# 第六章

# 二次型与正定矩阵

## 问题的提出

什么是二次型? 二次型研究的主要内容是什么?

解析几何中, 以原点为中心的二次曲线方程是:

二次型: $x$ , $y$的二次齐次多项式

$$ax^2+bxy+cy^2=1$$ 图形?

线性变换
坐标变换

$$\begin{cases} x=\cos\theta\ x'-\sin\theta\ y' \\ y=\sin\theta\ x'+\cos\theta\ y' \end{cases}$$

$a',c'>0$, 椭圆

$a'=c'>0$, 圆

$a'\cdot c'<0$, 双曲线

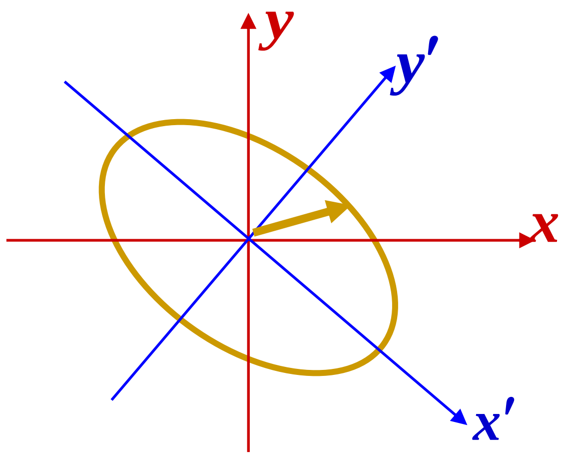
$$a'x'^2+c'y'^2=1$$

标准形

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

正交矩阵

正交变换




二次型的主要任务: 化简二次型

# 第六章二次型与正定矩阵

6.1 二次型的定义及其矩阵表示

6.2 二次型的标准形

6.3 惯性定理和二次型的规范形

6.4 实二次型的定性

教学计划：1次课-3学时

# 第六章二次型与正定矩阵

6.1 二次型的定义及其矩阵表示

6.2 二次型的标准形

6.4 实二次型的定性

# 第六章 二次型与正定矩阵

## 6.1 二次型的定义及其矩阵表示

- 二次型的定义
- 二次型的矩阵表示

## 1. 二次型的定义

**定义6.1** 含$n$个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{22}x_2^2 + \cdots\cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+a_{nn}x_n^2$$

称为$n$元二次型，简称二次型.

当系数 $a_{ij}$ 均为实数时，称为实二次型.

只含有平方项的二次型 $f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2$

称为$n$元二次型的标准形.

**例如** $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ 是3元二次型；

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2$ 是3元二次型的标准形.

# 第六章 二次型与正定矩阵

## 6.1 二次型的定义及其矩阵表示

- 二次型的定义
- 二次型的矩阵表示

## 1. 二次型的定义

**定义6.1** 含$n$个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{22}x_2^2 + \cdots\cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+a_{nn}x_n^2$$

称为$n$元二次型，简称二次型.

只含有平方项的二次型 $f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2$

称为$n$元二次型的标准形.

## 2. 二次型的矩阵表示

令 $a_{ij}=a_{ji}$

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$\begin{aligned}
&=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3 && = x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)\\
&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3 && + x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)\\
&+a_{31}x_3x_1+a_{32}x_3x_2+a_{33}x_3^2 && + x_3(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)
\end{aligned}$$

## 2. 二次型的矩阵表示

令 $a_{ij}=a_{ji}$

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

$$\begin{aligned}
&=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3 && = x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)\\
&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3 && + x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)\\
&+a_{31}x_3x_1+a_{32}x_3x_2+a_{33}x_3^2 && + x_3(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)
\end{aligned}$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}=x^TAx$$

其中$A$是实对称阵

$r(A)$ 称为二次型的秩

**例1** 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-6x_2x_3$ 的矩阵

**解** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & -3\\ 0 & -3 & -3\end{pmatrix}$ $\quad r(A)=3,\quad$ 二次型的秩为3.

实对称阵

$$f(1,0,1)=1+0-3\times1+4\times1\times0-6\times0\times1=-2$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & -3\\ 0 & -3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$f(1,0,1)=(1,0,1)\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & -3\\ 0 & -3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=(1,0,1)\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -3\end{pmatrix}=-2$$

**例2** 求二次型的标准形的矩阵.

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2 = y^T \Lambda y$$

$$= \underbrace{(y_1, y_2, \cdots, y_n)}_{y^T} \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{y}, \quad \begin{pmatrix} k_1 y_1 \\ k_2 y_2 \\ \vdots \\ k_n y_n \end{pmatrix}$$

**结论：** 标准形的矩阵是对角阵.

# 第六章 二次型与正定矩阵

## 6.1 二次型的定义及其矩阵表示

- 二次型的定义
- 二次型的矩阵表示

# 第六章二次型与正定矩阵

# 第六章 二次型与正定矩阵

## 6.2 二次型的标准型

- 线性变换及正交变换
- 用正交变换化二次型为标准形

## 1. 线性变换及正交变换

### (1) 线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

称为从变量 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的线性变换,

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ 称为线性变换的系数矩阵.

$$\underset{y\ \ m\times 1}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}} = \underset{A\ \ m\times n}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \underset{x\ \ n\times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} \Leftarrow \quad y = Ax$$

## (2) 正交变换 $y = Ax$

正交变换：$y = Px$ ，其中$P$为正交矩阵.

$$P^T P = E$$

正交变换的性质: 正交变换保持向量长度不变.

(保持图形的几何形状不变)

**证明:** $|y| = \sqrt{y^T y} = \sqrt{(Px)^T (Px)} = \sqrt{x^T P^T Px} = \sqrt{x^T x} = |x|$

**例如:**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

正交变换 $\eta = P\xi$

**例：** 线性变换

可逆变换

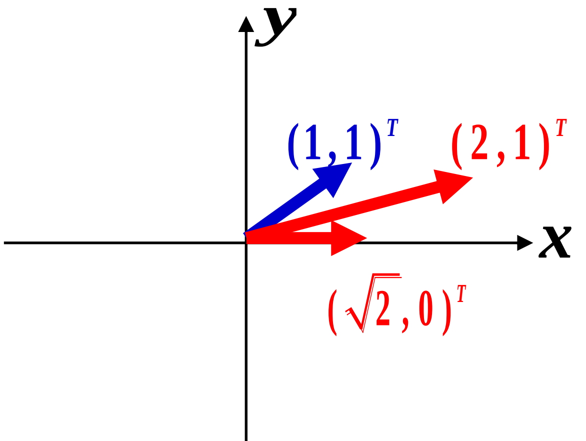
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

正交变换

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$




向量 $(\sqrt{2},0)^T$ 及 $(1,1)^T$

长度都是 $\sqrt{2}$

# 第六章  二次型与正定矩阵

## 6.2 二次型的标准型

- 线性变换及正交变换
- 用正交变换化二次型为标准形

复习

$$P^{-1}AP = B \Rightarrow AP = PB$$

线性无关

$$P^{-1}AP = \Lambda \quad \Rightarrow A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$$

$$\Rightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$$

$B$ ---坐标矩阵

$$\Rightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Rightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \lambda_3\alpha_3) \Rightarrow \begin{cases} A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 \\ A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \\ A\alpha_3 = \lambda_3\alpha_3 \end{cases}$$

$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是$A$的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$A$的三个线性无关的特征向量.

复习

## 1. 实对称矩阵的性质

- 属于不同特征值的特征向量正交；
- 每一特征值的几何重数=代数重数;
- 必存在正交矩阵$Q$，将其化为对角矩阵，$Q^{-1}AQ=\Lambda$

## 2. 实对称矩阵对角化的步骤:

**步骤：**

（1） 求$A$的特征值: $\lambda_1=\lambda_2$，$\lambda_3$

（2） 求 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 基础解系：

$$\lambda_1(2\text{重})\text{：}\ \xi_1,\xi_2 \xrightarrow[\text{（3）}]{\text{正交单位化}} p_1, p_2$$

$$\lambda_3(\text{单根})\text{：}\ \xi_3 \xrightarrow{\text{单位化}} p_3$$

（4） 得到正交矩阵：$Q=(p_1,p_2,p_3)$, $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$

$$Q^TQ = E \rightarrow Q^{-1} = Q^T$$

## 2. 用正交变换化二次型为标准形

对任意实对称阵 $A$，总有正交阵$Q$，使得 $Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda$

相似　　合同

**定理6.1** 任给二次型 $f = x^TAx$，总有正交变换 $x = Qy$ 使 $f$ 化为标准形：

$$f = x^TAx = (Qy)^T A(Qy) = (y^TQ^T)A(Qy) = y^T\underbrace{(Q^TAQ)}_{\Lambda}y$$

$$= (y_1, y_2, \cdots, y_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 $A$ 的特征值.

相似：$\underset{\text{可逆}}{P^{-1}AP} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

合同：$\underset{\text{可逆}}{C^TAC} = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{pmatrix}$

## 用正交变换化二次型为标准形的具体步骤：$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$

(1) 求二次型 $f=x^TAx$ 的矩阵$A$； 实对称矩阵

(2) 求$A$的特征值: $\lambda_1=\lambda_2$, $\lambda_3$

(3) 求 $(\lambda_i E-A)x=0$ 基础解系：

$\lambda_1$(2重)： $\xi_1,\xi_2 \xrightarrow{\text{正交单位化}} p_1, p_2$

$\lambda_3$(单根)： $\xi_3 \xrightarrow{\text{单位化}} p_3$

(4) 得到正交矩阵： $Q=(p_1,p_2,p_3)$， $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$

实对称阵正交对角化

(5) 作正交变换 $x=Qy$，得标准形：

$$f=x^TAx=y^T(Q^TAQ)y=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2$$

**例3** 将二次型 $f = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

通过正交变换 $x = Py$ 化成标准形.

并指出 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示何种二次曲面.

**解** **1. 写出二次型的矩阵**

$Q^{-1}AQ = \Lambda$

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$$ 实对称阵

**2. 求特征值**

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 17 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 14 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 17 & 0 & 2 \\ 2 & \lambda - 18 & 4 \\ 2 & 18 - \lambda & \lambda - 14 \end{vmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}17 & -2 & -2\\ -2 & 14 & -4\\ -2 & -4 & 14\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-17 & 2 & 2\\ 2 & \lambda-14 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-14\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-17 & 0 & 2\\ 2 & \lambda-18 & 4\\ 2 & \underset{-(\lambda-18)}{18-\lambda} & \lambda-14\end{vmatrix}=(\lambda-18)\begin{vmatrix}\lambda-17 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 4\\ 2 & -1 & \lambda-14\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-18)\begin{vmatrix}\lambda-17 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 4\\ 4 & 0 & \lambda-10\end{vmatrix}=(\lambda-18)\begin{vmatrix}\lambda-17 & 2\\ 4 & \lambda-10\end{vmatrix}$$

$(\lambda-17)(\lambda-10)-8$

$$=(\lambda-18)(\underbrace{\lambda^2-27\lambda+162}_{(\lambda-18)(\lambda-9)})\ =(\lambda-18)^2(\lambda-9)=0$$

特征值: $\lambda_1=9,\lambda_2=\lambda_3=18$ 验算: $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=45$

## 3. 求特征向量 $Q^{-1}AQ=\Lambda$

$(\lambda E-A)x=0$

$$A=\begin{pmatrix}17 & -2 & -2\\ -2 & 14 & -4\\ -2 & -4 & 14\end{pmatrix}$$

$\lambda_1=9$ 求解 $(9E-A)x=0$ 的基础解系

$$9E-A=\begin{pmatrix}9-17 & 2 & 2\\ 2 & 9-14 & 4\\ 2 & 4 & 9-14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 2 & 2\\ 2 & -5 & 4\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

$n-r(9E-A)=3-2=1$

几何重数 $=1$

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1/2\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

## 3. 求特征向量 $Q^{-1}AQ = \Lambda$

$(\lambda E - A)x = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 18$　求解 $(18E - A)x = 0$ 的基础解系

$$18E - A = \begin{pmatrix} 18-17 & 2 & 2 \\ 2 & 18-14 & 4 \\ 2 & 4 & 18-14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$n - r(18E - A) = 3 - 1 = 2$

几何重数 = 2

得基础解系 $\xi_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\xi_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}17 & -2 & -2\\ -2 & 14 & -4\\ -2 & -4 & 14\end{pmatrix}$$

**2. 求特征值** $\lambda_1=9\qquad \lambda_2=\lambda_3=18$

**3. 求特征向量** $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\qquad \xi_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\quad \xi_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\xi_1^T\xi_2=0,\quad \xi_1^T\xi_3=0$$

$$\xi_2^T\xi_3=4\neq 0$$

**4. 将特征向量正交化及单位化**

取 $\alpha_1=\xi_1,\ \alpha_2=\xi_2,\ \alpha_3=\xi_3-\dfrac{(\alpha_2,\xi_3)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}-\dfrac{4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2/5\\-4/5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}$

得正交向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$（9） $\quad\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$（18） $\quad\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}$（18）

单位化 $\eta_1=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix},\quad \eta_3=\begin{pmatrix}2/\sqrt{45}\\4/\sqrt{45}\\-5/\sqrt{45}\end{pmatrix}.$

9　　　18　　　18

正交单位化 $\eta_1=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix},\quad \eta_3=\begin{pmatrix}2/\sqrt{45}\\4/\sqrt{45}\\-5/\sqrt{45}\end{pmatrix}.$

**5. 得到正交矩阵$Q$**

$$Q=\begin{pmatrix}1/3 & -2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45}\\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45}\\ 2/3 & 0 & -5/\sqrt{45}\end{pmatrix}$$

满足 $Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{pmatrix}9 & & \\ & 18 & \\ & & 18\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}17 & -2 & -2\\ -2 & 14 & -4\\ -2 & -4 & 14\end{pmatrix}$$

## 6. 用正交变换将二次型化为标准形

$$A=\begin{pmatrix}17&-2&-2\\-2&14&-4\\-2&-4&14\end{pmatrix}$$

所求正交变换为 $x=Qy$，即

$$Q=\begin{pmatrix}1/3&-2/\sqrt{5}&2/\sqrt{45}\\2/3&1/\sqrt{5}&4/\sqrt{45}\\2/3&0&-5/\sqrt{45}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&-2/\sqrt{5}&2/\sqrt{45}\\2/3&1/\sqrt{5}&4/\sqrt{45}\\2/3&0&-5/\sqrt{45}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

$$f=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

$$=x^TAx$$

$$=(Qy)^TA(Qy)=(y^TQ^T)A(Qy)=y^T(Q^TAQ)y$$

$$=(y_1,y_2,y_3)\begin{pmatrix}9&&\\&18&\\&&18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}9&&\\&18&\\&&18\end{pmatrix}$$

$$=9y_1^2+18y_2^2+18y_3^2$$

## 7. 指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面.

正交变换 $x = Qy$,

$$f = 17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3 = 9y_1^2+18y_2^2+18y_3^2$$

$$17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3=1$$ ---椭球面

正交变换

$$9y_1^2+18y_2^2+18y_3^2=1$$ ---椭球面

**化简二次型的作用:** 方便判断二次型的图形

$$Q=\begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & -5/\sqrt{45} \end{pmatrix}$$

# 第六章二次型与正定矩阵

6.1 二次型的定义及其矩阵表示

6.2 二次型的标准形

6.4 实二次型的定性

# 第六章 二次型与正定矩阵

## 6.4 实二次型的定性

- 正定二次型的概念
- 正定二次型的判别

## 1. 正定二次型的概念

注意：实对称阵才能是正定矩阵

**定义6.2** 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T A x$ 是一个实二次型，

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

若对于$\forall x \neq 0$,

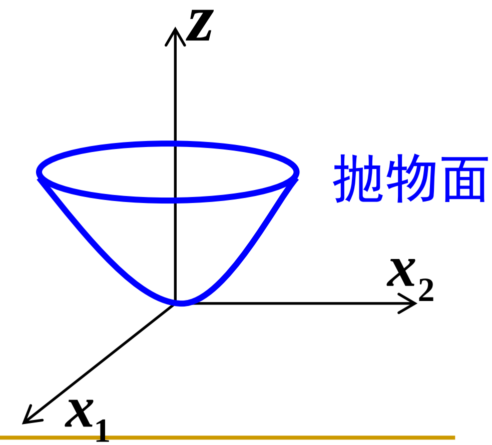
都有 $x^T A x > 0$, 则称二次型为正定的， $A$为正定矩阵；

$x^T A x \geq 0$, 则称二次型为半正定的, $A$为半正定矩阵；

**例4** $z = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ 是正定二次型，$E$为正定矩阵.

正定二次型有唯一的全局极小点.

这一性质在最优化问题中有着广泛的应用.



# 第六章 二次型与正定矩阵

## 6.4 实二次型的定性

- 正定二次型的概念
- 正定二次型的判别

## 2. 正定二次型的判别

**定理6.2** 实对称矩阵$A$ 正定 $\Leftrightarrow$ $A$的特征值全都$>0$.

**定理6.3** 正定矩阵的行列式大于零.

**证明** 若$A$正定, 则$A$的特征值全都$>0$.

所以，其行列式大于零.

**例5** 设$A$为正定矩阵，则 $A^{-1}, kA(k>0)$，$A^*$ 也正定矩阵.

**证明：**

**定理6.2** 实对称矩阵$A$正定 $\Leftrightarrow$ $A$的特征值全都 >0.

设$A$的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，$\because$ $A$正定，$\therefore \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n>0$

$A^{-1}$的特征值为 $\dfrac{1}{\lambda_1},\dfrac{1}{\lambda_2},\cdots,\dfrac{1}{\lambda_n}>0$，  $\therefore A^{-1}$ 正定

$kA$ 的特征值为 $k\lambda_1,k\lambda_2,\cdots,k\lambda_n>0$，  $\therefore kA$ 正定

$A^*$ 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda_1},\dfrac{|A|}{\lambda_2},\cdots,\dfrac{|A|}{\lambda_n}>0$，  $\therefore A^*$ 正定

复习

## 矩阵的子式

**定义3.9** 在 $m\times n$ 矩阵$A$中，任取$k$行与$k$列（$k\le m, k\le n$），位于这些行列交叉处的 $k^2$ 个元素，不改变它们在$A$中的位置次序而得到的$k$阶行列式，称为矩阵$A$的$k$阶子式.

例如

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A$的2阶子式:

$$D_2=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=0-9=-9$$

## 2. 正定二次型的判别

主子式, 顺序主子式的定义:

设 $A$ 是 $n$ 阶对称矩阵, $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$,

子式 $\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix}$ 称为 $A$ 的 $k$ 阶主子式.

而子式 $a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \cdots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为$A$的顺序主子式.

**例：** 设 $A$ 是 5阶对称矩阵,

取$A$的第1，3，5行，第2，4，5列 —— 3阶子式

取$A$的第1，3，5行，第1，3，5列 —— 3阶主子式

取$A$的第1，2，3行，第1，2，3列 —— 3阶顺序主子式

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

3阶子式

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

3阶主子式

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

3阶顺序主子式

**定理6.4** 实对称矩阵正定$\Leftrightarrow$ 其顺序主子式均大于零.

## 小结

**常用的等价条件：**

1) 二次型 $x^T A x$ 是正定二次型；

2) $A$是正定矩阵；

3) $A$的特征值都是正数；

4) $A$的顺序主子式都大于零.

**例6** 判断实对称矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ 是否正定.

**解** 由于

$$3>0,\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=11>0,\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}=46>0,$$

根据定理6.4知，这个矩阵是正定的.

**例7** 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2+4x_2x_3-2x_1x_3,$$

当 $t$ 为何值时，上述二次型为正定二次型.

**解:** 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix},$

二次型正定的充要条件是$A$的各阶顺序主子式>0

$$1>0,\ \begin{vmatrix}1 & t\\ t & 1\end{vmatrix}=(1-t^2)>0,\ |A|=\begin{vmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{vmatrix}=-5t^2-4t>0,$$

解得 $-\dfrac{4}{5}<t<0,\ \therefore -\dfrac{4}{5}<t<0$ 时，二次型为正定二次型.

# 第六章 二次型与正定矩阵

## 6.4 实二次型的定性

- 正定二次型的概念
- 正定二次型的判别

# 第六章二次型与正定矩阵

6.1 二次型的定义及其矩阵表示

6.2 二次型的标准形

6.4 实二次型的定性

# 作业 习题六

| 授课内容 | 习题六 |
|---|---|
| 6.1二次型矩阵表示 | 1(1)(2)(3), 2(2)(3),3 |
| 6.2 二次型的标准形 | 9(2)(3)正交变换 |
| 6.4实二次型的正定性 | 19(1)(2), 21(2), 24(1)(2)(3) |
| | |

（13, 11分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$

记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

(1) 证明二次型 $f$ 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$;

(2) 若 $\alpha,\beta$ 正交且均为单位向量，证明 $f$ 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$

$= x^T A x$ $\quad x^T\alpha\cdot\alpha^T x \quad x^T\beta\cdot\beta^T x$

（13, 11分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2\underline{(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)}^2+\underline{(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)}^2$

记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$. 记 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

(1) 证明二次型 $f$ 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$;

**证明:**

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=x^T\alpha=\alpha^Tx=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=x^T\beta=\beta^Tx$$

$= x^T A x$ $\qquad x^T \alpha \cdot \alpha^T x \qquad x^T \beta \cdot \beta^T x$

（13, 11分）

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$

记 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$ 记 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(1) 证明二次型 $f$ 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;

**证明：** $f(x_1, x_2, x_3) = 2x^T\alpha\alpha^T x + x^T\beta\beta^T x$

$= x^T(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)x = x^T A x, \quad A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$

其中A是对称阵 $\quad A^T = A \quad (\alpha\alpha^T)^T = (\alpha^T)^T \alpha^T = \alpha\alpha^T$

$A^T = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)^T = 2(\alpha\alpha^T)^T + (\beta\beta^T)^T = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T = A$

所以二次型 $f$ 对应的矩阵为 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$.

（13, 11分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ $A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$.

记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

(2) 若 $\alpha,\beta$ 正交且均为单位向量，证明 $f$ 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$ $\Longrightarrow$ $A$的特征值为2, 1, 0.

（13, 11分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx \quad A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$.

$|\alpha|=\sqrt{\alpha^T\alpha}$

记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

(2) 若 $\alpha,\beta$ 正交且均为单位向量，证明 $f$ 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$ $\Rightarrow$ $A$的特征值为2, 1, 0.

$A\alpha=\lambda\alpha$

**证明：** 因为 $\alpha,\beta$ 正交且均为单位向量，所以

$$\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=0,\quad |\alpha|=1\Rightarrow\alpha^T\alpha=1,\quad |\beta|=1\Rightarrow\beta^T\beta=1$$

$A\alpha=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\alpha=2\alpha\underbrace{\alpha^T\alpha}_{1}+\beta\underbrace{\beta^T\alpha}_{0}=2\alpha$ 所以2是$A$的特征值.

$A\beta=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\beta=2\alpha\underbrace{\alpha^T\beta}_{0}+\beta\underbrace{\beta^T\beta}_{1}=\beta$ 所以1是$A$的特征值.

于是$A$有特征值为2, 1.

（13, 11分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$　　$A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$.

记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$　$\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}a_1a_1 & a_1a_2 & a_1a_3\\a_2a_1 & a_2a_2 & a_2a_3\\a_3a_1 & a_3a_2 & a_3a_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a_1a_1 & a_1a_2 & a_1a_3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

(2) 若 $\alpha,\beta$ 正交且均为单位向量，证明 $f$ 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$ $\Longrightarrow$ $A$的特征值为2, 1, 0. $\Longrightarrow$ $|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=0$

$\Downarrow$

$r(A)<3$

**证明：** $A$有特征值为2, 1.　　$r(A+B)\le r(A)+r(B)$

因为 $r(A)=r(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le r(2\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)=2<3$,

所以$|A|=0$　所以0是$A$的特征值．于是$A$的特征值为2,1,0.

因此 $f$ 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2+0y_3^2$

（11, 4分）

$r(A)=1$

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T Ax$ 的秩为1，$A$ 的各行元素之和为3，则 $f$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $\underline{\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2}$

解： 求$A$的特征值

$$A\alpha=\lambda\alpha$$

$$\text{设 } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\because \begin{cases} a_{11}+a_{12}+a_{13}=3 \\ a_{21}+a_{22}+a_{23}=3 \\ a_{31}+a_{32}+a_{33}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以3是$A$的一个特征值.

（11, 4分）

$r(A)=1$

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的秩为1，$A$ 的各行元素之和为3，则 $f$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $3y_1^2$

解：3是$A$的一个特征值. $A\alpha=\lambda\alpha$

因为$r(A)=1$, 所以$|A|=0$, 所以0是$A$的特征值. $|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3$

下面证明：0是$A$的2重特征值.

$Ax=0$

0的代数重数 $\geq$ 它的几何重数 $n-r(A)=3-1=2$ $\boxed{(\lambda E-A)x=0}$

所以0是矩阵$A$的2重特征值，

即$A$的3个特征值为：3，0，0

因此，正交变换下的标准形为 $3y_1^2+0y_2^2+0y_3^2$

任一特征值的几何重数 $\leq$ 它的代数重数

（02, 3分）

已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 可化为标准形 $f=6y_1^2$，则 $a=$ <u>2</u>

解：

因为二次型 $x^TAx$ 经正交变换化为标准形时，平方项的系数就是 $A$ 的特征值，即

$f=x^TAx=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是$A$ 的三个特征值.

$f=6y_1^2=6y_1^2+0y_2^2+0y_3^2$，所以$A$ 的特征值为6，0，0.

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}$$

$$\because A=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix} \therefore a+a+a=6+0+0 \Rightarrow a=2$$