§7.5 关系的闭包

定义 设R是非空集A上的二元关系，R的**自反**(**对称**或**传递**)**闭包**是A上的关系R'，满足

（1）R'是自反的（对称的或传递的）；

（2）$R \subseteq R'$；

（3）对A上任何包含R的自反（对称或传递）关系R''均有$R' \subseteq R''$

记为$r(R)$（$s(R)$或$t(R)$）。

闭包是使不具备自反性、对称性或传递性的二元关系具有这些性质的最经济的扩充产物。

定理 设R是非空集A上的二元关系，则

（1） $\mathrm{r}(R) = R \cup I_A$

（2） $\mathrm{s}(R) = R \cup R^{-1}$

（3） $\mathrm{t}(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n \cup \cdots$

证明（3）只需证等号两端的集合相互包含。

① $\mathrm{t}(R) \subseteq R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n \cup \cdots$

根据$\mathrm{t}(R)$的定义，只需证$R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n \cup \cdots$具有传递性。任取$\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle$

$$(\langle x, y\rangle \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots) \wedge (\langle y, z\rangle \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots)$$

$$\Leftrightarrow \exists s(\langle x, y\rangle \in R^s) \wedge \exists t(\langle y, z\rangle \in R^t)$$

$\Leftrightarrow \exists s \exists t\,(<x, y>\in R^s \wedge <y, z>\in R^t)$

$\Leftrightarrow \exists s \exists t\,(<x, z>\in R^s \circ R^t)$

$\Leftrightarrow \exists s \exists t\,(<x, z>\in R^{s+t})$

由此得 $<x, z>\in R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$。即 $R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$是传递的。

② $R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n\cup\cdots \subseteq \mathrm{t}(R)$

只需证每个 $R^n\subseteq \mathrm{t}(R)$。对$n$做归纳法:

$n=1$, $R^1= R \subseteq \mathrm{t}(R)$。结论成立。

设$R^n\subseteq \mathrm{t}(R)$,则对任意$<x, y>$

$$\langle x, y\rangle \in R^{n+1} = R^n \circ R$$

$$\Leftrightarrow \exists u(\langle x, u\rangle \in R^n \wedge \langle u, y\rangle \in R)$$

由归纳假设与t(R)的定义，$R^n \subseteq$t(R)，$R \subseteq$t(R)，于是

$$\langle x, u\rangle \in \mathrm{t}(R) \wedge \langle u, y\rangle \in \mathrm{t}(R)$$

因为t(R)是传递的，所有可得 $\langle x, y\rangle \in$t(R)。因此，

$$R^{n+1} \subseteq \mathrm{t}(R)$$

由归纳法原理，对任意正整数n，$R^n \subseteq$t(R)。

综上所述，即得

$$\mathrm{t}(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n \cup \cdots \quad \blacksquare$$

推论 若A为有限集，则存在正整数k，使得

$$t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^k$$

例 当A为有限集时，若R的关系矩阵为M，则$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的矩阵分别为

$$M + I,\quad M + M^{\mathrm{T}},\quad M + M^2 + \cdots + M^k$$

例 设$A=\{a,b,c,d\}$，$R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$，求$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$。

解 $r(R) = R \cup I_A$

$=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\} \cup \{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>\}$

$=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>, <b,b>,<b,c>, <c,c>,<c,d>, <d,d>\}$

$$s(R)=R\cup R^{-1}$$

$$=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}\cup\{<b,a>,<a,b>,<c,b>,<d,c>\}$$

$$=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,b>,<c,d>,<d,c>\}$$

由第3节的结论得

$$R^{2k}=R^2=\{<a,a>,<a,c>,<b,b>,<b,d>\}$$

$$R^{2k+1}=R^3=\{<a,b>,<a,d>,<b,a>,<b,c>\}$$

于是有

$$t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^k$$

$$=R\cup R^2\cup R^3=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<a,d>,$$

$$<b,a>,<b,b>,<b,c>,<b,d>,<c,d>\}$$ ▮