深圳北理莫斯科大学 — 离散数学 (2022 年春季学期) 期末考试

考试时间：2022 年 7 月 4 日，9:00-11:00

1. 简答题（写出答案即可，不必解释，也不必写出计算过程. 30 分，每小问 3 分）

   (1) 公式 $\neg((p \wedge q) \to q)$ 的类型是（即，是永真式，永假式，可满足式中的哪一种）？

   (2) 把公式 $(p \vee q) \to r$ 化成与之等值且仅包含 $\{\neg, \wedge\}$ 中联结词的公式.

   (3) 如果集合 A 中有 n 个元素，那么 $|P(A) \times P(A)|$ 有多少个元素?

   (4) 实数集与无理数集的对称差集，是可数集还是不可数集?

   (5) 集合 $A = \{2, 4, 6\}$ 上的关系 $R = \{\langle 2, 2\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 4, 6\rangle\}$ 不是等价关系. 需要补充哪些元素才成为等价关系?

   (6) 集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的关系 $R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, d\rangle\}$. 写出 $R \circ R$.

   (7) 写出循环群 $(\mathbb{Z}_{24}, +)$ (其中 $+$ 为模 24 的加法) 的一个 6 阶子群.

   (8) 写出置换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$ 的逆元.

   (9) 画出一个有 4 个顶点的简单图 G，要求满足如下条件：（i）有哈密尔顿回路，（ii）没有欧拉回路，（iii）G 不是树.

   (10) 设 A 是图 $G = (V, E)$ 的邻接矩阵，$u, v \in V$，则 $A^2 + A^4$ 在 u 对应的行与 v 对应的列处的元素表示的意思是?

2. （10 分，每小问 5 分）

   (1) 求命题公式 $(p \vee \neg q) \to (p \wedge r)$ 的主析取范式.

   (2) 在自然推理系统中构造下面推理的证明. 前提：$(p \wedge q) \to r$，$\neg r \vee s$，$\neg s$，p. 结论：$\neg q$.

3. （10 分，画哈斯图 5 分，其余 5 分）画出下面偏序集的哈斯图，并求集合 A 的极大元，极小元，最大元，最小元. 其中，

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$
$$R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle a, f\rangle, \langle b, e\rangle, \langle c, e\rangle, \langle d, e\rangle, \langle d, f\rangle\} \cup I_A.$$

4. （10 分，每小问 5 分）设 $G = (V, E)$ 是一个简单无向图，有 3 条边，有 1 个顶点度数是 3，有 1 个顶点度数是 0，其余顶点度数都是 1.

   (1) 用握手定理求出图的顶点个数，画出图 G，并写出 G 的连通分支个数.

   (2) 画出与图 G 有相同的顶点数和边数，但是与 G 不同构的所有简单无向图，并写出每个图的连通分支个数.

5. （10 分，每小问 5 分）给定带权图如图1.

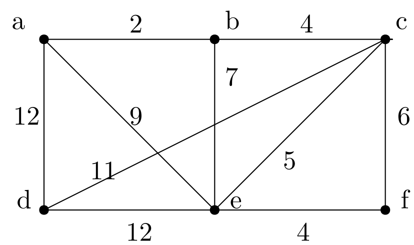

图 1

(1) 写出 G 的关联矩阵.

(2) 求 G 的最小生成树.

6.（10 分，求编码 7 分，计算平均码长 3 分）假设某个通信系统只使用字母 a, b, c, d, e, f, g, h，每个字母出现频率如表1：

表 1: 字母出现的频率

a	b	c	d	e	f	g	h
25%	20%	19%	9%	9%	8%	5%	5%

求这些字母的 Huffman 编码（即：最佳前缀码），并计算平均码长.

注：设字母 $a, b, \ldots, h$ 的编码长度分别是 $\ell_a, \ell_b, \ldots, \ell_h$，则平均码长根据如下公式计算：

$$25\% \times \ell_a + 20\% \times \ell_b + \cdots + 5\% \times \ell_h.$$

7.（20 分，每小问 5 分）设

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) 证明 G 关于矩阵乘法构成一个群.

(2) 运用拉格朗日定理，指出 G 的子群可能的阶.

(3) 求 G 中每个元素的阶.

(4) G 与群 $(\mathbb{Z}_4, +)$（此处 $+$ 是模 4 的加法）同构吗？如果同构，给出一个同构映射；如果不同构，说明原因.