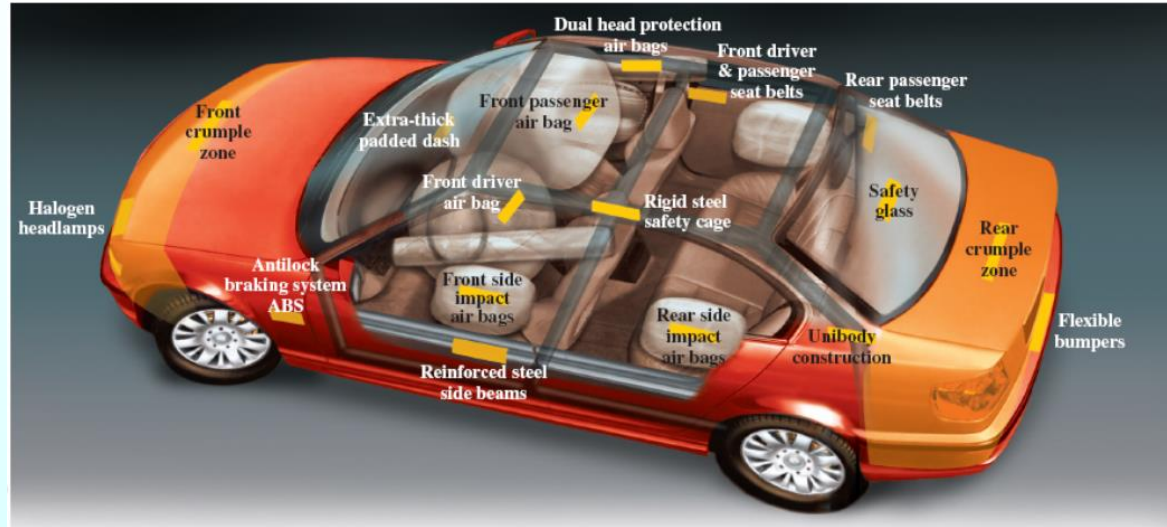
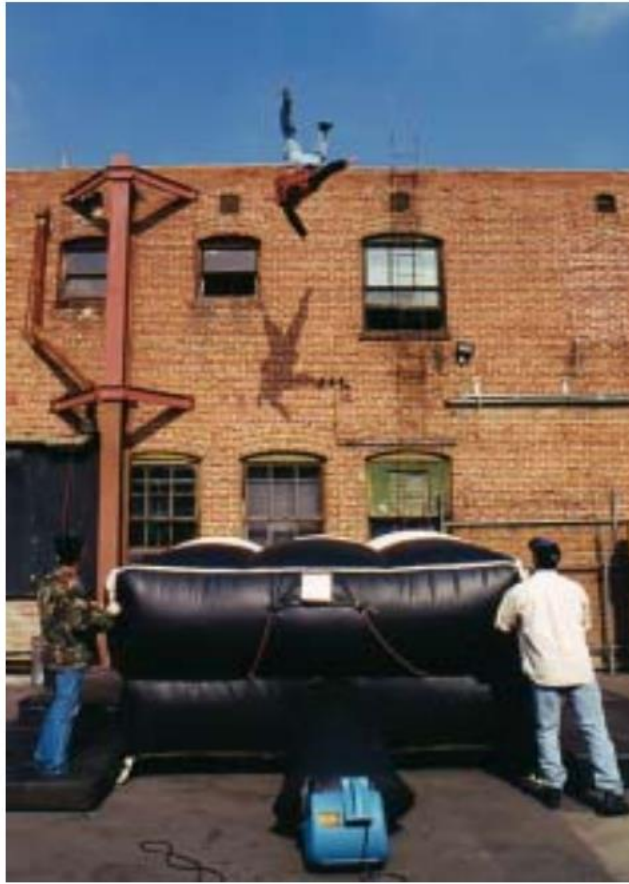


动量 (momentum)

- ✓ 质点的动量定理
- ✓ 质点系的动量定理
- ✓ 动量守恒定律
- ✓ 质心



1. 3. 质点的动量定理

(impulse and theorem of momentum)

牛顿第二定律 $\vec{F} = m\vec{a}$ 给出物体所受和外力与它所得加速度之间的瞬时关系。

物体在力的持续作用下，力对物体将产生累积效应。

这种累积效应有两种：

1) 力的时间累积效应，如：冲量，冲量矩

2) 力的空间累积效应，如：功 $A = \vec{F} \cdot d\vec{S}$

一. 动量 (momentum)

动量即物体运动的量，定义为 $\vec{P} = m\vec{V}$ (状态量)

动量由物体的 m 和 V 两个因素决定，如高速运动的子弹，低速运动的夯。

动量性质：矢量性，瞬时性，相对性。

二 . 冲量 (impulse)

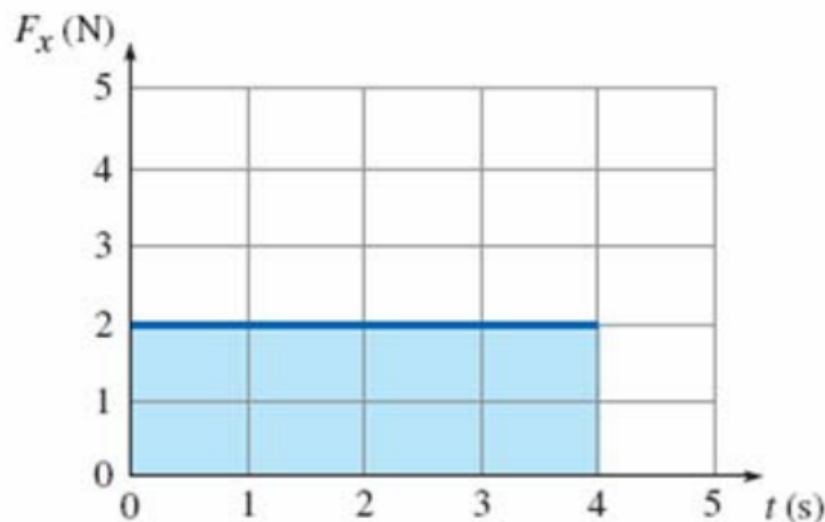
力在一段时间内持续作用的效果，是由力 \vec{F} 和力的作用时间 Δt 两个因素决定的。

定义： 冲量 $\vec{I} = \vec{F} \Delta t$ (\vec{F} 为恒力)

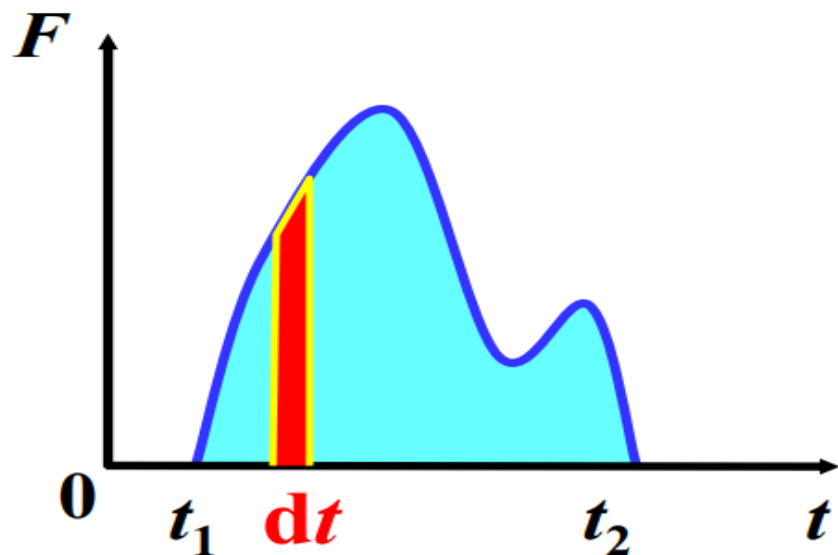
恒力 $\vec{I} = \vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{F}\Delta t$ 单位： N·s

几何意义

冲量的大小为 $F_x - t$
图线下的面积



$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot d\vec{t} \quad (\vec{F} \text{ 为变力})$$



直角坐标系(二维)中

$$\vec{I} = I_x \hat{i} + I_y \hat{j}$$

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt \quad I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt$$

三．动量定理 (theorem of momentum)

微分形式 由 $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \vec{F}dt = d\vec{P}$ (瞬时)

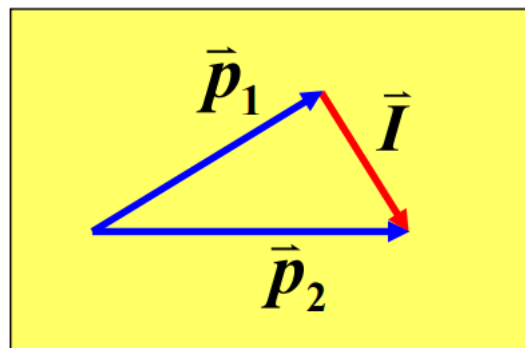
积分形式 过程: $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \int_1^2 d\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$

质点的动量定理 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$ (m 不变)

$$\vec{F}(t_2 - t_1) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \quad (\vec{F} \text{ 不变})$$

$$\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

质点在一段时间内动量的增量等于在该时间内所受合力的冲量。



$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \quad (m \text{ 不变})$$

$$\text{平均冲力: } \vec{F} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt}{t_2 - t_1} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

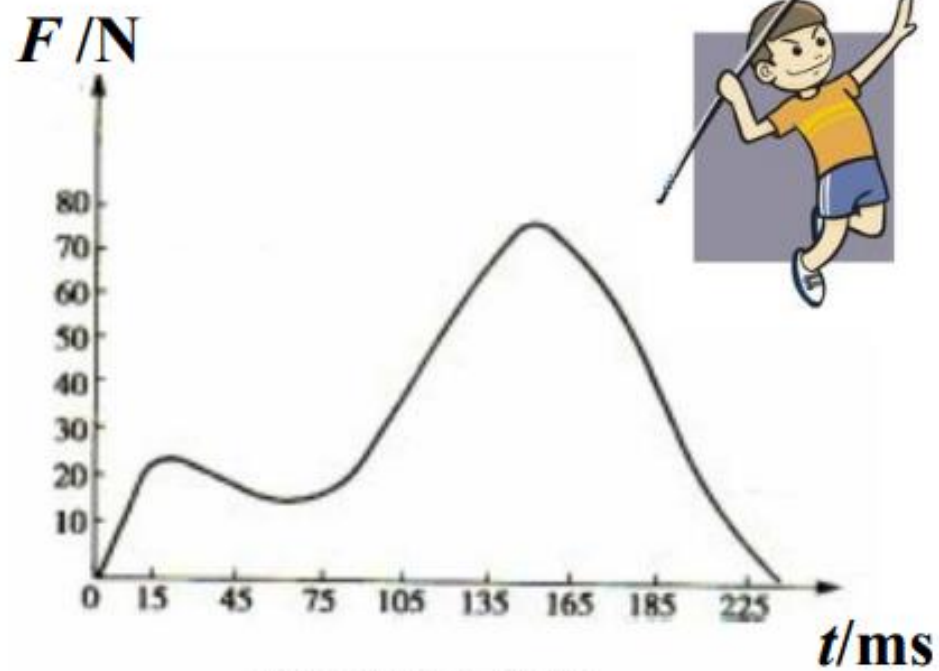
讨论

1) 直角坐标系中的分量式(二维):

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \cdot dt = P_{2x} - P_{1x} \quad I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y \cdot dt = P_{2y} - P_{1y}$$

2) 动量定理在碰撞问题中具有特殊重要的意义。

在碰撞过程中由于作用时间极短,作用力(冲力)却很大. 并且随时间变化很难测定, 但可借助始、末动量变化和作用时间来计算平均冲力。



对标枪用力曲线

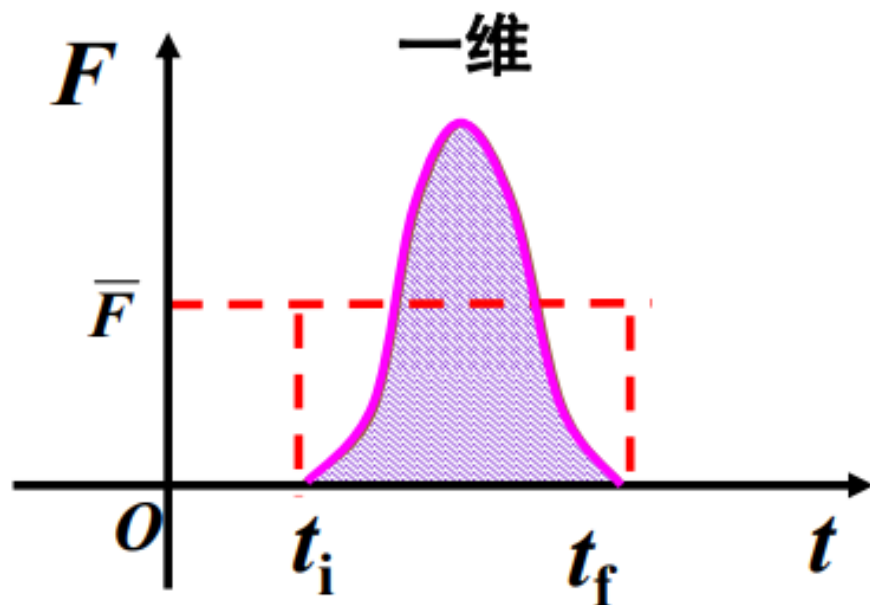


平均冲力 $\overline{\vec{F}}$ Average Forces

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

定义：平均冲力

$$\overline{\vec{F}} = \frac{\vec{I}}{\Delta t}$$



[例] 已知: m 在水平面内作半径为 R 的匀速率圆运动,
(R, v) 已知,

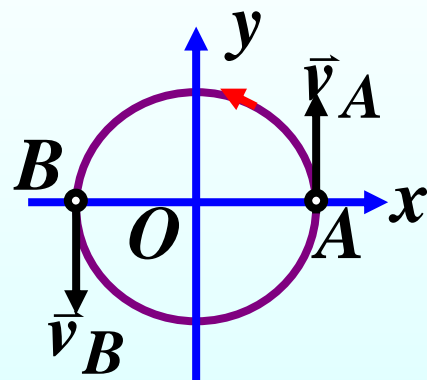
求: (1) A 到 B 时动量的改变,
(2) 向心力平均值及方向。

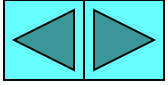
解: (1)
$$\Delta \vec{p} = m\vec{v}_B - m\vec{v}_A$$
$$= -mv\vec{j} - mv\vec{j} = -2mv\vec{j}$$

(2)
$$\bar{\vec{F}} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

$$\bar{F} = \frac{|\Delta \vec{p}|}{\Delta t} = \frac{2mv}{\pi R / v} = \frac{2mv^2}{\pi R} \quad \therefore \quad \bar{\vec{F}} = -\frac{2mv^2}{\pi R} \vec{j}$$

$\bar{\vec{F}}$ 方向沿 $-\vec{j}$



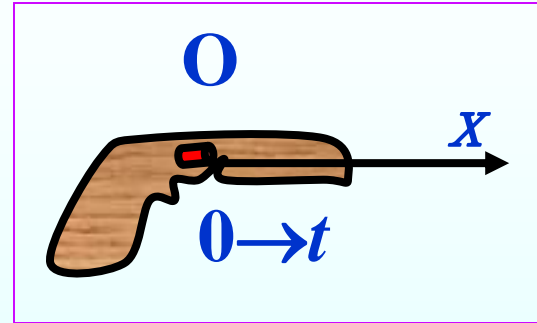


[例] 已知：子弹在枪筒内受到推进力

$$F(t) = 400 - \frac{4}{3} \times 10^5 t \quad (\text{N})$$

其加速过程 $v_0 = 0$ 到 $v = 300 \text{ m/s}$

求：子弹质量 $m = ?$



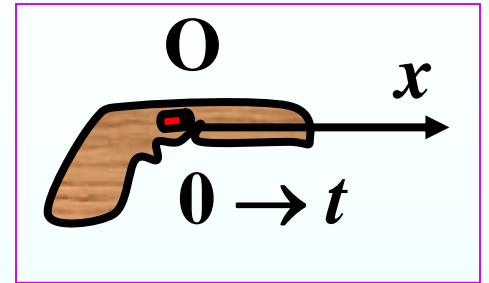
解： m 在枪内水平只受力 $F(t)$

子弹在枪筒内加速时间 $0 \rightarrow t$

水平方向
动量状态： $\begin{cases} t = 0 \text{ 时, } x = 0, v_0 = 0, p = 0 \\ t \text{ 时刻, } v = 300 \text{ m/s, } p = mv \end{cases}$

动量定理: $\int_0^t F(t)dt = mv = 300m$

$$\therefore m = \frac{1}{300} \int_0^t F(t)dt$$



子弹在枪筒内加速时间 $t = ?$

当 $F(t) = 400 - \frac{4}{3} \times 10^5 t = 0$ 时

$$t = 3 \times 10^{-3} (\text{sec})$$

$$\begin{aligned} \therefore m &= \frac{1}{300} \int_0^{3 \times 10^{-3}} [400 - \frac{4}{3} \times 10^5 t] dt \\ &= \frac{1}{300} [1.2 - 0.6] = 0.002 (\text{kg}) = 2 (\text{g}) \end{aligned}$$

质点系的动量定理

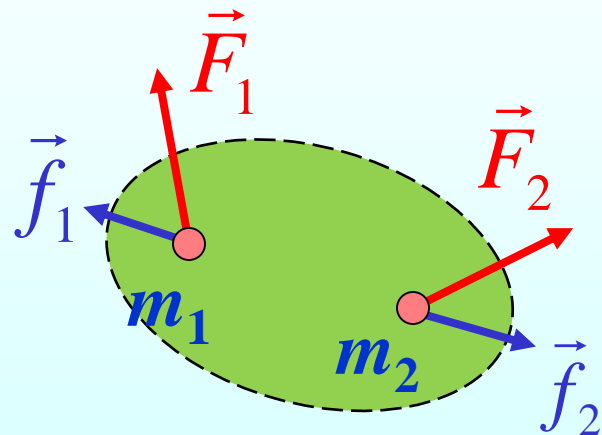
(theorem of momentum for system of particles)

一. 质点系

把相互作用的若干个质点看作为一个整体, 这组质点就称为质点系.

二. 质点系的动量定理

$$m_1, m_2 \text{ 系统: } \begin{cases} \text{内力: } \vec{f}_1, \vec{f}_2 \\ \text{外力: } \vec{F}_1, \vec{F}_2 \end{cases}$$



分别运用牛顿第二定律:

$$m_1: \quad \vec{F}_1 + \vec{f}_1 = \frac{d\vec{P}_1}{dt}$$

$$m_2: \quad \vec{F}_2 + \vec{f}_2 = \frac{d\vec{P}_2}{dt}$$

二式相加,

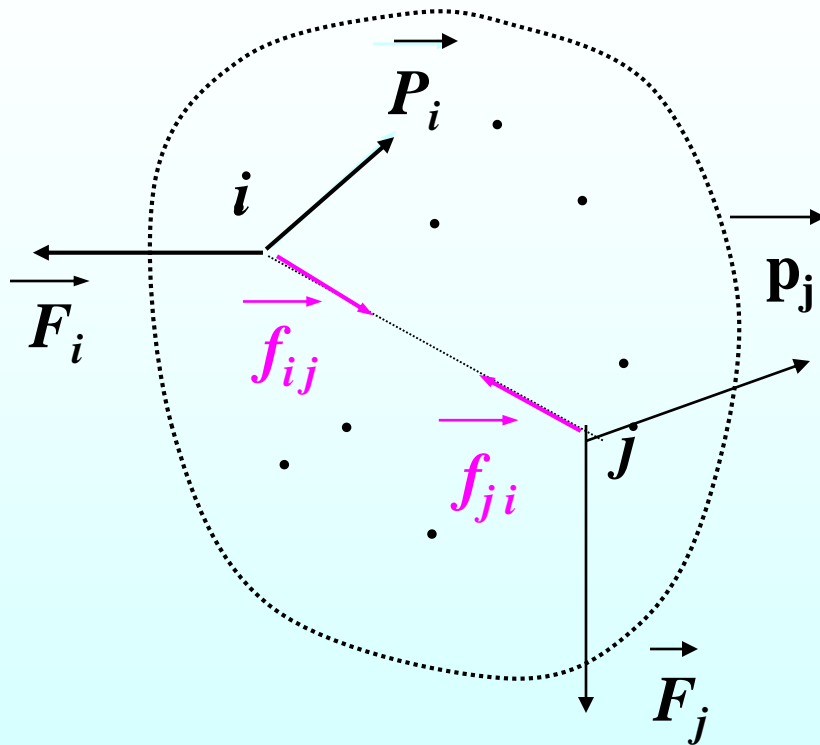
$$\text{由于 } \vec{f}_1 = -\vec{f}_2$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{d}{dt} (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)$$

对 N 个质点系统，外力用 F ，内力（即质点之间的相互作用）用 f ，则第 i 及第 j 质点的运动方程

$$\vec{F}_i + \sum_{i \neq j} \vec{f}_{ij} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

$$\vec{F}_j + \sum_{i \neq j} \vec{f}_{ji} = \frac{d\vec{p}_j}{dt}$$



对所有质点求和

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j} \vec{f}_{ij} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

内力和 $\sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j} \vec{f}_{ij} = 0$

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

和外力： $\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ 总动量： $\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_1^2 d\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

质点系的动量定理与质点动量定理形式一样，
但各量的含义却不同。

质点系的动量定理表明，一个系统总动量的变化仅决定于系统所受的外力，与系统的内力无关。即只有外力的冲量才能改变整个质点组的动量，内力的冲量虽然可以使个别质点的动量改变，但不能改变整个质点组的动量。

1.3.3 动量守恒定律 (law of conservation of momentum)

一、质点动量守恒定律

由质点的动量定理 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$

当合外力 $\vec{F} = 0$ 时 $\vec{P} = \text{常矢量}$

质点动量守恒定律：若质点所受合外力为零，
则质点的总动量不随时间改变

二、质点系动量守恒定律

由质点系的动量定理 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$

当和外力 $\vec{F} = 0$ 时 $\vec{P} = \text{常矢量}$ ，即： $\vec{P}_1 = \vec{P}_2$

其中 $\vec{p}_2 = \sum_i \vec{p}_{i2} = \sum_i m_i \vec{v}_{i2}$ $\vec{p}_1 = \sum_i \vec{p}_{i1} = \sum_i m_i \vec{v}_{i1}$

动量守恒定律：若系统所受合外力为零，则系统的总动量保持不变。

讨论：

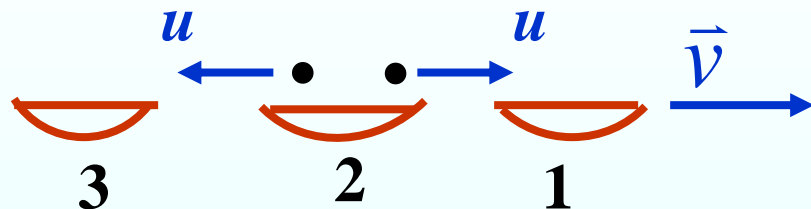
1. 当合外力为零，或外力与内力相比小很多（如爆炸过程），这时可忽略外力，仍可应用动量守恒。
2. 合外力沿某一方向为零，则该方向动量守恒

如：当 $F_x = 0$ $\sum_i P_{ix} = \text{常数}$

3. 只适用于惯性系
4. 比牛顿定律更普遍的最基本的定律，它在宏观和微观领域、低速和高速范围均适用。

例：三只质量均为 M 的小船鱼贯而行速率均为 v ，如中间小船以相对速率 u 向前后二船抛出质量均为 m 的物体，
求：二物体停在前后二船上以后三只小船速度各为多少？

解 1) 以小船(1)及 m 为研究对象运用动量守恒定律



$$Mv + m(v + u) = (M + m)v_1$$

$$v_1 = v + \frac{mu}{M + m}$$

2) 以小船(2)及 $2m$ 为研究对象

$$Mv = (M - 2m)v_2 + m(v + u) + m(v - u)$$

$$v_2 = v$$

3) 以小船(3)及 m 为研究对象

$$Mv + m(v - u) = (M + m)v_3 \quad v_3 = v - \frac{mu}{M + m}$$

例：水平光滑平面上有一小车，长度为 l ，质量为 M 。车上站有一人，质量为 m ，人、车原来都静止。若人从车的一端走到另外一端，问人和车各移动了多少距离？

解：人与车在水平方向受外力为零，水平方向动量守恒

$$m\vec{v} = -M\vec{V} \quad \vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{v}$$

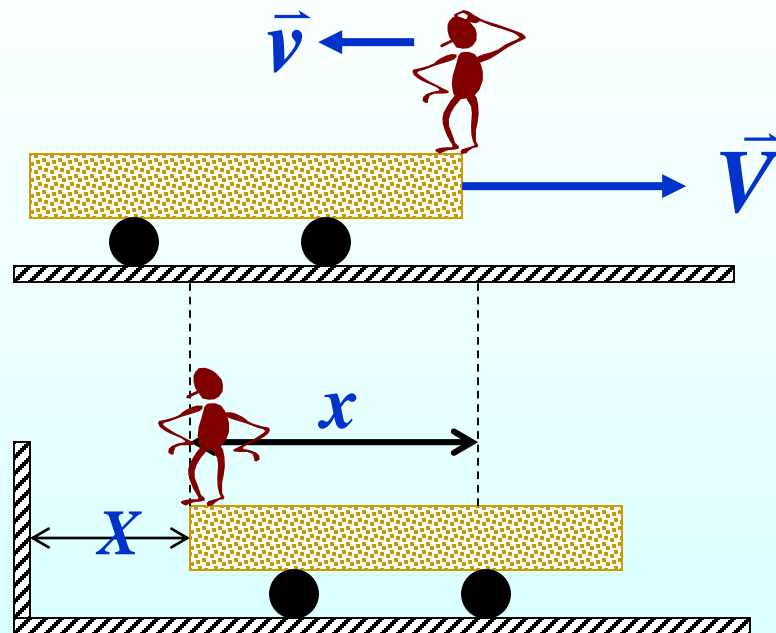
$$\vec{v}'_{\text{人对车}} = \vec{v}_{\text{人地}} - \vec{V}_{\text{车地}} = \vec{v} - \vec{V}$$

$$= \vec{v} + \frac{m}{M}\vec{v} = \frac{M+m}{M}\vec{v}$$

$$l = \int_0^t v'_{\text{人对车}} dt = \int_0^t \frac{M+m}{M} v dt$$

$$x = \int_0^t v dt = \frac{M}{M+m} l$$

$$X_{\text{牵}} = l_{\text{相}} - x_{\text{绝}} = \frac{m}{M+m} l$$



$$\vec{X}_{\text{牵}} = \vec{x}_{\text{绝}} - \vec{l}_{\text{相}}$$

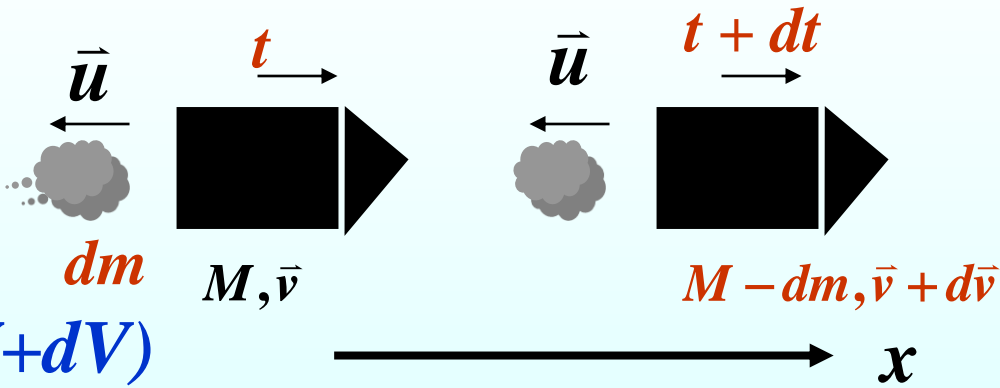
例：火箭在远离星球引力的星际空间加速飞行，因而不受任何外力的作用，设火箭某一时刻携带的燃料的质量为 M ，喷出的气体相对火箭的速率为 u ，且保持不变，求：火箭在任一时刻的速度。

解：初态动量 $P_0 = MV$

末态动量

火箭 $P_1 = (M - dm)(V + dV)$

气体 $P_2 = dm(V + dV - u)$



The diagram illustrates the rocket's state at two consecutive times, t and $t + dt$. At time t , the rocket has mass M and velocity \vec{v} . At time $t + dt$, the rocket's mass is $M - dm$ and its velocity is $\vec{v} + d\vec{v}$. A small mass dm of gas is ejected backward with a relative velocity \vec{u} (indicated by a leftward arrow). A horizontal axis x is shown below the rocket diagrams.

$$\vec{V}_{\text{气地}} = \vec{V}_{\text{气箭}} + \vec{V}_{\text{箭地}}$$

$$P_0 = P_1 + P_2 \quad MV = (M - dm)(V + dV) + dm(V + dV - u)$$

$$\cancel{MV} = \cancel{MV} - \cancel{Vdm} + \cancel{MdV} - \cancel{dmdV} + \cancel{Vdm} + \cancel{dmdV} - udm$$

$$MdV = udm$$

$$dm = -dM$$

$$MdV = -u dM$$

$$M dV = -u dM \quad dV = -\frac{u}{M} dM$$

$$\int_{V_0}^V dV = -u \int_{M_0}^M \frac{1}{M} dM$$

设 $t = 0$ 时，火箭速度为 V_0 ，质量为 M_0

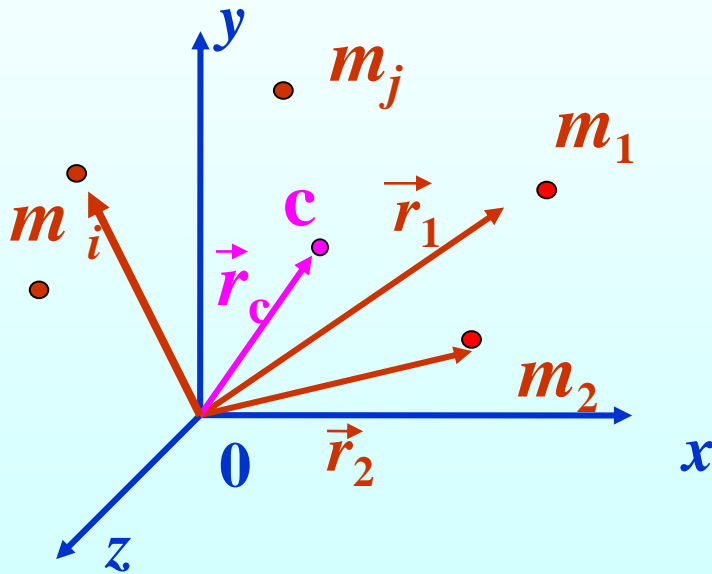
$$V = V_0 + u \ln \frac{M_0}{M}$$

火箭获得的推力为

$$F = M \frac{dV}{dt} = u \frac{dM}{dt}$$

1.3.4 质心 (center of mass)

质心的定义： 设质点系共有 N 个质点组成,各质点的质量分别为： m_1, m_2, \dots, m_N , 矢径分别为： $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ 则质心的矢径定义为：



$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{m}$$
$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{m}$$

质心位矢与坐标系的选取有关。
但质心相对于各质点的相对位置
是不会随坐标系的选择而变化的

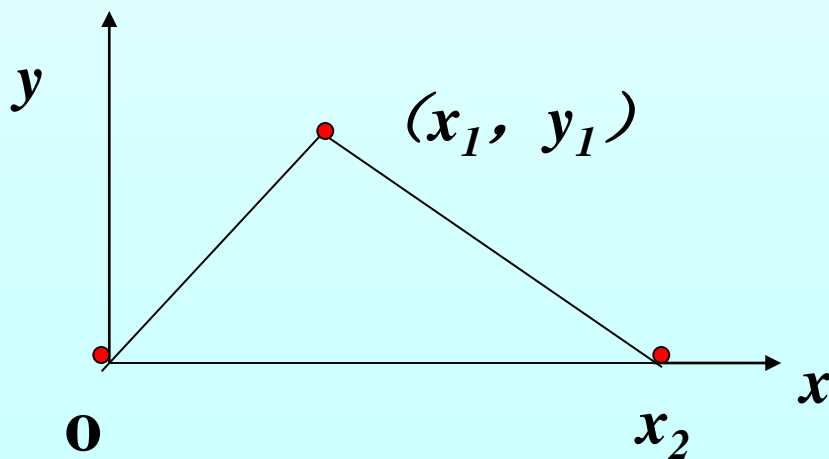
同理可写出 y 和 z 分量

对连续分布的物质，可以将其分为 N 个小质元

$$\text{由 } x_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{m} \quad x_c = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \Delta m_i}{m} = \frac{\int x dm}{m}$$

同理可写出 y 和 z 分量

例：任意三角形的每个顶点有一质点 m ，求质心。



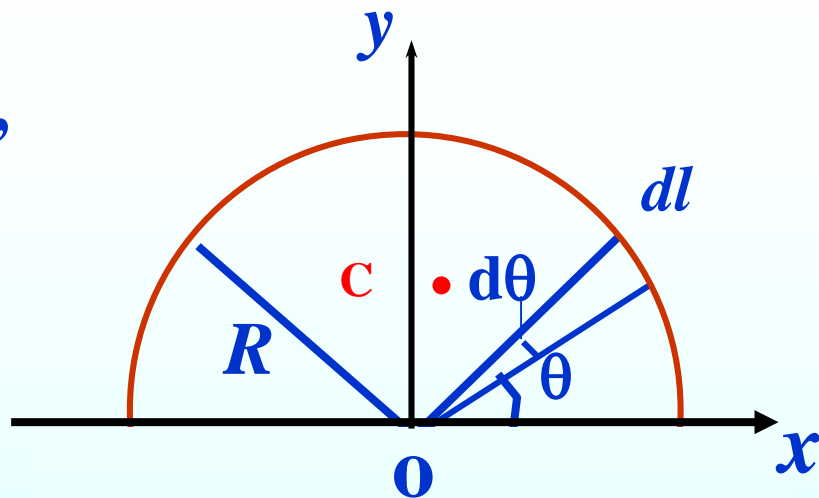
$$x_c = \frac{mx_1 + mx_2}{3m} = \frac{x_1 + x_2}{3}$$

$$y_c = \frac{my_1}{3m} = \frac{y_1}{3}$$

例：求均匀半圆铁环的质心（半径为 R ）。

解：取长度为 dl 的一段铁丝，
以 ρ_l 表示线密度

$$dm = \rho_l dl . \quad \rho_l = m / (\pi R)$$



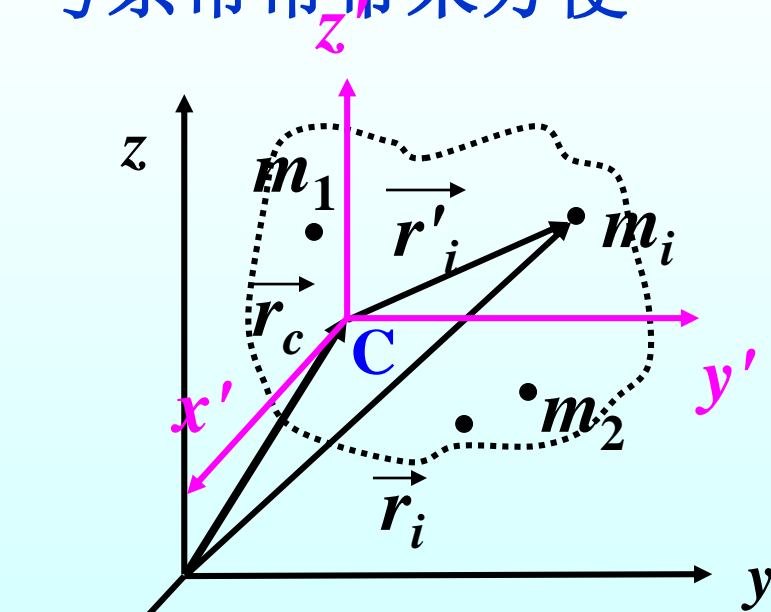
由对称性可知，质心C一定在 y 轴上， 即： $x_C=0$ ，

$$y_c = \frac{\int y dm}{m} = \frac{\int y \rho_l dl}{m} = \frac{\rho_l \int_0^\pi R \sin \theta \cdot R d\theta}{\pi R \rho_l} = \frac{2}{\pi} R$$

* 质心系

(center of mass frame)

由于质心的特殊性，在分析力学问题时，利用质心参考系常常带来方便



$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_c$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i' = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) = \mathbf{0}$$

求导得: $\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i' = 0$

质心系可能不是惯性系，但质心系特殊，动量守恒定律适用，而且，对于质心系系统总动量为零

质心系中的速度 $\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_c$ 零动量参考系

零动量参考系

质心运动定理

(theorem of the motion of center of mass)

质点系的动量

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \frac{m_i d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{dt} \\ &= \frac{d(m\vec{r}_c)}{dt} = m \frac{d\vec{r}_c}{dt} = m\vec{v}_c\end{aligned}$$

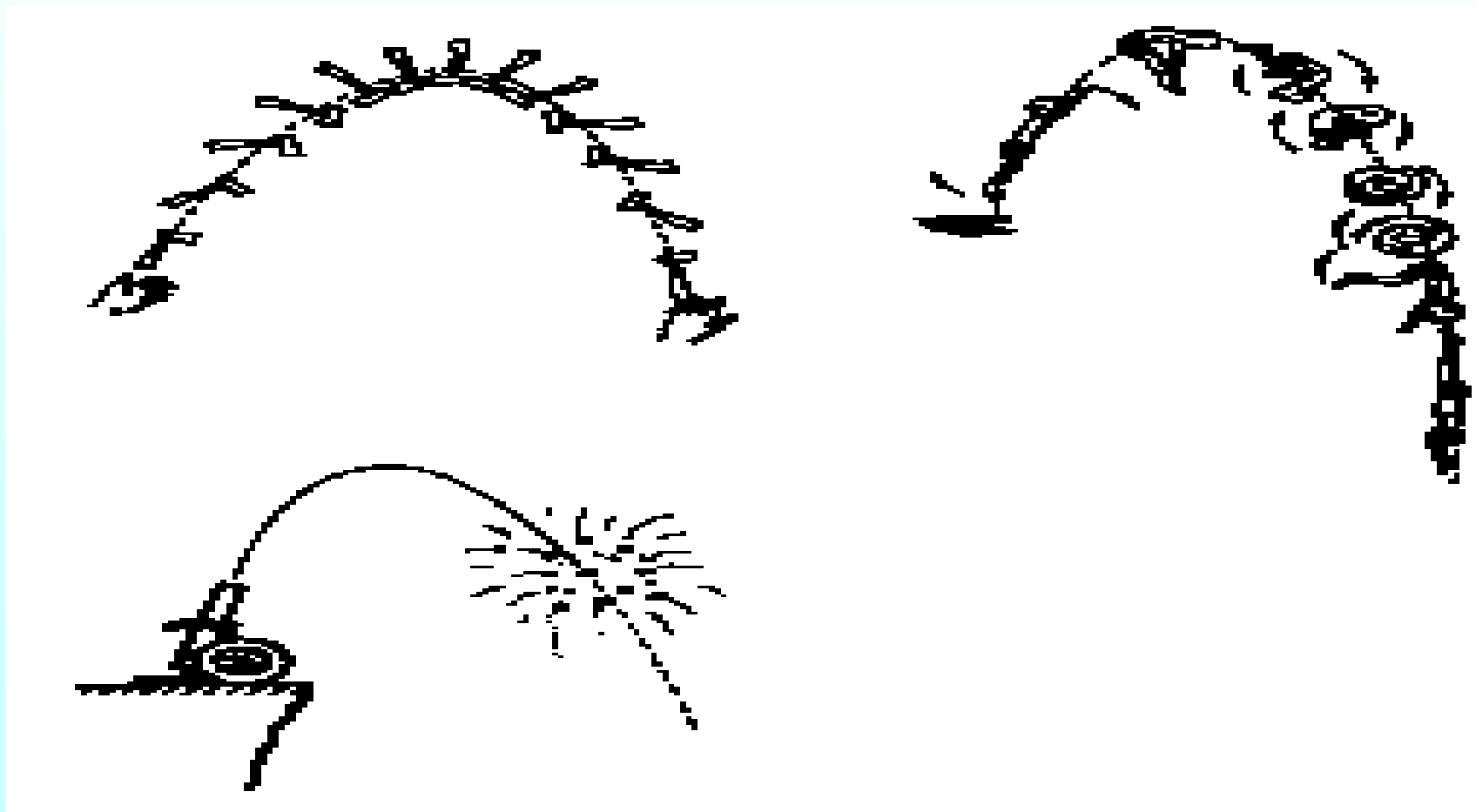
质点系的动量等于它的总质量与质心速度的乘积。

由质点系动量定理：
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} m\vec{v}_c = m\vec{a}_c$$

质点系所受合外力等于其总质量与质心加速度的乘积。
这就是质心运动定理。

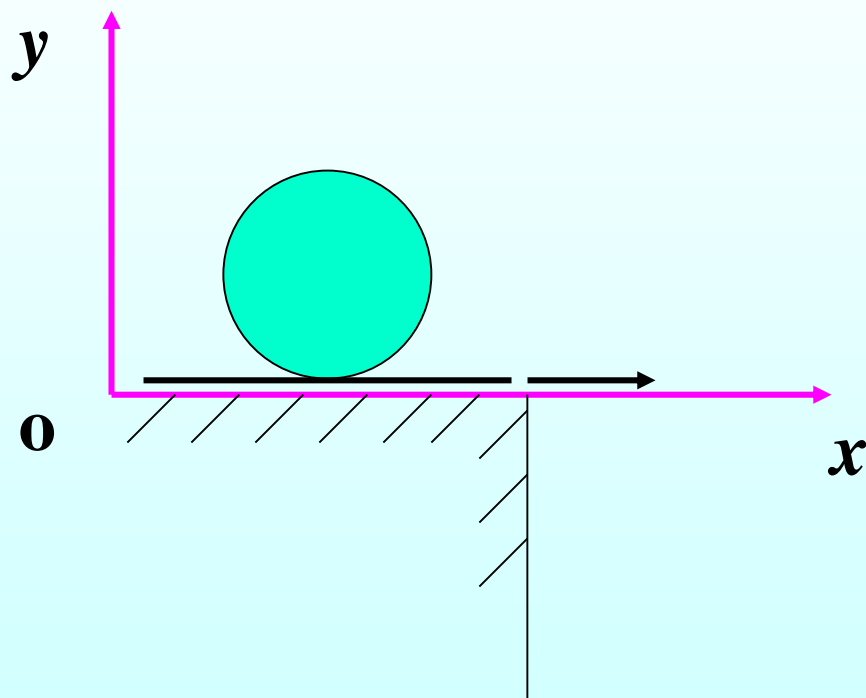
在有些情况下，质点系内各质点由于内力和外力的作用，运动情况可能很复杂，但质心的运动可能很简单，由质点系所受和外力决定。

这样质点系的运动可看成是把质量和力都集中在质心的一个质点的运动。



例：水平桌面上拉动纸，纸张上有一均匀球，球的质量 M ，纸被拉动时与球的摩擦力为 F ，求： t 秒后球相对桌面移动多少距离？

解：球移动的距离即为质心移动的距离



$$\vec{F} = M\vec{a}_c \quad a_c = \frac{F}{M}$$

两次积分得 $x_c = \frac{1}{2} \frac{F}{M} t^2$

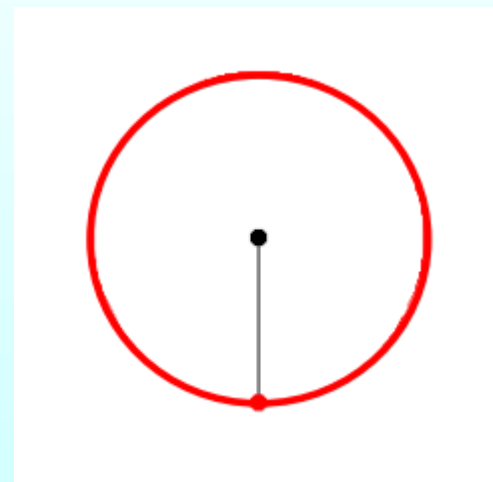
答：沿拉动纸的方向移动 $\frac{1}{2} \frac{F}{M} t^2$

1.4 角动量

1.4.1 质点的角动量

1.4.2 角动量定理

1.4.3 角动量守恒定律

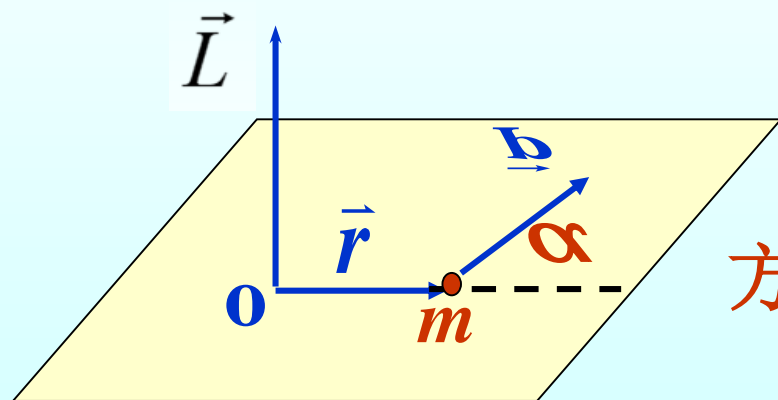


1.4.1 质点的角动量

一. 角动量矢量定义

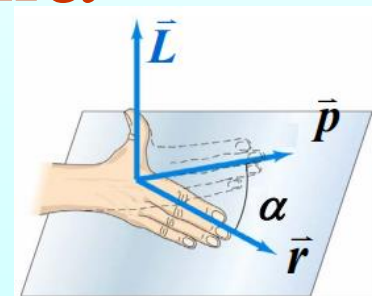
动量为 \vec{p} 的质点, 对惯性系中一固定点 O 的角动量定义为下述矢量积:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



大小: $L = mvr \sin \alpha$

方向: 右手螺旋法



当质点作圆周运动时 $L = m v r$

- 注意:
1. \vec{L} 的方向垂直于 \vec{r} 和 \vec{p} 所决定的平面。
 2. $\vec{r} \times \vec{p}$ 的顺序不能颠倒。

直角坐标系中 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad \vec{p} = p_x\hat{i} + p_y\hat{j} + p_z\hat{k}$$

$$\vec{L} = L_x\hat{i} + L_y\hat{j} + L_z\hat{k}$$

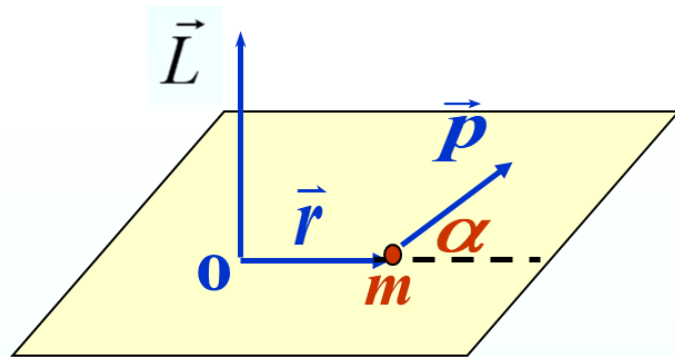
$$\left\{ \begin{array}{l} L_x = yp_z - zp_y \\ L_y = zp_x - xp_z \\ L_z = xp_y - yp_x \end{array} \right.$$

角动量的性质

1. 矢量性 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

2. 瞬时性 $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

3. 相对性。 \vec{r} 为质点到固定点O的位矢，相对不同点 \vec{r} 值不同，则 \vec{L} 也不同。

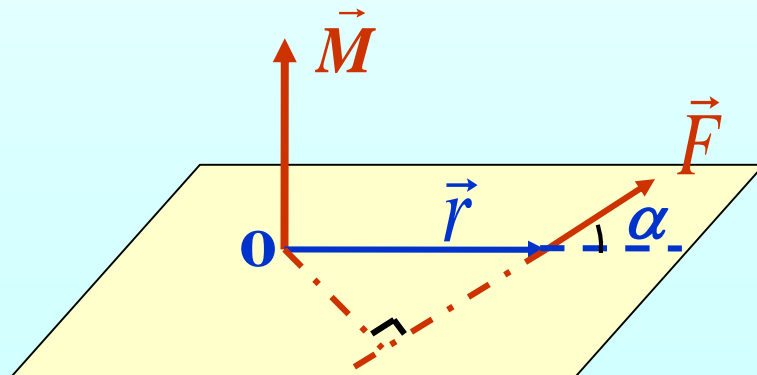


二. 力矩 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$|\vec{M}| = M = r \cdot F \cdot \sin(\vec{r} \cdot \vec{F})$$

$$= r \cdot F \cdot \sin \alpha$$

$$= F \cdot r_{\perp} \quad (r_{\perp} \text{ 为力臂})$$



方向: 右手螺旋法. 矢量性, 瞬时性, 相对性

1.4.2 角动量定理

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} & \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \\ & & &= \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{v} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}\end{aligned}$$

质点角动量定理 $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

质点对某一点的角动量随时间的变化率等于质点所受合外力对同一点的力矩。

有限长时间 $\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt}_{\text{冲量矩}} = \int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2} d\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$

冲量矩

上式表明在力矩的持续作用下质点角动量的变化。反映的是力矩在 Δt 时间内的累积效应。

1.4.3 角动量守恒定律

(law of conservation of angular momentum)

$$\text{当 } \vec{M} = 0 \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \vec{L} = \text{常矢量}$$

即： 如果对于某一固定点, 质点所受合外力矩为零, 则此质点对该固定点的角动量矢量保持不变.

关于合外力矩为零, 有二种情况:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

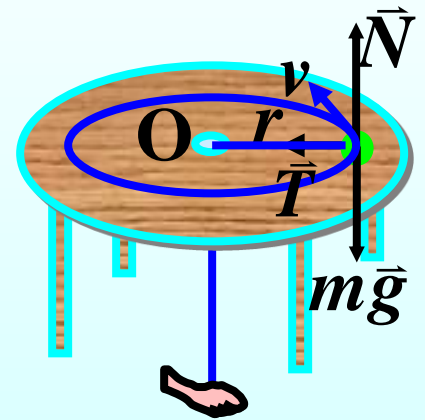
$$\text{或} \quad \vec{F} \neq 0 \quad \text{但} \quad \vec{F} // \vec{r} \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

[例] 在光滑桌面上开一小孔，把系在轻绳一端的小球放在桌面上，绳的另一端穿过小孔而执于手中。设开始时小球以速率 v_0 作半径为 r_0 的圆周运动 (图)，然后向下缓慢拉绳使小球的转动半径减为 r ，求这时小球的速率 v

解: $\vec{N} + m\vec{g} = 0 \quad \vec{T} // (-\vec{r})$

$$\vec{M} = 0$$

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$$

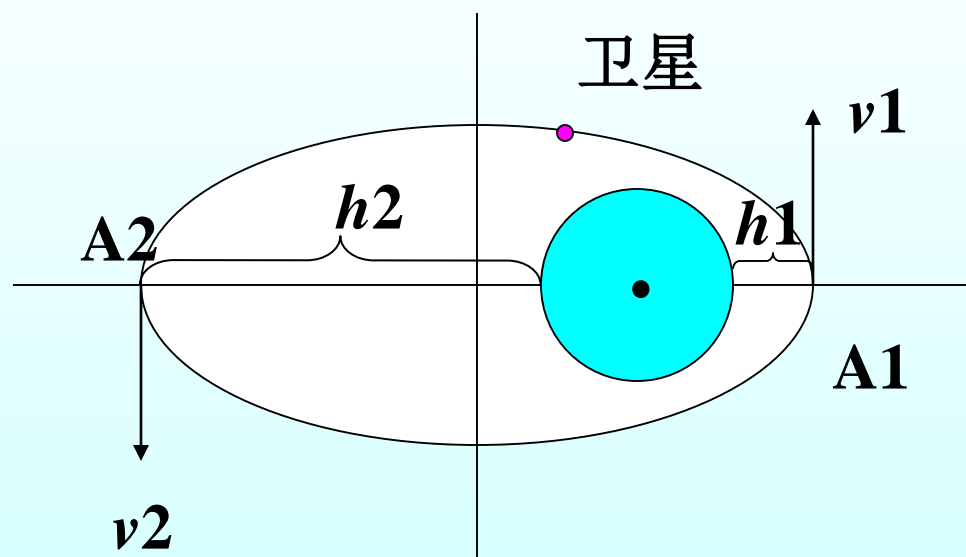


绳缓慢拉下，每一瞬时均可看作小球近似作圆周运动。

$$mv_0r_0 = mvr$$

$$v = \frac{v_0r_0}{r}$$

例：卫星绕地球沿椭圆轨道运行，地球的中心位于椭圆的一个焦点上，地球 $R=6378\text{km}$ ，卫星距地面的最近距离 $h_1=439\text{km}$ ，最远距离 $h_2=2384\text{km}$ ，卫星在近地点 A1 的速度 $v_1=8.10\text{km/s}$ ，求：卫星在远地点 A2 的速度 v_2 。



解：卫星在运动过程中受地球引力，力矩为零，因此角动量守恒。

$$\vec{L}_{A1} = \vec{L}_{A2}$$

在A1和A2两点 \vec{L} 方向相同

$$L_{A1} = L_{A2}$$

$$L_{A1} = rmv = (R + h_1)mv_1 \quad mv_1(R + h_1) = mv_2(R + h_2)$$

$$L_{A2} = rmv = (R + h_2)mv_2 \quad v_2 = \frac{(R + h_1)}{(R + h_2)}$$

质点系角动量定理

(theorem of angular momentum of system of particles)

由质点角动量定理

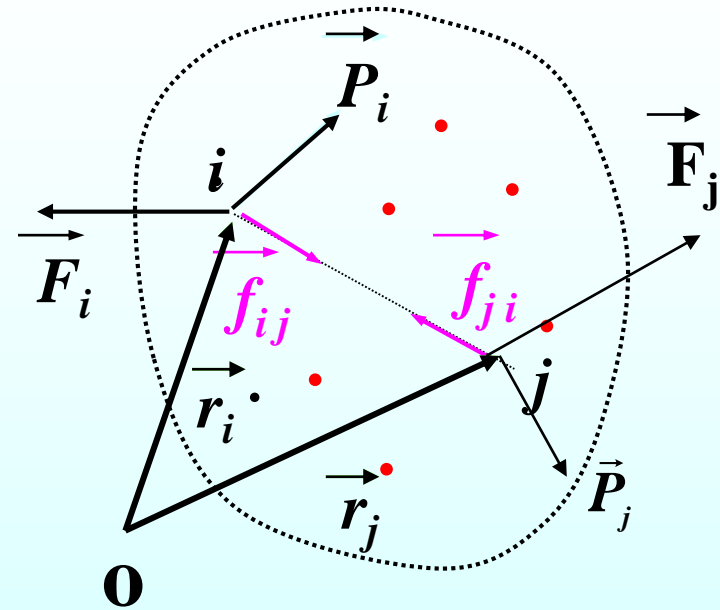
$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \sum_{i \neq j} \vec{f}_{ij}) = \frac{d\vec{L}_i}{dt}$$

$$\vec{M}_j = \vec{r}_j \times (\vec{F}_j + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ji}) = \frac{d\vec{L}_j}{dt}$$

内力矩

$$\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji}$$
$$= (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} = \vec{0}$$

$$\boxed{\sum_i \sum_{i \neq j} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} = 0} \quad \vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{L}_i \right) = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



质点系角动量定律 $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

对于有限时间 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$

上两式形式上与质点角动量定律相似但涵义不同

分量式: $M_x = \frac{dL_x}{dt} \quad M_y = \frac{dL_y}{dt} \quad M_z = \frac{dL_z}{dt}$

质点系对某轴的角动量随时间的变化率等于质点系中各质点所受外力对同一轴的力矩的代数和。

质点系角动量守恒定律

$$\vec{M} = 0 \quad \sum_i \vec{L}_{i1} = \sum_i \vec{L}_{i2}$$

例：质量分别为 m_1 和 m_2 的两个小钢球固定在一个长为 a 的轻质硬杆的两端，杆的中点有一轴使杆在水平面内自由转动，杆原来静止。另一泥球质量为 m_3 ，以水平速度 v_0 垂直于杆的方向与 m_2 发生碰撞，碰后二者粘在一起。设 $m_1=m_2=m_3$ ，求碰撞后转动的角速度。

解：考虑此质点系。相对于杆的中点，在碰撞过程中合外力矩为零，因此对此点的角动量守恒。

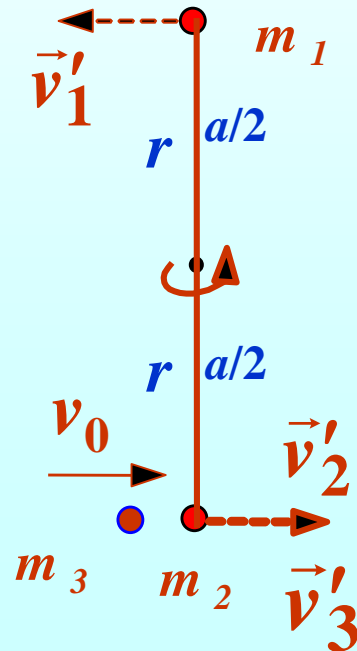
碰撞前 $m_3 \vec{r} \times \vec{v}_0$

碰撞后 $m_3 \vec{r} \times \vec{v}'_3 + m_2 \vec{r} \times \vec{v}'_2 + m_1 \vec{r} \times \vec{v}'_1$

$$m_3 r v_0 = m_3 r v'_3 + m_2 r v'_2 + m_1 r v'_1$$

$$r = \frac{a}{2} \quad v'_1 = v'_2 = v'_3 = \frac{a}{2} \omega$$

$$\omega = \frac{2v_0}{3a}$$



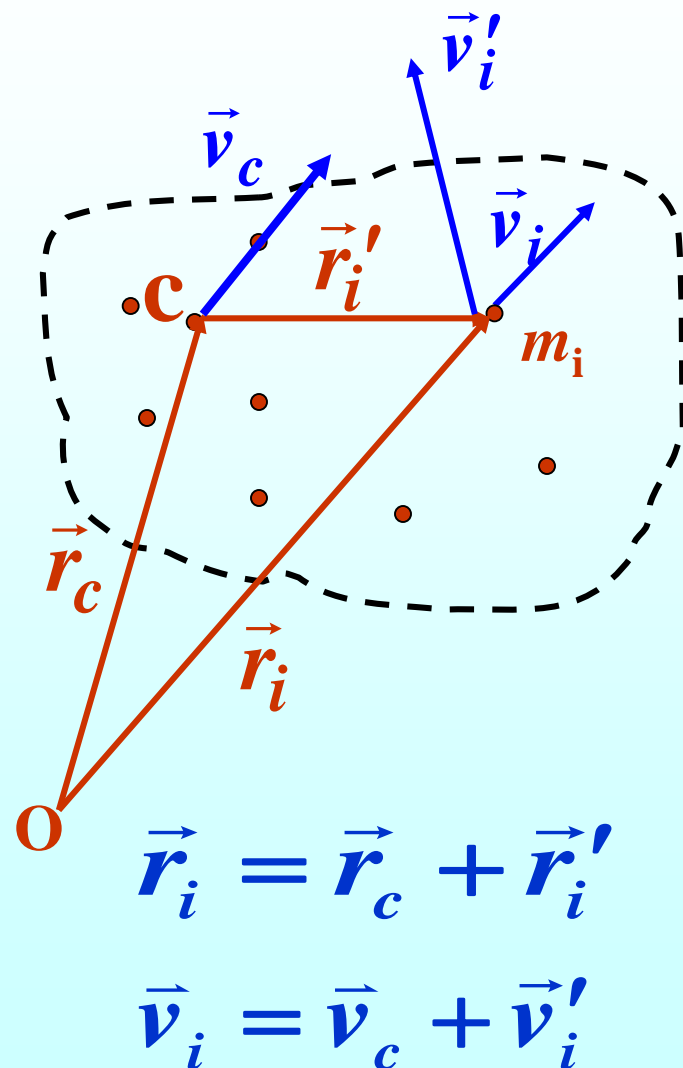
质心参考系中的角动量

设：O为惯性系中的一点
C为质点系的质心

质心相对于O的位矢及速度如图
质点*i* 相对于O和C的位矢如图
质点*i* 相对于惯性系和质心系的
速度如图

质点系对O点的角动量

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\ &= \sum_i m_i (\vec{r}_c + \vec{r}_i') \times (\vec{v}_c + \vec{v}_i')\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \vec{L} &= \sum_i m_i (\vec{r}_c + \vec{r}_i') \times (\vec{v}_c + \vec{v}_i') \\
 &= \underbrace{\vec{r}_c \times (m\vec{v}_c)}_{\vec{p}} + \underbrace{\vec{r}_c \times \sum_i m_i \vec{v}_i'}_{\text{零}} + \underbrace{(\sum_i m_i \vec{r}_i') \times \vec{v}_c}_{\text{零}} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_i'}_{\vec{L}_c = \sum_i \vec{L}_i'}
 \end{aligned}$$

$$\vec{L} = \vec{r}_c \times \vec{p} + \vec{L}_c$$

质点系对惯性系中某点的角动量等于质心对该点的角动量（叫轨道角动量）加上质点系对质心的角动量

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d(\vec{r}_c \times \vec{p})}{dt} + \frac{d\vec{L}_c}{dt} & \frac{d\vec{r}_c}{dt} \times \vec{P} &= \vec{v}_c \times m\vec{v}_c = \vec{0} \\
 &= \vec{r}_c \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}_c}{dt} \times \vec{p} + \frac{d\vec{L}_c}{dt} & &= \vec{r}_c \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{L}_c}{dt} = \vec{M}
 \end{aligned}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_c \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{L}_c}{dt}$$

比较



$$\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum (\vec{r}_i' + \vec{r}_c) \times \vec{F}_i$$

$$= \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i + \vec{r}_c \times \sum \vec{F}_i = \underbrace{\sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i}_{\vec{M}_c} + \vec{r}_c \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

质点系对质心的角动量定理

$$\vec{M}_c = \frac{d\vec{L}_c}{dt}$$

注意： $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ 只适用于惯性系中某点

$\vec{M}_c = \frac{d\vec{L}_c}{dt}$ 质心参考系可以是非惯性系，此式也成立。