§4.2 一阶逻辑公式及其解释

一阶逻辑语言：描述一阶逻辑的形式语言

非逻辑符号：个体常项符号、函数符号、谓词符号

逻辑符号：个体变项符号、量词符号、联结词符号、圆括号、逗号

定义 设L是一个非逻辑符号集合，由L生成的一阶语言$\mathscr{L}$的字母表包括下述符号：

非逻辑符号

（1）个体常项 $a, b, c, \cdots, a_i, b_i, c_i, \cdots$

（2）个体变项 $x, y, z, \cdots, x_i, y_i, z_i, \cdots$

（3）函数符号 $f, g, h, \cdots, f_i, g_i, h_i \cdots$

逻辑符号

（4）谓词符号 $F, G, H, \cdots, F_i, G_i, H_i, \cdots$

（5）量词符号 $\forall, \exists$

（6）联结词符号 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

（7）其它 (,) , ,

定义 $\mathscr{L}$ 的项定义如下：

（1）个体常项符号与个体变项符号是项；

（2）若 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是任意 n 元函数，$t_1, t_2, \cdots, t_n$是任意n个项，则$\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n)$也是项；

（3）所有的项都是有限次使用（1），（2）得到的。

定义 设$R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是$\mathscr{L}$的任意 n (≥ 1)元谓词，$t_1, t_2, \cdots, t_n$是$\mathscr{L}$的任意n个项，则称$R(t_1, t_2, \cdots, t_n)$是$\mathscr{L}$的**原子公式**。

定义 $\mathscr{L}$的**合式公式**(**谓词公式**)定义如下：

（1）原子公式是合式公式；

（2）若A是合式公式，则$\neg A$也是；

（3）若A, B是合式公式，则$A \vee B, A \wedge B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$ 也是；

（4）若A是合式公式，则$\forall xA$, $\exists xA$也是；

（5）所有的合式公式都是有限次使用(1)~(4)得到。

定义 在$\forall xA$与$\exists xA$中，称x为**指导变元**，A为量词的**辖域**，A中x的所有出现称为**约束出现**，A中不是约束出现的所有个体变项称为**自由出现**。

例 考察下述谓词公式中的辖域、指导变元、自由出现、约束出现情况：

$$\forall x(F(x, y)\rightarrow G(x, y))$$

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(y))\rightarrow \exists y(H(x)\wedge L(x, y, z))$$

用$A(x_1, x_2,\cdots,x_n)$表示自由出现$x_1, x_2,\cdots, x_n$的公式，△表示量词，$\triangle x_1A(x_1, x_2,\cdots,x_n)$中，$x_2, \cdots, x_n$自由出现。

定义 不含自由出现的个体变项的谓词公式称为**闭式**。

例 对谓词公式$\exists xH(f(x), a)$，指定个体域为实数集$\mathbb{R}$，$f(x)=2x+1$，$a=0$，$H(x, y)$表示关系$x=y$，则该公式的含义为：存在实数x，使得$2x+1=0$。

这是真命题。

定义 设$\mathscr{L}$是由L生成的一阶语言，$\mathscr{L}$的**解释** I由下面 4 部分组成。

(*a*) 非空个体域 D_I

(*b*) D_I中一些特定元素的集合 $\{\overline{a_1},\overline{a_2},\cdots,\overline{a_i},\cdots\}$

(*c*) D_I上特定函数集合 $\{\overline{f}_i^n \mid i,n\geq 1\}$

(*d*) D_I上特定谓词集合 $\{\overline{F}_i^n \mid i,n\geq 1\}$

注 在$\mathscr{L}$的解释 I中，对每一个个体常项符号指定个体域中的具体个体，对每一个函数符号指定个体域上的具体函数，对每一个谓词符号指定个体域上的具体谓词，均称为解释。对每一个个体变项符号x指定个体域中的具体值，称为赋值。

例 在给定解释和赋值下，确定下列谓词公式的真值。

$D_I = N$，$\overline{a} = 0$, $\overline{f}(x, y) = x + y$，$\overline{g}(x, y) = x \cdot y$，

$\overline{F}(x, y) : x = y$，$x, y, z$的赋值分别为1, 2, 3。

（1）$F(f(x, y), g(x, y))$： $1 + 2 = 1 \cdot 2$ 　假命题

（2）$F(f(x,a), y) \to F(g(x, y), z)$：

$$(1 + 0 = 2) \to (1 \cdot 2 = 3)$$

真命题

（3）$\neg F(g(x, y), g(y, z))$： $1 \cdot 2 \neq 2 \cdot 1$ 　真命题

（4）$\forall x F(g(x,y),z)$： $\forall x(x\cdot 2=3)$ 假命题

（5）$\forall x F(g(x,a),x)\to F(x,y)$：

$$\forall x(x\cdot 0=x)\to(1=2)$$

真命题

（6）$\forall x F(g(x,a),x)$： $\forall x(x\cdot 0=x)$ 假命题

（7）$\forall x\forall y F(f(x,a)y)\to F(f(y,a),x))$：

$$\forall x\forall y((x+0=y)\to(y+0=x))$$

真命题

（8）$\forall x\forall y\exists z F(f(x,y),z)$：

$$\forall x\forall y\exists z(x+y=z)$$

假命题

（9）$\exists x F(f(x,x),g(x,x))$： $\exists x(x+x=x\cdot x)$

定理 闭式在任何解释下都变成命题。

注：① 非闭式在解释下也可成为命题。

② 解释也可通过直接给定谓词函数的值来进行。

例 根据给定的二元谓词变项的解释，确定下列谓词公式的真值：$D_I=\{0,1\}$, $F(0,0)=0$, $F(1,1)=1$, $F(0,1)=F(1,0)=0$。

（1） $\forall x\exists yF(x,y)$ （2） $\exists x\forall yF(x,y)$

（3） $\forall x\forall yF(x,y)$ （4） $\exists x\exists yF(x,y)$

定义 设A是谓词公式，若A在任何解释下均为真，则称A为**永真式**（逻辑有效式）；若A在任何解释下均为假，则称A为**矛盾式**（永假式）；若至少存在一个解释使A为真，则称A为**可满足式**。

定义 设A_0是含命题变项$p_1, p_2, \cdots, p_n$的命题公式，$A_1, A_1, \cdots, A_n$是n个谓词公式。用A_i处处代替A_0中的$p_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，所得谓词公式A称为A_0的**代换实例**。

定理 重言式（矛盾式）的代换实例都是永真式（矛盾式）。

例 判断下列谓词公式的类型

（1）$\forall xF(x)\rightarrow(\exists x\exists yG(x,y)\rightarrow\forall xF(x))$

因为上述公式是命题公式 $p\rightarrow(q\rightarrow p)$的代换实例，而后者是重言式，所以上述公式是永真式。

（2）$\neg(\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$

因为上述公式是命题公式 $\neg(p\rightarrow q)\wedge q$的代换实式，而后者是矛盾式式，所以上述公式是矛盾式。

注 （1）非代换实例也可以是永真式或矛盾式

（2） 可满足式的代换实例不一定也是可满足式

例 判断下列公式的类型

（1）$\forall xF(x) \to \exists xF(x)$

（2）$\exists x(F(x) \land G(x)) \to \forall yG(y)$

解（1）取个体域D_I为全总个体域

若$\exists xF(x)$为假，则存在个体$x_0 \in D_I$，使得$F(x_0)$为假。此时，无法满足对任意 $x \in D_I$，都有$F(x_0)$为真，即$\forall xF(x)$为假。这样，蕴涵式$\forall xF(x) \to \exists xF(x)$的真值为真。由于这里没有涉及具体的解释，所以该谓词公式为永真式。

（2）分别给出两个解释：

① D_I：自然数集，

$F(x)$：x是偶数，　　$G(x)$：$x \geq 2$

则公式 $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \rightarrow \forall y G(y)$的解释为

存在自然数x((x是偶数)并且($x>2$))

$\rightarrow$ 对任意自然数y有($y>2$)

在此解释下，上述蕴涵式前件真、后件假，故该式为假。

② D_I： 自然数集，

$F(x)$：$x^2=x$， $G(x)$：$x\geq 2$

则公式 $\exists x(F(x)\wedge G(x))\rightarrow\forall yG(y)$的解释为

存在自然数$x((x^2=x)$并且$(x\geq 2))$

$\rightarrow$ 对任意自然数$y(y>2)$

在此解释下，上述蕴涵式前件假、后件假，故该式为真。于是，原谓词公式为非永真的可满足式。▌

小结：

1. 熟练掌握一阶逻辑的符号化

个体，个体域，谓词，量词

2. 熟练掌握谓词公式的概念

谓词公式的构造，辖域，自由、约束出现，闭式

3. 掌握谓词公式的类型判断

谓词公式的解释，代换实例