§15.3 最短路问题

定义 给定图$G=<V, E>$，设有函数W：$E\to\mathbb{R}$。对任意$e\in E$，称$W(e)$为**边e上的权**。把$W(e)$标记在e上，则称G为**带权图**，记为 $G=<V,E,W>$。

注

① 若$e=(v_i,v_j)$ 或$e=<v_i,v_j>$，则记$W(e)=w_{ij}$

② 对$G'\subseteq G$，记$W(G')=\sum_{e\in E(G')} W(e)$，称为**子图$G'$的权**

③ 边上的权一般取非负实数。

定义 设$G=<V, E, W>$是一个无向带权图，每条边上的权均非负，则称G中权最小的(u,v)-路径为u到v的**最短路径**。

Dijkstra标号法：

设有无向赋权图$G=<V,E,W>$，这里 $\forall e\in E$, $W(e)\geq 0$, $(v_i, v_j)\notin E$, $w_{ij}=\infty$。取定$v_1\in V$，求v_1到其它顶点v_i的最短路径。

对每个顶点v_i进行**标号**：

P标号（永久性标号）：l_i^*=v_1到v_i最短路径的长

T标号（临时性标号）：l_i=v_1到v_i最短路径长的上界

步骤0：初始化：

v_1获P标号$l_1^*=0$。

$v_j\,(j>1)$获T标号$l_j=w_{1j}$

P标号顶点集$P_0=\{v_1\}$，剩余顶点构成T标号顶点集$T_0=V-P_0$

步骤1：中间结果：

假设已获P标号顶点集P_{r-1}，剩余的T标号顶点集$T_{r-1}=V-P_{r-1}$。

步骤2：修正过程：

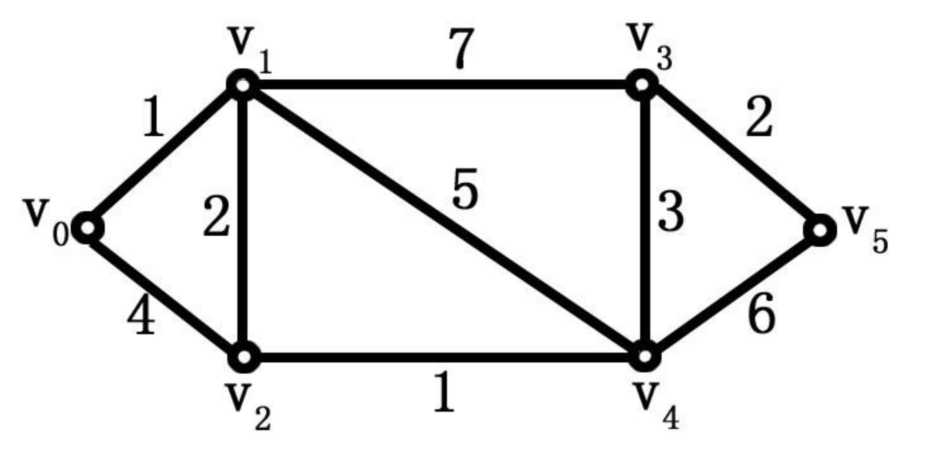
① 设$l_j=\min\{l_i \mid v_i\in T_{r-1}\}$，将$v_j$的T标号改为P标号$l_j^*=l_j$

② 对$\forall v_i\in T_{r-1}, i\neq j$，把$v_i$的T标号改为

$$\min\{l_i, l_j^*+w_{ji}\}$$

③ $P_r=P_{r-1}\cup\{v_j\}$，$T_r=T_{r-1}-\{v_j\}$

例 求下列无向带权图中从v_0到其它顶点的最短路径：



解 步骤0：

v_0获P标号$l_0^* = 0$。

$v_j\,(j>0)$获T标号

$$l_1=1,\ l_2=4,\ l_3=\infty,\ l_4=\infty,\ l_5=\infty$$

$P_0=\{v_0\}$， $T_0=V-P_0=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

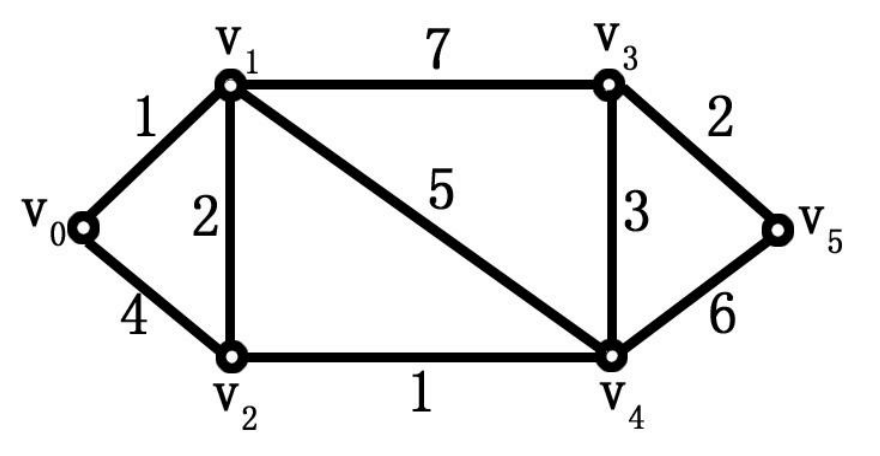
步骤1：

v_1获P标号$l_1^*=1$， $l_2=3,\ l_3=8,\ l_4=6,\ l_5=\infty$

$P_1=\{v_0, v_1\}$

$T_1=V-P_1$

$=\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$



步骤2:

v_2获P标号$l_2^*=3$， $l_3=8, l_4=4, l_5=\infty$

$P_2=\{v_0, v_1, v_2\}$， $T_2=V-P_2=\{v_3, v_4, v_5\}$

步骤3:

v_4获P标号$l_4^*=4$， $l_3=7, l_5=10$

$P_3=\{v_0, v_1, v_2, v_4\}$， $T_3=V-P_3=\{v_3, v_5\}$

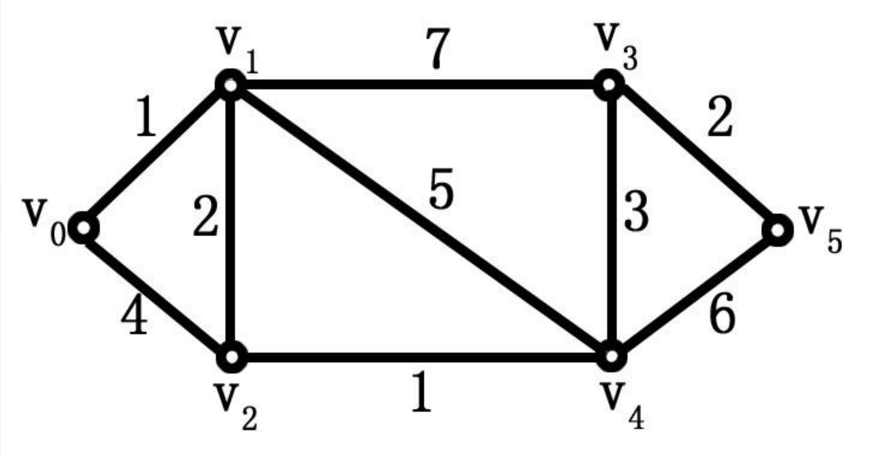
步骤4:

v_3获P标号$l_3^*=7$，

$l_5=9$

$P_4=\{v_0, v_1, v_2, v_4, v_3\}$

$T_4=V-P_4=\{v_5\}$



步骤5:

v_5获P标号$l_5^*=9$， $P_4=\{v_0, v_1, v_2, v_4, v_3, v_5\}$

于是，v_0到其它顶点的最短路径分别为

v_0v_1，$v_0v_1v_2$，$v_0v_1v_2v_4$，$v_0v_1v_2v_4v_3$，$v_0v_1v_2v_4v_3v_5$

步数 \ 顶点	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	0	1	4	∞	∞	∞
1		$1/v_0$	3	8	6	∞
2			$3/v_1$	8	4	∞
3				7	$4/v_2$	10
4				$7/v_4$		9
5						$9/v_3$

定义 设$G=\langle V,E,W\rangle$是一个无向带权图，每条边上的权均非负，则求经过每条边至少一次的最短回路的问题称为中国邮递员问题。

加边算法：

若G有欧拉回路C，则 C就是一个满足要求的最短回路；

若没有欧拉回路，则某些边必须重复通过。因为G必有偶数个奇度点，则先确定任意两个奇度点的最短路径，然后确定一种奇度点的两两分

对方案，使得各对奇度点之间最短路径长度之和最小。然后沿各对奇度点的最短路径每条边各加一条平行边，则G加边后不再有奇度点，是欧拉图。其欧拉回路就是满足要求的最短回路。

定义 设$G=<V,E,W>$是一个无向完全带权图，每条边上的权均非负，则求最短哈密顿回路的问题称为货郎担问题。

目前尚无有效算法，是NP完全问题。

小结：

1. 熟练掌握欧拉图的定义与性质

   欧拉回路，欧拉通路，存在定理

2. 欧拉回路的Fleury算法

   并，交，逆，右复合，幂，闭包

3. 熟练掌握哈密顿图的定义与性质

   哈密顿回路、哈密顿通路、定理1与定理2

4. 熟练掌握带权图的概念

   带权图，最短路径，Dijkstra算法