第二章 行列式

2.1 行列式的定义

2.2 行列式的性质

2.3 行列式的展开定理 √

2.4 克莱姆法则

复习

一. 两个基本概念

1. 代数余子式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}.$$

注意： a_{ij} 的代数余子式仅与 i, j 有关，与 a_{ij} 无关.

复习

2. 伴随矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定义2.6 行列式$|A|$的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵:

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵A 的伴随矩阵.

练习2

$$B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix} \qquad |B|=\begin{vmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}$$

写出矩阵B的伴随矩阵 B^*

解：

$$B^*=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{21} & B_{31}\\ B_{12} & B_{22} & B_{32}\\ B_{13} & B_{23} & B_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-1+2=1 \qquad B_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-(-1+2)=-1 \qquad B_{13}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-1+1=0$$

复习

二. 重要结论

1. 代数余子式的性质

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|, & 当\ i=j,\\ 0, & 当\ i\neq j.\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. 伴随矩阵的性质

$$AA^*=|A|E$$

3. 伴随矩阵

矩阵A可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

且 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$ $\qquad |A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$

$$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A \qquad |A^*|=(|A|)^{n-1}$$

第二章 行列式

2.1 行列式的定义

2.2 行列式的性质

2.3 行列式的展开定理

2.4 克莱姆法则

第二章 行列式

2.4 克莱姆法则

- 克莱姆法则
- 重要结论

1. 克莱姆法则

定理2.5 线性方程组 $m = n$

$$D = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$(A,b) = \begin{pmatrix} & & & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

若 $D = |A| \neq 0$，则方程组有唯一解： $Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b$

$$(A,b) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1}b)$$

$$r(A) = r(A,b) = n \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E & A^{-1}b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \end{array}$$

阶梯阵　　行简化阶梯阵

1. 克莱姆法则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理2.5

线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$

$$Ax=b \Rightarrow x=A^{-1}b$$

$$(A,b)\xrightarrow{\text{行变换}}(E,A^{-1}b)$$

若 $D=|A|\neq 0$，则方程组有唯一解：

$$x=A^{-1}b=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\qquad x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 D_j 是把D中第 j 列用方程组的右端常数项代替后所得到的n阶行列式.

克莱姆法多用于理论推导而不是计算

例1 用克莱姆法则解方程组

$$\begin{cases} \quad\quad +2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_2 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11/6 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5/6 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 67 \neq 0, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 4 \\ 11/6 & 1 & 1 & 1 \\ 5/6 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{67}{3},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 11/6 & 1 & 1 \\ 1 & 5/6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

唯一解：$x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{1}{3}$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D} = 0$，

$x_3 = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{1}{2}$，$x_4 = \dfrac{D_4}{D} = 1.$

同理 $D_3 = \dfrac{67}{2}$，$D_4 = 67$

注： 需求5个4阶行列式 **麻烦！**

例1 用克莱姆法则解方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_2 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11/6 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5/6 \end{cases}$

简单！

解： $(A,b) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1}b)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 11/6 \\ 1 & -1 & -3 & 2 & 5/6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$A^{-1}b$

$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{D_2}{D} = 0$, $x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{D_4}{D} = 1.$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{D_2}{D} = 0,$$
$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{1}{2},\ x_4 = \frac{D_4}{D} = 1.$$

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = 1$$

1.克莱姆法则

定理2.5

线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若 $D = |A| \neq 0$, 则方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 D_j 是把 D 中第 j 列用方程组的右端常数项代替后所得到的 n 阶行列式.

证明: $n = 3$

证明：$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

若 $D = |A| \neq 0$，方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b = \frac{1}{D} A^* b$$

$$(A, b) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1}b)$$

$$A^* b = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

$$A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D_1$$

证明: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*}$$

若 $D = |A| \neq 0$，方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b = \frac{1}{D}A^*b$$

$$(A, b) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1}b)$$

$$A^*b = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

$$A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = D_2$$

证明: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*}$$

若 $D = |A| \neq 0$，方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b = \frac{1}{D}A^*b$$

$$(A, b) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, A^{-1}b)$$

$$A^*b = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

$$A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = D_3$$

证明：$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

若 $D=|A|\neq 0$，方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}$$

$$Ax=b\Rightarrow x=A^{-1}b=\frac{1}{D}A^*b$$

$$(A,b)\xrightarrow{\text{行变换}}(E,A^{-1}b)$$

$$A^*b=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}b_1+A_{21}b_2+A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1+A_{22}b_2+A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1+A_{23}b_2+A_{33}b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

$$x=A^{-1}b=\frac{1}{D}A^*b=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

1.克莱姆法则

使用克莱姆法的两个条件：

(1)方程个数等于变量个数;

(2)系数行列式不等于零.

定理2.5

线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

若 $D=|A|\neq 0$, 则方程组有唯一解：

$$\boxed{D=|A|\neq 0 \Rightarrow Ax=b \text{ 有唯一解}}$$

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 D_j 是把 D 中第 j 列用方程组的右端常数项代替后所得到的n阶行列式.

第二章 行列式

2.4 克莱姆法则

- 克莱姆法则
- 重要结论

2. 重要结论

$$Ax = b \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理2.5 $|A| \neq 0 \Rightarrow Ax = b$ 有唯一解

⬇

定理2.6 $Ax = b$ 无解或有两个不同的解 $\Rightarrow |A| = 0$

初等行变换求解线性方程组(非齐次) 当系数矩阵是方阵时 $m=n$

非齐次线性方程组：$Ax=b$

$$Ax=b\ \text{有解} \Leftrightarrow r(A)=r(A,b)\begin{cases} =n,\ \text{有唯一解}\ |A|\neq 0 \\ <n,\ \text{有无穷多解}\ |A|=0 \end{cases}$$

$$Ax=b\ \text{无解} \Leftrightarrow r(A)<r(A,b)\ \text{有矛盾方程}\ \ |A|=0$$

$$\underset{(A,b)}{\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

$r(A)=r(A,b)=n=3$ 求唯一解 $|A|\neq 0$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A)=r(A,b)=2<n=3$ $|A|=0$

求通解

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

$r(A)=2<r(A,b)=3$ $|A|=0$

→ 矛盾方程

2. 重要结论

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$Ax=0 \quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

定理2.5 $|A|\neq 0 \Rightarrow Ax=b$ 有唯一解

定理2.6 $Ax=b$ 无解或有两个不同的解 $\underset{\Leftarrow}{\Rightarrow} |A|=0$

定理2.7 $|A|\neq 0 \Rightarrow Ax=0$ 只有零解 $x_j=\dfrac{D_j}{D}=0$

定理2.8 $Ax=0$ 有非零解 $\underset{\Leftarrow}{\Rightarrow} |A|=0$

2. 重要结论

$$Ax=0 \quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

定理：$Ax=0$ 有非零解 $\Leftarrow |A|=0$

证明：

$$A=\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

阶梯阵

多余方程

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B, \quad |B|=-|A|$$

$$A \xrightarrow{r_i \times k} B, \quad |B|=k|A|$$

$$A \xrightarrow{r_i + kr_j} B, \quad |B|=|A|$$

$\therefore$ $Ax=0$ 有效方程个数$r(A)<$ 变量个数n

$\therefore$ $Ax=0$ 有非零解

2. 重要结论

$$Ax = 0 \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$Ax = b$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理2.5 $|A| \neq 0 \Rightarrow Ax = b$ 有唯一解

定理2.6 $Ax = b$ 无解或有无穷多解 $\Leftrightarrow |A| = 0$

定理2.7 $|A| \neq 0 \Rightarrow Ax = 0$ 只有零解

定理2.8 $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0$

例2 齐次线性方程组 $\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1+a)x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+(1+a)x_3=0\end{cases}$ $m=n$

问：a 取何值时,方程组有非零解？

解： $Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow D=|A|=0$

$$D=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1\\ 1 & 1 & 1+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3+a & 1 & 1\\ 3+a & 1+a & 1\\ 3+a & 1 & 1+a\end{vmatrix}$$

$$=(3+a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1\\ 1 & 1 & 1+a\end{vmatrix}=(3+a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix}=(3+a)a^2$$

当a = -3 或 a = 0 时，D = 0，方程组有非零解.

例3 求通过平面上两个不同点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 的直线方程.

解： 设直线方程为：$ax + by + c = 0$

因为点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 在直线上，所以有

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$
$$ax_2 + by_2 + c = 0$$

联立方程，则 $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$

由于齐次方程组有非零解 (a, b, c)，所以

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

所求直线方程：

第二章 行列式

2.4 克莱姆法则

- 克莱姆法则
- 重要结论

第二章 方阵的行列式

2.1 行列式的定义

2.2 行列式的性质

2.3 行列式的展开定理

2.4 克莱姆法则

小结

一. 行列式的性质：

性质2　若 $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$, $|B| = -|A|$

性质3　若 $A \xrightarrow{r_i \times k} B$, $|B| = k|A|$

性质5　若 $A \xrightarrow{r_i + kr_j} B$, $|B| = |A|$

性质1　$|A^T| = |A|$

性质4　拆行(列)

性质6　$|AB| = |A||B|$

性质7　$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$

A,B方子块

结论：行变换不会改变方阵行列式是否为零的性质.

小结

二. 计算行列式常用方法：

1. 利用定义；
2. 利用性质化为上(下)三角形行列式；
3. 行列式按行(列)展开降阶；
4. 每行和为常数,列相加,再提取公因子；
5. 相邻两行(列)依次相减, 化简行列式；
6. 利用拆列性质；
7. 递推法；
8. 加边法；
9. 范德蒙行列式.

三. 重要结论

小结

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. 代数余子式的性质

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|, & \text{当 } i=j, \\ 0, & \text{当 } i\neq j.\end{cases}$$

2. 伴随矩阵的性质

$$AA^{*}=|A|E$$

3. 伴随矩阵

矩阵A可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

且 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}$ $\qquad |A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$

$$(A^{*})^{-1}=\frac{1}{|A|}A \qquad |A^{*}|=(|A|)^{n-1}$$

四. 行列式的应用

小结

1. 行列式法求 A^{-1} ： $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$

2. Cramer法则: $|A|\neq 0 \Rightarrow Ax=b$ 有唯一解

$|A|=0 \Leftrightarrow Ax=b$ 有无穷多解或无解

$|A|\neq 0 \Rightarrow Ax=0$ 有唯一零解

$|A|=0 \Leftrightarrow Ax=0$ 有非零解

作 业

授课内容	习题四 作业
2.1 行列式定义	4,5(1)(2)(4) 定义
2.2 行列式性质	6(3)(4)(5)(7)(8)(9)，7(1)(2)性质
2.3 行列式展开定理	8(1)(3),9(1)(2)降阶，10(1)(2)性质， 18(1)-(5) 伴随阵， 21(1)(2)行列式求逆
2.4 克莱姆法则	12(1), 13

初等行变换求解线性方程组(非齐次) 当系数矩阵是方阵时

非齐次线性方程组: $Ax=b$

$$Ax=b\text{ 有解}\Leftrightarrow r(A)=r(A,b)\begin{cases}=n,\text{ 有唯一解 } |A|\neq 0\\ <n,\text{ 有无穷多解 } |A|=0\end{cases}$$

$$Ax=b\text{ 无解}\Leftrightarrow r(A)<r(A,b)\text{ 有矛盾方程 } |A|=0$$

$$\overset{(A,b)}{\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

$r(A)=r(A,b)=n=3$ 求唯一解 $|A|\neq 0$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A)=r(A,b)=2<n=3$ $|A|=0$

求通解

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

$r(A)=2<r(A,b)=3$ $|A|=0$

→ 矛盾方程

（12, 11分）

非齐次方程组求解

已知4元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

(1) 计算行列式 $|A|$;

(2) 当实数 a 为何值时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，并求其通解.

（12, 11分）

已知4元线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

(1) 计算行列式 $|A|$;

解:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}-a\cdot\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$$

（12, 11分）

已知4元线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\boxed{|A|=1-a^4}$$

$|A|=0,\ r(A)<n$

$$\begin{cases}r(A)=r(A,b)<n, & \text{无穷多解}\\ r(A)<r(A,b), & \text{无解}\end{cases}$$

(2) 当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，并求其通解.

解：当 $|A|=1-a^4=0$ 时，即 $a=1$,或 $a=-1$时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解或无解两种情况.

1) 当 $a=1$时，因为 $r(A)=3<r(A,b)=4$，所以方程组 $Ax=b$ 无解.

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&-1&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&1&1&-2\end{pmatrix}\to\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}}_{\text{阶梯阵}}$$

（12, 11分）

$$A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

(2) 当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，并求其通解.

解：当 $|A|=1-a^4=0$ 时，即$a=1$,或$a=-1$时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解或无解两种情况.

2) 当$a=-1$时，因为 $r(A)=r(A,b)=3<4$，所以$Ax=b$ 有无穷解.

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&-1&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&-1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行阶梯阵

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1&x_2&x_3&x_4&\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_4\\x_2=x_4-1\\x_3=x_4\end{cases}$$

行简化阶梯阵

（12, 11分）

$$A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

(2) 当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，并求其通解.

解：当 $|A|=1-a^4=0$ 时，即$a=1$,或$a=-1$时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解或无解两种情况.

2）当$a=-1$时，因为 $r(A)=r(A,b)=3<4$，所以$Ax=b$ 有无穷解.

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_4\\x_2=x_4-1\\x_3=x_4\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=c\\x_2=c-1\\x_3=c\\x_4=c\end{cases}$$

通解：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ 其中c为任意常数.

（10, 11分）

已知3元线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有2个不同的解，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

(1) 求 λ, a;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

（10, 11分）

已知3元线性方程组 $Ax=b$ 有2个不同的解，其中

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

(1) 求λ, a;

解：因为 $Ax=b$ 有2个不同的解，既有无穷多解，所以 $|A|=0$

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-1)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$$

$$\Rightarrow \lambda=1 \text{ 或 } \lambda=-1$$

（10, 11分）

已知3元线性方程组 $Ax=b$ 有2个不同的解，其中

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

(1) 求λ, a;

解： 因为 $Ax=b$ 有2个不同的解，所以 $|A|=0 \Rightarrow \lambda=1$ 或 $\lambda=-1$

当 $\lambda=1$ 时，$r(A)<r(A,b)$　　$Ax=b$ 无解

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

（10, 11分）

已知3元线性方程组 $Ax=b$ 有2个不同的解，其中

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

$r(A)=r(A,b)=2<3,$

方程组有无穷多解

(2) 求方程组 $Ax=b$ 的通解.

解：因为 $Ax=b$ 有2个不同的解，所以 $|A|=0 \Rightarrow \lambda=1$ 或 $\lambda=-1$

无解

当 $\lambda=-1$ 时，

阶梯阵

$$(A,b)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

当 $a=-2$ 时，

$$\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & -3/2\\ 0 & 1 & 0 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 3/2\\ 0 & 1 & 0 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

行简化阶梯阵

（10, 11分）

已知3元线性方程组 $Ax=b$ 有2个不同的解，其中

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

$r(A)=r(A,b)=2<3,$

方程组有无穷多解

(2) 求方程组 $Ax=b$ 的通解.

解：因为 $Ax=b$ 有2个不同的解，所以 $|A|=0\Rightarrow\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$

无解

当 $\lambda=-1, a=-2$ 时，

$$(A,b)\to\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 3/2\\ 0 & 1 & 0 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}\quad \begin{cases}x_1=x_3+3/2\\ x_2=-1/2\end{cases}\to\begin{cases}x_1=c+3/2\\ x_2=\quad -1/2\\ x_3=c\end{cases}$$

通解：$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3/2\\ -1/2\\ 0\end{pmatrix}$$ 其中c为任意常数

（04, 4分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$|A|=3$，矩阵$B$满足 $ABA^*=2BA^*+E$，则 $|B|=$ $\underline{\frac{1}{9}}$

解：

$A^*A=|A|E=3E$ 用A右乘两端有

$$ABA^*=2BA^*+E\Rightarrow AB\underline{A^*A}=2B\underline{A^*A}+A\Rightarrow AB(3E)=2B(3E)+A$$

$$\Rightarrow 3AB=6B+A\Rightarrow 3AB-6B=A\Rightarrow 3(A-2E)B=A$$

$$\Rightarrow |3(A-2E)||B|=|A|\ \Rightarrow 3^3|A-2E||B|=3\Rightarrow |B|=\frac{1}{9}$$

$$|A-2E|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=(-1)(-1)=1$$

（93，3分）

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 均为4维列向量，

$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$， $|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$，则 $|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|=$ $-m+n$

解：用行列式的性质，有

$$|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|=|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1|+|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_2|$$

$$=-|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|-|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2|$$

$$=-m+|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|$$

$$=-m+n$$

（06, 4分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, 矩阵$B$满足 $BA=B+2E$， 则$|B|=$ ______

解： $BA=B+2E \Rightarrow BA-B=2E$

$$\Rightarrow B(A-E)=2E$$

$$\Rightarrow |B||A-E|=|2E|=4$$

$$\Rightarrow |B|=2$$

$$A-E=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A-E|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2$$

（98, 3分）

设A, B均为n阶矩阵，$|A|=2$, $|B|=-3$, 则 $\left|2A^*B^{-1}\right| =$ $-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$

解：

$$\left|2A^*B^{-1}\right| = 2^n\left|A^*B^{-1}\right| = 2^n\left|A^*\right|\left|B^{-1}\right| = 2^n|A|^{n-1}\frac{1}{|B|} = 2^n 2^{n-1}\frac{1}{-3} = -\frac{2^{2n-1}}{3}$$

本题所用知识点：

$|kA| = k^n|A|$

$|AB| = |A|\cdot|B|$

$AA^* = |A|E$, $\quad |A|\left|A^*\right| = \left||A|E\right| = |A|^n$

$\left|A^*\right| = |A|^{n-1}, (|A| \neq 0)$

$\left|BB^{-1}\right| = |B|\cdot\left|B^{-1}\right| = 1 \quad \left|B^{-1}\right| = \dfrac{1}{|B|}$

（12, 4分）

设A为3阶矩阵，$|A|=3$，若交换A的第1行与第2行得矩阵B，则$|BA^*|=$ <u>-27</u>

解：用行列式的性质.

$$|BA^*|=|B||A^*|=-3\times 3^2=-27$$

$$|B|=-|A|=-3$$

$$|A^*|=|A|^{n-1}=3^2,(|A|\neq 0)$$

（03, 4分）

设三阶方阵A, B满足 $A^2B-A-B=E$，若 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$,

则 $|B|=$________

解： $A^2B-A-B=E$

$$\Rightarrow A^2B-B=E+A$$

$$\Rightarrow (A^2-E)B=E+A$$

$$\Rightarrow \underline{(A+E)}(A-E)B=\underline{A+E}$$

$$\Rightarrow (A-E)B=E$$

$$\Rightarrow |A-E||B|=1$$

$$A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-2&0&2\end{pmatrix},$$

$$|A+E|=3\begin{vmatrix}2&1\\-2&2\end{vmatrix}\neq 0,$$ 所以$A+E$是可逆的

（03, 4分）

设三阶方阵A, B满足 $A^2B-A-B=E$，若 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，

则 $|B|=$ $\underline{\quad\frac{1}{2}\quad}$

解：$A^2B-A-B=E$

$\Rightarrow A^2B-B=E+A$

$\Rightarrow (A^2-E)B=E+A$

$\Rightarrow \underline{(A+E)}(A-E)B=\underline{A+E}$

$\Rightarrow (A-E)B=E$

$\Rightarrow |A-E||B|=1$

$\Rightarrow |B|=\dfrac{1}{2}$

$$A-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{pmatrix},$$

$$|A-E|=\begin{vmatrix}0&1\\-2&0\end{vmatrix}=2$$