第一章 随机事件与概率

第一节 随机试验

第二节 样本空间与随机事件

第三节 频率与概率

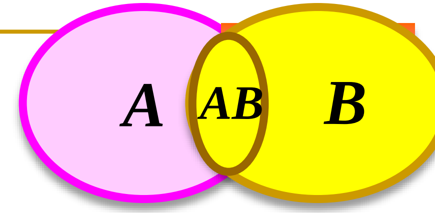
第四节 等可能概型(古典概型)

第五节 条件概率

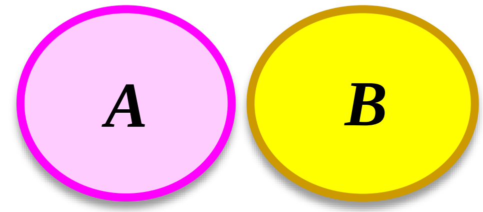
第六节 独立性

教学计划：3次课-9学时

随机事件的关系及其运算



随机事件的三种关系：



包含： $A \subset B$ → A发生必导致B发生

互斥：$AB = \Phi$ → A与B不同时发生

对立：$A \bigcup B = S, A \bigcap B = \Phi$ → A, B中有且仅有一个发生

随机事件的三种运算：

和事件 $A \cup B$ 发生 $\Leftrightarrow$ A, B至少有一个发生 $AB \neq \Phi$

$\Leftrightarrow$ A, B有且仅有一个发生 $AB = \Phi$

积事件 AB 发生 $\Leftrightarrow$ A 与 B 同时发生

差事件 $A - B$ 发生 $\Leftrightarrow$ A 发生而 B 不发生 $A - B = A\bar{B}$

德. 摩根律： $\overline{A \bigcup B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ $\overline{AB} = \bar{A} \bigcup \bar{B}$

概率的公理化定义

复习

设E是随机试验，S是它的样本空间，若对于E的每一个事件A都赋予一个实数 $P(A)$，它满足以下三个条件：

(1) 非负性： 对于每一事件A有： $0 \le P(A) \le 1$

(2) 规范性： $P(S)=1$

(3) 可列可加性：设 $A_1, A_2, \cdots A_k \cdots$ 是两两互斥的事件，

$$\text{则 } P(\underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cdots}_{\text{有且仅有一个发生}}) = P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k)+\cdots$$

则称 $P(A)$ 为事件A发生的概率。

第一章 随机事件与概率

教学计划：3次课-9学时

第一章 随机事件与概率

第三节 频率与概率

- 频率 概率的统计定义
- 概率的公理化定义
- 概率的性质

三. 概率的性质

性质1 $P(\Phi)=0$

理解： 因为不可能事件相应的子集是空集，在每次试验中都不可能有样本点出现，因此每次试验中都不可能发生，所以 $P(\Phi)=0$

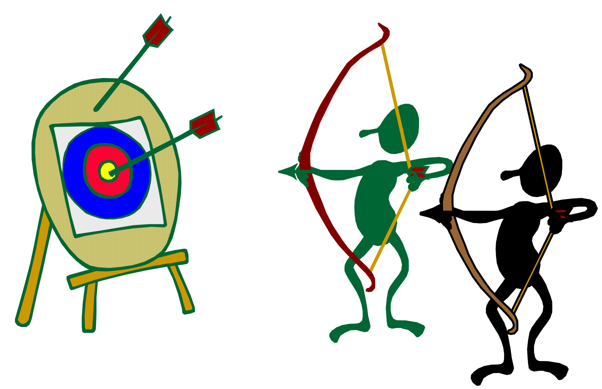
注： $A=\Phi \Rightarrow P(A)=0$

$A=\Phi \not\Leftarrow P(A)=0$

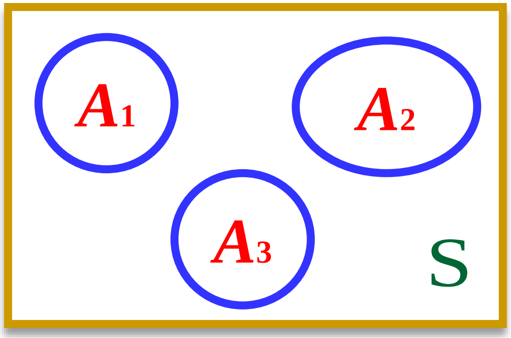
例：$A=\{$击中靶心$\}$，则

$$P(A)=\frac{1}{\infty}=0$$

但事件A是可以发生的.



三. 概率的性质



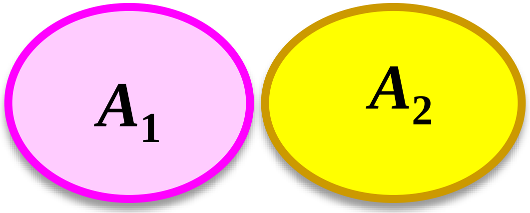
性质2（有限可加性）

若 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 两两互斥，则有：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

有且仅有一个发生

例：若 A_1, A_2 互斥，则有：



$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

$$A_1 A_2 = \Phi$$

(3) 可列可加性：设 $A_1, A_2, \cdots A_k \cdots$ 是两两互斥的事件，

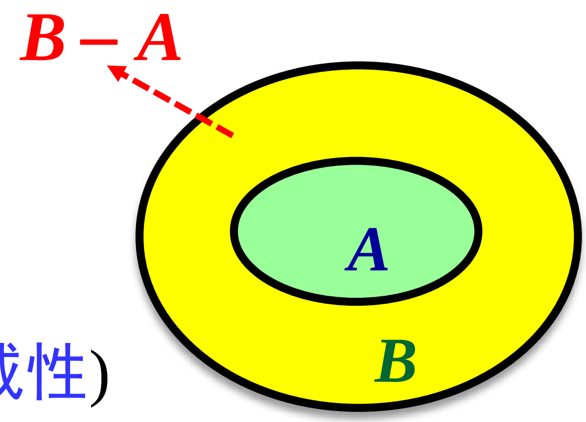
则 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k) + \cdots$

三. 概率的性质

性质3 若 $A \subset B$，则有

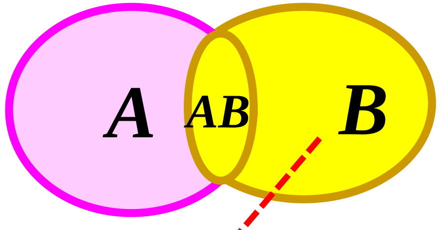
(1) $P(B-A) = P(B) - P(A)$ (可减性)

$P(B) \geq P(A)$ (单调性)



$A \subset B$

$A \not\subset B$



若 $A \not\subset B$，则有

(2) $P(B-A) = P(B) - P(AB) = P(B\bar{A})$

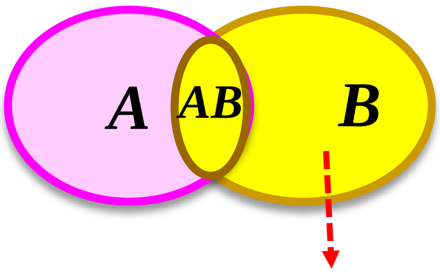
$B-A = B-AB$

$= B\bar{A}$

三. 概率的性质

性质4 (加法定理)　设 A, B为任意两个事件, 则有:

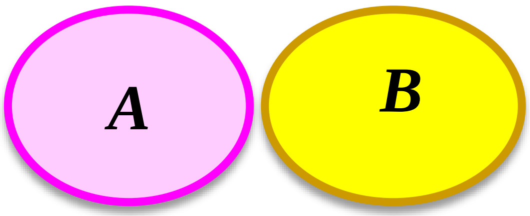
$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



$$B - A = B - AB$$

性质2 (有限可加性)

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B)$$



$$AB = \Phi$$

注: 性质2是性质4的特殊情况.

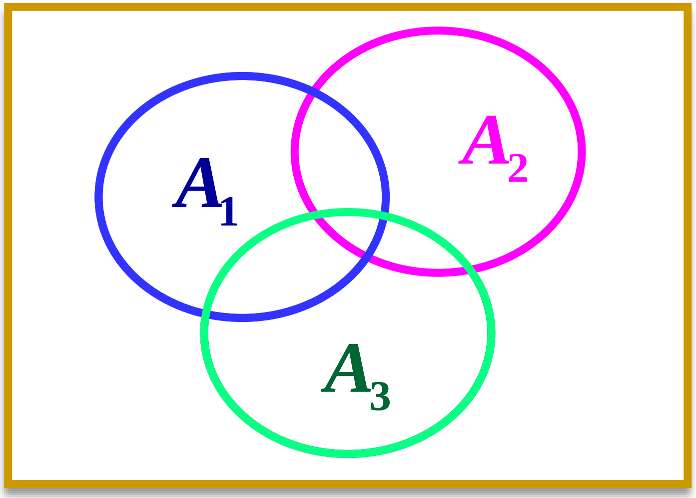
三. 概率的性质

性质4 (加法定理)　设 A, B 为任意两个事件,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

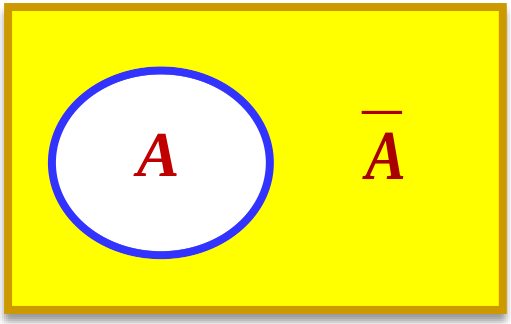
注：➢ 性质4可推广到三个事件:

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)$$
$$-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$



三. 概率的性质

性质5　对任意事件A有：$P(\overline{A})=1-P(A)$



$$A\cup\overline{A}=S,\ A\overline{A}=\Phi$$

注：性质5在概率的计算上很有用，如果正面计算事件A的概率不容易，而计算其对立事件的概率较易时，可以先计算 $P(\overline{A})$，再计算 $P(A)$ 。

示例: 将一颗骰子抛掷4次，问至少有一次“6”点的概率是多少？

解:

令事件A={至少有一次“6”点}={有1次“6”点}

$\bigcup$ {有2次“6”点} $\bigcup$ {有3次“6”点} $\bigcup$ {有4次“6”点}

此时，直接计算A 的概率较麻烦，所以可以转化为：

$\bar{A}$={4次抛掷中都没有“6”点}

由于将一颗骰子抛掷 4 次, 共有: $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$ 种等可能结果,

而事件 $\bar{A}$ 发生的结果数共有: $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ 种

因此: $P(\bar{A}) = \dfrac{625}{1296} = 0.482$ 于是: $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0.518$

小结

三. 概率的性质

性质1 $P(\Phi)=0$

性质2 若 A_1, A_2 互斥，$P(A_1 \cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$

性质4 一般情况，$P(A_1 \cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)=$$

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

性质3 若 $A \subset B$ ，则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

若 $A \not\subset B$ ，则有 $P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B\bar{A})$

性质5 $P(\bar{A})=1-P(A)$

练习

1. 已知 $P(B)=0.3,\ P(A\cup B)=0.6$, 求 $P(A\overline{B})$

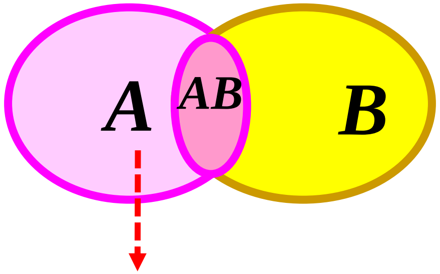
解:

$$\because 0.6=P(A\cup B)=P(A)+\overset{0.3}{P(B)}-P(AB)$$

$$\therefore P(A)-P(AB)=0.3$$

而 $A\overline{B}=A-AB$

$$\therefore P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.3$$



$A-B=A\overline{B}$

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$$

2. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4,\ P(AB)=0,\ P(AC)=P(BC)=1/16,$

则 $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=$ <u>3/8</u>

解:

$$\because ABC\subset AB,\qquad \therefore P(ABC)\le P(AB)=0,\ \therefore P(ABC)=0,$$

$$\text{又}\because \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$$

$$\therefore P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)$$

$$=1-[P(A)+P(B)+P(C)-\underset{0}{P(AB)}-P(AC)-P(BC)+\underset{0}{P(ABC)}]$$

$$=1-(\frac{3}{4}-\frac{2}{16}+0)$$

$$=\frac{3}{8}$$

注: $P(AB)=0 \not\Rightarrow AB=\Phi\Rightarrow ABC=\Phi\Rightarrow P(ABC)=0$

3. 已知 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$, 且 $P(A)=p$, 则 $P(B)=$ $\underline{\quad 1-p \quad}$

解:

$$\cancel{P(AB)}=P(\overline{A}\,\overline{B})$$

$$=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$

$$=1-P(A)-P(B)+\cancel{P(AB)}$$

$$\therefore P(B)=1-P(A)=1-p$$

4. 已知 $P(AB)=0$, 则[C]

(A) A, B 互斥 ×

(B) AB 是不可能事件 ×

(C) AB 未必是不可能事件 √

(D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$ × $P(AB)=P(A)P(B)$

$\because P(AB)=0 \cancel{\Rightarrow} AB=\Phi$

5. 设当事件A, B同时发生时，事件C必发生，则[B]

(A) $P(C) \le P(A) + P(B) - 1$

(B) $P(C) \ge P(A) + P(B) - 1$ √

(C) $P(C) = P(AB)$

(D) $P(C) = P(A \cup B)$

解：

$\because AB \subset C, \ \therefore P(AB) \le P(C)$

又$\because \ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \le 1$

$\therefore P(AB) \ge P(A) + P(B) - 1$

$\therefore P(C) \ge P(AB) \ge P(A) + P(B) - 1$

第一章 随机事件与概率

第三节 频率与概率

- 频率 概率的统计定义
- 概率的公理化定义
- 概率的性质

要求　　熟练掌握概率的性质

第一章 随机事件与概率

第一节 随机试验

第二节 样本空间与随机事件

第三节 频率与概率

第四节 等可能概型(古典概型)

第五节 条件概率

第六节 独立性

第一章 随机事件与概率

第四节 古典概型

- 古典型随机试验(等可能概型)
- 古典概型中事件概率的计算公式
- 古典概型举例

一. 古典型随机试验（等可能概型）

如果随机试验 E 的样本空间S具有：

(1) 有限性： 样本空间的样本点只有有限个;

(2) 等可能性：在每次试验中,每个基本事件发生的可能性相同,

则称随机试验E为古典型随机试验, 也称等可能概型。

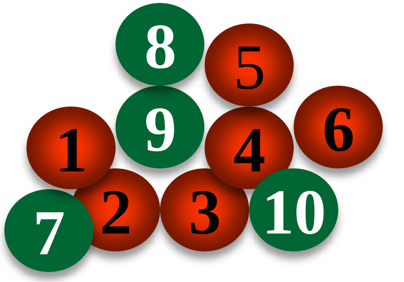
示例：

袋子中装有10个大小，形状完全相同的球，编号1-10.

E: 把球搅匀，蒙上眼睛，从中任取一球.

$S=\{1, 2, 3,\ldots,10\}$

问题： 这一试验是否是等可能概型？



示例：

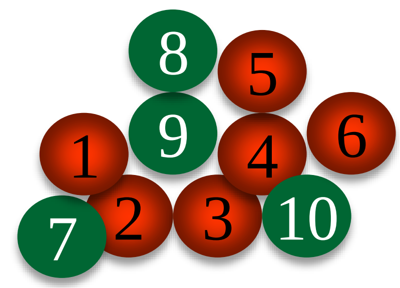
袋子中

E: 把球

S ={1,

“等可能性”是一种假设，在实际应用中，应该根据实际情况去判断各基本事件发生的等可能性。在许多场合，由对称性和均衡性，一般可以直观认为基本事件的发生是等可能的。

分析： 因为抽取时, 这些球是完全平等的, 故没有理由认为10个球中的某一个会比另一个更容易取得.



也就是说，10个球中的任一个被取出的机会是相等的，均为1/10.

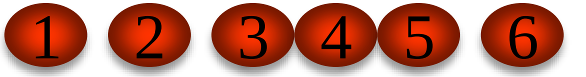
所以，这一试验是古典概型(等可能概型).

示例

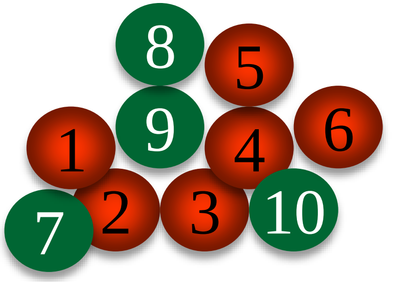
记 A ={摸到红球}　　$P(A)$=?

={1, 2, 3, 4, 5, 6}

S ={1, 2, 3,…,10}



显然：$P(A) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{A\text{中样本点数}}{S\text{中样本点数}}$



➢计算时实际上是将“比值”转化为“概率”

10个球中的任一个被取出的机会都是1/10

E: 掷两颗骰子,观察出现的点数

(1, 2)

(2, 1)

问题：这一试验是否是等可能概型？

分析： (1) 若将两颗骰子看作是不同的,分别叫做骰子*A*, 和骰子*B*, 则本试验是可重复的排列问题

$$S=\{(i,j)\mid i,j=1,2,\cdots,6\}$$

样本点个数=36

$$\begin{aligned}=\{&(1,1),(1,2)\cdots(1,6)\\&(2,1),(2,2)\cdots(2,6)\\&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\&(6,1),(6,2)\cdots(6,6)\}\end{aligned}$$

由对称性, 每个样本点出现是等可能的, 是1/36.

所以，这一试验是等可能概型。

E: 掷两颗骰子,观察出现的点数

问题：这一试验是否是等可能概型？

分析： (2) 若将两颗骰子看作是相同的, 于是(1,2)和(2,1)是一个样本点,则本试验是可重复的组合问题

$$S=\{(i,j)\mid 1\le i\le j\le 6\}$$

样本点个数=21

$$
\begin{aligned}
=\{&(1,1),(1,2)\cdots(1,6)\\
&(2,1),(2,2)\cdots(2,6)\\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
&(6,1),(6,2)\cdots(6,6)\}
\end{aligned}
$$

由于非对称性, 样本点出现不是等可能的。

所以，这一试验不是等可能概型。

第一章 随机事件与概率

第四节 古典概型

- 古典型随机试验(等可能概型)
- 古典概型中事件概率的计算公式
- 古典概型举例

二. 古典概型中事件概率的计算公式

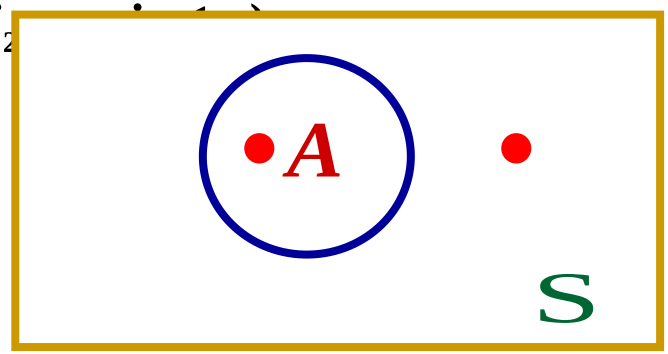
设E是古典随机试验，S是它的样本空间， $S=\left\{e_1,e_2,\cdots,e_n\right\}$,

若事件A包含 k 个基本事件，即 $A=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k}\}$

$(1\le i_1<i_2$

则事件 A 的概率：

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{中基本事件数}}{S\text{中基本事件数}}$$



➢直观理解：

$P(A)=$ 在一次试验中,事件A发生的可能性大小

$=$ 在一次试验中,子集A中有样本点出现的可能性大小

$$=\frac{k}{n}$$

第一章 随机事件与概率

第四节 古典概型

- 古典型随机试验(等可能概型)
- 古典概型中事件概率的计算公式
- 古典概型举例

例1. 设有30件产品,其中有4件是次品, 现从中任取3件,

求： **(1)** 恰有 2 件次品的概率

(2) 至少有1件次品的概率

$$30\text{件}\begin{cases}4\text{件次品}\\26\text{件正品}\end{cases}$$

解： **(1)** 设 A ={任取3件恰有2件是次品}

n：从30件产品中任取3件的取法数：C_{30}^{3}

"等可能性"是一种假设，在实际问题中, 通常是由对称性和均衡性，直观判断基本事件发生是否是等可能的。

例1. 设有30件产品,其中有4件是次品, 现从中任取3件,

求: (1) 恰有 2 件次品的概率

(2) 至少有1件次品的概率

30件 $\begin{cases} 4\text{件次品} \\ 26\text{件正品} \end{cases}$

解: (1) 设 A ={任取3件恰有2件是次品}

n: 从30件产品中任取3件的取法数: C_{30}^{3}

k: 恰有2件次品,1件正品的取法数: $C_4^2 C_{26}^1$

从而: $$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{C_4^2 C_{26}^1}{C_{30}^3}=\frac{156}{4060}\approx 0.038$$

n与k的计数方法必须一致

(2) 设 B = { 任取3件至少有1件次品}

30件 $\begin{cases} 4\text{件次品} \\ 26\text{件正品} \end{cases}$

解法1:

n: C_{30}^{3}

k: 任取3件至少有1件次品 ——

恰有1件，2件，3件次品三种情况，

故取法数为: $C_4^1 \cdot C_{26}^2 + C_4^2 \cdot C_{26}^1 + C_4^3 \cdot C_{26}^0$

从而: $$P(B) = \frac{k}{n} = \frac{C_4^1 \cdot C_{26}^2 + C_4^2 \cdot C_{26}^1 + C_4^3 \cdot C_{26}^0}{C_{30}^3}$$

$$= \frac{1460}{4060} \approx 0.36$$

(2) 设 B ={任取3件至少有1件次品}

$\overline{B}$ ={任取3件没有1件次品}

30件 $\begin{cases} 4件次品 \\ 26件正品 \end{cases}$

解法2：

n : C_{30}^{3}

k : 没有1件次品的取法数为：C_{26}^{3}

从而: $$P(\overline{B}) = \frac{k}{n} = \frac{C_{26}^{3}}{C_{30}^{3}}$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{C_{26}^{3}}{C_{30}^{3}} = \frac{1460}{4060} \approx 0.36$$

例2 盒中有6张面值相同的债券,其中有2张中奖债券, 现从中任取两次,每次取一张,考虑两种取法:

$$6\text{张}\begin{cases}2\text{张中奖债券}\\4\text{张无奖债券}\end{cases}$$

(1) 有放回地取**:** (放回抽样)

第一次取出观察后放回盒中，混合均匀后再取第二次

(2) 无放回地取**:** (不放回抽样)

第一次取出后不放回盒中, 第二次从剩余的债券中再取一张

求: 分别就两种抽样方式, 求取到的两张都是中奖债券的概率.

解:

设 A ={取到的两张都是中奖债券}

6张 $\begin{cases}\text{2张中奖债券}\\ \text{4张无奖债券}\end{cases}$

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

(1) 有放回地抽取:

n: 第一次取是从盒中 6 张中任取一张，第二次再从盒中取，仍是从 6 张中任取一张，故

从6张债券中任取2张的取法数: $6\times6=36$ (种)

k: 中奖债券有 2 张，第一次取有 2 张可供抽取,第二次取仍有 2 张可供抽取，故

取到的2张都是中奖债券的取法数: $2\times2=4$ (种)

从而: $P(A)=\frac{k}{n}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}=0.111$

(2) 不放回地抽取: $P(A)=\frac{k}{n}$

6张 $\begin{cases} \text{2张中奖债券} \\ \text{4张无奖债券} \end{cases}$

n: 从6张债券中任取2张的取法数: $6\times5=30$

k: 取到的2张都是中奖债券的取法数: $2\times1=2$

从而: $P(A)=\frac{k}{n}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}=0.067$

注: "不放回地抽取两次,每次取一张" 相当于"一次抽取两张"

故本题, $P(A)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}=0.067$

n与k的计数方法必须一致

例3 有 r 个人,设每个人的生日是365天的任何一天是等可能的,

试求：至少有两人同生日的概率.

$$P(\bar{A}) = \frac{k}{n}$$

解： 令 A ={r人中至少有两人同生日}

则 $\bar{A}$ ={ r 个人的生日都不同}

n： r个人生日的排列总数： $365 \cdot 365 \cdots 365 = (365)^r$

k： r个人生日都不同的排列数： $365 \cdot 364 \cdots (365-r+1) = P_{365}^r$

$$P(\bar{A}) = \frac{P_{365}^r}{(365)^r}$$

则有: $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \dfrac{P_{365}^r}{(365)^r}$

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{P_{365}^{r}}{(365)^{r}}$$

美国数学家伯格米尼曾经做过一个别开生面的实验：在一个盛况空前、人山人海的世界杯足球赛赛场上，他随机地在某看台上召唤了22个球迷，请他们分别写下自己的生日，结果竟发现其中有两人同生日.

$$\because P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{P_{365}^{r}}{(365)^{r}}=0.476\ (r=22)$$

这个概率不算小，因此它的发生不值得奇怪. 计算后发现，这个概率随着球迷人数的增加而迅速地增加，如下表所示：

$$P(A)=1-\frac{P_{365}^{r}}{(365)^{r}}$$

统计表

人数	至少有两人同生日的概率
20	0.411
21	0.444
22	0.476
23	0.507
24	0.538
30	0.706
40	0.891
50	0.970
60	**0.994**

所有这些概率都是在假定一个人的生日在 365天的任何一天是等可能的前提下计算出来的. 实际上,这个假定并不完全成立，实际概率比表中给出的还要大．当人数超过23人时，打赌说至少有两人同生日是有利的.

第一章 随机事件与概率

第四节 古典概型

- 古典型随机试验(等可能概型)
- 古典概型中事件概率的计算公式
- 古典概型举例

要求　熟练地计算古典概型的概率

第一章 随机事件与概率

第一节 随机试验

第二节 样本空间与随机事件

第三节 频率与概率

第四节 等可能概型(古典概型)

第五节 条件概率

第六节 独立性

第一章 随机事件与概率

第五节 条件概率

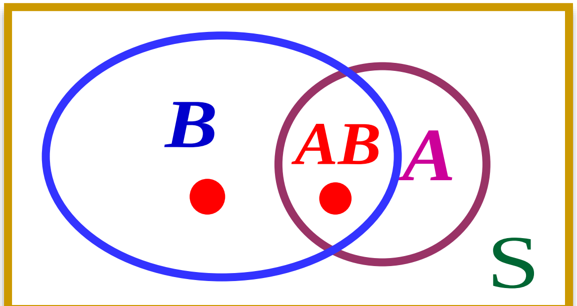
- 条件概率
- 乘法定理
- 全概率公式
- 贝叶斯公式

一. 条件概率

概念的引出

条件概率 —— 在事件B已发生的条件下, 事件A发生的概率, 记为 $P(A|B)$

$P(\overline{A}|B)$



设S中样本点个数为n

B中样本点个数为m

AB中样本点个数为k

$P(B)=$在一次试验中事件B发生的可能性大小

=在一次试验中子集B中有样本点出现的可能性大小 $=\dfrac{m}{n}$

$P(A|B)=$在一次试验中子集B中已有样本点出现，它也出现在子集$A(AB)$中的可能性大小$=\boxed{\dfrac{k}{m}}=\dfrac{k/n}{m/n}=\boxed{\dfrac{P(AB)}{P(B)}}$

一. 条件概率

1. 定义： 设 A , B是两个事件, 则称 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率，其中 $P(B)>0$

注： ➢ 类似可以定义: $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，$(P(A)>0)$

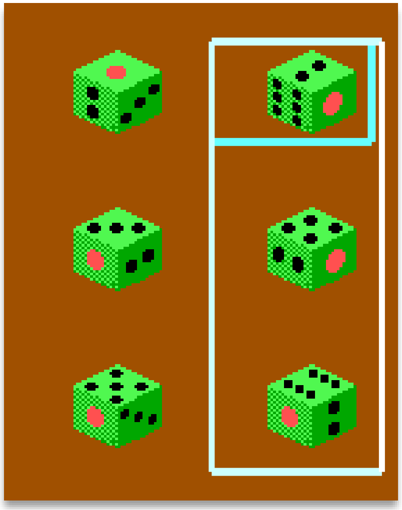
一. 条件概率

2. 计算

1) 用定义计算: $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

2) 用比值计算: $P(A|B)=\dfrac{k}{m}=\dfrac{AB\text{中样本点个数}}{B\text{中样本点个数}}$

掷骰子



例：$S=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A=\{$掷出2点$\}$, $B=\{$掷出偶数点$\}$

$=\{2,4,6\}$

则: $P(A|B)=\dfrac{1}{3}$

这种方法适合简单的问题

例1. 掷两颗骰子, 观察出现的点数. 设 x_1, x_2 分别表示第一颗, 第二颗骰子的点数, 且设

$$A=\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2=10\} \quad B=\{(x_1,x_2)\mid x_1>x_2\}$$

求: $P(B|A)$, $P(A|B)$（两种方法）

解: 样本空间 $S=\{(1,1),(1,2)\cdots(1,6)$

$(2,1),(2,2)\cdots(2,6)$

$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$

$(6,1),(6,2)\cdots(6,6)\}$

$$A=\{(5,5),(4,6),(6,4)\} \quad AB=\{(6,4)\}$$

$$B=\{(2,1),(3,2),(3,1),(4,3),(4,2),(4,1)$$

$$\cdots\cdots(6,5),(6,4)\cdots(6,1)\}$$

S ---- 36

A ---- 3

B ---- 15

AB ---- 1

$A=\{(x_1,x_2) \mid x_1+x_2=10\}\quad B=\{(x_1,x_2) \mid x_1>x_2\}$

S----36

A----3

B--- 15

AB--- 1

方法1: 定义:

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\quad P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

因为 $P(AB)=\frac{1}{36}$ 从而: $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}$

$$P(A)=\frac{3}{36},$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{15}$$

$$P(B)=\frac{15}{36}$$

$$A=\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2=10\} \quad B=\{(x_1,x_2)\mid x_1>x_2\}$$

方法2： 比值：(这种方法适合简单的问题)

A----3

B--- 15

AB--- 1

$$P(B|A)=\frac{k}{m}=\frac{1}{3}$$

$$P(A|B)=\frac{k}{m}=\frac{1}{15}$$

$$A=\{(5,5),(4,6),\boxed{(6,4)}\}$$

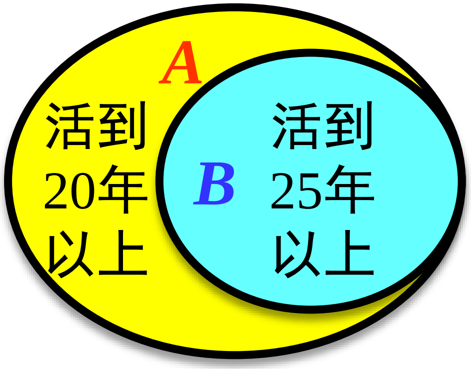
$$B=\{(2,1),(3,2),(3,1),(4,3),(4,2),(4,1)$$
$$\cdots\cdots(6,5),\boxed{(6,4)}\cdots(6,1)\}$$

例2 设某种动物由出生算起活到20年以上的概率为0.8, 活到25年以上的概率为0.4. 问现年20岁的这种动物, 它能活到25岁以上的概率是多少?

解: 设 A={能活20年以上}, B={能活25年以上}

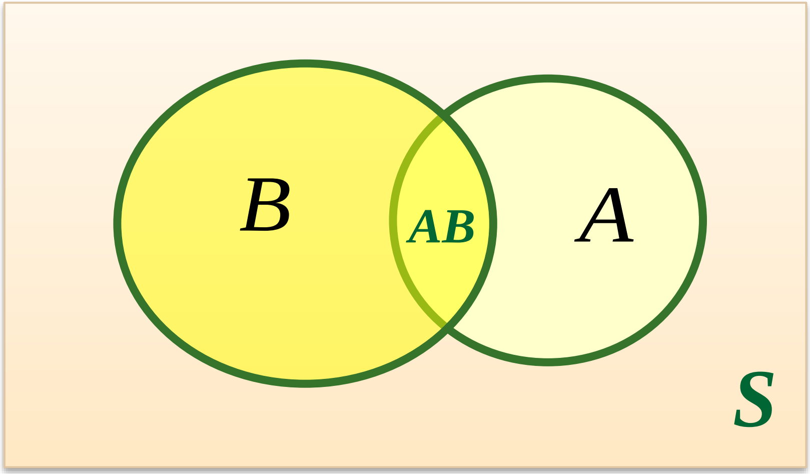
$$P(A) = 0.8,\ P(B) = 0.4$$

所求为 $P(B|A)$.



$$P(B\,|\,A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0.4}{0.8} = 0.5$$

条件概率$P(A|B)$与积事件概率$P(AB)$的区别



设S中样本点个数为 n

B中样本点个数为 m

AB中样本点个数为 k

$$P(AB)=\frac{k}{n}$$

$$P(A|B)=\frac{k}{m}\geq P(AB)$$

第一章 随机事件与概率

第五节 条件概率

- 条件概率
- 乘法定理
- 全概率公式
- 贝叶斯公式

作 业

授课内容	习题一
1.1 随机事件1.2 样本空间	2
1.3 频率与概率	3(2)(3)
1.4 等可能概型	6,7,8,11等可能
1.5 条件概率	14,15, 条件概率
1.6 乘法定理，全概率， 贝叶斯， 独立性	17,18乘法定理 21,23,24,26全概率贝叶斯 28,29独立性

19, 4分，数一

设A, B是随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 的充要条件是______

(A) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

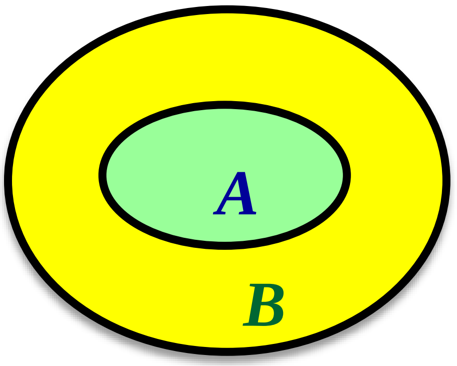
(B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$

(D) $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$

三. 概率的性质

性质3 若 $A \subset B$，则有



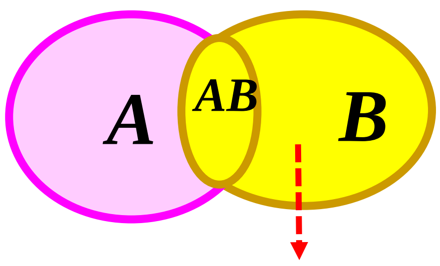
$A \subset B$

$$P(B-A)=P(B)-P(A) \text{ (可减性)}$$

$$P(B) \geq P(A) \text{ (单调性)}$$

若 $A \not\subset B$，则有

$A \not\subset B$



$$P(B-A)=P(B)-P(AB)$$

$$P(B\bar{A})=P(B-A)=P(B)-P(AB)$$

$B-A=B\bar{A}$

19, 4分，数一

设A, B是随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 的充要条件是 ___(C)___

(A) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$　　(D) $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$

解：由于 $P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$

$P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)$

所以 $(C) \Longleftrightarrow P(A)=P(B)$　　故选(C)

(A) 没有条件 $AB=\Phi$

(B) A与B独立，才成立

(D) $P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$

$=1-2P(A)+P(AB)$

$\neq P(AB)$

12, 4分，数一

设A,B,C为随机事件，A与C互不相容，$P(AB)=1/2, P(C)=1/3$，

则 $P(AB|\bar{C})=$ $\underline{3/4}$

解：由于A与C互不相容，所以 $AC=\varnothing, ABC=\varnothing, \rightarrow P(ABC)=0$

$$P(AB|\bar{C})=\frac{P(\boxed{AB}\bar{C})}{P(\bar{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}$$

$$=\frac{P(AB)}{1-P(C)}=\frac{1/2}{1-1/3}=\frac{3}{4}$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)$$

$P(AB)=P(A)P(B)$ $P(AC)=P(A)P(C)$

18, 4分，数一

设随机事件A与B相互独立，A与C相互独立，$BC=\varnothing$，若$P(A)=P(B)=1/2$, $P(AC|\boxed{AB\cup C})=1/4$，则$P(C)=$ ____1/4____

解：

3. 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$$1/4=P(AC|\boxed{AB\cup C})=\frac{P(AC(AB\cup C))}{P(AB\cup C)}$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$=\frac{P((\underline{ACAB})\cup AC)}{P(AB)+P(C)-P(ABC)}(ABC=\varnothing)$$

$$=\frac{P(AC)}{P(A)P(B)+P(C)-0}$$

$$=\frac{P(A)P(C)}{1/4+P(C)-0}$$

$$=\frac{1/2\,P(C)}{1/4+P(C)}\Rightarrow P(C)=1/4$$