第四章 向量空间

4.1 向量空间与子空间

4.2 向量空间的基 维数 坐标

4.3 带度量的向量空间 欧氏空间

× 4.4 线性空间 基 维数 坐标

× 4.5 线性子空间

× 4.6 线性变换及其矩阵表示

第四章 向量空间

复习

向量空间

定义3.2 设V为n维向量的集合，如果集合V非空，且集合V对于向量加法及数乘两种运算封闭，则称集合V为实数域上的向量空间.

注释： (1) 集合V对于加法及数乘两种运算封闭是指

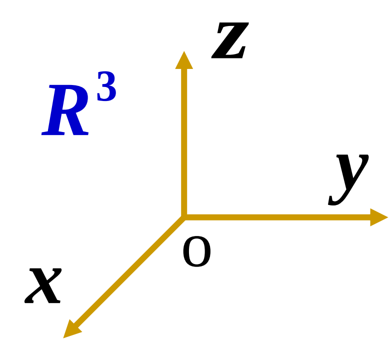
若$\forall \alpha, \beta \in V$，则$\alpha+\beta \in V$；

若$\forall \alpha \in V, \lambda \in R$，则$\lambda\alpha \in V$.

例：三维向量的全体构成的集合

$R^3=\{(x_1,x_2,x_3)^T \mid x_i \in R\}$ 是一个向量空间.

R^3



坐标面：xoy, xoz, yoz -----向量空间

坐标轴：x轴, y轴, z轴 -----向量空间

复习

3.1 和 3.2 解决的核心问题

向量空间中任意向量的表示问题 ← 极大无关组

极大无关组与秩

若向量组 A 的一个部分组 A_0: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 满足

(1) $A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

(2) A 中的任意向量均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示,

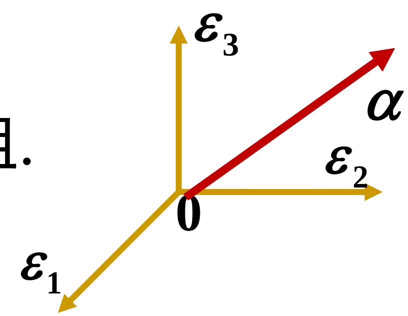
则称 $A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为向量组A的一个极大无关组.

$$A:\underbrace{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}_{A_0},\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_m$$

向量组 A的秩 = 极大无关组所含向量个数 = r

复习

例：求 R^3 的极大无关组和秩　　R^3是一个向量空间



$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$ 是 R^3 的一个极大无关组.

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$　　线性无关.

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\alpha$　　线性相关.

基　　维数

所以 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是的一个 R^3 极大无关组.　秩 $=3$

$$\alpha=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

2, 3, 4 ⇨ 坐标

向量组 ⟶ 向量空间

极大无关组 ⟶ 基

秩 ⟶ 维数

第四章 向量空间

4.2 向量空间的基 维数 坐标

- 向量空间的基 维数 坐标
- 基变换与坐标变换

1. 向量空间的基 维数 坐标

定义4.1 设V为实数域上的向量空间，

若V中向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，满足：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关；

(2) V中任意向量均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为V的基，基中所含向量的个数m

称为V的维数，记为 $\dim(V)=m$.

对V中任意向量α，存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$ ---基的作用

称 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 为 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 下的坐标.

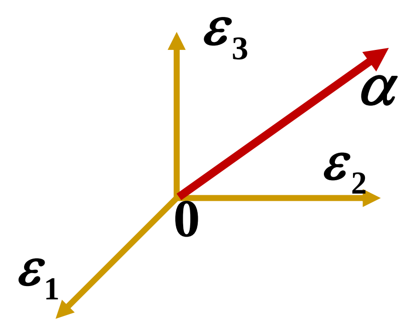
复习

问题： 什么样的基用起来最方便?

结论： $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 比 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 用起来方便.

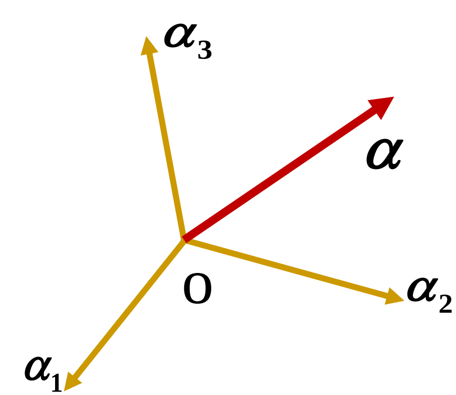
例：求 R^3 的基与维数

(1) $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 是 R^3 的一个基.



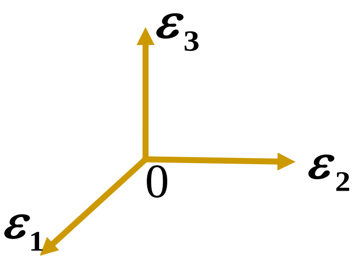
$$\alpha=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(2) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 也是 R^3 的一个基.



$$\alpha=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$ ——求解非齐次方程组唯一解

结论： $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 比 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 用起来方便。

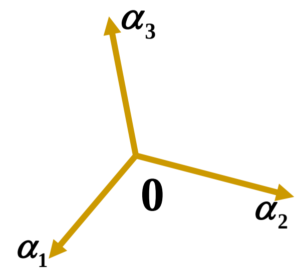


$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$

互相垂直

单位向量

标准正交基



$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

线性无关

不共面

结论： 标准正交基用起来最方便。

问题： 如何找到一个向量空间的标准正交基？ 核心问题

向量空间中基的作用：

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

同理：n维向量的全体 R^n 是一个向量空间，

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是向量空间 R^n 的基，

数 n 称为向量空间 R^n 的维数. 故 R^n 称为 n 维向量空间.

(任意 n 个线性无关的n 维向量组都是R^n的基)

对任意 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\in R^n$，有

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$$

$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 就是 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标.

第四章 向量空间

4.2 向量空间的基 维数 坐标

- 向量空间的基 维数 坐标
- 基变换与坐标变换

2. 基变换与坐标变换

在n维向量空间 R^n 中，任意 n 个线性无关的向量都可以作为 R^n 的一个基．对于不同的基, 同一个向量的坐标是不同的.

问题:

同一个向量在不同的基下的坐标有什么关系

即随着基的改变, 向量的坐标如何改变

引例 在 R^3 中取两个基 (1) $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$

(2) $\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(3,4,1)^T$

1）求两个基之间的关系.

解： β_1,β_2,β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，即

P 过渡矩阵

$$\begin{cases}\beta_1=k_{11}\alpha_1+k_{21}\alpha_2+k_{31}\alpha_3\\ \beta_2=k_{12}\alpha_1+k_{22}\alpha_2+k_{32}\alpha_3\\ \beta_3=k_{13}\alpha_1+k_{23}\alpha_2+k_{33}\alpha_3\end{cases}\Rightarrow(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\underbrace{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}_{B}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{A}P$$ ---基变换公式

$$\Rightarrow B=AP\ \Rightarrow A^{-1}B=P$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&1\end{pmatrix}$$

$$(A\,|\,B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\,|\,A^{-1}B)$$

解：$(A \mid B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1}B)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 - 3r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$$\quad E \qquad\qquad A^{-1}B$$

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & 22 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

引例 在 R^3 中取两个基 $(1)\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$

$(2)\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(3,4,1)^T$

1）求两个基之间的关系.

解： β_1,β_2,β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，即

P 过渡矩阵

$$\begin{cases}\beta_1=k_{11}\alpha_1+k_{21}\alpha_2+k_{31}\alpha_3\\ \beta_2=k_{12}\alpha_1+k_{22}\alpha_2+k_{32}\alpha_3\\ \beta_3=k_{13}\alpha_1+k_{23}\alpha_2+k_{33}\alpha_3\end{cases}\Rightarrow(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\underset{B}{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}=\underset{A}{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}P \text{ ---基变换公式}$$

$$\Rightarrow B=AP\ \Rightarrow A^{-1}B=P$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{pmatrix}$$

$$(A\,|\,B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\,|\,A^{-1}B)$$

$$B=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix}2&1&9\\4&2&22\\-1&0&-6\end{pmatrix}$$

引例 在 R^3 中取两个基 $(1)\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$

$(2)\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(3,4,1)^T$

1）求两个基之间的关系.

解：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$ ---基变换公式，过渡矩阵 $P=\begin{pmatrix}2&1&9\\4&2&22\\-1&0&-6\end{pmatrix}$

2）已知 ξ 在基(2)下的坐标为1,1,1，求在 ξ 基(1)下的坐标.

$$\xi=\beta_1+\beta_2+\beta_3=1\cdot\beta_1+1\cdot\beta_2+1\cdot\beta_3=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\xi=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+y_3\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$\xi==\overset{A}{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\overset{A}{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}2&1&9\\4&2&22\\-1&0&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\28\\-7\end{pmatrix}$$

坐标变换公式

(1) 基变换公式

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 及 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是向量空间 R^n 的两个基,

且有

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}}_{P}$$

$$\overset{B}{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)}=\overset{A}{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)}P$$ ---基变换公式

矩阵 P 称为从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵.

注：过渡矩阵P是可逆的. $B=AP$

$P=A^{-1}B$

$$(A\,\vdots\,B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\,\vdots\,A^{-1}B)$$

(2) 坐标变换公式

设 $\boldsymbol{R}^n$ 中的向量 α，

在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,

在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,

若两个基满足 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$

则有坐标变换公式:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

第四章 向量空间

第四章 向量空间

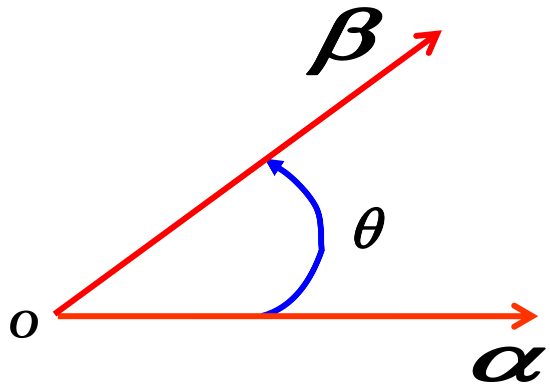
4.3 带度量的向量空间 欧氏空间

- 内积的定义
- 向量的模及性质
- 向量的夹角
- 正交矩阵
- 正交向量组
- 施密特正交化 — 标准正交基

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$

复习

三维向量空间R^3: $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$



$\boxed{\text{点积}}$: $\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta| \cos\theta \rightarrow \alpha \cdot \alpha = |\alpha|^2$

内积 $= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

长度: $|\alpha| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

夹角: $\cos\theta = \dfrac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha| \cdot |\beta|} = \dfrac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$

1. 内积的定义

定义4.2 设有 n 维向量 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=x^Ty=y^Tx$$

称为向量 x 与 y 的内积.

内积的运算性质 (以下 x, y, z 为 n 维向量, l 为实数)

(1) $(x,y)=(y,x)$; (对称性)

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=(y,x)$$

1. 内积的定义

定义4.2 设有 n 维向量 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$,

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=x^Ty=y^Tx$$

称为向量 x 与 y 的内积.

内积的运算性质 (以下x, y, z为n 维向量, l为实数)

(1) $(x,y)=(y,x)$; (对称性)

(2) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)=(x,\lambda y)$;

$$(\lambda x,y)=\lambda x_1y_1+\lambda x_2y_2+\cdots+\lambda x_ny_n$$
$$=\lambda(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)=\lambda(x,y)$$

1. 内积的定义

定义4.2 设有 n 维向量 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=x^Ty=y^Tx$$

称为向量 x 与 y 的内积.

内积的运算性质 (以下x,y,z为n 维向量, l为实数)

(1) $(x,y)=(y,x)$; (对称性)

(2) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)=(x,\lambda y)$;

(3) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$; (分配律)

$x+y=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}\quad z=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}(x+y,z)&=(x_1+y_1)z_1+(x_2+y_2)z_2+\cdots+(x_n+y_n)z_n\\&=(x_1z_1+x_2z_2+\cdots+x_nz_n)+(y_1z_1+y_2z_2+\cdots+y_nz_n)\\&=(x,z)+(y,z)\end{aligned}$$

1. 内积的定义

定义4.2 设有 n 维向量 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = x^T y = y^T x$$

称为向量 x 与 y 的内积.

内积的运算性质 (以下x, y, z为n 维向量, l为实数)

(1) $(x, y) = (y, x)$; (对称性)

(2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y) = (x, \lambda y)$;

(3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$; (分配律)

(4) $(x, x) \geq 0$, 且当 $x \neq 0$ 时, 有$(x, x) > 0$; (正定性)

当 $x = 0$ 时, 有$(x, x) = 0$. $(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$

第四章 向量空间

4.3 带度量的向量空间 欧氏空间

- 内积的定义
- 向量的模及性质
- 向量的夹角
- 正交矩阵
- 正交向量组
- 施密特正交化 — 标准正交基

2. 向量的模及性质

长度: $|\alpha| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha} = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2}}$

定义4.3 令 $|x| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$,

称 $|x|$ 为 n 维向量 x 的模(或长度).

向量长度的性质:

1) 非负性 $|x| = \sqrt{(x,x)} \geq 0$

当 $x \neq 0$ 时, 有 $|x| > 0$; 当 $x = 0$ 时, 有 $|x| = 0$.

2) 齐次性 $|\lambda x| = |\lambda||x|$;

$$|\lambda x| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + \cdots + (\lambda x_n)^2} = |\lambda||x|.$$

2. 向量的模及性质

定义4.3 令 $|x| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$,

称 $|x|$ 为 n 维向量 x 的模(或长度).

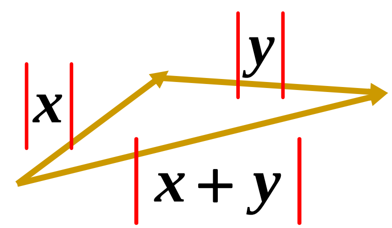
向量长度的性质:

1) 非负性 $|x| = \sqrt{(x,x)} \geq 0$

当 $x \neq 0$ 时, 有 $|x| > 0$; 当 $x = 0$ 时, 有 $|x| = 0$.

2) 齐次性 $|\lambda x| = |\lambda| |x|$;

3) 三角不等式 $|x+y| \leq |x| + |y|$



4) Cauchy-Schwarz不等式 $|(x,y)| \leq |x||y|$

(证明略)

单位向量：$|x|=1$.

$$\left|\frac{1}{|\alpha|}\alpha\right|=\frac{1}{|\alpha|}|\alpha|=1$$

向量单位化：若 $\alpha\neq 0$，则 $|\alpha|>0$，且 $\dfrac{1}{|\alpha|}\alpha$ 是单位向量.

定义4.4 定义了内积运算的实数域上的向量空间称为欧氏空间.

$$\text{欧氏空间}\begin{cases}\text{向量空间}\begin{cases}\text{集合非空（含有零向量）}\\ \text{对加法封闭}\\ \text{对数乘封闭}\end{cases}\\ \text{内积运算}\end{cases}$$

第四章 向量空间

4.3 带度量的向量空间 欧氏空间

- 内积的定义
- 向量的模及性质
- 向量的夹角
- 正交矩阵
- 正交向量组
- 施密特正交化 — 标准正交基

3. 向量的夹角

夹角: $\cos\theta = \dfrac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}$

$\because |(\alpha,\beta)| \le |\alpha||\beta|$, $\therefore$ 当 $\alpha \ne 0, \beta \ne 0$ 时 $\Rightarrow \left|\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}\right| \le 1$

定义4.5 当 $\alpha \ne 0, \beta \ne 0$ 时, $\theta = \arccos\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$ $\rightarrow$ $\cos\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|} = 0$

称为n维向量α 与 β 的夹角. 记作 $\langle\alpha,\beta\rangle \in [0,\pi]$.

定义4.6 当 $(\alpha,\beta)=0$ 时, 称向量α与 β 正交, 记为 $\alpha \perp \beta$.

注: 若$\alpha = 0$, 则 $(\alpha,\beta) = 0$. 即零向量与任何向量都正交.

第四章 向量空间

4.3 带度量的向量空间 欧氏空间

- 内积的定义
- 向量的模及性质
- 向量的夹角
- 正交矩阵
- 正交向量组
- 施密特正交化 — 标准正交基

4. 正交矩阵

定义4.7

若 n 阶方阵 A, 满足 $A^T A = E$, 则称 A为正交矩阵.

正交矩阵的性质:

(1) n 阶正交矩阵 A 可逆, 且 $A^{-1} = A^T$. $\boxed{|A^T||A| = 1}$

(2) n 阶正交矩阵 A 的行列式 $|A| = \pm 1$.

(3) n 阶正交矩阵A的行、列具有如下性质:

A为正交矩阵$\Leftrightarrow$ A的列(行)向量组中的向量都是单位向量且两两正交.

性质：A为正交矩阵$\Leftrightarrow$$A$的列(行)向量组中的向量都是单位向量且两两正交.

证明 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，由 $A^TA=E$，得

$$\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}=E.$$

$$\alpha_i^T\alpha_i=|\alpha_i|^2=1$$

$$\Rightarrow \alpha_i^T\alpha_j=\begin{cases}1, & 当 i=j\\ 0, & 当 i\neq j\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots n)$$

即方阵A为正交矩阵$\Leftrightarrow$$A$的列向量组中的向量都是单位向量且两两正交.

4. 正交矩阵

A为正交矩阵的充要条件是下列条件之一成立：

(1) $AA^T = E$;

(2) $A^{-1} = A^T$;

(3) A的列向量都是单位向量且两两正交.

(4) A的行向量都是单位向量且两两正交.

例1 判别下列矩阵是否为正交矩阵.

$$(1)\ A=\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/3 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & -1 \end{pmatrix},\qquad (2)\ B=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}.$$

解 (1) 考察矩阵 A 的第一列

由于 $1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2>1,$ 所以它不是正交矩阵.

(1) $AA^T=E$; (2) $A^{-1}=A^T$;

(3) A的列向量都是单位向量且两两正交.

例1 判别下列矩阵是否为正交矩阵.

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/3 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$, (2) $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$.

解

(2) 由于B 的每列分量平方和是1, $\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(-\frac{8}{9}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2=1$

每两列对应分量乘积之和为0,

$$\left(\frac{1}{9}\right)\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)+\left(-\frac{8}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{9}\right)+\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)=0$$

所以它是正交矩阵.

(1) $AA^T=E$; (2) $A^{-1}=A^T$;

(3) A的列向量都是单位向量且两两正交.

第四章 向量空间

4.3 带度量的向量空间 欧氏空间

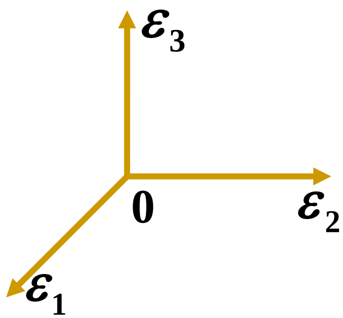
- 内积的定义
- 向量的模及性质
- 向量的夹角
- 正交矩阵
- 正交向量组
- 施密特正交化 — 标准正交基

5. 正交向量组

定义4.8 设 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是一组非零的 n 维向量, 且两两正交, 则称向量组A为正交向量组.

正交向量组的性质:

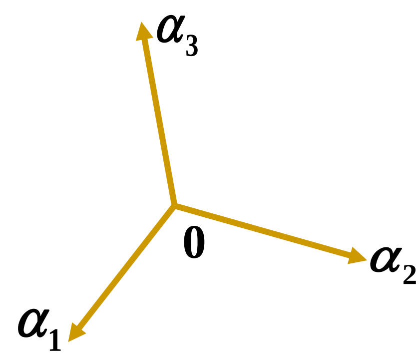
定理4.1 正交向量组必线性无关. 证明略



$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$

互相垂直

正交向量组



$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

不共面

线性无关

标准正交基(规范正交基)

定义4.9 设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$是向量空间$V\subset R^n$ 的一个基,

若$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 两两正交, 且都是单位向量,

则称$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 是向量空间V 的标准正交基.

例: 求向量空间 R^4 的一个标准正交基.

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$ --- 标准正交基 唯一吗?

(1) 对任意 $i\neq j$, 有 $\varepsilon_i\perp\varepsilon_j$, $i,j=1,2,3,4.$

(2) 对任意 i, 有 $|\varepsilon_i|=1$, $i=1,2,3,4.$

例：向量空间R^4的另一个基

$$e_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

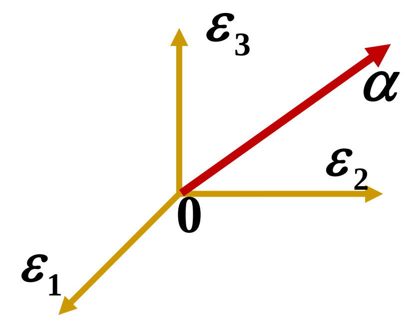
(1) 对任意 $i\neq j$, 有 $e_i\perp e_j,\quad i,j=1,2,3,4$

(2) 对任意 i, 有 $|e_i|=1,\quad i=1,2,3,4$

$\therefore e_1,e_2,e_3,e_4$ 也是向量空间 R^4 的一个标准正交基.

结论：标准正交基不唯一.

标准正交基的作用：



$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 是 R^3 的一个标准正交基.

对任意 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T\in R^3$，有

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3$$

$$\alpha=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\qquad(\alpha,\varepsilon_1)=2$$

$$\alpha=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=(\alpha,\varepsilon_1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+(\alpha,\varepsilon_2)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+(\alpha,\varepsilon_3)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

标准正交基的作用：

对于向量空间 $\boldsymbol{R}^n$，设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个标准正交基，

则对 $\forall\alpha\in\boldsymbol{R}^n$， $\alpha=\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\cdots+\lambda_i\eta_i+\cdots+\lambda_n\eta_n$

$$
\begin{aligned}
(\alpha,\eta_i)&=(\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\cdots+\lambda_i\eta_i+\cdots+\lambda_n\eta_n,\eta_i)\\
&=\lambda_1(\eta_1,\eta_i)+\lambda_2(\eta_2,\eta_i)+\cdots+\lambda_i(\eta_i,\eta_i)+\cdots+\lambda_n(\eta_n,\eta_i)\\
&=\lambda_i(\eta_i,\eta_i)=\lambda_i
\end{aligned}
$$

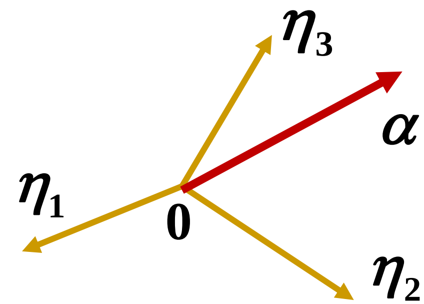
故 $\alpha=(\alpha,\eta_1)\eta_1+(\alpha,\eta_2)\eta_2+\cdots+(\alpha,\eta_n)\eta_n$

即 α 在标准正交基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的坐标为 $(\alpha,\eta_1),(\alpha,\eta_2),\cdots,(\alpha,\eta_n)$.

避免求解非齐次方程组: $x_1\eta_1+x_2\eta_2+\cdots+x_n\eta_n=\alpha$

问题：如何求向量空间的一个标准正交基？

标准正交基的作用：



$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

也是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个标准正交基.

$$\alpha=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=x_1\eta_1+x_2\eta_2+x_3\eta_3$$

$$(\alpha,\eta_1)=\alpha^T\eta_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(2,3,4)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\frac{13}{\sqrt{6}}$$

$$\alpha=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=(\alpha,\eta_1)\eta_1+(\alpha,\eta_2)\eta_2+(\alpha,\eta_3)\eta_3$$

$$(\alpha,\eta_2)=\alpha^T\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(2,3,4)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=\frac{13}{\sqrt{6}}\eta_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\eta_2-\frac{1}{\sqrt{3}}\eta_3$$

$$(\alpha,\eta_3)=\alpha^T\eta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(2,3,4)\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

第四章 向量空间

4.3 带度量的向量空间 欧氏空间

- 内积的定义
- 向量的模及性质
- 向量的夹角
- 正交矩阵
- 正交向量组
- 施密特正交化 — 标准正交基

6. 施密特正交化

标准正交基比一般的基好,

$$\text{一般的基} \xrightarrow{\text{导出}} \text{标准正交基}?$$

重点

求标准正交基的方法

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量空间V的一个基,

1. 正交化: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \xrightarrow{\text{施密特正交化方法}} \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$（正交基）

2. 单位化: $\eta_1 = \dfrac{\beta_1}{|\beta_1|}, \eta_2 = \dfrac{\beta_2}{|\beta_2|}, \cdots, \eta_r = \dfrac{\beta_r}{|\beta_r|}$

$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ 是向量空间V的一个标准正交基.

求标准正交基的方法 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_r \longrightarrow \beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_r$

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量空间V 的一个基,

取 $\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

分析：设 $\beta_2=\alpha_2+k\beta_1$

$$0=(\beta_1,\beta_2)=(\beta_1,\alpha_2)+k(\beta_1,\beta_1)$$

$$\Downarrow$$

$$k=-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}$$

$$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_r \longrightarrow \beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_r$$

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

分析：设 $\beta_3=\alpha_3+k_1\beta_1+k_2\beta_2$

$$0=(\beta_1,\beta_3)=(\beta_1,\alpha_3)+k_1(\beta_1,\beta_1)+k_2\overset{0}{(\beta_1,\beta_2)} \Rightarrow k_1=-\frac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}$$

$$0=(\beta_2,\beta_3)=(\beta_2,\alpha_3)+k_1\overset{0}{(\beta_2,\beta_1)}+k_2(\beta_2,\beta_2) \Rightarrow k_2=-\frac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}$$

$$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_r \longrightarrow \beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_r$$

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{(\beta_1,\alpha_r)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_r)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\beta_{r-1},\alpha_r)}{(\beta_{r-1},\beta_{r-1})}\beta_{r-1}$$

则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 两两正交.

上述由线性无关向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 构造出正交向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 的方法称为施密特正交化方法.

求标准正交基的方法

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量空间 V 的一个基,

1. 正交化: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \xrightarrow{\text{施密特正交化方法}} \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$（正交基）

2. 单位化: $\eta_1=\dfrac{\beta_1}{|\beta_1|},\eta_2=\dfrac{\beta_2}{|\beta_2|},\cdots,\eta_r=\dfrac{\beta_r}{|\beta_r|}$

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 是向量空间 V 的一个标准正交基.

例2 已知R^3的一个基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

试将基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 化为标准正交基.

$(\beta_1,\beta_1)=1$

$(\beta_1,\alpha_2)=1$

$(\beta_1,\alpha_3)=1$

$(\beta_2,\alpha_3)=1$

解 1. 正交化

$\beta_1=\alpha_1;$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

不用单位化，β_1,β_2,β_3 已经是R^3的一个标准正交基.

例3 已知$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，求一组非零向量 α_2,α_3 使 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交.

解 由已知, α_2,α_3 应满足 $(\alpha_1,x)=\alpha_1^T x=0 \Rightarrow x_1+x_2+2x_3=0$

$A=(1,1,2)$ $r(A)=1$ 自由变量个数= $n-r(A)=2$

取 x_2,x_3 为自由变量,

可得到方程组的一个基础解系（两个线性无关的解向量）：

$$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\alpha_1^T x=(1,1,2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

例3 已知$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，求一组非零向量 α_2,α_3 使 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交.

解 由已知，α_2,α_3 应满足 $\alpha_1^T x=0$，即 $x_1+x_2+2x_3=0$

方程组的两个线性无关的解向量：$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

将它们正交化：取 $\alpha_2=\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$， $\xi_2^T\xi_3=2\neq 0$

$$\alpha_3=\xi_3-\frac{(\alpha_2,\xi_3)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交. $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

第四章 向量空间

4.3 带度量的向量空间 欧氏空间

- 内积的定义
- 向量的模及性质
- 向量的夹角
- 正交矩阵
- 正交向量组
- 施密特正交化 — 标准正交基

第四章 向量空间

4.1 向量空间与子空间 —— Ch3-1讨论

4.2 向量空间的基 维数 坐标

4.3 带度量的向量空间 欧氏空间

作 业　习题四

授课内容	习题三
4.1 向量空间与子空间	1(1)(2)
4.2 向量空间基维数坐标	5, 7
4.3 带度量的向量空间 欧氏空间	17,22(3),23,28,