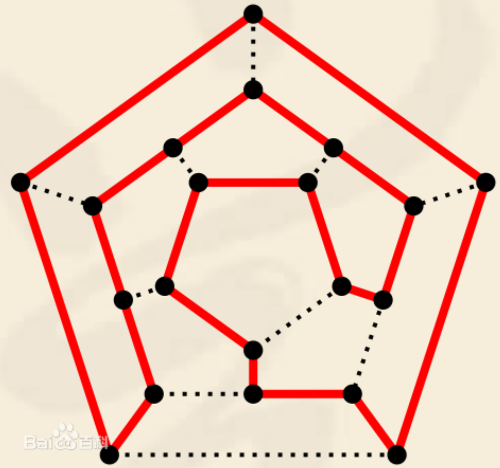
§15.2 哈密顿图

例 数学家哈密顿（William Rowan Hamilton）提出，在一个有20个城市的地图网络中，寻找一条从给定的起点到给定的终点沿 途恰好经过所有其他城市一次的路径。



哈密顿路径问题在上世纪七十年代初，终于被证明是“NP完全”的。哈密顿路径问题目前只有单独的必要性结论和充分性结论。

定义 经过图的所有顶点的路径（圈）称为**哈密顿通路**（**哈密顿回路**或**哈密顿圈**）；有哈密顿回路（哈密顿通路）的图称**哈密顿图**（半哈密顿图）。

注 在后面的讨论中，通路不包括回路。

定理1 设$G=<V,E>$是一个无向哈密顿图，则对$\forall V_1\subset V,\ V_1\neq\varnothing$，均有 $p(G-V_1)\leq|V_1|$。

证明 设C是G的哈密顿回路，则$\forall V_1\subset V,\ V_1\neq\varnothing$

$$p(C-V_1)\leq|V_1|$$

因为C是G的生成子图，故

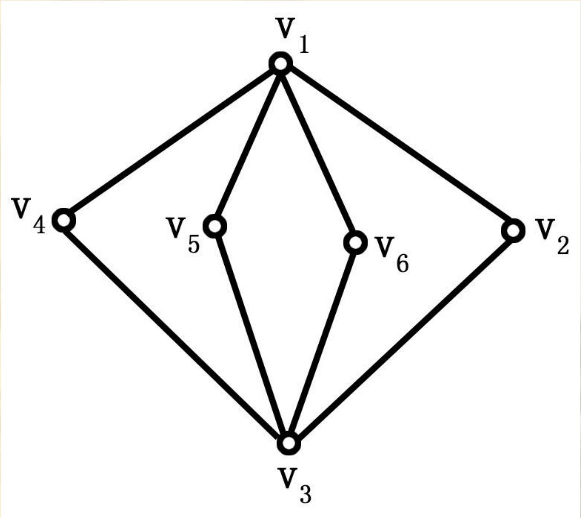
$$p(G-V_1) \le p(C-V_1) \le |V_1| \qquad \blacksquare$$

定理 设$G=<V,E>$是一个无向半哈密顿图，则对$\forall V_1 \subset V$, $V_1 \ne \varnothing$，均有$p(G-V_1) \le |V_1|+1$。

例 对给定图，取$V_1=\{v_1,v_3\}$，因

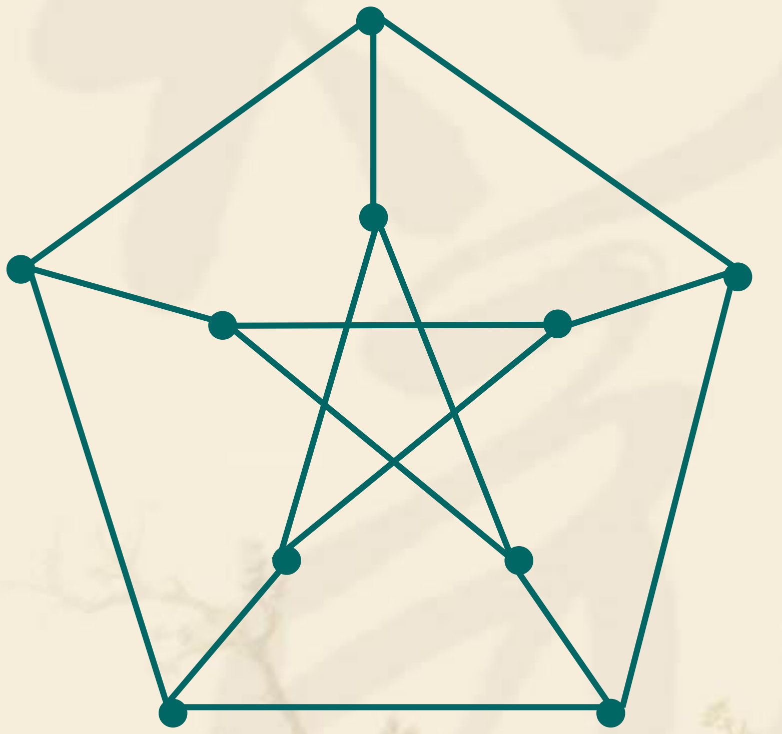
$$p(G-V_1)=4>|V_1|=2$$

故该图不是哈密顿图，也不是半哈密顿图。



例 有割点或割边的无向图不是哈密顿图。

例 可以证明，下列无向图满足哈密顿图的必要条件(定理1)，但不是哈密顿图。该图称为**彼得森**(Petersen)**图**。



定理2 设G是一个n阶简单无向图，若G中任意不相邻顶点u,v均满足$d(u)+d(v)\geq n-1$，则G是半哈密顿图。

推论 设G是一个n阶简单无向图，若G中任意不相邻顶点u,v均满足$d(u)+d(v)\geq n$，则G是哈密顿图。

定理 设G是一个n阶无向图，$u,v\in V(G)$。若u与v不相邻且$d(u)+d(v)\geq n$，则G是哈密顿图的充要条件是$G+(u,v)$是哈密顿图。

证明 必要性

G是哈密顿图 $\Rightarrow$ G有哈密顿回路C

$\Rightarrow$ C也是$G+(u,v)$的哈密顿回路

$\Rightarrow$ $G+(u,v)$是哈密顿图

充分性

$G+(u,v)$是哈密顿图 $\Rightarrow$ $G+(u,v)$有哈密顿圈C

（1）边(u,v) 不在C上 $\Rightarrow$ C也是G的哈密顿圈

$\Rightarrow$ G是哈密顿图

（2）(u,v) 在C上 $\Rightarrow$ C$-(u,v)$是G的哈密顿通路

设

$$P = C-(u,v) = v_1 v_2 \cdots v_n, \quad v_1 = u, \quad v_n = v$$

其中v_1与$v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}$相邻， $2 = i_1 < i_2 < \cdots < i_k < n$。

若$k=1$，则$d(v_1)=1$，由此得

$$d(u)+d(v) = d(v_1)+d(v_n) = 1+d(v_n)$$

$$\le 1+(n-2) = n-1 < n$$

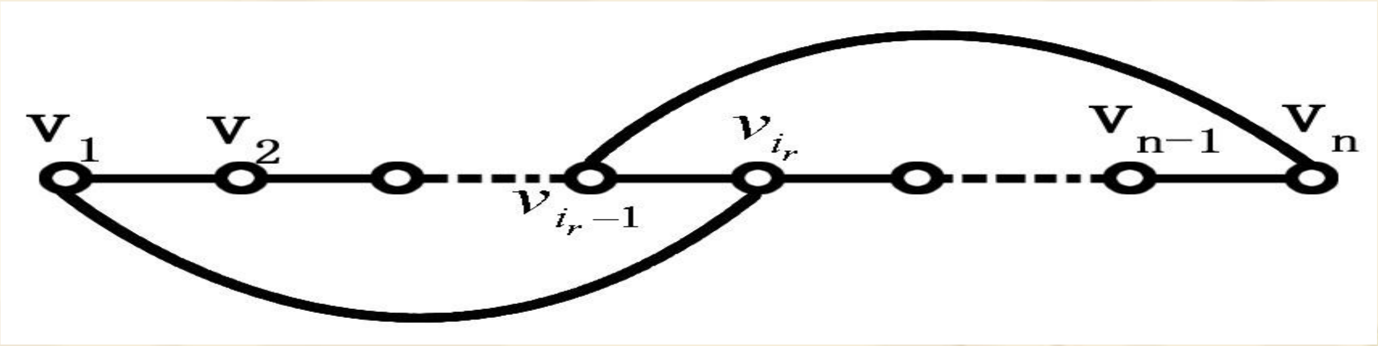
与已知条件矛盾，所以$k \ge 2$ 。

此时，v_n至少与$v_{i_2-1}, v_{i_3-1}, \cdots, v_{i_k-1}$之一相邻，否则$d(v_n) \le (n-2)-(k-1) = n-k-1$，

$$d(u)+d(v)=d(v_1)+d(v_n)$$

$$\leq k+(n-k-1)=n-1<n$$

与已知条件矛盾。设 v_n与 v_{i_r-1}相邻$(2\leq r\leq k)$，根据下列图示可得



$$C=v_1v_2\cdots v_{i_r-1}v_nv_{n-1}\cdots v_{i_r}v_1$$

是G的哈密顿圈。故G是哈密顿图。 ▌

例 8人参加会议，设任意两个无法交流的人中每个人与其他可交流的人数之和不小于8，问能否将这8人排在圆桌旁，使相邻的人都可交流？

解 构造8阶无向图 $G=\langle V,E\rangle$，$V=\{8个人\}$，

$$E=\{(u,v) \mid u,v\in V \wedge u与v可交流\}$$

由假设，对$\forall u,v\in V$，若u与v不相邻，则

$$d(u)+d(v) \geq 8$$

由定理2的推论，G是哈密顿图，故存在哈密顿回路$C=v_1v_2\cdots v_8v_1$。可按C的顺序安排8个人座次。