第一章 矩阵

1.1 矩阵及其运算

1.2 分块矩阵

1.3 可逆矩阵

1.4 高斯消元法

1.5 矩阵的秩与初等变换

复习

一般的线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ 求解

线性方程组的表示：

增广矩阵

$$(A,b) = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \boldsymbol{b} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \end{array}$$

高斯消元法　方程之间的三种运算 ⇨ 矩阵的初等行变换

(1) $(i) \Leftrightarrow (j)$	(1) $r_i \Leftrightarrow r_j$
(2) $(i) \times k$	(2) $r_i \times k$
(3) $(i) + k(j)$	(3) $r_i + kr_j$

复习

用初等行变换求解线性方程组的步骤：

$$\begin{cases} 3x+4y-6z=4 \\ x-y+4z=1 \\ -x+3y-10z=1 \end{cases} \xrightarrow{(1)} B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$ 增广矩阵

(2) 初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$ 阶梯阵

行变换 (3)

行简化阶梯阵
$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

同解方程组

(4) 得解：$\begin{cases} x=4 \\ y=-5 \\ z=-2 \end{cases}$

复习

矩阵的秩

增广矩阵　　　　　　　　　　阶梯阵

$$\begin{cases} 3x+4y-6z=4 \\ x-y+4z=1 \\ -x+3y-10z=1 \end{cases} \longrightarrow B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

行简化阶梯阵

方程组有唯一解

⇓

有效方程个数=变量个数=3

⇓

非零行数=变量个数=3 $=r(B)$

定理1.3 一个矩阵A总可以经过有限次初等行变换化成阶梯阵和行简化阶梯阵，且非零行数 r 是唯一确定的.

矩阵秩的定义： 矩阵的秩$=r(A)$

矩阵秩的意义： 方程组有效方程的个数

矩阵秩的计算： 初等行变换的方法

初等行变换求解线性方程组(齐次)

齐次线性方程组：$Ax=0$

$$r(A)\begin{cases} =n, Ax=0 \text{ 有唯一解----零解} \\ <n, Ax=0 \text{ 有无穷多解---非零解} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A $\quad x \quad$ 0

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

阶梯阵

$r(A)=n=3$

唯一零解

注意：讨论适合所有的情况

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯阵 行简化阶梯阵

$r(A)=2<n=3$

无穷多非零解，求通解

初等行变换求解线性方程组(非齐次)

$$\begin{array}{c} \\ (A,b)= \end{array}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \end{array}$$

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

非齐次线性方程组：$Ax=b$

$Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A,b)\begin{cases} =n, & \text{有唯一解} \\ <n, & \text{有无穷多解} \end{cases}$

$Ax=b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A)<r(A,b)$ 有矛盾方程

注意：讨论适合所有的情况

阶梯阵　行简化阶梯阵

$$(A,b)=\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

$r(A)=r(A,b)=n=3,$

求唯一解

$$(A,b)=\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$r(A)=r(A,b)=2<n=3,$

求通解

$$(A,b)=\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}\to\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \end{array}$$

→矛盾方程

$r(A)=2<r(A,b)=3,$

无解

例3 当c, d为何值时,方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = c \\ 5x_1 + 4x_2 + (3+d)x_3 = 0 \end{cases}$$

(1)无解;

(2)有唯一解;

(3)有无穷解, 求其通解.

解

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & c \\ 5 & 4 & 3+d & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underset{\text{阶梯阵}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3-c \\ 0 & 0 & d & -2-c \end{pmatrix}} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$ 行简化阶梯阵

(1) 当$d = 0, c \neq -2$时, 无解 有矛盾方程 $r(A) = 2 < r(A,b) = 3$

(2) 当$d \neq 0$ 时, 有唯一解 $r(A) = r(A,b) = n = 3$

(3)当 $d = 0, c = -2$时, 有无穷解. $r(A) = r(A,b) = 2 < n = 3$

通解:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 4 \\ -2c_1 + 5 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中c_1为任意常数

第一章 矩阵

第一章 矩阵

1.5 矩阵的秩与初等变换

- 初等矩阵
  - 三种初等矩阵
  - 用初等行变换求逆矩阵
  - 用初等行变换求解矩阵方程
- 矩阵的秩

1. 初等矩阵

定义1.10 由单位矩阵E经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵.

(1)三种初等矩阵 三种初等变换对应着三种初等矩阵.

1) 对调E的两行(列) $r_i \leftrightarrow r_j$

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_i \leftrightarrow c_j]{r_i \leftrightarrow r_j} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i\text{ 列} & & j\text{ 列} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = E(i,j)$$

$$\begin{array}{ccccc} & i\text{ 列} & & j\text{ 列} & \end{array}$$

1. 初等矩阵

定义1.10 由单位矩阵E经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵.

(1)三种初等矩阵 三种初等变换对应着三种初等矩阵.

1) 对调E的两行(列) $r_i \leftrightarrow r_j$

例:

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_1\leftrightarrow c_3]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=E(1,3)$$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_3]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=E(2,3)$$

2) 以数 $k \neq 0$ 乘以某行(列) $r_i \times k$

$$E=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} & & & i\text{列} & & & \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\xrightarrow[c_i \times k]{r_i \times k}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} & & & i\text{列} & & & \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & k & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
= E(i(k))$$

例：

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 \times (-5)]{r_3 \times (-5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = E(3(-5))$$

3) 以数 $k \neq 0$ 乘以某行(列)加到其它行(列)上去 $r_i + kr_j$

$$E=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} & & & i\text{列} & & & & j\text{列} & & & \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 1_{ii} & & & & 0 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & \cdots & & 1_{jj} & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\xrightarrow[c_j + kc_i]{r_i + kr_j}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} & & & i\text{列} & & & & j\text{列} & & & \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 1_{ii} & & \cdots & & k & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & \cdots & & 1_{jj} & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

$$E(i, j(k))$$

3) 以数 $k \neq 0$ 乘以某行(列)加到其它行(列)上去 $r_i + kr_j$

例:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 - 2c_1]{r_1 - 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E(1,3(-2))$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 + 4c_3]{r_3 + 4r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = E(3,2(4))$$

三种初等矩阵：

1) $E \xrightarrow[c_i \leftrightarrow c_j]{r_i \leftrightarrow r_j} E(i,j)$

2) $E \xrightarrow[c_i \times k]{r_i \times k} E(i(k))$

3) $E \xrightarrow[c_j + kc_i]{r_i + kr_j} E(i,j(k))$

问题： 初等矩阵有什么用处呢？

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&9&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}_{3\times 4}$

结论： $A\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}E_3(1,2)A$

$A\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}AE_4(1,2)$

$$E_3(1,2)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&9&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&9&8&1\\1&2&3&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$AE_4(1,2)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&9&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&3&1\\9&1&8&1\\0&1&2&2\end{pmatrix}$$

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&9&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}_{3\times4}$

结论： $A\xrightarrow{r_2\times k}E_3(2(k))A$

$A\xrightarrow{c_2\times k}AE_4(2(k))$

$$E_3(2(k))A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&9&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\k&9k&8k&k\\1&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$AE_4(2(k))=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&9&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&k&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2k&3&1\\1&9k&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}$$

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&9&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}_{3\times 4}$

结论： $A\xrightarrow{r_1+kr_2}E_3(1,2(k))A$

$A\xrightarrow{c_2+kc_1}AE_4(2,1(k))$

$$E_3(1,2(k))A=\begin{pmatrix}1&k&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&9&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+k&2+9k&3+8k&1+k\\1&9&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$AE_4(2,1(k))=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&9&8&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&k&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2+k&3&1\\1&9+k&8&1\\1&0+k&2&2\end{pmatrix}$$

初等矩阵的作用：

结论： $A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} E_3(1,2)A$　　　$A \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} AE_4(1,2)$

$A \xrightarrow{r_2 \times k} E_3(2(k))A$　　　$A \xrightarrow{c_2 \times k} AE_4(2(k))$

$A \xrightarrow{r_1 + kr_2} E_3(1,2(k))A$　　　$A \xrightarrow{c_2 + kc_1} AE_4(2,1(k))$

定理1.4 设A是 $m\times n$ 矩阵,

对A施行一次行变换 ⟷ A左乘以相应的m阶初等矩阵;

对A施行一次列变换 ⟷ A右乘以相应的n阶初等矩阵.

初等矩阵的作用：

初等变换可转化为矩阵与初等阵的乘积

复习

初等矩阵的逆矩阵：

初等行变换的逆变换

1) 对调两行 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换 $r_i \leftrightarrow r_j$

$$
A_{m\times n}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\underset{r_i \leftrightarrow r_j}{\overset{r_i \leftrightarrow r_j}{\rightleftarrows}}
B_{m\times n}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

复习

初等行变换的逆变换

2) 用非零数乘以某一行 $r_i \times k$ 的逆变换 $r_i \times (\frac{1}{k})$

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \underset{r_i \div k \quad r_i \times (\frac{1}{k})}{\overset{r_i \times k}{\rightleftarrows}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = B_{m\times n}$$

复习

初等行变换的逆变换

3) 把第j行的k倍加到第i行上 $r_i + kr_j$ 逆变换 $r_i + (-k)r_j$

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \underset{r_i - kr_j}{\overset{r_i + kr_j}{\rightleftarrows}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = B_{m\times n}$$

复习

初等行变换的逆变换

1) 对调两行 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换 $r_i \leftrightarrow r_j$;

2) 用非零数乘以某一行 $r_i \times k$ 的逆变换 $r_i \times (\frac{1}{k})$

3) 把第j行的k倍加到第i行上 $r_i + kr_j$ 的逆变换 $r_i + (-k)r_j$

结论：初等变换的逆变换仍为初等变换，且类型相同.

初等矩阵的逆矩阵：

初等变换(行)	逆变换	初等矩阵	逆矩阵
$r_i \leftrightarrow r_j$	$r_i \leftrightarrow r_j$	$E(i,j)^{-1} =$	$E(i,j)$
$r_i \times k$	$r_i \times \frac{1}{k}$	$E(i(k))^{-1} =$	$E(i(\frac{1}{k}))$
$r_i + kr_j$	$r_i - kr_j$	$E(i,j(k))^{-1} =$	$E(i,j(-k))$

验证：
$$E_3(1,2)^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3(1,2)$$

初等矩阵的逆矩阵：

初等变换（行）	逆变换	初等矩阵	逆矩阵
$r_i \leftrightarrow r_j$	$r_i \leftrightarrow r_j$	$E(i,j)^{-1} =$	$E(i,j)$
$r_i \times k$	$r_i \times \frac{1}{k}$	$E(i(k))^{-1} =$	$E(i(\frac{1}{k}))$
$r_i + kr_j$	$r_i - kr_j$	$E(i,j(k))^{-1} =$	$E(i,j(-k))$

验证：
$$E_3(2(k))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/k & \\ & & 1 \end{pmatrix} = E_3(2(\frac{1}{k}))$$

初等矩阵的逆矩阵：

初等变换(行)	逆变换	初等矩阵	逆矩阵
$r_i \leftrightarrow r_j$	$r_i \leftrightarrow r_j$	$E(i,j)^{-1} =$	$E(i,j)$
$r_i \times k$	$r_i \times \dfrac{1}{k}$	$E(i(k))^{-1} =$	$E(i(\frac{1}{k}))$
$r_i + kr_j$	$r_i - kr_j$	$E(i,j(k))^{-1} =$	$E(i,j(-k))$

验证： $$E_3(1,2(k))^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3(1,2(-k))$$

初等矩阵的逆矩阵：

初等变换(行)	逆变换	初等矩阵	逆矩阵
$r_i \leftrightarrow r_j$	$r_i \leftrightarrow r_j$	$E(i,j)^{-1} =$	$E(i,j)$
$r_i \times k$	$r_i \times \frac{1}{k}$	$E(i(k))^{-1} =$	$E(i(\frac{1}{k}))$
$r_i + kr_j$	$r_i - kr_j$	$E(i,j(k))^{-1} =$	$E(i,j(-k))$

定理1.5 初等矩阵是可逆矩阵，

并且逆矩阵是同一类型的初等矩阵.

例1

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$$

$$p_1=\underset{E(1,2)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, p_2=\underset{E(3,1(1))}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

选择

(A) $Ap_1p_2=B$ ×

(C) $p_1p_2A=B$ √

(B) $Ap_2p_1=B$ ×

(D) $p_2p_1A=B.$ ×

例2 计算

$$
\overset{E(3,2(1))}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{11}}
\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}
\overset{E(2,3(1))}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{11}}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{11}
= \begin{pmatrix} -1 & -12 & -1 \\ 1 & 12 & 1 \\ 9 & 108 & 9 \end{pmatrix}
$$

例3 已知 $AX=B$, 其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21}-a_{22} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31}-a_{32} & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix}$$ 求X.

解: 因为A作两次列变换可得到矩阵B,即

$$A\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E(1,2(-1))}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E(2,3)}=\begin{pmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}-a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=B$$

所以 $$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

第一章 矩阵

1.5 矩阵的秩与初等变换

- 初等矩阵
  - 三种初等矩阵
  - 用初等行变换求逆矩阵
  - 用初等行变换求解矩阵方程
- 矩阵的秩

例4 某行(列)为零行(列)的方阵不可逆。

证明:

设3阶方阵A有一个零行，即 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

则对任意的3阶方阵 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$,

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以A不可逆。

定理1.6 方阵A可逆 $\Longrightarrow$ A的行简化阶梯阵是E. (证明略)

即 $A \xrightarrow{\text{行变换}} E$

说明：

$$A=\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \qquad r(A)=4$$

可逆　　　阶梯阵　　　行简化阶梯阵

结论： n阶方阵A可逆 $\Rightarrow r(A)=n$

定理1.7 方阵A

$$A=\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

结论： n阶方阵A可逆 $\Rightarrow r(A)=n$

证明: $\Rightarrow$

因 A 可逆，由**定理1.6** $\therefore A \xrightarrow{\text{行变换}} E$

即存在有限个初等阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$，使

$$P_l \cdots P_2 P_1 A = E$$

$$A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_l^{-1}$$

因初等阵的逆还是初等阵,

故A可以写成初等阵的乘积。

$$P_3 P_2 P_1 A = E$$

$$P_3^{-1} P_3 P_2 P_1 A = P_3^{-1} E$$

$$P_2 P_1 A = P_3^{-1} E$$

$$P_2^{-1} P_2 P_1 A = P_2^{-1} P_3^{-1} E$$

$$P_1 A = P_2^{-1} P_3^{-1} E$$

$$P_1^{-1} P_1 A = P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} E$$

$$A = P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1}$$

定理1.7 方阵A可逆 $\Leftrightarrow$ A可以写成有限个初等阵的乘积.

$$A = P_1 P_2 \cdots P_l$$

结论： n阶方阵A可逆 $\underset{\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $r(A) = n$ **Ch2 行列式**

定理1.8 n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow$ $r(A) = n$ 称A是满秩矩阵.

推论： n阶方阵A不可逆 $\Leftrightarrow$ $r(A) < n$ 称A是降秩矩阵.

定理小结

定理1.6 方阵A可逆 $\Rightarrow$ $A \xrightarrow{\text{行变换}} E$

定理1.7 方阵A可逆 $\Leftrightarrow$ $A = P_1 P_2 \cdots P_l$

定理1.8 n阶方阵A可逆 $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$

第一章 矩阵

1.5 矩阵的秩与初等变换

- 初等矩阵
  - 三种初等矩阵
  - 用初等行变换求逆矩阵
  - 用初等行变换求解矩阵方程
- 矩阵的秩

用初等行变换求逆阵的方法：

设A是n阶可逆矩阵，下面给出求逆阵的通用方法：

$$A^{-1}(A \vdots E) = (A^{-1}A \vdots A^{-1}E) = (E \vdots A^{-1})$$

$$P_1P_2\cdots P_l\,(A \vdots E) = (P_1P_2\cdots P_lA \vdots P_1P_2\cdots P_lE) = (E \vdots A^{-1})$$

$$(A \vdots E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \vdots A^{-1})$$

当A可逆时，有 $A^{-1} = P_1P_2\cdots P_l$

例5

用初等行变换求矩阵的逆矩阵：$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

解： $(A,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)=(E\ \vdots\ A^{-1})$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

例5

用初等行变换求矩阵的逆矩阵：$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

解：

$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)$$

$$=(E\ \vdots\ A^{-1})$$

$$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=P_2P_1$$

$$P_2P_1(A\ \vdots\ E)=(P_2P_1A\ \vdots\ P_2P_1E)=(E\ \vdots\ A^{-1})$$

练习1

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

用初等行变换求逆矩阵： $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

解：

$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1+r_3]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&1&2\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)=(E\ \vdots\ A^{-1})\quad\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

验证： $AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$

练习1

用初等行变换求逆矩阵： $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

解：

$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1+r_3]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&2\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)=(E\mid A^{-1})\quad \therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ P_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ P_3=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=P_3P_2P_1$$

作 业　习题一

授课内容	习题一
1.1 矩阵及运算	9,10 矩阵运算，11(3)(4)(5) ,13(6)(7)乘法，14(1) 矩阵运算
1.2 分块矩阵	42 分块矩阵乘法
1.3 可逆矩阵	34,35,36,40,41(1)(2)求逆，45(1)分块矩阵逆阵，50
1.4 高斯消元法	1(1)(4)消元法， 3,5消元法(含参)
1.5 矩阵秩 初等变换	30(1)(4) ,31求逆√ 45(2)分块矩阵逆阵 √ 39解矩阵方程，24(2),25秩

初等矩阵

（11，4分）

设A是3阶方阵，将A的第2列加到第1列得B，再交换B的第2行与第3行得单位矩阵，

记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$ <u>(D)</u>

(A) P_1P_2 (B) $P_1^{-1}P_2$ (C) P_2P_1 (D) $P_2P_1^{-1}$

解：

$$A\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B\rightarrow AP_1=B,$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}B=E\rightarrow P_2B=E,\rightarrow P_2AP_1=E\rightarrow A=P_2^{-1}EP_1^{-1}$$

$$=P_2P_1^{-1}$$

（01，3分）

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}$,

$P_1=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E(1,4)}$, $P_2=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E(2,3)}$ 其中A可逆，则

$B^{-1}=$ $\underline{P_2\,P_1\,A^{-1}}$

解： 因为 $A\xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_3]{c_1\leftrightarrow c_4}B$ $\therefore AP_1P_2=B$ $\quad (P_1\,|\,E)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}(E\,|\,P_1)$

$$\therefore B^{-1}=(AP_1P_2)^{-1}=P_2^{-1}P_1^{-1}A^{-1}=P_2\,P_1\,A^{-1}$$

练习2

用初等行变换求逆矩阵：$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&2\\1&1&1&-1\\1&0&-2&-6\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

解：

$$(A,E)=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\2&3&1&2&0&1&0&0\\1&1&1&-1&0&0&1&0\\1&0&-2&-6&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&-1&-5&-6&-2&1&0&0\\0&-1&-2&-5&-1&0&1&0\\0&-2&-5&-10&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

练习2

$$(A,E)\xrightarrow{r_2\div(-1)}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -5 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -5 & -10 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -5 & -10 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 2 & 3 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)$$

练习2

$$(A,E)\xrightarrow{r_3\div 3}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&5&6&2&-1&0&0\\0&0&3&1&1&-1&1&0\\0&0&5&2&3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4-5r_3}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&5&6&2&-1&0&0\\0&0&1&1/3&1/3&-1/3&1/3&0\\0&0&5&2&3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&5&6&2&-1&0&0\\0&0&1&1/3&1/3&-1/3&1/3&0\\0&0&0&1/3&4/3&-1/3&-5/3&1\end{array}\right)$$

练习2

$$
(A,E)\xrightarrow{r_4\times 3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1/3 & 4/3 & -1/3 & -5/3 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_3-1/3r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3
\end{array}\right)
$$

$$
\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3
\end{array}\right)
$$

练习2

$$(A,E)\xrightarrow[r_1-4r_4]{r_2-6r_4}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&5&6&2&-1&0&0\\0&0&1&0&-1&0&2&-1\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2-5r_3}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&2&3&0&-15&4&20&-12\\0&1&5&0&-22&5&30&-18\\0&0&1&0&-1&0&2&-1\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&2&0&0&-12&4&14&-9\\0&1&0&0&-17&5&20&-13\\0&0&1&0&-1&0&2&-1\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{array}\right)$$

练习2

$$(A,E)\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -12 & 4 & 14 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 22 & -6 & -26 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

A^{-1}