§7.4 关系的性质

定义 设R是A上的二元关系

（1）若$\forall x(x\in A\rightarrow <x, x>\in R)$，则称$R$是**自反的**；

（2）若$\forall x(x\in A\rightarrow <x, x>\notin R)$，则称$R$是**反自反的**。

例 恒等关系 I_A与全域关系E_A都是自反的。

例 设 $A=\{1,2,3\}$，以及A上的3个二元关系

$$R_1=\{<1, 1>,<2, 2>\}，R_2=\{<1, 3>\}$$

$$R_3=\{<1, 1>,<2, 2>,<3, 3>,<1, 2>\}$$

判断这些关系是自反的，还是反自反的？

定义 设R是A上的二元关系

（1）若$\forall x \forall y(x,y \in A \wedge <x, y> \in R \rightarrow <y, x> \in R)$，则称$R$是**对称的**；

（2）若

$\forall x \forall y(x,y \in A \wedge <x, y> \in R \wedge <y, x> \in R \rightarrow x=y)$

则称R是**反对称的**。

例 设$A=\{1,2,3\}$，以及A上的4个二元关系

$R_1=\{<1, 1>,<2, 2>\}$，$R_2=\{<1, 1>,<2, 1>,<1, 2>\}$

$R_3=\{<1, 2>,<1, 3>\}$，$R_4=\{<1, 2>,<1, 3>,<2, 1>\}$

判断这些关系是对称的，还是反对称的？

定义 设R是A上的二元关系，若

$$\forall x \forall y \forall z(x,y,z \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R \rightarrow \langle x,z\rangle \in R)$$

则称R是**传递的**。

例 设$A=\{1,2,3\}$，以及A上的3个二元关系

$R_1=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

$R_3=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

判断这些关系是否传递？

判断二元关系的性质是一个重要工作。可以利用集合运算、关系矩阵与关系图等多种方法

定理 设R是A上的二元关系，则

（1）R为自反的当且仅当 $I_A \subseteq R$；

（2）R为反自反的当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$;

（3）R为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$;

（4）R为反对称的当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$；

（5）R为传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$。

例 设R_1, R_2是A上的二元关系，证明：

（1）若R_1, R_2是自反的(对称的)，则$R_1 \cup R_2$也是自反的(对称的)；

（2）若R_1, R_2是传递的，则$R_1 \cap R_2$也是传递的。

证明（1）若R_1, R_2是自反的，则

$$I_A \subseteq R_1，\ I_A \subseteq R_2$$

因此得

$$I_A \subseteq R_1 \cup R_2$$

所以 $R_1 \cup R_2$也自反。

若R_1, R_2是对称的，则

$$R_1 = R_1^{-1}，\ R_2 = R_2^{-1}$$

因此得

$$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = R_1 \cup R_2$$

所以 $R_1 \cup R_2$也对称。

（2）若R_1, R_2是传递的，则

$$R_1 \circ R_1 \subseteq R_1，\quad R_2 \circ R_2 \subseteq R_2$$

因此得

$$(R_1 \cap R_2) \circ (R_1 \cap R_2)$$

$$= R_1 \circ R_1 \cap R_1 \circ R_2 \cap R_2 \circ R_1 \cap R_2 \circ R_2$$

$$\subseteq R_1 \cap R_1 \circ R_2 \cap R_2 \circ R_1 \cap R_2$$

$$\subseteq R_1 \cap R_2$$

所以 $R_1 \cap R_2$也传递。 ∎

有限集上二元关系的性质判断：

1．关系矩阵M_R

（1）R为自反的当且仅当M的主对角元全为1；

（2）R为反自反的当且仅当M的主对角元全为0 ；

（3）R为对称的当且仅当M 是对称矩阵；

（4）R为反对称的当且仅当M的元素 r_{ij}与 r_{ji}不同时为1，这里 $i\neq j$；

（5）R为传递的当且仅当对 M^2中任意为1 的元素，M中对应位置的元素也为1。

2．关系图 G_R

（1）R为自反的当且仅当G的每个顶点都有环；

（2）R为反自反的当且仅当G的每个顶点都没有环；

（3）R为对称的当且仅当G的任意两顶点之间或没有边，或有两条方向相反的边；

（4）R为反对称的当且仅当G的任意两顶点之间至多有一条边；

（5）R为传递的当且仅当G中若从顶点x_i到顶点x_k有边且从顶点x_k到顶点x_j有边，则从顶点x_i到顶点x_j有边。

例 由给定的3元集合上的3个二元关系的关系图，判断对应二元关系的性质：