# §8.2 函数的复合与反函数

**定理** 设 $f$：$A \to B$，$g$：$B \to C$，则 $f \circ g$：$A \to C$ 且 $f \circ g(x) = g(f(x))$。

**性质** 设 $f$：$A \to B$，则

$$f \circ I_B = I_A \circ f = f$$

**定理** 设 $f$：$A \to B$，$g$：$B \to C$，则

（1）若 $f, g$ 都是满射，则 $f \circ g$ 也是满射；

（2）若 $f, g$ 都是单射，则 $f \circ g$ 也是单射；

（3）若 $f, g$ 都是双射，则 $f \circ g$ 也是双射。

**例** 设$A=\{1,2\}$，$B=\{a,b,c\}$，$C=\{3,4\}$，则

$f$：$A\to B$，$f(1)=a$，$f(2)=b$ 非满射

$g$：$B\to C$，$g(a)=3$，$g(b)=4$，$g(c)=3$ 非单射

$f\circ g$：$A\to C$，$f\circ g(1)=3$，$f\circ g(2)=4$ 双射

**例** 设 $f$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f(x)=\begin{cases} x^2, x\geq 3 \\ -2, x<3 \end{cases}$

$g$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$g(x)=x+2$

则

$$f\circ g=\begin{cases} x^2+2, & x\geq 3 \\ 0, & x<3 \end{cases} \qquad g\circ f=\begin{cases} (x+2)^2, & x\geq 1 \\ -2, & x<1 \end{cases}$$

**例** 设$f$：$A\to B$，若$f$是双射，则$f^{-1}$是$B$到$A$的双射函数，称为$f$的**反函数**，且

$$f\circ f^{-1}=I_A，\quad f^{-1}\circ f=I_B$$

**证明**（1）证$f^{-1}$是$B$到$A$的函数：

因为$f$是函数，所以$f^{-1}$是关系，并且

$$\mathrm{dom}\, f^{-1}=\mathrm{ran}\, f=B \quad （f\text{是满射}）$$

$$\mathrm{ran}\, f^{-1}=\mathrm{dom}\, f=A$$

对任意$x\in B=\mathrm{dom}\, f^{-1}$，若存在$y_1, y_2\in A$使得

$$<x, y_1>\in f^{-1}\wedge <x, y_2>\in f^{-1}$$

则有

$$<y_1, x> \in f \wedge <y_2, x> \in f$$

已知$f$是单射，所以得$y_1 = y_2$，即$f^{-1}$是$B$到$A$的函数。

（2）证$f^{-1}$是满射：

对任意的$y \in A = \mathrm{ran}\, f^{-1}$，则存在$x \in B$使得

$$f^{-1}(x) = y$$

所以，$f^{-1}$是满射。

（3）证$f^{-1}$是单射：

若存在 $x_1, x_2 \in B$ 使得

$$f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2) = y$$

则

$$<x_1, y> \in f^{-1} \wedge <x_2, y> \in f^{-1}$$

于是

$$<y, x_1> \in f \wedge <y, x_2> \in f$$

因为$f$是函数，故

$$x_1 = f(y) = x_2$$

由此得 $f^{-1}$是单射。综上可得， $f^{-1}$是双射。 ▌