§ 10.3 循环群与置换群

定义 设G是一个群，若存在$a\in G$，使得

$$G=\{a^k \mid k\in\mathbb{Z}\}$$

则称G是**循环群**，记为 $<a>$ 。称a为G的**生成元**。

注

① 循环群是交换群；

② $|a|=n \Rightarrow G=\{e, a, a^2,\cdots, a^{n-1}\}$， $|G|=n$；

③ a为无限阶元 $\Rightarrow$ $G=\{e, a^{\pm 1}, a^{\pm 2},\cdots\}$是无限群；

④ 设$G=<a>$是n阶有限群，则 $G\cong <Z_n,\oplus_n>$；

⑤ 设$G=<a>$是无限群，则$G\cong <\mathbb{Z},+>$。

定理 设$G=<a>$是一个循环群，则

（1）G是无限群 $\Rightarrow G=<a>=<a^{-1}>$

（2）G是n阶有限群 $\Rightarrow G=<a^k>, 1\le k<n, (k,n)=1$

例 设$G=<a>$，$|a|=12$，则$G=\{e, a, a^2, \cdots, a^{11}\}$

由此得$G=<a>=<a^5>=<a^7=<a^{11}>$。

例 设$G=<Z_9,\oplus_9>$，则

$$G=<1>=<2>=<4>=<5>=<7>=<8>$$

定理 ① 循环群的子群也是循环群；

② 无限循环群只有一个有限子群；

③ n阶有限循环群对n的每个正因子d，G恰含一个d阶子群。

设$G=\langle a\rangle$，$|a|=n$，则 $|a^{n/d}|=d$。

例 求8阶循环群$G=\langle a\rangle$的全部子群。

解 因$|G|=8$，故$|a|=8$。8的全部因子为1, 2, 4, 8，它们对应的子群分别为

1阶子群：$<e> = \{e\}$，2阶子群：$<a^4> = \{e, a^4\}$

4阶子群：$<a^4> = \{e, a^2, a^4, a^6\}$

8阶子群： $<a> = \{e, a, a^2, \cdots, a^7\}$ ∎

例 求6阶循环群 $<Z_6,\oplus_6>$ 的全部子群。

解 因为 $Z_6=\{0,1,2,3,4,5\}$，故根据6的正因数1, 2, 3, 6，可得全部子群为

1阶子群：$<0> = \{0\}$，2阶子群：$<3> = \{0,3\}$

3阶子群：$<2> = \{0,2,4\}$

6阶子群：$<1> = \{0,1,2, \cdots,5\}$ ∎

定义 设$S=\{1,2,\cdots,n\}$，σ：$S\to S$是S上的双射函数，则称σ为S上的n**元置换**，记为

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

注

① 每个置换σ都有逆置换σ^{-1}；

② n元置换σ,τ的复合$\sigma\circ\tau$也是n元置换，称为σ与τ的**乘积**，记为$\sigma\tau$；

③ 置换的乘积不可换。

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&2&1&4\end{pmatrix},\ \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&1&2&5\end{pmatrix}$$

$$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&3&4&2\end{pmatrix},\ \tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&3&4\end{pmatrix}$$

定义 设$S=\{1,2,\cdots,n\}$，σ是S上的n元置换。若

$$\sigma(i_1)=i_2,\ \sigma(i_2)=i_3,\ \cdots,\ \sigma(i_{k-1})=i_k,\ \sigma(i_k)=i_1$$

且σ 保持S中其它元素不变，则称σ为S上的**k阶轮换（循环）**，记为$\sigma=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$。

注

① 当k=2时，称σ为**对换**；

② 若两个轮换作用在不同元素上，则称它们是**不相交**的。

定理 任一置换均可分解为互不相交轮换之积。

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&3&4&1&2&7&8&6\end{pmatrix}$$

$$=(1\quad 5\quad 2\quad 3\quad 4)(6\quad 7\quad 8)$$

例 $(i,i_2,\cdots,i_k)=(i_1,i_2)(i_1,i_3)\cdots(i_1,i_k)$

推论 任一置换均可分解为对换的乘积，对换的个数为偶(奇)数时称为**偶(奇)置换**。

定理 设S ={1, 2, ⋯, n}，则S上全体n元置换的集合关于置换的乘法构成群，称为n元**对称群**，记为S_n。

例 取S={1,2,3}，则3元对称群为

S_3={(1)(2)(3), (1 2)(3), (1 3)(2), (2 3)(1) , (1 2 3), (1 3 2)}

定义 n元对称群S_n的子群为n**元置换群**。

例 2×2方格图的点对称性与轴对称性。

解 方格图绕中心点顺时针旋转：

1	2
4	3

0度 $\sigma_1=(1)$

90度 $\sigma_2=(1\ 2\ 3\ 4)$

180度 $\sigma_4=(1\ 3)(2\ 4)$ 270度 $\sigma_3=(1\ 4\ 3\ 2)$

方格图绕对边中点连线翻转180度：

$\sigma_5=(1\ 2)(3\ 4)$，$\sigma_6=(1\ 4)(2\ 3)$

方格图绕对角线翻转180度：

$\sigma_7=(2\ 4)$，$\sigma_8=(1\ 3)$

令

$$G=\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8\}$$

则G是4元对称群S_4的子群，即G是4元置换群。 ∎

定理（Pólya）设$G=\{\sigma_1, \sigma_2,\cdots, \sigma_g\}$是$n$个对象上的一个置换群。现用$m$种颜色涂染这$n$个对象，则不同染色方案数为

$$l=\frac{1}{|G|}\left(m^{c(\sigma_1)}+m^{c(\sigma_2)}+\cdots+m^{c(\sigma_g)}\right)$$

其中$c(\sigma_j)$表示置换σ_j的分解式中不相交循环的个数。