

§ 17.1 平面图的基本概念

定义 设 G 是一个无向图，若 G 能画在曲面 S 上，使任两条边在端点以外不相交，则称 G 可嵌入曲面 S ；可嵌入平面的图称为**可平面图**，嵌入平面后的图称为**平面图**或**平面嵌入**，不可嵌入平面的图称为**非平面图**。

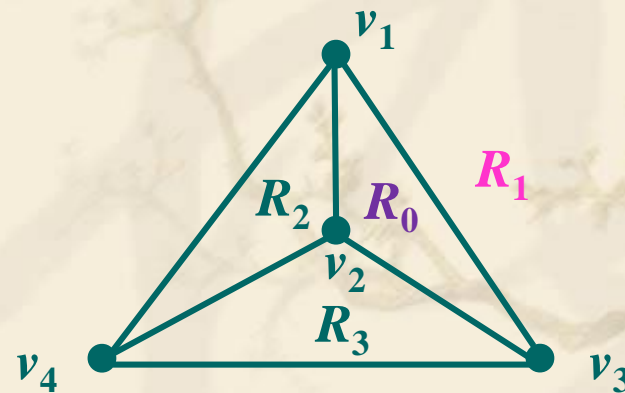
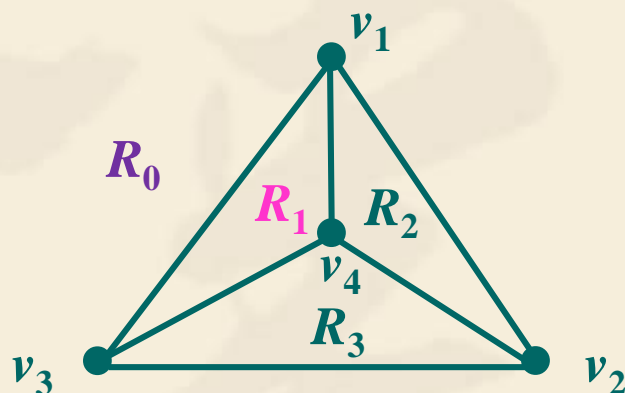
注 可平面图与平面图是不一样的。

阶数小于5的图都是可平面图的。

定理 可平面图的子图也是可平面图；非平面图的母图也是非平面图。

定义 设 G 是一个平面图， G 的边把所在平面分成若干个区域，每个区域称为 G 的一个**面**；面积有限的面称为**内部面**，面积无限的面称为**外部面**；包围面的边组成的回路称为**面的边界**，边界的长称为该**面的次数**，记为 $\deg(R)$ 。

用 $R_0, R_1, R_2, \dots, R_{r-1}$ 表示面， R_0 表示外部面。



定理 设 G 是一个平面图， r 是 G 的面的数目， m 是 G 的边数，则

$$\sum_{i=0}^{r-1} \deg(R_i) = 2m$$

定义 设 G 是一个简单可平面图，若对 G 中任意两个不相邻的顶点 u, v (如果存在的话)，必有 $G+(u, v)$ 为非平面图，则称 G 是**极大可平面图**，其平面嵌入称为**极大平面图**。

可平面图与不可平面图的临界状态。

性质

- ① 极大可平面图连通;
- ② 至少包含三个顶点的极大可平面图不含割点和割边。

定理 设 G 是 n 阶简单连通平面图($n \geq 3$), 则 G 是极大平面图的充要条件是 G 的每个面的次数均为3。

极小非平面图: G 是非平面图, 但对 $\forall e \in E(G)$, $G-e$ 都是可平面图。