第二章
行列式

第二章 行列式

2. 1 行列式的定义

2. 2 行列式的性质

2. 3 行列式的展开定理

2. 4 克莱姆法则

教学计划：3次课-9学时

第二章 行列式

2.1 行列式的定义

- 二、三阶行列式
- 排列与逆序
- n 阶行列式

1. 二、三阶行列式

(1) 二阶行列式

设 $A=(a_{ij})_{2\times 2}$

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$ 展开式

称为二阶行列式,也称为方阵A的行列式.

a_{ij} 称为行列式的元素

i称为行下标，j称为列下标

展开式的规律：

1) 二阶行列式的展开式中共有2!=2项.

2) 每项都是2个元素的乘积,且它们取自行列式的不同行、不同列.

3) 正、负项个数相同,都是1项.

(2) 三阶行列式

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

称为三阶行列式, 也称为方阵A的行列式.

(2) 三阶行列式

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

展开式

称为三阶行列式, 也称为方阵A的行列式.

展开式的规律:

1) 三阶行列式的展开式中共有3!=6项.

2) 每项都是3个元素的乘积,且它们取自行列式的不同行、不同列.

3) 正、负项个数相同,都是3项.

练习1

求下面二阶行列式的值：$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 5\cdot(-1) = 2+5 = 7$

练习2

计算上三角行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3 + 4\cdot(-4)\cdot 0 + 0\cdot 0\cdot 5 - 0\cdot 2\cdot 5 - 0\cdot(-4)\cdot 1 - 0\cdot 4\cdot 3$

$= 1\cdot 2\cdot 3 = 6$

(2) 三阶行列式

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$

行下标按自然顺序排列

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

展开式

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

展开式的规律：

1) 三阶行列式的展开式中共有3!=6项.

2) 每项都是3个元素的乘积,且它们取自行列式的不同行、不同列.

3) 正、负项个数相同,都是3项.

(2) 三阶行列式

行下标按自然顺序排列

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underset{(123)}{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underset{(231)}{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underset{(312)}{a_{13}a_{21}a_{32}}$$

$$- \underset{(321)}{a_{13}a_{22}a_{31}} - \underset{(132)}{a_{11}a_{23}a_{32}} - \underset{(213)}{a_{12}a_{21}a_{33}}$$

$$= \sum_{(j_1 j_2 j_3)} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

注释:

1) 每一项当行下标按自然顺序排列时, 列下标构成1,2,3的一个排列$j_1 j_2 j_3$.

2) 每个排列对应展开式中的一项, 1,2,3的全排列共3!=6个, 因此展开式中共有6项.

3) t 由列下标构成的排列$j_1 j_2 j_3$ 决定.

第二章 行列式

2.1 行列式的定义

- 二、三阶行列式
- 排列与逆序
- n 阶行列式

2. 排列与逆序数

定义2.1 由自然数 $1,2,\ldots,n$ 所构成的一个有序数组，称为这n个数的一个n级排列.

例 52341是1,2,3,4,5的一个(5级)排列

定义2.2 在排列 $j_1 j_2 \ldots j_n$ 中，

数 j_1 前面比 j_1 大的数字的个数，称为 j_1 的逆序;

数 j_2 前面比 j_2 大的数字的个数，称为 j_2 的逆序;

… … …

数 j_n 前面比 j_n 大的数字的个数，称为 j_n 的逆序;

所有这n个数的逆序之和称为该排列的逆序数.

记为 $\tau(j_1,\cdots,j_n)$.

例1 求排列32514的逆序数.

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}$$

$$t = 0+1+0+3+1 = 5.$$

解 在排列32514中,

3排在首位, 逆序数为0;

2的前面比2大的数只有一个, 故逆序数为1;

5的前面没有比5大的数, 其逆序数为0;

1的前面比1大的数有3个, 故逆序数为3;

4的前面比4大的数有1个, 故逆序数为1;

所以排列32514的逆序数为5, 记为 $\tau(32514) = 5.$

第二章 行列式

2.1 行列式的定义

- 二、三阶行列式
- 排列与逆序
- n 阶行列式

(2) 三阶行列式

行下标按自然顺序排列

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underset{(123)\ 0}{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underset{(231)\ 2}{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underset{(312)\ 2}{a_{13}a_{21}a_{32}}$$

$$- \underset{(321)\ 3}{a_{13}a_{22}a_{31}} - \underset{(132)\ 1}{a_{11}a_{23}a_{32}} - \underset{(213)\ 1}{a_{12}a_{21}a_{33}}$$

$$= \sum_{(j_1 j_2 j_3)} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} = \boxed{\sum_{(j_1 j_2 j_3)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}}$$

注释:

1) 每一项当行下标按自然顺序排列时, 列下标构成1,2,3的一个排列 $j_1 j_2 j_3$.

2) 每个排列对应展开式中的一项, 1,2,3的全排列共3!=6个, 因此展开式中共有6项.

3) t 由列下标构成的排列 $j_1 j_2 j_3$ 决定. $t = \tau(j_1 j_2 j_3)$

3. n阶行列式 Determinant

$$|A| = \sum_{(j_1 j_2 j_3)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

定义2.3 设n阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,

行下标按自然顺序排列 展开式

$$|A| = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

称为n阶行列式,也称为方阵A的行列式.

展开式的规律:

1) 每项都是n个元素的乘积,且它们取自行列式的不同行,不同列.

2) 列下标构成$1,2,\ldots,n$的一个排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$.

3) n阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项.

n阶行列式与n阶方阵的区别：

定义2.3 设n阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(2) 三阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

(123) 0　(231) 2　(312) 2

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

(321) 3　(132) 1　(213) 1

行下标按自然顺序排列

$$=\sum_{(j_1j_2j_3)}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

列下标按自然顺序排列

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}$$

(123) 0　(312) 2　(231) 2

$$-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}$$

(321) 3　(132) 1　(213) 1

$$=\sum_{(i_1i_2i_3)}(-1)^{\tau(i_1i_2i_3)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}a_{i_3 3}$$

n阶行列式的第二种定义：

$$|A| = \sum_{(i_1 i_2 i_3)} (-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3}$$

定理2.1 n 阶行列式可定义为

$$|A| = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

列下标按自然顺序排列

展开式的规律：

1) 每项都是n个元素的乘积,且它们取自行列式的不同行,不同列.

2) 行下标构成1,2,…,n的一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$.

3) n阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项.

例2　计算上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

解：用行列式的定义计算

$$|A| = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$ (展开式中有$n!$项)

$$= (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$ (非零项只有1项)

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

类似可得下三角行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

第二章 行列式

2.1 行列式的定义

- 二、三阶行列式
- 排列与逆序
- n 阶行列式

第二章 行列式

2.1 行列式的定义

2.2 行列式的性质

2.3 行列式的展开定理

2.4 克莱姆法则

第二章 行列式

2.2 行列式的性质

- 行列式的性质
- 行列式的计算

1. 行列式的性质

转置行列式的定义：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad |A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 $|A^T|$ 称为行列式 $|A|$ 的转置行列式。

性质1 设 $A=(a_{ij})$ 为n阶方阵，则 $|A| = |A^T|$. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注释 行列式中行与列具有同等的地位，因此行列式的性质对行成立的对列也同样成立.

验算 $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = |A|$$

性质2 设 $A=(a_{ij})$，若 $A \xrightarrow[c_i \leftrightarrow c_k]{r_i \leftrightarrow r_k} B$，则 $|B| = -|A|$

即 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{r_i \leftrightarrow r_k}{=} - \overbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}^{B} \begin{matrix} \\ i\text{行} \\ k\text{行} \\ \\ \end{matrix}$

验算 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -|A|$$

推论 设 $A=(a_{ij})$，若中有两行(列)相同，则 $|A|=0$.

证明

$$|A| = \begin{array}{r} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i \leftrightarrow r_j} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -|A|$$

$$|A| = -|A| \rightarrow 2|A| = 0 \rightarrow |A| = 0$$

性质3 设$A=(a_{ij})$，若 $A \xrightarrow[c_i \times k]{r_i \times k} B$，则 $|B| = k\,|A|$. k为常数.

$$\text{即}\quad \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k a_{i1} & k a_{i2} & \cdots & k a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{|B|} = k \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{|A|}$$

验算 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$|B| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - ka_{12}a_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k|A|$$

注意 $|kA|$ 与 $k|A|$ 不同！

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{2n} & \cdots & ka_{nn} \end{pmatrix} \qquad k|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|kA| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{2n} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= k^n |A|$$

$$\neq k|A|$$

性质3 设 $A=(a_{ij})$，若 $A \xrightarrow[k\times c_i]{k\times r_i} B$，则 $|B| = k\,|A|$.

推论1 若方阵A中有一个零行(列)，则 $|A| = 0$.

证明

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

性质3 设 $A=(a_{ij})$，若 $A \xrightarrow[k\times c_i]{k\times r_i} B$，则 $|B| = k\,|A|$.

推论2 若方阵A中有两行(列)成比例，则 $|A| = 0$.

证明

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

性质4 若方阵A的某一行(列)的元素都是两数之和

拆行(列)

$$
\text{则 } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1+b_1 & c_2+b_2 & \cdots & c_n+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{第}i\text{行}
$$

$$
= \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{|C|} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{|B|} \text{第}i\text{行}
$$

性质4 若方阵A的某一行(列)的元素都是两数之和 拆行(列)

$$
\text{则 } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 + b_1 & c_2 + b_2 & \cdots & c_n + b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{|C|} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{|B|}
$$

验算

$$
|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c_1 + b_1 & c_2 + b_2 \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}(c_2 + b_2) - a_{12}(c_1 + b_1)
$$

$$
= (a_{11}c_2 - a_{12}c_1) + (a_{11}b_2 - a_{12}b_1) = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}_{|C|} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}_{|B|}
$$

问题

下面的等式是正确的吗？

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$$ ✗

解：

拆列

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a+x \\ c+z \end{matrix}} & \begin{matrix} b+y \\ d+w \end{matrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{matrix} a \\ c \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b+y \\ d+w \end{matrix}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \begin{matrix} x \\ z \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b+y \\ d+w \end{matrix}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & y \\ c & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ z & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$$

性质5 若 $A=(a_{ij})$, $A \xrightarrow[c_i+kc_j]{r_i+kr_j} B$, 则 $|B|=|A|$.

例如：

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underline{\underline{r_2+kr_1}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & \cdots & a_{2n}+ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |B|$$

性质5 若 $A=(a_{ij})$，$A \xrightarrow[c_i+kc_j]{r_i+kr_j} B$，则 $|B|=|A|$.

证明：

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & \cdots & a_{2n}+ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

拆行

$$\overset{拆\ r_2}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{0}$$

$$= |A|$$

小结

行列式的5个性质：

若 $A \xrightarrow{\text{行变换}} B$，则$A, B$的行列式的变化：

性质2　若 $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$，　$|B| = -|A|$

性质3　若 $A \xrightarrow{r_i \times k} B$，　$|B| = k|A|$

性质5　若 $A \xrightarrow{r_i + kr_j} B$，　$|B| = |A|$

性质1　$|A| = |A^T|$

性质4　拆行(列)

结论1： 行变换不会改变方阵行列式是否为零的性质

结论2： 可逆矩阵行列式不为0，不可逆矩阵行列式=0

定理1.6 方阵A可逆 $\Rightarrow$ $A \xrightarrow{\text{行变换}} E$　$|E| = 1 \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0$

定理2.2 设 A, B 均为 n 阶方阵, 则 $|AB| = |A||B|$.（证明略）

验算 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$

$$|AB| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= b_{11}b_{21} \overset{0}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix}} + b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{12}b_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{21}b_{22} \overset{0}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$= b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - b_{12}b_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |A||B|$$

定理2.2 设 A, B 均为 n 阶方阵, 则 $|AB| = |A||B|$. (证明略)

推论 若A_i (i =1,2, …s)为n阶方阵, 则有

$$|A_1A_2\cdots A_s| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|$$

第二章 行列式

2.2 行列式的性质

- 行列式的性质
- 行列式的计算

2. 行列式的计算

例1

解：$$D=\begin{vmatrix}1&-1&2&-3&1\\-3&3&-7&9&-5\\2&0&4&-2&1\\3&-5&7&-14&6\\4&-4&10&-10&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-3r_1,\ r_5-4r_1]{r_2+3r_1,\ r_3-2r_1}\begin{vmatrix}1&-1&2&-3&1\\0&0&-1&0&-2\\0&2&0&4&-1\\0&-2&1&-5&3\\0&0&2&2&-2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix}1&-1&2&-3&1\\0&-2&1&-5&3\\0&2&0&4&-1\\0&0&-1&0&-2\\0&0&2&2&-2\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_2}-\begin{vmatrix}1&-1&2&-3&1\\0&-2&1&-5&3\\0&0&1&-1&2\\0&0&-1&0&-2\\0&0&2&2&-2\end{vmatrix}$$

$$D=-\begin{vmatrix}1&-1&2&-3&1\\0&-2&1&-5&3\\0&0&1&-1&2\\0&0&-1&0&-2\\0&0&2&2&-2\end{vmatrix}\overline{\overline{\substack{r_4+r_3\\r_5-2r_3}}}-\begin{vmatrix}1&-1&2&-3&1\\0&-2&1&-5&3\\0&0&1&-1&2\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&4&-6\end{vmatrix}$$

$$\overline{\overline{r_5+4r_4}}-\begin{vmatrix}1&-1&2&-3&1\\0&-2&1&-5&3\\0&0&1&-1&2\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-6\end{vmatrix}=-(-2)(-1)(-6)=12.$$

上三角行列式

注释：

1) 本题利用行列式的性质, 采用“化零”的方法, 逐步将所给行列式化为上三角行列式.

2) 若所给行列式的元素具有某些特点, 则应充分利用这些特点, 应用行列式性质, 化为上(下)三角行列式.

例2　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解

$$D \overset{c_1+c_2+\ldots+c_n}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

上三角行列式

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

例3　证明 $\begin{vmatrix} a+d & d+g & g \\ b+e & e+h & h \\ c+f & f+l & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & l \end{vmatrix}$

方法1：

$$\begin{vmatrix} a+d & d+g & g \\ b+e & e+h & h \\ c+f & f+l & l \end{vmatrix} \overset{c_2-c_3}{=} \begin{vmatrix} a+d & d & g \\ b+e & e & h \\ c+f & f & l \end{vmatrix} \overset{c_1-c_2}{=} \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & l \end{vmatrix}$$

方法2：拆列

$$\begin{vmatrix} a+d & d+g & g \\ b+e & e+h & h \\ c+f & f+l & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d+g & g \\ b & e+h & h \\ c & f+l & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & d+g & g \\ e & e+h & h \\ f & f+l & l \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & l \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & g & g \\ b & h & h \\ c & l & l \end{vmatrix}}_{0} + \underbrace{\begin{vmatrix} d & d & g \\ e & e & h \\ f & f & l \end{vmatrix}}_{0} + \underbrace{\begin{vmatrix} d & g & g \\ e & h & h \\ f & l & l \end{vmatrix}}_{0}$$

$$= \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & l \end{vmatrix}$$

例4　证明：奇数阶反对称行列式等于零.

证明：　设A_n是奇数阶反对称阵 (其中n为奇数)

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}=-A$$

$$|A|=|A^T|=|-A|=(-1)^n|A|=-|A| \rightarrow 2|A|=0 \rightarrow |A|=0$$

$$|A_1A_2| = |A_1||A_2|$$

例5 设$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 1 & 4 & -3\\ -3 & -4 & 1 & 2\\ -4 & 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$，且$|A|>0$, 计算$|A|$.

解：

$$AA^T = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 1 & 4 & -3\\ -3 & -4 & 1 & 2\\ -4 & 3 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & -4\\ 2 & 1 & -4 & 3\\ 3 & 4 & 1 & -2\\ 4 & -3 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}30 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 30 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 30 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 30\end{pmatrix}$$

$$= 30E$$

所以 $|A|\cdot|A^T| = |AA^T| = |30E| = 30^4|E| = 30^4$

即 $|A|^2 = 30^4 \to |A| = 30^2$

重要结论：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

例6

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 4 & 14 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}_{|A_1|} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 8 & 4 & 14 \end{vmatrix}}_{|A_2|} = -2\times 6 = -12$$

$$D=\begin{vmatrix}1&2&0&0&0\\3&4&0&0&0\\-1&2&2&1&5\\3&4&1&0&2\\5&6&8&4&14\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2&0&0&0\\3/2&2&0&0&0\\-1&2&2&1&5\\3&4&1&0&2\\5&6&8&4&14\end{vmatrix}\overset{r_1-r_2}{=}2\begin{vmatrix}-1/2&0&0&0&0\\3/2&2&0&0&0\\-1&2&2&1&5\\3&4&1&0&2\\5&6&8&4&14\end{vmatrix}$$

A_1 A_2

$$\overset{c_3\leftrightarrow c_4}{=}-\begin{vmatrix}-1&0&0&0&0\\3/2&2&0&0&0\\-1&2&1&2&5\\3&4&0&1&2\\5&6&4&8&14\end{vmatrix}\overset{\substack{c_4-2c_3\\c_5-5c_3}}{=}-\begin{vmatrix}-1&0&0&0&0\\3/2&2&0&0&0\\-1&2&1&0&0\\3&4&0&1&2\\5&6&4&0&-6\end{vmatrix}\overset{c_5-2c_4}{=}\begin{vmatrix}-1&0&0&0&0\\3/2&2&0&0&0\\-1&2&1&0&0\\3&4&0&1&0\\5&6&4&0&6\end{vmatrix}$$

下三角行列式

$$=-2\times 6=|A_1||A_2|$$

小结

行列式的5个性质：

若 $A \xrightarrow{\text{行变换}} B$，则$A, B$的行列式的变化：

性质2　若 $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$，　$|B| = -|A|$

性质3　若 $A \xrightarrow{r_i \times k} B$，　$|B| = k|A|$

性质5　若 $A \xrightarrow{r_i + kr_j} B$，　$|B| = |A|$

性质1　$|A| = |A^T|$

性质4　拆行(列)

性质6　$|AB| = |A||B|$

性质7　$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$

结论1：行变换不会改变方阵行列式是否为零的性质.

结论2：可逆矩阵行列式$\neq 0$

不可逆矩阵行列式$= 0$

第二章 行列式

2.2 行列式的性质

- 行列式的性质
- 行列式的计算

作 业　习题四

授课内容	作业
2.1 行列式定义	4,5(1)(2)(4) 定义
2.2 行列式性质	6(3)(4)(5)(7)(8)(9)，7(1)(2)性质
2.3 行列式展开定理	8(1)(3),9(1)(2)降阶，10(1)(2)性质， 18(1)-(5) 伴随阵， 21(1)(2)行列式求逆
2.4 克莱姆法则	12(1), 13

练习1

计算 $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{r_2 - r_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_3 - r_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

练习2

计算 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{r_2 - 4r_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

$$\overset{r_3 - 10r_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{r_2 \leftrightarrow r_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3 + 15r_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix} \overset{r_4 + 7r_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{vmatrix}$$

练习2

计算
$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3 \leftrightarrow r_4}{=} -9\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \end{vmatrix} \overset{r_4 - 17r_3}{=} -9\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

练习3

计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \overset{r_3 - r_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2 - r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

练习4

计算 $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2+c_3}{=} \begin{vmatrix} 2(a+b) & b & a+b \\ 2(a+b) & a+b & a \\ 2(a+b) & a & b \end{vmatrix}$

法1

$$= 2(a+b)\begin{vmatrix} 1 & b & a+b \\ 1 & a+b & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} \overset{r_3-r_2}{=} 2(a+b)\begin{vmatrix} 1 & b & a+b \\ 1 & a+b & a \\ 0 & -b & b-a \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2-r_1}{=} 2(a+b)\begin{vmatrix} 1 & b & a+b \\ 0 & a & -b \\ 0 & -b & b-a \end{vmatrix} \overset{r_2\div a}{=} 2(a+b)a\begin{vmatrix} 1 & b & a+b \\ 0 & 1 & -b/a \\ 0 & -b & b-a \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3+br_2}{=} 2(a+b)a\begin{vmatrix} 1 & b & a+b \\ 0 & 1 & -b/a \\ 0 & 0 & b-a-b^2/a \end{vmatrix} = 2(a+b)a(b-a-b^2/a)$$

$$= 2(a+b)(ab-a^2-b^2)$$

$$= -2(a^3+b^3)$$

练习4

计算 $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+0 & 0+b & a+b \\ 0+b & a+b & a+0 \\ a+b & a+0 & 0+b \end{vmatrix}$

法2

$$= \begin{vmatrix} a & 0+b & a+b \\ 0 & a+b & a+0 \\ a & a+0 & 0+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0+b & a+b \\ b & a+b & a+0 \\ b & a+0 & 0+b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & 0 & a+b \\ 0 & a & a+0 \\ a & a & 0+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & a+b \\ 0 & b & a+0 \\ a & 0 & 0+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a+b \\ b & a & a+0 \\ b & a & 0+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & a+b \\ b & b & a+0 \\ b & 0 & 0+b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ a & a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & a \\ 0 & b & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & a \\ b & b & a \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & b \\ b & b & 0 \\ b & 0 & b \end{vmatrix}$$

练习4

计算 $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ a & a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & b \\ b & b & 0 \\ b & 0 & b \end{vmatrix}$$

$$= a^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a^2 b \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + ab^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (a^2 b - ab^2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} + (a^2 b - ab^2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2(a^3 + b^3)$$

0