第三部分 代数结构

- **代数结构**：定义了一个或多个运算（可以允许有无穷多个运算）的非空集合。
- **代数系统**：建立在集合上的一种运算系统。它是用运算构造数学系统的一种方法。代数系统是用系统观点研究运算的一种数学。
- 代数结构研究代数系统的内部构造和可能的形式，代数系统则研究满足特定性质的代数结构。

§9.1 二元运算及其性质

定义 设S是一个集合，f：$S \times S \to S$，则称f为S上的**二元运算**。

用$\circ, \cdot, *$表示二元运算，若$f(\langle x,y \rangle) = z$，则记

$$x \circ y = z$$

称z是x与y的运算结果。

注 二元运算应满足

1．普遍性，2．唯一性，3．封闭性

例

① 数的普通加法和乘法是$\mathbb{N}$上的二元运算;

② 数的普通加法、减法和乘法是$\mathbb{Z}$上的二元运算；

③ 数的普通乘法和除法是$\mathbb{R}^*$上的二元运算；

④ 矩阵加法、减法和乘法是$\mathbb{R}^{n\times n}$上的二元运算；

⑤ 集合的并、交、差(相对补)和对称差是$\mathrm{P}(S)$上的二元运算；

⑥ 函数复合$\circ$是S^S上的二元运算；

⑦ $x*y=x$是$\mathbb{R}$上的二元运算；

⑧ 数的普通减法不是$\mathbb{N}$上的二元运算。

定义 设S是一个集合，f：$S \to S$，则称 f 为S上的**一元运算**。

若$f(x)=y$，则记 $\circ(x)=y$，称y为x的运算结果。

例

① 取相反数是$\mathbb{Z}$上的一元运算；

② 取倒数是$\mathbb{R}^*$上的一元运算；

③ 取绝对补是$P(S)$上的一元运算；

④ 矩阵转置是$\mathbb{R}^{n\times n}$上的一元运算；

⑤ 取共轭复数是$\mathbb{C}$上的一元运算。

运算表：刻画有穷集上的运算的表格

一元运算：

$S=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$\circ$是$S$上的一元运算

a_i	$\circ(a_i)$
a_1	$\circ(a_1)$
a_2	$\circ(a_2)$
$\vdots$	$\vdots$
a_n	$\circ(a_n)$

二元运算:

$S=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$\circ$是$S$上的二元运算

$\circ$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	$\cdots$	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	$\cdots$	$a_2 \circ a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	$\cdots$	$a_n \circ a_n$

运算表直观地反映出运算的性质。

例 设S={1,2}，构造$P(S)$上的绝对补~与对称差⊕的运算表：

绝对补~

a_i	$\sim a_i$
$\varnothing$	{1,2}
{1}	{2}
{2}	{1}
{1,2}	$\varnothing$

对称差⊕

$\oplus$	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\varnothing$	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\varnothing$	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\varnothing$

例 设 $S=\{1,2,3,4\}$，定义 S 上的二元运算

$$x \circ y = xy \pmod 5,\ \forall x, y \in S$$

$\circ$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

定义 设$\circ$和$*$是S上的两个二元运算

（1）若$\forall x,y\in S$，$x\circ y=y\circ x$，则称$\circ$适合**交换律**；

（2）若$\forall x,y,z\in S$，$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$，则称$\circ$适合**结合律**；

（3）若$\forall x\in S$，$x\circ x=x$，则称$\circ$适合**幂等律**；

（4）若$\forall x,y,z\in S$，$(x\circ y)*z=(x*z)\circ(y*z)$

$$x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z)$$

则称$*$对$\circ$适合**分配律**；

（5）若$\forall x,y\in S$，$x\circ(x*y)=x$，$x*(x\circ y)=x$，则称$\circ$和$*$适合**吸收律**。

定义 设$\circ$是S上的一个二元运算

（1）对$x \in S$，若$x \circ x = x$，则称x是**幂等元**；

（2）若存在$e_l \in S$ $(e_r \in S)$，使

$$\forall x \in S,\ e_l \circ x = x \ (x \circ e_r = x)$$

则称e_l (e_r)是S中关于$\circ$运算的一个左单位元（右单位元）。若$e \in S$关于$\circ$运算既是左单位元又是右单位元，则称e为S中关于$\circ$运算的**单位元**或**幺元**；

（3）若存在$\theta_l \in S(\theta_r \in S)$，使

$$\forall x \in S，\theta_l \circ x = \theta_l \ (x \circ \theta_r = \theta_r)$$

则称$\theta_l\,(\theta_r)$是S中关于$\circ$运算的左零元（右零元）。若$\theta \in S$关于$\circ$运算既是左零元又是右零元，则称θ为S中关于$\circ$运算的**零元**。

定理（1）设集合S关于二元运算$\circ$既有左单位元e_l，又有右单位元e_r，则$e_l = e_r = e$是S中关于$\circ$运算唯一的单位元；

（2）设集合S关于二元运算$\circ$既有左零元θ_l，又有右零元θ_r，则$\theta_l = \theta_r = \theta$是$S$中关于$\circ$运算唯一的零元。

定理 设集合S关于二元运算$\circ$既有单位元e，又有零元θ。若S至少有两个元素，则$e \neq \theta$。

单位元与零元称为**代数常数**。

定义 设$\circ$是S上的二元运算，θ是S中关于$\circ$的零元。若对$\forall x,y,z \in S$，均有

（1） $x \circ y = x \circ z,\ x \neq \theta \Rightarrow y = z$

（2） $y \circ x = z \circ x,\ x \neq \theta \Rightarrow y = z$

则称$\circ$运算适合**消去律**。

若没有零元，则上述定义可去除条件$x \neq \theta$。

定义 设$\circ$是S上的一个二元运算，e是S中关于$\circ$的单位元。对$x\in S$，若存在$y_l\in S$ ($y_r\in S$)，使

$$y_l\circ x=e\ (x\circ y_r=e)$$

则称$y_l(y_r)$是x的左逆元（右逆元）。若$y\in S$既是x的左逆元，又是x的右逆元，则称y是x的**逆元**，记为x^{-1}。

定理 设$\circ$是S上的一个二元运算，e是S中关于$\circ$的单位元。对$x\in S$，若同时存在左逆元y_l和右逆元y_r，则$y_l=y_r=y$是x唯一的逆元。

例 在$\mathbb{Q}$上定义二元运算$*$

$$x*y=x+y-xy,\ \forall x,y\in\mathbb{Q}$$

讨论$*$的运算性质。

解 对$\forall x,y\in\mathbb{Q}$,

$$x*y=x+y-xy=y+x-yx=y*x$$

所以，运算$*$满足交换律。

对$\forall x,y,z\in\mathbb{Q}$,

$$(x*y)*z=(x+y-xy)*z=(x+y-xy)+z-(x+y-xy)z$$

$$=x+(y+z-yz)-x(y+z-yz)=x*(y*z)$$

所以，运算$*$满足结合律。

对$2\in\mathbb{Q}$，

$$2*2=2+2-2\cdot2=0\neq2$$

所以，运算*不满足幂等律。

对$0\in\mathbb{Q}$，

$$x*0=x+0-x\cdot0=x，\forall x\in\mathbb{Q}$$

所以，故0是关于运算*的右单位元。而运算*满足交换律，所以0也是关于运算*的左单位元。于是，0是关于运算*的单位元e。

对$1\in\mathbb{Q}$，

$$x*1=x+1-x\cdot 1=1，\forall x\in\mathbb{Q}$$

所以，故1是关于运算$*$的右零元。而运算$*$满足交换律，所以1也是关于运算$*$的左零元。于是，1是关于运算$*$的零元θ。

对$\forall x,y,z\in\mathbb{Q}$，设 $x*y=x*z$，$x\neq\theta$，则

$$x+y-xy=x+z-xz$$

$$\Rightarrow\ y(1-x)=z(1-x)$$

因为x不是零元，所以$x\neq 1$，由此得$y=z$。又运算$*$满足交换律，所以$*$满足消去律。

对$\forall x\in\mathbb{Q}$，设存在$y\in\mathbb{Q}$使得

$$x*y=e=y*x$$

这里，e是单位元。因为运算$*$满足交换律，所以只需讨论 $x*y=e$：

由$x*y=x+y-xy=0$得$(x-1)y=x$，因此，只要$x\neq 1$（x不是零元），均有

$$y=\frac{x}{x-1}=x^{-1}$$

这就是x的逆元。即$\mathbb{Q}$关于运算$*$的非零元x都有逆元 $x^{-1}=\frac{x}{x-1}$。 ▌