1. 5 功和能（work and energy)

1.5.1 功

1.5.2 动能定理

1.5.3 保守力和势能

1.5.4 机械能守恒

1.5.1 功 （work）

一．功的概念及定义

质点在力 $\vec{F}$ 的作用下, 发生一小段位移$\Delta\vec{r}$ 时，称此力对该质点做了功.

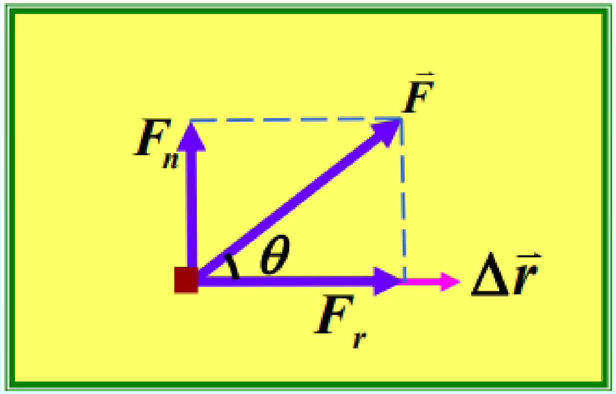
功的两要素 $\begin{cases} \text{力} \\ \text{在力的方向上的位移} \end{cases}$

二．恒力的功

$$W = F|\Delta\vec{r}|\cos\theta = F_r|\Delta\vec{r}|$$

$$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

单位：焦耳 1J=1N· m



功的特点:

功是标量. 它无方向，但有正、负。

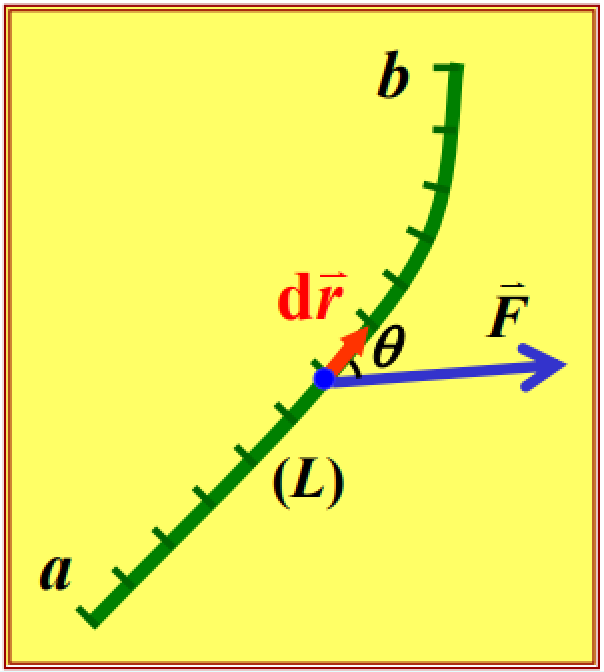
$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$, 正功 ； $\theta = \frac{\pi}{2}$, 不做功; $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$, 负功

三. 变力的功

元功 $\mathrm{d}W=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

质点从 $a\rightarrow b$ 的功 W

$$W=\int_{a(L)}^{b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{a(L)}^{b}F|\mathrm{d}\vec{r}|\cos\theta=\int_{a(L)}^{b}F\cos\theta\ \mathrm{d}s$$



直角坐标系中

$$W=\int_{a(L)}^{b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{a(L)}^{b}\left(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z\right)$$

$$\vec{F}=F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k}$$

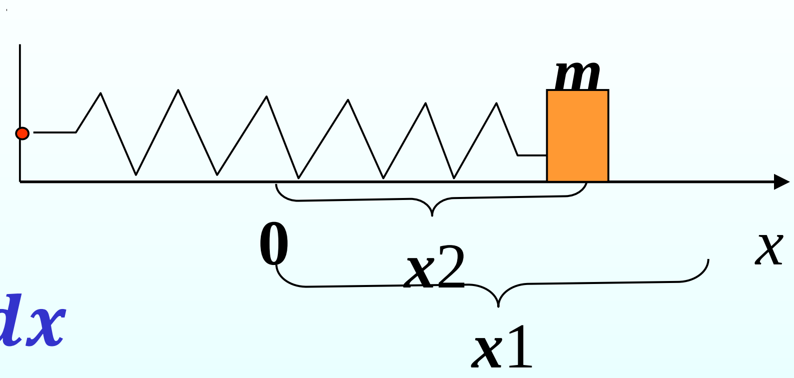
$$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x\hat{i}+\mathrm{d}y\hat{j}+\mathrm{d}z\hat{k}$$

功的大小与路径相关。

注意：在积分过程中，不仅力的大小和方向可能改变，而且力和线元之间的夹角也可能改变.

例： 弹性力的功。以弹簧原长为坐标原点，计算 m 由 $x1 \rightarrow x2$ 弹性力的功。

$$f_x = -kx$$

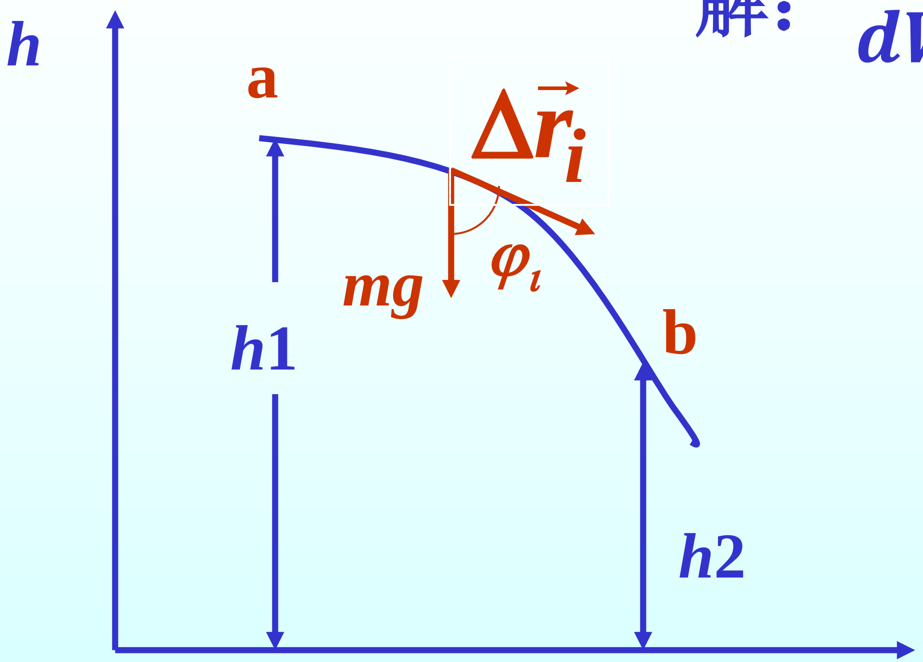


$$W = \int_{x1}^{x2} f_x \, dx = \int_{x1}^{x2} -kx \, dx$$

$$= -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_{x1}^{x2} = -\frac{1}{2}kx_2^{\ 2} + \frac{1}{2}kx_1^{\ 2} = \frac{1}{2}kx_1^{\ 2} - \frac{1}{2}kx_2^{\ 2} \quad \rangle 0$$

由此式可见, 弹力的功只与小球的初末位置有关, 而与移动的中间过程无关, 例如若先将 m 从 x_1 点向右拉伸，然后再压缩至 x_2 点，弹力的功仍为上式

例：m 沿曲线由$a \to b$,　　求重力的功



解：$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = mg|d\vec{r}|\cos\varphi$

$$|d\vec{r}|\cos\phi = -dh$$

$$dW = -mgdh$$

$$W = \int_a^b dW = \int_{h1}^{h2} -mgdh$$

$$= mg(h1 - h2)$$

与弹性力一样，重力所作的功只取决于运动物体的起、末位置，与中间过程无关。

四. 合力的功

质点在几个力的作用下，沿某一路径从 a 运动到 b

$\vec{F}_1, \vec{F}_2 \cdots, \vec{F}_n$ 合力为 $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

$$W_{ab} = \int_{a(L)}^{b} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{a(L)}^{b} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{a(L)}^{b} \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{a(L)}^{b} \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \cdots + \int_{a(L)}^{b} \vec{F}_n \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= W_{1ab} + W_{2ab} + \cdots + W_{nab}$$

合力的功等于各个力功的和

五. 功率

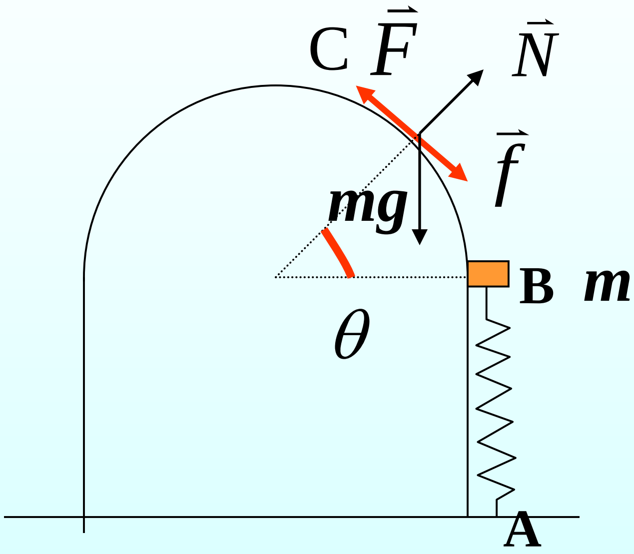
单位时间内的功，描述做功的快慢.

1. 平均功率 $\overline{P} = \dfrac{\Delta W}{\Delta t}$ 单位：瓦特（W）

2. 瞬时功率 $P = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta W}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{V} = FV\cos\theta$$

例：　弹簧(倔强系数为k)一端固定在A点,另一端连一质量为m的物体, 靠在光滑的园柱体表面 (半径 a),弹簧原长 AB，在外力作用下极缓慢地沿表面从B到C，求：　外力做的功



解：物体m匀速移动 合外力为零

切向合外力为零

$$F = mg\cos\theta + ka\theta$$

$$W = \int_B^C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

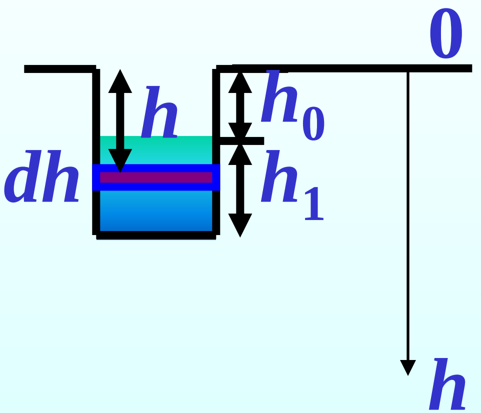
$$= \int_0^{\theta_c} mg\cos\theta\, a\, d\theta + \int_0^{\theta_c} ka\theta\, a\, d\theta$$

$$= mga\sin\theta_c + \frac{1}{2}ka^2\theta_c^2$$

例. 已知：地下贮水池横截面 S，池中贮水深度 h_1，水平面与地面间 h_0。

求：将池中水全部吸到地面需作功 W= ?

解： 对象：一层水（坐标如图）



$$dm = \rho dV = \rho(Sdh)$$

重力： $dmg = \rho gSdh$

克服重力所做的元功：

$$dW = (dmg)h = hgdm$$

$$W = \int dW = \int_{h_0}^{h_0+h_1} \rho gShdh = \frac{1}{2}S\rho g[h_1^2 + 2h_0h_1]$$

1.5.2　动能定理

一、动能

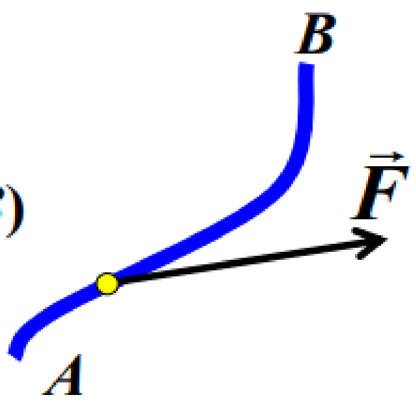
质量为m，速率为v的质点的动能定义为：

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$ 单位：焦耳（J）（SI）

二、质点的动能定理

合外力对质点所做的功等于质点动能的增量

$$\boxed{W_{AB} = E_{kB} - E_{kA} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2} \qquad (A \to B)$$



$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = m\mathrm{d}\vec{v}\cdot\vec{v} = mv\mathrm{d}v$$

$$W_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}W = \int_{v_A}^{v_B} mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{kB} - E_{kA}$$

讨论

$$W_{AB}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

1. 动能定理给出了力的空间积累效应，即功可以改变质点的动能。

2. 其优点是当作用力在位移过程中不清楚时，就可通过始、末状态动能的增量来求得该力的功。

功是过程量，动能是状态量。

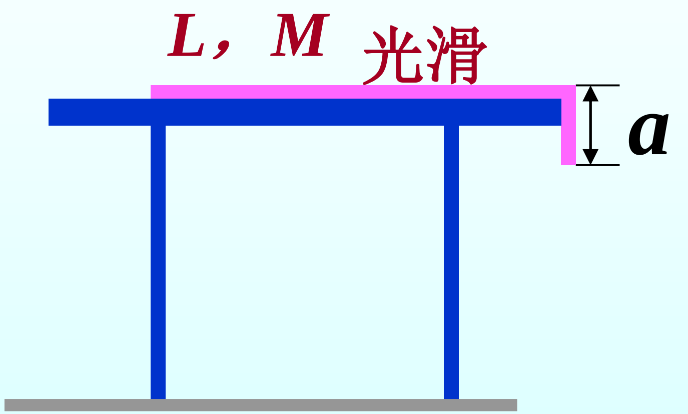
3. 在所有惯性系中，动能定理形式保持不变。

$$W_{AB}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

但是，动能定理的量值相对不同惯性系值不相同，即（V^2_2-V^2_1）的值不相同。

例：长度为L、质量为M的均匀链条,置于水平光滑桌面上。开始时,有少部分链条（长度为a）下垂在桌外。在重力作用下,链条下落。

求: 当链条尾端刚刚离开桌面时的速率 $v = ?$

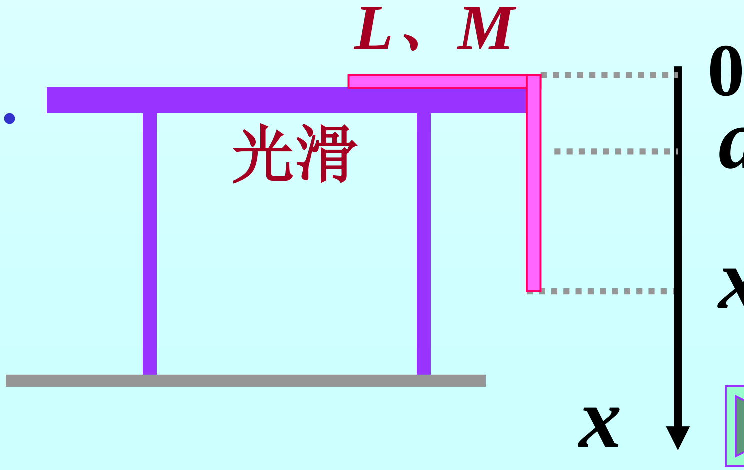


解： 链条下落是重力做功的结果，当下落长度变化时, 重力大小也变化，因此为变力做功。

用动能定理可求末状态速度。

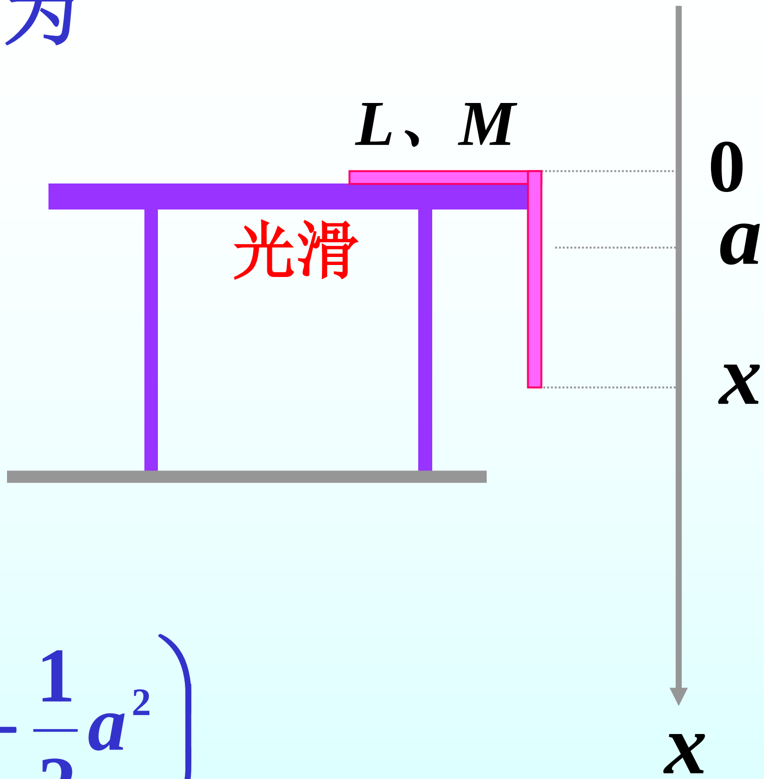
1. 建立坐标 ox , 向下为正方向.

2. 某时刻端点位置为 x.



下落部分的质量及所受重力分别为

$$m = \frac{M}{L}x \qquad f = mg = \frac{M}{L}xg$$

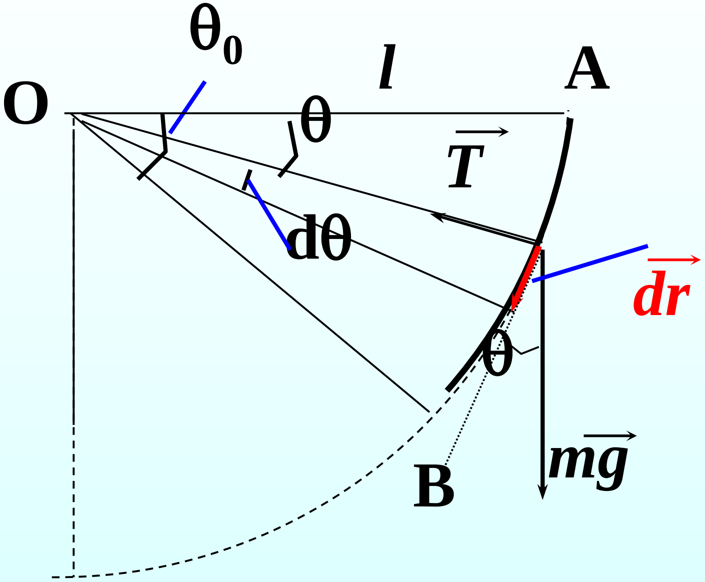


$$dW = f \cdot dx = \frac{M}{L}xg \cdot dx$$

$$W = \int_a^L \frac{M}{L}gx \cdot dx = \frac{M}{L}g\left(\frac{1}{2}L^2 - \frac{1}{2}a^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2 - 0 \qquad v = \sqrt{\frac{g}{L}\left(L^2 - a^2\right)}$$

例：质量为*m*的小球经长为 *l* 的摆线悬挂于固定点O,开始时把小球拉到水平位置，并自由释放，求摆线下摆角为 θ_0 时小球的速率*v*.



解：外力为绳子张力和重力
绳子张力始终与位移垂直，不作功

$$W_{AB}=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_A^B m\vec{g}\cdot d\vec{r}$$

$$=mg\int_0^{\theta_0}\cos\theta\, l\, d\theta = mgl\sin\theta_0$$

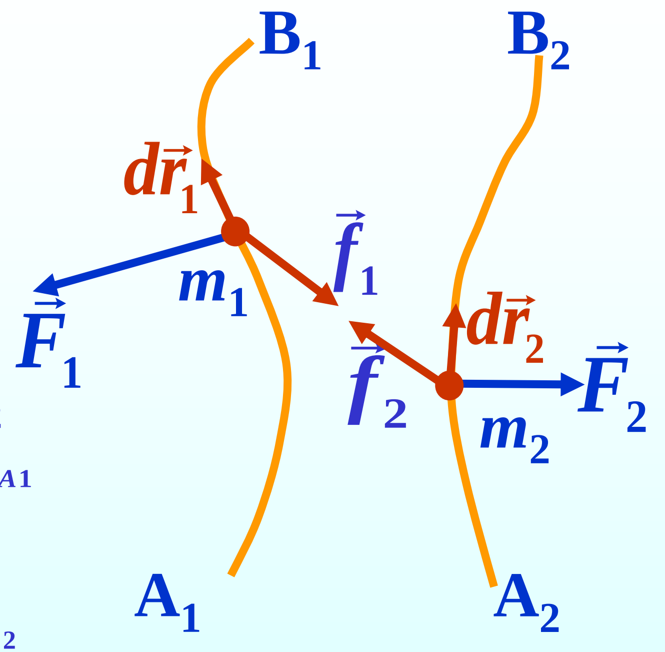
由动能定理 $\frac{1}{2}mv_B^2-0=mg\,l\sin\theta_0$

$$v_B=\sqrt{2gl\sin\theta_0}$$

三. 质点系的动能定理

两个质点的系统

$$\begin{cases} \vec{f}_1, \vec{f}_2 \text{ ----为内力.} \\ \vec{F}_1, \vec{F}_2 \text{ ----为外力.} \end{cases}$$



分别应用质点动能定理:

$$\int_{A_1}^{B_1} \left(\vec{F}_1 + \vec{f}_1\right) \cdot d\vec{r}_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{1_{B1}}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1_{A1}}^2$$

$$\int_{A_2}^{B_2} \left(\vec{F}_2 + \vec{f}_2\right) \cdot d\vec{r}_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2_{B2}}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2_{A2}}^2$$

$$\int_{A_1}^{B_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_{A_2}^{B_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \int_{A_1}^{B_1} \vec{f}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_{A_2}^{B_2} \vec{f}_2 \cdot d\vec{r}_2$$

$$= \left(\frac{1}{2} m_1 v_{1_{B1}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2_{B2}}^2\right) - \left(\frac{1}{2} m_1 v_{1_{A1}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2_{A2}}^2\right)$$

$$\int_{A_1}^{B_1}\vec{F}_1\cdot d\vec{r}_1+\int_{A_2}^{B_2}\vec{F}_2\cdot d\vec{r}_2+\int_{A_1}^{B_1}\vec{f}_1\cdot d\vec{r}_1+\int_{A_2}^{B_2}\vec{f}_2\cdot d\vec{r}_2$$

$$=\left(\frac{1}{2}m_1v_{1_{B1}}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2_{B2}}^2\right)-\left(\frac{1}{2}m_1v_{1_{A1}}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2_{A2}}^2\right)$$

$$W_{外}+W_{内}=E_{kB}-E_{kA}$$

外力总功 + 内力总功 ＝ 系统总动能的增量

内力功的和不一定为零（∵各质点位移不一定相同）。

内力虽不能改变系统的动量，但能改变系统的动能。

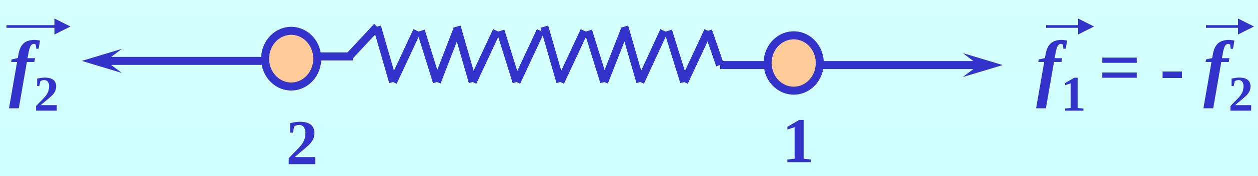
例：爆竹爆炸的过程, 内力和为零, 但内力所做的功转化为了动能

四、 一对力的功

1.一对力

分别作用在两个物体上的大小相等、方向相反的力，我们称之为“一对力”。

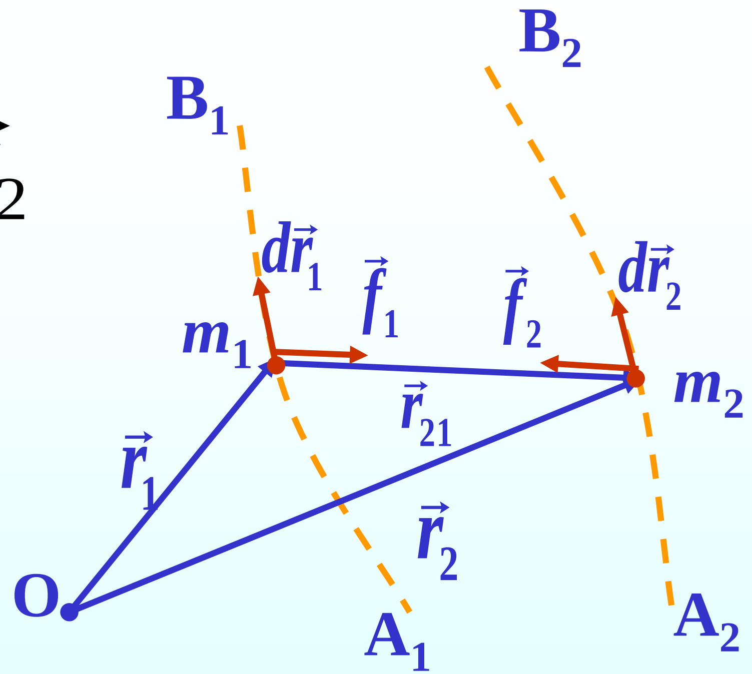
一对力通常是作用力与反作用力，但也可以不是。如图示的 f_1与 f_2就不是作用力与反作用力，但仍是一对力。



2. 一对力的功

$$dW_{对} = \vec{f}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_2 \cdot d\vec{r}_2$$

$$= \vec{f}_2 \cdot d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{f}_2 \cdot d\vec{r}_{21}$$



$d\vec{r}_{21}$ m_2相对于m_1的元位移。

一对力所做的功，等于其中一个质点受的力和该质点相对另一质点的位移的点积。

说明

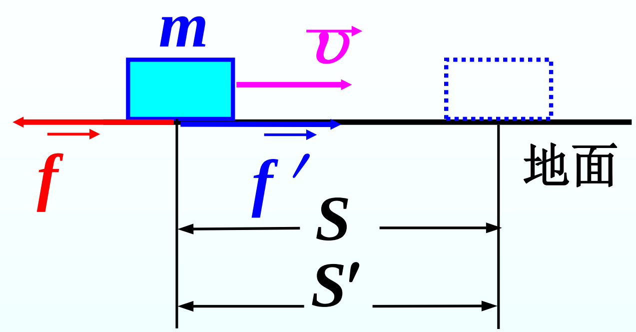
1) $dW_{对}$与参考系选取无关。

为方便起见，计算时常认为其中一个质点静止，并以该质点所在位置为原点，计算另一质点受力所做的功，这就是一对力的功。

2）一对滑动摩擦力的功恒小于零

以地面为参考系：

$$W_{对} = \vec{f} \cdot \vec{S} = -f \cdot S$$



以滑块为参考系：

$$W_{对} = \vec{f}' \cdot \vec{S}' = -f' \cdot S' = -f \cdot S$$

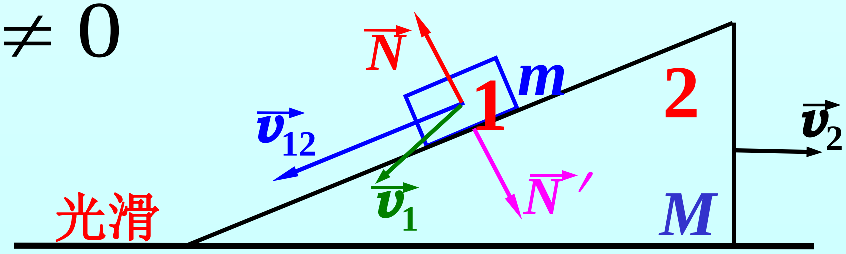
3）在无相对位移或相对位移与一对力垂直的情况下，一对力的功必为零。

图中 $\vec{N}$ 不垂直于 $\vec{v}_1$ $\quad W_N \neq 0$

$\vec{N}'$ 不垂直于 $\vec{v}_2$ $\quad W_{N'} \neq 0$

但 $W_{对} = W_N + W_{N'} = 0$

$(\because \vec{N} \perp \vec{v}_{12}$，即$\vec{N} \perp \mathrm{d}\vec{r}_{12})$



1.5.3　保守力和势能

一. 保守力定义

如果力所做的功只与物体的始末位置有关而与路径无关，这样的力称为保守力.

或：物体沿闭合路径绕行一周，力对物体所做的功等于零，这样的力称为保守力

如：重力、万有引力、静电力、弹性力。

二. 非保守力

作功与路径有关的力称为非保守力

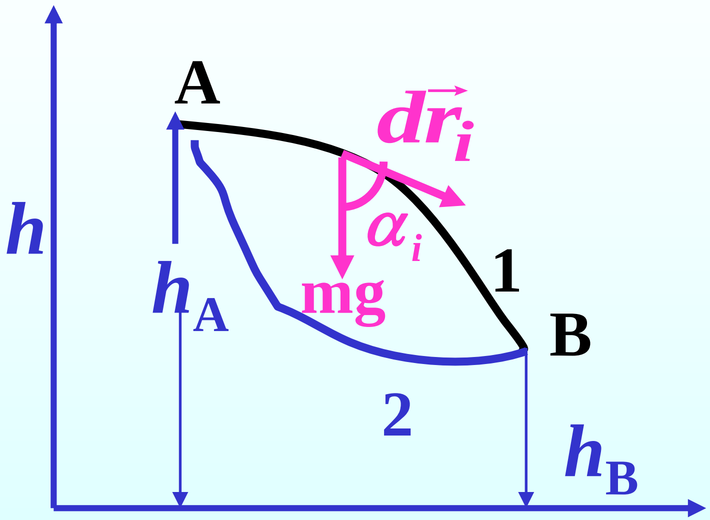
例如：摩擦力（耗散力）—— 作功恒为负

爆炸力：作功为正。

三、几种保守力

1. 重力

$$W=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_A^B mg|d\vec{r}|\cos\alpha$$



$$|d\vec{r}|\cos\alpha=-dh$$

$$=\int_{h_A}^{h_B}-mgdh=-(mgh_B-mgh_A)$$

无论物体沿 1 路径还是 2 路径结果都如此

$$\oint dW=\int_{A(L_1)}^{B} dW+\int_{B(L_2)}^{A} dW=\int_{h_A}^{h_B}-mgdh+\int_{h_B}^{h_A}-mgdh=0$$

可见，重力的功只与初末位置有关，与路径无关。

2. 万有引力

质点m_1和m_2间有万有引力作用,计算这一对力的功可以认为m_1静止，且选m_1为原点，则m_1对m_2的万有引力为:

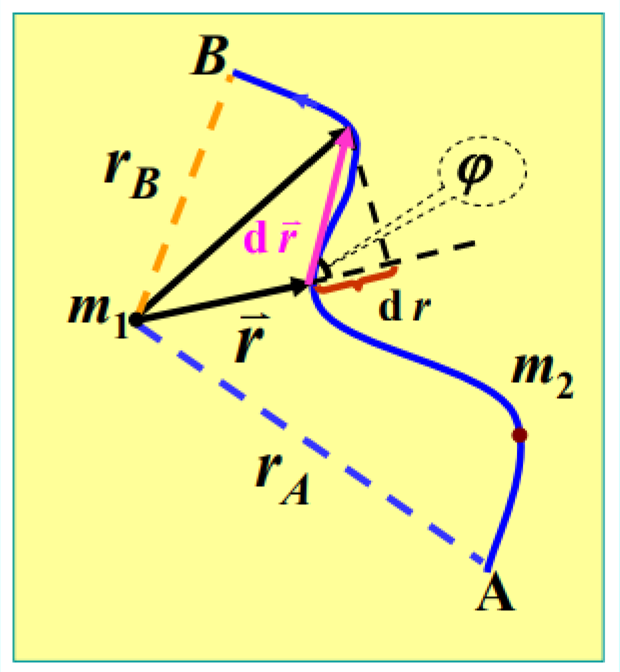
$$\vec{f} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_A^B -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{r}$$

$$\because \hat{r}\cdot d\vec{r} = 1\cdot\left|d\vec{r}\right|\cos\phi = dr$$

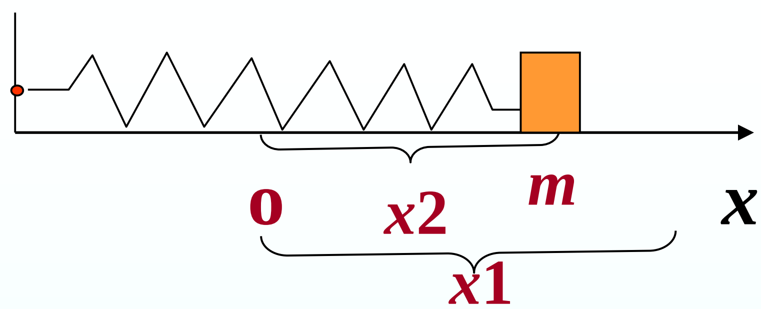
$$\therefore W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} -\frac{GMm}{r^2}dr$$

$$W_{AB} = \frac{GMm}{r_B} - \frac{GMm}{r_A}$$



一对万有引力做功之和只与两质点的始末相对位置有关。

3. 弹簧的弹力



$$W=\int_{x1}^{x2} f_x\,dx=-\frac{1}{2}kx_2{}^2+\frac{1}{2}kx_1{}^2$$

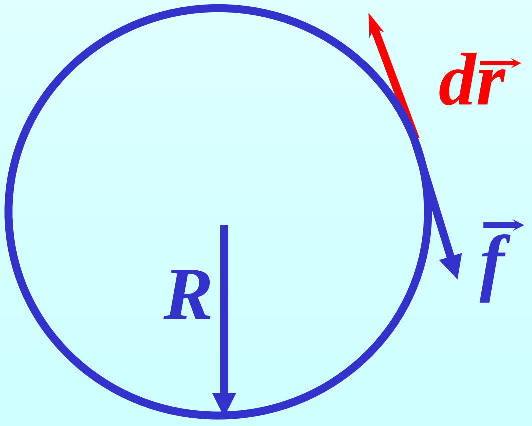
弹力的功只与始末位置有关，与中间过程无关。

四. 非保守力——摩擦力的功

水平桌面上一个质量为m的小物体,沿半径为R的圆弧移动一周, 设摩擦系数为 μ_s , 求摩擦力的 功。

$$W=\oint \vec{f}\cdot d\vec{r}=-\oint f\,ds$$

$$=-\mu_s mg\int_0^{2\pi R} ds=-2\mu_s mg\pi R$$



摩擦力的功与所经历的路径有关 ,沿封闭回路的功不为零

四、势能 (Potential Energy)

一、几种保守力的功

重力的功 $W_{AB} = mgh_A - mgh_B$

弹力的功 $W_{AB} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$

万有引力的功 $W_{AB} = (-\frac{Gm_1m_2}{r_A}) - (-\frac{Gm_1m_2}{r_B})$

特点：保守力的功可以写成两项之差，第一项只与初位置有关，第二项只与末位置有关。

因此，可定义一个只与位置有关的函数 E_P，该函数被称为系统的势能函数 。

二、势能

保守力所作的功等于势能增量的负值

$$W_{\mathrm{AB}} = E_{P\mathrm{A}} - E_{P\mathrm{B}} = -\Delta E_P \qquad \text{(势能差)}$$

上式只定义了势能差，这样势能的绝对值可以相差一个任意常数.

要想求出某点势能值，则应规定一势能零点

如：若规定C点的势能为零，即：$E_{pc} = 0$

则系统在任意点 A 的势能为：

$$W_{A\mathrm{C}} = E_{p\mathrm{A}} - E_{p\mathrm{C}} = E_{p\mathrm{A}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

质点在空间某点的势能值等于把其从该点沿任意路径移到势能为零的参考点保守力所做的功。

说明：

1） 势能零点不同, 势能表达示也不同，各点势能值也就不同，但不影响任意两点的势能差.

2） 势能的“所有者”应是系统共有,它不属于某一 个质点。它实质上是一种相互作用能。

3）势能是标量、是状态量。

只有对保守内力才能引入相应的势能。

三、几种保守力的势能

重力势能： $E_p = mgh$ 零点在 $h=0$ 处。

弹性势能： $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ 零点在 x=0自然伸长处。

万有引力势能：$E_p = -\frac{GmM}{r}$ 零点选在 $r \to \infty$ 处。

1.5.4 机械能守恒定律

（law of conservation of mechanical energy）

一、功能原理

机械能 $E = E_{\mathrm{K}} + E_{\mathrm{P}}$

由质点系的动能定理

$$W_{外} + W_{内} = E_{kB} - E_{kA}$$

将内力分为两部分

$$W_{外} + W_{内保} + W_{内非} = E_{kB} - E_{kA}$$

$$W_{内保} = E_{pA} - E_{pB}$$

$$W_{外} + W_{内非} = \underbrace{\left(E_{kB} + E_{pB}\right) - \left(E_{kA} + E_{pA}\right)}_{}$$

系统的机械能

功能原理 $$W_{外} + W_{内非} = E_B - E_A = \Delta E$$

外力和非保守内力做的功等于系统机械能的增量

二、机械能守恒定律

由功能原理 $$W_{外} + W_{内非} = E_B - E_A$$

当 $$W_{外} + W_{内非} = 0$$

机械能守恒定律 $$E_B = E_A$$

只有保守内力做功时系统机械能守恒

三、能量守恒定律

能量既不能被创生，也不能被消灭。它只能从一种形式转化为另一种形式，或从一个物体传给另一个物体。

四、守恒定律的意义

1. 守恒定律是关于变化过程的规律。

当满足一定条件下，不必考虑过程的细节，而对系统的初、末状态进行讨论。

这就是各个守恒定律的特点和优点。

2. 当守恒定律不成立时，再考虑动量定理、动能定理, 分析力的两个积累效应。

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

$$W = \int_{A}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{k2} - E_{k1}$$

3. 若研究物体瞬时状态，用牛顿运动定律。

例：在光滑的平面两相同的球做完全弹性碰撞，其中一球开始时处于静止状态，另一球速度 $\vec{v}$。
求证：碰撞后两球速度总互相垂直。

解：设碰撞后两球速度 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

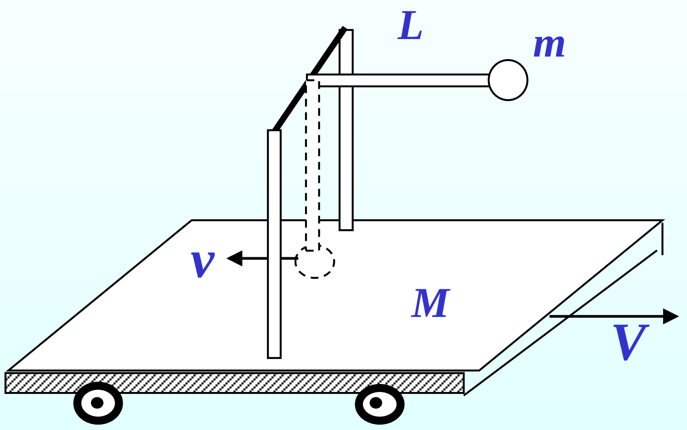
由动量守恒 $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

两边平方 $v^2 = v_1^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + v_2^2$

由机械能守恒（势能无变化） $v^2 = v_1^2 + v_2^2$

两球速度总互相垂直 $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

例: 一种实验小车质量为M，摆球质量为m,轻摆杆长为L，摆从水平位置自由下摆，求到达最低点时小车和摆球的速度V和v. 计算中忽略摩擦.



解： 取 m, M, 地球作为一个系统,

水平方向不受外力, 水平动量守恒，另外整个过程只有保守力(重力)作功, 整个过程机械能守恒

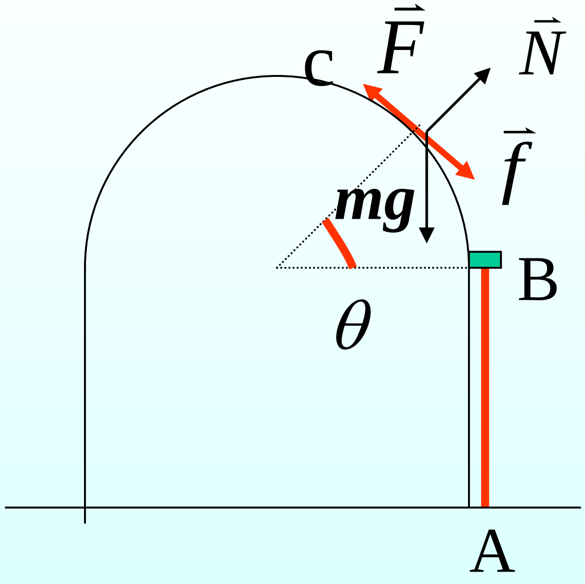
水平动量守恒： $-mv+MV=0$

机械能守恒： $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2=mgL$

解之得： $v=\sqrt{\frac{M}{m+M}\cdot 2gL}$ $\quad V=\sqrt{\frac{m^2}{M(m+M)}\cdot 2gL}$

例：　用功能原理求外力做的功

例：　弹簧(倔强系数为k)一端固定在A点,另一端连一质量为m的物体, 靠在光滑的园柱体表面 (半径 a),弹簧原长 AB，在外力作用下极缓慢地沿表面从B到C，求：　外力做的功



解：根据功能原理:

以 m，弹簧，地球为研究对象

弹性势能零点, 重力势能零点均选在B处

$$w_F = E_c - E_B = (mgh_c + \frac{1}{2}ks^2) - 0$$

$$= mga\sin\theta_c + \frac{1}{2}ka^2\theta_c^2$$

例. 设作用在质量为 2 kg 的物体上的力 $\vec{F} = 12\,t\,\hat{i}$ (N) 如果物体由静止出发沿直线运动，在头 3 s 时间内，这个力作了多少功?

解:
$$A = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B F_x dx = \int_0^3 12t(vdt)$$

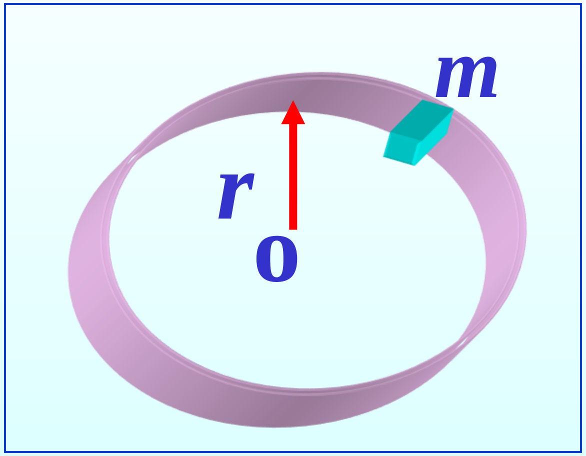
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \qquad dv = adt = \frac{F}{m}dt$$

$$\therefore \quad v = \int_0^t \frac{1}{m} 12tdt = 6\int_0^t tdt = 3t^2$$

$$W = \int_0^3 12tvdt = \int_0^3 36t^3 dt = 729 \text{ (J)}$$

例. 固定的水平桌面上有一环带，环带与小物体的摩擦 系数 μ，在外力作用下小物体（质量 m)以速率 v 做匀速圆周运动。

求：转一周摩擦力做的功。



解：小物体对环带压力

$$f = m\frac{v^2}{r}$$

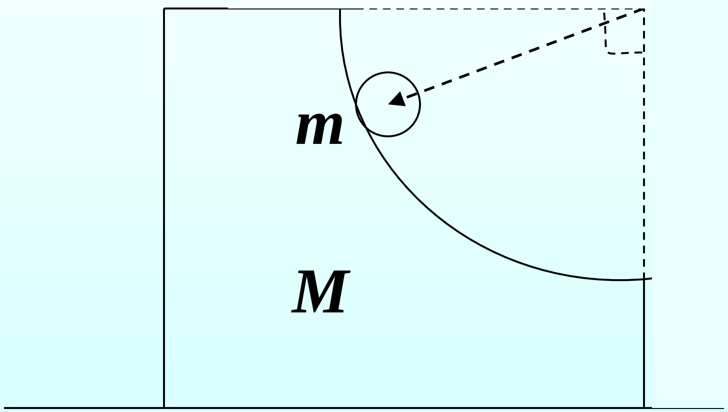
摩擦力的大小:

$$F_\mu = \mu \cdot f = \mu \cdot m\frac{v^2}{r}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -F_\mu \cdot ds$$

$$W = \int_0^{2\pi\cdot r} dW = -\int_0^{2\pi\cdot r} \mu \cdot m\frac{v^2}{r} ds = -2\pi \cdot \mu \cdot mv^2$$

例：有一面为1/4凹圆柱面（半径R）的物体（质量M）放置在光滑水平面，一小球（质量m）,从静止开始沿圆面从顶端无摩擦下落（如图）,小球从水平方向飞离大物体时速度 v，求：1）重力所做的功；2）内力所做的功。



解：重力只对小球做功

$$W_{重力} = mgR$$

水平方向无外力，系统保持水平方向动量守恒。

$$mv + MV = 0$$

$$V = -\frac{mv}{M}$$

对整个系统用动能定理

$$W_{重力}+W_{内力}=\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}mv^2$$

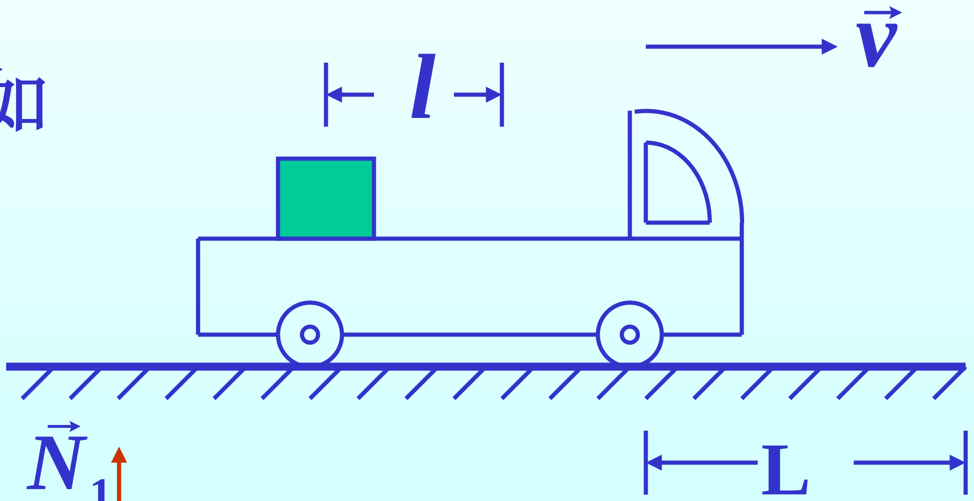
对M，内力所做的功 $\frac{1}{2}MV^2=\frac{m^2v^2}{2M}$

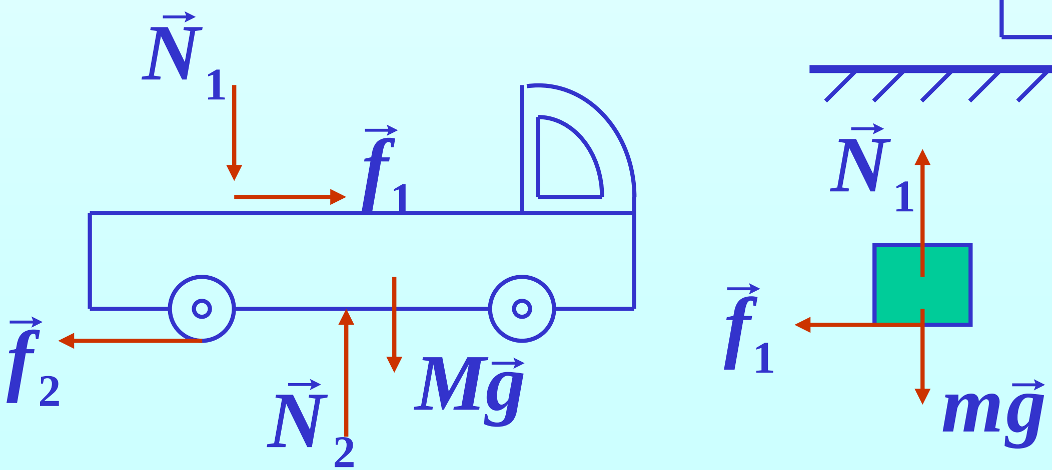
对 m，内力所做的功 $\frac{1}{2}mv^2-mgR$

* 本例中实际内力对两个物体分别所做功互相抵消。

例：质量为M的卡车载有一质量为m的木箱，以速度$\vec{v}$沿平直路面行驶。因故突然刹车，车轮立即停止转动，卡车向前滑行了一段距离L，同时木箱在卡车上也向前滑行 l 距离后才停下来。已知木箱与卡车间的滑动摩擦系数为μ_1，卡车车轮与地面间的滑动摩擦系数为μ_2，试求卡车滑行的距离L。

解：卡车与木箱的受力如图所示。

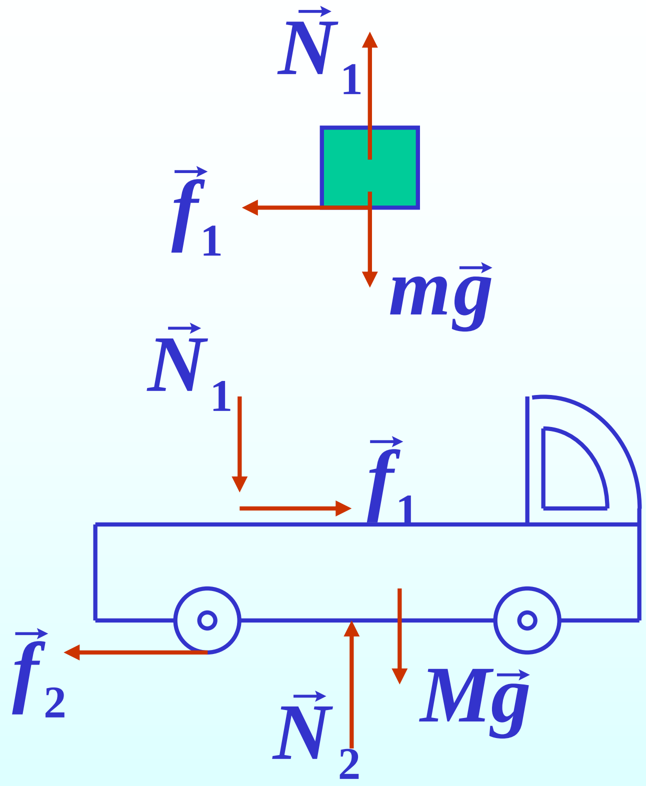




有：$N_1 = mg,\ f_1 = \mu_1 N_1 = \mu_1 mg$

$$N_2 = N_1 + Mg = (m + M)g,$$

$$f_2 = \mu_2 N_2 = \mu_2 (m + M)g$$



对木箱应用动能定理：

$$-f_1(l + L) = 0 - \frac{1}{2}mv^2$$

对卡车应用动能定理：

$$-f_2 L + f_1 L = 0 - \frac{1}{2}Mv^2$$

结合两式得：　$$-f_1 l - f_2 L = -\frac{1}{2}(m+M)v^2$$

$$L = \frac{\frac{1}{2}(m+M)v^2 - f_1 l}{f_2} = \frac{\frac{1}{2}(m+M)v^2 - \mu_1 mgl}{\mu_2 (m+M)g}$$

$$= \frac{v^2}{2\mu_2 g} - \frac{\mu_1 ml}{\mu_2 (m+M)}$$

如以木箱与卡车作为一物体系统，应用动能定理有

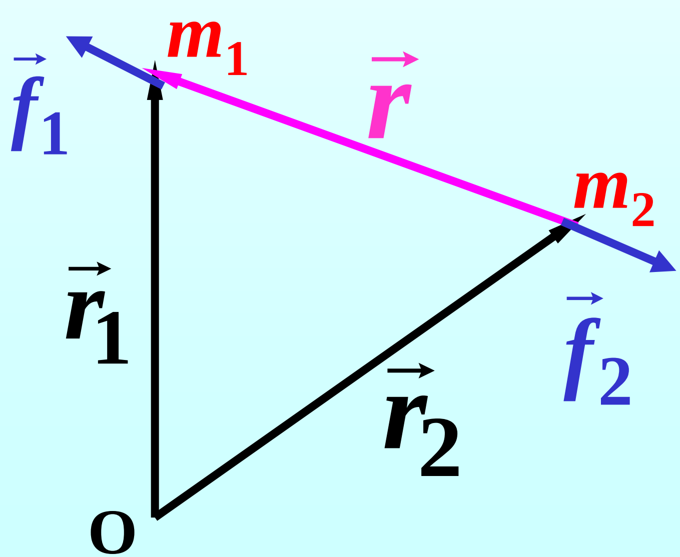
$$\underbrace{-f_1 l}_{\text{内力总功}} \underbrace{- f_2 L}_{\text{外力总功}} = -\frac{1}{2}(m+M)v^2$$

可得同样结果。

两体问题（two – body problem)（选学）

两体问题是指两个物体在相互作用下的运动问题，如：α粒子被原子核散射，行星绕太阳的运动（忽略其他星体的影响）等。这类问题可简化为单体问题处理。

设：O为惯性系中的坐标原点，质点 m_1 和 m_2 间的作用力为 $\vec{f}_1 = f(r)\hat{r}$ $\vec{f}_2 = -f(r)\hat{r}$



由牛顿第二定律

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = f(r)\hat{r} \quad （1）$$

$$m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -f(r)\hat{r} \quad （2）$$

$$(1)\times m_2 - (2)\times m_1$$

$$m_1 m_2 \frac{d^2(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{dt^2}=(m_1+m_2)f(r)\hat{r}$$

$\vec{r}_1-\vec{r}_2=\vec{r}$ 为m_1相对m_2的位矢，

$\dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}=\mu$ 为两质点的约化质量

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=f(r)\hat{r} \qquad （3）$$

上式可以理解为m_1的运动所遵循的牛顿第二定律公式，此式表明m_1的运动和一个质量为μ的质点在同一惯性系中受同样的力作用时的运动一样，这一惯性系的原点应选在m_2上。这样，两个质点在相互作用下的运动就简化为一个质点的运动。

由于在惯性系中有关动量和能量的定理都是从牛顿第二定律导出的，所以，根据（3）式，对于两体问题中的一个质点相对于另一质点的运动，有关动量和能量的定理均适用，只要把前一质点的惯性质量改为约化质量就行了。