第三章 线性方程组

3.1 向量的线性相关性

3.2 向量组的秩

3.3 齐次线性方程组解的结构

3.4 非齐次线性方程组解的结构

教学计划：4次课-12学时

复习

3.1 和 3.2 解决的核心问题

向量空间中任意向量的表示问题 ← 极大无关组

(1)向量与向量组的关系：$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\ \beta\in R^n$

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m \Leftrightarrow span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$$

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$$

(2)向量组的线性相关：$A:\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，若存在一组不全为零的数

$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$

线性无关：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0\rightarrow k_1=k_2\cdots=k_m=0$

(3)向量组的极大无关组：$A:\underline{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r},\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_m$

A_0 线性无关　A 中任意向量可由 A_0 线性表示

(4)向量组的秩：

(5)极大无关组的计算：

定理小结 **复习**

定理3.3 向量 β 可由 $A: \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$ 有解.

定理3.6 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow \overset{k_1}{x_1}\alpha_1 + \overset{k_2}{x_2}\alpha_2 + \cdots + \overset{k_s}{x_s}\alpha_s = 0$ 有非零解.

线性无关 $\Leftrightarrow$ 只有零解.

判断线性相关性：

向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\quad \cdots,\alpha_s=\begin{pmatrix}a_{1s}\\a_{2s}\\\vdots\\a_{ns}\end{pmatrix},$

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 有非零解.

线性无关 $\Leftrightarrow$ 只有零解.

$\Downarrow$

$$A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2s}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{ns}\end{pmatrix}\\\begin{matrix}\alpha_1\quad&\alpha_2\quad&\quad&\alpha_s\end{matrix}\end{array}$$

方程个数n = 维数，

变量个数s = 向量个数

(1) 当 $n<s$， 线性相关.

(2) 当 $n=s$，

当 $|A|\neq 0$，线性无关.

当 $|A|=0$，线性相关.

$|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s|$

练习1

判断向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$ 的线性相关性。

解：

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\5&4&3\end{vmatrix} \\ \alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3 \end{array}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&-6&-12\end{vmatrix}=(-6)(-1)\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}=0$$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$

当 $|A|\neq 0$，线性无关

当 $|A|=0$，线性相关

练习2

判断向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\6\\10\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\-3\\-5\end{pmatrix}$的线性相关性。

解:

向量维数3 < 向量个数4,

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关。

练习3

判断向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-6\\4\\-10\end{pmatrix}$ 的线性相关性。

解：

$$\begin{array}{c}\begin{vmatrix}3&4&-6\\1&-1&4\\-1&3&-10\end{vmatrix}\\ \begin{matrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{matrix}\end{array}=\begin{vmatrix}0&7&-18\\1&-1&4\\0&2&-6\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}7&-18\\2&-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&18\\2&6\end{vmatrix}=42-36=6\neq 0$$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

当 $|A|\neq 0$，线性无关

当 $|A|=0$，线性相关

第三章 线性方程组

3.2 向量组的秩

- 向量组的极大线性无关组
- 向量组的秩
- 向量组的秩与矩阵秩的关系

1. 向量组的极大线性无关组

定义3.6 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_m$

若向量组 A 的一个部分组 A_0: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$满足

(1) $A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关;

(2) A 中的任意向量均可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示.

则称 A_0: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为向量组A的一个极大线性无关向量组,

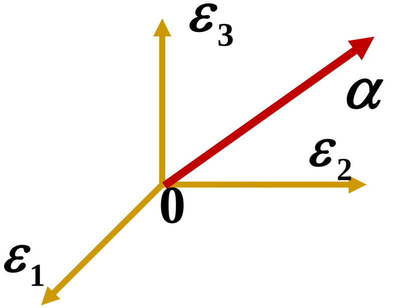
简称为极大(最大)无关组.

问题1：向量组的极大无关组所含向量个数都一样吗？

问题2：向量组的极大无关组的作用是什么？

问题3：如何求向量组的极大无关组？

向量组极大无关组的作用：



例：求 R^3的极大无关组

(1) $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 是R^3的一个极大无关组.

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 线性无关.

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\alpha$ 线性相关.

所以 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是的一个 R^3 极大无关组.

$$\alpha=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+k_3\varepsilon_3$$

例：求 R^3的极大无关组

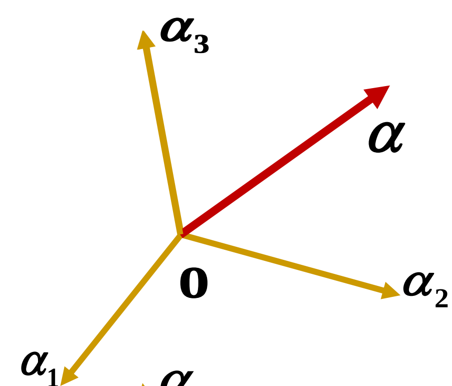
表示法唯一性

(2) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 也是 R^3 的一个极大无关组.

表示全部向量

$\because \begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-2$ $\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha$ 线性相关



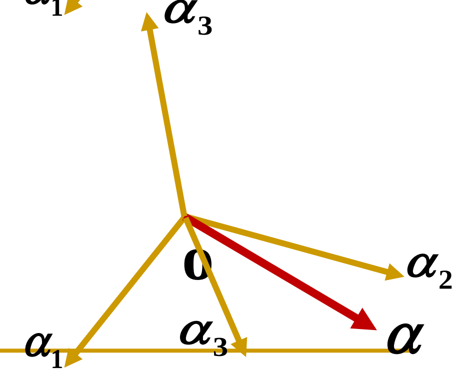
$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

非齐次方程组

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 $|A|\neq 0$ 有唯一解

线性相关 $|A|=0$ 有无穷解

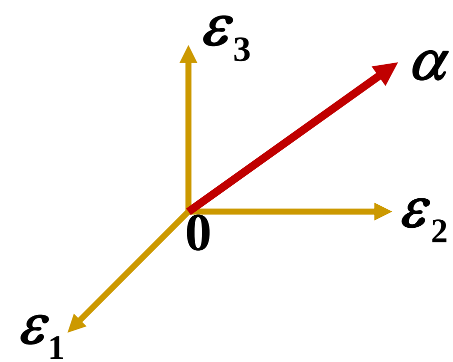
$\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}=R^2$



向量组极大无关组的作用：---问题2

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$ 是 R^3 的一个极大无关组.

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$



$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3 \qquad R^3=\mathrm{span}\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$$

R^3 任一向量 α 均可由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 线性表示，且表示法唯一.

作用： 可以用极大无关组中有限个向量表示一个向量空间中任意向量，且表示法唯一.

1. 向量组的极大线性无关组

定义3.6 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_m$

若向量组 A 的一个部分组 A_0: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$满足

(1) $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关;

(2) A 中的任意向量均可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示.

则称 A_0: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为向量组A的一个极大线性无关向量组,

简称为极大(最大)无关组.

问题1: 向量组的极大无关组所含向量个数都一样吗？

问题2: 向量组的极大无关组的作用是什么？

问题3: 如何求向量组的极大无关组？

第三章 线性方程组

3.2 向量组的秩

- 向量组的极大线性无关组
- 向量组的秩
- 向量组的秩与矩阵秩的关系

2. 向量组的秩

向量组的极大线性无关组不唯一，但有如下定理:

定理3.7 向量组的极大线性无关组所含向量的个数相同.---问题1

证明：略

定义3.7 向量组极大无关组所含向量的个数称为向量组的秩.

全体 3 维向量构成的向量空间 R^3 的秩是 3

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$ 是 R^3 的一个极大无关组.

定义3.7 向量组极大无关组所含向量的个数称为向量组的秩.

定理3.8 向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ 其秩等于向量组所含向量个数.

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$$

证明:

$\Rightarrow$ 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关,

则该向量组的极大无关组就是其本身,

故向量组的秩为s, 即为向量个数.

$\Leftarrow$若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩等于向量的个数s,

则该向量组的极大无关组由 s 个向量构成,

故为其本身, 从而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

定义3.7 向量组极大无关组所含向量的个数称为向量组的秩.

定理3.8 向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ 其秩等于向量组所含向量个数.

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$$

推论 向量组线性相关 $\Leftrightarrow$ 其秩小于向量组所含向量个数.

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$$

理解: $A:\underline{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r},\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_s$

A_0 线性无关 A中任意向量可由A_0线性表示

设 A_0 是极大无关组, 且 $r<s$

$\alpha_{r+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+0\alpha_{r+2}\cdots+0\alpha_s$ —— 线性关系

$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_s$ 线性相关

定理小结

定理3.3　向量β可由$A:\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$线性表示

$\Leftrightarrow$ $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$ 有解.

定理3.6　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$有非零解.

线性无关$\Leftrightarrow$只有零解.

定理3.8　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$

线性相关$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$

1. 向量组的极大线性无关组

定义3.6 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_m$

若向量组 A 的一个部分组 A_0: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$满足

(1) $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关;

(2) A 中的任意向量均可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示.

则称 A_0: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为向量组A的一个极大线性无关向量组,

简称为极大(最大)无关组.

问题1：向量组的极大无关组所含向量个数都一样吗？

问题2：向量组的极大无关组的作用是什么？

问题3：如何求向量组的极大无关组？

第三章 线性方程组

3.2 向量组的秩

- 向量组的极大线性无关组
- 向量组的秩
- 向量组的秩与矩阵秩的关系
    - 矩阵的行秩与列秩
    - 矩阵的子式

1. 矩阵的行秩与列秩

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

矩阵A的行向量组的秩

矩阵A的列向量组的秩

矩阵A的秩

定义3.8 矩阵A的行向量组的秩称为矩阵A的行秩,

矩阵A的列向量组的秩称为矩阵A的列秩.

定理3.9

设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{r1}\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{r2}\end{pmatrix},\cdots,\alpha_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{rm}\end{pmatrix}$，对 α_j 添加若干分量后得到 β_j

$$\beta_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{r1}\\a_{r+1,1}\\\vdots\\a_{s1}\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{r2}\\a_{r+1,2}\\\vdots\\a_{s2}\end{pmatrix},\cdots,\beta_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{rm}\\a_{r+1,m}\\\vdots\\a_{sm}\end{pmatrix}$$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关 $\longrightarrow$ $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关

定理3.9

例：

$$\begin{array}{ccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}$$ 线性无关 $\longrightarrow$ $$\begin{array}{ccc}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0\\1\\0\\3\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0\\0\\1\\4\end{pmatrix}\end{array}$$ 线性无关

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$ 线性无关 $\longrightarrow$ $$\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$ 线性无关

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$ 线性无关 $\longrightarrow$ $$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\4\\7\end{pmatrix}$$ 线性无关

定理3.9 向量组线性无关，添加分量所得向量组仍线性无关.

设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{r1}\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{r2}\end{pmatrix},\cdots,\alpha_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{rm}\end{pmatrix}$，对$\alpha_j$添加若干分量后得到$\beta_j$

$$\beta_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{r1}\\a_{r+1,1}\\\vdots\\a_{s1}\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{r2}\\a_{r+1,2}\\\vdots\\a_{s2}\end{pmatrix},\cdots,\beta_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{rm}\\a_{r+1,m}\\\vdots\\a_{sm}\end{pmatrix}$$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关 $\longrightarrow$ $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关

定理小结

定理3.3 向量β可由$A:\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$ 有解.

定理3.6 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关 $\Leftrightarrow$ $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$有非零解.

线性无关 $\Leftrightarrow$ 只有零解.

定理3.8 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关 $\Leftrightarrow$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$

线性相关 $\Leftrightarrow$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$

定理3.9 向量组线性无关，添加分量所得向量组仍线性无关.

例1 求矩阵A的行秩, 列秩及 $r(A)=3$

行简化阶梯阵

解

$$A=\begin{array}{c|c}\begin{pmatrix}1&1&2&2&2\\2&0&-1&1&2\\1&3&0&-2&4\\2&1&1&2&3\end{pmatrix}&\begin{array}{c}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\\\gamma_4\end{array}\end{array}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&-1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\begin{matrix}(1,1,\ 2)\\(2,0,-1)\\(1,3,\ 0)\end{matrix}$ 线性无关 $\Rightarrow$ $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 线性无关,

γ_4 可由 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 线性表示,

$$\gamma_4=\frac{11}{14}\gamma_1+\frac{4}{7}\gamma_2+\frac{1}{14}\gamma_3$$

所以 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 是矩阵A的行向量组的极大无关组,

所以矩阵A的行秩 $=3=r(A)$

定理3.10 $A \xrightarrow{\text{行变换}} B$, $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)$,

$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6)$,

则 A, B 对应的列向量有相同的线性关系.

注释：

1) 若 β_1,β_2,β_3 线性无关,

则对应的 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

2) 若 β_j 可由 β_1,β_2,β_3 线性表示, $j=4,5,6$

则对应的 α_j 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且系数相同.

设有 $\beta_4=k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3$

$$\Rightarrow \alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$$

定理3.10 $A \xrightarrow{\text{行变换}} B,\quad A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n),$

$$B=(\beta_1,\cdots,\beta_i,\cdots,\beta_j,\cdots,\beta_n).$$

则 A, B 对应的列向量有相同的线性关系.

注释:

1) 若 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$ 线性无关,

则对应的 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关.

2) 若 β_j 可由 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$ 线性表示,

则对应的 α_j 可由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表示,且系数相同.

设有 $\beta_j = k_1\beta_{i_1} + k_2\beta_{i_2} + \cdots + k_r\beta_{i_r}$

$$\Rightarrow \alpha_j = k_1\alpha_{i_1} + k_2\alpha_{i_2} + \cdots + k_r\alpha_{i_r}$$

定理小结

定理3.3　向量 β 可由 $A:\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$ 有解.

定理3.6　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 有非零解.

线性无关 $\Leftrightarrow$ 只有零解.

定理3.8　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$

线性相关 $\Leftrightarrow$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$

定理3.9　向量组线性无关，添加分量所得向量组仍线性无关.

定理3.10　$A\xrightarrow{\text{行变换}}B$, 则 A, B 对应列向量有相同的线性关系.

例1 求矩阵A的行秩, 列秩 及 $r(A)=3$

解

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&2&2\\2&0&-1&1&2\\1&3&0&-2&4\\2&1&1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&-1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4&\alpha_5\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{ccccc}\beta_1&\beta_2&\beta_3&\beta_4&\beta_5\end{array}$$

行简化阶梯阵

β_1,β_2,β_3 线性无关, $\beta_4=\beta_1-\beta_2+\beta_3$, $\beta_5=\beta_1+\beta_2+0\beta_3$.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, $\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_3$.

β_4,β_5 可由β_1,β_2,β_3 线性表示,

α_4,α_5 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是矩阵 A 的列向量组的极大无关组,

所以矩阵A的列秩 $=3=r(A)$

结论： 矩阵A的行秩 $=r(A)=$ 列秩

定理3.11 矩阵的列秩 = 行秩 = $r(A)$

定理1.12 $r(A)=r(A^T)$

证明: 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,

$$r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=r\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}=r(A^T)$$

定理小结

定理3.3　向量β可由$A:\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$ 有解.

定理3.6　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关 $\Leftrightarrow$ $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$有非零解.

线性无关 $\Leftrightarrow$ 只有零解.

定理3.8　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关 $\Leftrightarrow$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$

线性相关 $\Leftrightarrow$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$

定理3.9　向量组线性无关，添加分量所得向量组仍线性无关.

定理3.10　$A\xrightarrow{\text{行变换}}B$, 则 A, B 对应的列向量有相同的线性关系.

定理3.11　矩阵的列秩 = 行秩 = $r(A)$　　$r(A)=r(A^T)$

定理3.10 $A \xrightarrow[\text{行简化阶梯阵}]{\text{行变换}} B$ $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n)$,

$B=(\beta_1,\cdots,\beta_i,\cdots,\beta_j,\cdots,\beta_n)$.

则 A, B 对应的列向量有相同的线性关系.

注释:

1) 若 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$ 线性无关,

则对应的 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关.

2) 若 β_j 可由 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$ 线性表示,

则对应的 α_j 可由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表示, 且系数相同.

设有 $\beta_j = k_1\beta_{i_1} + k_2\beta_{i_2} + \cdots + k_r\beta_{i_r}$

$$\Rightarrow \alpha_j = k_1\alpha_{i_1} + k_2\alpha_{i_2} + \cdots + k_r\alpha_{i_r}$$

解决问题: 如何求一个向量组的极大无关组?

例2 求向量组 $\alpha_1=(1,2,1,2)^T,\alpha_2=(1,0,3,1)^T,$

$\alpha_3=(2,-1,0,1)^T,\alpha_4=(2,1,-2,2)^T,\alpha_5=(2,2,4,3)^T$

的一个极大无关组，并把其余列用极大无关组线性表示.

解：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5)\xrightarrow{\text{初等行变换}} B$（行简化阶梯阵）

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&2&2\\2&0&-1&1&2\\1&3&0&-2&4\\2&1&1&2&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&-1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

$B=(\beta_1,\beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\beta_5)$

β_1,β_2,β_3 线性无关，$\beta_4=\beta_1-\beta_2+\beta_3$，$\beta_5=\beta_1+\beta_2$.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2$.

所以 β_1,β_2,β_3 是向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$ 的极大无关组,

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的极大无关组

（99, 8分）

例3 已知向量组 $\alpha_1=(1,1,1,3)^T$, $\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T$,
$\alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T$, $\alpha_4=(-2,-6,10,p)^T$.

(1) p为何值时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,
此时将 $\alpha=(4,1,6,6)^T$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示.

(2) p为何值时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关,
此时求出向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和极大线性无关组.

解: 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha)$,

$$=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 10 & 6 \\ 3 & 1 & p+2 & p & 6 \end{pmatrix}$$

(1) p为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，

此时将 $\alpha=(4,1,6,6)^T$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 1 & -3 & 2 & -6 & 1\\ 1 & 5 & -1 & 10 & 6\\ 3 & 1 & p+2 & p & 6\end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{\text{行变换}} B\ (\text{阶梯阵}) \xrightarrow{\text{行变换}} C\ (\text{行简化阶梯阵})$$

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha)\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & p-2 & -3-p\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccccc}\beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4, & \beta\end{array}\end{array}=B$$

当 $|A|\neq 0$，线性无关

当 $|A|=0$，线性相关

当 $p\neq 2$ 时，向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关，

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关.

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha)\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & p-2 & -3-p\end{pmatrix}=B$$

$p\neq 2$

$$\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \boxed{\frac{3p+4}{p-2}}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \boxed{1}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{\frac{3+p}{2-p}}\end{pmatrix}=C\\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4,\ \ \gamma\end{array}$$

于是

$$\gamma=2\gamma_1+\frac{3p+4}{p-2}\gamma_2+\gamma_3+\frac{3+p}{2-p}\gamma_4.$$

$$\alpha=2\alpha_1+\frac{3p+4}{p-2}\alpha_2+\alpha_3+\frac{3+p}{2-p}\alpha_4.$$

(2) p为何值时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关,

此时求出向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和极大线性无关组.

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\quad)\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -2 & \\ 0 & -2 & -1 & -4 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & p-2 & \end{pmatrix}=B\\ \beta_1,\quad \beta_2,\quad \beta_3,\quad \beta_4,\quad \beta\end{array}$$

当 $|A|\neq 0$, 线性无关

当 $|A|=0$, 线性相关

当 $p=2$ 时, 向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关, 且 β_1,β_2,β_3

是其极大线性无关组.

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

是其极大无关组, 秩 $=3$.

复习

定理1.8 n阶方阵A可逆 $\Leftrightarrow$ $r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0.$

定理3.12 n阶方阵A可逆 $\Leftrightarrow$ 其行(列)向量组线性无关.

证明 n阶方阵A可逆 $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$ =矩阵的列秩

$\Leftrightarrow$ 列向量组线性无关.

结论： n阶方阵A可逆 $\Leftrightarrow$ $r(A) = n.$

$\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

$\Leftrightarrow$ 其行(列)向量组线性无关.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

定理小结

定理3.3　向量 β 可由 $A:\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$ 有解.

定理3.6　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 有非零解.

线性无关 $\Leftrightarrow$ 只有零解.

定理3.8　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$

线性相关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$

定理3.9　向量组线性无关，添加分量所得向量组仍线性无关.

定理3.10　$A\xrightarrow{\text{行变换}}B$, 则 A, B 对应的列向量有相同的线性关系.

定理3.11　矩阵的列秩 = 行秩 = $r(A)$　$r(A)=r(A^T)$

定理3.12　n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow$ 其行(列)向量组线性无关 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

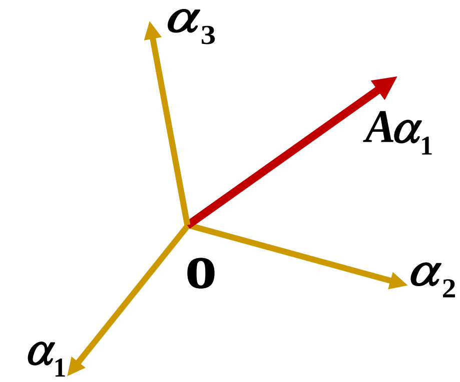
$\Leftrightarrow r(A)=n$

例4 设A为3阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为3维列向量，已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且 $A\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3$，$A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$， 求$|A|$.

解 由于 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)$

$$=(\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2)$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$



从而 $|A|\cdot|\alpha_1,\cancel{\alpha_2},\alpha_3|=|\alpha_1,\cancel{\alpha_2},\alpha_3|\cdot\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，从而 $|A|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=2.$

所以 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\neq 0,$

小结

重要结论：

1）矩阵的列秩 = 矩阵的行秩 = 矩阵的秩.

求向量组秩的方法:

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\xrightarrow{\text{行变换}}B\ (\text{阶梯阵}).$$

B的非零行数是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的秩.

2）求向量组的极大无关组的方法:

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\xrightarrow{\text{行变换}}B\ (\text{行简化阶梯阵}).$$

由B的列确定$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的极大无关组和秩,

并可将其余列向量用极大无关组线性表示.

第三章 线性方程组

3.2 向量组的秩

- 向量组的极大线性无关组
- 向量组的秩
- 向量组的秩与矩阵秩的关系
  - 矩阵的行秩与列秩
  - 矩阵的子式

2. 矩阵的子式

定义3.9 在 $m\times n$ 矩阵A中， 任取k行与k列（$k\le m,k\le n$），位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在A中的位置次序而得到的k阶行列式，称为矩阵A的k阶子式.

例如

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ 5 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

A的2阶子式:

$$D_2=\begin{vmatrix}0 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=0-9=-9\neq 0$$

矩阵A的2, 3列线性无关. 矩阵A的1, 2行也线性无关.

结论：非零子式所在的行(列)向量组线性无关

2. 矩阵的子式

定义3.9 在 $m \times n$ 矩阵A中，任取k行与k列（$k \le m, k \le n$），位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在A中的位置次序而得到的k阶行列式，称为矩阵A的k阶子式.

例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

A的2阶子式

结论： 矩阵A中有 $C_3^2 \times C_4^2 = 18$ 个2阶子式

矩阵A中有 $C_4^3 = 4$ 个3阶子式

第三章 线性方程组

3.2 向量组的秩

- 向量组的极大线性无关组
- 向量组的秩
- 向量组的秩与矩阵秩的关系
  - 矩阵的行秩与列秩
  - 矩阵的子式

第三章 线性方程组

小结

3.1和3.2讨论的主要问题

计算1

(1)向量与向量组的关系：$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\ \beta\in R^n$

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m \Leftrightarrow \beta\in span(A)$$

(2)向量组的线性相关：$A:\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，若存在一组不全为零的数

$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$

线性无关：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0\rightarrow k_1=k_2\cdots=k_m=0$

(3)向量组的极大无关组：$A:\underline{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r},\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_m$

A_0 线性无关　A可由A_0线性表示

作用：$A=\mathrm{span}\{A_0\}$

(4)向量组的秩：向量组极大无关组所含向量的个数

(5)极大无关组的计算：解决

计算2

第三章　作业

授课内容	习题二
3.1(1)向量定义与运算	1,2 向量运算， 1(1)(2)（P162 习题三）
3.1(2) 向量与向量组的关系	3,4 线性表示
3.1(3) 线性相关性	5(1)(2)(3), 6, 9,10,12,13线性相关与线性无关
3.2(1)(2)极大无关组，秩	22(2)(3), 23极大无关组
3.3 齐次方程组解的结构	31(1)(3)
3.4 非齐次方程组解的结构	32(1)(2),33,40,44

（11,11分）

设向量组 $(1)\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $(2)\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示；

(1) 求a的值；

(2) 将 β_1,β_2,β_3用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

（11,11分）

设向量组 $(1)\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $(2)\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示；$a=5$

(1) 求a的值；

解：

因为 $$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}=1\neq0$$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

因为(1)不能由(2)线性表示，所以(2)必线性相关.

$$\therefore|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&2&a-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\2&a-3\end{vmatrix}=a-5=0$$

$$\Rightarrow a=5$$

（11,11分）

设向量组 (1) $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 (2) $\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示；$a=5$

线性无关

线性相关

(2) 将 β_1,β_2,β_3 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

解：

β_1,β_2,β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，即 $\begin{cases}\beta_1=k_{11}\alpha_1+k_{21}\alpha_2+k_{31}\alpha_3\\ \beta_2=k_{12}\alpha_1+k_{22}\alpha_2+k_{32}\alpha_3\\ \beta_3=k_{13}\alpha_1+k_{23}\alpha_2+k_{33}\alpha_3\end{cases}$

$$\Rightarrow(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}\end{pmatrix},$$

因为矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆，

$$\Rightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}\end{pmatrix},$$

令：

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{pmatrix}$$

$$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&5\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}B=\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}\end{pmatrix}$$

（11,11分）

设向量组 $(1)\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $(2)\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示；$a=5$

(2) 将 β_1,β_2,β_3 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示. $A^{-1}B=?$

解： $(A\,|\,B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\,|\,A^{-1}B)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-3r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right)\qquad A^{-1}B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}2&1&5\\4&2&10\\-1&0&-2\end{pmatrix}$$

$E\qquad A^{-1}B$

（11,11分）

设向量组 $(1)\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $(2)\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示;

(2) 将 β_1,β_2,β_3 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

解:

β_1,β_2,β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，即 $\begin{cases}\beta_1=k_{11}\alpha_1+k_{21}\alpha_2+k_{31}\alpha_3\\ \beta_2=k_{12}\alpha_1+k_{22}\alpha_2+k_{32}\alpha_3\\ \beta_3=k_{13}\alpha_1+k_{23}\alpha_2+k_{33}\alpha_3\end{cases}$

$\Rightarrow(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}\end{pmatrix}$, 因为矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$可逆,

$$A^{-1}B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}2&1&5\\4&2&10\\-1&0&-2\end{pmatrix}\Rightarrow(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&1&5\\4&2&10\\-1&0&-2\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-1\alpha_3\\ \beta_2=1\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_3\\ \beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3\end{cases}$$

（05,9分）

设向量组 (1) $\alpha_1=(1,1,a)^T,\alpha_2=(1,a,1)^T,\alpha_3=(a,1,1)^T$

向量组(2)$\beta_1=(1,1,a)^T,\beta_2=(-2,a,4)^T,\beta_3=(-2,a,a)^T$， 确定常数$a$，使向量组 (1)能由(2)线性表示，但向量组 (2)不能由(1)线性表示.

解：因为 (1)能由(2)线性表示，所以 (2)线性无关.

$$\therefore 0\neq|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\1&a&a\\a&4&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\0&a+2&a+2\\0&4+2a&3a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+2&a+2\\4+2a&3a\end{vmatrix}$$

$$=(a+2)\begin{vmatrix}1&1\\4+2a&3a\end{vmatrix}=(a+2)(a-4)\Rightarrow a\neq-2\text{且}a\neq4$$

所以当$a\neq-2,a\neq4$时， (2)线性无关， (1)能由(2)线性表示.

（05,9分）

设向量组 (1) $\alpha_1=(1,1,a)^T,\alpha_2=(1,a,1)^T,\alpha_3=(a,1,1)^T$

向量组(2)$\beta_1=(1,1,a)^T,\beta_2=(-2,a,4)^T,\beta_3=(-2,a,a)^T$，确定常数$a$，使向量组 (1)能由(2)线性表示，但向量组 (2)不能由(1)线性表示.

解：当 $a\neq-2,a\neq4$时，(2)线性无关.

因为 (2)不能由(1)线性表示，所以 (1)线性相关.

$$\therefore 0=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&a\\0&a-1&1-a\\0&1-a&1-a^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-1&1-a\\1-a&1-a^2\end{vmatrix}$$

$$=(1-a)\begin{vmatrix}a-1&1-a\\1&1+a\end{vmatrix}=(1-a)^2\begin{vmatrix}-1&1\\1&1+a\end{vmatrix}=(1-a)^2(-2-a)\Rightarrow a=1或a=-2$$

所以当 $a=1或a=-2$时，(1)线性相关.

（05,9分）

设向量组 (1) $\alpha_1=(1,1,a)^T,\alpha_2=(1,a,1)^T,\alpha_3=(a,1,1)^T$

向量组(2)$\beta_1=(1,1,a)^T,\beta_2=(-2,a,4)^T,\beta_3=(-2,a,a)^T$， 确定常数$a$，使向量组 (1)能由(2)线性表示，但向量组 (2)不能由(1)线性表示.

解：

当 $a\neq-2,a\neq4$时， (2)线性无关，(1)能由(2)线性表示.

当$a=-2$或$a=1$时， (1)线性相关，(2)不能由(1)线性表示.

当 $a=1$ 时， (1)能由(2)线性表示，

(2)不能由(1)线性表示.