§9.2 代数系统

定义 设S是一个非空集，$f_1, f_2, \cdots, f_k$是S上的k个一元或二元运算，则S连同 $f_1, f_2, \cdots, f_k$称为一个**代数系统**，简称**代数**，记为$<S, f_1, f_2, \cdots, f_k>$。

例 $<\mathbb{N},+>$，$<\mathbb{Z},+,\cdot>$，$<\mathbb{R},+,\cdot>$，$<P(S),\cap,\oplus,\sim>$，$<\mathbb{R}^{n\times n},+,\cdot>$，$<Z_n,\oplus_n,\otimes_n>$都是代数系统。

代数系统$<Z_n,\oplus_n,\otimes_n>$中，$Z_n=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$

$$x\oplus_n y = x+y \pmod n$$

$$x\otimes_n y = xy \pmod n$$

0与1是代数常数。

例 代数系统有时需要标出其具有的代数常数，如

$<\mathbb{Z},+,\cdot;1,0>$, $<P(S),\cap,\cup,S,\varnothing>$, $<\mathbb{R}^{n\times n},+,\cdot;I,0>$

定义 设$V=<S, f_1, f_2,\cdots, f_k>$是一个代数系统，$B\subseteq S$。如果$B$对运算$f_1, f_2,\cdots, f_k$都是封闭的，并且$B$和$S$含相同的代数常数，则称$<B, f_1, f_2,\cdots, f_k>$是$V$的**子代数系统**，简称**子代数**。

$\mathbb{N}$是$<\mathbb{Z},+>$，$<\mathbb{Z},+,0>$的子代数。

$\mathbb{N}-\{0\}$ 不是$<\mathbb{Z},+,0>$子代数。

定义 若两个代数系统中运算的个数相同，对应运算的元数相同，代数常数的个数相同，则称它们是**同类型的代数系统**。

子代数与其母代数是同类型的代数系统。

$\mathbb{N}$是 $\langle\mathbb{Z},+\rangle$，$\langle\mathbb{Z},+,0\rangle$ 的子代数。

$\mathbb{N}-\{0\}$ 是 $\langle\mathbb{Z},+\rangle$ 的子代数。

$\mathbb{N}-\{0\}$ 不是 $\langle\mathbb{Z},+,0\rangle$子代数。

$\langle\mathbb{Z},+,\ ;1,0\rangle$, $\langle P(S),\cap,\cup,S,\varnothing\rangle$, $\langle\mathbb{R}^{n\times n},+,\ ;I,0\rangle$ 是同类型的代数系统。 $\langle P(S),\cap,\sim,\varnothing\rangle$ 不是同类型。

定义 设$V_1=<A,\circ>$, $V_2=<B,*>$是两个同类型的代数系统，这里$\circ,*$都是二元运算。在集合$A\times B$上定义二元运算：

对$\forall <a_1, b_1>, <a_2, b_2>\in A\times B$ ，

$$<a_1, b_1>\cdot<a_2, b_2> = <a_1\circ a_2, b_1 * b_2>$$

称代数系统$V=<A\times B,\cdot>$为V_1与V_2的**积代数**，记为$V_1\times V_2$。

例 讨论$V_1=<Z_2,\otimes_2>$, $V_2=<Z_3,\otimes_3>$的积代数

$$V=<Z_2\times Z_3,\otimes>$$

$Z_2 \times Z_3 = \{<0,0>, <1,0>, <0,1>, <1,1>, <0,2>, <1,2>\}$

$\otimes$	$<0,0>$	$<1,0>$	$<0,1>$	$<1,1>$	$<0,2>$	$<1,2>$
$<0,0>$	$<0,0>$	$<0,0>$	$<0,0>$	$<0,0>$	$<0,0>$	$<0,0>$
$<1,0>$	$<0,0>$	$<1,0>$	$<0,0>$	$<1,0>$	$<0,0>$	$<1,0>$
$<0,1>$	$<0,0>$	$<0,0>$	$<0,1>$	$<0,1>$	$<0,2>$	$<0,2>$
$<1,1>$	$<0,0>$	$<1,0>$	$<0,1>$	$<1,1>$	$<0,2>$	$<1,2>$
$<0,2>$	$<0,0>$	$<0,0>$	$<0,2>$	$<0,2>$	$<0,1>$	$<0,1>$
$<1,2>$	$<0,0>$	$<1,0>$	$<0,2>$	$<1,2>$	$<0,1>$	$<1,1>$