

# § 7.4 关系的性质

**定义** 设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系

(1) 若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$ , 则称 $R$ 是**自反的**;

(2) 若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$ , 则称 $R$ 是**反自反的**。

**例** 恒等关系 $I_A$ 与全域关系 $E_A$ 都是自反的。

**例** 设 $A=\{1,2,3\}$ , 以及 $A$ 上的3个二元关系

$$R_1=\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}, \quad R_2=\{\langle 1, 3 \rangle\}$$

$$R_3=\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$$

判断这些关系是自反的, 还是反自反的?

**定义** 设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系

(1) 若 $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$ ,  
则称 $R$ 是**对称的**;

(2) 若

$\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x = y)$

则称 $R$ 是**反对称的**。

**例** 设 $A = \{1, 2, 3\}$ , 以及 $A$ 上的4个二元关系

$R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$ ,  $R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$

$R_3 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$ ,  $R_4 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$

判断这些关系是对称的, 还是反对称的?

**定义** 设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系，若

$$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$$

则称 $R$ 是**传递的**。

**例** 设 $A=\{1,2,3\}$ ，以及 $A$ 上的3个二元关系

$$R_1 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}, \quad R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$$

$$R_3 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$$

判断这些关系是否传递？

判断二元关系的性质是一个重要工作。可以利用集合运算、关系矩阵与关系图等多种方法



**定理** 设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系，则

- (1)  $R$ 为自反的当且仅当  $I_A \subseteq R$  ;
- (2)  $R$ 为反自反的当且仅当  $R \cap I_A = \emptyset$ ;
- (3)  $R$ 为对称的当且仅当  $R = R^{-1}$ ;
- (4)  $R$ 为反对称的当且仅当  $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$  ;
- (5)  $R$ 为传递的当且仅当  $R \circ R \subseteq R$ 。

**例** 设 $R_1, R_2$ 是 $A$ 上的二元关系，证明：

- (1) 若 $R_1, R_2$ 是自反的(对称的)，则 $R_1 \cup R_2$ 也是自反的(对称的)；
- (2) 若 $R_1, R_2$ 是传递的，则 $R_1 \cap R_2$ 也是传递的。

**证明** (1) 若 $R_1, R_2$ 是自反的, 则

$$I_A \subseteq R_1, \quad I_A \subseteq R_2$$

因此得

$$I_A \subseteq R_1 \cup R_2$$

所以  $R_1 \cup R_2$  也自反。

若 $R_1, R_2$ 是对称的, 则

$$R_1 = R_1^{-1}, \quad R_2 = R_2^{-1}$$

因此得

$$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = R_1 \cup R_2$$

所以  $R_1 \cup R_2$  也对称。

(2) 若 $R_1, R_2$ 是传递的, 则

$$R_1 \circ R_1 \subseteq R_1, \quad R_2 \circ R_2 \subseteq R_2$$

因此得

$$\begin{aligned} & (R_1 \cap R_2) \circ (R_1 \cap R_2) \\ &= R_1 \circ R_1 \cap R_1 \circ R_2 \cap R_2 \circ R_1 \cap R_2 \circ R_2 \\ &\subseteq R_1 \cap R_1 \circ R_2 \cap R_2 \circ R_1 \cap R_2 \\ &\subseteq R_1 \cap R_2 \end{aligned}$$

所以  $R_1 \cap R_2$  也传递。 ■

## 有限集上二元关系的性质判断：

### 1. 关系矩阵 $M_R$

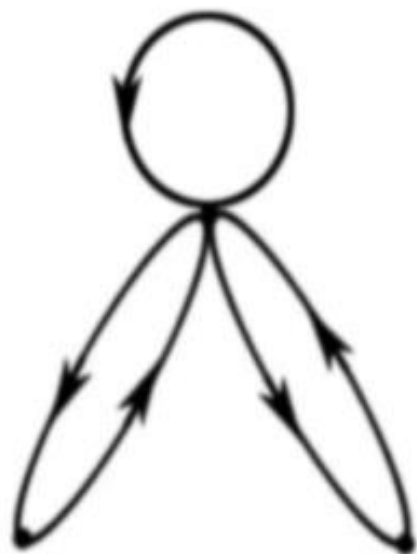
- (1)  $R$ 为自反的当且仅当 $M$ 的主对角元全为1；
- (2)  $R$ 为反自反的当且仅当 $M$ 的主对角元全为0；
- (3)  $R$ 为对称的当且仅当 $M$ 是对称矩阵；
- (4)  $R$ 为反对称的当且仅当 $M$ 的元素 $r_{ij}$ 与 $r_{ji}$ 不同时为1，这里 $i \neq j$ ；
- (5)  $R$ 为传递的当且仅当对 $M^2$ 中任意为1的元素， $M$ 中对应位置的元素也为1。



## 2. 关系图 $G_R$

- (1)  $R$ 为自反的当且仅当  $G$ 的每个顶点都有环;
- (2)  $R$ 为反自反的当且仅当  $G$ 的每个顶点都没有环;
- (3)  $R$ 为对称的当且仅当  $G$  的任意两顶点之间或没有边, 或有两方向相反的边;
- (4)  $R$ 为反对称的当且仅当  $G$  的任意两顶点之间至多有一条边;
- (5)  $R$ 为传递的当且仅当  $G$  中若从顶点  $x_i$ 到顶点  $x_k$ 有边且从顶点  $x_k$ 到顶点  $x_j$ 有边, 则从顶点  $x_i$ 到顶点  $x_j$ 有边。

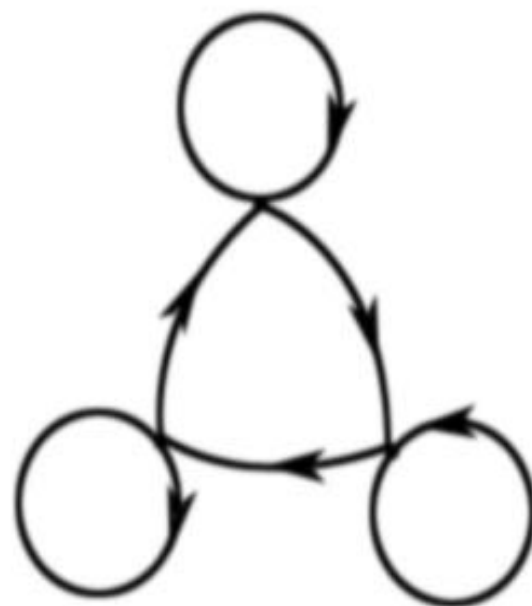
**例** 由给定的3元集合上的3个二元关系的关系图，判断对应二元关系的性质：



(1)



(2)



(3)