§7.6 等价关系与划分

定义 设R是非空A上的二元关系，若R是自反的、对称的、传递的，则称R为A上的**等价关系**。

对等价关系R，若$<x, y>\in R$，则称x**等价于**y，有时可记为 $x \sim y$。

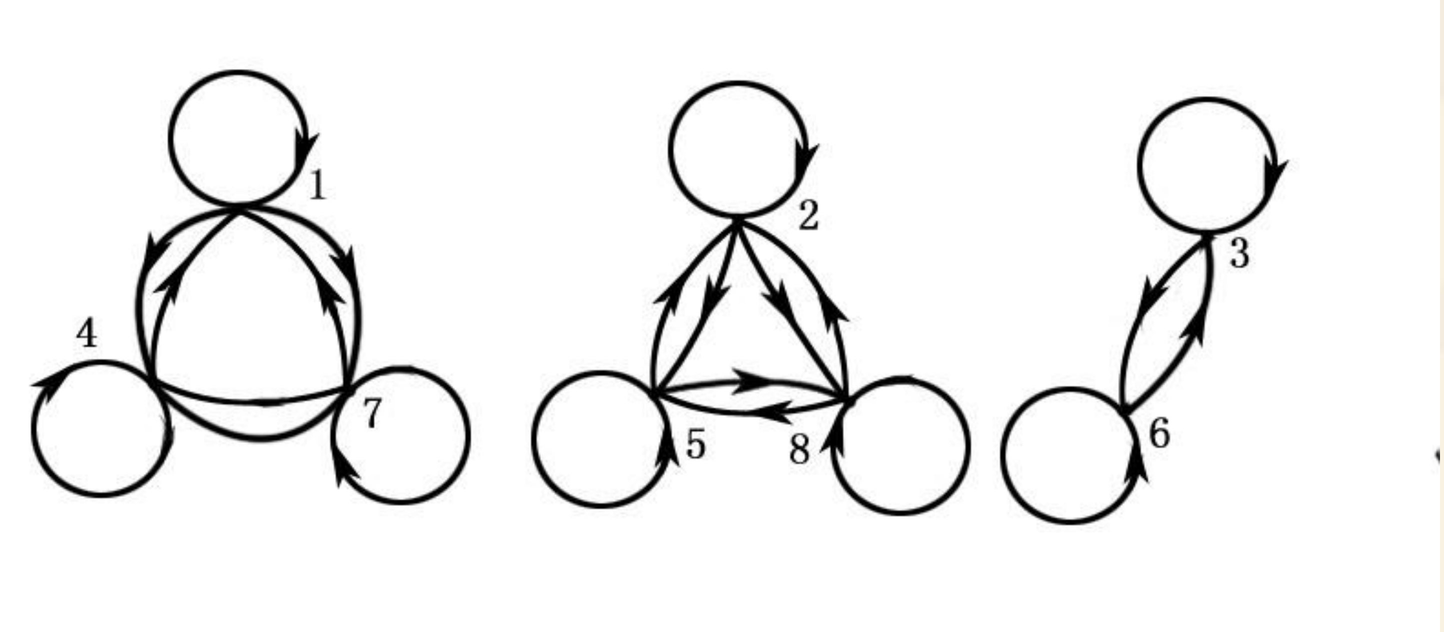
例 设$A=\{1,2,\cdots,8\}$，令

$$R=\{<x, y> \mid x, y\in A \wedge x\equiv y \ (\mathrm{mod}3)\}$$

则R是A上的等价关系，称为**模3的同余关系**。

根据等价关系R，集合A对被分成三个子集

$$\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6\}$$



定义 设R是A上的等价关系，对$\forall x \in A$，令

$$[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge x \sim y \}$$

称之为x关于R的**等价类**，简称x的等价类，也可简记为$[x]$或$\bar{x}$。

对上述模3同余关系，各元素的等价类为

$$[1]=[4]=[7]=\{1,4,7\}$$

$$[2]=[5]=[8]=\{2,5,8\}$$

$$[3]=[6]=\{3,6\}$$

定理 设R是非空集A上的等价关系，则

（1）对$\forall x\in A$，$[x]$非空；

（2）对$\forall x, y\in A$，若xRy，则$[x]=[y]$；

（3）对$\forall x, y\in A$，若$x\not{R}y$，则$[x]\cap[y]=\varnothing$；

（4）$\cup\{[x] \mid x\in A\}=A$。

例 在$\mathbb{Z}$上，定义二元关系 ~

$$x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{n}$$

则 ~ 是等价关系，且 ~ 把$\mathbb{Z}$分为下述同余类(等价类)：

$$\overline{0} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{1} = \{nz + 1 \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{2} = \{nz + 2 \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\overline{n-1} = \{nz + (n-1) \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

定义 设R是A上的等价关系，称

$$A/R=\{[x]\mid x\in A\}$$

为A关于R的**商集**。

例 设$A=\{1,2,\cdots,8\}$，R是A上的模3同余关系，则A关于R的商集为

$$A/R=\{[x]\mid x\in A\}=\{[1],[2],[3]\}$$

$$=\{\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6\}\}$$

定义 设A是非空集合，$\pi \subseteq P(A)$，若

（1）$\varnothing \notin \pi$；

（2）$\forall x \forall y(x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

（3）$\bigcup \pi = A$。

则称π是A的一个**划分**，称π中的元素为A的**划分块**。

例 设$A=\{1,2,\cdots,8\}$，R是A上的模3同余关系，则A关于R的商集即为集合A的一个划分

$$A/R = \{[1],[2],[3]\} = \{\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6\}\}$$

例 设$A=\{a,b,c,d\}$，判断下述集合哪些是A的划分？

$$\pi_1=\{\{a,b,c\},\{d\}\} \qquad \pi_2=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$$

$$\pi_3=\{\{a,b,c,d\},\{d\}\} \qquad \pi_4=\{\{a,b\},\{c\}\}$$

$$\pi_5=\{\{a,b\},\varnothing,\{c,d\}\} \qquad \pi_6=\{\{a,b,c\},\{d,\{d\}\}\}$$

定理 设R是A上的等价关系，则 A/R 是A的一个划分。反之，给定A的一个划分π，必存在A上的等价关系R，使 $A/R=\pi$ 。

例 设$A=\{a,b,c,d\}$，π_1, π_2是A的两个划分

$$\pi_1=\{\{a,b,c\},\{d\}\} \qquad \pi_2=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$$

则π_1, π_2对应A的两个等价关系

$$R_1=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle\}\cup I_A$$

$$R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}\cup I_A$$

例 已知$A=\{1,2,3\}$，问A上有几个等价关系？