第七章 参数估计

教学计划：3次课-9学时

参数估计问题

复习

设总体 $X \sim F(x,\theta)$, θ 是未知参数，

对未知参数 θ 进行估计 ---- 参数估计

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$

方法：

$EX_i = EX$ $DX_i = DX$

1) 抽样： $X_1, X_2, \cdots, X_n$ (独立且与X同分布)

$x_1, x_2, \cdots, x_n$

不含任何未知量

2) 构造统计量： $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ --- θ 的估计量

$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ --- θ 的估计值

$\hat{\theta}$

参数估计

- 点估计： 给出 θ 的估计值或近似值 $\hat{\theta}$
- 区间估计：给出 θ 的估计值或近似值 $\hat{\theta}$ 的误差范围与可信程度。

参数估计问题

复习

设总体 $X \sim F(x,\theta)$, θ 是未知参数,

对未知参数 θ 进行估计 ---- 参数估计

方法:

1) 抽样: $X_1, X_2, \cdots, X_n$ (独立且与X同分布)

$x_1, x_2, \cdots, x_n$

2) 构造统计量: $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ --- θ 的估计量

$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ --- θ 的估计值

$\hat{\theta}$

参数估计
- 点估计:
  - 矩估计法: θ 的矩估计量 § 7.1
  - 极大似然估计法: θ 的极大似然估计量 § 7.1
- 区间估计: $\hat{\theta}$ 的误差范围与可信程度 § 7.4, § 7.5

➢ 需要讨论估计量的评价标准 § 7.3

（19, 11分）

设总体X的概率密度为 $f(x,\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geq\mu,\\ 0, & x<\mu\end{cases}$ A是常数，μ已知

$\sigma>0$是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体X 的样本，

(1)求A的值；

(2)求σ^2 的极大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$.

（19, 11分）

设总体X的概率密度为 $f(x,\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\ge\mu,\\ 0, & x<\mu\end{cases}$ A是常数，μ已知

$\sigma>0$是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体X 的样本，

(1)求A的值；

$\boxed{\int e^{-x^2}\mathrm{d}x}$

$\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=1}$

解：

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\sigma^2)\mathrm{d}x=\frac{A}{\sigma}\int_{\mu}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

$$t=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$x=\sigma t+\mu$$

$$\mathrm{d}x=\sigma\mathrm{d}t$$

$$=\frac{A}{\sigma}\sigma\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{A\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{A\sqrt{2\pi}}{2}=A\sqrt{\frac{\pi}{2}}\to A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

（19, 11分）

设总体X的概率密度为 $f(x,\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geq\mu,\\ 0, & x<\mu\end{cases}$ A是常数，μ已知

$\sigma>0$是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$（$x_1,x_2,\cdots,x_n$）是来自总体X 的样本，$A=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

(2)求 σ^2 的极大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$.

$$\left(\frac{1}{\sigma}\right)^n=\sigma^{-n}=(\sigma^2)^{-n/2}$$

解：

1. 似然函数 (样本值出现的概率)

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\sigma^2)=f(x_1,\sigma^2)\cdot f(x_2,\sigma^2)\cdots f(x_n,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad x_1,x_2,\cdots,x_n\geq\mu$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2}(\sigma^2)^{-n/2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

（19, 11分）

设总体X的概率密度为 $f(x,\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\ge\mu, \\ 0, & x<\mu\end{cases}$ A是常数，μ已知

$\sigma>0$是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$（$x_1,x_2,\cdots,x_n$）是来自总体X的样本，$A=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

(2)求σ^2的极大似然估计量$\hat{\sigma}^2$.

解：

1. 似然函数 $L(\sigma^2)=\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{n/2}(\sigma^2)^{-n/2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$， $x_1,x_2,\cdots,x_n\ge\mu$

2. 取对数： $\ln L(\sigma^2)=\dfrac{n}{2}\ln(\dfrac{2}{\pi})-\dfrac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

3. 求导,令其为零： $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$

4. 求解： $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

极大似然估计值 极大似然估计量

第七章 参数估计

第一节 点估计

- 矩估计法
- 极大似然法

构造统计量的方法

1. 矩估计法（数字特征法）

矩估计法是由英国统计学家卡. 皮尔逊（K. Pearson）在19世纪末引入的。

矩是描写随机变量最简单的数字特征，由大数定律可知，在一定条件下可以用样本矩作为总体矩的估计。

矩估计法的理论依据

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$$

设总体 $X \sim F(x,\theta)$, θ 是未知参数，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是一个样本。

结论： 若总体 X 的 k 阶矩 $E(X^k)$ 存在，则 $A_k \xrightarrow{P} E(X^k)$

2 1

含未知参数 θ

Ch5 大数定律

这个结论表明：

- 样本的 k 阶矩依概率收敛到总体的k阶矩，因此可以用样本矩估计总体矩。
- 这是矩估计法的理论根据。
- 由此可以得到矩估计法的步骤。

例： $f(x,\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geq\mu,\\ 0, & x<\mu\end{cases}$

含未知参数σ

$$E(X^k)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k f(x,\sigma^2)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{A}{\sigma}\int_{\mu}^{+\infty}x^k e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

矩估计法的理论依据

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^k \xrightarrow{P} E(X^k)$$

例1 设总体 $X \sim U(a,b)$，a, b未知, $X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自X的样本，求a, b的矩估计量 $\hat{a}, \hat{b}$。

$$A_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \bar{X} \xrightarrow{P} E(X)$$

$$A_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2 \xrightarrow{P} E(X^2)$$

解:

$$\begin{cases} E(X) = \dfrac{a+b}{2} = A_1 \\ E(X^2) = \dfrac{(b-a)^2}{12} + \dfrac{(a+b)^2}{4} = A_2 \end{cases}$$

解方程组:

$$\hat{a} = A_1 - \sqrt{3(A_2 - A_1^2)} = \bar{X} - \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$ --- a的矩估计量

$$\hat{b} = A_1 + \sqrt{3(A_2 - A_1^2)} = \bar{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$ --- b的矩估计量

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\mathrm{d}x$$

$$E(X^2) = D(X) + E^2(X)$$

2 1

$$A_k \xrightarrow{P} E(X^k)$$

矩估计法的步骤

例1 设总体 $X \sim U(a,b)$, a, b未知, $X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自X的样本, 求a, b的矩估计量 $\hat{a}, \hat{b}$。

解: (1) 计算总体矩 (2) 建立方程组:

$$\begin{cases} E(X) = \dfrac{a+b}{2} = A_1 \\ E(X^2) = \dfrac{(b-a)^2}{12} + \dfrac{(a+b)^2}{4} = A_2 \end{cases}$$

$$\boxed{A_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \bar{X}}$$

$$\boxed{A_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2}$$

(3) 解方程组得:

$$\hat{a} = A_1 - \sqrt{3(A_2 - A_1^2)} = \bar{X} - \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$ --- a的矩估计量

$$\hat{b} = A_1 + \sqrt{3(A_2 - A_1^2)} = \bar{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$ --- b的矩估计量

矩估计法的具体步骤：

2 1

$$A_k \xrightarrow{P} E(X^k)$$

(1) 计算总体矩

若总体 X 是离散型随机变量，其分布律为：$P(x;\theta_1,\theta_2)$

θ_1,θ_2 是未知参数

计算总体 X 的前 2 阶矩:

$$E(X)=\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot P(x_j;\theta_1,\theta_2)=\mu_1(\theta_1,\theta_2)$$

$$E(X^2)=\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \cdot P(x_j;\theta_1,\theta_2)=\mu_2(\theta_1,\theta_2)$$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p	$P(x_1;\theta_1,\theta_2)$	$P(x_2;\theta_1,\theta_2)$	$\cdots$	$P(x_n;\theta_1,\theta_2)$
X^2	x_1^2	x_2^2	$\cdots$	x_n^2

矩估计法的具体步骤：

2 $\quad$ 1

$$A_k \xrightarrow{P} E(X^k)$$

(1) 计算总体矩

若总体 X 是离散型随机变量，其分布律为：$P(x;\theta_1,\theta_2)$

θ_1,θ_2 是未知参数

计算总体 X 的前 2 阶矩:

$$E(X)=\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot P(x_j;\theta_1,\theta_2)=\mu_1(\theta_1,\theta_2)$$

$$E(X^2)=\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \cdot P(x_j;\theta_1,\theta_2)=\mu_2(\theta_1,\theta_2)$$

例如： $X \sim B(n,p)$ $\quad P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}=np=\mu_1(n,p)$$

$$\boxed{E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2}$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{n} k^2C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=np(1-p)+(np)^2=\mu_2(n,p)$$

矩估计法的具体步骤：$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2$

$$A_k \xrightarrow{P} E(X^k)$$

2 1

(1) 计算总体矩

若总体 X 是连续型随机变量，其概率密度为：$f(x;\theta_1,\theta_2)$

计算总体 X 的前 2 阶矩：

θ_1,θ_2 是未知参数

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x;\theta_1,\theta_2)\,\mathrm{d}x=\mu_1(\theta_1,\theta_2)$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x;\theta_1,\theta_2)\,\mathrm{d}x=\mu_2(\theta_1,\theta_2)$$

$$E(X^k)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\mathrm{d}x$$

例如： $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x=\mu=\mu_1(\mu,\sigma^2)$$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x=\sigma^2+\mu^2=\mu_2(\mu,\sigma^2)$$

(1) 计算总体矩:

离散型: $E(X)=\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot P(x_j,\theta_1,\theta_2) = \mu_1(\theta_1,\theta_2)$

$E(X^2)=\sum x_j^2 \cdot P(x_j,\theta_1,\theta_2) = \mu_2(\theta_1,\theta_2)$

连续型: $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x;\theta_1,\theta_2)\,\mathrm{d}x = \mu_1(\theta_1,\theta_2)$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x;\theta_1,\theta_2)\,\mathrm{d}x = \mu_2(\theta_1,\theta_2)$

2 1

$$A_k \xrightarrow{P} E(X^k)$$

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^k$$

(2) 建立方程组:

总体矩 样本矩

$$\begin{cases} E(X)=\mu_1(\theta_1,\theta_2) = A_1 \\ E(X^2)=\mu_2(\theta_1,\theta_2) = A_2 \end{cases}$$

(3) 解方程组得:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\theta}_1 &= \theta_1(A_1,A_2) \\ \hat{\theta}_2 &= \theta_2(A_1,A_2) \end{aligned}\right\}$$ 是θ_1,θ_2 的矩估计量。

值

$x_1, x_2, \cdots x_n$

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$

是X的一个样本，则

$\bar{X}$

$$A_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{P} E(X)$$

$$A_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2 \xrightarrow{P} E(X^2)$$

当n很大时, $E(X) \approx A_1$

$E(X^2) \approx A_2$

$EX=\mu$ $DX=\sigma^2$

例2. 设总体X的均值为μ，方差为σ^2都存在，$\mu,\sigma^2>0$均未知，

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是总体 X 的一个样本。概率分布未知

(1) 求 μ,σ^2 的矩估计量；

(2) 当总体(某种灯泡寿命) $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，

今取 4 只灯泡， 测得其寿命(小 时), 如下：

1502, 1453, 1367, 1650 (小时)， 求：μ,σ^2 的矩估计值。

$EX=\mu$ $DX=\sigma^2$

例2. 设总体X的均值为μ，方差为σ^2都存在，$\mu,\sigma^2>0$均未知，

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 X 的一个样本。

(1) 求 μ,σ^2 的矩估计量；

解:

1. 计算总体矩： $E(X)=\mu$

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\sigma^2+\mu^2$$

2. 建立方程组： $\begin{cases} \mu = E(X)=A_1 \\ \sigma^2+\mu^2 = E(X^2)=A_2 \end{cases}$

$\begin{cases} E(X)=\mu_1(\mu,\sigma^2)=A_1 \\ E(X^2)=\mu_2(\mu,\sigma^2)=A_2 \end{cases}$

3. 求解方程组： $\begin{cases} \hat{\mu}=A_1=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\overline{X} \\ \hat{\sigma}^2=A_2-A_1^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}X_j^2-\overline{X}^2 \end{cases}$

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^k$$

解得: $\begin{cases} \hat{\mu} = A_1 = \bar{X} \\ \hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 = \boxed{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2} \end{cases}$

从而得 μ, σ^2 的矩估计量为: $\hat{\mu} = \bar{X} \quad \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

证明: $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2\bar{X}X_i + \bar{X}^2)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{n}\overbrace{\sum_{i=1}^{n}\bar{X}^2}^{n\bar{X}^2}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X}\cdot\bar{X} + \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = A_2 - A_1^2$$

$EX=\mu$　$DX=\sigma^2$

例2. 设总体X的均值为μ，方差为σ^2都存在，$\mu,\sigma^2>0$均未知，

$X_1, X_2, \dots, X_n$是总体X的一个样本。

(1) 求μ,σ^2的矩估计量；　$\hat{\mu}=\overline{X}$　$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

结论： 不论总体X服从什么分布，总体均值$E(X)=\mu$

与方差$D(X)=\sigma^2$的矩估计量的表达式是相同的。

$$\sigma^2=D(X)=E[X-E(X)]^2$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

样本方差
无偏估计量

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

矩估计量
有偏估计量

例2. 设总体X的均值为μ，方差为σ^2都

$$\hat{\mu}=\bar{X},\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 X 的一个样本。

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j$$

(2) 当总体(某种灯泡寿命) $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，

今取 4 只灯泡， 测得其寿命(小 时), 如下：

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j$$

1502, 1453, 1367, 1650 (小时)， 求：μ,σ^2 的矩估计值。

$$\hat{\mu}=\bar{x}=\frac{1}{4}(1502+1453+1367+1650)=1493$$

灯泡寿命均值的矩估计值为: $\hat{\mu}=1493$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{4}[(1502-1493)^2+(1453-1493)^2$$
$$+(1367-1493)^2+(1650-1493)^2]=10551$$

灯泡寿命方差的矩估计值为: $\hat{\sigma}^2=10551$

$X \sim U(a,b)$

例3 设总体 $X \sim U(\theta, 2\theta)$，其中 $\theta > 0$ 是未知参数。

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 X 的一个样本，求：θ 的矩估计量。

$$\begin{cases} E(X) = \mu_1(\theta_1, \theta_2) = A_1 \\ E(X^2) = \mu_2(\theta_1, \theta_2) = A_2 \end{cases}$$

解1:

1. 计算总体矩：$E(X) = \dfrac{\theta + 2\theta}{2} = \dfrac{3\theta}{2}$

2. 建立方程：$E(X) = \dfrac{3\theta}{2} = A_1$

$$E(X) = \mu_1(\theta) = A_1$$

$$A_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \bar{X}$$

3. 求解方程：$\hat{\theta} = \dfrac{2}{3}A_1 = \dfrac{2}{3}\bar{X}$ --- 矩估计量

解2:

$$E(X^2) = \mu_1(\theta) = A_2$$

1. 计算总体矩：$E(X^2) = \dfrac{\theta^2}{12} + \left(\dfrac{3\theta}{2}\right)^2 = \dfrac{7\theta^2}{3}$

$$A_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2$$

2. 建立方程：$E(X^2) = \dfrac{7\theta^2}{3} = A_2$

$$E(X^2) = D(X) + E^2(X)$$

3. 求解方程：$\hat{\theta} = \sqrt{\dfrac{3}{7}A_2}$ --- 矩估计量

矩估计量不唯一

（17, 11分）

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做n次测量，该物体的质量 μ 是已知的。设n次测量结果是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且均服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，该工程师记录的是n次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu|, i = 1, 2, \cdots, n$，利用 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 估计σ 。

(1)求 Z_i 的概率密度；

$$f(z) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, z > 0$$

(2)利用一阶矩求σ的矩估计量;

(3)求σ的极大似然估计量 $\hat{\sigma}$。

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2}$$

极大似然估计量

（17, 11分）

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，

$Z_i=|X_i-\mu|$，利用 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 估计 σ 。

$$f(z)=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}},z>0$$

(2)利用一阶矩求 σ 的矩估计量

解:

$$E(Z_i)=\mu_1(\sigma)=A_1=\bar{Z}$$

1. 计算总体矩:

$$E(Z_i)=\int_{-\infty}^{+\infty}zf(z)\mathrm{d}z=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}(-\frac{z^2}{2\sigma^2})=-\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

（17, 11分）

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，

$Z_i = |X_i - \mu|$，利用 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 估计 σ 。

$$f(z) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, z > 0$$

(2)利用一阶矩求 σ 的矩估计量

$$E(Z_i) = \mu_1(\sigma) = A_1 = \bar{Z}$$

解：

1. 计算总体矩：$E(Z_i) = \dfrac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$

$$\bar{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$$

2. 建立方程：$E(Z_i) = \dfrac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} = \bar{Z}$

3. 求解方程：$\hat{\sigma} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\bar{Z} = \dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n} Z_i$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2}$$

矩估计量　　　　极大似然估计量

第七章 参数估计

第一节 点估计

第三节 估计量的评选标准

第四节 区间估计

第五节 正态总体均值与方差的区间估计

问题的引出

对于同一未知参数，用不同的估计方法得到的估计量可能相同，也可能不同。例如：

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ μ,σ^2的矩和极大似然估计量相同：

$$\hat{\mu} = \overline{X} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$X \sim U(a,b)$ a, b的矩和极大似然估计量不同：

a,b的极大似然估计量：$\hat{a} = \min\limits_{1\le i\le n} X_i$，$\hat{b} = \max\limits_{1\le i\le n} X_i$

a,b的矩估计量：$\hat{a} = \overline{X} - \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$，$\hat{b} = \overline{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$

因此需要对估计量进行评价。

第七章 参数估计

第三节 估计量的评选标准

- 无偏性
- 有效性
- 一致性

一. 无偏性

未知参数的估计量和估计值区别：

甲乙比赛，甲得分为X

例1. 设总体 $X \sim B(1,p)$，p 未知。$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自 X 的样本，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是样本值。求 p 的极大似然估计量 $\hat{p}$。

1,1,0,1,0,1,1,0,1,1

X	0	1
P_k	$1-p$	p

$$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$$ --- p 的极大似然估计量 ---随机变量

$$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$$ --- p 的极大似然估计值

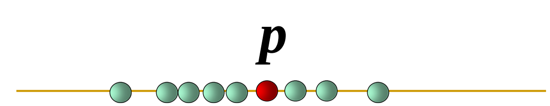
$$\hat{p}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=\frac{7}{10}=0.7$$

$x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ $\quad$ p 的极大似然估计值

1,0,1,1,1,1,1,0,1,1 $\quad$ $\hat{p}=0.8$

1,0,0,1,1,1,0,0,1,1 $\quad$ $\hat{p}=0.6$

1,1,0,0,0,1,0,0,1,1 $\quad$ $\hat{p}=0.5$

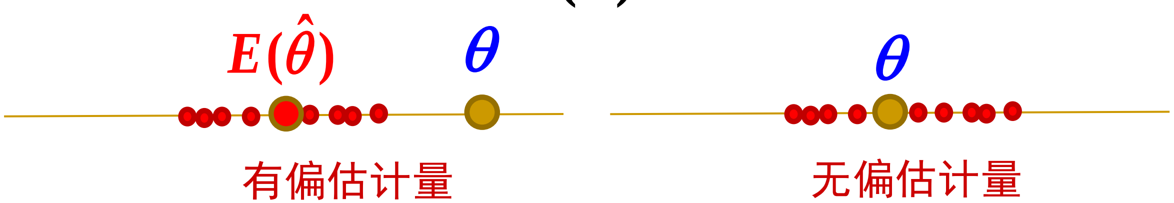


一. 无偏性

设未知参数 θ 的估计量和估计值分别为：

$$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2\cdots,X_n) \qquad \hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2\cdots,x_n)$$

估计量是随机变量，对于不同的样本值会得到不同的估计值。希望估计值在未知参数真值 θ 附近摆动，即它的期望值等于未知参数的真值 $E(\hat{\theta})=\theta$ 。这就引出无偏性这个评选标准 。



$\left|E(\hat{\theta})-\theta\right|=0$

系统误差

定义： 设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计量，若 $E(\hat{\theta})$ 存在且 $E(\hat{\theta})=\theta$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

一. 无偏性

设未知参数 θ 的估计量和估计值分别为：

$$\hat{\theta}=\hat{\theta}\,(X_1,X_2\cdots,X_n)\qquad \hat{\theta}=\hat{\theta}\,(x_1,x_2\cdots,x_n)$$

定义：若 $E(\hat{\theta})=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

$$\left|E(\hat{\theta})-\theta\right|=0$$

系统误差

注: 无偏性的实际意义是指没有系统性的偏差 。在科学技术中称 $\left|E(\hat{\theta})-\theta\right|$ 为以 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计的系统误差。则无偏估计即无系统误差。它是用数学期望衡量估计量靠近真值的程度。用样本值计算估计值，每一次估计都会产生偏差，但这种偏差不会是系统偏差。

例1. 设总体 X 的均值 μ，方差 $\sigma^2>0$ 都存在且均未知，

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 X 的一个样本，

证明： σ^2 的两个估计量 $\hat{\sigma}_1^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 矩估计量

$$\hat{\sigma}_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=S^2$$ 样本方差

前者是有偏的，后者是无偏的。

证明： $\because E(\hat{\sigma}_1^2)=E\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)$

$$=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2\bar{X}X_i+\bar{X}^2)\right]$$

$$=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\bar{X}\cdot\bar{X}+\bar{X}^2\right]=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2\right]$$

总体 X 的均值 μ, 方差 $\sigma^2>0$ 都存在

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是总体 X 的一个样本

$$E(X^2)=D(X)+E^2(X)$$

$$E(\hat{\sigma}_1^2)=E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2]$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-E(\bar{X}^2)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\overbrace{D(X_i)+E^2(X_i)}^{\sigma^2+\mu^2}]-\{D(\bar{X})+[E(\bar{X})]^2\}$$

$$=(\sigma^2+\mu^2)-(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)$$

$$=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$$

$$\therefore\ \hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \text{ 是有偏的.}$$

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$E(\bar{X})=\frac{1}{n}\overbrace{\sum_{i=1}^{n}E(X_i)}^{n\mu}=\mu$$

$$D(\bar{X})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)$$

$$=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

例1. 设总体 X 的均值 μ, 方差 $\sigma^2>0$ 都存在且均未知,

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 X 的一个样本,

$$\hat\sigma_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar X)^2$$

$$\hat\sigma_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar X)^2$$

$$\Downarrow$$

$$(n-1)\hat\sigma_2^2=n\hat\sigma_1^2$$

$$\because \hat\sigma_2^2=\frac{n}{n-1}\hat\sigma_1^2$$

$$\therefore E(\hat\sigma_2^2)=\frac{n}{n-1}E(\hat\sigma_1^2)$$

$$=\frac{n}{n-1}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\sigma^2\right)=\sigma^2$$

$$E(\hat\sigma_1^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

而 $\hat\sigma_2^2=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar X)^2=S^2$

结论： 样本方差是总体方差的无偏估计量。

例2 设 $X_1, X_2, \ldots X_n$ 是取自总体 X 的一个样本，$E(X^k)$ 是总体 X 的 k 阶矩，

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} E(X^k)$$

则 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 是 $E(X^k)$ 的无偏估计，即：$E(A_k) = E(X^k)$

证明： 因为 $X_1, X_2, \ldots X_n$ 是样本，

所以 $X_1, X_2, \ldots X_n$ 独立且与 X 同分布，

所以 $X_1^k, X_2^k, \cdots, X_n^k$ 独立且与 X^k 同分布，

$$\therefore E(X_i^k) = E(X^k), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\therefore E(A_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X^k) = \frac{1}{n}\cdot nE(X^k) = E(X^k)$$

特别： $A_1 = \bar{X}$ 是 $E(X)$ 的无偏估计。

结论： 设总体 X 的均值 μ，方差 $\sigma^2>0$ 都存在且均未知，

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 X 的一个样本，

$$\because E(\bar{X})=\mu, \quad E(S^2)=\sigma^2$$

故样本均值、样本方差是总体均值、总体方差的

无偏估计量。

样本均值： $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

样本方差： $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

小结

统计量的无偏性

设$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是总体 X 的一个样本

样本均值：$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$	$E(X)$	$E(\bar{X})=E(X)$
样本方差：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$	$D(X)$	$E(S^2)=D(X)$
样本 k 阶矩：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$	$E(X^k)$	$E(A_k)=E(X^k)$

结论：$\bar{X}, S^2, A_k$ 分别是 $E(X), D(X), E(X^k)$ 的无偏估计量.

2013年概率统计期末考试第九题（8分）

总体 $X \sim U(\theta, 2\theta)$, $\theta > 0$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自该总体的一个样本，$\bar{X}$ 是样本均值。

证明：$\hat{\theta} = \frac{2}{3}\bar{X}$ 是 θ 的无偏估计量和一致估计量。 $E(\hat{\theta}) \overset{?}{=} \theta$

正解：$\because X \sim U(\theta, 2\theta)$, $\therefore E(X) = 3\theta/2$

$\boxed{E(\bar{X}) = E(X)}$

$$E(\hat{\theta}) = E(\frac{2}{3}\bar{X}) = \frac{2}{3}E(\bar{X}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\theta = \theta$$

$\boxed{\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$

所以，$\hat{\theta} = \frac{2}{3}\bar{X}$ 是 θ 的无偏估计量。

错解：$E(X) = \frac{3}{2}\theta = \bar{X} \rightarrow \hat{\theta} = \frac{2}{3}\bar{X}$

$\boxed{E(X) = \mu_1(\theta) = A_1 = \bar{X}}$

所以 $\hat{\theta} = \frac{2}{3}\bar{X}$ 是 θ 的无偏估计量 ×

矩估计量 √

无偏估计与矩估计概念混淆

第七章 参数估计

第三节 估计量的评选标准

- 无偏性
- 有效性
- 一致性

二. 有效性

$$E\hat{\theta}_1=\theta,\ E\hat{\theta}_2=\theta$$

注意到：一个参数往往有不止一个无偏估计, 若 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是参数 θ 的无偏估计量，则可通过比较 $E(\hat{\theta}_1-\theta)^2$ 和 $E(\hat{\theta}_2-\theta)^2$ 的大小来决定二者谁更优 。这就引出有效性这个评选标准。

$D(\hat{\theta}_1)$　　$D(\hat{\theta}_2)$

定义: 设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

都是 θ 的无偏估计量，且两个样本的容量相等。

若 $D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$, 则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效。

例3. 设总体 X 的均值 μ，方差 $\sigma^2>0$ 都存在且均未知，

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 X 的一个样本，　$\boxed{E(\bar{X})=\mu, E(X_1)=\mu}$

现有两个 μ 的无偏估计量：$\hat{\mu}_1=\bar{X}, \hat{\mu}_2=X_1$

求：$\hat{\mu}_1$ 与 $\hat{\mu}_2$ 哪个作为 μ 的无偏估计更有效？

解: $\because$ $D(\hat{\mu}_1)=D(\bar{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n}DX_i)=\frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n}\sigma^2)=\frac{1}{n}\sigma^2$

$D(\hat{\mu}_2)=D(X_1)=\sigma^2$ 且显然，$\frac{\sigma^2}{n}\leq\sigma^2$

所以用 $\hat{\mu}_1=\bar{X}$ 作为 μ 的估计量更有效。

练习

$E(X)=\mu$　　$E(X_1)=\mu,\ E(X_2)=\mu$

设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$, X_1, X_2是来自总体X的一个样本。验证下面三个估计量：

$$(1)\ \hat{\mu}_1=\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2;\quad (2)\ \hat{\mu}_2=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2;\quad (3)\ \hat{\mu}_3=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2;$$

都是 μ 的无偏估计, 问哪一个最有效?

解：

$$E(\hat{\mu}_1)=E\left(\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2\right)=\frac{2}{3}E(X_1)+\frac{1}{3}E(X_2)=\frac{2}{3}\mu+\frac{1}{3}\mu=\mu$$

$$E(\hat{\mu}_2)=E\left(\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2\right)=\frac{1}{4}E(X_1)+\frac{3}{4}E(X_2)=\frac{1}{4}\mu+\frac{3}{4}\mu=\mu$$

$$E(\hat{\mu}_3)=E\left(\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2\right)=\frac{1}{2}E(X_1)+\frac{1}{2}E(X_2)=\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\mu=\mu$$

所以它们都是 μ 的无偏估计。

练习

$D(X)=1 \quad D(X_1)=1, D(X_2)=1$

设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$, X_1, X_2是来自总体X的一个样本。验证下面三个估计量：

$$(1)\ \hat{\mu}_1=\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2;\quad (2)\ \hat{\mu}_2=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2;\quad (3)\ \hat{\mu}_3=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2;$$

都是 μ 的无偏估计, 并求出每个估计量的方差, 问哪一个最有效?

解:

$$D(\hat{\mu}_1)=D(\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2)=\frac{4}{9}D(X_1)+\frac{1}{9}D(X_2)=\frac{5}{9}\approx 0.55$$

$$D(\hat{\mu}_2)=D(\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2)=\frac{1}{16}D(X_1)+\frac{9}{16}D(X_2)=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}=0.625$$

$$D(\hat{\mu}_3)=D(\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2)=\frac{1}{4}D(X_1)+\frac{1}{4}D(X_2)=\frac{1}{2}$$

$\because D(\hat{\mu}_3)<D(\hat{\mu}_1)<D(\hat{\mu}_2)$ 所以 $\hat{\mu}_3$ 最有效。

第七章 参数估计

第三节 估计量的评选标准

- 无偏性
- 有效性
- 一致性

作 业　　第七章习题

授课内容	习题七
7.1 点估计(极大似然估计)	3, 4(1) (2) 极大似然
7.1 点估计(矩估计) 7.3 估计量的评选标准	1, 2矩估计, 10, 11, 12, 14
7.5 正态总体均值与方差的区间估计	16均值，18,19方差

（04, 9分）

设总体X的分布函数为：$F(x,\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>1,\\ 0, & x\le 1\end{cases}$ 未知参数 $\beta>1$,

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，求：

(1) β 的矩估计量；

(2) β 的最大似然估计量。

（04, 9分）

设总体X的分布函数为：$F(x,\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$，未知参数 $\beta>1$，

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，求：

(1) β 的矩估计量；

$E(X)=\mu_1(\beta)=A_1=\bar{X}$

解：

1. 计算总体矩：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_1^{\infty} x\frac{\beta}{x^{\beta+1}}\mathrm{d}x=\beta\int_1^{\infty} x^{-\beta}\mathrm{d}x=\frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{x^{\beta-1}}\Big|_1^{\infty}$$

$$=\frac{\beta}{\beta-1}$$

$$f(x,\beta)=\frac{\mathrm{d}F(x,\beta)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$$

（04, 9分）

设总体X的分布函数为：$F(x,\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$，未知参数 $\beta>1$,

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，求：

(1) β 的矩估计量；

$E(X)=\mu_1(\beta)=A_1=\bar{X}$

解：

1. 计算总体矩：$E(X)=\dfrac{\beta}{\beta-1}$

2. 建立方程：$E(X)=\dfrac{\beta}{\beta-1}=\bar{X}$

3. 求解方程：$\hat{\beta}=\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$ ---矩估计量

（04, 9分）

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，求：

$x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$f(x,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$$

(2) β 的最大似然估计量。

解：1. 似然函数 $L(\beta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\beta)$

$$=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{\beta}{x_i^{\beta+1}}=\dfrac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}} & x_1,x_2,\cdots x_n>1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

2. 取对数： $\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

3. 求导,令其为零： $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\beta)}{\mathrm{d}\beta}=\dfrac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

4. 求解：

$$\hat\beta=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

极大似然估计值

$$\hat\beta=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$$

极大似然估计量

$$\hat\beta=\frac{\bar X}{\bar X-1}$$

矩估计量

（03, 8分）

设总体X的概率密度为：$f(x,\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$

其中 $\theta>0$ 是未知参数.

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本，记 $\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

求：(1)总体X的分布函数$F(x)$；

(2)统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数$F_{\hat{\theta}}(x)$;

(3)如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量，讨论它是否具有无偏性.

$E(\hat{\theta})\overset{?}{=}\theta$

$\Downarrow$

$f_{\hat{\theta}}(x)$

$\Downarrow$

$F_{\hat{\theta}}(x)$

$\Downarrow$

$F(x)$

（03, 8分）

设总体X的概率密度为：$f(x,\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$

其中 $\theta>0$ 是未知参数.

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本，记 $\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

求：(1)总体X的分布函数$F(x)$；

解：

当$x\le\theta$时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=0$

当$x>\theta$时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{\theta}^{x}2e^{-2(t-\theta)}\mathrm{d}t=-\int_{\theta}^{x}e^{-2(t-\theta)}\mathrm{d}[-2(t-\theta)]$

$$=e^{-2(t-\theta)}\Big|_{x}^{\theta}=1-e^{-2(x-\theta)}$$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$

（03, 8分）

设总体X的概率密度为：$f(x,\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$

其中 $\theta>0$ 是未知参数.

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本，记 $\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

求：(2)统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$;

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$

解：$F_{\hat{\theta}}(x)=1-[1-F(x)]^n$

$$=\begin{cases}1-e^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$

$V=\min(X,Y)$ $\quad F_V(z)=1-[1-F_X(z)]\cdot[1-F_Y(z)]$

$V=\min(X_1,X_2\cdots X_n)$ $\quad F_V(z)=1-[1-F_{X_1}(z)]\cdot[1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$

独立 $\quad =1-[1-F(z)]^n$

（03, 8分）

设总体X的概率密度为：$f(x,\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$

其中 $\theta>0$ 是未知参数.

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本，记 $\hat\theta=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

(3)如果用 $\hat\theta$ 作为 θ 的估计量，讨论它是否具有无偏性.

解：$E(\hat\theta)\overset{?}{=}\theta$

$$E(\hat\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{\hat\theta}(x)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{\infty}x2ne^{-2n(x-\theta)}\mathrm{d}x=2n\int_{\theta}^{\infty}xe^{-2n(x-\theta)}\mathrm{d}x$$

$$=\theta+\frac{1}{2n}\neq\theta$$

$\therefore\hat\theta$不是 θ 的无偏估计量。

$$f_{\hat\theta}(x)=F'_{\hat\theta}(x)=\begin{cases}2ne^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$

$$F_{\hat\theta}(x)=\begin{cases}1-e^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$

（10, 11分）

设总体X的概率分布为

X	1	2	3
p	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

未知参数$0<\theta<1$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本，N_1 是样本中1的个数，
N_2 是样本中2的个数，
N_3 是样本中3的个数，

试求 a_1,a_2,a_3 使 $T=a_1N_1+a_2N_2+a_3N_3$ 是 θ 的无偏估计量，并求 DT

解：在n次独立的观察中取1的个数 N_1 是一个随机变量，

$N_1\sim B(n,1-\theta)$，同理，$N_2\sim B(n,\theta-\theta^2)$，$N_3\sim B(n,\theta^2)$

$$ET=a_1EN_1+a_2EN_2+a_3EN_3=a_1n(1-\theta)+a_2n(\theta-\theta^2)+a_3n\theta^2$$

$$=\underbrace{na_1}_{0}+\underbrace{n(a_2-a_1)}_{1}\theta+\underbrace{n(a_3-a_2)}_{0}\theta^2=\theta$$

$$a_1=0,\ a_2=1/n,\quad a_3=a_2=1/n\ \rightarrow T=\frac{N_2+N_3}{n}$$

（10, 11分）

设总体X的概率分布为

X	1	2	3
p	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

未知参数$0<\theta<1$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的样本，N_1 是样本中1的个数，

N_2 是样本中2的个数，

N_3 是样本中3的个数，

$N_1+N_2+N_3=n$

试求a_1, a_2, a_3使$T=a_1N_1+a_2N_2+a_3N_3$是θ的无偏估计量，并求DT

解：$N_1 \sim B(n, 1-\theta)$，$N_2 \sim B(n, \theta-\theta^2)$，$N_3 \sim B(n, \theta^2)$

$$T=\frac{N_2+N_3}{n}$$

$$DT=D\frac{N_2+N_3}{n}=\frac{1}{n^2}D(n-N_1)=\frac{1}{n^2}D(N_1)=\frac{1}{n^2}n(1-\theta)\theta$$

$$=\frac{(1-\theta)\theta}{n}$$

（12, 11分）

设随机变量X与Y相互独立，分别服从$N(\mu,\sigma^2)$与$N(\mu,2\sigma^2)$
其中$\sigma>0$是未知参数．记$Z=X-Y$.

(1) 求Z的概率密度 $f(z,\sigma^2)$；

(2) 设$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$是来自总体Z的样本，求σ^2的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$

(3) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

（12, 11分）

设随机变量X与Y相互独立，分别服从$N(\mu,\sigma^2)$与$N(\mu,2\sigma^2)$

其中$\sigma>0$是未知参数. 记$Z=X-Y$.

(1) 求Z的概率密度$f(z,\sigma^2)$；

解：$Z=X-Y\sim N(0,3\sigma^2)$

$$EZ=EX-EY=\mu-\mu=0$$

$$DZ=DX+DY=\sigma^2+2\sigma^2=3\sigma^2$$

$$f(z,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{3}\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-0)^2}{2(\sqrt{3}\sigma)^2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

（12, 11分）

设随机变量X与Y相互独立，分别服从$N(\mu,\sigma^2)$与$N(\mu,2\sigma^2)$，其中$\sigma>0$是未知参数．记$Z=X-Y$．

(2) 设$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$是来自总体Z的样本，求σ^2的最大似然估计量$\hat{\sigma}^2$

解：

1. 似然函数：$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n} f(z_i,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{z_i^2}{6\sigma^2}}=(\sqrt{6\pi})^{-n}(\sigma^2)^{-n/2}e^{-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$

2. 取对数：$\ln L(\sigma^2)=-n\ln(\sqrt{6\pi})-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$

3. 求导,令其为零：$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{6(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=0$

4. 求解：$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$　　$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$

极大似然估计值　　极大似然估计量

$$\boxed{f(z,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}}$$

（12, 11分）

设随机变量X与Y相互独立，分别服从$N(\mu,\sigma^2)$与$N(\mu,2\sigma^2)$

其中$\sigma>0$是未知参数. 记$Z=X-Y \sim N(0,3\sigma^2)$

设$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$是来自总体Z的样本. $E(Z_i^2)=E(Z^2)$

(3) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$$

极大似然估计量

解:

$$E\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}E(Z_i^2)=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}E(Z^2)=\frac{1}{3n}nE(Z^2)$$

$$=\frac{1}{3}E(Z^2)=\frac{1}{3}[DZ+E(Z)^2]=\frac{1}{3}[3\sigma^2+0]=\sigma^2$$

所以 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的无偏估计量.