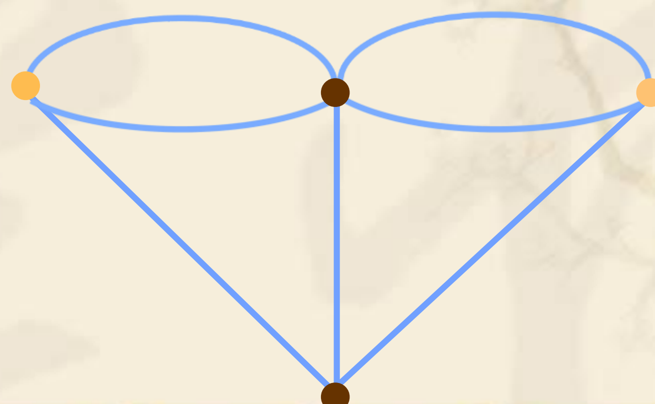
§15.1 欧拉图


A
岛
C
岸
D
岸
B
岛
怎样散步才能
不重复地走过
每座桥？



定义 通过图的全部边及全部顶点的简单通路（简单回路）称为**欧拉通路**（**欧拉回路**）；有欧拉回路（欧拉通路）的图称为**欧拉图**（**半欧拉图**）。

设G为欧拉图，则G中有欧拉回路，设之为

$$C=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots v_{m-2}e_{m-1}v_{m-1}e_mv_0$$

其中边$e_1,e_2,\cdots,e_m$互不相同。因C包含了图G的所有边和所有顶点，故G是连通的。任取其上顶点v_i，设其在C上出现k_i次

$$(v_i=)v_{i_1}=v_{i_2}=\cdots=v_{i_{k_i}}$$

于是，在C上有

$$\cdots e_{i_1} v_{i_1} e_{i_1+1} \cdots e_{i_2} v_{i_2} e_{i_2+1} \cdots e_{i_{k_i}} v_{i_{k_i}} e_{i_{k_i+1}} \cdots$$

故每个顶点$v_{i_s}(= v_i)$都涉及2条边或1个环。因C包含了图G的所有边和所有顶点，且2条边和1个环对顶点度的贡献都是2，于是$d(v_i)=2k_i$，即G没有奇度点。

由此得

定理 设G是一个无向图，则G是欧拉图的充要条件是G连通且无奇度点。

证明 因为平凡图自然满足定理的结论，所以设G为非平凡图。

必要性：根据上一页讨论得到的结果。

充分性：先引入记号

简单回路 $C=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots v_{l-1}e_lv_le_{l+1}v_0$中的一段$v_se_{s+1}v_{s+1}e_{s+2}v_{s+2}\cdots v_{t-1}e_tv_t$称为C-$(v_s,v_t)$段。

因G为非平凡连通图，故G的边数$m\geq1$。下面对m做归纳法：

$m=1$时，G是1阶图，有1个环。这个环就是G的欧拉回路，故G是欧拉图。

设$m \le k$ $(k \ge 1)$时，G是欧拉图。

若$m=k+1$，设C是G的一个圈。从G中删除C上的边得到生成子图G'。因为删除C上的边，使得G中的相应顶点的度减少2，故G'也没有奇度点。设G'有p个连通分支$G_1, G_2, \cdots, G_p$，若G_i是平凡图，则因其顶点在C上，故行遍C的边时，也必然行遍该点，所以下面假设$G_1, G_2, \cdots, G_p$都是非平凡的。

因为每个G_i都没有奇度点、连通，且所含边数均小于等于k，所以根据归纳假设，每个G_i都是欧拉图。设C_i是G_i的欧拉回路。因G连通，故每个C_i都与C有公共顶点，设为 v_i。不妨设$v_1, v_2,\cdots, v_p$顺时针分布在C上，则

$v_1\to C_1\to v_1\to C\text{-}(v_1,v_2)$段$\to v_2\to C_2\to v_2\to$

$C\text{-}(v_2,v_3)$段$\to v_3 \to\cdots\to v_p\to C_p\to v_p\to C\text{-}(v_p,v_1)$段$\to v_1$

是包含G的所有边和所有顶点的简单回路，即欧拉回路。因此，G是欧拉图。▌

推论 设G是一个无向图，则G是半欧拉图的充要条件是G连通且恰有两个奇度点。

一笔画问题由此解决，哥尼斯堡七桥问题由此解决。

定理 设D是一个有向图，则D是欧拉图的充要条件是G连通且每个顶点的出度都与入度相等。

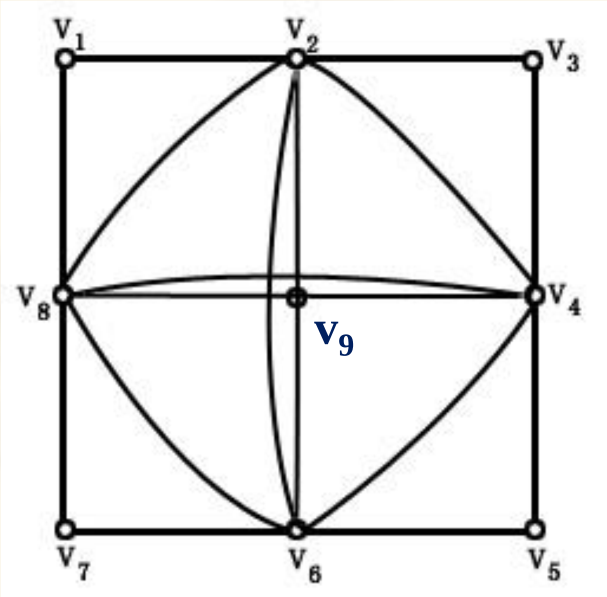
定理 非平凡连通图G是欧拉图的充要条件为G是圈的边不重并。

例 设D是一个有向图，则D是半欧拉图的充要条件是D连通且存在$u,v\in V(D)$，使

$$d^+(u)=d^-(u)+1，d^-(v)=d^+(v)+1$$

而对 $\forall w=V(D)-\{u,v\}$，均有$d^+(w)=d^-(w)$。

例 考虑图G是否为欧拉图？



C_1：$v_1v_2\cdots v_8v_1$，　C_2：$v_2v_4v_6v_8v_2$

C_3：$v_2v_9v_6v_2$，　C_4：$v_4v_9v_8v_4$

$$G=C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4$$

例 设G是一个非平凡不含环的无向欧拉图，则G不含割边。

证明 因为G是欧拉图，故G存在欧拉回路C'，设$C'=v_1v_2\cdots v_lv_1$。

任取$e\in E(G)$，因C'包含G的所有边，故存在$v_i,v_{i+1}\in V(G)$，使$e=(v_i,v_{i+1})$。此时

$$C'-e=v_{i+1}v_{i+2}\cdots v_lv_1v_2\cdots v_i$$

是$G-e$的欧拉通路，故$G-e$连通，即e不是割边。▌

Fleury算法：

设G是非平凡无向欧拉图

步骤1： $v_0 \in V(G)$，令$P_0 = v_0$

步骤2： 设已得$P_i = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots v_{i-1} e_i v_i$，在

$$E(G)-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$$

中选与v_i关联的边e_{i+1}，要求：

除非别无选择，否则e_{i+1}不能是

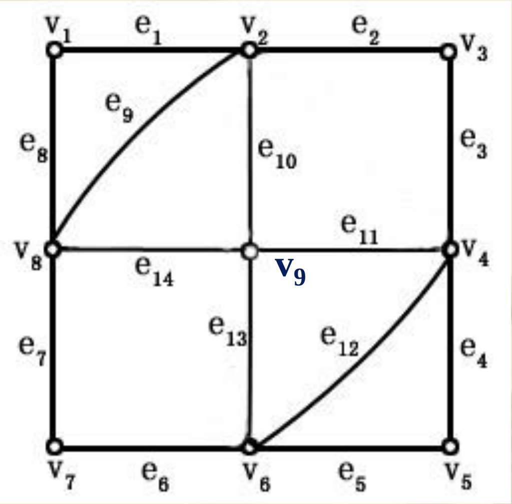
$$G_i = G-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$$

中的割边

步骤3：重复步骤2，当无法进行时，算法停止。

最后得到的$P_m = v_0e_1v_1e_2\ldots e_mv_m(=v_0)$必是欧拉回路。

例 用Fleury算法求下图的欧拉回路。



解 选择v_2为初始点：

步骤1：$P_0=v_2$，$G_0=G$

步骤2：$P_1=v_2e_2v_3$，$G_1=G-\{e_2\}$

步骤3：$P_2=v_2e_2v_3e_3v_4$, $G_2=G-\{e_2,e_3\}$

步骤4：$P_3=v_2e_2v_3e_3v_4e_{11}v_9$, $G_3=G-\{e_2,e_3,e_{11}\}$

步骤5：$P_4=v_2e_2v_3e_3v_4e_{11}v_9e_{10}v_2$

$G_4=G-\{e_2,e_3,e_{11},e_{10}\}$

步骤6：$P_5=v_2e_2v_3e_3v_4e_{11}v_9e_{10}v_2e_1v_1$

$G_5=G-\{e_2,e_3,e_{11},e_{10},e_1\}$

步骤7：$P_6=v_2e_2v_3e_3v_4e_{11}v_9e_{10}v_2e_1v_1e_8v_8$

$G_6=G-\{e_2,e_3,e_{11},e_{10},e_1,e_8\}$

构成P_7时，可选e_7或e_{14}，但不能选e_9，因为e_9是割边。

步骤8：$P_7=v_2e_2v_3e_3v_4e_{11}v_9e_{10}v_2e_1v_1e_8v_8e_{14}v_9$

$G_7=G-\{e_2,e_3,e_{11},e_{10},e_1,e_8,e_{14}\}$

步骤9：$P_8=v_2e_2v_3e_3v_4e_{11}v_9e_{10}v_2e_1v_1e_8v_8e_{14}v_9e_{13}v_6$

$G_8=G-\{e_2,e_3,e_{11},e_{10},e_1,e_8,e_{14},e_{13}\}$

构成P_9时，可选e_5或e_{12}，但不能选e_6，因为e_6是割边。

步骤10：$P_9=v_2e_2v_3e_3v_4e_{11}v_9e_{10}v_2e_1v_1e_8v_8e_{14}v_9e_{13}v_6e_{12}v_4$

$G_9=G-\{e_2,e_3,e_{11},e_{10},e_1,e_8,e_{14},e_{13},e_{12}\}$

步骤11：$P_{10}=v_2e_2v_3e_3v_4e_{11}v_9e_{10}v_2e_1v_1$
$e_8v_8e_{14}v_9e_{13}v_6e_{12}v_4e_4v_5$

$G_{10}=G-\{e_2,e_3,e_{11},e_{10},e_1,e_8,e_{14},e_{13},e_{12},e_4\}$

步骤12：$P_{11}=v_2e_2v_3e_3v_4e_{11}v_9e_{10}v_2e_1v_1$

$e_8v_8e_{14}v_9e_{13}v_6e_{12}v_4e_4v_5e_5v_6$

$G_{11}=G-\{e_2,e_3,e_{11},e_{10},e_1,e_8,e_{14},e_{13},e_{12},e_4,e_5\}$

步骤13：$P_{12}=v_2e_2v_3e_3v_4e_{11}v_9e_{10}v_2e_1v_1$

$e_8v_8e_{14}v_9e_{13}v_6e_{12}v_4e_4v_5e_5v_6e_6v_7$

$G_{12}=G-\{e_2,e_3,e_{11},e_{10},e_1,e_8,e_{14},e_{13},e_{12},e_4,e_5,e_6\}$

步骤14：$P_{13}=v_2e_2v_3e_3v_4e_{11}v_9e_{10}v_2e_1v_1$

$e_8v_8e_{14}v_9e_{13}v_6e_{12}v_4e_4v_5e_5v_6e_6v_7e_7v_8$

$G_{13}=G-\{e_2,e_3,e_{11},e_{10},e_1,e_8,e_{14},e_{13},e_{12},e_4,e_5,e_6,e_7\}$

步骤15：$P_{14}=v_2e_2v_3e_3v_4e_{11}v_9e_{10}v_2e_1v_1$

$e_8v_8e_{14}v_9e_{13}v_6e_{12}v_4e_4v_5e_5v_6e_6v_7e_7v_8e_9v_2$