第三章 线性方程组

教学计划：4次课-12学时

第三章 线性方程组

3.2 向量组的秩

- 向量组的极大线性无关组
- 向量组的秩
- 向量组的秩与矩阵秩的关系

1. 向量组的极大线性无关组

定义3.6 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_m$

若向量组 A 的一个部分组 A_0: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 满足

(1) $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关;

(2) A 中的任意向量均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示. —— 最大

则称 A_0: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为向量组A的一个极大线性无关向量组,

简称为极大(最大)无关组.

分析: (1) $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, α_i $(i \geq r+1)$ 线性相关

线性无关

$$\alpha_i = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$$

(2) $\forall \alpha_i \in A\ (i \geq r+1)$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示.

所以 A_0 的线性无关性在A不能再扩大，因此 A_0是A极大无关组。

例1 A： $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ \beta_3=\begin{pmatrix}7\\7\\9\end{pmatrix},\ \beta_4=\begin{pmatrix}11\\10\\13\end{pmatrix}.$

求A的极大无关组.

解

$\because \beta_1\neq 0,$ $\therefore \beta_1$ 线性无关 $k\beta_1=0\rightarrow k=0$

$\because \beta_1,\beta_2$ 不平行， $\therefore \beta_1,\beta_2$ 线性无关

$\because \left|\beta_1,\beta_2,\beta_3\right|\neq 0$ $\therefore \beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关，

而 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关，

所以 β_1,β_2,β_3 是向量组 A 极大无关组.

令 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0\longrightarrow k_1=k_2=\cdots=k_m=0$

例1 A： $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$， $\beta_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$， $\beta_3=\begin{pmatrix}7\\7\\9\end{pmatrix}$， $\beta_4=\begin{pmatrix}11\\10\\13\end{pmatrix}$.

求A的极大无关组.

解 **问题：**向量组的极大无关组是惟一的吗？

$\because \left|\beta_1,\beta_2,\beta_3\right|\neq 0$ $\therefore \beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关，而 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关， 所以 β_1,β_2,β_3 是向量组A极大无关组.

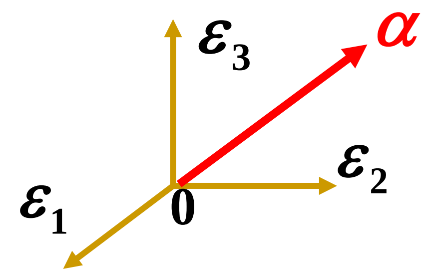
$\because \left|\beta_1,\beta_3,\beta_4\right|\neq 0$ $\therefore \beta_1,\beta_3,\beta_4$ 线性无关，而 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关，所以 β_1,β_3,β_4 也是向量组A极大无关组.

结论： 一般地, 向量组的极大无关组不惟一.

但它们所含向量的个数相同，都为3.

例2 求 R^3 的极大无关组

(1) $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 是 R^3 的一个极大无关组.



$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 线性无关,

R^3中任一向量 α 均可由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 线性表示,

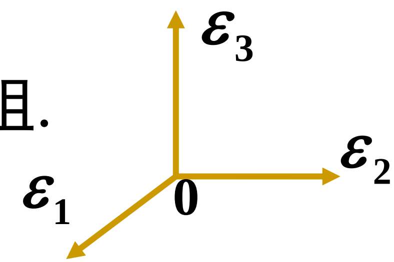
$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3$$

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_n\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

问题：向量空间 R^3 还有其它的极大无关组吗？

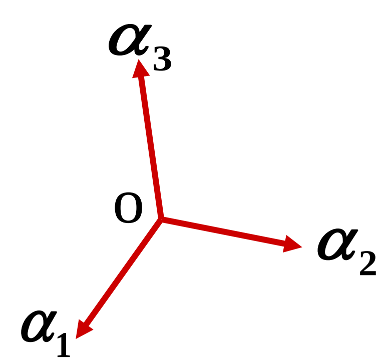
例2 求 R^3 的极大无关组

(1) $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 是 R^3 的一个极大无关组.



(2) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 也是 R^3 的一个极大无关组.

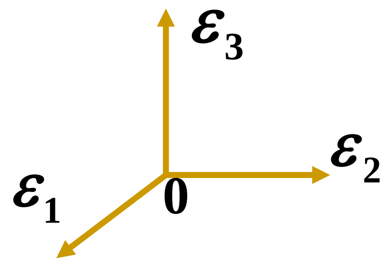
$\because \begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-2$ $\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,

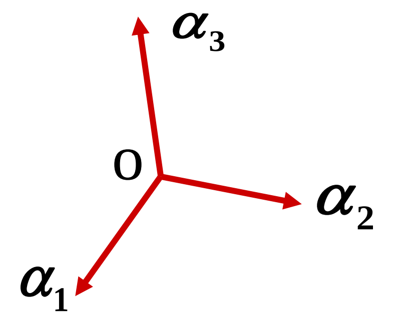


R^3中任一向量 α 均可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,

结论: R^3中任意3个向量线性无关都是极大无关组.

例2 求 R^3 的极大无关组





(1) $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 是 R^3 的一个极大无关组.

(2) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 也是 R^3 的一个极大无关组.

$$\text{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=\text{span}\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}=R^3$$

结论：R^3 的极大无关组所含向量的个数相同，都为3.

1. 向量组的极大线性无关组

定义3.6 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_m$

若向量组 A 的一个部分组 A_0: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 满足

(1) $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关;

(2) A 中的任意向量均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示.

则称 $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为向量组A的一个极大线性无关向量组,

简称为极大(最大)无关组.

问题1: 向量组的极大无关组所含向量个数都一样吗?

问题2: 向量组的极大无关组的作用是什么?

问题3: 如何求向量组的极大无关组?

第三章 线性方程组

3.2 向量组的秩

- 向量组的极大线性无关组
- 向量组的秩
- 向量组的秩与矩阵秩的关系

（93, 6分）

设A是$n\times m$矩阵，B是$m\times n$矩阵，$n<m$，若$AB=E$，

证明：B的列向量线性无关.

本题知识点：

线性无关定义

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n=0$$

$$\Rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_n=0$$

证明：

对B按列分块，$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$

$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n=0$ 用A左乘两边

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0\Rightarrow B\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0\Rightarrow AB\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=A0=0\Rightarrow\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0$$

$\Rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 所以B的列向量线性无关.

（12, 4分）

设列向量组 $\alpha_1=(0,0,c_1)^T,\alpha_2=(0,1,c_2)^T,\alpha_3=(1,-1,c_3)^T,\alpha_4=(-1,1,c_4)^T$，

其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为 **(C)**

$(A)\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.$　　$(B)\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_4.$　　$(C)\ \alpha_1,\alpha_3,\alpha_4.$　　$(D)\ \alpha_2,\alpha_3,\alpha_4.$

解：

$$|\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$$

$\therefore \alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，所以选(C)

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}=-c_1$$

无法判断

本题所用知识点：

3个3维向量组线性相关

$\Leftrightarrow |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=0$

（05, 4分）

设列向量组 $\alpha_1=(2,1,1,1)^T, \alpha_2=(2,1,a,a)^T, \alpha_3=(3,2,1,a)^T, \alpha_4=(4,3,2,1)^T$ 线性相关，且 $a\neq 1$，则 $a=$ $\underline{\quad 1/2 \quad}$

解：4个4维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=0$

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=\begin{vmatrix}2&2&3&4\\1&1&2&3\\1&a&1&2\\1&a&a&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&-1&-2\\1&1&2&3\\0&a-1&-1&-1\\0&a-1&a-2&-2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&-1&-2\\a-1&-1&-1\\a-1&a-2&-2\end{vmatrix}$$

$$=(1-a)\begin{vmatrix}0&-1&2\\1&-1&1\\1&a-2&2\end{vmatrix}=(1-a)\begin{vmatrix}0&-1&2\\1&-1&1\\0&a-1&1\end{vmatrix}=(a-1)\begin{vmatrix}-1&2\\a-1&1\end{vmatrix}=(a-1)(1-2a)=0$$

$$\Rightarrow a=1/2$$

本题所用知识点：

4个4维向量组线性相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=0$

（02, 3分）

设三阶矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，三维列向量 $\alpha=(a,1,1)^T$，

已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $a=$ <u>-1</u>

解：

$$A\alpha=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2a+3\\3a+4\end{pmatrix}\qquad \alpha=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$$

因为 $A\alpha$ 与 α 线性相关，所以

$$\frac{a}{a}=\frac{2a+3}{1}=\frac{3a+4}{1}=1\Rightarrow a=-1$$

本题知识点：

两个向量 α,β 线性相关

$\Leftrightarrow \beta=k\alpha$ 即对应分量成比例

（03, 4分）

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$均为$n$维列向量，下列结论不正确的是 **(B)**

(A) 若对于任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$,都有

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$, 则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

(B) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则对于任意一组不全为零的数

$k_1,k_2,\cdots,k_s$，有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关的充要条件是此向量组的秩为$s$.

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关的充要条件是其中任意两个向量线性无关.

解：应选(B).

由定义，只要存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$. 则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关.

（04,13分）

设向量组$\alpha_1=(1,2,0)^T,\alpha_2=(1,a+2,-3a)^T,\alpha_3=(-1,-b-2,a+2b)^T,\beta=(1,3,-3)^T$，

试问：当a, b为何值时，

(1) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

(2) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表示，并求出表示式；

(3) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式.

解：

β 能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$表示 $\Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ 有解

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\beta\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&a+2&-b-2\\0&-3a&a+2b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}$$

（04,13分）

试问：当a, b为何值时，

(1) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

解：$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$

$$(A,b)=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{array}\right)\\ \begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{array}\end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{array}\right)$$

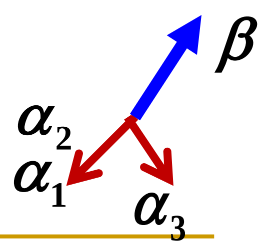
$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(1)当$a=0$, b为任意值时，$|A|=0$,

$r(A)=2<r(A,b)=3$, 方程组无解，

所以，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -b-2 \\ 2b \end{pmatrix}$$



（04,13分）

试问：当a, b为何值时，

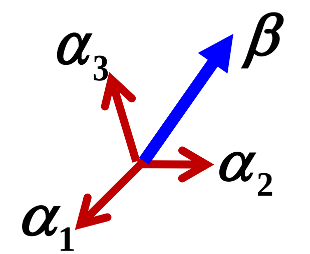
(2)β 可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表示，并求出表示式；

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

解： $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$

$$\begin{array}{c} (A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{array}\right) \\ \qquad\quad \alpha_1 \quad\ \ \alpha_2 \qquad\ \alpha_3 \qquad \beta \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \qquad\qquad \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-1/a \\ 0 & 1 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$



(2)当 $a \neq 0, a \neq b$ 时， $|A| \neq 0,\ r(A) = r(A,b) = 3,$ 方程组有唯一解，

所以，β 可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表示.

$$\beta = (1-1/a)\alpha_1 + 1/a\,\alpha_2 + 0\alpha_3$$

（04,13分）

试问：当a, b为何值时，

(3) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

解： $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-1/a \\ 0 & 1 & -1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = & 1-1/a \\ x_2 = & c+1/a \\ x_3 = & c \end{cases}$$

(3)当 $a = b \neq 0$时，$|A| = 0$,

$r(A) = r(A,b) = 2 < 3$, 方程组有无穷多组解，

β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，但表示式不唯一.

（04,13分）

试问：当a, b为何值时，

(3) β可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

解： $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$

$\alpha_3=(-1,-a-2,3a)^T=-\alpha_2$

$$(A,b)=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{array}\right)\\ \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta \end{array}\end{array} \to \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-1/a \\ 0 & 1 & -1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1= & 1-1/a \\ x_2= & c+1/a \\ x_3= & c \end{cases}$$

(3)当 $a=b\neq 0$时，$r(A)=r(A,b)=2<3$，方程组有无穷多组解，

β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，但表示式不唯一.

$$\beta=(1-1/a)\alpha_1+(c+1/a)\alpha_2+c\alpha_3$$

$$=(1-1/a)\alpha_1+\cancel{c\alpha_2}+1/a\,\alpha_2-\cancel{c\alpha_2}$$

$$=(1-1/a)\alpha_1+1/a\,\alpha_2$$