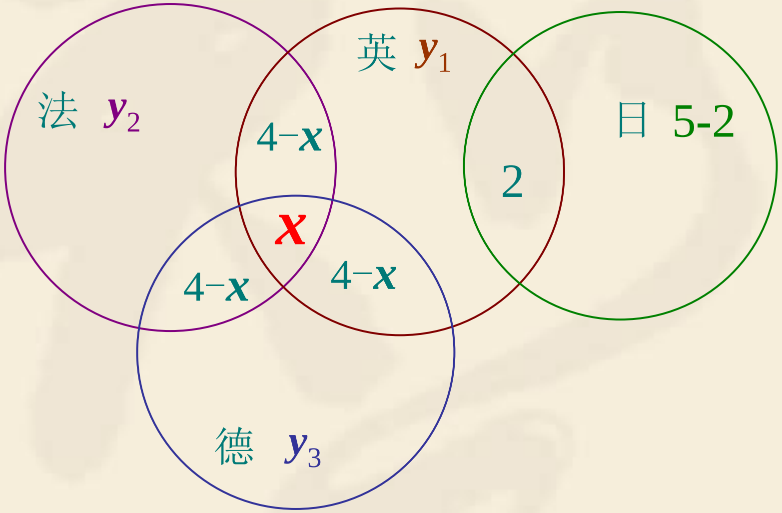
§6.3 有穷集的计数

文氏图：用矩形区域表示全集E，用矩形区域内的圆形区域表示E的子集。

设T是有穷(有限集)，用$|T|$表示T包含的元素个数。

例 已知24人中，会英语的有13人，会日语的有5人，会德语的有10人，会法语的有9人。其中，同时会英语和日语的有2人，同时会英语和德语、同时会英语和法语、同时会德语和法语的各有4人；此外，会日语的人不会德语和法语。求只会英语、日语、德语、法语中一种语言的人数和同时会三种语言的人数。

解 设同时会三种语言有x人，只会只会英语、法语、德语中一种语言的人数分别为y_1, y_2, y_3，



则根据文氏图可得

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + 3(4 - x) + x = 24 - 5 \\ y_1 + 2(4 - x) + x + 2 = 13 \\ y_2 + 2(4 - x) + x = 9 \\ y_3 + 2(4 - x) + x = 10 \end{cases}$$

解出 $x=1$，$y_1=4$，$y_2=2$，$y_3=3$。 $\blacksquare$

定理（**容斥原理**）设S为有穷集，$P_1, P_2, \cdots, P_n$是n个性质，S中的每个元素或具有性质P_i或不具有性质P_i，二者必居其一。由S中具有性质P_i的元素构成的集合记为A_i，则S中不具有性质$P_1, P_2, \cdots, P_n$的元素个数为

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}\right| = |S| - \sum_{i_1}|A_{i_1}| + \sum_{i_1,i_2}|A_{i_1}\cap A_{i_2}| - \sum_{i_1,i_2,i_3}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| + \cdots + (-1)^n\left|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\right|$$

这里，$\overline{A_i}$表示由S中不具有性质P_i的元素构成的集合，$\sum_{i_1}|A_{i_1}|$表示和式取遍所有A_i，$\sum_{i_1,i_2}|A_{i_1}\cap A_{i_2}|$表示和式取遍任意两个$A_i$, A_j，…。

推论 S中至少具有一个性质的元素个数为

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n| &= \sum_{i_1}|A_{i_1}|-\sum_{i_1,i_2}|A_{i_1}\cap A_{i_2}| \\ &\quad +\sum_{i_1,i_2,i_3}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}|-\cdots \\ &\quad +(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\end{aligned}$$