第二章 一维随机变量及其分布

第一节 随机变量

第二节 离散型随机变量及其分布

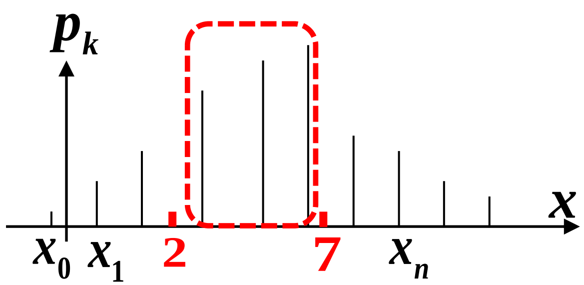
第三节 随机变量的分布函数

第四节 连续型随机变量及其分布

第五节 随机变量函数的分布

教学计划：4次课-12学时

复习



随机变量

$P(A)=P\{2<X\leq 7\}$

离散型

第2节

分布律

(0-1)分布

$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$

$B(n,p)$

$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

$P(\lambda)$

$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

连续型

第4节

概率密度

离散非离散

第3节

分布函数

第二章 一维随机变量及其分布

第一节 随机变量

第二节 离散型随机变量及其分布

第三节 随机变量的分布函数

第四节 连续型随机变量及其分布

第五节 随机变量函数的分布

教学计划：4次课-12学时

第二章 一维随机变量及其分布

第三节 随机变量的分布函数

- 随机变量的分布函数
- 离散型随机变量的分布函数

一. 随机变量的分布函数

引例 E：在一批灯泡中任意抽取一只，测试其寿命。$S=[0,\ T]$

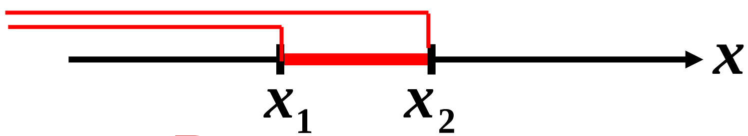
$A=$ {灯泡寿命大于100小时且不大于200小时} $=(100,\ 200]$

$=\{100<X\le 200\}$

非离散型

引入随机变量：X —— 灯泡的寿命　　$P(A)=P\{100<X\le 200\}$

将问题一般化：

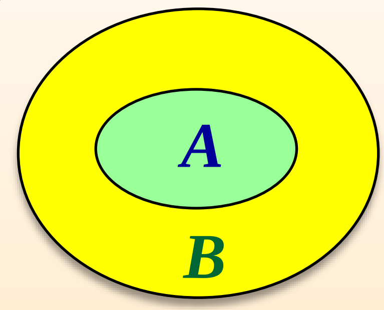


$$\{x_1<X\le x_2\}=\overset{B}{\{X\le x_2\}}-\overset{A}{\{X\le x_1\}}$$

$$\{X\le x_1\}\subset\{X\le x_2\}$$

$$P\{x_1<X\le x_2\}=\underline{P\{X\le x_2\}}-\underline{P\{X\le x_1\}}$$

某个实数左侧区间上的概率



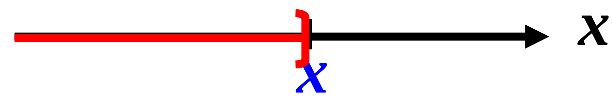
$P(B-A)=$

$P(B)-P(A)$

1. 定义: 设 X 是一个随机变量，对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$

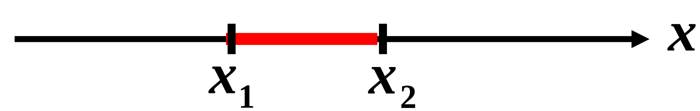
$$F(x)=P(X\le x)$$

称为 X 的分布函数。



注: ➢分布函数$F(x)$是定义在整个实数轴上的普通函数。

➢如果将 X 看作数轴上随机点的坐标，则分布函数 $F(x)$ 的值就表示 X 落在区间$(-\infty,x]$上的概率。



➢分布函数的作用：对任意的实数 x_1,x_2 $(x_1<x_2)$

$$P\{x_1<X\le x_2\}=P\{X\le x_2\}-P\{X\le x_1\}=F(x_2)-F(x_1)$$

非离散型随机变量：分布函数 → 计算概率

一.随机变量的分布函数

引例

E：在一批灯泡中任意抽取一只，测试其寿命。$S=[0,\ T]$

$A=\{$灯泡寿命 大于 100 小时且不大于200小时$\}$$=\left\{100<X\le 200\right\}$

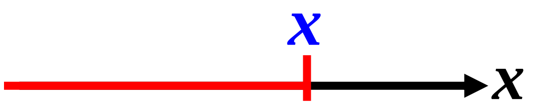
引入随机变量：X——灯泡的寿命　　$P(A)=P\left\{100<X\le 200\right\}$

非离散型　若已知X的分布函数$F(x)$，则：$=F(200)-F(100)$

2. 性质

$$F(x)=P(X\le x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

性质1 $F(x)$是一个不减函数，即 $x_1\le x_2$，则：$F(x_1)\le F(x_2)$



性质2 $0\le F(x)\le 1$ 且 $\begin{cases} F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0 \\ F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1 \end{cases}$

当 $x\to-\infty$，则 $\{X\le x\}\to\Phi$

$$F(x)=P\{X\le x\}\to P(\Phi)=0$$

当 $x\to+\infty$，则 $\{X\le x\}\to S$

$$F(x)=P\{X\le x\}\to P(S)=1$$

性质3 $F(x)$是右连续函数，即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$

第二章 一维随机变量及其分布

第三节 随机变量的分布函数

- 随机变量的分布函数
- 离散型随机变量的分布函数

二. 离散型随机变量的分布函数

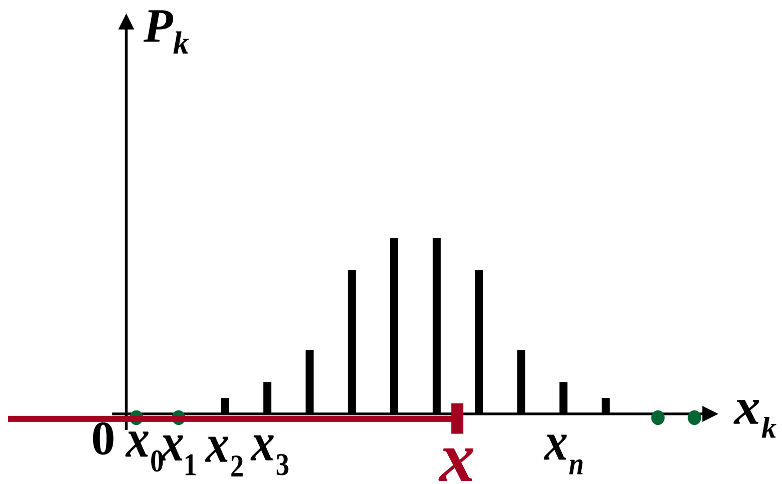
若离散型随机变量 X 的分布律为:

X	x_0	x_1	$x_2 \cdots$	$x_n \cdots$
P_k	p_0	p_1	$p_2 \cdots$	$p_n \cdots$

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots$$

则其分布函数为:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_k \le x} P(X = x_k)$$ --- x左侧区间的概率和



$F(x)=P(X\le x)$

例1. 设离散型随机变量 X 的分布律为:

X	0	1	2
P_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

求分布函数:

1）分布函数定义在整个实数轴上;

2）用离散点分区间;

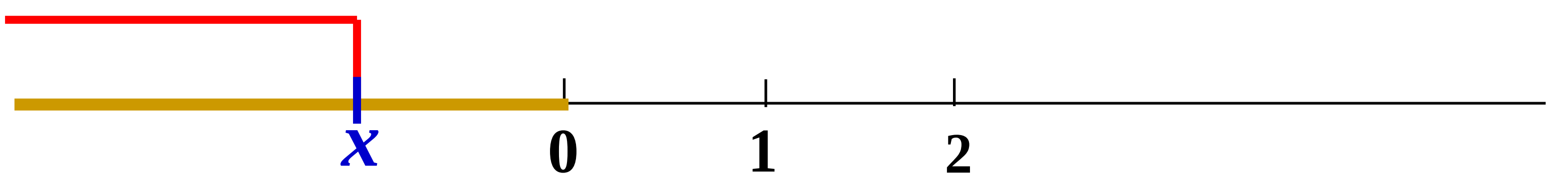
3）分区间求分布函数值。

求: (1) X的分布函数$F(x)$

(2) $P(X\le \frac{1}{2})$, $P(1< X\le \frac{3}{2})$, $P(1\le X\le \frac{3}{2})$

解:

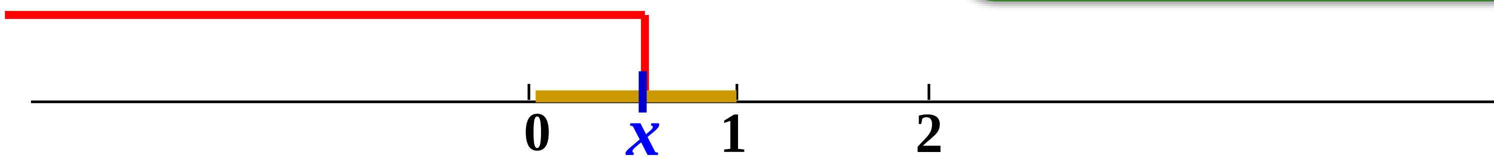
当 $x<0$ 时, $\{X\le x\}=\Phi$, $F(x)=0$



$$F(x)=P(X\le x)$$

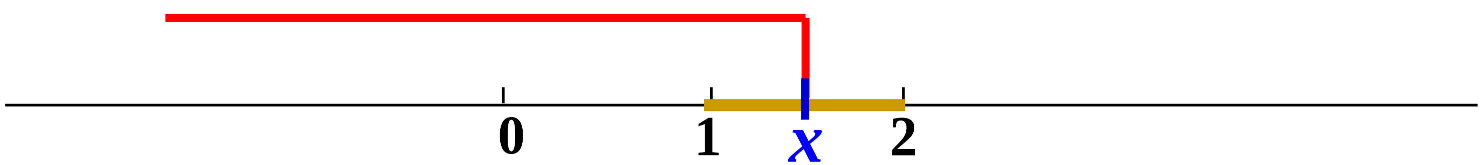
X	0	1	2
P_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

当 $0\le x<1$ 时



$$F(x)=P(X\le x)=P(X=0)=\frac{1}{3}$$

当 $1\le x<2$ 时

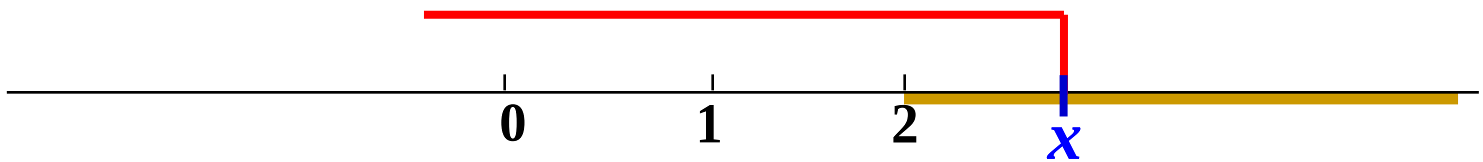


$$F(x)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

$$F(x)=P(X\le x)$$

X	0	1	2
P_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

当 $x\ge 2$ 时



$$F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$$

故得：$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{3} & 0\le x<1 \\ \frac{1}{2} & 1\le x<2 \\ 1 & x\ge 2 \end{cases}$

求分布函数：

1）分布函数定义在整个实数轴上；

2）用离散点分区间；

3）分区间求分布函数值。

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1/3, & 0\le x<1\\ 1/2, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

性质1 $F(x)$是一个不减函数

性质2 $0\le F(x)\le 1$ 且

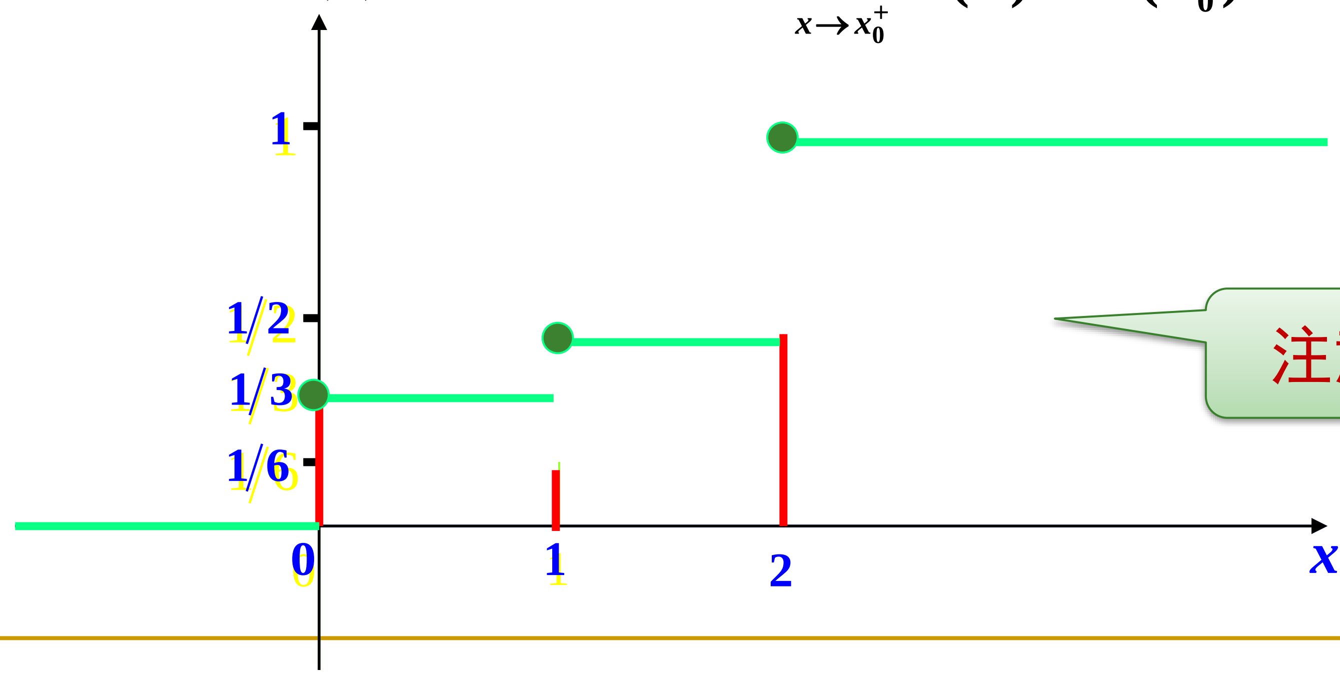
$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\ \lim_{x\to+\infty}F(x)=1$$

性质3 $F(x)$是右连续函数

分布函数图:

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=F(0)=1/3$$

$$\lim_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$$



注意右连续

例1. 设离散型随机变量X的分布律为:

X	0	1	2
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

求: (1) X的分布函数$F(x)$

(2) $P(X \le \frac{1}{2}), P(1 < X \le \frac{3}{2}), P(1 \le X \le \frac{3}{2})$

(2) 计算概率

方法1：用分布函数计算概率

X	0	1	2
P_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

$$P(X \le \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$$

$$P(1 < X \le \frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - F(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/3, & 0 \le x < 1 \\ 1/2, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

$$P(1 \le X \le \frac{3}{2}) = P(1 < X \le \frac{3}{2}) + P(X = 1)$$

$$= 0 + P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

$$\{1 \le X \le \frac{3}{2}\} = \{1 < X \le \frac{3}{2}\} \cup \{X = 1\}$$

$$F(x) = P(X \le x)$$

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

(2) 计算概率

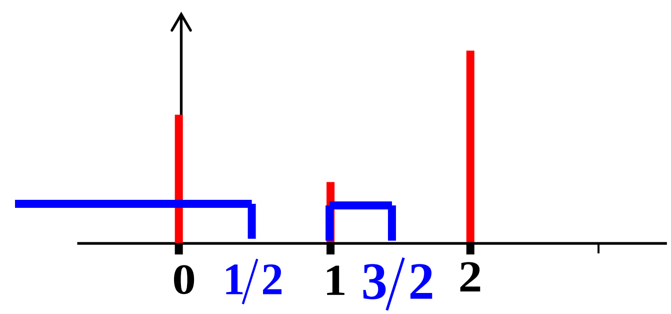
X	0	1	2
P_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

方法2：用分布律计算概率

$$P(X \le \frac{1}{2}) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

$$P(1 < X \le \frac{3}{2}) = 0$$

$$P(1 \le X \le \frac{3}{2}) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$$



注释： 分布律 $\xrightarrow{\text{课堂教学}}$ 分布函数

分布律 $\xrightarrow{\text{应用}}$ 概率

分布函数 $\rightarrow$ 概率

第二章 一维随机变量及其分布

第三节 随机变量的分布函数

- 随机变量的分布函数
- 离散型随机变量的分布函数

第二章 一维随机变量及其分布

第一节 随机变量

第二节 离散型随机变量及其分布

第三节 随机变量的分布函数

第四节 连续型随机变量及其分布

第五节 随机变量函数的分布

第二章 一维随机变量及其分布

第四节 连续型随机变量及其分布

- 连续型随机变量的概率密度
- 几种常见的连续型随机变量的分布

一. 连续型随机变量的概率密度

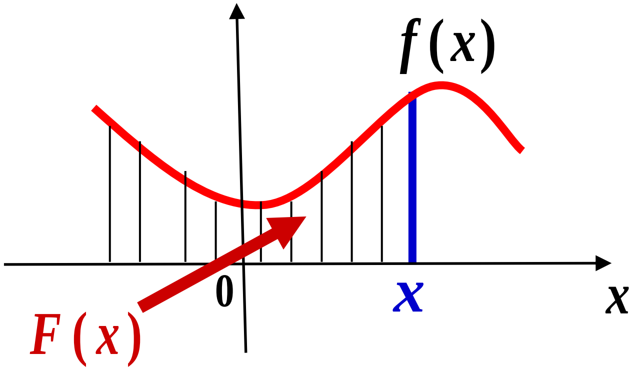
1. 定义 若对于随机变量 X 的分布函数$F(x)$, 存在非负函数 $f(x)$, 使得对于任意实数 x 有:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

则称 X 为连续型随机变量，$f(x)$为 X 的概率密度函数。

注:

- $f(x)$定义在整个实数轴上，即：$x \in (-\infty, +\infty)$
- $F(x)$在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。（高数）
- 几何意义：



2. 概率密度函数的性质

$$P(X \le x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

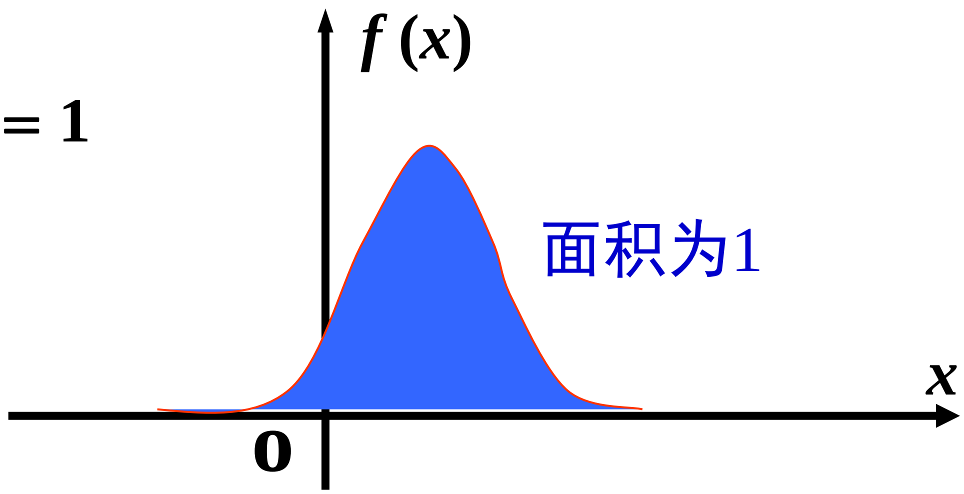
性质1 $f(x) \ge 0$

性质2 $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1}$

这两条性质是判定一个函数 $f(x)$ 是否为某随机变量 X 的概率密度函数的充要条件.

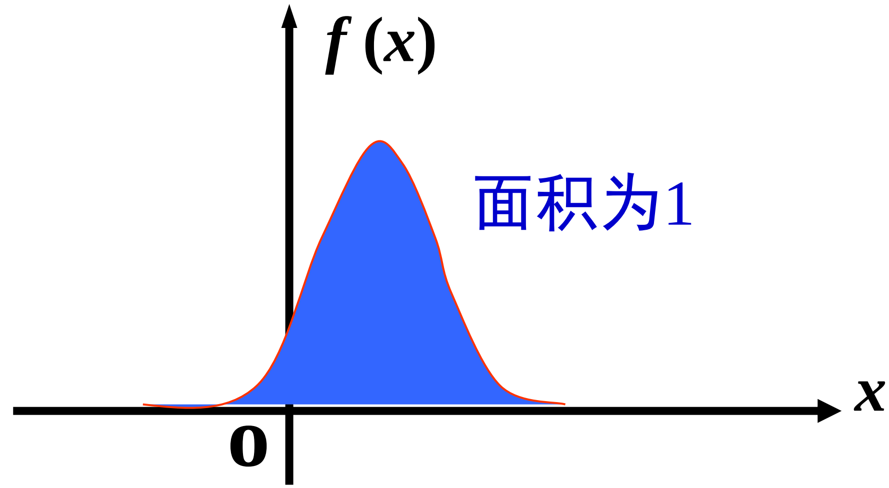
证明:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) = 1$$

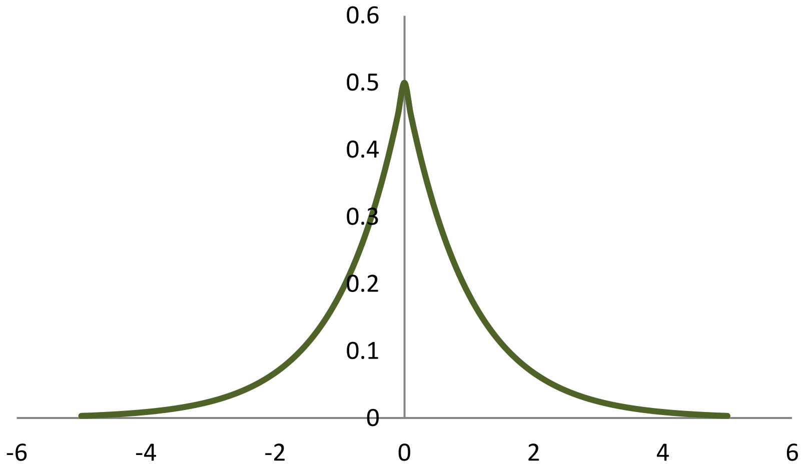


2. 概率密度函数的性质

性质2 $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1}$



例：$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},(-\infty<x<+\infty)$



$f(x)$是概率密度函数

例：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, x\geq 1\\ 0, x<1\end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{\infty} f(x)dx$$

$$=\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_{1}^{\infty}=\infty$$

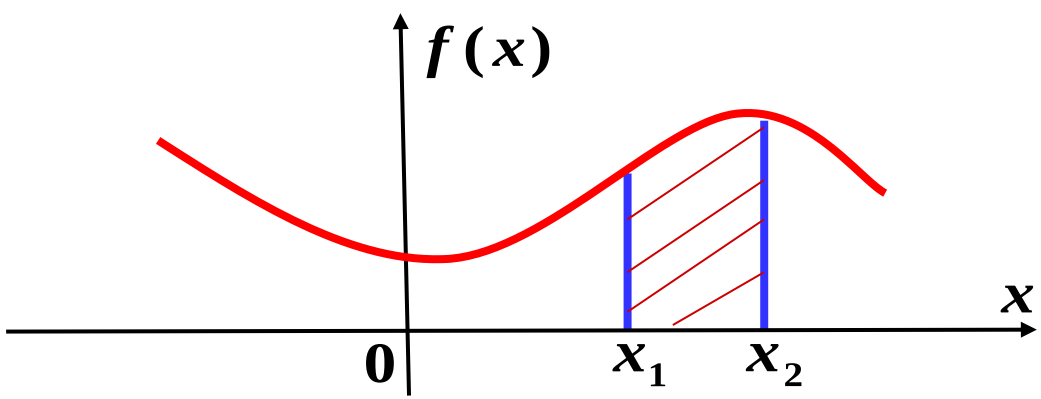
$f(x)$不是概率密度函数

$$P(X \le x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

性质3 $P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t$

证明： $\because F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{x_1} f(t)\mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t$

几何意义：X 落在区间 $(x_1, x_2]$ 的概率等于区间 $(x_1, x_2]$上曲线 $f(x)$ 之下的曲边梯形的面积。

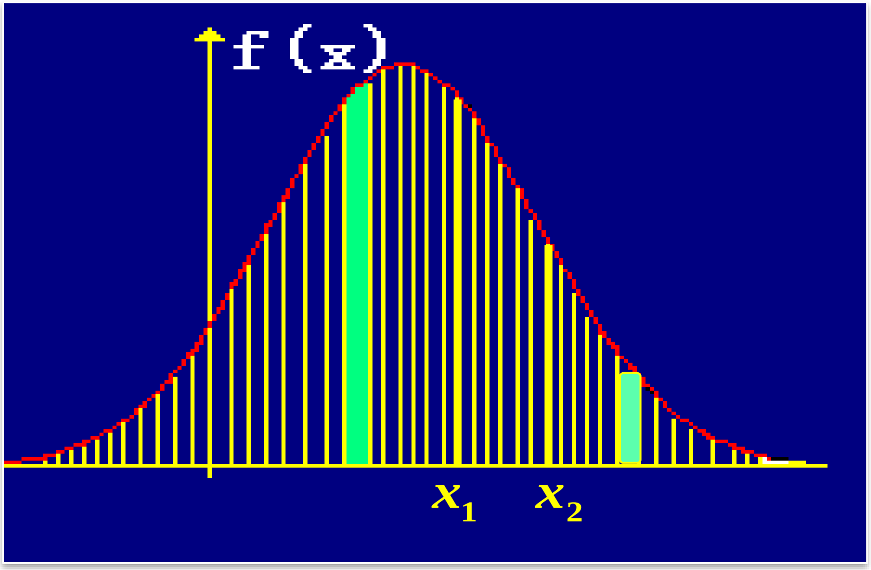


性质4 若 $f(x)$在 x 处连续，则有：$F'(x) = f(x)$ (高数)

注：理解概率密度的意义：

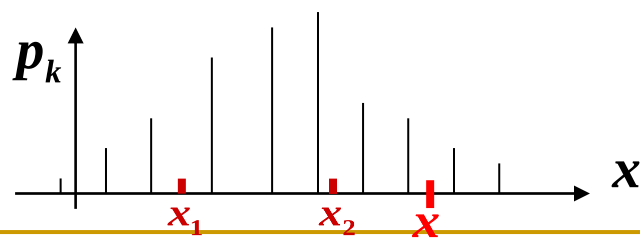
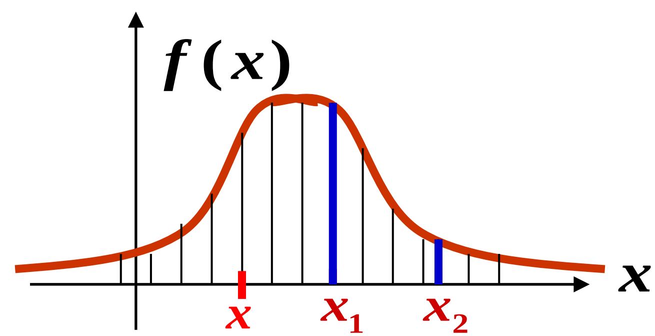
$$P(x_1 < X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$



$f(x)$描述了连续型随机变量的概率分布情况。即直观地给出了概率1在 X 取值的每个小区间上概率分布情况。

小结

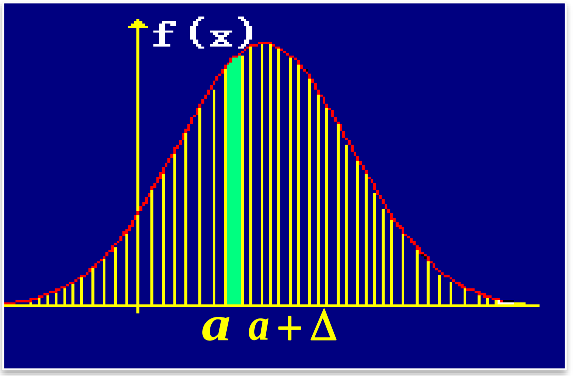
小结	随机变量	
	离散型随机变量	连续型随机变量
分布函数 $F(x)=P(X\le x)$ x左侧区间上的概率和 不直观	$F(x)=\sum\limits_{x_k\le x} p_k$ 右连续	$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 连续
概率分布 概率1分布情况,直观	分布律: $\sum p_k=1$ $\begin{array}{c\|cccc} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ \hline p_k & p_1 & p_2 & \cdots & p_k \end{array}$ 	概率密度: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=1$ 
概率计算	$P(x_1<X\le x_2)=\sum\limits_{x_1<x_k\le x_2} p_k$ $=F(x_2)-F(x_1)$	$P(x_1<X\le x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t$ $=F(x_2)-F(x_1)$

结论: $A=\Phi \underset{\text{不一定}}{\rightleftarrows} P(A)=0$

例: 若X是连续型随机变量，则$P\{X=a\}=0$，但$\{X=a\}\neq\Phi$

当$\Delta\to 0$ 时，$X\to a$

$$P\{a<X\le a+\Delta\}\to P\{X=a\}=0$$



$a<X\le a+\Delta$

这个结论的意义:

连续型随机量 X 在某区间上取值的概率只与区间长度有关，而与区间是闭，开，半开半闭无关，既有：

$$P(x_1\le X<x_2)=P(x_1<X\le x_2)=P(x_1\le X\le x_2)$$

$$=P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\boxed{P(x_1<X\le x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x}$$

例1. 证明：函数 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|} \quad (-\infty < x < +\infty)$

是一个连续型随机变量的概率密度函数.

证明： (1) 显然，$f(x) \geq 0 \quad (-\infty < x < \infty)$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}\mathrm{d}x$

$$= 2\times\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = 1$$

$f(x) \geq 0$

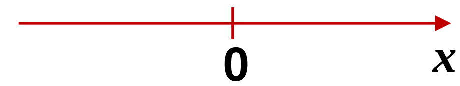
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

例1. 证明： 函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|} \quad (-\infty<x<+\infty)$

是一个连续型随机变量的概率密度函数.

证明： (1) 显然， $f(x)\ge 0$

$$|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\ge 0\end{cases}$$



$$(2)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-|x|}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}e^{-x}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}e^{x}-\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}e^{\boxed{-x}}\mathrm{d}(\boxed{-x})$$

$$=\frac{1}{2}e^{x}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{2}e^{-x}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{2}(e^{0}-e^{-\infty})-\frac{1}{2}(e^{-\infty}-e^{0})$$

$$=\frac{1}{2}(1-0)-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$f(x)\ge 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$

例2. 设某计算机的寿命(单位:小时)是一个连续型随机变量X,其概率密度为:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\frac{x}{100}}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

求: (1) λ的值;

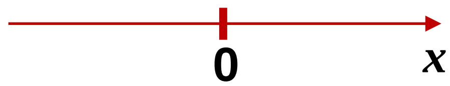
$P(50<X<150)$

(2) 这台计算机的寿命在50到150小时的概率;

(3) 寿命少于100小时的概率. $P(X<100)$

$$\int e^{y}\mathrm{d}y=\int \mathrm{d}e^{y}=e^{y}$$

解: (1)



$$\because\ 1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$$=0+\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\frac{x}{100}}\mathrm{d}x=-100\lambda\int_{0}^{+\infty} e^{\boxed{-\frac{x}{100}}}\mathrm{d}\left(\boxed{-\frac{x}{100}}\right)$$

$$=-100\lambda e^{-\frac{x}{100}}\Big|_{0}^{+\infty}=-100\lambda(0-1)=100\lambda$$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\frac{x}{100}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

(1) λ 的值.

(2) 50 到 150 小时

(3) 少于100小时

$$\therefore \lambda=\frac{1}{100}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$$

$$P(x_1 < X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$$

解：(2)

$$P(50 < X < 150) = \int_{50}^{150} f(x)\mathrm{d}x = \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{\boxed{-\frac{x}{100}}} \mathrm{d}x$$

$$\int_b^a e^y \mathrm{d}y = e^y \Big|_b^a = e^a - e^b$$

$$= -\int_{50}^{150} e^{-\frac{x}{100}} \mathrm{d}\left(-\frac{x}{100}\right)$$

$$= -e^{-\frac{x}{100}} \Big|_{50}^{150}$$

$$= -\left(e^{-\frac{150}{100}} - e^{-\frac{50}{100}}\right)$$

$$= e^{-0.5} - e^{-1.5}$$

$$= 0.384$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{x}{100}}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

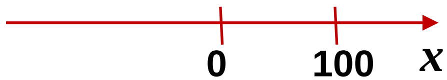
(1) λ 的值. $\lambda = \dfrac{1}{100}$

(2) 50 到 150 小时

(3) 少于100小时

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t$$

(3) $$P(X < 100) = \int_{-\infty}^{100} f(x)\mathrm{d}x$$



$$= \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{100} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= 0 + \int_{0}^{100} \frac{1}{100} e^{\boxed{-\frac{x}{100}}}\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{0}^{100} e^{-\frac{x}{100}}\mathrm{d}(-\frac{x}{100}) = -e^{-\frac{x}{100}}\Big|_{0}^{100}$$

$$= -(e^{-\frac{100}{100}} - e^{-\frac{0}{100}})$$

$$= 1 - e^{-1}$$

$$= 0.633$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{x}{100}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(1) λ 的值. $\lambda = \frac{1}{100}$

(2) 50 到 150 小时

(3) 少于100小时

$$\int_{b}^{a} e^{y}\mathrm{d}y = e^{y}\Big|_{b}^{a} = e^{a} - e^{b}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

例3.

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

求: (1) X 的分布函数;

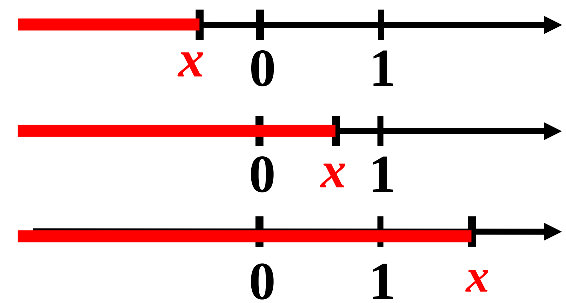
(2) $P(0.3 < X < 0.7)$

$$\int_b^a y^\mu \mathrm{d}y = \frac{y^{\mu+1}}{\mu+1}\Bigg|_b^a = \frac{a^{\mu+1}}{\mu+1} - \frac{b^{\mu+1}}{\mu+1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

求：(1) X 的分布函数；



解： $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$

当 $x<0$ 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0$

当 $0 \le x < 1$ 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot\mathrm{d}t + \int_0^x 2t\mathrm{d}t = t^2\Big|_0^x = x^2$

当 $x \ge 1$ 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot\mathrm{d}t + \int_0^1 2t\mathrm{d}t + \int_1^x 0\cdot\mathrm{d}t = t^2\Big|_0^1 = 1$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

求分布函数：

1）分布函数定义在整个实数轴上；

2）用**分断点**分区间；

3）分区间求分布函数值。

$$P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$$

例3.

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

求：(2) $P(0.3 < X < 0.7)$

解： $P(0.3 < X < 0.7) = F(0.7) - F(0.3) = 0.7^2 - 0.3^2 = 0.4$

$$= \int_{0.3}^{0.7} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0.3}^{0.7} 2x\mathrm{d}x = x^2 \Big|_{0.3}^{0.7}$$

$$= 0.7^2 - 0.3^2 = 0.4$$

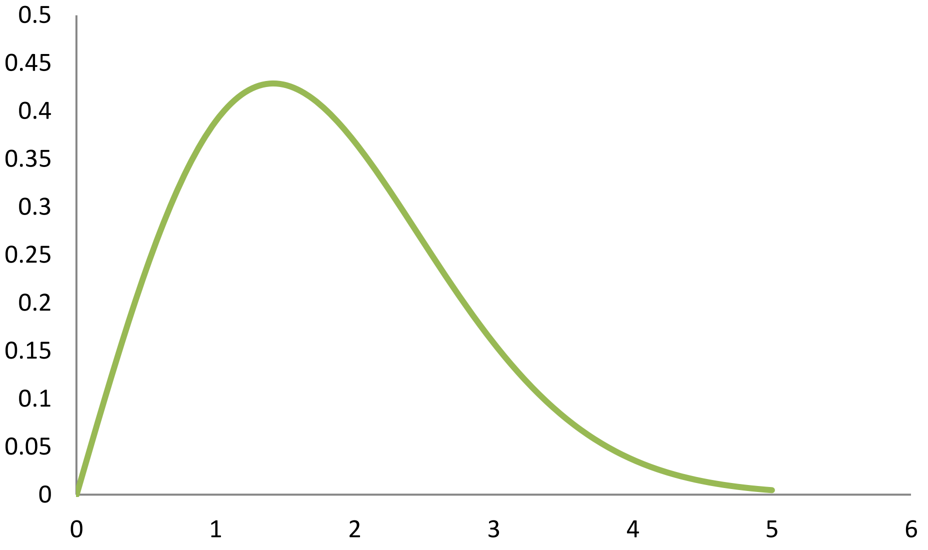
注释： 概率密度 $\xrightarrow{\text{课堂教学}}$ 分布函数

概率密度 $\xrightarrow{\text{应用}}$ 概率 $\leftarrow$ 分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

例4. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}} & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ $(a>0)$

求: (1) X 的分布函数 (2) $P(0\le X<1)$



$a=2$

例4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

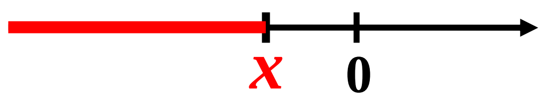
求分布函数：
1）分布函数定义在整个实数轴上；
2）用**分断点**分区间；
3）分区间求分布函数值。

求：(1) X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-\frac{x^2}{2a}} & x\ge 0\end{cases}$$

解： 由 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$

当 $x<0$ 时，



$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\cdot \mathrm{d}x=0$$

当 $x\ge 0$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\cdot \mathrm{d}x+\int_0^x -\frac{2x}{2a}e^{-\frac{x^2}{2a}}\mathrm{d}x=-\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2a}}\mathrm{d}\left(-\frac{x^2}{2a}\right)=\left[-e^{-\frac{x^2}{2a}}\right]\Big|_0^x$$

$$=1-e^{-\frac{x^2}{2a}}$$

例4. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (a>0)$

求: (2) $P(0 \le X < 1)$

解: $P(0 \le X < 1) = F(1) - F(0) = 1 - e^{-\frac{1}{2a}}$

$$= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}}\mathrm{d}x$$

$$= [-e^{-\frac{x^2}{2a}}]\Big|_0^1 = 1 - e^{-\frac{1}{2a}}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-e^{-\frac{x^2}{2a}} & x \ge 0 \end{cases}$$

例4.

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ $(a>$

性质1 $F(x)$是一个不减函数

性质2 $0\le F(x)\le 1$ 且

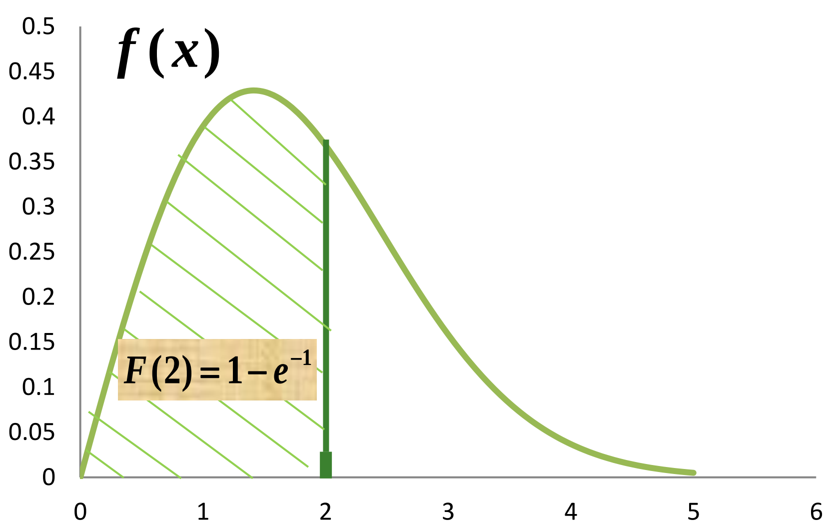
$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

性质3 $F(x)$是连续函数

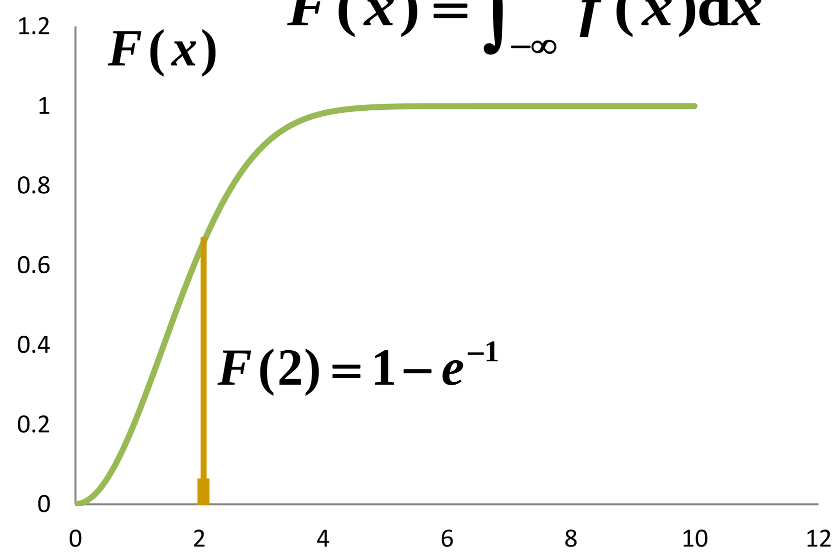
$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-\frac{x^2}{2a}} & x\ge 0\end{cases}$$

$$F(2)=\int_{-\infty}^{2}f(x)\mathrm{d}x$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x$$



$a=2$



$a=2$ 连续且单调增

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

例5. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2, & 0\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

(1) 求X 在区间(0.3,0.7)取值的概率.

(2) 求X 的概率密度.

解: (1) $P(0.3<X<0.7)=F(0.7)-F(0.3)=0.7^2-0.3^2=0.4$

(2) $f(x)=F'(x)=\begin{cases} 2x & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{其 它} \end{cases}$

注: $F'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F(x)-1}{x-1}=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2 \\ \lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1-1}{x-1}=0 \end{cases}$

$\therefore F'(1)$不存在。

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

例5. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2, & 0\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

(1) 求X 在区间(0.3,0.7) 取值的概率.

(2) 求X 的概率密度.

解: (1) $P(0.3<X<0.7)=F(0.7)-F(0.3)=0.7^2-0.3^2=0.4$

(2) $f(x)=F'(x)=\begin{cases} 2x & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{其　它} \end{cases}$

注: $F(x)$ 在1处导数不存在，由于改变被积函数 $f(x)$在个别点处的值不影响积分结果，可以在$F'(x)$ 没意义的点处，任意规定 $F'(x)$ 的值.

归纳题目类型:

★ (1) $f(x) \longrightarrow F(x)$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$

➢ $F(x)$定义在整个实数轴上。

➢ 一般 $f(x)$是分段函数，因此积分时要分区间。

(2) $F(x) \longrightarrow f(x)$ $f(x)=F'(x)$

➢ 在 $f(x)=F'(x)$ 没意义的点处可以任意规定一个值。

★ (3) $f(x)$或$F(x) \longrightarrow P\{x_1 < X \le x_2\}=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = F(x_2)-F(x_1)$

(4) 判断 $f(x)$是否是某个X 的概率密度 $f(x)\ge 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$

(5) 判断 $F(x)$是否是某个X 的分布函数 $F(x)$的性质

第二章 一维随机变量及其分布

第四节 连续型随机变量及其分布

- 连续型随机变量的概率密度
- 几种常见的连续型随机变量的分布
  - 均匀分布
  - 指数分布
  - 正态分布
  - 正态分布的分位点

作 业

授课内容	习题二
2.2 离散型随机变量及其分布律	2(1),3分布律，6, 7二项分布， 12, 泊松分布
2.3 随机变量的分布函数	17(1)(2)，19
2.4 连续型随机变量概率密度	20,21, 23,概率密度
	24指数分布，26,27,29正态分布
2.5 随机变量函数的分布	33离散, 34（1）, 35（1）（2）（3）连续