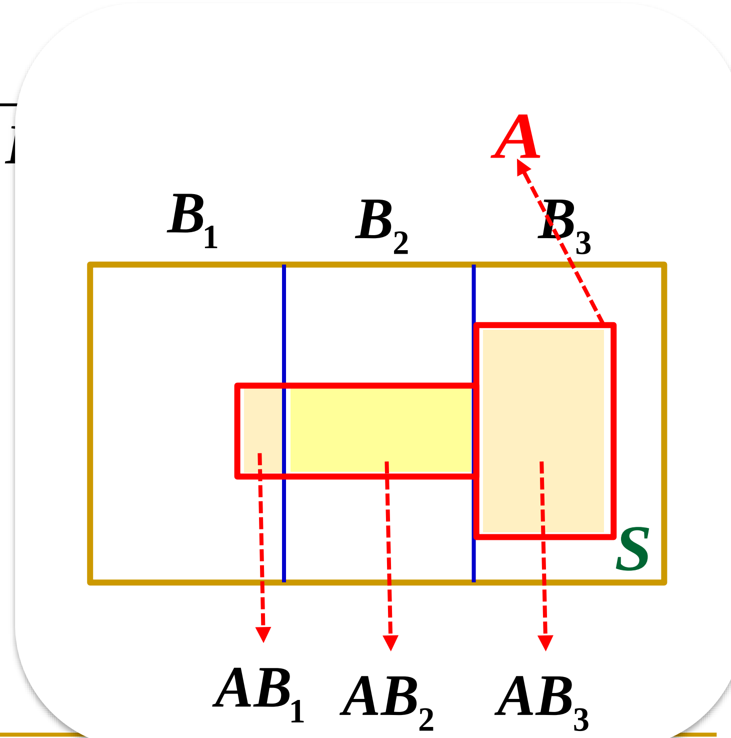
$$A = AB_1 \cup AB_2 \cup AB_3$$

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + P(AB_3)$$

$$=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(}$$

$$=\frac{\boxed{1/3\cdot 1/5}\ 1/15}{\underbrace{\boxed{1/3\cdot 1/5+1/3\cdot 2/5+1/3\cdot 3/5}}_{6/15}}=\frac{1}{6}$$

$$=\frac{P(AB_1)}{P(AB_1)+P(AB_2)+P(AB_3)}$$



四. 贝叶斯公式(逆概公式)

定理3. 设试验 E 的样本空间为 S, A为 E 的事件,

$B_1, B_2 \cdots B_n$ 为 S的一个划分, 且 $P(A)>0, P(B_i)>0$

则 $$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

称为贝叶斯 (Bayes) 公式。

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}$$

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)\cdot P(A|B_1)+\cdots+P(B_i)\cdot P(A|B_i)+\cdots+P(B_n)\cdot P(A|B_n)}$$

例2. 某工厂有四条流水线生产同一种产品, 四条流水线的产量分别占该产品总产量的15%，20%，25%，40%，且四条流水线产品的次品率分别是 0.01, 0.02, 0.03，0.025,

求:从出厂的这种产品中任取一件恰是次品的概率

0.15	0.20	0.25	0.40
0.01	0.02	0.03	0.025

解： 设 $A=\{$任取一件是次品$\}$

$B_i=\{$取到的产品来自第i条流水线$\}$ $i=1,2,3,4$

$A=AB_1\cup AB_2\cup AB_3\cup AB_4$ B_1,B_2,B_3,B_4 是一个划分

$$P(A)=\underline{P(B_1)}\,\underline{P(A|B_1)}+\underline{P(B_2)}\,\underline{P(A|B_2)}$$

$$+\underline{P(B_3)}\,\underline{P(A|B_3)}+\underline{P(B_4)}\,\underline{P(A|B_4)}$$

$$=\underline{0.15}\times\underline{0.01}+\underline{0.2}\times\underline{0.02}+\underline{0.25}\times\underline{0.03}+\underline{0.4}\times\underline{0.025}=0.023$$

例3. 在例2中，已知任取一件产品是次品.

问：此次品出自哪条流水线的可能性最大?

解: 设A={任取一件是次品}, B_i ={产品来自第i条流水线}

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)+P(B_4)P(A|B_4)$$
$$=\boxed{0.15\times 0.01}+\boxed{0.2\times 0.02}+\boxed{0.25\times 0.03}+\boxed{0.4\times 0.025}=\boxed{0.023}$$

$$P(B_1|A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{0.15\times 0.01}{0.023}=0.065$$

$$P(B_2|A)=\frac{0.2\times 0.02}{0.023}=0.174$$

$$P(B_3|A)=\frac{0.25\times 0.03}{0.023}=0.326$$

$$P(B_4|A)=\frac{0.4\times 0.025}{0.023}=0.435$$

出自第四条流水线可能性最大

例4. 某一地区癌症患者占0.005，患者做一种试验，试验反应呈阳性的概率为0.95，正常人做这种试验反应呈阳性的概率为0.04，现抽查了一个人，试验反应呈阳性。

$P(A|C), P(AC)?$

问： 此人是癌症患者的概率有多大?

$P(C|A), P(AC)?$

$$P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}$$

解： 设 $C=\{$癌症患者$\}$， $P(C)=0.005$

则 $\bar{C}=\{$正常人$\}$. $P(\bar{C})=0.995$

$A=\{$试验结果呈阳性$\}$,

已知：$P(A|C)=0.95$，$P(A|\bar{C})=0.04$， 求 $P(C|A)$

$A=AC\cup A\bar{C}$， $P(C|A)=\dfrac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\bar{C})P(A|\bar{C})}$

$$=\frac{0.005\times 0.95}{0.005\times 0.95+0.995\times 0.04}=0.1066$$

问题1：这种试验对于诊断一个人是否患有癌症有无意义？

如果不做试验， 抽查一人, 他是患者的概率:

$$P(C) = 0.005$$

若试验为阳性，则此人是患者的概率为：

$$P(C \mid A) = 0.1066$$

★ 从0.005 增加到 0.1066，将近增加约 21 倍。

这说明：这种试验对于诊断一个人是否患有癌症是有意义的

问题2： 检查出阳性的人是否一定患有癌症?

试验结果为阳性, 此人确患癌症的概率为:

$$P(C \mid A) = 0.1066$$

可见: 即使一个人检验出阳性，尚可不必过早下结论此人确患有癌症，因为这种可能性只有10.66% (平均来说，1000个人中大约只有107人确患癌症)，此时医生常要通过再试验来确认。

第一章 随机事件与概率

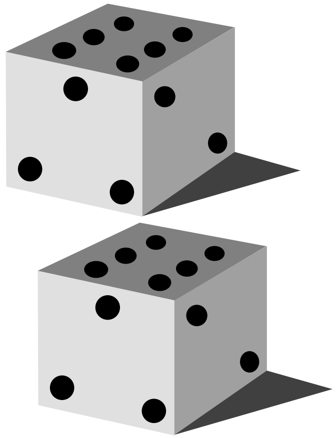
第五节 条件概率

- 条件概率
- 乘法定理
- 全概率公式
- 贝叶斯公式

第一章 随机事件与概率

引例

将一颗均匀骰子连掷两次，



设 A={第一次掷出6点}，

B={第二次掷出6点}，

显然 $P(B\mid A)=P(B)$

即事件A发生，对事件B 发生的概率没有影响，这时称事件A, B独立。

由乘法定理，$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$

当事件A, B独立时，有 $P(AB)=P(A)P(B)$

定义1. 设 A, B是两个事件，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$

则称事件A与 B 是 **相互独立** 的。

注： 由定义易证以下关于独立性的命题：

- 若 A与 B 相互独立 ➡ A与 $\overline{B}$，$\overline{A}$与 B，$\overline{A}$与 $\overline{B}$ 也相互独立。

证明: 只证 A与 $\overline{B}$ 相互独立，其余自证。

$$P(A\overline{B}) = P(A)-P(AB)$$

$$= P(A)-P(A)P(B)$$

$$= P(A)(1-P(B))$$

$$= P(A)\cdot P(\overline{B})$$

定义1. 设 A, B是两个事件，如果 $P(AB) = P(A)P(B)$

则称事件A与 B 是 相互独立 的。

注： 由定义易证以下关于独立性的命题：

- 若 A与 B 相互独立 ⟹ A与 $\overline{B}$，$\overline{A}$与 B，$\overline{A}$与 $\overline{B}$ 也相互独立。

- 若 $P(A) > 0, P(B) > 0$ ⟹ A, B 独立与互斥不能同时成立。

证明: 若A, B相互独立， 则 $P(AB) = P(A)P(B) > 0$

若A, B互斥， 则 $P(AB) = P(\Phi) = 0$

所以它们不能同时成立。

定义1. 设 A, B是两个事件，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$

则称事件A与 B 是 **相互独立** 的。

定理： 设 A, B是两事件, 且$P(A)>0$, 若 A, B相互独立,

则 $P(B|A)=P(B)$ ，反之亦然。

定义2 **(两两独立)** 设 A, B, C 是三个事件, 如果有:

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(AC) = P(A)P(C) \end{cases}$$

则称 A, B, C 两两独立。

注: 若A, B, C 两两独立, 而 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 不一定成立。

$$\because P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$$
$$= P(A)P(B)P(C|AB)$$

$\because C$ 与A 独立, C 与B独立, 但 C 与AB不一定独立,

$\therefore P(C|AB) = P(C)$ 不一定成立。

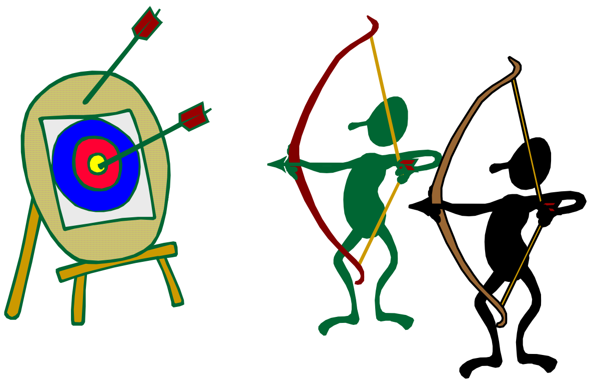
定义3. 设 A, B, C 是三个事件，如果具有等式：

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

则称事件 A, B, C 是相互独立的。

判断两事件独立的方法：

➤在实际应用中，往往根据问题的实际意义去直观判断两事件是否独立.



例1 甲、乙两人同时向同一目标射击，记 A={甲命中}， B={乙命中}，

A与B是否独立？

可根据实际意义，由于"甲命中"并不影响"乙命中"的概率，故认为A, B 独立 .

判断两事件独立的方法：

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

➢根据独立的定义, 判断事件A, B是否相互独立。

例2 从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，记

A = {抽到 K }, B = { 抽到的牌是黑色的 }

问：事件A, B是否相互独立？

解： 由于: $P(A)$ = 4/52 = 1/13,

$P(AB)$ = 2/52 = 1/26,

$P(B)$ = 26/52 = 1/2

可见, $P(AB)=P(A)P(B)$

即A, B是相互独立的。

判断两事件独立的方法：

$$P(A|B)=P(A)$$

➢通过计算条件概率判断是否相互独立。

例2 从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，记

$A=\{$抽到 $K\}$，$B=\{$ 抽到的牌是黑色的 $\}$

问：事件A, B是否相互独立？

解： 由于 $P(A)=1/13$,

$$P(A|B)=2/26=1/13$$

即：$P(A|B)=P(A)$,

说明事件A, B 独立。

例3. 三人独立地去破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为1/5，1/3，1/4，问三人中至少有一人能将密码译出的概率是多少？

A_1, A_2, A_3 相互独立

$\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ 相互独立

解： 将三人编号为 1，2，3

记 A_i={ 第 i 个人能破译出密码 }　i=1, 2, 3

已知 $P(A_1)=1/5$，$P(A_2)=1/3$，$P(A_3)=1/4$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) = 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)$$

$$= 1 - [1-P(A_1)][1-P(A_2)][1-P(A_3)]$$

$$= 1 - \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{5} = 0.6$$

第一章 随机事件与概率

第一章小结

概率的计算

1）统计定义：$f_n(A) \xrightarrow[n\to\infty]{}$ 稳定值 $= P(A)$

2）概率的性质：1~5　$P(A-B)$　$P(A \cup B)$　$P(\bar{A})$

3）等可能概型：$P(A)=\dfrac{m}{n}$

4）条件概率：$P(B|A)=\dfrac{k}{m}=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

独立

5）乘法定理：$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$

$A = AB_1 \cup AB_2$ 互斥

★ 6）全概率公式：$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)$

7）贝叶斯公式：$P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}$

作 业

授课内容	习题一
1.1 随机事件1.2 样本空间	2
1.3 频率与概率	3(2)(3)
1.4 等可能概型	6,7,8,11等可能
1.5 条件概率	14,15, 条件概率
1.6 乘法定理，全概率，贝叶斯， 独立性	17,18乘法定理 21,23,24,26全概率贝叶斯 28,29独立性

05, 4分，数一

从数1,2,3,4中任取一个数记为X，再从1,2,…,X中任取一个数记为Y，则$P\{Y=2\}=$ $\underline{\dfrac{13}{48}}$

解：划分：事件 $B_i=\{X=i\}\quad i=1,2,3,4,$ 事件 $A=\{Y=2\}$

由全概率公式

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)+P(B_4)P(A|B_4)$$

$$=\underbrace{P(X=1)}_{1/4}\cdot\underbrace{P(Y=2|X=1)}_{0}+\underbrace{P(X=2)}_{1/4}\cdot\underbrace{P(Y=2|X=2)}_{1/2}$$

$$+\underbrace{P(X=3)}_{1/4}\cdot\underbrace{P(Y=2|X=3)}_{1/3}+\underbrace{P(X=4)}_{1/4}\cdot\underbrace{P(Y=2|X=4)}_{1/4}$$

$$=\frac{1}{4}(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})=\frac{13}{48}$$

06, 4分，数一

设A,B为随机事件，且 $P(B)>0, P(A|B)=1$，则必有 (C)

(A) $P(A\cup B)>P(A)$　　(B) $P(A\cup B)>P(B)$

(C) $P(A\cup B)=P(A)$ √　　(D) $P(A\cup B)=P(B)$

解：由乘法公式和加法公式，有

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)=P(B)$$

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=P(A)+P(B)-P(B)\\&=P(A)\end{aligned}$$

故选(C)

00, 3分，数一

设两个相互独立的事件A和B都不发生的概率为1/9，A发生B不发生的概率与B发生A不发生的概率相等，则 $P(A)=$ ____$\frac{2}{3}$____

解：$P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$　$P(\bar{A}\bar{B})=1/9$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\bar{B})=P(A)-P(AB) \\ P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB) \end{array}\right. \rightarrow P(A)=P(B)$$

因为A和B独立，$\bar{A}$和$\bar{B}$ 也独立，于是有

$$\frac{1}{9}=P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})$$

$$=(1-P(A))\cdot(1-P(B))$$

$$=(1-P(A))^2 \Rightarrow 1-P(A)=\frac{1}{3} \Rightarrow P(A)=\frac{2}{3}$$

14, 4分，数一

设随机事件A与B相互独立，且 $P(B)=0.5, P(A-B)=0.3,$ 则 $P(B-A)=$ __(B)__

(A) 0.1

(B) 0.2

(C) 0.3

(D) 0.4

解：由独立性，有

$$0.3=P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})$$

$$=P(A)[1-P(B)]=0.5P(A)\rightarrow P(A)=0.6$$

$$P(B-A)=P(B\bar{A})=P(B)P(\bar{A})$$

$$=P(B)[1-P(A)]=0.5\times 0.4=0.2$$

故选(B)