第五部分 图论

- **图论**本身是应用数学的一部份，历史上图论曾经被多位数学家各自独立地建立过。关于图论的文字记载最早出现在欧拉1736年的论著中，他所考虑的原始问题有很强的实际背景。

- 运筹学、计算机科学和编码理论中的很多问题都可以化为哈密顿问题，从而引起对图论广泛的注意和研究。

§14.1

1738年，瑞士数学家欧拉(**Leornhard Euler**）解决了柯尼斯堡(今俄罗斯加里宁格勒)七桥问题。由此图论诞生。欧拉也成为图论的创始人。

定义设A,B是两个集合，称$\{\{a,b\}|a\in A,b\in B\}$为$A$与$B$的**无序积**，记为 $A\&B$；$\{a,b\}$称为**无序对**。

后面，把$\{a,b\}$记为(a,b)，且允许$a=b$；对无序对(a,b)，有$(a,b)=(b,a)$。

定义 设$G=\langle V,E\rangle$是一个序偶，其中

（1）V是非空集合

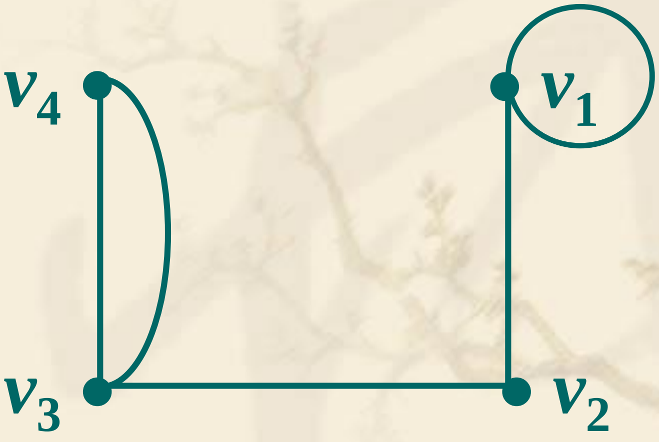
（2）$E\subseteq V\&V$，（E中元素可重复出现）

则称G是一个**无向图**。

此时，称V为G的**顶点集**，记为$V(G)$，V中的元素称为G的**顶点**；称E为G的**边集**，记为$E(G)$，E中的元素称为G的**无向边**。

例 设无向图$G=\langle V,E\rangle$，这里$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，$E=\{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_3,v_4), (v_3,v_4)\}$。

G的图示：



定义 设 $D=<V,E>$ 是一个序偶，其中

（1）V是非空集合

（2）$E \subseteq V \times V$（E中元素可重复出现）

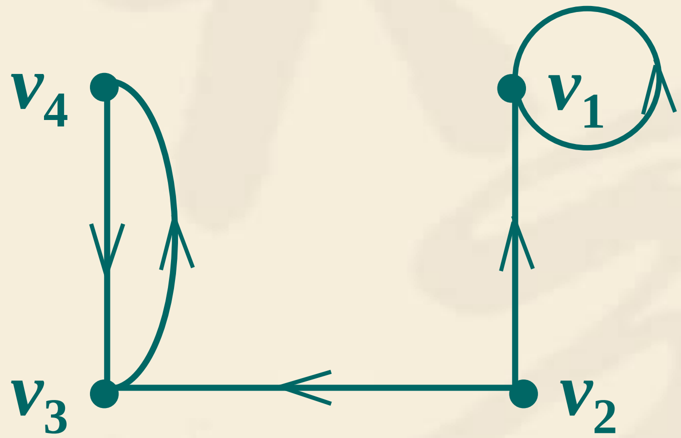
则称G是**有向图**。

此时，称V为D的**顶点集**，记为$V(D)$，V中的元素称为D的**顶点**；称E为D的**边集**，记为$E(D)$，E中的元素称为D的**有向边**。

例 设有向图$D=<V,E>$，这里$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，

$E=\{<v_1,v_1>, <v_2,v_1>, <v_2,v_3>, (v_3,v_4), (v_4,v_3)\}$。

D的图示：



注

① 有时G既表示无向图又表示有向图，可统称为图。

② 若$V(G)$,$E(G)$均为有穷集，则称G为**有限图**。对有限图G，称 $|V(G)|$ 为G的**阶数**。

③ 对$e \in E(G)$，称e出现的次数为e的**重数**，这些相同的边称为**平行边**（或**重边**）。

④ 规定$V(G)=\varnothing$时，G为**空图**，记为$\varnothing$。

⑤ 当$E(G)=\varnothing$时，称G为零图，n阶零图记为N_n；特别地，称N_1为平凡图。

⑥ 用$u,v,v_1,v_2,\cdots$表示顶点，用$e,e_1,e_2,\cdots$表示边，称这样的图为标定图。否则，称为非标定图。

⑦ 把无向图$G=<V,E>$的每条无向边确定一个方向后得到一个有向图D，称D为G的**定向图**。

反之，去掉有向图$D=<V,E>$的每条有向边的方向后得到一个无向图G，称G为D的**基图**。

⑧ 设$e_k \in E(G)$。若$e_k = (v_i,v_j)$ 或 $e_k =<v_i,v_j>$，则称v_i,v_j为e_k的**端点**，称v_i, v_j与e_k是**关联的**。

当$v_i \neq v_j$时，称e_k与v_i或e_k与v_j的**关联次数**为1；当$v_i=v_j$时，称e_k与v_i的关联次数为2；对$v_l \in V(G)$，若$v_l \neq v_i, v_j$,，称e_k与v_l的关联次数为0。

⑨ 设$G=<V, E>$是一个无向图，$e_k=(v_i,v_j)\in E(G)$，则称v_i与v_j是**相邻的**；设$D=<V,E>$是一个有向图，$e_k=<v_i,v_j>\in E(D)$，则称v_i**相邻到**v_j，称$v_i(v_j)$为e_k的**始点**（**终点**）。

⑩ 设$e_k, e_l\in E(G)$，若e_k与e_l有公共端点（至少一个），则称e_k与e_l是**相邻的**；

⑪ 设$G=<V,E>$是一个无向图，$v\in V$，令

$$N_G(v)=\{u|u\in V\wedge(u,v)\in E\wedge u\neq v\}$$

称之为顶点v的**邻域**；

令

$$\bar{N}_G(v) = N_G(v) \cup \{v\}$$

称之为顶点v的**闭邻域**；

令

$$I_G(v) = \{ e \mid e \in E \land e\text{与}v\text{关联} \}$$

称之为顶点v的**关联集**；

设$D=<V,E>$是一个有向图，$v \in V$，令

$$\Gamma_D^+(v) = \{u \mid u \in V \land <v, u> \in E \land u \neq v\}$$

称之为顶点v的**后继元集**；

令

$$N_G(v) = \Gamma_D^+(v) \cup \Gamma_D^-(v)$$

称之为顶点v的**邻域**；

令

$$\overline{N}_D(v) = N_D(v) \cup \{v\}$$

称之为v的**闭邻域**；

⑫ 不含平行边和环的图称为**简单图**，否则称为**多重图**。

定义 设$G=<V,E>$是一个无向图，$v\in V$，则v与E中所有无向边的关联次数之和称为顶点v的**度数**，记为$d_G(v)$，简记为$d(v)$。

设$D=<V,E>$是一个有向图，$v\in V$，则E中以v为始（终）点的有向边的数目称为顶点v的**出（入）度**，记为$d_D^+(v)$（$d_D^-(v)$），简记为$d^+(v)$（$d^-(v)$）；而

$$d^+(v)+d^-(v)$$

称为顶点v的**度数**，记为$d(v)$。

注

① 用$\Delta(G)$, $\delta(G)$, $\Delta^{+}(D)$, $\Delta^{-}(D)$, $\delta^{+}(D)$,$\delta^{-}(D)$ 分别表示图的**最大度**, **最小度**, 最大出度, 最大入度, 最小出度, 最小入度;

② 度为0（1,偶数,奇数）的顶点称为**孤立点**（**悬挂点**、**偶度点**、**奇度点**）；

③ 设G是一个无向图，$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，则称 $d(v_1),d(v_2),\cdots,d(v_n)$为$G$的**度序列**。

定理（握手定理）若$G=<V,E>$是一个无向图，则

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$$

若$D=<V,E>$是一个有向图，则

$$\sum_{v\in V} d^{+}(v) = \sum_{v\in V} d^{-}(v) = |E|$$

定理 设$d=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$是一个非负整数序列，则d可图化的充要条件是$\sum_{i=1}^{n} d_i \equiv 0 \pmod 2$。

定理 设G是n简单无向图，则$\Delta(G)\leq n-1$。

例 下列数列哪些可图化？

（1） $(5,5,4,4,2,1)$　　（2）$(5,4,3,2,2)$

（3）$(3,3,3,1)$　　（4）$(4,4,3,3,2,2)$

定义 设$G_1=<V_1,E_1>$，$G_2=<V_2,E_2>$是两个无向图（或两个有向图），若存在双射函数

f：$V_1 \to V_2$，满足$\forall v_i,v_j \in V_1$，有

$$(v_i,v_j) \in E_1 (\text{或} <v_i,v_j> \in E_1)$$

$$\Leftrightarrow (f(v_i), f(v_j)) \in E_2 (\text{或} <f(v_i), f(v_j)> \in E_2)$$

并且在f下对应的边

$$(v_i,v_j) \text{与} (f(v_i), f(v_j)) \ (\text{或} <v_i,v_j> \text{与} <f(v_i), f(v_j)>)$$

有相同的重数，则称G_1与G_2**同构**，记为$G_1 \cong G_2$。

若干特殊图类：

无向完全图K_n：n阶无向简单图，任意两个顶点都相邻；

有向完全图：n阶有向简单图，任意两个顶点都相互相邻；

竞赛图：n阶无向简单图的定向图；

k-正则图：无向简单图，每个顶点的度均为k。

定义 设$G=\langle V,E\rangle$，$G'=\langle V',E'\rangle$是两个图（同为无向图或同为有向图），若$V'\subseteq V$，$E'\subseteq E$，则称G'是G的**子图**，G是G'的**母图**，记为$G'\subseteq G$。

若$G'\subseteq G$且$G'\neq G$，则称G'是G的**真子图**，记为$G'\subset G$；若$V'=V$，则称G'是G的**生成子图**。

若$V'\neq\varnothing$，令$E'=\{\, e \mid e\in E \wedge e$的端点属于$V'\}$，则称$\langle V', E'\rangle$是$V'$**导出**的**子图**，记为$G[V']$；

若$E'\neq\varnothing$，令$V'=\{\, v \mid$存在$e\in E' \wedge v$是e的端点$\}$，则称$\langle V', E'\rangle$是E'**导出**的**子图**，记为$G[E']$。

定义 设$G=\langle V,E\rangle$是无向简单图，令

$$\overline{E}=\{(u,v)\mid u,v\in V\wedge(u,v)\quad E\}$$

则称$\overline{G}=\langle V,\overline{E}\rangle$为$G$的**补图**。

若$G\cong\overline{G}$，则称G是**自补图**。

删除边e：$e\in E$，$G-e=\langle V,E-\{e\}\rangle$

删除顶点v：$v\in V$，$G-v=\langle V-\{v\},E-I_G(v)\rangle$

边e的收缩：$e=(u,v)\in E$，

$G\backslash e$
$=\langle V-\{u,v\}\cup\{w\},E-\{e\}\wedge w$与原$u,v$关联的边都关联$\rangle$

加新边：$\{u,v\}\in V$，$G+(u,v)=<V, E\cup(u,v)>$

定义 设$G =<V,E>$是一个无向图，若存在V的一个划分$V=V_1\cup V_2$，使E中每条边的端点都是一个在V_1中，另一个在V_2中，则称G为**二部图**，记为$G =<V_1,V_2,E>$。

设$G =<V_1,V_2,E>$是一个简单二部图，若V_1中每个顶点与V_2中每个顶点都相邻，则称G为**完全二部图**，记为$K_{r,s}$，这里 $|V_1|=r$，$|V_2|=s$。