第八章　函数

- **函数**概念的产生和发展对科学大厦的构建起到了不可估量的作用，为若干数学分支的产生奠定了基础
- “凡此变数中函（同含）彼变数者，则此为彼之函数”（清代 李善兰）
- “数学中的转折点是笛卡尔的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辨证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要了。”（恩格斯）

§8.1 函数的定义与性质

定义 设F是二元关系，若$\forall x \in \mathrm{dom}F$，都存在唯一的$y \in \mathrm{ran}F$使$<x,y> \in F$，则称$F$为**函数**（或**映射**）。

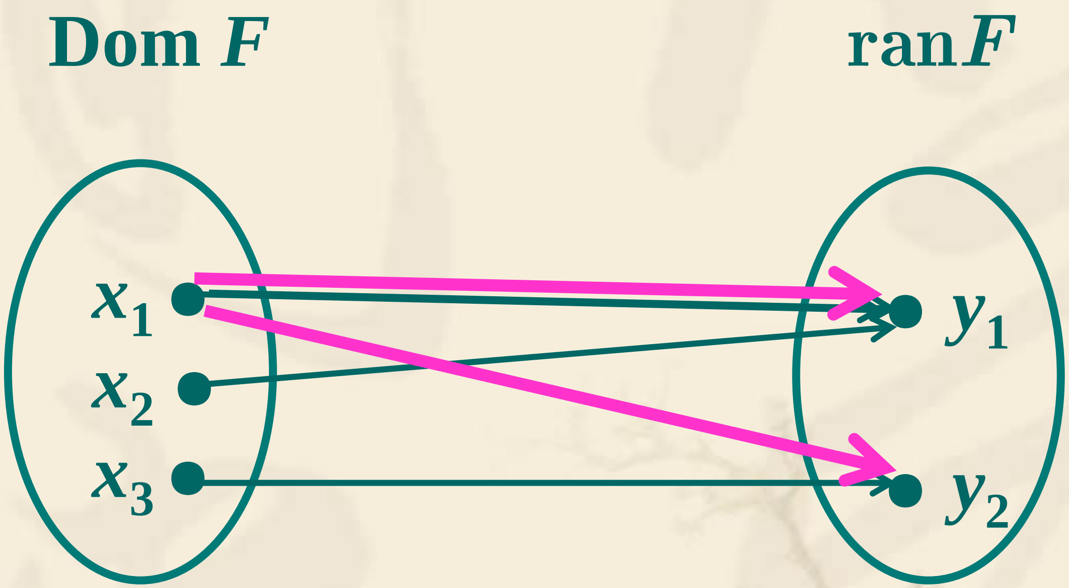
对函数F，若$<x,y> \in F$，则称y为F在x的值，记为 $y=F(x)$。

定义 对函数F,G，若 $\mathrm{dom}F = \mathrm{dom}G$ 且对任意$x \in \mathrm{dom}F = \mathrm{dom}G$ 都有$F(x)=G(x)$，称F与G**相等**，记为$F=G$。

即 $F=G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F$。

例 $F_1=\{<x_1, y_1>,<x_2, y_1>,<x_3, y_2>\}$是函数

$F_2=\{<x_1,y_1>,<x_1,y_2>\}$不是函数



例 $F(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$与 $G(x)=x-1$不相等。

定义 设A与B是两个集合，f是函数，若

$$\operatorname{dom} f = A，\operatorname{ran} f \subseteq B$$

则称 f 为**A到B的函数**(或**映射**)，记为 f：$A \to B$。

记 $B^A = \{ f \mid f：A \to B \}$。

例 设A=\{1,2,3\}，B=\{a,b\}，求 B^A。

B^A	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
1	a	a	a	b	a	b	b	b
2	a	a	b	a	b	a	b	b
3	a	b	a	a	b	b	a	b

注

① $A=\varnothing,\ B=\varnothing \Rightarrow B^A=\{\varnothing\}$;

② $A=\varnothing,\ B\neq\varnothing \Rightarrow B^A=\{\varnothing\}$;

③ $A\neq\varnothing,\ B=\varnothing \Rightarrow B^A=\varnothing$;

④ 当 $|A|=m$，$|B|=n\ (m,n>0)$时，则 $|B^A|=n^m$。

定义 设 f：$A\to B$是函数，$A_1\subseteq A$，$B_1\subseteq B$。称

$$f(A_1)=\{f(x)\mid x\in A_1\}$$

为A_1**在f下的像**，特别地，称$f(A)$是**函数f的像**；称

$$f^{-1}(B_1)=\{x\mid x\in A\wedge f(x)\in B_1\}$$

为B_1在f下的**完全原像**。

注 $f^{-1}(f(A_1))\neq A_1$，$f(\{x\})\neq f(x)$， $f\neq f(x)$ 。

例 设f是$\{1,2,3\}$到$\{0,1\}$的函数，且$f(1)=0$，$f(2)=0$，$f(3)=1$。取$A_1=\{1\}$，则$f(A_1)=\{0\}$；取$B_1=\{0\}$，则 $f^{-1}(B_1)=\{1,2\}$。

例 设f：$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x\text{偶}\\ x+1, & x\text{奇}\end{cases}$$

取$A=\{0,1\}$，$B=\{2\}$，则$f(A)=\{0,2\}$，$f^{-1}(B)=\{1,4\}$。

定义 设 f：$A\to B$是函数（或映射），

（1）若$\mathrm{ran}f=B$，则称f是**满射**的；

（2）若

$$\forall x_1\forall x_2\in(x_1\in A\wedge x_2\in A\wedge(x_1\neq x_2\to f(x_1)\neq f(x_2)))$$

则称f是**单射**的；

（3）若 f 既是满射又是单射，则称 f 是**双射**的（或**一一对应**）。

注 设f是函数，若对任意$y\in\mathrm{ran}f$，均有唯一的$x\in\mathrm{dom}f$ 使得$f(x)=y$，则f是单射。

例 判别下列函数的属性

f_1：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f_1(x) = -x^2+2x-1$

f_2：$\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}$，$f_2(x)=\ln x$

f_3：$\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$，$f_3(x)=\lfloor x\rfloor$

f_4：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f_4(x)=2x+1$

f_5：$\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$，$f_5(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

例 设 f：$A\to B$是函数，若A与B都是n元集合，则f是单射当且仅当f是满射。

证明 首先证明，若A与B都是n元集合且$A\subseteq B$，则$A=B$。

设$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$，因为$A\subseteq B$且$A$也是$n$元集，故可设$A=\{b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_n}\}$，这里$1\le b_{j_1}<b_{j_2}<\cdots<b_{j_n}\le n$。因为$b_{j_i}$均为自然数且$1\sim n$之间只有$n$个自然数，故只能有

$$b_{j_1}=1, b_{j_2}=2, \cdots, b_{j_n}=n$$

其次证明，f是单射当且仅当f是满射。

必要性：设f是单射，$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则对

任意 $a_i \neq a_j$，均有$f(a_i) \neq f(a_j)$。于是，集合A在f下的象

$$f(A)=\{f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)\}$$

是n元集。又$f(A) \subseteq B$，故由第一部分的结论得$f(A)=B$，即f是满射。

充分性：设f是满射，$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则

$$f(A)=\{f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)\}=B$$

又B是n元集，故$f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)$互不相同，即对任意$a_i \neq a_j$，均有$f(a_i) \neq f(a_j)$。于是，$f$是单射。 ∎

例 给定A,B，构造双射f：$A\to B$

（1）$A=\mathbb{Z}$，$B=\mathbb{N}$

（2）$A=[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$，$B=[-1,1]$

（3）$A=[0,1]$，$B=[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$

（4）$A=P(\{1,2,3\})$，$B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

解（1）

$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N},\ f(x)=\begin{cases}2x, & x\geq 0\\ -2x-1, & x<0\end{cases}$$

（2） $f:[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi]\to[-1,1],\ f(x)=\sin x$

（3） $f:[0,1]\to[\frac{1}{4},\frac{1}{2}],\ f(x)=\frac{x+1}{4}$

（4）因为

$A=P(\{1,2,3\})=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

$B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}=\{f_0, f_1, \cdots, f_7\}$

这里

$f_0=\{<1,0>, <2,0>, <3,0>\}$，$f_1=\{<1,0>, <2,0>, <3,1>\}$

$f_2=\{<1,0>, <2,1>, <3,0>\}$，$f_3=\{<1,0>, <2,1>, <3,1>\}$

$f_4=\{<1,1>, <2,0>, <3,0>\}$，$f_5=\{<1,1>, <2,0>, <3,1>\}$

$f_6=\{<1,1>, <2,1>, <3,0>\}$，$f_7=\{<1,1>, <2,1>, <3,1>\}$

所以，构造函数 f：$A\to B$

$f(\varnothing)=f_0$，$f(\{1\})=f_1$，$f(\{2\})=f_2$，$f(\{3\})=f_3$，

$f(\{1,2\})=f_4$，$f(\{1,3\})=f_5$，$f(\{2,3\})=f_6$，$f(\{1,2,3\})=f_7$

若干常用函数：

（1）f：$A\to B$，$f(x)=y_0$，　常函数

（2）f：$A\to A$，$f(x)=x$，　恒等函数

（3）设$<A,\preccurlyeq>$,$<B,\preccurlyeq>$是两个偏序集，f：$A\to B$

$x_1\preccurlyeq x_2 \Rightarrow f(x_1)\preccurlyeq f(x_2)$　　单调递增函数

$x_1\prec x_2 \Rightarrow f(x_1)\prec f(x_2)$　　严格单调递增函数

$x_1\preccurlyeq x_2 \Rightarrow f(x_2)\preccurlyeq f(x_1)$　　单调递减函数

$x_1\prec x_2 \Rightarrow f(x_2)\prec f(x_1)$　　严格单调递减函数

（4）设A是非空集合，$A'\subseteq A$

$$\chi_{A'}: A\to\{0,1\}$$

$$\chi_{A'}(x)=\begin{cases}1, & x\in A' \\ 0, & x\notin A'\end{cases}$$

特征函数

（4）设R是A上的等价关系，

g：$A \to A/R$　　$g(x)=[x]_R$　　自然映射

例 设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{5,6,7\}$，$C=\{a,b\}$

① $f(x)=5,\ x\in A$，　A到B的常函数

② $f(x)=x,\ x\in A$，　A到A的恒等函数

③ $f(x)=x+4,\ x\in A$，A到B的严格单调递增函数

④ C的子集上的特征函数

$\chi_{\varnothing}=\{\langle a,0\rangle, \langle b,0\rangle\}$，$\chi_{\{a\}}=\{\langle a,1\rangle, \langle b,0\rangle\}$

$\chi_{\{b\}}=\{\langle a,0\rangle, \langle b,1\rangle\}$，$\chi_{\{a,b\}}=\{\langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle\}$

⑤ 设R是A上的模2同余关系，因

$$A/_R=\{[1],[2]\}=\{\{1,3\},\{2\}\}$$

故A到商集$A/_R$的自然映射为

$$g(1)=g(3)=[1]=[3]，g(2)=[2]$$