# 第七章 二元关系

- 关系是集合上最基础的一种结构。给定一个关系，就可以讨论一些元素之间是否满足这个关系。
- 关系可以用在两个元素之间，也可以用在多个元素之间。
- 在绝大多数数学和物理领域，涉及的都是集合上的二元关系。

# § 7.1 有序对与笛卡尔积

**定义** 两个元素$x$与$y$按一定顺序排列构成的二元组称为一个**有序对**（或**序偶**），记为$<x, y>$，称 $x$为第一元素，$y$为第二元素。

**性质**（1）当 $x \neq y$时， $<x, y> \neq <y, x>$；

（2）$<x, y> = <u, v>$当且仅当$x = u$ 且$y = v$。

**例** 已知$<x+2, 4> = <5, 2x+y>$，求$x$与$y$。

由$<x+2, 4> = <5, 2x+y>$得

$$x+2=5, \quad 4=2x+y$$

由此得$x=3, y=-2$。

**定义** 设$A, B$为两个集合，用$A$中的元素作为第一元素、$B$中的元素作为第二元素构成有序对，所有这样的有序对组成的集合称为$A$与$B$的**Descartes积**，记为$A\times B$，

$$A\times B=\{<x, y>\mid x\in A, y\in B\}$$

**例** 设$A=\{a, b\}$, $B=\{0, 1,2\}$，则

$$A\times B=\{ <a, 0>, <a, 1>, <a, 2>, <b, 0>, <b, 1>, <b, 2>\}$$

$$B\times A=\{ <0, a>, <1, a>, <2, a>, <0, b>, <1, b>, <2, b>\}$$

**性质** 集合的Descartes积具有下属性质:

（1）$A\times\varnothing=\varnothing$，$\varnothing\times A=\varnothing$

（2）$A\times B\neq B\times A$ (当$A\neq B\wedge A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing$时)

（3）$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$

(当$A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing\wedge C\neq\varnothing$时)

（4）$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

（5）$(A\subseteq C)\wedge(B\subseteq D)\Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$

上述（4）中的第一式证明如下：

对任意$<x, y>$

$$<x, y> \in A\times(B\cup C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A)\wedge(y\in B\cup C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A)\wedge(y\in B\vee y\in C)$$

$$\Leftrightarrow ((x\in A)\wedge(y\in B))\vee((x\in A)\wedge(y\in C))$$

$$\Leftrightarrow (<x, y> \in A\times B)\vee(<x, y> \in A\times C)$$

$$\Leftrightarrow <x, y> \in(A\times B)\cup(A\times C)$$

由此得

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$$

**例** 设$A$={1,2}，求P($A$)×$A$。

**解** 以$A$的全部子集为元素构造幂集P($A$)

$$\mathrm{P}(A)=\{\,S\mid S\text{是}A\text{的子集}\}$$

$$=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

则有

$$\mathrm{P}(A)\times A=\{<\varnothing,1>,<\varnothing,2>,<\{1\},1>,$$

$$<\{1\},2>,<\{2\},1>,<\{2\},2>,$$

$$<\{1,2\},1>,<\{1,2\},2>\}$$

▮