高等数学笔记

目录

1 多元函数微分法及其应用

1.1 多元函数的基本概念

1.1.1 平面点集 *n 维空间

1. **平面点集**

   内点 在函数的图形内

   外点 在函数的图形外

   边界点 在函数的图形边界上

   聚点 图形区域内的点，不包括离群的离散点

   开集 不能取到边界点的点集

   闭集 能取到边界点的点集

   区域 集合内任意两点能通过连续折线段连接的点集

   开区域 能取到边界点的区域

   闭区域 不能取到边界点的区域

   对区域 D , 若存在正数 K , 使一切点 $P \in D$ 与某定点 A 的距离 $|AP| \leq K$, 则称 D 为**有界域**, 否则称为**无界域**

2. **平面点集**
   有 n 个坐标。

1.1.2 多元函数的概念

- **多元函数** 有多个自变量的函数 $f(x_1, x_2...)$
- **自然定义域** 使函数 $f(x_1, x_2...)$ 有意义的点集
- **函数的图形** 自然定义域构成的图形

注：一元函数的性质对多元函数也同样适用（包括：介值定理、有界性与最大最小值定理，一致连续性定理）

1.1.3 多元函数的极限

定义通俗点：

当从任意方向像点 (x, y) 逼近时，对应的函数值趋近于同一个数，则极限存在，称作二重极限

记作 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 或 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = A$

注：一元函数的极限运算法则对多元函数也同样适用

1.1.4 多元函数的连续性

- 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$，则函数在 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续。
- 若函数在 D 上有定义且处处连续，则称函数为D 上的连续函数
- 若函数在 $P_0(x_0, y_0)$ 处不连续，则称 P_0 为函数的间断点

注：一切多元函初等函数在定义区域内是连续的

1.2 偏导数

1.2.1 偏导数的定义及其计算方法

定义通俗点：

将其他自变量 y... 固定（看做常量），只对其中一个自变量 x 求导

$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

记作 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0,y=y_0}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=x_0,y=y_0}$，$z_x|_{x=x_0,y=y_0}$，$f_x(x_0,y_0)$

一般将函数 $f(x,y)$ 对 x 的偏导记作 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$z_x$，$f_x(x,y)$

对 y 的偏导记作 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$z_y$，$f_y(x,y)$

注：偏导符号是一个整体，不能看做 ∂z 与 ∂x 相除

多元函数同理

偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 的几何意义：

曲面被 $x=x_0$ 所截得的曲线的导数

注：二元函数在某点如果偏导数都存在，但在该点不一定连续。

1.2.2 高阶偏导数

通俗点：

若偏导的偏导存在，对偏导再求一次偏导，即二阶偏导。一直循环下去

注：在求高阶偏导时可以换个维度求

形如：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$$

后列称为混合偏导数

定理：

若 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，那么该区内这两个二阶混合偏导数必定相等。

通俗点：二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关。

*** 拉普拉斯 (Laplace) 方程：**

$1.z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

$2.u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

1.3 全微分

1.3.1 全微分的定义

$dz=A\Delta x+B\Delta y$

必要条件：

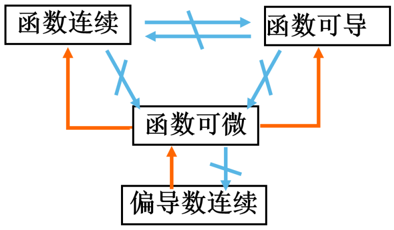
若函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 可微分，那么该函数在 (x,y) 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 必定存在，

且 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

充分条件：

若函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在 (x,y)连续，那么函数在该点可微分

多元函数连续、可导、可微的关系



1.3.2 * 全微分在近似计算中的应用

1.4 多元复合函数的求导法则

1.4.1 一元函数与多元函数复合

已知函数 $u=g(t),v=h(t)$ 函数 $z=f[g(t),h(t)]$

则 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{du}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{dv}{dt}$

1.4.2 多元函数与多元函数复合

已知函数 $u=g(x,y),v=h(x,y)$ 函数 $z=f(u,v)$

则 $$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

1.4.3 其他情形

1. 与一元和多元函数复合

   已知函数 $u=g(x,y),v=h(y)$ 函数 $z=f(u,v)$

   则 $$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dy}\end{aligned}$$

2. 有些中间变量还是复合函数的自变量

   如 $z=f[g(x,y),x,y]$，可看做 $v=x,w=y$ 的特殊形式

   则 $$\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial x}=1\quad \frac{\partial w}{\partial x}=0\\ &\frac{\partial v}{\partial y}=0\quad \frac{\partial w}{\partial y}=1\end{aligned}$$

   得到 $$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

注意：$\frac{\partial z}{\partial x}$ 把 $f[g(x,y),x,y]$ 中的 y 看做不变
$\frac{\partial f}{\partial x}$ 把 $f[u,x,y]$ 中的 u,y 看做不变

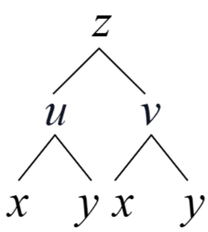
3. 全微分形式不变性

$z=f(u,v)$ 的全微分为 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv$
若 $u=g(x,y),v=h(x,y)$
则 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

可见，无论 u,v 是中间变量，还是自变量，函数 $z=f(u,v)$ 的全微分形式都一样
这个性质叫做全微分的形式不变性。

1.4.4 求复合函数微分的小技巧

在求复合函数的微分时，可以先画出复合关系的树状图，然后再对应每条路径按最终变量分类别求和即可。
如下图所示：



1.5 隐函数的求导公式

1.5.1 一个方程的情形

- $F(x,y)=0$
  $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$
  注意方程右边是倒过来的, 对 x 的偏微分在上，对 y 的偏微分在下
  可由 $F(x,f(x))=0$ 得到
  $\Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}=0$
  $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$
- $F(x,y,z)=0$
  $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$
  可由 $F(x,y,f(x,y))=0$ 得到
  $\Rightarrow F_x+F_z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,F_y+F_z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$
  $\Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$

1.5.2 方程组的情形

对方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$

雅可比式 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$$

可由 $F[x,y,u(x,y),v(x,y)]=0,G[x,y,u(x,y),v(x,y)]=0$ 得到

对 x 求导

$$\Rightarrow\begin{cases}F_x+F_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\ G_x+G_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$$

通过解非齐次线性方程组得到

$$\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

对 y 求导同理

1.6 多元函数微分学的几何应用

1.6.1 一元向量值函数及其导数

$f(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$

$f'(t)=f_1'(t)\vec{i}+f_2'(t)\vec{j}+f_3'(t)\vec{k}$ 表示曲线的切向方向

一些运算法则

1. $\dfrac{d}{dt}\vec{C}=\vec{0}$
2. $\dfrac{d}{dt}[c\vec{u}(t)]=c\vec{u}'(t)$
3. $\dfrac{d}{dt}[\vec{u}(t)+\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)+\vec{v}'(t)$
4. $\dfrac{d}{dt}[\phi(t)\vec{u}(t)]=\phi'(t)\vec{u}(t)+\phi(t)\vec{u}'(t)$
5. $\dfrac{d}{dt}[\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\cdot\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\cdot\vec{v}'(t)$
6. $\dfrac{d}{dt}[\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\times\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\times\vec{v}'(t)$
7. $\dfrac{d}{dt}\vec{u}[\phi(t)]=\phi'(t)\vec{u}'[\phi(t)]$

1.6.2 空间曲线的切线与法平面

1. 曲线 $\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\\ z=h(t)\end{cases}$

   切线方程 $\dfrac{x-x_0}{f'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{g'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{h'(t_0)}$

   法平面方程 $f'(t_0)(x-x_0)+g'(t_0)(y-y_0)+h'(t_0)(z-z_0)=0$

2. 曲线 $\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$

切线方程$\dfrac{x-x_0}{1} = \dfrac{y-y_0}{f'(x_0)} = \dfrac{z-z_0}{g'(x_0)}$

法平面方程$(x-x_0) + f'(x_0)(y-y_0) + g'(x_0)(z-z_0) = 0$

3. 曲线 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$

切线方程$\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_M} = \dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_M} = \dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_M}$

法平面方程$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_M (x-x_0) + \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_M (y-y_0) + \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_M (z-z_0) = 0$

具体推导过程参见下册书本 $P98$

1.6.3 曲面的切平面与法线

1. 曲面 $F(x,y,z) = 0$

切面方程$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$

法向量$\vec{n} = (F_x(x_0,y_0,z_0), F_y(x_0,y_0,z_0), F_z(x_0,y_0,z_0))$

法线方程$\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)} = \dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)} = \dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

2. 曲面 $z = f(x,y)$

切面方程$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$

法向量$\vec{n} = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1)$

法线方程$\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)} = \dfrac{z-z_0}{-1}$

法向量的方向余弦$\cos\alpha = \dfrac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \cos\beta = \dfrac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$

1.7 方向导数与梯度

1.7.1 方向导数

1. 二元函数 $f(x,y)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

2. 三元函数 $f(x,y,z)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta + f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$$

注： 偏导数存在 **可以推出** 方向导数存在
方向导数存在 **不能推出** 偏导数存在

1.7.2 梯度

$\nabla f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\vec{i} + f_y(x_0, y_0)\vec{j}$

设 $\vec{e}_l$ 为函数在 l 方向的单位向量
则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{e}$
梯度与 l 方向的夹角 $\theta = \langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{e}_l \rangle$

1. 当 $\theta = 0$ 时，$f(x, y)$ 增加最快。
   函数在这个方向的方向导数达到最大值，
   这个最大值也就是梯度 $\nabla f(x_0, y_0)$ 的模，即 $|\nabla f(x_0, y_0)| = \left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$
2. 当 $\theta = \pi$ 时，$f(x, y)$ 减少最快。
   函数在这个方向的方向导数达到最小值
3. 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，$f(x, y)$ 变化率为 0。

三维的梯度同理

1.8 多元函数的极值与求法

1.8.1 多元函数的极值及最大值最小值

有极值的**必要条件**
有极值 $\Rightarrow \begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$
有极值的**充分条件**
令 $f_{xx}(x_0, y_0) = A, f_{xy}(x_0, y_0) = B, f_{yy}(x_0, y_0) = C$
1.$AC - B^2 > 0$ 时有极值，$A < 0$ 时为极大值，$A > 0$ 时为极小值
2.$AC - B^2 < 0$ 时无极值
3.$AC - B^2 = 0$ 时可能有极值，也可能没有极值，需另外讨论

1.8.2 条件极值、拉格朗日乘数法

拉格朗日乘数法
要找 $z = f(x, y)$ 在附加条件 $\phi(x, y) = 0$ 下的可能极值点
可以先作拉格朗日函数 $L(x, y) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$
然后求其对 x, y 的偏导数，与条件联立得到
$$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda\phi_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) + \lambda\phi_y(x, y) = 0 \\ \phi(x, y) = 0 \end{cases}$$
由这组方程得到的 (x,y) 就是 $f(x, y)$ 在附加条件 $\phi(x, y)$ 下的可能极值点

1.9 * 二元函数的泰勒公式

1.9.1 二元函数的泰勒公式

1.9.2 极值充分条件的证明

1.10 * 最小二乘法