第三章
线性方程组

第三章 线性方程组

教学计划：4次课-12学时

例1 求解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0 \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0 \end{cases}$

无穷多非零解

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -5/3 \\ 0 & 1 & 2 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行简化阶梯阵

$r(A)=2<n=4$

同解方程组 $\begin{cases} x_1=2x_3+\frac{5}{3}x_4 \\ x_2=-2x_3-\frac{4}{3}x_4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1=2c_1+5/3c_2 \\ x_2=-2c_1-4/3c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases} \Rightarrow \text{通解:} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 5/3 \\ -4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c_1, c_2为任意常数

例2 求解非齐次线性方程组 $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+3y+4z=5 \\ 5x+4y+3z=2 \end{cases}$

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

行简化阶梯阵

同解方程组 $\begin{cases} x=z-2 \\ y=-2z+3 \end{cases}$

$r(A)=r(A,b)=2<n=3$

方程组有无穷多解，求通解：

$$\begin{cases} x=c-2 \\ y=-2c+3 \\ z=c \end{cases} \Rightarrow$$

通解: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

c为任意常数

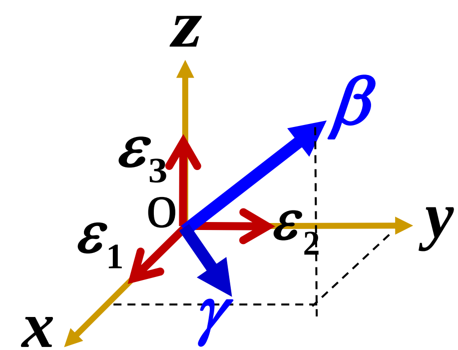
第三章 线性方程组

3.1 3.2 解决的核心问题： 向量空间中任意向量的表示问题.

任意向量如何表示 ← 极大无关组

$$\beta=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1\overset{\varepsilon_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}+a_2\overset{\varepsilon_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}+a_3\overset{\varepsilon_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$$

3维向量空间 R^3



$$\beta=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3$$ 线性表示

$$\gamma=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=1\varepsilon_1+1\varepsilon_2+0\varepsilon_3,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma$ —— 线性相关(共面)

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

—— 线性无关 (不共面)—— R^3 的极大无关组

3.1 向量的线性关系 —— 向量组线性相关与线性无关

3.2 向量组的秩 —— 极大无关组

例1 求解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0 \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0 \end{cases}$

无穷多
非零解

向量空间

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -5/3 \\ 0 & 1 & 2 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A)=2<n=4$

同解方程组 $\begin{cases} x_1=2x_3+\frac{5}{3}x_4 \\ x_2=-2x_3-\frac{4}{3}x_4 \end{cases}$

极大无关组

$$\begin{cases} x_1=2c_1+5/3c_2 \\ x_2=-2c_1-4/3c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

通解: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 5/3 \\ -4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c_1, c_2为任意常数

第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

3.2 向量组的秩

3.3 齐次线性方程组解的结构

3.4 非齐次线性方程组解的结构

第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

- 向量定义及其运算
- 向量的线性相关性

第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

- 向量定义及其运算
  - 几何空间
  - n维向量
  - 向量的运算
  - 向量组与矩阵
  - 向量空间(4.1)

复习

1. 几何空间 —— 建立了空间直角坐标系的三维空间

向量：在几何空间中，既有大小又有方向的量称为向量.

向量的表示： 三维向量的坐标表示为：

$$\alpha = (a_1, a_2, a_3), \quad \beta = (b_1, b_2, b_3).$$

向量的运算：向量的加法与数乘运算：(称为线性运算)

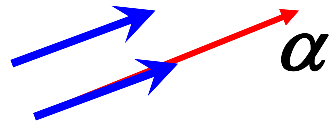
$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\lambda\alpha = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3), (\lambda \text{ 为常数 })$$

向量的平行：若两个非零向量的方向相同或相反，则称这两个向量平行.

定理3.1 两个向量 α,β 平行 $\Leftrightarrow$ $\beta = k\alpha$

理解：



$\beta = k\alpha (k > 0)$

当 $k > 0, \alpha, \beta$ 方向相同

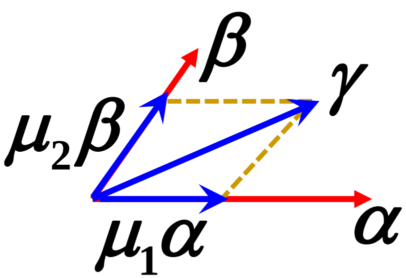
当 $k < 0, \alpha, \beta$ 方向相反

	β 与 α 长度
$k = 1$	一样
$k > 1$	β 长
$k < 1$	β 短

定理3.2 三个向量 α,β,γ 共面 $\Leftrightarrow$ $\gamma = \mu_1\alpha + \mu_2\beta$

线性表示

理解：



$0 < \mu_1, \mu_2 < 1$

第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

- 向量定义及其运算
  - 几何空间
  - n维向量
  - 向量的运算
  - 向量组与矩阵
  - 向量空间(4.1)

2. n维向量

几何空间中的三维向量 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$ 是由三个实数构成的有序数组，现将它推广到n维情况：

定义3.1 n个数组成的有序数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

称为n维向量. 这n个数称为该向量的n个分量,

a_i称为第i个分量.

分量全为实数的向量称为实向量,

至少有一个分量为复数的向量称为复向量.

- 如不特别声明, 我们所讨论的向量均为实向量.

n 维向量的表示方法：

n维向量写成一行, 称为行向量, 也就是行矩阵,

通常用 α,β,γ 等表示，如：$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

n维向量写成一列, 称为列向量, 也就是列矩阵,

如：$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

向量相等： 若两个n维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,

$$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

对应分量相等, 即 $a_i=b_i$ ，则称这两个向量相等.

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

- 向量定义及其运算
  - 几何空间
  - n维向量
  - 向量的运算
  - 向量组与矩阵
  - 向量空间(4.1)

3.向量的运算

已知 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T,\ \beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$

加法 $\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^T$

数乘 $\lambda\alpha=(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)^T$

注意： 向量的加法与数乘运算称为向量的线性运算.

n维零向量 $\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=0$ $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ 的负向量 $-\alpha=\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\\vdots\\-a_n\end{pmatrix}$

第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

- 向量定义及其运算
  - 几何空间
  - n维向量
  - 向量的运算
  - 向量组与矩阵
  - 向量空间(4.1)

4. 向量组与矩阵

向量组的定义： 由m个n维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 构成的集合称为向量组. 记作 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$.

注释：

- 向量组必须由同维数的向量构成. 例：$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ √

  $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ×

- 向量组有两个数字：m 和 n

  m 是向量组所含向量个数； $m=4$

  n 是向量组的维数，即每个向量中分量的个数. $n=3$

4. 向量组与矩阵

向量组的定义： 由m个n维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 构成的集合称为向量组. 记作 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$.

向量组与矩阵的关系：

$$\text{矩阵 } A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_j & & \alpha_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\ \alpha_j,\ \cdots\ ,\alpha_n)$$

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 称为矩阵A的列向量组.

类似地, 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 有m个n维行向量.

$$A=\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)\begin{array}{l} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \\ \gamma_i \\ \\ \gamma_m \end{array} \qquad A=\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_i \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix}$$

向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$ 称为矩阵A的行向量组.

4.向量组与矩阵

向量组与矩阵的关系：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_i \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix}$$

$$A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_j, \cdots, \alpha_n)$$

- 由此可知：矩阵可由列向量组构成.

  矩阵可由行向量组构成.

练习

写出下面矩阵的列向量组和行向量组

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}$$

解：

列向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-6\\4\\-10\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$ 4个3维列向量

$$\alpha_1=(3,1,-1)^T,\alpha_2=(4,-1,3)^T,\alpha_3=(-6,4,-10)^T,\alpha_4=(4,1,1)^T$$

行向量组

$\gamma_1=(3,4,-6,4),\gamma_2=(1,-1,4,1),\gamma_3=(-1,3,-10,1)$ 3个4维行向量

第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

- 向量定义及其运算
  - 几何空间
  - n维向量
  - 向量的运算
  - 向量组与矩阵
  - 向量空间(4.1)

5. 向量空间

定义3.2 设V为n维向量的集合，如果集合V非空，且集合V对于向量加法及数乘两种运算封闭，则称集合V为实数域上的向量空间.

注释： (1) 集合V对于加法及数乘两种运算封闭是指

若$\forall \alpha, \beta \in V$，则$\alpha + \beta \in V$；

若$\forall \alpha \in V, \lambda \in R$，则$\lambda\alpha \in V$.

(2) 向量空间 $\begin{cases} \text{集合}V\text{非空（含有零向量）} \\ \text{对加法封闭} \\ \text{对数乘封闭} \end{cases}$

例1 三维向量的全体构成的集合

$R^3 = \{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_i \in R\}$ 是一个向量空间.

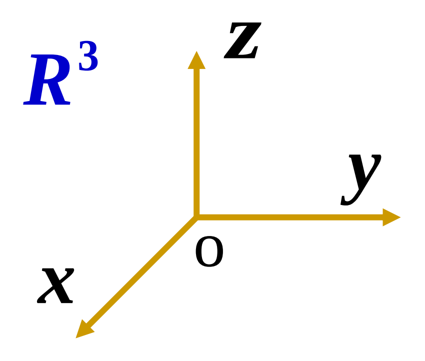
解 (1) $0 = (0,0,0)^T \in R^3$, $\therefore$ R^3 非空;

(2) $\forall \alpha, \beta \in R^3$, 设 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\beta = (y_1, y_2, y_3)^T$,

$\therefore \alpha + \beta = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)^T \in R^3$

(3) $\forall \lambda \in R, \alpha \in R^3$, $\lambda\alpha = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)^T \in R^3$

$\therefore$ R^3 是一个向量空间.



坐标面: xoy, xoz, yoz 都是向量空间

坐标轴: x轴, y轴, z轴 都是向量空间

例1 坐标面 xoy 是一个向量空间

$$xoy = \{(x_1, x_2, 0)^T \mid x_i \in R\}$$

解 (1) $0 = (0,0,0)^T \in xoy$, $\therefore xoy$ 非空;

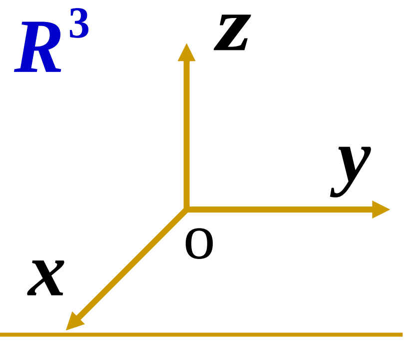
(2) $\forall \alpha, \beta \in xoy$, 设 $\alpha = (x_1, x_2, 0)^T$, $\beta = (y_1, y_2, 0)^T$,

$$\therefore \alpha + \beta = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0)^T \in xoy$$

(3) $\forall \lambda \in R, \alpha \in xoy$, $\lambda\alpha = (\lambda x_1, \lambda x_2, 0)^T \in xoy$

$\therefore xoy$ 是一个向量空间.

R^3



例1 三维向量的全体构成的集合

$$R^3=\{(x_1,x_2,x_3)^T \mid x_i\in R\}$$ 是一个向量空间.

同理,可以验证：实数域上的全体n维向量构成的集合

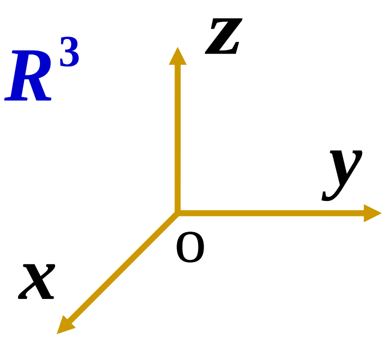
$$R^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_i\in R, i=1,2,\cdots,n\}$$

也是一个向量空间，称为实数域上的n维向量空间.

定义3.3 设向量空间V_1 及V_2，若 $V_1 \subset V_2$，

则称V_1是V_2 的子空间.

例如： R^3



三维向量空间

坐标面：xoy, xoz, yoz -----向量空间

都是 R^3的子空间.

坐标轴：x轴, y轴, z轴-----向量空间

都是 R^3的子空间.

定义3.3 设向量空间V_1及V_2，若 $V_1 \subset V_2$，则称V_1是V_2的子空间.

例2 判别下面集合是否为向量空间.

$$V_1 = \left\{ x = \left(x_1, 0, \cdots, 0, x_n \right)^T \middle| x_1, x_n \in R \right\}, \text{ 其中 } n \ge 2.$$

解 (1) 由 $(0,0,\cdots,0)^T \in V_1$ $\therefore V_1$ 非空;

(2) 设 $\alpha = \left(a_1, 0, \cdots, 0, a_n\right)^T \in V_1$, $\beta = \left(b_1, 0, \cdots, 0, b_n\right)^T \in V_1$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \left(a_1 + b_1, 0, \cdots, 0, a_n + b_n\right)^T \in V_1$$

$$\forall \lambda \in R, \quad \lambda\alpha = \left(\lambda a_1, 0, \cdots, 0, \lambda a_n\right)^T \in V_1.$$

故V_1是向量空间, 且是 R^n 的子空间.

例3 判别下面集合是否为向量空间.

$$V_2=\left\{x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T \middle| x_1x_2\cdots x_n=0, x_i\in R\right\}$$

解: 因为 $\alpha=\left(1,0,\cdots,0\right)^T\in V_2,$

$$\beta=\left(0,1,\cdots,1\right)^T\in V_2$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta=\left(1,1,\cdots,1\right)^T\notin V_2 \quad \left(\because 1\cdot 1\cdots 1=1\neq 0\right)$$

故V_2不是向量空间.

例4 判别下面集合是否为向量空间.

$$V=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid Ax=0\right\}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{x}=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{0}$$

解

(1) $\mathbf{0}\in V$，$\therefore$ V 非空;

(2) $\forall \alpha=(a_1,a_2,a_3,a_4),\beta=(b_1,b_2,b_3,b_4)\in V$，即 $A\alpha=0, A\beta=0$,

$A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta=0$ $\therefore$ $\alpha+\beta\in V$.

(3) $\forall\lambda\in R$, $A(\lambda\alpha)=\lambda A\alpha=0$ $\therefore \lambda\alpha\in V$，故$V$是向量空间,

称为方程组 $Ax=0$ 的解空间.

齐次线性方程组解向量的集合构成向量空间.

例5 判别下面集合是否为向量空间.

$$S=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid Ax=b\right\}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=5 \\ 5x_1+4x_2+3x_3=2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}=\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}$$

解

$\forall \alpha=(a_1,a_2,a_3)\in S$, 即 $A\alpha=b$,

$A(2\alpha)=2A\alpha=2b\neq b$, $\therefore\ 2\alpha\notin S$

故S不是向量空间.

非齐次线性方程组的解向量的集合不构成向量空间.

练习

判别下面集合是否为向量空间.

$$W_1=\left\{(x_1,x_2,x_3)^T \mid x_1-2x_2+2x_3=0\right\}$$

$$W_2=\left\{(x_1,x_2,x_3)^T \mid x_1-2x_2+2x_3=1\right\}$$

解 W_1 是向量空间,

W_2 不是向量空间.

齐次线性方程组解向量的集合构成向量空间.

非齐次线性方程组的解向量的集合不构成向量空间.

例6 设 α,β 为已知的n维向量，$V=\{x=\overset{1}{\lambda}\alpha+\overset{0}{\mu}\beta \mid \lambda,\mu\in R\}$

线性组合

试判断V是否为向量空间.

解 显然V非空，对任意 $x_1, x_2\in V$，
$$x_1=\lambda_1\alpha+\mu_1\beta$$
$$x_2=\lambda_2\alpha+\mu_2\beta$$

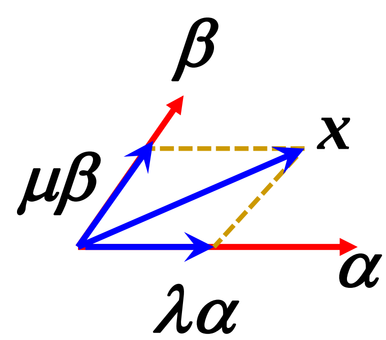
于是 $x_1+x_2=(\lambda_1+\lambda_2)\alpha+(\mu_1+\mu_2)\beta \in V$,

$\forall k\in R$，$kx_1=k\lambda_1\alpha+k\mu_1\beta \in V$. 故$V$是向量空间.

称为由向量α,β所生成的向量空间.记为 $\mathrm{span}\{\alpha,\beta\}$

$$\mathrm{span}\{\alpha,\beta\}=\{x=\lambda\alpha+\mu\beta \mid \lambda,\mu\in R\}$$

α,β 所张成的平面(三维情况下)



例6 设 α,β 为已知的n维向量，$V=\{x=\lambda\alpha+\mu\beta \mid \lambda,\mu\in R\}$

线性组合

试判断V是否为向量空间.

解 显然V非空，对任意 $x_1,x_2\in V$，

$$x_1=\lambda_1\alpha+\mu_1\beta$$
$$x_2=\lambda_2\alpha+\mu_2\beta$$

于是 $x_1+x_2=(\lambda_1+\lambda_2)\alpha+(\mu_1+\mu_2)\beta\in V$,

$\forall k\in R$, $kx_1=k\lambda_1\alpha+k\mu_1\beta\in V$. 故$V$是向量空间.

称为由向量α,β所生成的向量空间.记为 $\text{span}\{\alpha,\beta\}$

推广 由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可生成向量空间

$$V=\left\{x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m \mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in R\right\},$$

记为 $V=\text{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$.

例6 $V=\left\{x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m \,\middle|\, \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in R\right\}$,

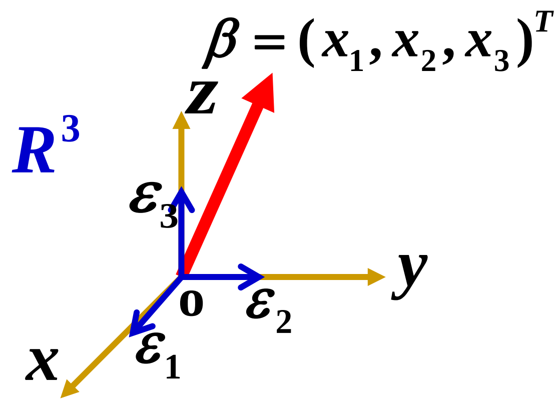
$$V=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}.$$

例如：

$$R^3=\{(x_1,x_2,x_3)^T \mid x_i\in R\},$$

$$=\{x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3 \mid x_i\in R\},$$

$$=\mathrm{span}\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$$



$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3$$

第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

- 向量定义及其运算
  - 几何空间
  - n维向量
  - 向量的运算
  - 向量组与矩阵
  - 向量空间(4.1)

第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

- 向量定义及其运算
- 向量的线性相关性

第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

- 向量的线性相关性
  - 向量与向量组的关系 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m,\ \beta \in R^n$
  - 向量组的线性相关与线性无关 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$

1. 向量与向量组的关系

定义3.4 设n维向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$， $\beta\in R^n$

如果存在一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

则称β是向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的一个线性组合，或称β可由向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示。

几何意义： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 生成的向量空间：

$$V = \{x = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m \mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m \in R\}$$

β可由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示 $\Leftrightarrow \beta\in V$

β不能由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示 $\Leftrightarrow \beta\notin V$

1.向量与向量组的关系

定义3.4 设n维向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，$\beta\in R^n$

如果存在一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

则称β是向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的一个线性组合，

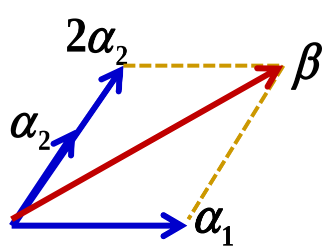
或称β可由向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示。

几何意义：R^3 β 能由 α_1,α_2 线性表示　　β不能由α_1,α_2线性表示

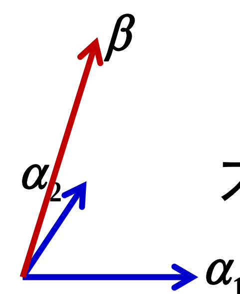
$$\beta=\alpha_1+2\alpha_2$$

$$\beta\notin span\{\alpha_1,\alpha_2\}$$

$$\beta\in span\{\alpha_1,\alpha_2\}=\{\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2\,|\,\lambda,\mu\in R\}$$



共面



不共面

1. 向量与向量组的关系

定义3.4 设n维向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，$\beta\in R^n$

如果存在一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

则称β是向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的一个线性组合，或称β可由向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示。

几何意义： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 生成的向量空间：

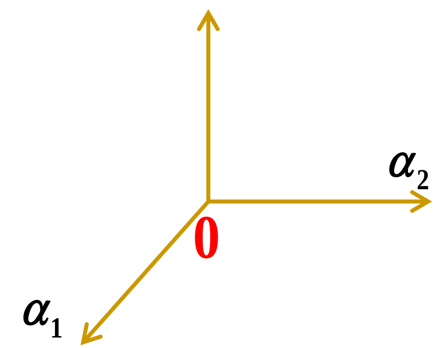
$$V=\{x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m \mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in R\}$$

β 可由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示 $\Leftrightarrow \beta\in V$

β 不能由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示 $\Leftrightarrow \beta\notin V$

例1 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

判断 $\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 能否由 α_1,α_2 线性表示。



解： (1) $\alpha_3=(0)\alpha_1+(0)\alpha_2$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

所以 α_3 能由 α_1,α_2 线性表示。$\alpha_3=0\in span\{\alpha_1,\alpha_2\}$

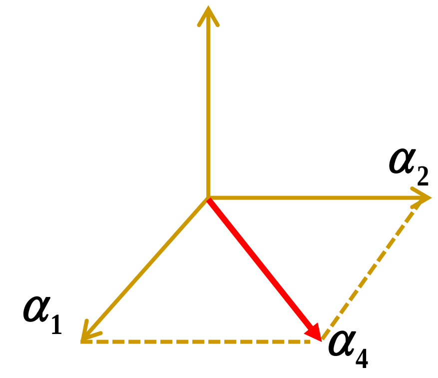
推广： $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$

$\because 0=0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m$

所以零向量能由任意向量组线性表示。

例1 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

判断 $\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 能否由 α_1,α_2 线性表示。



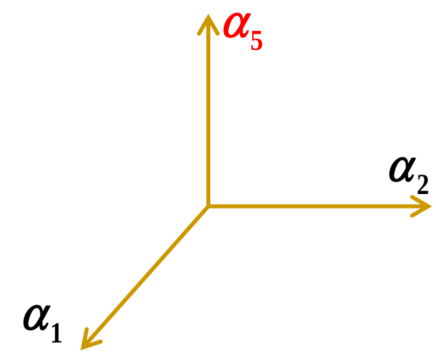
解：(2) $\alpha_4=(1)\alpha_1+(1)\alpha_2$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

所以 α_4 能由 α_1,α_2 线性表示。$\alpha_4\in span\{\alpha_1,\alpha_2\}$

例1 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

判断 $\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 能否由 α_1,α_2 线性表示。



解：

(3) $\alpha_5 \overset{?}{=} (\lambda)\alpha_1+(\mu)\alpha_2=\begin{pmatrix}\lambda\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\mu\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

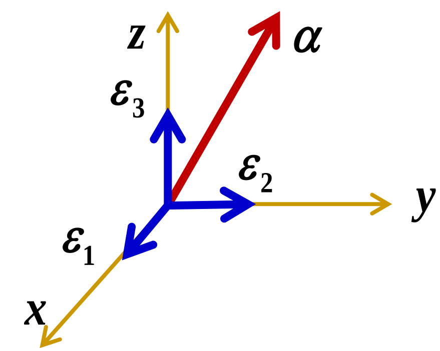
所以 α_5 不能由 α_1,α_2 线性表示。 $\alpha_5\notin span\{\alpha_1,\alpha_2\}$

例2 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 称为单位坐标向量组。

则对任意3维向量 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T$，均有

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3$$

即 $$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$



即 $$\alpha\in span\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}=R^3$$

例2 推广到n维情况：

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)^T,\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)^T$$

称为n维单位坐标向量组。

则对任意n维向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，均有

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$$

即 $$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+a_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

即 $\alpha\in span\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}=R^n$

第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

- 向量的线性相关性 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m \Leftrightarrow \beta \in span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$
- 向量与向量组的关系 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m,\ \beta \in R^n$
- 向量组的线性相关与线性无关 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$

问题：

如何判断一个向量能否由一个向量组线性表示？

线性方程组的表示：

(1) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(2) 矩阵乘积形式：$Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(3) 向量形式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{\alpha_1} x_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}}_{\alpha_2} x_2 + \cdots + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{\alpha_n} x_n = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = b$$

(3) 向量形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad\quad \alpha_n \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\ b \end{array}$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$$

线性方程组的表示：

(1) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(2) 矩阵乘积形式： $Ax = b$

(3) 向量形式： $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$

判断一个向量能否由一个向量组线性表示

定理3.3 向量b可由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示 $\Leftrightarrow$

方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b$ 有解。

证明:

$\Leftarrow$ 若方程组有解，设 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是一组解，则有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=b$$

即向量b可由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示。

$\Rightarrow$ 向量b可由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示,

则存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$b=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$$

即$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b$ 的一组解。

例3 设 $\alpha_1=(1,2,-3)^T,\alpha_2=(-3,4,7)^T,\alpha_3=(7,-3,2)^T$，$\beta=($[illegible]$)^T$，

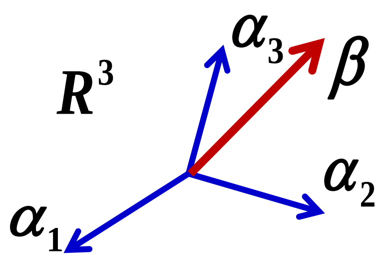
问 β 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？若能，写出表[illegible]。

考研

一般性讨论：

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ 非齐次方程组

情况1： R^3

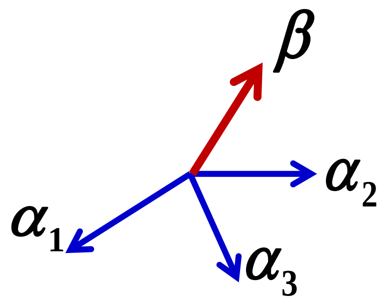


不共面 $R^3=span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$

β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，

且表示法唯一。方程组有唯一解

情况2：

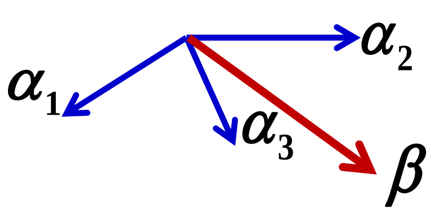


共面 $R^2=span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$

β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

方程组无解

情况3：



共面 $R^2=span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$

β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，

且表示法不唯一。方程组有无穷解

例3 设 $\alpha_1=(1,2,-3)^T,\alpha_2=(-3,4,7)^T,\alpha_3=(7,-3,2)^T$，$\beta=(2,-1,3)^T$，问 β 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？ **若能，写出表示式。**

解：考虑线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\beta$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&-3&7\\2&4&-3\\-3&7&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

例3 设 $\alpha_1=(1,2,-3)^T,\alpha_2=(-3,4,7)^T,\alpha_3=(7,-3,2)^T$，

问 β 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？ **若能，写出表示式。**

解：$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$　　$Ax=\beta$　　$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&-3&7\\2&4&-3\\-3&7&2\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}}_{\beta}$$

无解　$r(A)<r(A,\beta)$

有无穷解　$r(A)=r(A,\beta)<n$

有唯一解　$r(A)=r(A,\beta)=n$

$$(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&-3&7&2\\2&4&-3&-1\\-3&7&2&3\end{array}\right)\to\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_1&x_2&x_3\end{array}\\\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&-27/98\\0&1&0&19/98\\0&0&1&20/49\end{array}\right)\end{array}$$

方程组有唯一解：$x_1=-27/98,x_2=19/98,x_3=20/49$

表示法唯一：$\beta=-27/98\alpha_1+19/98\alpha_2+20/49\alpha_3$

第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$ 有解

- 向量的线性相关性 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$

  $\Leftrightarrow \beta \in span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$

- 向量与向量组的关系 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m,\ \beta \in R^n$
- 向量组的线性相关与线性无关 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$

问题：

如何判断一个向量能否由一个向量组线性表示？

第三章 作 业

授课内容	习题二
3.1(1)向量定义与运算	1,2 向量运算， 1(1)(2)向量空间（P162 习题三）
3.1(2) 向量与向量组的关系	3,4 线性表示
3.1(3) 线性相关性	5(1)(2)(3), 6, 9,10,12,13线性相关与线性无关
3.2(1)(2)极大无关组，秩	22(2)(3), 23极大无关组
3.3 齐次方程组解的结构	31(1)(3)
3.4 非齐次方程组解的结构	32(1)(2),33,40,44

作业第3题

已知 $\beta=(0,0,0,1),\alpha_1=(1,1,0,1),\alpha_2=(2,1,3,1),\alpha_3=(1,1,0,0)$ $\alpha_4=(0,1,-1,1)$，把向量β 表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合。

解：求解方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$

$$\begin{aligned}\beta&=(0,0,0,1)\\ x_1\alpha_1&=(1,1,0,1)\\ x_2\alpha_2&=(2,1,3,1)\\ x_3\alpha_3&=(1,1,0,0)\\ x_4\alpha_4&=(0,1,-1,1)\end{aligned}\rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+0x_4=0\\ x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ 0x_1+3x_2+0x_3-x_4=0\\ x_1+x_2+0x_3+x_4=1\end{cases}$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=\begin{pmatrix}1&2&1&0&0\\1&1&1&1&0\\0&3&0&-1&0\\1&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

练习1

已知 $\alpha_1=(1,2,5)^T,\alpha_2=(2,3,4)^T,\alpha_3=(3,4,3)^T$，$\beta=(4,5,2)^T$，问 β 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？若能，写出表示式。

解：求解方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$

增广矩阵

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\5&4&3&2\end{pmatrix}\\ \alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\beta\end{array}\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-6&-12&-18\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\div(-6)]{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{阶梯阵}]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{行简化阶梯阵}]{r_1-2r_2}\begin{array}{c}x_1\quad x_2\quad x_3\qquad\\ \begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\rightarrow\begin{cases}x_1=x_3-2\\x_2=-2x_3+3\end{cases}$$

$r(A)=r(A,\beta)<n$ 方程组有无穷多解，

练习1

已知 $\alpha_1=(1,2,5)^T,\alpha_2=(2,3,4)^T,\alpha_3=(3,4,3)^T$，$\beta=(4,5,2)^T$，问 β 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？ 若能，写出表示式。

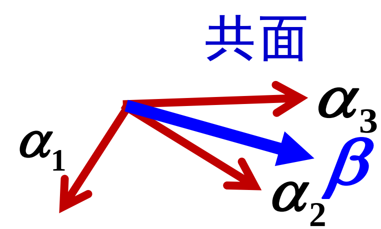
解：求解方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta \end{array} \xrightarrow[\text{行简化阶梯阵}]{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3-2 \\ x_2=-2x_3+3 \end{cases}$$

方程组有无穷多解，

$$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2 \rightarrow \begin{cases} x_1 = c-2 \\ x_2=-2c+3 \\ x_3=c \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\beta &= (c-2)\alpha_1+(-2c+3)\alpha_2+c\alpha_3 \\ &= (c-2)\alpha_1+(-2c+3)\alpha_2+c(-\alpha_1+2\alpha_2) \\ &= -2\alpha_1+3\alpha_2\end{aligned}$$



β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示法不唯一.

练习2

已知 $\alpha_1=(4,3,11)^T,\alpha_2=(2,-1,3)^T,\alpha_3=(-1,2,0)^T$, $\beta=(2,10,8)^T$, 问 β 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？ 若能，写出表示式。

解：求解方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$

$$\underset{(A,\beta)}{\begin{array}{c}\begin{pmatrix}4&2&-1&2\\3&-1&2&10\\11&3&0&8\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\beta\end{matrix}\end{array}}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&3&-3&-8\\3&-1&2&10\\11&3&0&8\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-11r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&3&-3&-8\\0&-10&11&34\\0&-30&33&96\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\div 3]{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&3&-3&-8\\0&10&-11&-34\\0&-10&11&32\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯阵}]{r_3+r_2}\overset{(A,\beta)}{\begin{pmatrix}1&3&-3&-8\\0&10&-11&-34\\0&0&0&-2\end{pmatrix}}$$

$r(A)=2<r(A,b)=3$,

方程组无解,

β 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

不共面