第五章

特征值与特征向量

问题的提出

$$A=\begin{pmatrix}5&-6&-6\\-1&4&2\\3&-6&-4\end{pmatrix}\quad 计算A^{100}$$

如果能找到可逆矩阵

特征值

$$P=\begin{pmatrix}2&2&-3\\0&1&1\\1&0&-3\end{pmatrix}\quad 使得\quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}=\Lambda$$

特征向量

矩阵对角化

则 $A=P\Lambda P^{-1}$， $A^{100}=(P\Lambda P^{-1})^{100}=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})$

$$=P\Lambda\underbrace{(P^{-1}P)}_{E}\Lambda\underbrace{(P^{-1}P)}_{E}\Lambda(P^{-1}\cdots P)\Lambda P^{-1}$$

$$=P\Lambda^{100}P^{-1}=P\begin{pmatrix}2^{100}&&\\&2^{100}&\\&&1^{100}\end{pmatrix}P^{-1}$$

矩阵对角化 $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}=\Lambda$$

需要解决的问题：

问题1 任何一个方阵都能对角化吗？

方阵需要满足什么条件才能对角化？

问题2 如何对角化？

第五章 特征值与特征向量

5.1 特征值与特征向量

5.2 矩阵的相似对角化

5.3 实对称矩阵的相似对角化

第五章 特征值与特征向量

5.1 特征值与特征向量

- 特征值与特征向量的概念
- 特征值与特征向量的计算
- 特征值与特征向量的性质

1. 特征值与特征向量的概念

定义5.1 设A是n阶方阵, 如果存在数λ和n维列向量$x \neq 0$,

使得 $Ax = \lambda x$ 成立,

则称λ为A的一个特征值，非零向量x称为A的属于特征值λ的特征向量.

注: (1) A是方阵，特征向量 $x \neq 0$；

(2) 特征值λ可以是实数,也可以是复数;

(3) 特征值λ对应的特征向量不唯一.

证明: 若x是A的属于特征值λ的特征向量，$k \neq 0$,

则非零向量kx也是A的属于特征值λ的特征向量.

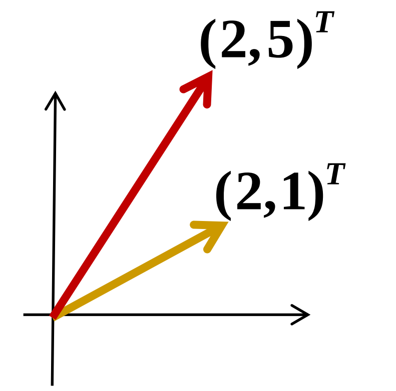
$$A(kx) = kAx = k\lambda x = \lambda(kx)$$

特征值与特征向量几何意义：$Ax=\lambda x$

注： 特征向量是经过线性变换后方向保持不变的向量.

线性变换： $Ax=y \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

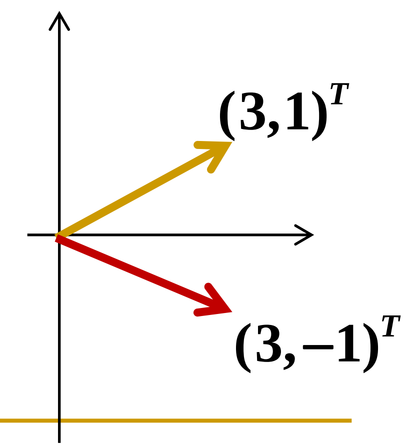
例： 线性变换 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$



原向量发生了伸缩和旋转变化

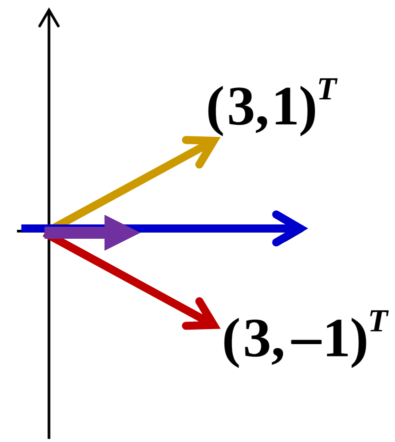
例： 关于x轴的镜像对称变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$



特征值与特征向量几何意义：$Ax=\lambda x$

例： 关于x轴的镜像对称变换：



$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ -y\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$$

矩阵A的特征向量是什么?

特征向量在这个变换下保持方向不变.

显然, x 轴(镜子表面)上的向量在这个变换下保持方向不变。

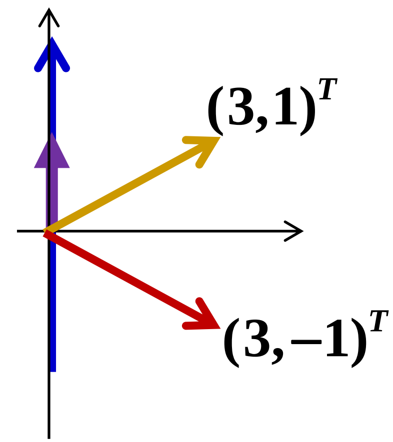
所以可以猜测其特征向量是 $k(1,0)^T, k\neq 0$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$ 所以 $(1,0)^T$ 是A的特征向量,特征值 $\lambda_1=1$

特征值与特征向量几何意义：$Ax = \lambda x$

关于x轴的镜像对称变换：

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$



矩阵A的特征向量是什么?

特征向量在这个变换下保持方向不变.

还有其他的吗?

$k(1,0)^T, k \neq 0$ 是 A 的特征向量，特征值 $\lambda_1 = 1$

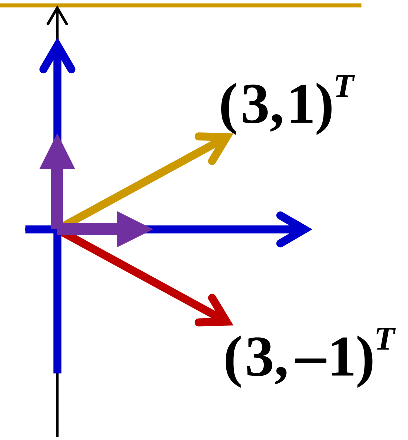
y 轴上的向量，经过变换后方向反向，但仍在 y 轴上.

所以$k(0,1)^T, k \neq 0$ 也是其特征向量.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以 $(0,1)^T$ 是 A的特征向量，特征值 $\lambda_2 = -1$

特征值与特征向量几何意义：$Ax=\lambda x$



关于x轴的镜像对称变换：

$$\underset{A}{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$

这个矩阵的特征向量是什么?

特征向量在这个变换下保持方向不变.

$k(1,0)^T, k\neq 0$ 是 A 的特征向量, 特征值 $\lambda_1=1$

$k(0,1)^T, k\neq 0$ 是 A 的特征向量, 特征值 $\lambda_2=-1$

结论: 特征向量是经过线性变换后方向保持不变的向量，特征值就是特征向量伸缩的倍数。

第五章 特征值与特征向量

5.1特征值与特征向量

- 特征值与特征向量的概念
- 特征值与特征向量的计算
- 特征值与特征向量的性质

复习 齐次线性方程组解的情况

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{0}$$

齐次线性方程组：$Ax = 0$

设 A为n阶方阵，

则 $Ax = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0$

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{阶梯阵}}$$

只有零解

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{行简化阶梯阵}}$$

有非零解

基础解系 $\Rightarrow$ 通解

复习

定义2.3 设n阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,

行下标按自然顺序排列 展开式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

展开式的规律:

1) 每项都是n个元素的乘积,且它们取自行列式的不同行,不同列.

2) 列下标构成1,2,…,n的一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$.

3) n阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项.

2. 特征值与特征向量计算

齐次方程组

设λ为方阵 A 的特征值，x 为 A 的属于特征值 λ 的特征向量，

则 $x \neq 0$, 使得$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - Ax = 0 \Leftrightarrow (\lambda E - A)x = 0$

$\Leftrightarrow x$ 为$(\lambda E - A)x = 0$ 的非零解 $\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{n1} & a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix} \quad \lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. 特征值与特征向量计算

设 λ 为方阵 A 的特征值，x 为 A 的属于特征值 λ 的特征向量，

则 $x \neq 0$, 使得 $Ax = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - Ax = 0 \Leftrightarrow (\lambda E - A)x = 0$

$\Leftrightarrow x$ 为 $(\lambda E - A)x = 0$ 的非零解 $\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$

$$f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n$$
$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

是 λ 的 n 次多项式, 称为方阵A的特征多项式, $|\lambda E - A| = 0$

称为A的特征方程，它的根称为A的特征根(特征值)

在复数域内, A有 n 个特征值(可能是重根) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

2. 特征值与特征向量计算

设 λ 为A 的特征值，x 为 A的属于特征值 λ 的特征向量,

则 $x \neq 0, Ax = \lambda x \Leftrightarrow x$ 为 $(\lambda E - A)x = 0$ 的非零解$\Leftrightarrow \left|\lambda E - A\right| = 0$

步骤：

（1） 求解 $\left|\lambda E - A\right| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0$

得到A 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$;

（2） 对每一特征值 λ_i , 求出 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 一个基础解系

$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$， 其中 $r(\lambda_i E - A) = r$.

则 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量为:

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_{n-r}\xi_{n-r}$$

$(k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$为不全为零的任意常数)

注：对角矩阵的特征值就是主对角线上的元素

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \qquad \lambda E=\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_1 & & & \\ & \lambda-a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda-a_n \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)\cdots(\lambda-a_n)=0$$

所以A的特征值为：$\lambda_1=a_1,\lambda_2=a_2,\cdots,\lambda_n=a_n$

例1 求出3阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 的全部特征值和相应的特征向量

解 (1) 求A的特征值

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -1 & \lambda-3 & 1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & \lambda-2 & 0\\ -1 & \lambda-3 & 1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & \lambda-3 & 1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 1\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1\\ 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$$

A的特征值为：$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$

例1 求出3阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 的全部特征值和相应的特征向量

解 (1) 求A的特征值

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -1 & \lambda-3 & 1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2,$$

A的特征值为: $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2.$

定理5.2 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=5=a_{11}+a_{22}+a_{33}$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=4=|A|$$

(2) 求特征向量 $\lambda_1 = 1$

$(\lambda E - A)x = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

解齐次线性方程组 $(E-A)x = 0$

$$E - A = \begin{pmatrix} 1-1 & 1 & -1 \\ -1 & 1-3 & 1 \\ -1 & -1 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

行简化阶梯阵

得基础解系: $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$n - r(E-A) = 3 - 2 = 1$

$\lambda_1 = 1$的全部特征向量: $k\xi_1 (k \neq 0)$ 直线

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&3&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$(\lambda E-A)x=0$

(2) 求特征向量 $\lambda_1=1$

解齐次线性方程组 $(E-A)x=0$

$$E-A=\begin{pmatrix}1-1&1&-1\\-1&1-3&1\\-1&-1&1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&-2&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_1&x_2&x_3\end{array}\\\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\to\begin{cases}x_1+x_2=0\\-x_2+x_3=0\end{cases}$$

$$\to\begin{cases}x_1=-k\\x_2=k\\x_3=k\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\xi_1}=k\xi_1$$

$\lambda_1=1$的全部特征向量：$k\xi_1(k\neq 0)$ 直线

(2) 求特征向量 $\lambda_2=\lambda_3=2$ $(\lambda E-A)x=0$

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&3&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

解齐次线性方程组 $(2E-A)x=0$

$$2E-A=\begin{pmatrix}2-1&1&-1\\-1&2-3&1\\-1&-1&2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&-1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_1&x_2&x_3\end{array}\\\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$n-r(2E-A)=3-1=2$

得基础解系： $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

所以 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 全部特征向量为：$k_2\xi_2+k_3\xi_3$ 平面

(k_1 ,k_2不同时为0)

结论：二重根2对应着两个线性无关的特征向量，能对角化

(2) 求特征向量 $\lambda_2=\lambda_3=2$ $(\lambda E-A)x=0$

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&3&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

解齐次线性方程组 $(2E-A)x=0$

$$2E-A=\begin{pmatrix}2-1&1&-1\\-1&2-3&1\\-1&-1&2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&-1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1&x_2&x_3\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\to x_1+x_2-x_3=0\to\begin{cases}x_1=-k_2+k_3\\x_2=k_2\\x_3=\quad\quad k_3\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_2\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\xi_2}+k_3\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\xi_3}=k_2\xi_2+k_3\xi_3$$

所以 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 全部特征向量为：$k_2\xi_2+k_3\xi_3$ $(k_1,k_2$不同时为0)

(2) 求特征向量 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 代数重数

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda E - A)x = 0$$

线性无关的特征向量: $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

几何重数

结论： 二重根2对应着两个线性无关的特征向量

即特征值2的几何重数 = 它的代数重数 = 2 A能对角化

代数重数 几何重数： 设n阶方阵A, λ_0是A的特征值

λ_0的代数重数： λ_0作为特征根的重数

λ_0的几何重数: λ_0相应的线性无关特征向量的个数.

$(\lambda_0 E - A)x = 0$ 的基础解系所含向量个数 $n - r(\lambda_0 E - A)$

例2 求出方阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的全部特征值和相应的特征向量.

解 (1) 求A的特征值:

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1\\ 4 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)[(\lambda+1)(\lambda-3)+4]=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+1)$$
$$=(\lambda-2)(\lambda-1)^2=0$$

所以 A 的特征值为: $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$

定理5.2 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}=4$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=2=|A|$$

$(\lambda E - A)x = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 求特征向量 $\lambda_1 = 2$

解方程组 $(2E - A)x = 0$

$$2E - A = \begin{pmatrix} 2+1 & -1 & 0 \\ 4 & 2-3 & 0 \\ -1 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行简化阶梯阵

得基础解系: $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$n - r(2E - A) = 3 - 2 = 1$

$\lambda_1 = 2$的全部特征向量: $k\xi_1 (k \neq 0)$ 直线

特征值2的几何重数 = 它的代数重数 = 1

$(\lambda E - A)x = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 当 $\lambda_1 = 2$ 时,

解方程组 $(2E - A)x = 0$

$$2E - A = \begin{pmatrix} 2+1 & -1 & 0 \\ 4 & 2-3 & 0 \\ -1 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$n - r(2E - A) = 3 - 2 = 1$

$$\to \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = k \end{cases}$$

得基础解系: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k\xi_1$

$\lambda_1 = 2$的全部特征向量: $k\xi_1 (k \neq 0)$

$$(\lambda E - A)x = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 求特征向量 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$

解方程组 $(E - A)x = 0$

$$E - A = \begin{pmatrix} 1+1 & -1 & 0 \\ 4 & 1-3 & 0 \\ -1 & 0 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行简化阶梯阵

得基础解系: $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad n - r(E - A) = 3 - 2 = 1$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的全部特征向量 $k\xi_2 (k \neq 0)$

特征值1的几何重数1 $<$ 它的代数重数2 $\quad$ A不能对角化

定理5.3 任一特征值的几何重数 $\leq$ 它的代数重数

$(\lambda E - A)x = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 求特征向量 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$

解方程组 $(E - A)x = 0$

$$E - A = \begin{pmatrix} 1+1 & -1 & 0 \\ 4 & 1-3 & 0 \\ -1 & 0 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$n - r(E - A) = 3 - 2 = 1$

$$\to \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

得基础解系: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = k\xi_2$

$$\to \begin{cases} x_1 = -k \\ x_2 = -2k \\ x_3 = k \end{cases}$$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的全部特征向量 $k\xi_2 (k \neq 0)$

第五章 特征值与特征向量

5.1 特征值与特征向量

- 特征值与特征向量的概念
- 特征值与特征向量的计算
- 特征值与特征向量的性质

3. 特征值与特征向量性质

$(\lambda E - A)x = 0$

定理5.1 方阵A的属于不同特征值的特征向量线性无关

例1 求方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的全部特征值和相应的特征向量

A的特征值为: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

A的特征向量: 当 $\lambda_1 = 1$ 时, 基础解系: $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 时, 基础解系: $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\because \left| \xi_1, \xi_2, \xi_3 \right| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ $\therefore \xi_1, \xi_2, \xi_3$ 线性无关

3. 特征值与特征向量性质

$(\lambda E - A)x = 0$

定理5.1 方阵A的属于不同特征值的特征向量线性无关

例2 求方阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的全部特征值和相应的特征向量.

A的特征值为: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

A的特征向量:

当 $\lambda_1 = 2$ 时，基础解系: $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时，基础解系: $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

显然，ξ_1, ξ_2 线性无关（$\xi_2 \neq k\xi_1$）

定理5.2 若n阶方阵 A 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

记 $trA=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 称为 A 的迹.

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.

证明： 略

结论： 若 A可逆，则 A 的特征值都$\neq 0$

定理5.3 任一特征值的几何重数 $\leq$ 它的代数重数.

对于n 阶方阵 A，λ_0 是 A 的特征值

$$\begin{cases} \lambda_0 \text{ 的代数重数：} \lambda_0 \text{ 作为特征根的重数} \\ \lambda_0 \text{ 的几何重数：} (\lambda_0 E - A)x = 0 \text{ 的基础解系所含向量个数} \end{cases}$$

$$n - r(\lambda_0 E - A)$$

结论： 任一特征值相应的线性无关特征向量的个数 $\leq$ 重根次数

定理5.3 任一特征值的几何重数 $\leq$ 它的代数重数.

例1 求方阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 的全部特征值和相应的特征向量

$(\lambda E - A)x = 0$

A的特征值为: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

A的特征向量: 当 $\lambda_1 = 1$ 时, 基础解系: $\xi_1 = \begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 时, 基础解系: $\xi_2 = \begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ 线性无关

特征值1的几何重数1 = 它的代数重数1

特征值2的几何重数2 = 它的代数重数2

定理5.3 任一特征值的几何重数 $\leq$ 它的代数重数.

例2 求方阵 $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 的全部特征值和相应的特征向量.

A的特征值为: $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$

A的特征向量:

$$(\lambda E-A)x=0$$

当 $\lambda_1=2$ 时，基础解系: $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，基础解系: $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$

特征值2的几何重数1 $=$ 它的代数重数1

特征值1的几何重数1 $<$ 它的代数重数2

$(\lambda E - A)x = 0$

例3 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$，求$A$的特征值的代数重数和几何重数.

解：(1) 求A的特征值 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix} = (\lambda-2)^3$

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2.$ 代数重数=3

(2) 求特征向量 $n-r(2E-A)=3-2=1$ 几何重数=1

$$2E-A=\begin{pmatrix}2-2&-1&0\\0&2-2&-1\\0&0&2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

行简化阶梯阵

特征值2的几何重数是1 < 代数重数是3

任一特征值的几何重数 $\le$ 它的代数重数

矩阵对角化 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \Lambda$

例3 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

特征值2的几何重数1 < 代数重数3

需要解决的问题：

问题1 任何一个方阵都能对角化吗？ 不是

方阵需要满足什么条件才能对角化？√

问题2 如何对角化？

定理5.3 每一特征值的几何重数 $\le$ 代数重数.

定理5.4 A可以对角化 $\Leftrightarrow$ 每一特征值的几何重数 = 代数重数

若 λ 是 A 的特征值，x 是 A 的属于 λ 的特征向量，

则：λ^k 是 A^k 的特征值，x 是 A^k 的属于 λ^k 的特征向量，
$k\lambda$ 是 kA 的特征值，x 是 kA 的属于 $k\lambda$ 的特征向量，
$\varphi(\lambda)$是 $\varphi(A)$ 的特征值，x 是 $\varphi(A)$ 的属于$\varphi(\lambda)$的特征向量.

证明 $\because\ Ax = \lambda x \quad \therefore\ A(Ax) = A(\lambda x)$

$$\Rightarrow A^2 x = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x \ \cdots\ \underline{A^k} x = \underline{\lambda^k} x$$

$$k(Ax) = k(\lambda x) \Rightarrow \underline{(kA)} x = \underline{(k\lambda)} x$$

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$$\varphi(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n$$

$$\underline{\varphi(A)} x = (a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n) x$$
$$= a_0 x + a_1 \lambda x + a_2 \lambda^2 x + \cdots + a_n \lambda^n x$$
$$= (a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \cdots + a_n \lambda^n) x = \underline{\varphi(\lambda)} x$$

若 λ 是 A 的特征值，x 是 A 的属于 λ 的特征向量，

则：λ^k 是 A^k 的特征值，x 是 A^k 的属于 λ^k 的特征向量，

$k\lambda$ 是 kA 的特征值，x 是 kA 的属于 $k\lambda$ 的特征向量，

$\varphi(\lambda)$是 $\varphi(A)$ 的特征值，x 是 $\varphi(A)$ 的属于$\varphi(\lambda)$的特征向量,

A可逆，$\dfrac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值，x 是 A^{-1} 的属于 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的特征向量.

证明 $\because$ $Ax = \lambda x$ 而 A可逆，A 的特征值都$\neq 0$

$$\therefore \frac{1}{\lambda} x = A^{-1} x$$

若 λ 是 A 的特征值，x 是 A 的属于 λ 的特征向量，

则：λ^k 是 A^k 的特征值，x 是 A^k 的属于 λ^k 的特征向量，

$k\lambda$ 是 kA 的特征值，x 是 kA 的属于 $k\lambda$ 的特征向量，

$\varphi(\lambda)$是 $\varphi(A)$ 的特征值，x 是 $\varphi(A)$ 的属于$\varphi(\lambda)$的特征向量，

A可逆，$\dfrac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值，x 是 A^{-1} 的属于 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的特征向量，

A可逆，$\dfrac{|A|}{\lambda}$是 A^* 的特征值，x 是 A^* 的属于 $\dfrac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量.

证明 $\because$ $Ax = \lambda x$ 而 A可逆，A 的特征值都$\neq 0$

$$A^*A = |A|E \rightarrow A^*Ax = |A|x \rightarrow \lambda A^*x = |A|x$$

$$\rightarrow A^*x = \frac{|A|}{\lambda}x$$ 即 $\dfrac{|A|}{\lambda}$是 A^* 的特征值.

若 λ 是 A 的特征值，x 是 A 的属于 λ 的特征向量，

则：λ^k 是 A^k 的特征值，x 是 A^k 的属于 λ^k 的特征向量，

$k\lambda$ 是 kA 的特征值，x 是 kA 的属于 $k\lambda$ 的特征向量，

$\varphi(\lambda)$是 $\varphi(A)$ 的特征值，x 是 $\varphi(A)$ 的属于$\varphi(\lambda)$的特征向量，

A可逆，$\dfrac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值，x 是 A^{-1} 的属于 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的特征向量，

A可逆，$\dfrac{|A|}{\lambda}$是 A^* 的特征值，x 是 A^* 的属于 $\dfrac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量.

例 λ_0 是 A 的特征值，

则 A^2 必有一个特征值为 ($\lambda_0^{\,2}$)

则 $A^3+2A-3E$ 必有一个特征值为（ $\lambda_0^{\,3}+2\lambda_0-3$ ）

$\varphi(A)=A^3+2A-3E$

若 λ 是 A 的特征值，则：

λ^k 是 A^k 的特征值，

$k\lambda$ 是 kA 的特征值，

$\varphi(\lambda)$是 $\varphi(A)$ 的特征值，

A可逆，$\dfrac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值，

A可逆，$\dfrac{|A|}{\lambda}$是 A^* 的特征值.

例4 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$，求 $A, A^2, 2A, A^2-3A+E, A^{-1}, A^*$ 的特征值.

解

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 \\ 2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-2)-6$$

$$=\lambda^2-3\lambda-4$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-4)$$

特征值：$\lambda_1=-1, \lambda_2=4$

A	-1	4
A^2	1	16
$2A$	-2	8
A^2-3A+E	5	5
A^{-1}	-1	1/4
A^*	4	-1

第五章 特征值与特征向量

5.1 特征值与特征向量

- 特征值与特征向量的概念
- 特征值与特征向量的计算
- 特征值与特征向量的性质

小结

1. 特征值与特征向量的概念

A 是 n 阶方阵，λ，$x \neq 0$，$Ax = \lambda x$

2. 特征值与特征向量的计算

求解：$f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$, 得到 A 的 n 个特征值.

对每个特征值 λ_i，求解 $(\lambda_i E - A)x = 0$

得到全部的特征向量 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$

3. 特征值与特征向量的性质

(1) 方阵A的属于不同特征值的特征向量线性无关.

(2) 方阵A的n个特征值：$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$$

(3) 任一特征值的几何重数 $\leq$ 它的代数重数.

作 业　习题五

授课内容	习题五
5.1特征值与特征向量	1(2)(6), 3 ,7,9特征值与特征向量，2 迹
5.2 矩阵的相似对角化	18(3)(4)(5)，20, 25(1)(2)对角化
5.3 实对称矩阵的相似对角化	29(2)(4)

（98, 3分）

设矩阵A为n阶矩阵，$|A| \neq 0$，若A有特征值λ，则 $(A^*)^2+E$ 必有特征值 $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+1$

解：

A有特征值 $\lambda \Rightarrow A^*$ 有特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$

$\Rightarrow (A^*)^2$ 有特征值 $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2$

$\Rightarrow (A^*)^2+E$ 有特征值 $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+1$

知识点复习：

设λ 是 A 的特征值，

则λ^k是 A^k 的特征值，

则$\varphi(\lambda)$ 是$\varphi(A)$的特征值，

则 $\frac{|A|}{\lambda}$ 是 A^* 的特征值

（08,4分）

设矩阵A为2阶矩阵，α_1,α_2 是线性无关的2维列向量，

$A\alpha_1=0$, $A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则$A$的非零特征值为 ____1____

知识点复习：

A 是 n 阶方阵，

λ，$x\neq 0$，$Ax=\lambda x$

解：定义法

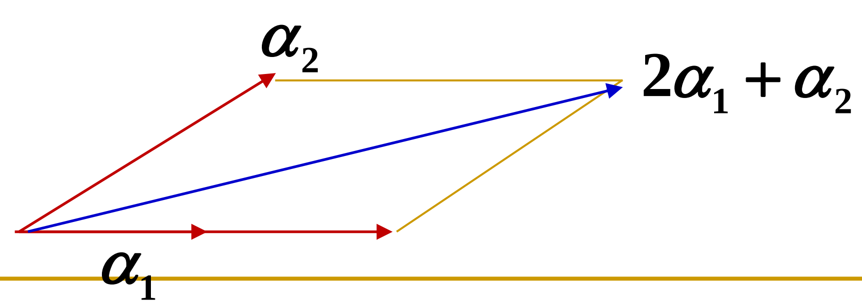
$$A\underline{(2\alpha_1+\alpha_2)}=2A\alpha_1+A\alpha_2$$
$$=A\alpha_2$$
$$=2\alpha_1+\alpha_2$$
$$=1\cdot\underline{(2\alpha_1+\alpha_2)}$$

所以1是A的特征值.

$$A\alpha_1=0=0\alpha_1$$

所以0是A的特征值.

因此 A的非零特征值为1.



（09,4分）

若3维列向量 $\alpha,\ \beta$ 满足 $\alpha^T\beta=2$, $=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3$

则矩阵 $A=\beta\alpha^T$ 的非零特征值为 ___2___

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

解法1：用定义

$A\beta=\beta\alpha^T\beta \rightarrow A\beta=2\beta$ 所以2是矩阵A的一个非零特征值。

又因为 $A=\beta\alpha^T=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}b_1a_1 & b_1a_2 & b_1a_3\\ b_2a_1 & b_2a_2 & b_2a_3\\ b_3a_1 & b_3a_2 & b_3a_3\end{pmatrix}$

$|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3$

所以 $r(A)=1$

$|A|=0$

所以0是矩阵A的一个特征值。

$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+0+\lambda_3=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=\alpha^T\beta=2 \rightarrow \lambda_3=0$

所以0是矩阵A的2重特征值，即A的3个特征值是2，0，0。

因此矩阵A的非零特征值是2。

（09,4分）

若3维列向量 α, β 满足 $\alpha^T\beta = 2$, $= b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3$

则矩阵 $A = \beta\alpha^T$ 的非零特征值为 ____2____

$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

解2: 定义法

$$A^2 = (\beta\alpha^T)^2 = (\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T) = \beta(\alpha^T\beta)\alpha^T = 2\beta\alpha^T = 2A$$

设 λ 是A的任意特征值，η 是A的属于特征值 λ 的特征向量，

即 $A\eta = \lambda\eta, \eta \neq 0$, 则

$$2\lambda\eta = 2A\eta = A^2\eta = AA\eta = \lambda A\eta = \lambda^2\eta$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda)\eta = \lambda^2\eta - 2\lambda\eta = 0$$

因为 $\eta \neq 0$, $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = 2$

（99,9分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}, |A|=-1, A^*$ 有一个特征值 λ_0,

属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^T$, 求a, b, c和 λ_0 的值.

解:

因为 α 是 A^* 的属于特征值 λ_0 的特征向量，即 $A^*\alpha=\lambda_0\alpha$.

又因为 $AA^*=|A|E=-E$

所以 $A^*\alpha=\lambda_0\alpha \Rightarrow AA^*\alpha=\lambda_0 A\alpha \Rightarrow -\alpha=\lambda_0 A\alpha$

即
$$\lambda_0\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0(-a+1+c) & =1 & (1) \\ \lambda_0(-5-b+3) & =1 & (2) \\ \lambda_0(c-1-a) & =-1 & (3) \end{cases}$$

（99,9分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$, $|A|=-1$, A^* 有一个特征值 λ_0,

属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^T$, 求a, b, c和 λ_0 的值.

解： $A^*\alpha=\lambda_0\alpha$. $-\alpha=\lambda_0 A\alpha$

$$\lambda_0\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} \lambda_0(-a+1+c) & =1 \quad (1) \\ \lambda_0(-5-b+3) & =1 \quad (2) \\ \lambda_0(c-1-a) & =-1 \quad (3) \end{cases}$$

$$(1)-(3)\Rightarrow 2\lambda_0=2\Rightarrow\lambda_0=1\Rightarrow(2)\Rightarrow b=-3$$

$$\Rightarrow(1)\Rightarrow a=c\Rightarrow|A|=-1$$

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}, |A|=-1, A^*$ 有一个特征值 $\lambda_0,$

属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^T$，求 a, b, c 和 λ_0 的值.

解： $\lambda_0=1, b=-3, a=c \quad \Rightarrow |A|=-1$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a-1 & a \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-1 & a \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=a-3=-1$$

$$c=a=2$$

$\therefore \lambda_0=1, b=-3, a=c=2.$

（98, 9分）

设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 都是非零向量，且满足条件 $\alpha^T\beta=0$，记 n 阶矩阵 $A=\alpha\beta^T$． 求：

(1) A^2;

(2) 矩阵A的特征值与特征向量.

解：

$$\beta^T\alpha=\alpha^T\beta=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=0$$

$$A=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}$$

（98, 9分）

设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 都是非零向量，且满足条件 $\alpha^T\beta=0$，记 n 阶矩阵 $A=\alpha\beta^T$． 求：

(1) A^2;

(2) 矩阵A的特征值与特征向量.

解： $\beta^T\alpha=\alpha^T\beta=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=0$

(1) $A^2=(\alpha\beta^T)^2=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=0\cdot\alpha\beta^T=0$

(2) 求A的特征值：定义法

设 λ 是A的任意特征值，η 是A的属于特征值 λ 的特征向量，

即 $A\eta=\lambda\eta,\eta\neq 0,$

$0=A^2\eta=AA\eta=\lambda A\eta=\lambda^2\eta$ 因为$\eta\neq 0$，所以 $\lambda^2=0.$

所以A的特征值为 $\lambda=0$ (n重根)，即 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$

（98, 9分）

设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 都是非零向量，且满足条件 $\alpha^T\beta=0$, 记 n 阶矩阵 $A=\alpha\beta^T$. 求：

(2) 矩阵A的特征值与特征向量.

解: $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$

求A的属于特征值 $\lambda=0$ (n重根)的特征向量. $(\lambda_i E-A)x=0$

不妨设向量 α,β 的第1个分量 $a_1\neq 0, b_1\neq 0$

求 $(0E-A)x=0$ 的基础解系:

$$0E-A=-\alpha\,\beta^T=-\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\begin{pmatrix}-a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n\\-a_2b_1 & -a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\-a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & -a_nb_n\end{pmatrix}$$

（98, 9分）

设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 都是非零向量，且满足条件 $\alpha^T\beta=0$，记 n 阶矩阵 $A=\alpha\beta^T$． 求： $a_1\neq 0, b_1\neq 0$

(2) 矩阵A的特征值与特征向量.

解： $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$

求A的属于特征值 $\lambda=0$(n重根)的特征向量. $(0E-A)x=0$

$$0E-A=-\alpha\beta^T=\begin{pmatrix} -a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n \\ -a_2b_1 & -a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & -a_nb_n \end{pmatrix}$$

$Ax=0$ 的基础解系中向量个数为 n-$r(A)$.

$$\xrightarrow{r_i-a_i/a_1r_1}\begin{pmatrix} -a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & & x_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$r=r(0E-A)=1,$

$n-r=n-1.$

$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$

（98, 9分）

设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 都是非零向量，且满足条件 $\alpha^T\beta=0$，记 n 阶矩阵 $A=\alpha\beta^T$. 求： $a_1\neq 0, b_1\neq 0$

(2) 矩阵A的特征值与特征向量.

解： 求A的属于特征值 $\lambda=0$ (n重根)的特征向量. $(0E-A)x=0$

$$0E-A=-\alpha\beta^T\to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & & x_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+\cdots+b_nx_n=0$$

$$b_1x_1+b_2b_1=0 \quad b_1x_1+b_3b_1=0$$

$$n-r=n-1.$$

$\lambda=0$ 的特征向量为：
$$k_1\begin{pmatrix}-b_2\\ b_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\\ \\x_n\end{matrix}+k_2\begin{pmatrix}-b_3\\ 0\\ b_1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\\ \\x_n\end{matrix}+\cdots+k_{n-1}\begin{pmatrix}-b_n\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ b_1\end{pmatrix}\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\\ \\x_n\end{matrix}$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 是不全为零的任意常数