第三章 多维随机变量及其分布

第一节 二维随机变量及其联合分布
第二节 边缘分布
第四节 相互独立的随机变量
第五节 两个随机变量的函数的分布

教学计划：3次课-9学时

两章关系	第二章 一维 X	第一节 二维(X,Y)	第二节 边缘分布	第三节 相依(条件分布)	第四节 独立
分布函数	$F(x)$	$F(x,y)$			$P(AB)=P(A)P(B)$
离散型分布律	$P\{X=x_k\}=p_k$	$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$	$P\{X=x_i\}$ $P\{Y=y_i\}$		$P\{X=x_i,Y=y_j\}$ $=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}$
连续型概率密度	$f(x)$	$f(x,y)$	$f_X(x)$ ★ $f_Y(y)$		$f(x,y)=$ $f_X(x)\cdot f_Y(y)$
算概率	$P(x_1<X\le x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$ $=\sum\limits_{x_1<x_k\le x_2} p_k$		$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ★ $=\sum\limits_{(x_i,y_j)\in G} p_{ij}$			
函数分布	$Y=g(X)$ $f_X(x) \rightarrow f_Y(y)=F_Y'(y)$					

二维随机变量的分布函数

复习

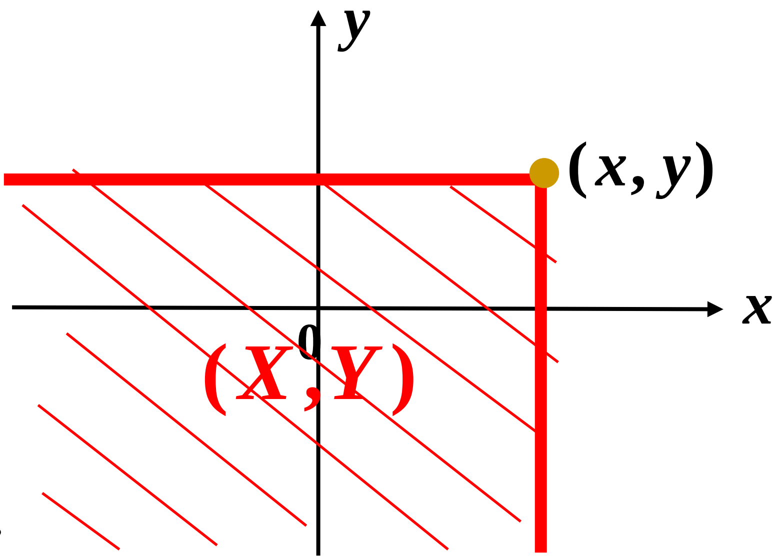
设 (X,Y) 是二维随机变量，对任意的实数 x, y，二元函数 $F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$ (积事件) 称为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数或 X与Y 的联合分布函数。

注:

➢ $F(x, y)$ 几何意义：

将(X, Y)看成是随机点的坐标，则

$F(x, y)$ = 随机点 (X,Y)落在以 (x, y) 为顶点的左下方无穷矩形内的概率.



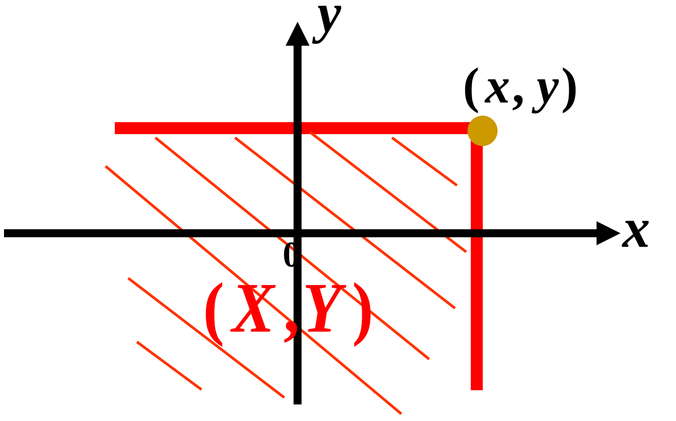
复习

二维连续型随机变量的概率密度

定义 对于二维随机变量(X,Y) 的分布函数$F(x,y)$，若存在非负函数 $f(x,y)$，对任意的x,y有：

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

则称 (X,Y) 是二维连续型随机变量，$f(x,y)$为 (X,Y) 的联合概率密度.



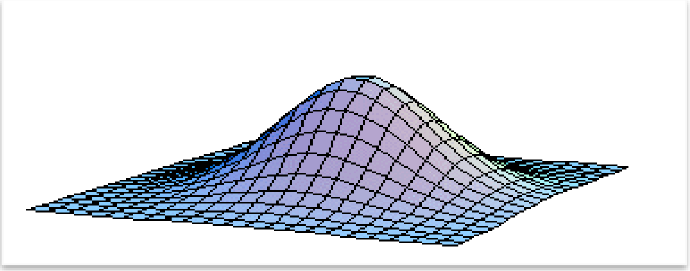
概率密度的性质

复习

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

性质1 $f(x,y)\geq 0$

性质2 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$



概率密度曲面下面的体积是1

性质3 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

性质4 设 G 是 XOY 平面上的一个区域，则点(X,Y)落在G内的概率为:

$$\bigstar\ P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- D是积分区域G和概率密度取值非零区域的交集

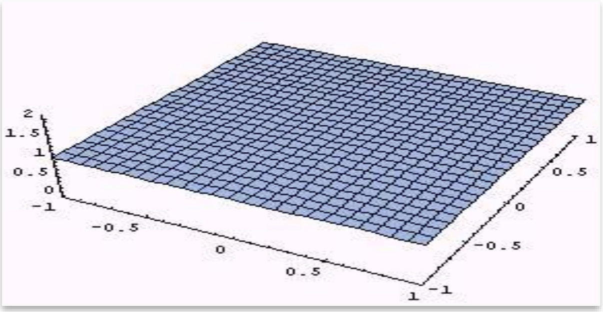
复习

1^0 若 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)} & \boxed{\begin{matrix}a_1\le x\le b_1\\ a_2\le y\le b_2\end{matrix}}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

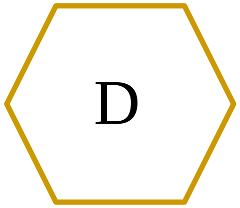
则称 (*X*,*Y*)在矩形区域上服从**均匀分布**。

$X \sim U(a,b)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



1^0 若 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$



则称 (X,Y) 平面区域D上服从均匀分布，A是D的面积。

$X\sim U(a,b)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$$

(X,Y) 只能在平面有限区域上服从均匀分布。

2^0 若 $f(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & x>0, y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

则称 (X,Y) 服从参数为 λ 的指数分布.

⇧

$X \sim E(\lambda)$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

复习

3^0 若 $f(x,y)$

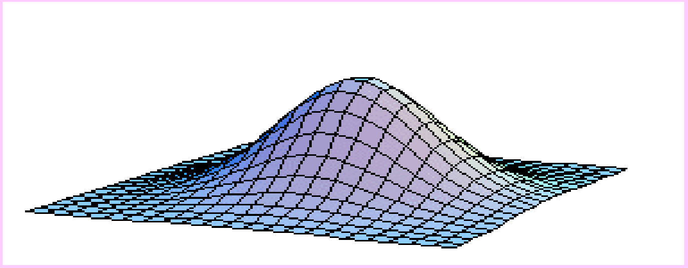
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

其中：$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 为5个常数，

则称 (X,Y)服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的正态分布.

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $\quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$



正态曲面下面的体积是1

复习

离散型随机变量的联合分布律和边缘分布律

二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律：

$X \backslash Y$	y_0	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P(X=x_i)$
x_0	p_{00}	p_{01}	$\cdots$	p_{0j}	$\cdots$	$P_{0\bullet}$
x_1	p_{10}	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$P_{1\bullet}$
$\vdots$						$\vdots$
x_i	p_{i0}	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$P_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$P(Y=y_j)$	$P_{\bullet 0}$	$P_{\bullet 1}$	$\cdots$	$P_{\bullet j}$	$\cdots$	1

$P_{\bullet j} = P(Y=y_j) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_{ij}$ 称为 Y 的边缘分布律

$P_{i\bullet} = P(X=x_i) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_{ij}$ 称为 X 的边缘分布律

第三章 多维随机变量及其分布

第一节 二维随机变量及其联合分布

第二节 边缘分布

第四节 相互独立的随机变量

第五节 两个随机变量的函数的分布

教学计划：3次课-9学时

第三章 多维随机变量及其分布

第二节 边缘分布

- 离散型随机变量的边缘分布律
- 连续型随机变量的边缘概率密度

$$F(x) = P(X \le x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

二. 连续型随机变量的边缘概率密度

已知连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度 $f(x, y)$，

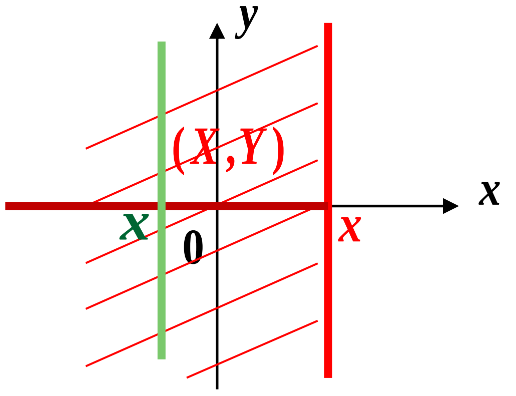
$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x, Y < +\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\{\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \overset{\ge 0}{f(x,y)}\mathrm{d}y}_{f_X(x) \ge 0}\}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\mathrm{d}x$$

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 称为X的边缘概率密度

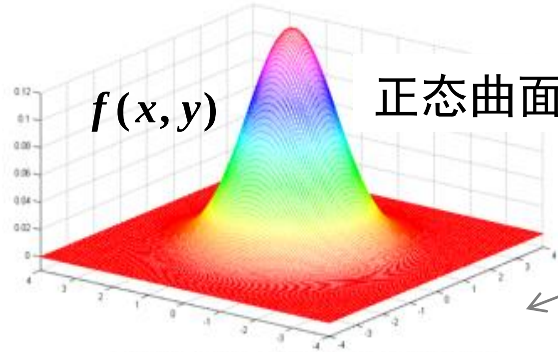
类似：

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 称为Y的边缘概率密度

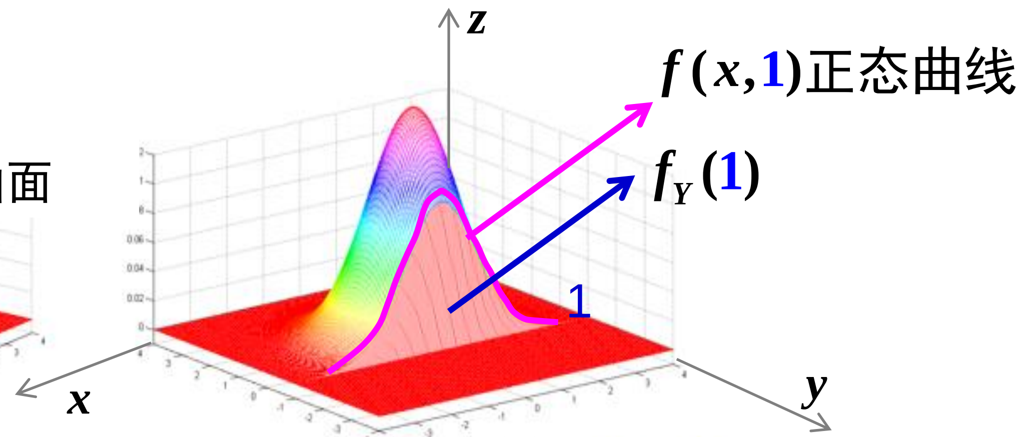


边缘概率密度的理解：$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$$

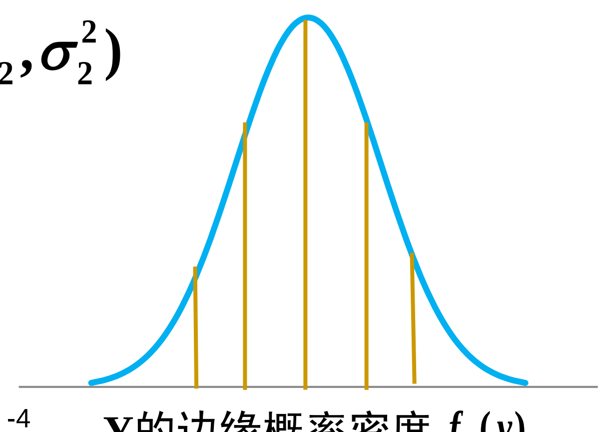


二维正态概率密度图



二维正态分布切面图 $(\rho=3)$

$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$



Y的边缘概率密度 $f_Y(y)$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$f_Y(1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,1)\,\mathrm{d}x$$

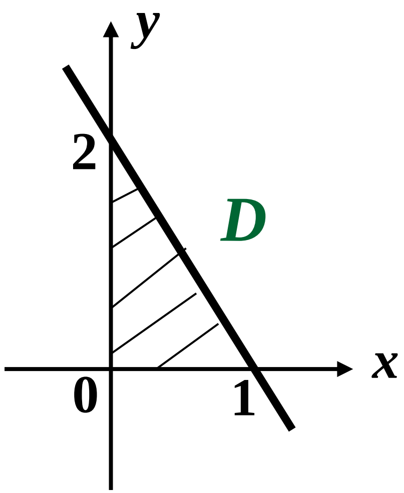
越往中间切，截面积越大，越往两边切，截面积越小，对称切截面积一样，于是得到Y的边缘概率密度也是正态的。

例2 设(X,Y) 均匀分布在由直线 $x+\dfrac{y}{2}=1$, x 轴和y 轴所围成的区域 D 上.

求: (X,Y) 的联合概率密度与边缘概率密度.

解: (1) 因为 (X,Y) 服从均匀分布

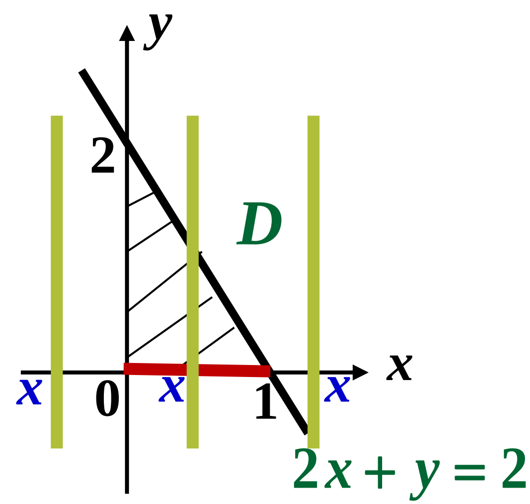
所以其概率密度为: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$



$$\because A=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$$

$$\therefore\ f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求：(X,Y) 的联合概率密度与边缘概率密度.



$$f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

(2) 边缘概率密度为: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$

当 $x\le 0$ 时，$\because f(x,y)=0 \quad \therefore \quad f_X(x)=0$

当 $x\ge 1$ 时，$\because f(x,y)=0 \quad \therefore \quad f_X(x)=0$

当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{2(1-x)}\mathrm{d}y=2(1-x)$

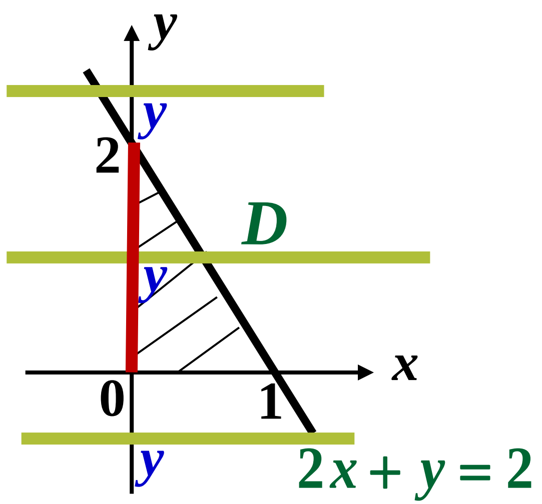
则得: $f_X(x)=\begin{cases}2(1-x) & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

1. 投影（概率密度非零区域）

2. 积分（分区间）

3. 画线（确定上下限）

求：(X,Y) 的联合概率密度与边缘概率密度.



$$f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

(2) 边缘概率密度为：$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$

当 $y\le 0$ 时，$\because f(x,y)=0 \quad \therefore \quad f_Y(y)=0$

当 $y\ge 2$ 时，$\because f(x,y)=0 \quad \therefore \quad f_Y(y)=0$

当 $0<y<2$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^{1-\frac{y}{2}}\mathrm{d}x=1-\dfrac{y}{2}$

则得：$f_Y(y)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}y & 0<y<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

1. 投影（概率密度非零区域）

2. 积分（分区间）

3. 画线（确定上下限）

例3 设二维随机变量(*X*, *Y*)的概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]}$$

$$-\infty<x<+\infty,\qquad -\infty<y<+\infty$$

求：二维正态随机变量(*X*, *Y*)的边缘概率密度。

解:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}}\qquad -\infty<x<+\infty$$

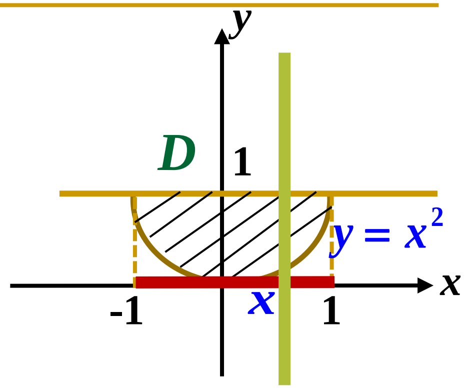
$$\therefore X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2{}^2}}\qquad -\infty<y<+\infty$$

$$\therefore Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

练习 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} cx^2y, & \boxed{x^2\le y\le 1} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



求：常数C与边缘概率密度.

解：$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D cx^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1} cx^2y\ \mathrm{d}y=c\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}y\ \mathrm{d}y=c\int_{-1}^{1}x^2\,\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{1}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}x^2(1-x^4)\mathrm{d}x=\frac{c}{2}\Big[\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}x^6\mathrm{d}x\Big]$$

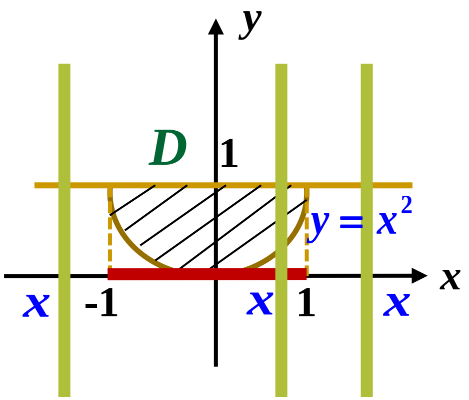
$$=\frac{c}{2}\Big(\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}-\frac{1}{7}x^7\Big|_{-1}^{1}\Big)=\frac{c}{2}\Big\{\frac{1}{3}[(1)^3-(-1)^3]-\frac{1}{7}[(1)^7-(-1)^7]\Big\}$$

$$=\frac{c}{2}\Big(\frac{2}{3}-\frac{2}{7}\Big)=\frac{4c}{21}\qquad \therefore c=\frac{21}{4}$$

练习 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y, & x^2\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求：常数C与边缘概率密度.



解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$

当 $-1<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{x^2}^{1}\dfrac{21}{4}x^2y\mathrm{d}y=\dfrac{21}{4}x^2\int_{x^2}^{1}y\mathrm{d}y$

$$=\frac{21}{8}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}=\frac{21}{8}x^2(1-x^4)$$

当 $x\le -1$ 或 $x\ge 1$ 时，$f(x,y)=0$，$f_X(x)=0$

$$\therefore\quad f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

1. 投影
2. 积分（分区间）
3. 画线（确定上下限）

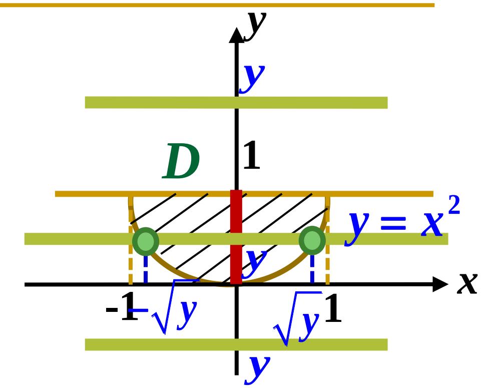
练习 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y, & x^2\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$y = x^2$

$x=\sqrt{y}$

$x=-\sqrt{y}$



求：常数C与边缘概率密度.

解：$f_Y(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$

当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2y\mathrm{d}x=\frac{21}{4}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}x^2\mathrm{d}x$

$$=\frac{21}{12}yx^3\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}=\frac{21}{12}y(\sqrt{y}^3-(-\sqrt{y})^3)=\frac{21}{6}y^{\frac{5}{2}}$$

当 $y\le 0$ 或 $y\ge 1$ 时，$f(x,y)=0$，$\therefore\ f_Y(y)=0$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

1. 投影
2. 积分（分区间）
3. 画线（确定上下限）

第三章 多维随机变量及其分布

第二节 边缘分布

- 离散型随机变量的边缘分布律
- 连续型随机变量的边缘概率密度

第三章 多维随机变量及其分布

第三章 多维随机变量及其分布

第四节 相互独立的随机变量

- 离散型随机变量的相互独立
- 连续型随机变量的相互独立

一. 离散型随机变量的相互独立

若 $P(AB) = P(A)P(B)$

则称事件 A, B 相互独立 .

设 (X,Y) 是离散型随机变量，(x_i, y_j) 是 (X, Y) 所有可能的取值.

若 $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$

则称随机变量 X 和 Y 相互独立.

例： (X,Y) 的联合分布律和边缘分布律：

判断 X 与 Y 是否相互独立？

$X \backslash Y$	0	1	2	$P(X = x_i)$
0	$\boxed{9/36}$	12/36	4/36	$\boxed{25/36}$
1	6/36	4/36	0	10/36
2	1/36	0	0	1/36
$P(Y = y_j)$	$\boxed{16/36}$	16/36	4/36	**1**

$$P(X = 0, Y = 0) \overset{?}{=} P(X = 0) \cdot P(Y = 0)$$

$$\frac{9}{36} \neq \frac{25}{36} \times \frac{16}{36}$$

结论： X 与 Y 不独立.

例1. 设 X,Y 相互独立，它们的分布律分别为:

X	0	1
P	2/3	1/3

Y	1	2	3
P	1/4	2/4	1/4

求: (X,Y) 的联合分布律.

解: $\because X,Y$ 相互独立, $\therefore P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$

$$P(X=0, Y=1)$$

$$=P(X=0)\cdot P(Y=1)$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{12}$$

$X \backslash Y$	1	2	3	$P(X=x_i)$
0	2/12			$\boxed{2/3}$
1				1/3
$P(Y=y_j)$	$\boxed{1/4}$	2/4	1/4	**1**

例1. 设 X,Y 相互独立，它们的分布律分别为:

结论： 对离散型随机变量而言，已知联合分布律可求其边缘分布律，但反之则不然。但若X,Y 相互独立，则可由边缘分布律直接求其联合分布律。

求: (X,Y) 的联合分布律.

解: $\because X,Y$ 相互独立, $\therefore P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$

(X,Y)的联合分布律:

$$P(X=1,Y=1)$$

$$=P(X=1)\cdot P(Y=1)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$X \backslash Y$	1	2	3	$P(X=x_i)$
0	2/12	4/12	2/12	$\boxed{2/3}$
1	1/12	2/12	1/12	$\boxed{1/3}$
$P(Y=y_j)$	$\boxed{1/4}$	$\boxed{2/4}$	1/4	**1**

例2 设随机变量X, Y 相互独立，下表给出了 (X,Y)的联合分布律和X, Y 边缘分布律的部分数值，将其余数值填入表中的空白处。

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P(X=x_i)$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P(Y=y_j)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

解： $P(X=x_1, Y=y_1) = P(X=x_1)P(Y=y_1)$

$$\frac{1}{24} \qquad ? \qquad \frac{1}{6}$$

练习

设随机变量 X,Y 相互独立，联合分布律为

试求：常数 a, b, c

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P(X=x_i)$
x_1	a	$1/9$	c	$a+1/9+c$
x_2	$1/9$	b	$1/3$	$b+4/9$
$P(Y=y_j)$	$a+1/9$	$b+1/9$	$c+1/3$	

解：

由独立性，

$$P\{X=x_2,Y=y_1\}=P\{X=x_2\}\cdot P\{Y=y_1\}\rightarrow(b+\frac{4}{9})(a+\frac{1}{9})=\frac{1}{9}\rightarrow a=\frac{1}{18}$$

$$P\{X=x_2,Y=y_2\}=P\{X=x_2\}\cdot P\{Y=y_2\}\rightarrow(b+\frac{4}{9})(b+\frac{1}{9})=b\rightarrow b=\frac{2}{9}$$

$$P\{X=x_2,Y=y_3\}=P\{X=x_2\}\cdot P\{Y=y_3\}\rightarrow(b+\frac{4}{9})(c+\frac{1}{3})=\frac{1}{3}\rightarrow c=\frac{1}{6}$$

第三章 多维随机变量及其分布

第四节 相互独立的随机变量

- 离散型随机变量的相互独立
- 连续型随机变量的相互独立

二. 连续型随机变量的相互独立

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

设 (X,Y) 是连续型随机变量，如果对任意的 x, y 有：

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

则称随机变量X和Y是相互独立的。

例3. 设 (X,Y) 服从正态分布，其边缘概率密度为：

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \qquad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$-\infty < x < +\infty \qquad\qquad -\infty < y < +\infty$$

问：X 和 Y 相互独立的充分必要条件是什么?

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x,y)$$

解：设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_1)^2}{2\sigma_2^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\boxed{\sqrt{1-\rho^2}}}e^{-\frac{1}{2\boxed{(1-\rho^2)}}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\boxed{-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

对任意的 x,y 有：$f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x,y)\longrightarrow\rho=0$

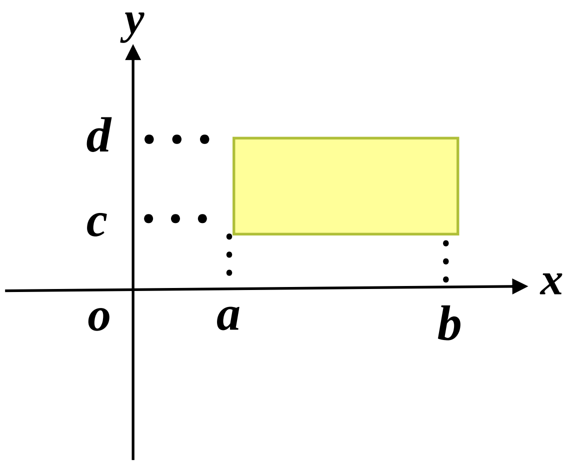
所以，X,Y 相互独立充分必要条件是：$\rho=0$

结论： 若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 X 和 Y 是相互独立 $\Longleftrightarrow\rho=0$

例4. 设随机变量 (X,Y) 在矩形域: $a \le x \le b, c \le y \le d$ 内服从均匀分布。

求: (1) 联合概率密度及边缘概率密度;

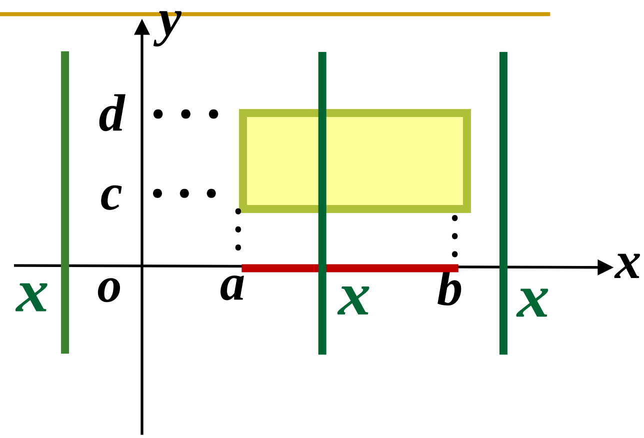
(2) 检验 X 和 Y 是否相互独立.



解: (1) 由题意在 $a \le x \le b, c \le y \le d$ 区域内 (X,Y) 服从均匀分布, 所以联合概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & a \le x \le b, c \le y \le d \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & a\le x\le b, c\le y\le d\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



(1) 边缘概率密度;

当 $a\le x\le b$ 时,

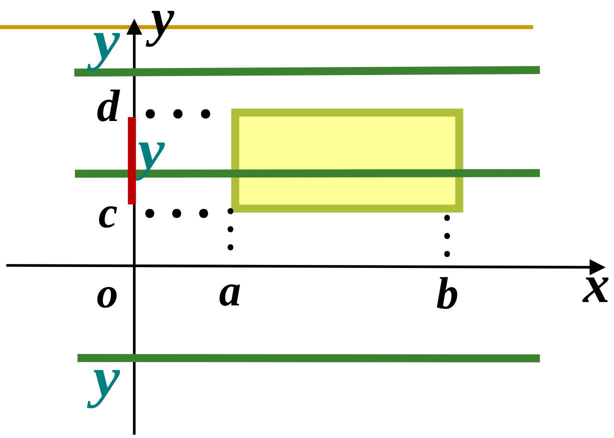
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^d \frac{\mathrm{d}y}{(b-a)(d-c)}=\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_c^d \mathrm{d}y=\frac{1}{b-a}$$

当 $x<a$ or $x>b$ 时, $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=0$

$$\therefore f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

1. 投影
2. 积分（分区间）
3. 画线（确定上下限）

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & a\le x\le b, c\le y\le d\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



(1) 边缘概率密度;

当 $c\le y\le d$ 时,

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(b-a)(d-c)}=\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\mathrm{d}x=\frac{1}{d-c}$$

当 $y<c$ or $y>d$ 时, $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=0$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c} & c\le y\le d\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

1. 投影
2. 积分（分区间）
3. 画线（确定上下限）

(1) 联合概率密度及边缘概率密度;

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & a\le x\le b, c\le y\le d\\ 0 & 其它\end{cases}$$

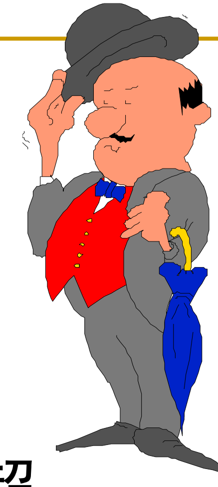
$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & 其它\end{cases} \quad 与 \quad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c} & c\le y\le d\\ 0 & 其它\end{cases}$$

(2) 检验 X 和 Y 是否相互独立: $f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x,y)$

$$\because \quad f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}\cdot\dfrac{1}{d-c} & a\le x\le b, c\le y\le d\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$= f(x,y)$ 所以 X 和 Y 相互独立。

例5. 甲乙两人约定中午12时30分在某地会面。设甲在时间12:15到12:45之间到达某地是均匀分布；乙独立地到达，而且到达时间在12:00到13:00之间也是均匀分布.



试求：(1) 先到的人等待另一人到达的时间不超过5分钟的概率；$P(|X-Y|\le 5)$

(2) 甲先到的概率。 $P(X<Y)$

解: 设 X：甲到达时刻， Y：乙到达时刻

若以12时为起点，以分为单位， 依题意：

$X \sim U(15, 45)$ $\qquad$ $Y \sim U(0, 60)$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30}, & 15<x<45\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0<y<60\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

解: 设 X：甲到达时刻， Y：乙到达时刻

$X \sim U(15, 45)$ $Y \sim U(0, 60)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30}, & 15 < x < 45 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{60}, & 0 < y < 60 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

要求：$P(|X - Y| \le 5)$ $P(X < Y)$

必须知道X与Y的联合概率密度：

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1800}, & 15 < x < 45, 0 < y < 60 \\ 0, & \text{其 它} \end{cases}$$

解： (1) $P(|X-Y|\le 5)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1800}, & \boxed{15<x<45, 0<y<60} \\ 0, & \text{其 它}\end{cases}$$

$$=P(-5\le X-Y\le 5)$$

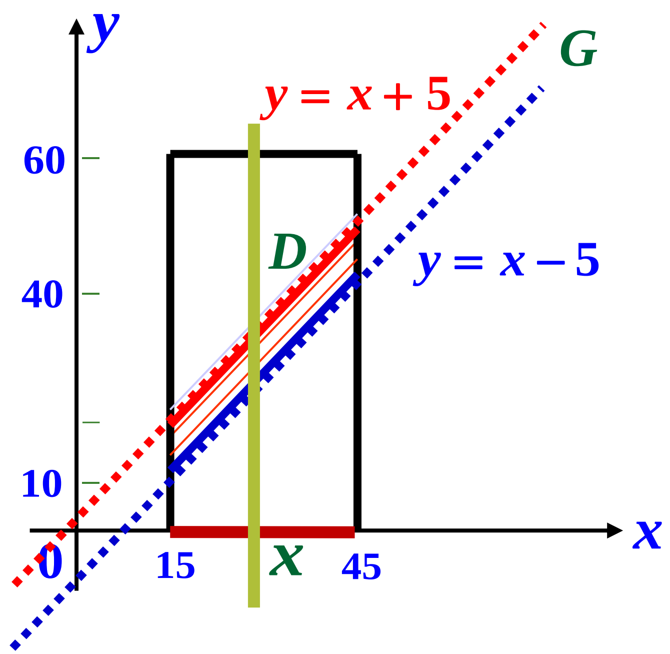
$$=\iint\limits_{-5\le x-y\le 5} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x-5\le y\le x+5} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\frac{1}{1800}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{15}^{45}\mathrm{d}x\int_{x-5}^{x+5}\frac{1}{1800}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{1800}\int_{15}^{45}[y|_{x-5}^{x+5}]\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{1800}\int_{15}^{45}[x+5-(x-5)]\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{180}\int_{15}^{45}\mathrm{d}x=\frac{1}{180}(45-15)=\frac{1}{6}$$



$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G} f(x,y)dxdy$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1800}, & 15<x<45, 0<y<60\\ 0, & 其\quad 它\end{cases}$$

解：(2) $P(X<Y)$

$$=\iint\limits_{x<y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D}\frac{1}{1800}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{15}^{45}\mathrm{d}x\int_{x}^{60}\frac{1}{1800}\mathrm{d}y$$

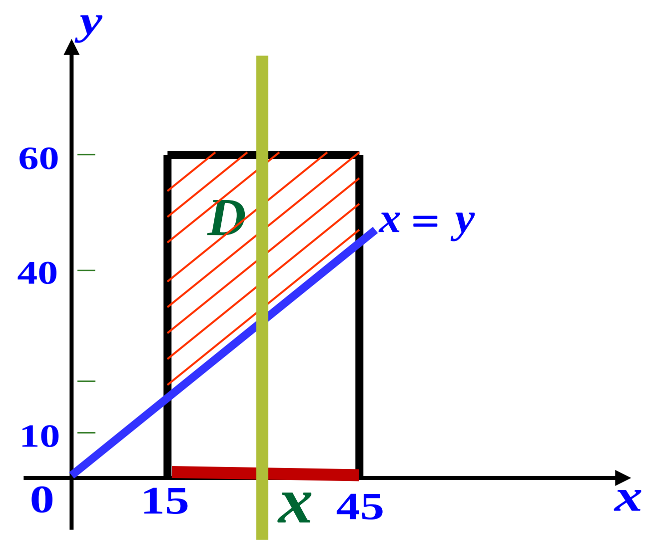
$$=\frac{1}{1800}\int_{15}^{45}[y\big|_{x}^{60}]\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1800}\int_{15}^{45}(60-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{1800}[\int_{15}^{45}60\,\mathrm{d}x-\int_{15}^{45}x\,\mathrm{d}x]$$

$$=\frac{1}{1800}[60x\big|_{15}^{45}-\frac{1}{2}x^2\big|_{15}^{45}]$$

$$=\frac{1}{1800}[60\times 30-\frac{1}{2}(45^2-15^2)]$$

$$=\frac{1}{2}$$



$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

第三章 多维随机变量及其分布

第四节 相互独立的随机变量

- 离散型随机变量的相互独立
- 连续型随机变量的相互独立

第三章小结

二维随机变量(X,Y)

	离散型	连续型
(X,Y) 整体	联合分布律 $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$	联合概率密度 $f(x,y)$
(X,Y) 个体	边缘分布律 $P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}$	边缘概率密度 ★ $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$
概率计算	$P\{(X,Y)\in G\}=\sum_{(x_i,y_j)\in G}p_{ij}$	★$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
X与Y 独立	$P(X=x_i,Y=y_j)$ $=P(X=x_i)P(Y=y_j)$	$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

作 业

授课内容	习题三
3.1 二维随机变量	1（1）（2）离散，3连续
3.2 边缘分布	6离散，7, 8, 9连续
3.4 相互独立的随机变量	16（2）, 18, 19连续,
3.5 随机变量函数的分布	21(1),22

05, 4分

设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机变量事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则 $\underline{(B)}$

(A) $a=0.2, b=0.3$

(B) $a=0.4, b=0.1$

(C) $a=0.3, b=0.2$

(D) $a=0.1, b=0.4$

解：$\sum_i \sum_j p_{ij} = 0.4+a+b+0.1=1 \rightarrow a+b=0.5$

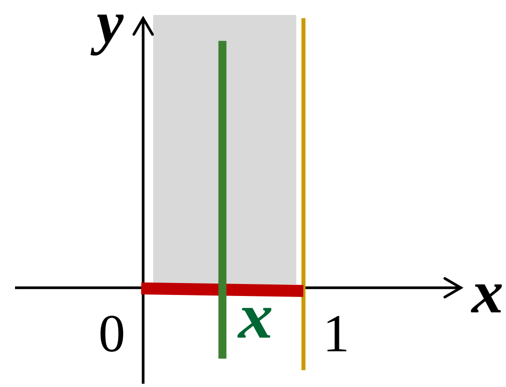
由于独立，$\underset{a}{P\{X=0, X+Y=1\}} = \underset{0.4+a}{P\{X=0\}} \cdot \underset{0.5}{P\{X+Y=1\}}$

$$P\{X=0, X+Y=1\}=P\{X=0, Y=1\}=a$$

$$P\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=a+b=0.5$$

$$\begin{cases} a=0.5(a+0.4) \\ a+b=0.5 \end{cases} \rightarrow a=0.4, b=0.1 \quad \text{故选}(B)$$

练习1



设随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0<x<1, y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求：(1) 常数b;

(2) 边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(3) 判断X与Y是否相互独立？

解：$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{0<x<1,y>0} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} be^{-(x+y)}\mathrm{d}y$

$$=b\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} e^{-y}\mathrm{d}y=b\int_0^1 e^{-x}e^{-y}\Big|_{+\infty}^{0}\mathrm{d}x=b\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x=be^{-x}\Big|_1^0$$

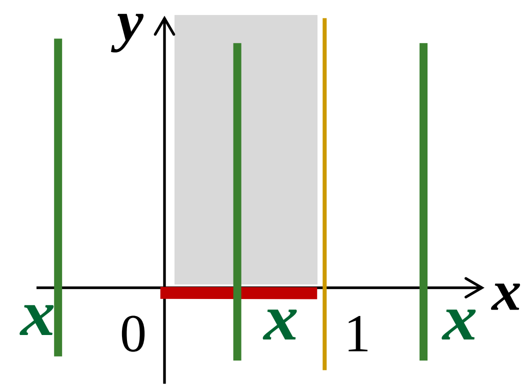
$$=b(1-e^{-1}) \qquad \therefore b=\frac{1}{1-e^{-1}}$$

练习1

设随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$b=\frac{1}{1-e^{-1}}$$

$$f(x,y)=\begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0<x<1, y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



试求：(2) 边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

解：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases} \int_0^{+\infty}\frac{1}{1-e^{-1}}e^{-(x+y)}\mathrm{d}y & 0<x<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}\int_0^{+\infty}e^{-y}\mathrm{d}y & 0<x<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}=\begin{cases} \frac{1}{1-e^{-1}}e^{-x} & 0<x<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

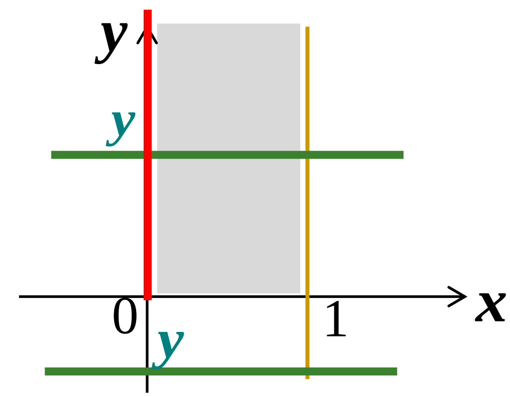
1. 投影（概率密度非零区域）
2. 积分（分区间）
3. 画线（确定上下限）

练习1

设随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$b=\frac{1}{1-e^{-1}}$$

$$f(x,y)=\begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0<x<1, y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



试求： (2) 边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

解：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{1-e^{-1}} e^{-(x+y)}\mathrm{d}x & y>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{e^{-y}}{1-e^{-1}} \int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x & y>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} e^{-y} & y>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

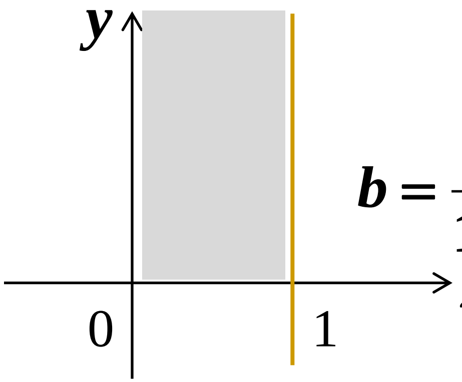
1. 投影（概率密度非零区域）
2. 积分（分区间）
3. 画线（确定上下限）

练习1

设随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$b=\dfrac{1}{1-e^{-1}}$

$$f(x,y)=\begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0<x<1, y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



$b=\dfrac{1}{1-e^{-1}}$

试求：(3) 判断X与Y是否相互独立？

解：

$$f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-e^{-1}}e^{-x} & 0<x<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y} & y>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\because f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

所以随机变量X,Y相互独立。

练习2

设随机变量 X,Y 相互独立，其相应的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

试求：

(1) X 和 Y 的联合概率密度;

(2) $P(Y\le X)$;

(3) $P(Y+X\le 1)$.

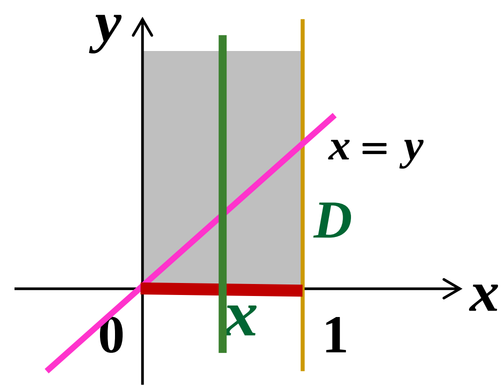
练习2

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

设随机变量 X,Y 相互独立，其相应的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求：(1) X 和 Y 的联合概率密度;



解：

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<1, y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) $P(Y\le X)=\iint\limits_{y\le x} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D} e^{-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x e^{-y}\mathrm{d}y$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x e^{-y}\mathrm{d}(-y)=-\int_0^1 e^{-y}\Big|_0^x\,\mathrm{d}x=-\int_0^1(e^{-x}-1)\mathrm{d}x=\int_0^1(1-e^{-x})\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x-\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x+\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}(-x)=x\Big|_0^1+e^{-x}\Big|_0^1=1+e^{-1}-1=e^{-1}$$

练习2

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

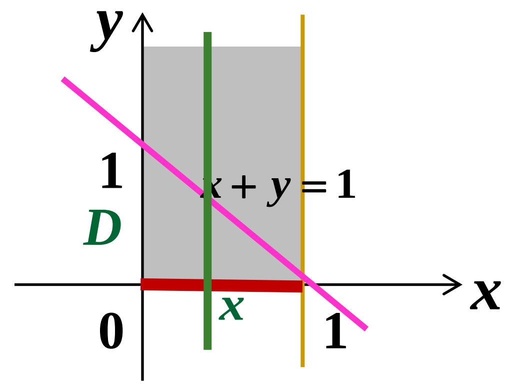
设随机变量 X,Y 相互独立，其相应的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求：(1) X 和 Y 的联合概率密度;

解：

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<1, y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



(3) $$P(X+Y\le 1)=\iint_{x+y\le 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D e^{-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}e^{-y}\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}e^{-y}\mathrm{d}(-y)=-\int_0^1 e^{-y}\Big|_0^{1-x}\mathrm{d}x=-\int_0^1(e^{x-1}-1)\mathrm{d}x=\int_0^1(1-e^{x-1})\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x-\int_0^1 e^{x-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x-\int_0^1 e^{x-1}\mathrm{d}(x-1)=x\Big|_0^1-e^{x-1}\Big|_0^1=1-(1-e^{-1})=e^{-1}$$

练习3

设随机变量 U 在区间[-2,2]上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & U\le -1\\ 1, & U>-1\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}-1, & U\le 1\\ 1, & U>1\end{cases}\qquad f(u)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -2<u<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求： (X,Y) 的联合分布律，并判断 X,Y 是否相互独立？

解：

X \ Y	-1	1
-1	1/4	0
1	1/2	1/4

$$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\le -1,U\le 1\}=P\{U\le -1\}$$

$$=\int_{-\infty}^{-1} f(u)\mathrm{d}u=\int_{-2}^{-1}\frac{1}{4}\mathrm{d}u=\frac{1}{4}$$

$$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\le -1,U>1\}=0$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-1,U\le 1\}=P\{-1<U\le 1\}=\int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>-1,U>1\}=P\{U>1\}=\int_{1}^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u=\int_{1}^{2}\frac{1}{4}\mathrm{d}u=\frac{1}{4}$$

练习3

设随机变量 U 在区间[-2,2]上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & U\le -1\\ 1, & U>-1\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}-1, & U\le 1\\ 1, & U>1\end{cases}\qquad f(u)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -2<u<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求：(X,Y) 的联合分布律，并判断 X,Y 是否相互独立？

解：

$X \backslash Y$	-1	1	
-1	$\boxed{1/4}$	0	$\boxed{1/4}$
1	1/2	1/4	3/4
	$\boxed{3/4}$	1/4	

$$P\{X=-1,Y=-1\}=\frac{1}{4}\neq P\{X=-1\}P\{Y=-1\}=\frac{3}{16}$$

所以 X,Y 不是相互独立的