<!--

-->

第7章 微分方程

第1节 微分方程的基本概念

- 微分方程：用来表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程。
  （简单来说就是一种方程。）

- 微分方程的阶：微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数。
  eg. $x^{3}y'''+x^{2}y''+xy'=1$ 就是一个3阶方程。
  （类似于多项式的次数：多项式中最高次项的次数。）

- 微分方程的解：带入方程后能使方程成为恒等式的函数。
  （和普通的方程一样，微分方程也有解，只不过是函数而已。）

- 微分方程的通解：含有和微分方程的阶数相同的个数的常数的解。
  （就是微分方程所有解的表达通式。）

- 微分方程的特解：将通解中的常数确定下来后的解。

- 初值条件：给定的条件

第2节 可分离变量的微分方程

- 可分离变量的微分方程：形如 $g(y)dy=f(x)dx$ 的方程或可以变形成这种形式的方程。
  （如： $\frac{dy}{dx}=x^{3}y$ ，它可化为 $\frac{1}{y}dy=x^{3}dx$ ）

- ### $g(y)dy=f(x)dx$ 型的解法

- 对2边同时积分 $\int{g(y)dy}=\int{f(x)dx}$
  得到 $G(y)=F(x)+C$
  进而化简为 $y=\phi(x) +C$ 的形式，即原方程的解。

第3节 齐次方程

- 齐次方程：可化为 $\frac{dy}{dx}=\phi(\frac{y}{x})$ 形式的一阶微分方程。 （如： $\frac{dy}{dx}=3\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+1$ ）

- ## $\frac{dy}{dx}=\phi(\frac{y}{x})$ 型的解法

1. 令 $u=\frac{y}{x}$ ，将 y 与 $\frac{dy}{dx}$ 用 u 表示
   得到 $y=ux, \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

2. 带回原方程得 $u+x\frac{du}{dx}=\phi(u)$
   即 $x\frac{du}{dx}=\phi(u)-u=f(u)$
   即 $\frac{1}{f(u)}du=\frac{1}{x}dx$ （是不是回到了可分离变量的微分方程的形式）
3. 接下来按着可分离变量的微分方程的解法即可解出:
   $g(u)=\ln{|x|}$
4. 再将 $u=\frac{y}{x}$ 带回上式即可得到解 $g(\frac{y}{x})=\ln{|x|}$ （可以进一步化简成 $y=\psi(x)+C$ 的形式）

第4节 一阶线性微分方程

- 一阶线性微分方程：形如 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的方程
  （如： $y'+(x^{2}+x+1)y=3x$ ）
- 齐次线性微分方程：当 $Q(x) \equiv 0$ 时的一阶线性微分方程。
  即形如 $y'+P(x)y=0$ 的方程。
  （ $y'+P(x)y=0$ 的形式）
  （一般称 $y'+P(x)y=0$ 为对应于非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的齐次线性微分方程）
- 非齐次线性微分方程： 当 $Q(x) \equiv 0$ 不成立时的一阶线性微分方程。

$y'+P(x)y=0$ 型的解法

1. 分离变量得 $\frac{1}{y}dy=-P(x)dx$
2. 两端积分得 $\ln{|y|}=-\int{P(x)dx}+C_{1}$
   即方程的通解 $y=Ce^{-\int{P(x)dx}} \ \ ，(C=\pm C_{1})$

$y'+P(x)y=Q(x)$ 型的解法

1. 先解出对应齐次线性微分方程的通解： $y=Ce^{-\int{P(x)dx}}$
2. 再用常数变易法将常数 C 替换为未知函数 $u(x)$
   得到 $y=ue^{-\int{P(x)dx}}$
   进而 $y'=u'e^{-\int{P(x)dx}} \ -uP(x)e^{-\int{P(x)dx}}$
3. 带回原方程得 $u'e^{-\int{P(x)dx}} \ =Q(x)$
   （上式中的 $-uP(x)e^{-\int{P(x)dx}}$ 部分会和原式中的 $P(x)y$ 的部分消掉，可以用这一性质检验自己当前的计算是否有误）
4. 接下来就可以方便的解出 $u(x)$
   即 $u'=Q(x)e^{\int{P(x)dx}}$
   两端积分得 $u=\int{Q(x)e^{\int{P(x)dx}} \ dx}+C$
5. 再将 $u(x)$ 带回 $y=ue^{-\int{P(x)dx}}$ 就可以得到最后的通解：
   $y=Ce^{-\int{P(x)dx}} \ +e^{-\int{P(x)dx}} \ \cdot \int{Q(x)e^{\int{P(x)dx}} \ dx}$
   （解的特点：
   $y=Ce^{-\int{P(x)dx}}$ 的部分是对应的齐次线性微分方程的通解，
   $e^{-\int{P(x)dx}} \ \cdot \int{Q(x)e^{\int{P(x)dx}}\ dx}$ 的部分是方程的一个特解，有些时候可以用此性质快速得到答案。）

（注：不建议直接记结论，太过复杂。其实只要掌握关键的步骤就可以顺利的写下完整步骤）

第5节 可降阶的高阶微分方程

本节讨论了三种高阶微分方程的解法。

第1种： $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程

解法：持续对两边同时积分，直到积出 $y=g(x)$ 的形式就方程的通解。

第2种： $y''=f(x,y')$ 型的微分方程

如： $(1+x^{2})y''=2xy'$

- 解法：

1. 设 $y'=p(x)$ 则 $y''=p'$
   原方程就可化为 $p'=f(x,p)$ （即只和 x,p 有关的一阶微分方程，一般是可分离变量的）
2. 可以解出该方程的通解 $p=y'=g(x,C_{1})$
   进一步积分得到 $y=\int{g(x,C_{1})dx}+C_{2}$ 的通解形式。
   （纯看推理非常枯燥，做几道例题结合起来看会容易理解一些。）

第3种： $y''=f(y,y')$ 型的微分方程

- 解法：

1. 令 $y'=p$ 则 $y''=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\cdot\frac{dp}{dy}$
   带入原式得 $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$ （一般是可分离变量的）
2. 可以解出该方程的通解 $p=g(y,C_{1})$
   即 $y'=g(y,C_{1})$
3. 分离变量并积分得到通解： $\int{\frac{1}{g(y,C_{1})}dy}=x+C_{2}$

第6节 高阶线性微分方程

以二阶微分方程为主

- 高阶微分方程： $y^{(n)}+a_{1}(x)y^{(n-1)} + ... +a_{n-1}(x)y'+a_{n}(x)y=f(x)$
- 二阶微分方程： $y''+P(x)y'+Q(x)=f(x)$

线性微分方程的解的结构

可以联想一下线性代数中的方程组的解的结构的相关知识。

- 若 $y_{1}(x)$ 与 $y_{2}(x)$ 是二阶齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个解
  那么 $y=C_{1}y_{1}+C_{2}y_{2}$ 也是方程的解，其中 $C_{1}，C_{2}$ 为任意常数
- 若 $y_{1}(x)$ 与 $y_{2}(x)$ 是二阶齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个线性无关的特解
  那么 $y=C_{1}y_{1}+C_{2}y_{2}$ （ $C_{1}，C_{2}$ 为任意常数）就是方程的通解
- 若 $y^{\ast}(x)$ 是二阶非齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解， $Y(x)$ 是对应齐次线性微分方程的通解
  则 $y=Y+y^{\ast}$ 就是二阶非齐次线性微分方程的通解。
- （解的叠加原理）若
  $y_{1}^{\ast}(x)$ 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_{1}(x)$ 的一个特解
  $y_{2}^{\ast}(x)$ 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_{2}(x)$ 的一个特解
  则 $y=y_{1}^{\ast}(x)+y_{2}^{\ast}(x)$ 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_{1}(x)+f_{2}(x)$ 的一个特解

- 以上4条结论可以推广到高阶线性微分方程

第7节 常系数齐次线性微分方程

• 二阶常系数齐次线性微分方程： $y''+py'+qy=0$ 的解法

1. 写出微分方程对应的特征方程 $r^{2}+pr+q=0$ （ y 换成 r ，阶数换成相同的指数）
2. 求出特征方程的两个根 r_{1},r_{2}
3. 根据两个根之间的关系写出通解

r_{1},r_{2} 的关系	通解
两个不相等的实根 r_{1},r_{2}	$y=C_{1}e^{r_{1}x}+C_{2}e^{r_{2}x}$
两个相等的实根 $r_{1}=r_{2}$	$y=(C_{1}+C_{2}x)e^{r_{1}x}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha \pm \beta{i}$	$y=e^{\alpha{x}}(C_{1}\cos{\beta{x}}+C_{2}\sin{\beta{x}})$

• n 阶常系数齐次线性微分方程： $y^{(n)}+a_{1}y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_{n}y=0$ 的解法

1. 写出微分方程对应的特征方程 $r^{n}+a_{1}r^{n-1}+...+a_{n-1}r+a_{n}=0$ （ y 换成 r ，阶数换成相同的指数）
2. 求出特征方程的根 $r_{1},r_{2},...,r_{n}$
3. 根据根的种类，对应组合写出通解

根	通解中的对应项
单实根 r	Ce^{rx}
一对单复根 $r_{1,2}=\alpha \pm \beta{i}$	$y=e^{\alpha{x}}(C_{1}\cos{\beta{x}}+C_{2}\sin{\beta{x}})$
k 重实根 r	$e^{rx}(C_{1}+C_{2}x+...+C_{k}x^{k-1})$
一对 k 重复根 $r_{1,2}=\alpha \pm \beta{i}$	$y=e^{\alpha{x}}[(C_{1}+C_{2}x+...+C_{k}x^{k-1})\cos{\beta{x}}+(D_{1}+D_{2}x+...+D_{k}x^{k-1})\sin{\beta{x}}]$

第8节 常系数非齐次线性微分方程

主要讲述二阶常系数非齐次线性微分方程在2种常见形式下的解法

- 二阶常系数非齐次线性微分方程： $y''+py'+qy=f(x)$
- 二阶常系数非齐次线性微分方程的通解 $y=Y(x)+y^{\ast}(x)$
  $Y(x)$ 是对应齐次方程的通解（用上一节的方法求出）
  $y^{\ast}(x)$ 是方程的一个特解（本节重点）

- ## $f(x)=e^{\lambda{x}}P_{m}(x)$ 型（ $P_{m}(x)=a_{0}x^{m}+a_{1}x^{m-1}+...+a_{m-1}x+a_{m}$ ）

方程的特解为 $y^{\ast}=x^{k}R_{m}(x)e^{\lambda{x}}$ （ $R_{m}(x)=b_{0}x^{m}+b_{1}x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_{m}$ ）

当 λ 分别 不是特征方程的根、是特征方程的单根、是特征方程重根 时， k 分别取 $0,1,2$

（简明原因：将特解 $y^{\ast}=R_{m}(x)e^{\lambda{x}}$ 带入方程后

得 $R_{m}''(x)+(2\lambda+p)R_{m}'(x)+(\lambda^{2}+p\lambda+q)R_{m}(x)=P_{m}(x)$

当 λ 不是特征方程的根时， $2\lambda+p$ 和 $\lambda^{2}+p\lambda+q$ 均不为 0 ，所以左右两端已经相等， k 取 0

当 λ 是特征方程的单根时， $\lambda^{2}+p\lambda+q=0$ ，所以 k 取 1 补上 1 次使左右两端相等

当 λ 是特征方程的重根时， $2\lambda+p$ 和 $\lambda^{2}+p\lambda+q$ 均为 0 ，所以 k 取 2 补上 2 次使左右两端相等）

- ## $f(x)=e^{\lambda{x}}[P_{l}(x)\cos{\omega{x}}+Q_{n}(x)\sin{\omega{x}}]$ 型

方程的特解为 $y^{\ast}=x^{k}e^{\lambda{x}}[A_{m}(x)\cos{\omega{x}}+B_{m}(x)\sin{\omega{x}}]$ （ $m=\max{(l,n)}$ ）

当 $\lambda+\omega{i}$ 分别 不是特征方程的根、是特征方程的单根 时， k 分别取 $0,1$