第二章 命题逻辑等值演算

- 逻辑演算是用形式化方法处理逻辑推理，特别是数学中所用推理。
- 等值演算是类似代数演算那样进行逻辑演算的理论依据。
- 重言式是等值演算的出发点。

§2.1 等值式

例 考察命题公式 $(p\to q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ 的类型。

p	q	$\neg p$	$p\to q$	$\neg p\vee q$	$(p\to q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$
0	0	1	1	2	3
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

把 $p\to q$ 与 $\neg p\vee q$ 视为两个二元函数，它们在相同的自变量取值（赋值）下，函数值（真值）完全相同。说明这两个公式是同一个函数的不同形式。

定义 设 A, B 是两个命题公式，若复合公式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 与 B **等值**，记为 $A \Leftrightarrow B$。

注 ① “$\Leftrightarrow$” 不是联结词，是元语言。

② “$\Leftrightarrow$” 与 “$=$” 不同。

例 证明 $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$。

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

性质 设A,B,C是任意命题公式，则有

1．双重否定律：$A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$

2．幂等律：$A \Leftrightarrow A \vee A$，$A \Leftrightarrow A \wedge A$

3．交换律：$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$，$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

4．结合律：$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

5．分配律：$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

6．德摩根律：$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

7．吸收律：$A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$，$A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$

8．零律：$A\vee 1\Leftrightarrow 1$，$A\wedge 0\Leftrightarrow 0$

9．同一律：$A\vee 0\Leftrightarrow A$，$A\wedge 1\Leftrightarrow A$

10．排中律：$A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$

11．矛盾律：$A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$

12．蕴涵等值式：$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$

13．等价等值式：$(A\leftrightarrow B)\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$

14．假言易位：$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$

15．等价否定等值式：$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$

16．归谬论：$(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B)\Leftrightarrow\neg A$

如果希望像代数演算那样进行命题等值演算，则需要补充一些演算规则。

定理(等值演算的**置换规则**)设$\varphi(A)$是含公式A的命题公式，$\varphi(B)$是用公式B置换$\varphi(A)$中的所有A后得到的命题公式。若$A\Leftrightarrow B$，则$\varphi(A)\Leftrightarrow\varphi(B)$。

例 证明：$(p\vee q)\rightarrow r\Leftrightarrow(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)$

证明 $(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)$ 蕴涵等值式，置换规则

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee r$ 分配律

$\Leftrightarrow (\neg p \land \neg q) \lor r$

$\Leftrightarrow \neg(p \lor q) \lor r$　　德摩根律，置换规则

$\Leftrightarrow (p \lor q) \to r$　　蕴涵等值式

例 证明：$(p \to q) \to r \not\Leftrightarrow p \to (q \to r)$

证 因为

$(p \to q) \to r \Leftrightarrow \neg(p \to q) \lor r$　　蕴涵等值式

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \lor q) \lor r$　　蕴涵等值式，置换规则

$\Leftrightarrow (\neg(\neg p) \land \neg q) \lor r$　　德摩根律，置换规则

$\Leftrightarrow (p \land \neg q) \lor r$　　双重否定律，置换规则

所以

$$(p\to q)\to r \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee r$$

由上式可得，在赋值000下，公式 $(p\to q)\to r$ 为假。

而在同一赋值下，公式 $p\to(q\to r)$ 为真。因此

$$(p\to q)\to r \not\Leftrightarrow p\to(q\to r)$$

例 判断公式的类型

（1） $(p\to q)\wedge p\to q$

（2） $\neg(p\to(p\vee q))\wedge r$

（3） $p\wedge(((p\vee q)\wedge\neg p)\to q)$

解（1）对给定的命题公式进行等值演算：

$$
\begin{aligned}
(p\to q)\wedge p\to q &\Leftrightarrow \neg((p\to q)\wedge p)\vee q\\
&\Leftrightarrow \neg(p\to q)\vee\neg p\vee q\\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee\neg p\vee q\\
&\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee\neg p\vee q\\
&\Leftrightarrow (p\vee(\neg p\vee q))\wedge(\neg q\vee(\neg p\vee q))\\
&\Leftrightarrow ((p\vee\neg p)\vee q)\wedge(\neg q\vee(q\vee\neg p))\\
&\Leftrightarrow (1\vee q)\wedge((\neg q\vee q)\vee\neg p)\\
&\Leftrightarrow 1\wedge(1\vee\neg p)\\
&\Leftrightarrow 1\wedge 1\Leftrightarrow 1
\end{aligned}
$$

重言式

（2） $\neg(p\to(p\vee q))\wedge r \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee(p\vee q))\wedge r$

$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee p)\vee q)\wedge r$

$\Leftrightarrow \neg(1\vee q)\wedge r$

$\Leftrightarrow \neg 1\wedge r$

$\Leftrightarrow 0\wedge r \Leftrightarrow 0$ 矛盾式

（3） $p\wedge(((p\vee q)\wedge\neg p)\to q) \Leftrightarrow p\wedge(\neg((p\vee q)\wedge\neg p)\vee q)$

$\Leftrightarrow p\wedge((\neg(p\vee q)\vee p)\vee q)$

$\Leftrightarrow p\wedge((\neg(p\vee q)\vee q)\vee p)$

$\Leftrightarrow p$ 可满足式

例 甲, 乙, 丙三名勘探队员判断一块矿样的种类

甲的判断：不是锡，是铁

乙的判断：不是铁，是锡

丙的判断：既不是铁，也不是铜。

经鉴定，其中一人判断全对，一人判断对一半，一人判断全错，试确定矿样的种类。

解 考虑如下命题

p：矿样是锡　　q：矿样是铁　　r：矿要是铜

则三名勘探队员的结论可以表示为

甲：$A_1 = \neg p \wedge q$　乙：$A_2 = p \wedge \neg q$　丙：$A_3 = \neg q \wedge \neg r$

三名勘探队员判断结果的对错可以列成如下的阵列

甲全对 B_1	甲对一半 B_2	甲全错 B_3
乙全对 C_1	乙对一半 C_2	乙全错 C_3
丙全对 D_1	丙对一半 D_2	丙全错 D_3

根据已知条件，最终结果E有六种可能，即上述阵列中位于不同行不同列的3项的合取之六种情况：

$$1 \Leftrightarrow E = (B_1 \wedge C_2 \wedge D_3) \vee (B_1 \wedge C_3 \wedge D_2) \vee (B_2 \wedge C_1 \wedge D_3) \vee (B_2 \wedge C_3 \wedge D_1) \vee (B_3 \wedge C_1 \wedge D_2) \vee (B_3 \wedge C_2 \wedge D_1)$$

因为

$$B_1 \wedge C_2 \wedge D_3 = (\neg p \wedge q) \wedge r \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$

$$B_1 \wedge C_3 \wedge D_2 = (\neg p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee \neg q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \wedge (q \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg r \vee r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \wedge 1 \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \wedge 1$$

$$\Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge (q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge (\neg q \vee \neg r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge 0) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r$$

$$B_2 \wedge C_1 \wedge D_3 = (\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg q) \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$

$$B_2 \wedge C_3 \wedge D_1 = (\neg p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge q) \wedge (\neg q \wedge \neg r)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge \neg p \wedge (q \wedge \neg q) \wedge \neg r$$

$$\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge \neg p \wedge 0 \wedge \neg r \Leftrightarrow 0$$

$$B_3 \wedge C_1 \wedge D_2 = (p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$$

$$\Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge r$$

$$B_3 \wedge C_2 \wedge D_1 = (p \wedge \neg q) \wedge r \wedge (\neg q \wedge \neg r)$$

$$\Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge \neg q \wedge (r \wedge \neg r)$$

$$\Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge \neg q \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$

由此

$$E \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

因矿样不能既是锡，又是铜，故 p,r 之一必为假。

于是， $p \wedge \neg q \wedge r \Leftrightarrow 0$。这样，

$$1 \Leftrightarrow E \Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r$$

由此得

$$\neg p=1，q=1，\neg r=1$$

即矿样是铁。此时，甲全对，丙对一半，乙全错。