线 性 代 数

线性代数 54学时（17次课）

第1章 矩阵	基础	15学时(5次)
第2章 行列式	基础	9学时(3次)
第3章 线性方程组	核心	9学时(3次)
第4章 线性空间与线性变换	应用	3学时(1次)
第5章 特征值与特征向量	应用	9学时(3次)
第6章 二次型与正定矩阵	应用	6学时(2次)

第一章
矩　阵

第一章 矩阵

1.1 矩阵及其运算

1.2 分块矩阵

★1.3 可逆矩阵

1.4 高斯消元法

★1.5 矩阵的秩与初等变换

教学计划：5次课-15学时

第一章 矩阵

1.1 矩阵及其运算

- 矩阵的概念
- 矩阵的加法与数量乘法
- 矩阵与矩阵的乘法
- 矩阵的转置

1. 矩阵的概念

定义1.1 $m \times n$ 个数 $a_{ij},(i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n)$ 排成m行n列的数表

第2行第1列的元素

第1行第2列的元素

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}=A_{m\times n}$$

第m行第n列的元素

称为m行n列矩阵，简称 $m\times n$矩阵.

a_{ij} 位于A中第 i 行, 第 j 列, 称为矩阵A的元素.

元素是实数的矩阵称为实矩阵,

元素是复数的矩阵称为复矩阵.

1. 矩阵的概念

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ -9 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$ 是 2×4 实矩阵

第1行第4列的元素

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 & 3i \\ 5 & 4 & 7 \\ -1 & 2i & 6 \end{pmatrix}$$ 是 3×3 复矩阵

第3行第2列的元素

(4) 是 1×1 实矩阵

几种特殊矩阵

1. 方阵 行数与列数都等于n的矩阵,称为n阶方阵,

记作 A_n.

例如 $\begin{pmatrix} 11 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ 是一个3阶方阵

2. 行矩阵 只有一行的矩阵 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

称为行矩阵(或行向量).

3. 列矩阵 只有一列的矩阵 $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

称为列矩阵(或列向量).

4. 对角矩阵

方阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 称为对角矩阵(或对角阵）

主对角线

记作 $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 称为对角元素.

如果 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda \neq 0$,

$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ 称为数量矩阵.

5. 单位矩阵

主对角线上元素全为 1，其余元素全为0的方阵，称为单位矩阵(简称单位阵).

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

例 $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 不是单位阵

6. 零矩阵

元素全为零的矩阵称为零矩阵， $m \times n$ 零矩阵记作 $O_{m\times n}$，或 O.

例 $O_{1\times 3} = (0,0,0)$ $\quad O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. 三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

主对角线

上三角矩阵 $\qquad$ 下三角矩阵

$a_{ij} = 0,(i > j, j = 1,2,\cdots,n-1)$ $\qquad$ $a_{ij} = 0,(i < j, j = 2,3,\cdots,n)$

同型矩阵

两个矩阵的行数，列数相等时，称为同型矩阵.

例 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 2}$ 与 $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 8 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}_{3\times 2}$ 是同型矩阵.

矩阵相等

两个矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 为同型矩阵，并且对应元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$，$(i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n)$

则称矩阵A与B相等，记作$A=B$.

注意：$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq (0,0)$

线性方程组的表示

简单线性方程组
$$\begin{cases} 3x+4y-6z=4 \\ x-y+4z=1 \\ -x+3y-10z=1 \end{cases}$$

一般线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

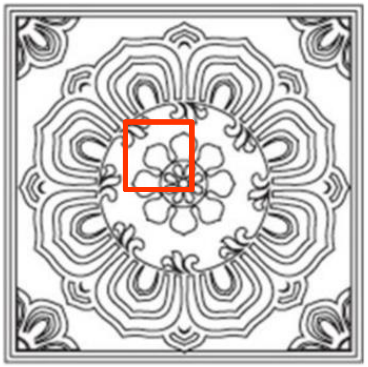
线性方程组的表示

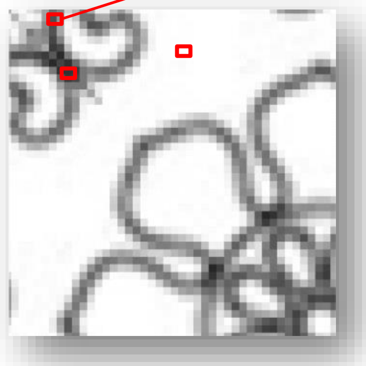
线性方程组 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$ 系数矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ 增广矩阵

矩阵应用 — 人脸识别
— 图像处理



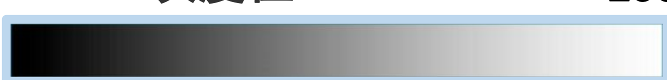


254	254	254	255	255	252	254	238	161	126	201	244	185	120	157	234	255	251	252	254	251
254	254	254	255	255	254	254	245	181	138	185	245	240	151	124	203	251	254	254	254	254
254	254	255	254	252	255	255	248	194	144	172	235	255	194	133	166	230	255	254	254	255
254	255	254	254	252	254	255	252	209	138	148	230	255	211	144	155	225	254	247	244	245
255	254	254	254	255	254	252	255	230	147	111	194	240	177	120	161	214	217	200	192	193
255	252	252	255	252	254	254	252	248	193	123	130	144	99	70	114	147	143	141	151	151
254	255	254	254	254	252	255	252	254	244	183	94	39	51	79	107	131	157	175	185	186
254	255	255	252	254	255	252	255	255	244	187	101	61	89	122	147	175	210	231	237	242
245	248	252	255	252	252	255	255	234	172	123	124	141	117	98	107	111	138	203	254	245
181	194	209	230	248	254	255	234	154	97	133	187	157	88	107	147	117	79	137	223	208
138	144	138	147	193	244	244	172	97	130	211	228	128	90	182	240	210	130	120	172	159
185	172	148	111	123	183	187	123	133	211	255	227	117	116	227	255	248	196	149	138	117
245	235	230	194	130	94	101	124	187	228	227	224	144	117	194	247	254	221	164	111	86
240	255	255	240	144	39	61	141	157	128	117	144	174	113	124	204	254	235	170	89	64
151	194	211	177	99	51	89	117	88	90	116	117	113	101	84	141	221	247	183	78	60
124	133	144	120	70	79	122	98	107	182	227	194	124	84	81	97	157	191	161	104	94
203	166	155	161	114	107	147	107	147	240	255	247	204	141	97	95	109	100	102	117	106
251	230	225	214	147	131	175	111	117	210	248	254	254	221	157	109	128	104	67	77	72
254	255	254	217	143	157	210	138	79	130	196	221	235	247	191	100	104	117	94	121	123
254	254	247	200	141	175	231	203	137	120	149	164	170	183	161	102	67	94	183	228	218
254	254	244	192	151	185	237	254	223	172	138	111	89	78	104	117	77	121	228	254	255
254	255	245	193	151	186	242	245	208	159	117	86	64	60	94	106	72	123	218	255	254

图像

分辨率	500×500
宽度	500 像素
高度	500 像素

0　　灰度值：0–255　　255



像素 ⟹ 灰度值

图像 ⟹ 灰度值构成的矩阵

矩阵应用—图像处理

图像	
分辨率	500×500
宽度	500 像素
高度	500 像素

命令行窗口

```
>> A=imread('chuanghua1.bmp');
fx >>
```

工作区

名称	值
A	500x500 uint8

变量 - A

A

500x500 uint8

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255	255
2	255	255	255	255	246	246	246	246	246	246	246	246	246	246	246	246	246	246	246	246	246	246	246	246	246	246	246	246
3	255	255	246	246	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
4	255	255	246	8	7	7	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247
5	255	246	8	7	247	164	164	164	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247
6	255	246	8	7	164	164	164	164	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247
7	255	246	7	247	164	164	164	164	247	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	255	246	7	247	164	164	164	247	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	255	246	7	247	247	247	247	7	8	246	246	246	246	246	246	246	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
10	255	246	7	247	247	247	7	7	246	255	246	246	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
11	255	246	7	247	247	247	7	8	246	246	246	7	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247
12	255	246	7	247	247	247	7	8	246	246	7	247	164	164	164	164	164	164	247	164	164	247	164	164	164	164	164	247
13	255	246	7	247	247	247	7	8	246	8	247	164	155	91	164	164	164	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247	247
14	255	246	7	247	247	247	7	8	246	8	247	164	155	155	164	164	247	7	7	7	7	7	247	7	7	7	7	7
15	255	246	7	247	247	247	7	8	246	7	247	164	155	164	247	247	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
16	255	246	7	247	247	247	7	8	246	7	247	164	164	164	247	7	8	246	246	246	246	246	246	246	246	246	246	246
17	255	246	7	247	247	247	7	8	246	7	247	164	164	247	7	8	246	246	255	246	246	246	246	246	246	246	246	246
18	255	246	7	247	247	247	7	8	8	7	247	164	247	7	8	246	246	255	255	246	246	246	246	246	246	246	246	8
19	255	246	7	247	247	247	7	8	8	7	247	247	247	7	8	246	255	255	246	8	7	7	7	7	7	7	7	7
20	255	246	7	247	247	247	7	8	8	7	247	164	247	7	8	246	246	246	8	7	247	164	155	155	155	155	155	155
21	255	246	7	247	247	247	7	8	8	7	247	164	247	7	8	246	246	246	7	247	155	82	82	82	82	82	82	82
22	255	246	7	247	247	247	7	8	8	7	247	164	247	7	8	246	246	246	7	164	82	73	73	73	73	73	73	82
23	255	246	7	247	247	247	7	8	8	7	247	164	247	247	8	246	246	246	7	155	82	73	73	73	82	82	82	91
24	255	246	7	247	247	247	7	8	8	7	247	164	247	7	8	246	246	246	7	155	82	73	73	82	155	164	164	247
25	255	246	7	247	247	247	7	8	8	7	247	164	247	7	8	246	246	246	7	155	82	73	82	155	247	7	7	7
26	255	246	7	247	247	247	7	8	8	7	247	164	247	7	8	246	246	246	7	155	82	73	82	164	7	8	246	246

工作区

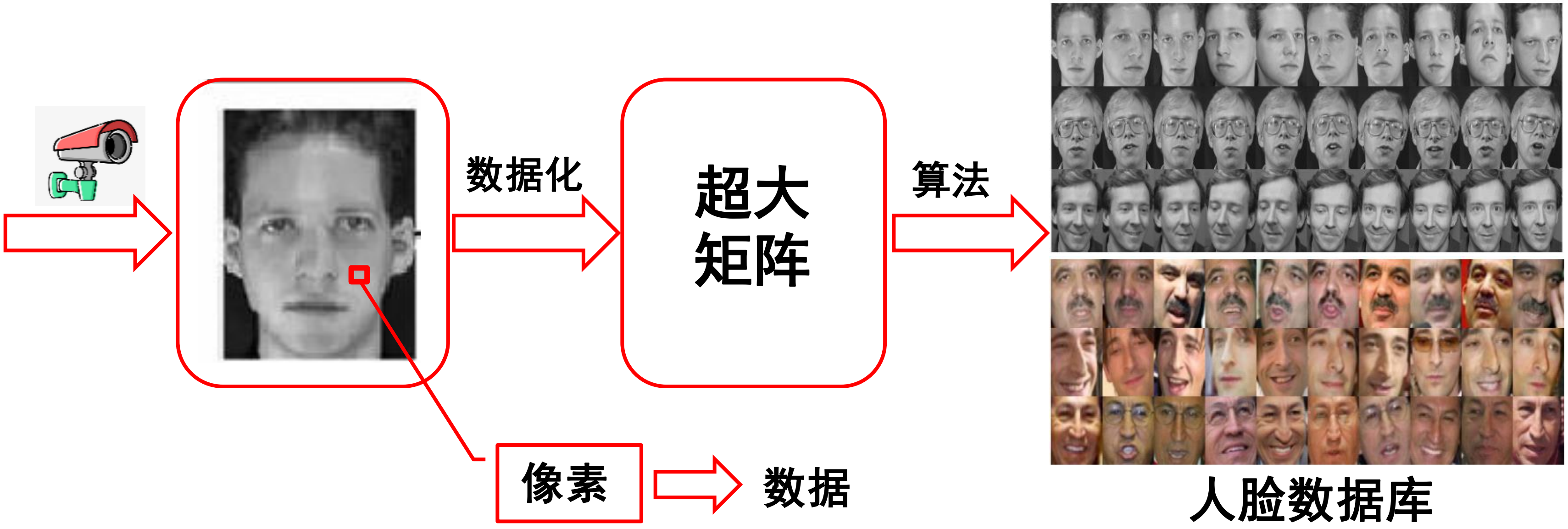
名称	值
A	500x500 uint8

矩阵应用 — 人脸识别

监控

考勤


身份验证



人脸数据库

第一章 矩阵

1.1 矩阵及其运算

- 矩阵的概念
- 矩阵的加法与数量乘法
- 矩阵与矩阵的乘法
- 矩阵的转置

2. 矩阵的加法与数量乘法

定义1.2 (加法)

设有两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$, A与B的和

记作 $A+B$, 规定为:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

注意： 只有两个矩阵是同型矩阵，才能进行加法运算.

例1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 3}+\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 3}=\begin{pmatrix} 1+0 & 2+2 & 3-1 \\ 0+1 & 4+3 & -1+4 \\ 1+3 & 3+1 & 6+6 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

矩阵加法的运算规律

(1) 交换律 $A+B=B+A$

(2) 结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) 零矩阵的特性 $A+O=O+A=A$

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$ 称为矩阵A的负矩阵.

(4) 矩阵A存在负矩阵$-A$，满足 $A+(-A)=O$

矩阵减法： $A-B=A+(-B)$

矩阵减法：$A-B=A+(-B)$

例2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 3} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1-0 & 2-2 & 3+1 \\ 0-1 & 4-3 & -1-4 \\ 1-3 & 3-1 & 6-6 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -5 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

数量乘法

定义1.3

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, λ 是一实数或复数,

规定 $\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

称为 λ 和矩阵A的数量乘积(数乘).

数乘矩阵的运算规律（设A,B为$m\times n$矩阵，λ,μ 为数）

$$(1)\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$$

$$(2)\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$$

$$(3)\ \lambda\mu A=\lambda(\mu A)=\mu(\lambda A)$$

$$(4)\ 1\cdot A=A,\quad 0\cdot A=O$$

矩阵相加与数乘合起来，统称为矩阵的线性运算.

第一章 矩阵

1.1 矩阵及其运算

- 矩阵的概念
- 矩阵的加法与数量乘法
- 矩阵与矩阵的乘法 ★
- 矩阵的转置 ★

3. 矩阵与矩阵的乘法

定义1.4

矩阵 $A_{m\times p}$ 列数　　　　矩阵 $B_{p\times n}$ 行数

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

记 $C=AB=(c_{ij})_{m\times n}$

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$$

3. 矩阵与矩阵的乘法

例3 $C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}_{2\times 2}$

$c_{11}=$ 第1行×第1列 $=-2\times 2+4\times(-3)=-16$

$c_{12}=$ 第1行×第2列 $=-2\times 4+4\times(-6)=-32$

$c_{21}=$ 第2行×第1列 $=1\times 2+(-2)\times(-3)=8$

$c_{22}=$ 第2行×第2列 $=1\times 4+(-2)\times(-6)=16$

3. 矩阵与矩阵的乘法

例4 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 4}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

$AB=?$ 没有意义

注意： (1) 只有当左矩阵的列数和右矩阵的行数相等时，两个矩阵才能相乘。

练习1

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 \\ -1 & -4 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 6 & 60 & 16 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

c_{11} = 第1行×第1列 $= 7\times 0 + 2\times(-1) + 4\times 2 = 6$

c_{12} = 第1行×第2列 $= 7\times 8 + 2\times(-4) + 4\times 3 = 60$

c_{13} = 第1行×第3列 $= 7\times(-2) + 2\times 7 + 4\times 4 = 16$

练习1

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 \\ -1 & -4 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 6 & 60 & 16 \\ 3 & 17 & -39 \\ & & \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$c_{21}=$ 第2行×第1列$=0\times 0+(-5)\times(-1)+(-1)\times 2=3$

$c_{22}=$ 第2行×第2列$=0\times 8+(-5)\times(-4)+(-1)\times 3=17$

$c_{23}=$ 第2行×第3列$=0\times(-2)+(-5)\times 7+(-1)\times 4=-39$

练习1

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 \\ -1 & -4 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 6 & 60 & 16 \\ 3 & 17 & -39 \\ -4 & -3 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$c_{31}=$ 第3行×第1列$=1\times 0+2\times(-1)+(-1)\times 2=-4$

$c_{32}=$ 第3行×第2列$=1\times 8+2\times(-4)+(-1)\times 3=-3$

$c_{33}=$ 第3行×第3列$=1\times(-2)+2\times 7+(-1)\times 4=8$

练习2

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

$c_1 =$ 第1行×第1列$= 7\times 0 + 2\times(-1) + 4\times 2 = 6$

$c_2 =$ 第2行×第1列$= 0\times 0 + (-5)\times(-1) + (-1)\times 2 = 3$

$c_3 =$ 第3行×第1列$= 1\times 0 + 2\times(-1) + (-1)\times 2 = -4$

练习3

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}}_{E} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

（单位矩阵）

注意： (2) 矩阵乘法不满足交换律，即：

一般情况下， $AB \neq BA$

例5

$$AB = \underset{1\times 3}{(1,2,3)} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \left(1\times 3 + 2\times 2 + 3\times 1 \right)_{1\times 1} = 10$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} (1,2,3)_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

故 $AB \neq BA$

矩阵乘法的运算规律

(1) $(AB)C = A(BC)$;

(2) $(A+B)\underline{C} = \underline{AC} + \underline{BC}$;

$\underline{C}(A+B) = \underline{CA} + \underline{CB}$;

(3) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$; (其中 λ 是数)

(4) $A_{m\times n}E_n = E_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$; (单位矩阵的作用)

线性方程组的表示

将线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

写成矩阵乘积的形式.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}}_{b}$$

系数矩阵 A

$Ax = b$ √

$AX = b$ ×

矩阵乘法应注意的几点

(1) $AB \neq BA$

(2) $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ or } B = 0$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

但 $A \neq 0, B \neq 0$

矩阵乘法应注意的几点

(1) $AB \neq BA$

(2) $AB = 0 \cancel{\Rightarrow} A = 0 \ or \ B = 0$

(3) $\cancel{A}B = \cancel{A}C$，若 $A \neq 0 \cancel{\Rightarrow} B = C$ $\quad \cancel{3}x = \cancel{3}y \rightarrow x = y$

因为 $AB = AC \Rightarrow A(B - C) = 0$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$ 且 $A \neq 0,$ 但 $B \neq C$

方阵的幂

定义1.5 设A是n阶方阵，k是自然数，

记 $A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k\text{个}}$ 称为A 的k次幂.

运算规律

(1) $A^m A^k = A^{m+k}$;

(2) $(A^m)^k = A^{mk}$. m, k 为正整数

问题： $(AB)^m \overset{?}{\cancel{=}} A^m B^m$ $(3\cdot 5)^4 = 3^4 \cdot 5^4$ √

$$(AB)^m = \underbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}_{m\text{个}} \neq \underbrace{(A\cdot A\cdots A)}_{m\text{个}}\underbrace{(B\cdot B\cdots B)}_{m\text{个}} = A^m B^m$$

方阵的幂

定义1.5 设A是n阶方阵，k是自然数，

记 $A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k个}$ 称为A 的k次幂.

运算规律

(1) $A^m A^k = A^{m+k}$;

(2) $(A^m)^k = A^{mk}$. m, k 为正整数

结论： $(AB)^m \neq A^m B^m$

$$(A \pm B)^2 \cancel{=} A^2 \pm 2AB + B^2$$

$$(A+B)(A-B) \cancel{=} A^2 - B^2$$

$$(A+E)(A-E) = A^2 - E$$

方阵的幂

定义1.5 设A是n阶方阵, k是自然数,

记 $A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k\text{个}}$ 称为A 的k次幂.

结论: $(AB)^m \neq A^m B^m$

$$(A\pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$(A+E)(A-E) = A^2 - E$$

验证: $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

$$(A+E)(A-E) = A^2 - AE + EA - E^2 = A^2 - E$$

方阵A的n次多项式

设 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是 x 的n次多项式

定义 若A是n阶方阵，则

$$f(A)=a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

称为方阵A的n次多项式。

例： $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

A^2 方阵A的2次多项式

A^3-2A^2+A-3E 方阵A的3次多项式

课堂练习

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\quad 计算\ A^3-2A^2+A-3E$$

解：$$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}$$

$$A^3-2A^2+A-3E$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\8&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0\\0&-3\end{pmatrix}=-3E$$

例6

$$A=\begin{pmatrix}0&2&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \text{求方幂} A^n$$

解:

$$A^2=\begin{pmatrix}0&2&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}0&0&6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O$$

$$\therefore A^n=A^3A^{n-3}=O\ (n\geq 3)$$

第一章 矩阵

1.1 矩阵及其运算

- 矩阵的概念
- 矩阵的加法与数量乘法 $A \pm B$ λA
- 矩阵与矩阵的乘法 AB A^n
- 矩阵的转置

4. 矩阵的转置

定义1.6 把矩阵A的列变成相应的行得到的新矩阵，称为A的转置矩阵, 记作 A^T.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A_{m\times n} \longrightarrow A^T_{n\times m}$$

4. 矩阵的转置

例 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix}_{2\times 3}$ $\qquad A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 2 & 8\end{pmatrix}_{3\times 2}$

例7 设 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 是实矩阵，若 $A^T A=O$，则 $A=O$.

证明:

$$A^T A=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+c^2 & ab+cd\\ ab+cd & b^2+d^2\end{pmatrix}=0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ a^2+c^2=0,\quad b^2+d^2=0$$

因为是实矩阵, 所以 $a=b=c=d=0$, 即$A=0$.

转置矩阵的性质

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

(4) $(AB)^T = B^T A^T$

$(AB)^T \neq A^T B^T$

转置矩阵的性质

$(4)\ (AB)^T = B^T A^T$ √

验证：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&-1\end{pmatrix}_{2\times 3} \quad B=\begin{pmatrix}0&2\\1&4\\3&1\end{pmatrix}_{3\times 2} \quad AB=\begin{pmatrix}11&13\\1&15\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1&0\\2&4\\3&-1\end{pmatrix}_{3\times 2} \quad B^T=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&4&1\end{pmatrix}_{2\times 3} \quad (AB)^T=\begin{pmatrix}11&1\\13&15\end{pmatrix}$$

$$B^T A^T=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&4&1\end{pmatrix}_{2\times 3}\begin{pmatrix}1&0\\2&4\\3&-1\end{pmatrix}_{3\times 2}=\begin{pmatrix}11&1\\13&15\end{pmatrix}$$

$$A^T B^T = C_{3\times 3}$$

转置矩阵的性质

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

(4) $(AB)^T = B^T A^T$

对称矩阵

定义1.7 若方阵A，如果 $a_{ij}=a_{ji}$，则称A为对称矩阵.

若方阵A满足为 $A^T=A$，则称A为对称矩阵.

对称阵的元素以主对角线为对称轴对应相等.

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 6 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

若A是3阶对称阵，则

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

反对称矩阵

定义1.8 n阶方阵A，如果$a_{ij}=-a_{ji}$，则称A为反对称矩阵.

若方阵A满足为 $A^T=-A$， 则称A为反对称矩阵.

$$a_{ii}=-a_{ii}\Rightarrow 2a_{ii}=0\Rightarrow a_{ii}=0$$

例

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & -5 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

若A是3阶反对称阵，则

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix} = -A=\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

例8 设列矩阵 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 满足 $X^TX=1$，且 $H=E-2XX^T$，证明：$H^2=E$

证明：

$$X^TX=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$$

$$XX^T=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=n\text{阶方阵}$$

例8 设列矩阵 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 满足 $X^TX=1$，且 $H=E-2XX^T$，证明：$H^2=E$

证明：

$$H^2=(E-\overset{A}{2XX^T})^2$$

$$=E^2-2(2XX^T)+(2XX^T)^2$$

$$=E-4XX^T+4(XX^T)(XX^T)$$

$$=E-4XX^T+4X(\underbrace{X^TX}_{1})X^T$$

$$=E-4XX^T+4XX^T$$

$$=E$$

$$(E-A)^2$$
$$=(E-A)(E-A)$$
$$=E^2-A-A+A^2$$
$$=E^2-2A+A^2$$

第一章 矩阵

1.1 矩阵及其运算

- 矩阵的概念
- 矩阵的加法与数量乘法 $A \pm B$ λA
- 矩阵与矩阵的乘法 AB A^n
- 矩阵的转置 A^T

作 业 习题一

授课内容	习题一
1.1 矩阵及运算	9,10 矩阵运算，11(3)(4)(5) ,13(6)(7)乘法，14(1) 矩阵运算 √
1.2 分块矩阵	42 分块矩阵乘法
1.3 可逆矩阵	34,35,36,40,41(1)(2)求逆，45(1)分块矩阵逆阵，50
1.4 高斯消元法	1(1)(4)消元法， 3,5消元法(含参)
1.5 矩阵秩 初等变换	30(1)(4) ,31求逆，39解矩阵方程，24(2),25秩，45(2)分块矩阵逆阵