第二部分 集合论

- **集合论**是研究集合的结构、运算及性质的一个数学分支。
- 集合论是现代数学最重要的基础理论。
- 集合论和逻辑与一阶逻辑共同构成了数学的公理化基础。

§6.1 集合的基本概念

把一些事物汇集到一起组成一个整称为**集合**。这些事物称为这个集合的**元素**。

原则上，集合用大写英文字母$A, B, C, \cdots$标记，元素用小写英文字母$a, b, c, \cdots$标记。特别地，分别用$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$标记全体自然数的集合、全体整数的集合、全体有理数的集合、全体实数的集合、全体复数的集合。

集合有两种表示方法：

列元素法：$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$

谓词表示法：$\{x|F(x)\}$，$F(x)$表示x具有属性F

注 ① 集合中的元素每个只写一次

② 集合中的元素不计排列次序

例 英文字母集$\Omega=\{a, b, c, \cdots, z\}$

整数集$\mathbb{Z}=\{0, \pm1, \pm2, \cdots\}$

二次单位根的集合$A=\{x \mid x\in\mathbb{R}\wedge x^2=1\}$

$x\in A$：x是A的元素，称 x **属于** A。

$x\notin A$：x不是A的元素，称x**不属于**A。

定义 设A, B是两个集合，若B中的每个元素都是A的元素，则称 B是A的**子集**，记为$B\subseteq A$。

特殊数集的包含关系：$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$。

集合之间的包含可以符号化为：

$$B\subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x\in B\rightarrow x\in B)$$

定义 设A, B是两个集合，若$B\subseteq A$且$A\subseteq B$，则称A与B**相等**，记为$A=B$。

集合之间的相等可以符号化为：

$$A=B \Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$$

定义 设A, B是两个集合，若$B\subseteq A$且$A\neq B$，则称 B是A的**真子集**， 记为$A\subset B$。

集合之间的真包含可以符号化为：

$$B \subset A \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

特殊数集的真包含关系：$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$。

定义 不包含任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$。

空集可以符号化为：

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$$

定义 空集是一切集合的子集。

推论 空集是唯一的。

定义 由有限个元素构成的集合称为**有限集**，包含n个元素的集合称为**n元集**，包含m个元素的子集称为**m元子集**。

有限集的子集个数也是有限的，n元集的子集个数为

$$C(n,0)+C(n,1)+\cdots+C(n,n)=2^n$$

定义 设A是集合，称以A的所有子集为元素构成的集合为以A的**幂集**，记为$P(A)$。

若A是n元集，则$P(A)$是2^n元集。

定义 在讨论具体问题中，若所涉及的全部集合都是某一集合的子集，则称该集合为**全集**，记为 E。

注 全集的确定是相对的，依研究的问题而定。在许多问题中，全集较小可以使对问题的描述和处理更简单。