第3章 微分中值定理与导数的应用

第1节 微分中值定理

条件：1. 函数在 $[a,b]$ 上连续。2. 函数在 (a,b) 可导

- 罗尔定理
  若 $f(a)=f(b)$ 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$ 成立
- 拉格朗日中值定理
  存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$ 成立
- 柯西中值定理
  存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ 成立

第2节 洛必达法则

对于 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式有： $\lim\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}$

第3节 泰勒公式

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$
其中 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$
当 $x_0=0$ 时为麦克劳林公式。

第4节 函数的单调性和凹凸性

- 单调性
  当 $f'(x)\geq 0$ 时， $f(x)$ 单调递增。
  当 $f'(x)\leq 0$ 时， $f(x)$ 单调递减。
- 凹凸性
  当 $f''(x)\geq 0$ 时， $f(x)$ 为凹函数。
  当 $f''(x)\leq 0$ 时， $f(x)$ 为凸函数。
  当 $f''(x_0)=0$ 且 x_0 左右两侧临近异号，则 x_0 为拐点。

第5节 函数的极值与最大值最小值

$f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)<0$ 时 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值。
$f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)>0$ 时 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值。

第6节 函数图形的描绘

用函数的单调性及凹凸性来描绘函数图形。

第7节 曲率

曲率 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ 曲率半径 $\rho=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$