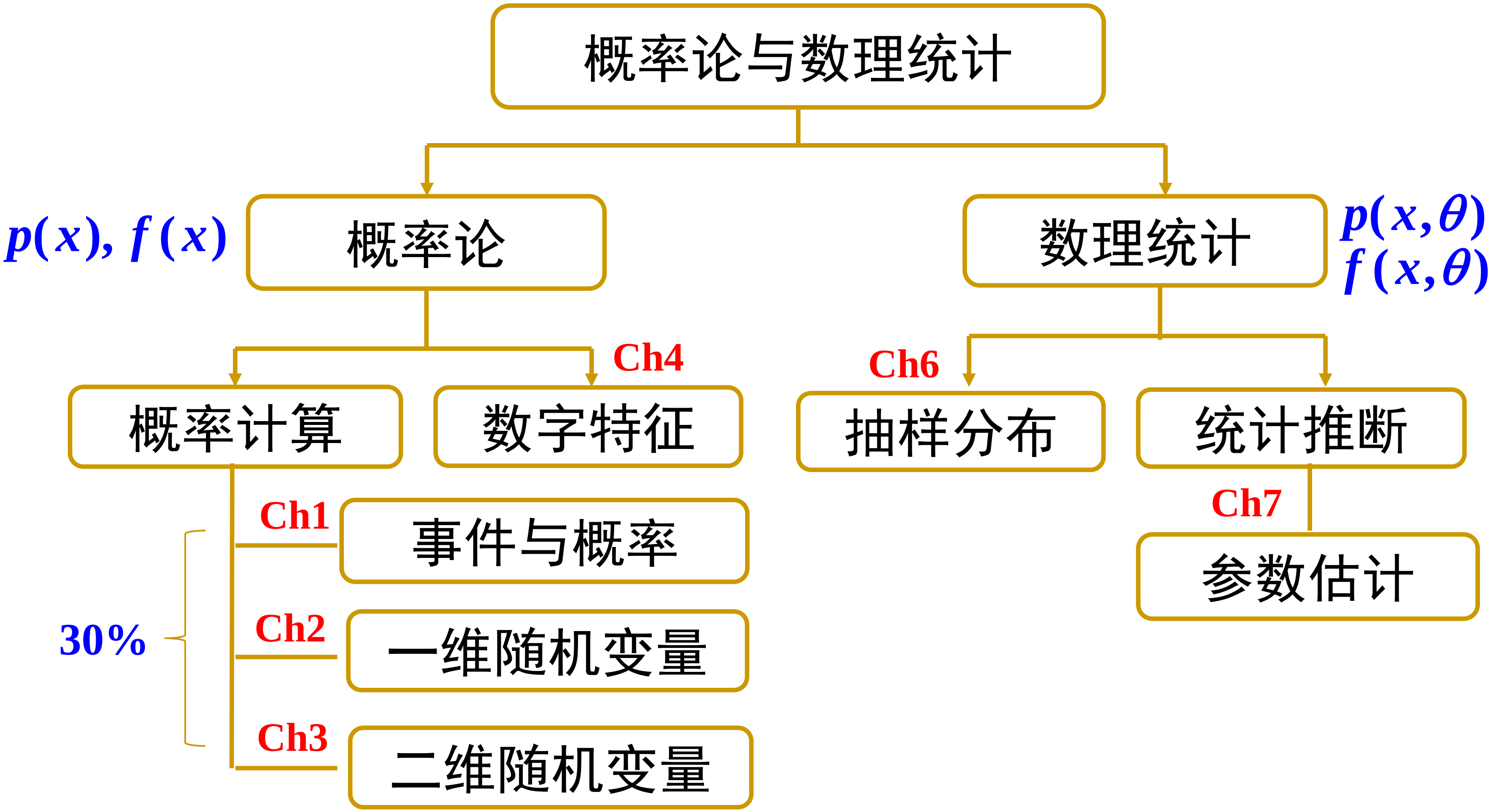
概率统计各章总结

知识结构图



概率论与数理统计
概率论
数理统计
$p(x), f(x)$
$p(x,\theta)$
$f(x,\theta)$
Ch4
Ch6
概率计算
数字特征
抽样分布
统计推断
Ch7
参数估计
Ch1
事件与概率
30%
Ch2
一维随机变量
Ch3
二维随机变量

概率计算

1) 统计定义： $f_n(A) \xrightarrow{P} P(A)$ Ch5 大数定律

2) 概率的性质： $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ $P(\overline{A \cup B})$

$P(A-B) = P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB),$ $= P(\bar{A}\bar{B})$

3) 等可能概型： $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{\text{事件}A\text{中样本点数}}{\text{样本空间中样本点数}}$

4) 条件概率： $P(B|A) = \dfrac{k}{m} = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$

独立

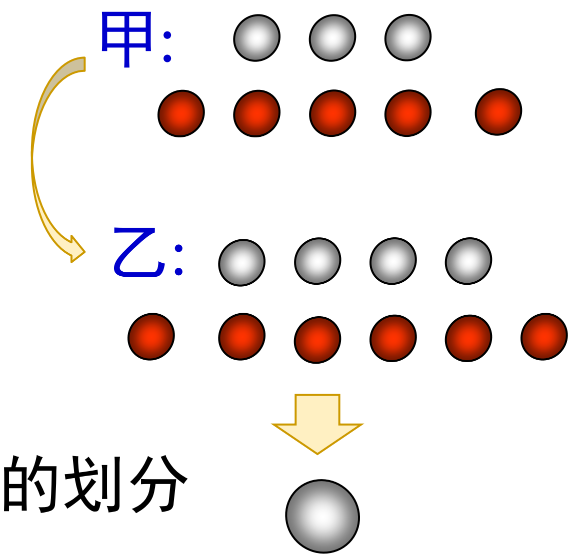
5) 乘法定理： $P(AB) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B)$

★ 6) 全概率公式： $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$

7) 贝叶斯公式： $P(B_1|A) = \dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}$ $A = AB_1 \cup AB_2$ 互斥

例1. 设甲袋中有3个白球,5个红球， 乙袋中有4个白球, 6个红球, 现从甲袋中任取一个球放入 乙袋中, 再从乙袋中任取一球。

求：从乙袋中取得白球的概率。



解： 设A={从乙袋中取得白球}

B_1={从甲袋中取白球放入乙袋中}

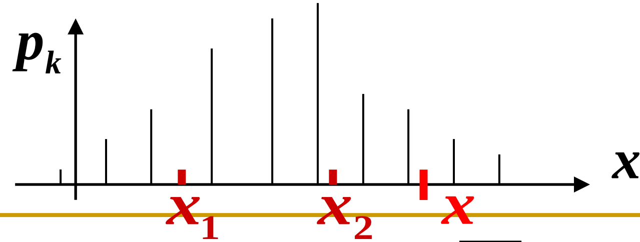
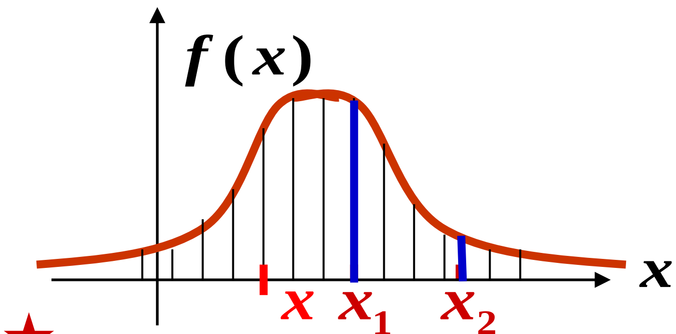
B_2={从甲袋中取红球放入乙袋中}

$A = AB_1 \cup AB_2$　　B_1, B_2 是一个样本空间的划分

$$P(A) = \underline{P(B_1)} \cdot \underline{P(A|B_1)} + \underline{P(B_2)} \cdot \underline{P(A|B_2)}$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{11} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{11} = \frac{35}{88}$$

概率计算

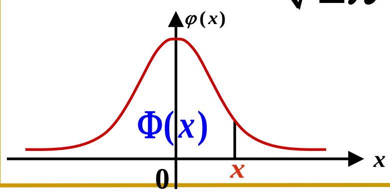
	离散型随机变量	连续型随机变量
分布函数 $F(x)=P(X\le x)$ x左侧区间上的概率和 不直观	$F(x)=\sum\limits_{x_k\le x} p_k$ 右连续	★ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 连续
概率分布 概率1分布情况,直观	分布律: $\sum p_k=1$ $\begin{array}{c\|cccc} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline p_k & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}$  	概率密度: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=1$ 
概率计算	$P(x_1<X\le x_2)=\sum\limits_{x_1<x_k\le x_2} p_k$ $=F(x_2)-F(x_1)$	★ $P(x_1<X\le x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t$ $=F(x_2)-F(x_1)$

随机变量重要分布

	离散型随机变量	连续型随机变量
重要分布	1) (0-1)分布 $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	1) $U(a,b)$ $f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$
	2) $B(n,p)$ $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\cdots,n$	2) $E(\theta)$ $f(x)=\begin{cases}1/\theta\, e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$
	3) $P(\lambda)$ $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2\cdots$	3) $N(\mu,\sigma^2)$ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty<x<+\infty$
函数的分布 $Y=g(X)$	X的分布律 → Y的分布律	★★ $f_X(x)\rightarrow f_Y(y)=F_Y'(y)$ 分布函数法

正态分布

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

	$N(\mu,\sigma^2)$	$N(0,1)$
概率密度	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty<x<\infty$	$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $-\infty<x<\infty$
分布函数	$F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$ $-\infty<x<\infty$	$\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ $-\infty<x<\infty$  查表
概率计算	$F(x)=P(X\le x)=P(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\le\dfrac{x-\mu}{\sigma})=\Phi(\dfrac{x-\mu}{\sigma})$ ★ $P(a\le X\le b)=P(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\le\dfrac{X-\mu}{\sigma}\le\dfrac{b-\mu}{\sigma})=\Phi(\dfrac{b-\mu}{\sigma})-\Phi(\dfrac{a-\mu}{\sigma})$	

例1.

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} Ax^2, & |x|<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

求: (1) 常数A;

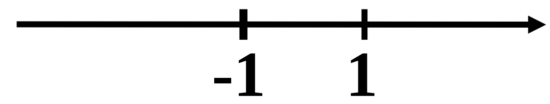
(2) X 的分布函数;

(3) $P(|X|\le \frac{1}{2})$

例1.

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} Ax^2, & |x|<1 \quad -1<x<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

求：(1) 常数A;



解： $\because\ 1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\infty}^{-1} 0\mathrm{d}x+\int_{-1}^{+1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{+1}^{+\infty} 0\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{+1} Ax^2\mathrm{d}x=\frac{A}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{A}{3}(1^3-(-1)^3)$$

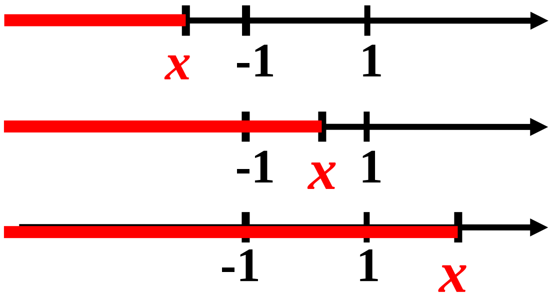
$$=\frac{2A}{3} \quad \rightarrow A=\frac{3}{2}$$

例1.

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{2}(x^3+1), & -1\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

求：(2) X 的分布函数;



解： $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 分区间

当 $x<-1$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t=0$

当 $-1\le x<1$, $F(x)=\int_{-\infty}^{-1} 0\cdot\mathrm{d}t+\int_{-1}^{x}\frac{3t^2}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t^3\Big|_{-1}^{x}$

$$=\frac{1}{2}(x^3-(-1)^3)=\frac{1}{2}(x^3+1)$$

当 $x\ge 1$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{-1} 0\cdot\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}\frac{3t^2}{2}\mathrm{d}t+\int_{1}^{x} 0\cdot\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t^3\Big|_{-1}^{1}=1$

例1.

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{2}, & |x|<1 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

求：(3) $P(|X|\le\frac{1}{2})$

解:

$$P(x_1<X\le x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x$$

$$P(-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2})=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{3x^2}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^3\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}[(\frac{1}{2})^3-(-\frac{1}{2})^3]$$

$$=\frac{1}{8}$$

$$P(-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2})=F(\frac{1}{2})-F(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}((\frac{1}{2})^3+1)-\frac{1}{2}((-\frac{1}{2})^3+1)=\frac{1}{8}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1 \\ \dfrac{1}{2}(x^3+1), & -1\le x<1 \\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

例2. 设连续型随机变量X的概率密度为 $f_X(x)$ $(-\infty,+\infty)$

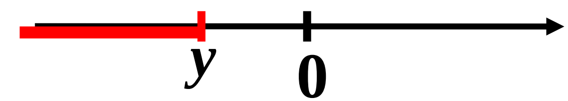
求 $Y=X^2$ 的概率密度 分布函数

$$P\{x_1<X\le x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$$

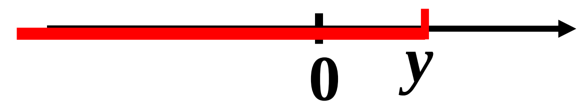
解： (1) 求$F_Y(y)$ $\because x\in(-\infty,+\infty)$ $\therefore y\in(0,+\infty)$

$$F'(x)=f(x)$$

当 $y<0$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\Phi)=0$



当 $y\ge 0$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$



$$=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

(2) $$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})-\frac{-1}{2\sqrt{y}}f_X(-\sqrt{y}) \qquad y>0$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y} \\ 0\end{cases}$$

1）分布函数定义在实数轴上；

2）用Y的取值范围分区间；

3）分区间求分布函数值。

两章关系	第二章 一维 X	第一节 二维(X,Y)	第二节 边缘分布	第四节 独立
分布函数	$F(x)$	$F(x,y)$		$P(AB)=P(A)P(B)$
离散型 分布律	$P\{X=x_k\}$ $=p_k$	$P\{X=x_i,Y=y_j\}$ $=p_{ij}$	$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}$ $P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}$	$P\{X=x_i,Y=y_j\}$ $=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}$ $\forall(x_i,y_j)$
连续型 概率密度	$f(x)$	$f(x,y)$	★$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$	$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ $\forall(x,y)$
算概率	$P(x_1<X\le x_2)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x$ $=\sum_{x_1<x_k\le x_2}p_k$		★$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $=\sum_{(x_i,y_j)\in G}p_{ij}$	
函数分布	$Y=g(X)$ $f_X(x)\rightarrow f_Y(y)=F_Y'(y)$	★★	$Z=g(X,Y)$ 第五节 $f(x,y)\rightarrow f_Z(z)=F_Z'(z)$ 分布函数法	

第三章

第五节 两个随机变量的函数的分布

$Z=g(X,Y)$ $f(x,y)$ ➡ $f_Z(z)=?$

(1) $Z=X+Y$

1) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$

公式法 独立 卷积公式

2) $f_Z(z)=F_Z'(z)$ 分布函数法

(2) $Z=\max\{X,Y\}$

$Z=\min\{X,Y\}$

第五节 两个随机变量的函数的分布

$Z = g(X,Y)$ $f(x,y)$ ➡ $f_Z(z) = ?$ 2) $f_Z(z) = F_Z'(z)$ 分布函数法 ★

1) $Z = X + Y$ 1) $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$ ★

公式法 独立 卷积公式

2) $Z = \max\{X,Y\}$ X,Y 独立 $F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z)$

$Z = \min\{X,Y\}$ X,Y 独立 $F_Z(z) = 1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立，$F_{X_i}(x) = F(x)$

$Z = \max(X_1, X_2, \cdots X_n)$

$F_Z(z) = F_{X_1}(z)\cdot F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z) = [F(z)]^n$

$Z = \min(X_1, X_2 \cdots X_n)$

$F_Z(z) = 1-[1-F_{X_1}(z)]\cdot[1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)] = 1-[1-F(z)]^n$

第三章中计算难点 画图

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$$

1) $P\{(X,Y)\in G\} = \iint\limits_{G} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D\text{交集}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

2) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 分区间

X,Y 独立

$Z = X + Y$

3) $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{f_X(z-y)f_Y(y)}\mathrm{d}y$ 非零区域 分区间

4) $Z = g(X,Y)$ $f(x,y) \longrightarrow f_Z(z) = ?$ $f_Z(z) = F_Z'(z)$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P\{g(X,Y) \le z\} = \iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{D(z)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ 交集

$D(z)$是积分区域 $g(x,y)\le z$ 与 $f(x,y)$ 取值非零区域的交集

例1 设二维随机变

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

03, 4分

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le y\le 1 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

----概率密度取值非零区域

画图

求 $P\{X+Y\le 1\}$

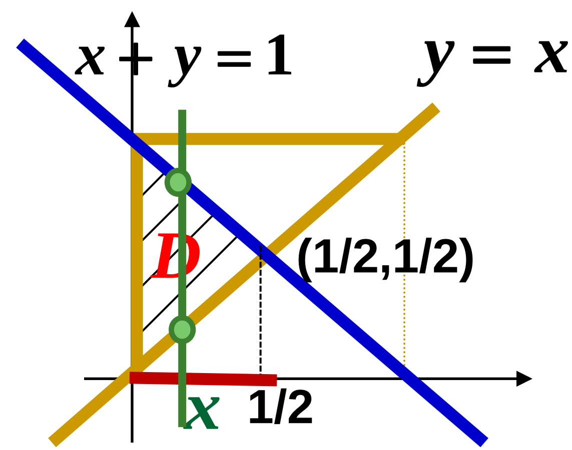
解： $P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D} 6x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{1-x}6x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}6x\,\mathrm{d}x\int_x^{1-x}\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}6x\left(y\Big|_x^{1-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}6x(1-2x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}(6x-12x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}6x\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{1}{2}}12x^2\,\mathrm{d}x=6\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}-12\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=3\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-0\right]-4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3-0\right]=\frac{1}{4}$$

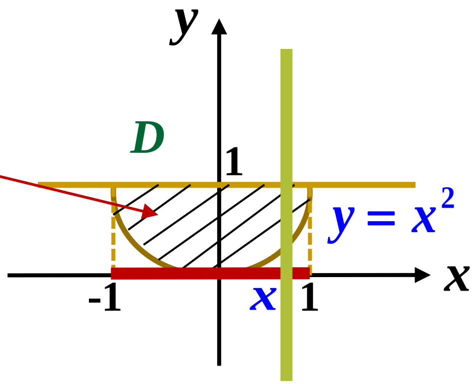


➤ D是积分区域G和概率密度取值非零区域的交集

例2 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

画图

$$f(x,y)=\begin{cases} cx^2y, & \boxed{x^2\le y\le 1} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



求：常数C与边缘概率密度.

解： $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1} cx^2y\ \mathrm{d}y = c\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1} y\ \mathrm{d}y\ = c\int_{-1}^{1} x^2\ \frac{y^2}{2}\bigg|_{x^2}^{1}\ \mathrm{d}x$$

$$=\frac{c}{2}\int_{-1}^{1} x^2(1-x^4)\mathrm{d}x\ =\frac{c}{2}[\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1} x^6\mathrm{d}x]$$

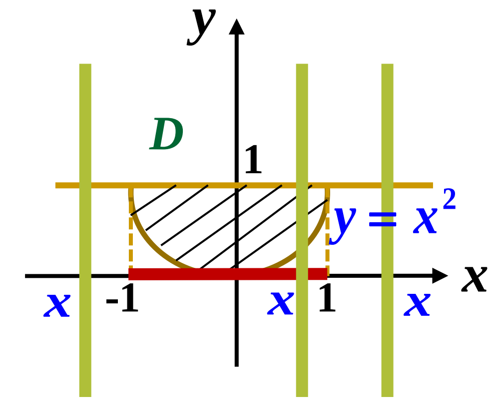
$$=\frac{c}{2}(\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}-\frac{1}{7}x^7\Big|_{-1}^{1})\ =\frac{c}{2}\{\frac{1}{3}[(1)^3-(-1)^3]-\frac{1}{7}[(1)^7-(-1)^7]\}$$

$$=\frac{c}{2}(\frac{2}{3}-\frac{2}{7})=\frac{4c}{21}\qquad \therefore c=\frac{21}{4}$$

例2 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y, & x^2\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求：常数C与边缘概率密度.



解： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$

当 $-1<x<1$ 时, $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{x^2}^{1}\dfrac{21}{4}x^2y\mathrm{d}y$

$$=\frac{21}{4}x^2\int_{x^2}^{1}y\mathrm{d}y=\frac{21}{8}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}=\frac{21}{8}x^2(1-x^4)$$

当 $x\le-1$ 或 $x\ge1$ 时, $f(x,y)=0$, $f_X(x)=0$

$$\therefore\quad f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

1. 投影
2. 积分（分区间）
3. 画线（确定上下限）

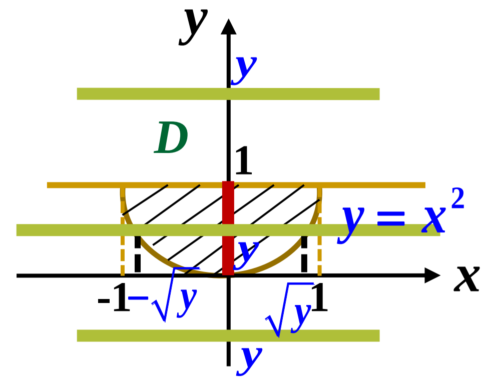
例2 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y, & x^2\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$y=x^2$$

$$x=\sqrt{y}$$

$$x=-\sqrt{y}$$



求：常数C与边缘概率密度.

解： $$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\dfrac{21}{4}x^2y\mathrm{d}x$

$$=\frac{21}{4}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}x^2\mathrm{d}x=\frac{21}{12}yx^3\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}=\frac{21}{12}y(\sqrt{y}^3-(-\sqrt{y})^3)=\frac{21}{6}y^{\frac{5}{2}}$$

当 $y\le 0$ 或 $y\ge 1$ 时，$f(x,y)=0$，$\therefore\ f_Y(y)=0$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

1. 投影
2. 积分（分区间）
3. 画线（确定上下限）

例3. 若X 和 Y 相互独立，具有相同的概

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{其　它} \end{cases}$$

求：$Z = X + Y$ 的概率密度

解1 用卷积公式：

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(z - x)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le z - x \le 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ z - 1 \le x \le z \end{cases}$$

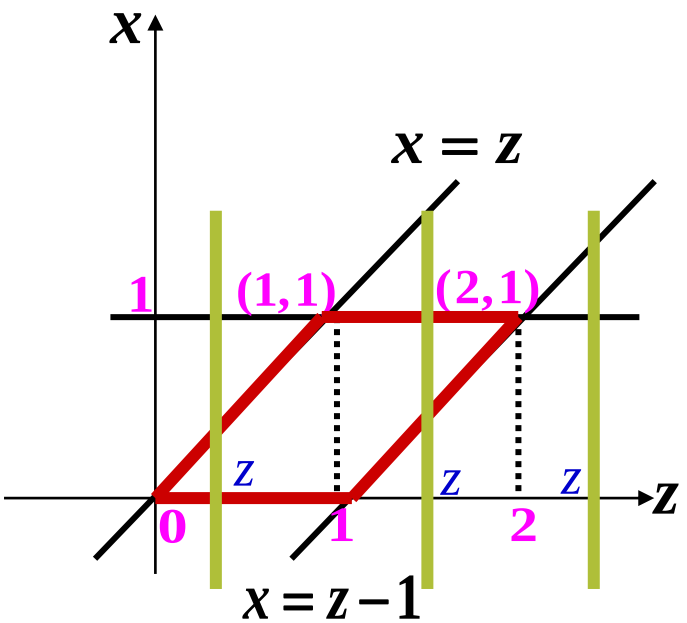
为确定积分限，找出使被积函数不为 0 的区域：

$$f(x) f(z - x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1, \\ & z - 1 \le x < z \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,f(z-x)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_0^z dx = z & 0\le z<1\\ \int_{z-1}^{1} dx = 2-z & 1\le z<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



画图

$$f(x)\,f(z-x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1,\\ & z-1\le x<z\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

1. 投影
2. 积分（分区间）
3. 画线（确定上下限）

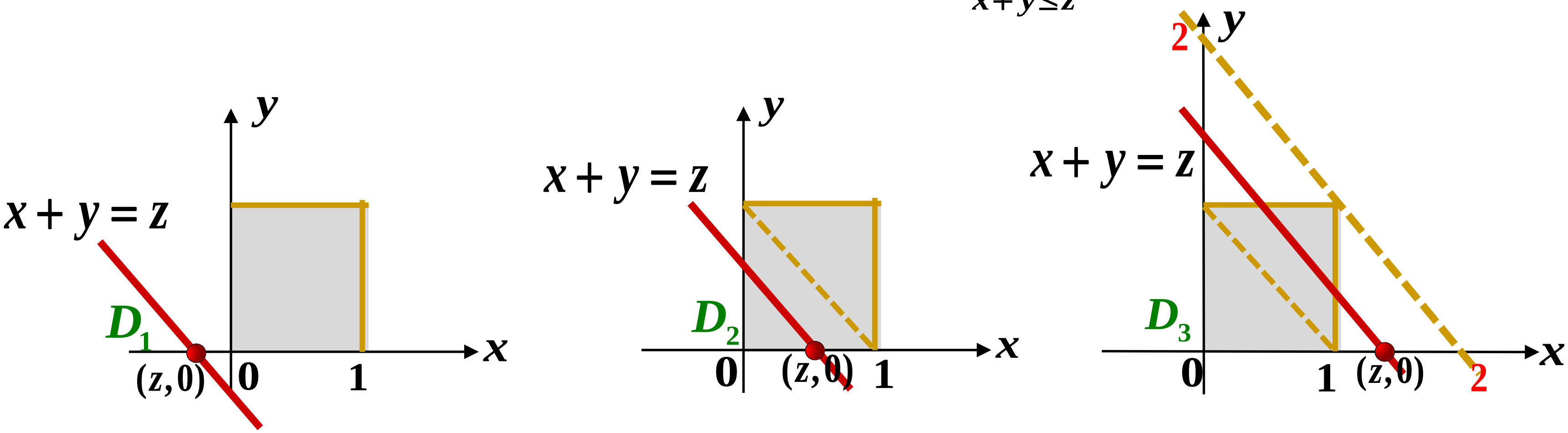
例3. 若X 和 Y 相互独立，具有相同的概率密度： $f_Z(z)=F_Z'(z)$

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$ 求：$Z=X+Y$ 的概率密度

解2 分布函数法：因为X,Y 相互独立，所以

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$ 画图

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



例3. 若X 和 Y 相互独立，具有相同的概率密度： $f_Z(z)=F_Z'(z)$

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其 它}\end{cases}$$

求：$Z=X+Y$的概率密度

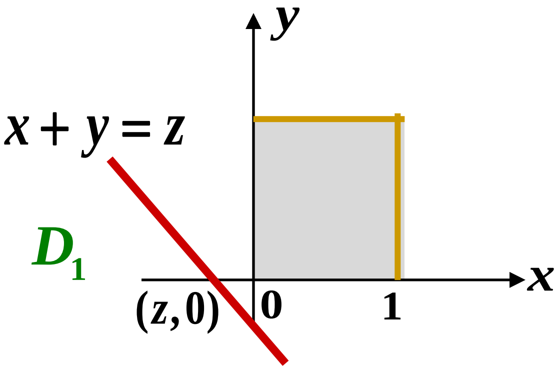
解2 分布函数法：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当$z\le 0$时，

$$=0$$



$$f_Z(z)=F_Z'(z)=0$$

例3. 若X 和 Y 相互独立，具有相同的概率密度： $f_Z(z)=F_Z'(z)$

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其\quad 它\end{cases}$$ 求：$Z=X+Y$ 的概率密度

解2 分布函数法：

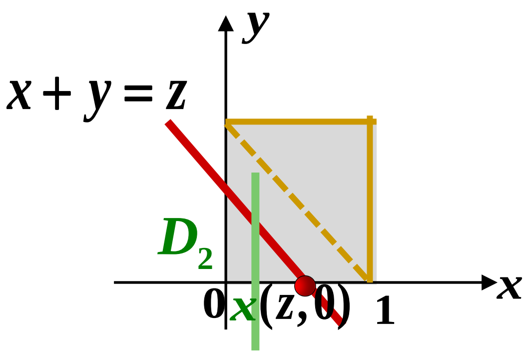
$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当$0\le z\le 1$时，

$$=\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{z-x}1\cdot \mathrm{d}y=\int_0^z (z-x)\mathrm{d}x=\int_0^z z\mathrm{d}x-\int_0^z x\mathrm{d}x$$

$$=z\int_0^z \mathrm{d}x-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^z=z^2-\frac{1}{2}z^2=\frac{1}{2}z^2$$



$$f_Z(z)=F_Z'(z)=z$$

例3. 若X和Y相互独立，具有相同的概率密度： $f_Z(z)=F_Z'(z)$

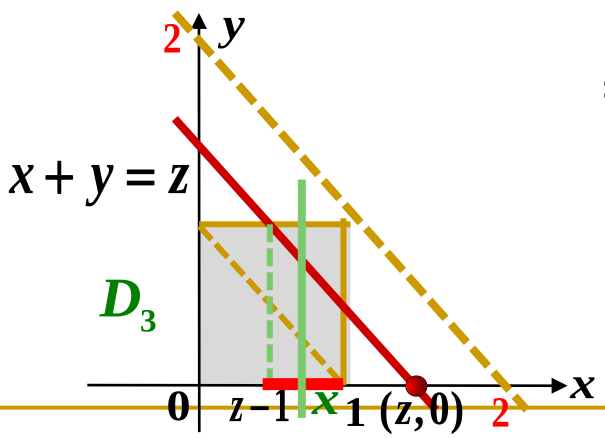
$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其\quad 它\end{cases}$$ 求：$Z=X+Y$的概率密度

解2 分布函数法：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当$1\le z\le 2$时，



$$=1-\int_{z-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{z-x}^{1}1\cdot\mathrm{d}y=1-\frac{1}{2}(2-z)^2$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=2-z$$

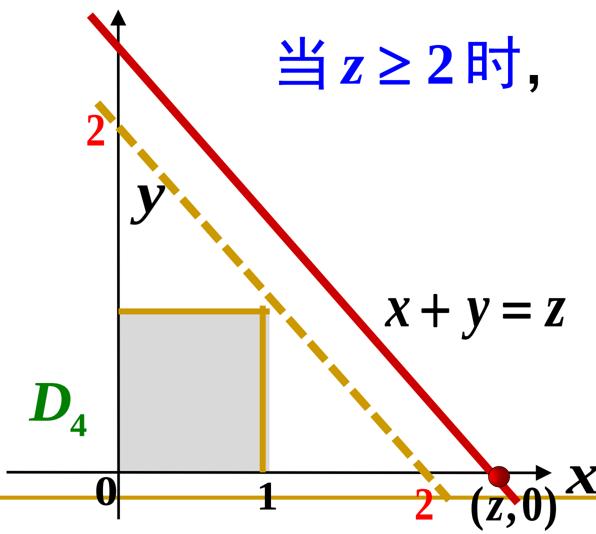
例3. 若X和Y相互独立，具有相同的概率密度： $f_Z(z)=F_Z'(z)$

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其 它}\end{cases}$$ 求：$Z=X+Y$的概率密度

解2 分布函数法：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



当$z\ge 2$时，

$$=1$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=0$$

例3. 若X 和 Y 相互独立，具有相同的概率密度： $f_Z(z)=F_Z'(z)$

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其 它}\end{cases}$$

求：$Z=X+Y$ 的概率密度

解2 分布函数法：

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0 & \text{当} z\le 0, z\ge 2\text{时},\\ z & \text{当} 0\le z\le 1\text{时},\\ 2-z & \text{当} 1\le z\le 2\text{时},\end{cases}$$

第四章

随机变量的数学期望与方差

	离散型随机变量	连续型随机变量
X 数学期望	$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$	$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$
$Y=g(X)$ 函数数学期望	$E(Y)=E[g(X)]$ $=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$	$E(Y)=E[g(X)]$ $=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$
$Z=g(X,Y)$ 函数数学期望	$E(Z)=E[g(X,Y)]$ $=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$	$E(Z)=E[g(X,Y)]$ $=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
X 方差	$D(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2$ $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2$	

数学期望与方差的性质

$E(X)$性质	$E(c)=c$ $\quad E(cX)=cE(X)$ $\quad E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ X,Y 独立， $E(XY)=E(X)E(Y)$
$D(X)$性质	$D(c)=0$ $\quad D(cX)=c^2D(X)$ $\quad D(X)=0 \Leftrightarrow P(X=c)=1$ X,Y 独立， $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$
协方差	$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][(Y-E(Y)]\}$ $=E(XY)-E(X)E(Y)$ $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)\overset{\text{独立}}{=}D(X)+D(Y)$
相关系数	$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$ (1) $\lvert\rho_{XY}\rvert\le 1$ (2) $\lvert\rho_{XY}\rvert=1 \Leftrightarrow$ 存在常数 a,b，使得：$P(Y=aX+b)=1$

六种常见分布的数学期望和方差

	概率分布		$E(X)$	$D(X)$
离散型	(0-1)分布	$X \sim B(1, p)$	p	pq
	二项分布	$X \sim B(n, p)$	np	npq
	泊松分布	$X \sim P(\lambda)$	λ	λ
连续型	均匀分布	$X \sim U(a,b)$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
	指数分布	$X \sim E(\theta)$	θ	θ^2
	正态分布	$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2

例1. 设二维连续

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$f(x,y)=\begin{cases}3x & 0<y<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

画图

求：$Z=XY$ 的数学期望

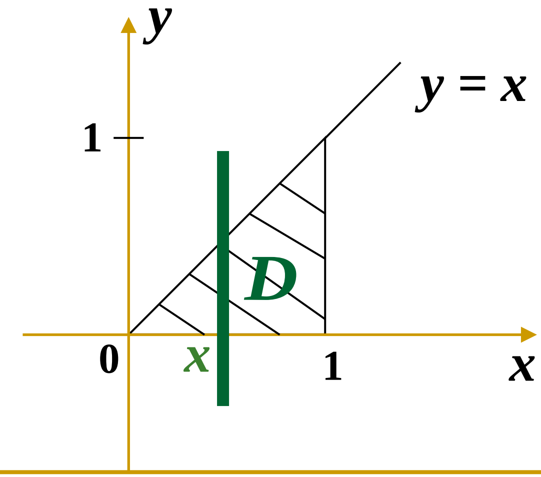
解：

$$E(Z)=E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\,f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{0<y<x<1}xy\cdot 3x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x xy\cdot 3x\,\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^x y\,\mathrm{d}y=3\int_0^1 x^2\frac{y^2}{2}\Big|_0^x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^1 x^4\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{3}{10}$$



例2 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

求$Cov(X^2+3,Y^2-5)$

解： $Cov(X^2+3,Y^2-5)$

$$=Cov(X^2,Y^2)+\underbrace{Cov(X^2,-5)}_{0}+\underbrace{Cov(3,Y^2)}_{0}+\underbrace{Cov(3,-5)}_{0}$$

$$=Cov(X^2,Y^2)$$

$$=E(X^2Y^2)-E(X^2)E(Y^2)$$

$$\boxed{Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)}$$

例2 设二维随机变量(X, Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1	$P(X=x_i)$
0	0.07	0.18	0.15	0.4
1	0.08	0.32	0.20	0.6
$P(Y=y_j)$	0.15	0.50	0.35	

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k$$

$$E(Y^2)=\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 p_k$$

$$E(X^2Y^2)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 y_j^2 p_{ij}$$

求 $Cov(X^2+3, Y^2-5)$

解： $Cov(X^2+3, Y^2-5)=E(X^2Y^2)-E(X^2)E(Y^2)=-0.02$

$$E(X^2)=0^2\times 0.4+1^2\times 0.6=0.6$$

$$E(Y^2)=(-1)^2\times 0.15+0^2\times 0.5+1^2\times 0.35=0.5$$

$$E(X^2Y^2)=1^2\cdot(-1)^2\times 0.08+1^2\cdot 0^2\times 0.32+1^2\cdot 1^2\times 0.20=0.28$$

例3 设随机变量 X,Y 相互独立，$X \sim N(1,1/4), Y \sim N(1,3/4)$，

求 $E(|X-Y|) = E(|Z|)$

解： $Z = X - Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad Z = X - Y \sim N(0,1)$ $\quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

$$\mu = E(X-Y) = EX - EY = 1 - 1 = 0$$

$$\sigma^2 = D(X-Y) = DX + D(Y) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$E(|Z|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |z| e^{-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d}z = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d}z$$

$\mathrm{d}z^2 = 2z\mathrm{d}z$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d}\left(-\frac{z^2}{2}\right) = \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

04, 9分

设A,B是随机事件，且 $P(A)=\dfrac{1}{4},\ P(B|A)=\dfrac{1}{3},\ P(A|B)=\dfrac{1}{2},$

令$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases}$ $\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$

求：(1) (X,Y)的概率分布；(2) (X,Y)的相关系数.

解：$\dfrac{1}{3}=P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ ➡ $P(AB)=\dfrac{1}{12},$

$\dfrac{1}{2}=P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ ➡ $P(B)=\dfrac{1}{6}$

04, 9分

设A,B是随机事件，且$P(A)=\dfrac{1}{4}, P(B|A)=\dfrac{1}{3}, P(A|B)=\dfrac{1}{2}$

令$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases}$　$Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$　$P(B)=\dfrac{1}{6},\ P(AB)=\dfrac{1}{12}$

求：(1) (X,Y)的概率分布；

Y \ X	0	1	
0	2/3	1/6	5/6
1	1/12	1/12	1/6
	3/4	1/4	1

$$P(X=0,Y=0)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})$$
$$=1-P(A\cup B)$$
$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\frac{2}{3}$$

$$P(X=1,Y=0)=P(A\overline{B})$$
$$=P(A)-P(AB)=1/6$$

$$P(X=0,Y=1)=P(\overline{A}B)$$
$$=P(B)-P(AB)=1/12$$

$$P(X=1,Y=1)=P(AB)=1/12$$

04, 9分

设A,B是随机事件，且 $P(A)=\dfrac{1}{4}, P(B|A)=\dfrac{1}{3}, P(A|B)=\dfrac{1}{2}$

令$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases}$　$Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$

求：(2) (X,Y)的相关系数.

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$
$$=1/12-1/4\cdot 1/6=1/24$$

Y \ X	0	1	
0	2/3	1/6	5/6
1	1/12	1/12	1/6
	3/4	1/4	1

$E(X)=1/4$,　$E(Y)=1/6$,

$E(XY)=1/12$,　$\boxed{E(XY)=\sum x_i y_j p_{ij}}$

$E(X^2)=1/4$，$E(Y^2)=1/6$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=3/16$$
$$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=5/36$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{1/24}{\sqrt{3/4}\cdot\sqrt{5/6}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$$

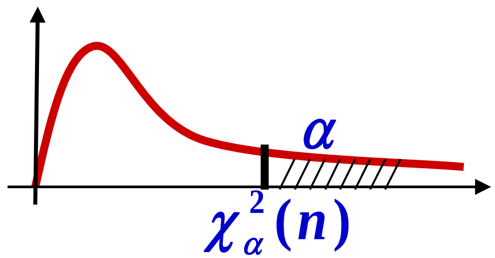
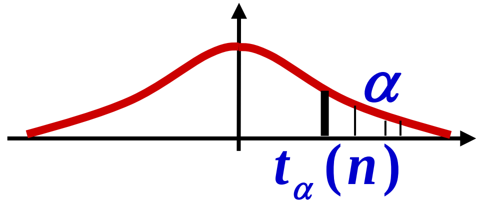
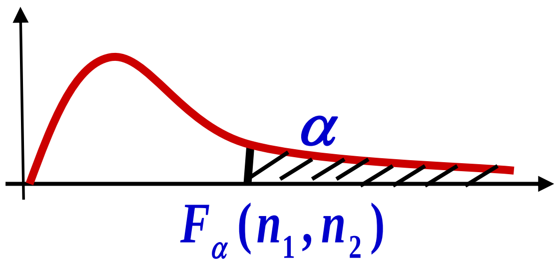
第六章 常用统计量及抽样分布

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $E(X)=\mu$ 未知

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ $D(X)=\sigma^2$ S^2

	统计量	概率分布	
χ^2统计量	$\chi^2=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$	$\sim \chi^2(n)$	$X_i \sim N(0,1)$ $i=1,2,\cdots,n$ 独立
t 统计量	$t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$	$\sim t(n)$	$X \sim N(0,1),\ Y \sim \chi^2(n),$ 独立
样本均值	$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
样本方差	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\sim \chi^2(n-1)$	$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$
	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$\sim t(n-1)$	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}(\dfrac{X_i-\bar{X}}{\sigma})^2$ μ

常用统计量及抽样分布

χ^2统计量	$X_i \sim N(0,1)\ i=1,2,\cdots,n$ 独立 $\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \sim \chi^2(n)$	
t 统计量	$X \sim N(0,1),\ Y \sim \chi^2(n)$, 独立 $t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$	
F 统计量	$U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2)$, 独立 $F=\frac{U/n_1}{V/n_2} \sim F(n_1,n_2)$	

练习

3. 设 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，

统计量 $\dfrac{4S^2}{\sigma^2}$ 服从 (A) 分布？

(A) $\chi^2(4)$ (C) $t(4)$

(B) $\chi^2(5)$ (D) $t(5)$

$$\boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)}$$

4. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，

服从 $\chi^2(3)$ 分布的统计量是 (B)

(A) $\dfrac{X}{\sqrt{Y/4}}$ (C) $\bar{X} = \dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} X_i$

(B) $3S^2/\sigma^2$ (D) $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$

练习

5. 设 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，

统计量 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{5}}$ 服从 <u>(C)</u> 分布？

(A) $\chi^2(4)$　　(C) $t(4)$

(B) $\chi^2(5)$　　(D) $t(5)$

$$\boxed{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)}$$

6. 设 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，

统计量 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{5}}$ 服从 <u>(D)</u> 分布?

(A) $\chi^2(4)$　　(C) $t(4)$

(B) $\chi^2(5)$　　(D) $N(0,1)$

$$\boxed{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$$

第3题

$\bar{X}, \bar{Y}$

求总体$N(20,3)$的容量分别为10,15的两独立样本均值差的绝对值大于0.3的概率。$X_1, X_2, \cdots, X_{10}$　$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{15}$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

解：

$$\bar{X} \sim N(20, \frac{3}{10}), \quad \bar{Y} \sim N(20, \frac{3}{15}),$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(20-20, \frac{3}{10} + \frac{3}{15}) \rightarrow \bar{X} - \bar{Y} \sim N(0, \frac{1}{2}) \rightarrow \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{1/2}} \sim N(0,1)$$

所求概率为：

$$P(|\bar{X} - \bar{Y}| > 0.3) = 1 - P(|\bar{X} - \bar{Y}| \le 0.3) = 1 - P(-\frac{0.3}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \le \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \le \frac{0.3}{\sqrt{\frac{1}{2}}})$$

$$= 1 - [\Phi(0.3\sqrt{2}) - \Phi(-0.3\sqrt{2})]$$

$$= 1 - \Phi(0.3\sqrt{2}) + [1 - \Phi(0.3\sqrt{2})]$$

$$= 2 - 2\Phi(0.42) = 2 - 2 \times 0.6628 = 0.6744$$

第4(1)题

设样本 $X_1, X_2, \cdots X_6$ 来自总体$N(0,1)$,

$$Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$$

试确定常数C使CY服从χ^2分布。

$$\boxed{\chi^2=\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

解：$X_1+X_2+X_3 \sim N(0,3)$, $\quad X_4+X_5+X_6 \sim N(0,3)$

$$\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}} \sim N(0,1), \quad \frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}} \sim N(0,1)$$

且两者相互独立，因此

$$\frac{1}{3}Y=\frac{(X_1+X_2+X_3)^2}{3}+\frac{(X_4+X_5+X_6)^2}{3} \sim \chi^2(2)$$

因此C=1/3

第4(2)题

设样本 $X_1, X_2, \cdots X_5$ 来自总体 $N(0,1)$，

$$Y = \frac{C(X_1 + X_2)}{(X_3^2 + X_4^2 + X_5^2)^{1/2}}$$

$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$, 独立

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$

试确定常数 C 使 Y 服从 t 分布。

解：$X_1 + X_2 \sim N(0,2)$, $X = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$, $Y = X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 \sim \chi^2(3)$

且两者相互独立，因此

$$\sqrt{\frac{3}{2}}Y = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(X_1 + X_2)}{(X_3^2 + X_4^2 + X_5^2)^{1/2}} = \frac{(X_1 + X_2)/\sqrt{2}}{\sqrt{(X_3^2 + X_4^2 + X_5^2)/3}} \sim t(3)$$

因此 $C = \sqrt{\frac{3}{2}}$

第七章

总体$X \sim F(x,\theta)$，对θ进行估计，$X_1 X_2, \cdots, X_n$ $x_1 x_2, \cdots, x_n$

点估计	统计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) \to \theta$ 的估计量 ★1)矩估计法： 求解：$EX^k = A_k$，$k = 1, 2$ ★2)极大似然估计法： 求解：$L(\hat{\theta}) = \max\limits_{\theta \in H} L(\theta)$
估计量的优良性	★1)无偏性： $E(\hat{\theta}) = \theta$ 2)有效性： $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$
★区间估计	$P(\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}) = 1 - \alpha$ $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 是置信度为$1-\alpha$ 的置信区间 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，对 μ, σ^2 进行区间估计 1) 求 μ的置信区间， σ^2 为已知 2) 求 μ的置信区间， σ^2 为未知 3) 求σ^2 的置信区间

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，对μ,σ^2进行区间估计，置信度 $1-\alpha$

	统计量	置信区间
1) 求 μ 的置信区间 σ^2为已知	$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})$
2) 求 μ 的置信区间 σ^2 为未知	$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$
3) 求 σ^2的置信区间	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$
$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $X_1,X_2,\cdots,X_n$ $x_1,x_2,\cdots,x_n$	$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$	$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

统计量的无偏性

设 $X \sim F(x,\theta)$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 X 的一个样本

样本均值：$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$E(X)$	$E(\bar{X}) = E(X)$
样本方差：$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$	$D(X)$	$E(S^2) = D(X)$
样本 k 阶矩：$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$	$E(X^k)$	$E(A_k) = E(X^k)$

结论: $\bar{X}, S^2, A_k$ 分别是 $E(X), D(X), E(X^k)$ 的无偏估计.

矩估计法的步骤：

$X_1, X_2, \ldots, X_n$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$

$A_k \xrightarrow{P} E(X^k)$

$A_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^k$

(1) 计算总体矩：

离散型：$E(X^k) = \sum_{j=1}^{n} x_j^k \cdot P(x_j, \theta_1, \theta_2) = \mu_k(\theta_1, \theta_2)$ $\quad k = 1, 2$

连续型：$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x; \theta_1, \theta_2)\,\mathrm{d}x = \mu_k(\theta_1, \theta_2)$

(2) 建立方程组：

$$\begin{cases} E(X) = \mu_1(\theta_1, \theta_2) = A_1 \\ E(X^2) = \mu_2(\theta_1, \theta_2) = A_2 \end{cases}$$

(3) 解方程组，得矩估计量：

$$\hat{\theta}_1 = \theta_1(A_1, A_2)$$
$$\hat{\theta}_2 = \theta_2(A_1, A_2)$$

是 θ_1, θ_2 的矩估计量。

值

极大似然估计法的步骤:

(1) 若总体 X 的分布律为: $P(X=x)=p(x,\theta)$, θ 为未知参数.

(2) 若总体 X 的概率密度为: $f(x,\theta)$, θ 为未知参数.

又设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的一组样本值.

1. 似然函数(样本值出现的概率):

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)=p(x_1,\theta)\cdot p(x_2,\theta)\cdots p(x_n,\theta)$$

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=f(x_1,\theta)\cdot f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)$$

2. 取对数: $\ln L(\theta)$

3. 求导,令其为0: $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$

4. 求解: $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$　　$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

极大似然估计值　　极大似然估计量

（04, 9分）

设总体X的分布函数为：$F(x,\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$，未知参数 $\beta>1$，

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，求：

(1) β 的矩估计量；

(2) β 的最大似然估计量。

（04, 9分）

设总体X的分布函数为：$F(x,\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$，未知参数 $\beta>1$，

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，求：

(1) β 的矩估计量；

$E(X)=\mu_1(\beta)=A_1=\bar{X}$

解：

1. 计算总体矩：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_1^{\infty} x\frac{\beta}{x^{\beta+1}}\mathrm{d}x=\beta\int_1^{\infty} x^{-\beta}\mathrm{d}x=\frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{x^{\beta-1}}\Big|_1^{\infty}$$

$$=\frac{\beta}{\beta-1}$$

$$f(x,\beta)=\frac{\mathrm{d}F(x,\beta)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$$

（04, 9分）

设总体X的分布函数为：$F(x,\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>1 \\ 0, & x\le 1\end{cases}$， 未知参数 $\beta>1$，

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，求：

(1) β 的矩估计量；

$E(X)=\mu_1(\beta)=A_1=\bar{X}$

解：

1. 计算总体矩： $E(X)=\dfrac{\beta}{\beta-1}$

2. 建立方程： $E(X)=\dfrac{\beta}{\beta-1}=\bar{X}$

3. 求解方程： $\hat{\beta}=\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$ ---矩估计量

（04, 9分）

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，求：

$x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$f(x,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$$

(2) β 的最大似然估计量。

解：1. 似然函数 $L(\beta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\beta)$

$$=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{\beta}{x_i^{\beta+1}}=\dfrac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}} & x_1,x_2,\cdots x_n>1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

2. 取对数： $\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

3. 求导,令其为零： $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\beta)}{\mathrm{d}\beta}=\dfrac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

4. 求解：

$$\hat{\beta}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

极大似然估计值

$$\hat{\beta}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$$

极大似然估计量

$$\hat{\beta}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$$

矩估计量

（12, 11分）

设随机变量X与Y相互独立，分别服从$N(\mu,\sigma^2)$与$N(\mu,2\sigma^2)$

其中$\sigma>0$是未知参数．记$Z=X-Y$.

(1) 求Z的概率密度$f(z,\sigma^2)$；

(2) 设$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$是来自总体Z的样本，求σ^2的最大似然估计量$\hat{\sigma}^2$

(3) 证明$\hat{\sigma}^2$为σ^2的无偏估计量.

（12, 11分）

设随机变量X与Y相互独立，分别服从$N(\mu,\sigma^2)$与$N(\mu,2\sigma^2)$其中$\sigma>0$是未知参数．记$Z=X-Y$.

(1) 求Z的概率密度 $f(z,\sigma^2)$；

解：$Z=X-Y\sim N(0\ ,3\sigma^2)$

$$EZ=EX-EY=\mu-\mu=0$$

$$DZ=DX+DY=\sigma^2+2\sigma^2=3\sigma^2$$

$$f(z,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{3}\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-0)^2}{2(\sqrt{3}\sigma)^2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

（12, 11分）

设随机变量X与Y相互独立，分别服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$

其中 $\sigma>0$ 是未知参数. 记 $Z=X-Y$.

(2) 设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 是来自总体Z的样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$

解：

1. 似然函数： $L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n} f(z_i,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{z_i^2}{6\sigma^2}}=(\sqrt{6\pi})^{-n}(\sigma^2)^{-n/2}e^{-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$

2. 取对数： $\ln L(\sigma^2)=-n\ln(\sqrt{6\pi})-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$

3. 求导,令其为零： $\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{6(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=0$

4. 求解： $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$ $\qquad$ $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$

极大似然估计值 $\qquad$ 极大似然估计量

$$f(z,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}$$

（12, 11分）

设随机变量X与Y相互独立，分别服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$

其中 $\sigma>0$ 是未知参数. 记 $Z=X-Y\sim N(0,3\sigma^2)$

设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 是来自总体Z的样本. $E(Z_i^2)=E(Z^2)$

(3) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$$

极大似然估计量

解:

$$E\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}E(Z_i^2)=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}E(Z^2)=\frac{1}{3n}nE(Z^2)$$

$$=\frac{1}{3}E(Z^2)=\frac{1}{3}[D(Z)+E(Z)^2]=\frac{1}{3}[3\sigma^2+0]=\sigma^2$$

所以 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的无偏估计量.

第16题

设某种清漆的9个样品，其干燥时间分别为：

6.0,5.7,5.8,6.5,7.0,6.3,5.6,6.1,5.0。设干燥时间服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$

求 μ 的置信水平为0.95的置信区间。

(1) 若由以往经验知$\sigma = 0.6$　(2) 若σ为未知。

第16题

设某种清漆的9个样品，其干燥时间分别为：

6.0,5.7,5.8,6.5,7.0,6.3,5.6,6.1,5.0。设干燥时间服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$

求 μ 的置信水平为0.95的置信区间。

$$(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2})$$

(1) 若由以往经验知$\sigma = 0.6$

解：由已知：$\because\ 1-\alpha = 0.95 \quad \therefore\ \alpha = 0.05,$

查正态分布表得：$z_{\alpha/2} = z_{0.05/2} = z_{0.025}$

$\Phi(z_{0.025}) = 1 - 0.025 = 0.975 \qquad z_{0.025} = 1.96$

计算得：$\bar{x} = 6,\quad \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} = \dfrac{0.6}{\sqrt{9}} \times 1.96 = 0.392$

所求置信区间为：$(6 \pm \dfrac{0.6}{\sqrt{9}} \times 1.96) = (6 \pm 0.392) = (5.608,\ 6.392)$

第16题

设某种清漆的9个样品，其干燥时间分别为：

6.0,5.7,5.8,6.5,7.0,6.3,5.6,6.1,5.0。设干燥时间服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$

求 μ 的置信水平为0.95的置信区间。

(2) 若 σ 为未知

$$[\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)]$$

解：由已知：$\because 1-\alpha = 0.95 \quad \therefore \alpha = 0.05,$

查正态分布表得：$t_{\alpha/2}(8) = t_{0.025}(8) = 2.306$

计算得：$\bar{x} = 6, \quad s^2 = 0.33$

所求置信区间为：

$$(6 \pm \frac{\sqrt{0.33}}{3} \times 2.306) = (6 \pm 0.442) = (5.558,\ 6.442)$$

第19题

设$X_1, X_2, \cdots X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的一个样本，μ已知，σ未知。

(1) 验证$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$，并构造$\sigma^2$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。

(2) 设$\mu=6.5$，且有样本值7.5, 2.0, 12.1, 8.8, 9.4, 7.3, 1.9, 2.8, 7.0, 7.3。试求σ的置信水平为0.95的置信区间。

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \qquad \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

第19题

设$X_1,X_2,\cdots X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，μ已知，σ未知。

(1) 验证$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2/\sigma^2\sim\chi^2(n)$，并构造$\sigma^2$的置信水平为$1-\alpha$ 的置信区间。

解：$\because X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\therefore \dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，$i=1,2,\cdots,n$

由 $\dfrac{X_1-\mu}{\sigma},\dfrac{X_2-\mu}{\sigma},\cdots,\dfrac{X_n-\mu}{\sigma}$相互独立，得

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)\qquad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

第19题

设$X_1, X_2, \cdots X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，μ已知，σ未知。

(1) 验证$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$，并构造$\sigma^2$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。

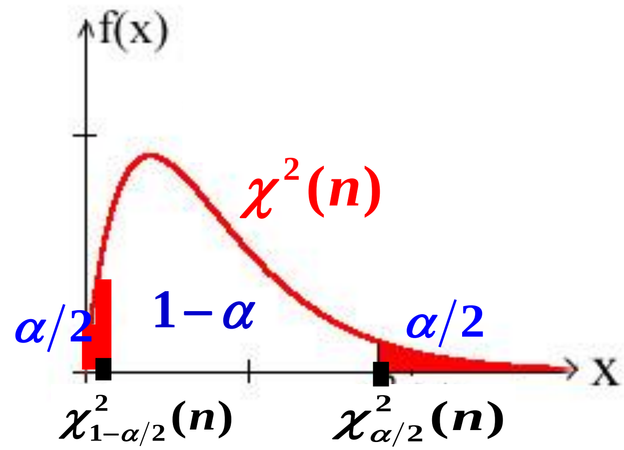
解：$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n) < \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 < \chi^2_{\alpha/2}(n)\right\} = 1-\alpha$$

$$\boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)}$$

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right\} = 1-\alpha$$

σ^2的置信度为$1-\alpha$置信区间为：

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$$



第19题

设$X_1, X_2, \cdots X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的一个样本，μ已知，σ未知。

(2) 设 $\mu = 6.5$ ， 且有样本值7.5, 2.0, 12.1, 8.8, 9.4, 7.3, 1.9, 2.8, 7.0, 7.3。试求 σ 的置信水平为0.95的置信区间。

解： σ^2的置信度为$1-\alpha$ 置信区间为：$\left\{ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)} \right\}$

$\because 1-\alpha = 0.95 \quad \therefore \alpha = 0.05,$

查表得： $\chi^2_{\alpha/2}(n) = \chi^2_{0.025}(10) = 20.483,$

$\chi^2_{1-\alpha/2}(n) = \chi^2_{0.975}(10) = 3.247$

计算得：$\sum_{i=1}^{10}(X_i-\mu)^2 = 102.69$

σ^2的置信度为0.95 置信区间为: $\left(\dfrac{102.69}{20.483}, \dfrac{102.69}{3.247} \right) = (5.013, 31.626)$

第19题

设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，μ 已知，σ 未知。

(2) 设 $\mu = 6.5$ ，且有样本值7.5, 2.0, 12.1, 8.8, 9.4, 7.3, 1.9, 2.8, 7.0, 7.3。试求 σ 的置信水平为0.95的置信区间。

解：

σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 置信区间为：$\left\{ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)} \right\}$

σ^2 的置信度为0.95 置信区间为: $\left(\dfrac{102.69}{20.483}, \dfrac{102.69}{3.247} \right) = (5.013, 31.626)$

$$P\{5.013 < \sigma^2 < 31.626\} = 0.95$$

$$P\{\sqrt{5.013} < \sigma < \sqrt{31.626}\} = 0.95$$

σ 的置信度为0.95 置信区间为: (2.239, 5.624)

概率统计各章总结

期末考试答疑时间：

20日（周二）上午9:30-11:30

下午2:30-5:00

晚上6:30-9:30

完毕

（08, 11分）

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，记

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,\quad T=\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2$$

(1) 证明 T 是μ^2 的无偏估计量；

(2) 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，求 $D(T)$.

（08, 11分）

设$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，记

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,\quad T=\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2$$

$$\boxed{E\bar{X}=EX=\mu,\ ES^2=DX=\sigma^2}$$

$$\boxed{E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2}$$

(1) 证明 T 是μ^2 的无偏估计量；

解：

$$ET=E\bar{X}^2-\frac{1}{n}ES^2=D\bar{X}+(E\bar{X})^2-\frac{1}{n}ES^2=\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2-\frac{1}{n}\sigma^2=\mu^2$$

所以T 是μ^2 的无偏估计量.

$$D\bar{X}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{1}{n}\sigma^2$$

（08, 11分）

设$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，记

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,\quad T=\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2\qquad \bar{X} \text{ 与 } S^2 \text{ 独立}$$

(2) 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，求 $D(T)$.

$$\boxed{\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})}$$

解：$\bar{X}\sim N(0,\frac{1}{n})\to\sqrt{n}\bar{X}\sim N(0,1)\to n\bar{X}^2\sim\chi^2(1)\to D(n\bar{X}^2)=2$

$$\to n^2D(\bar{X}^2)=2\to D(\bar{X}^2)=\frac{2}{n^2}$$

$$\boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)}$$

$$(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)\to D[(n-1)S^2]=2(n-1)$$

$$\to(n-1)^2D(S^2)=2(n-1)\to D(S^2)=\frac{2}{n-1}$$

$$DT=D\bar{X}^2+\frac{1}{n^2}DS^2=\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^2(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}$$

若 $\chi^2\sim\chi^2(n)$，则

$E(\chi^2)=n,\ D(\chi^2)=2n$

χ^2 分布　设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自正态总体 $N(0,1)$的样本，

则统计量：$\chi^2 = X_1^{\ 2} + X_2^{\ 2} + \cdots + X_n^{\ 2} \sim \chi^2(n)$

性质：$E(\chi^2) = n,\ D(\chi^2) = 2n$

证明：$X_i \sim N(0,1) \to EX_i = 0, DX_i = 1 \to EX_i^2 = DX_i + (EX_i)^2 = 1$

$$\to E(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = n$$

$$\boxed{D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

$$D(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i^2) = \sum_{i=1}^{n}\{E(X_i^4) - [E(X_i^2)]^2\} = \sum_{i=1}^{n}\{E(X_i^4) - 1\} = \sum_{i=1}^{n}\{3-1\} = 2n$$

$$E(X_i^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

分部积分法

$$= \frac{-2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^3 \mathrm{d}e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2\pi}}\{\underbrace{x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}}_{0} - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x^3\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} 3x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{-2\times 3}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{-2\times 3}{\sqrt{2\pi}}\{\underbrace{xe^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}}_{0} - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\} = \frac{2\times 3}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = 2\times 3\times\frac{1}{2} = 3$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}\mathrm{d}x = 1$$

若 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$，则

$E(\chi^2) = n,\ D(\chi^2) = 2n$