第三章 多维随机变量及其分布

第一节 二维随机变量及其联合分布

第二节 边缘分布 $f(x,y) \Rightarrow f_X(x),\ f_Y(y)$

第四节 相互独立的随机变量

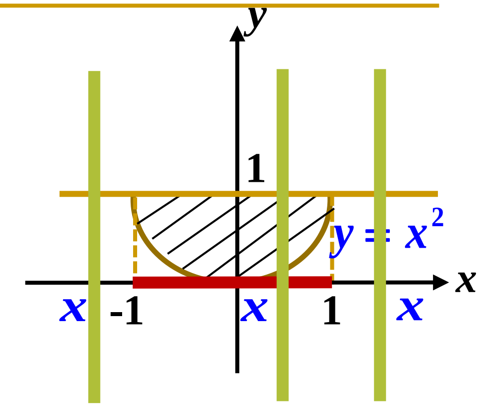
第五节 两个随机变量的函数的分布

教学计划：3次课-9学时

复习

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 21/4\,x^2y, & x^2\le y\le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



求：边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$.

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$

当 $-1<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2y\mathrm{d}y=\frac{21}{4}x^2\int_{x^2}^{1}y\mathrm{d}y$

$$=\frac{21}{8}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}=\frac{21}{8}x^2(1-x^4)$$

当 $x\le -1$ 或 $x\ge 1$ 时，$f(x,y)=0$，$f_X(x)=0$

$$\therefore\quad f_X(x)=\begin{cases}\frac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

1. 投影
2. 积分（分区间）
3. 画线（确定上下限）

第三章 多维随机变量及其分布

第一节 二维随机变量及其联合分布

第二节 边缘分布

第四节 相互独立的随机变量

第五节 两个随机变量的函数的分布

教学计划：3次课-9学时

研究的问题：

在一维随机变量中讨论了：已知随机变量 X 的分布，如何求其函数 $Y=g(X)$ 的分布。

若X是离散型，X的分布律 $\longrightarrow$ Y的分布律

若X是连续型， $f_X(x)$ $\longrightarrow$ $f_Y(y)$ $f_Y(y)=F_Y'(y)$

在二维随机变量中将讨论：已知随机变量(X,Y)的联合分布，如何求出它们的函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布。

若(X,Y)是连续型，$f(x,y)$ $\longrightarrow$ $f_Z(z)$ $f_Z(z)=F_Z'(z)$

一. $Z=X+Y$ 的分布(和的分布)

二. $U=\max(X,Y)$ 和 $V=\min(X,Y)$ 的分布

第三章 多维随机变量及其分布

第五节 两个随机变量的函数的分布

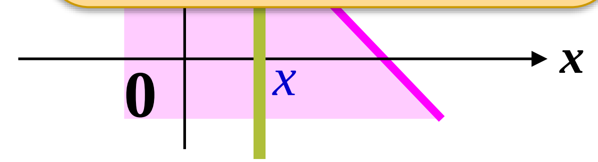
- 两个随机变量和的分布
- $U = \max(X,Y)$ 及 $V = \min(X,Y)$的分布

一. $Z=X+Y$ 的分布（

$$f_Z(z)=F_Z'(z)$$

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z} g(u)du$$

$$F_Z'(z)=g(z)$$



设 (X, Y)的概率密度为 $f(x, y)$，求 $f_Z(z)$

$Z = X + Y$ 的分布函数为:

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$$

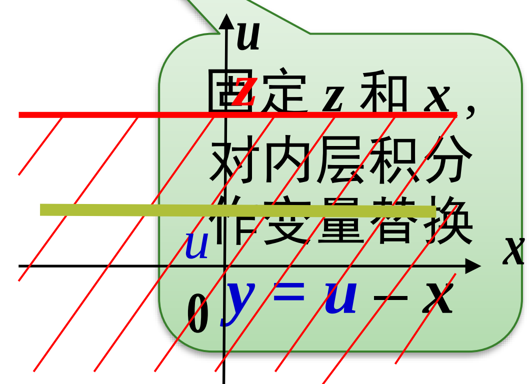
$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

固定 z 和 x，对内层积分作变量替换 $y=u-x$

交换积分次序

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,[\int_{-\infty}^{z} f(x,u-x)\mathrm{d}u]$$

$$=\int_{-\infty}^{z}[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u-x)\mathrm{d}x}_{g(u)}]\mathrm{d}u$$



$y: z-x,\ -\infty$

$u: z\qquad -\infty$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x$$

由 X 和 Y 的对称性，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y$

一. $Z = X+Y$ 的分布(和的分布)

$$\boxed{f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)}$$

1. (卷积)公式法：

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$， 求 $f_Z(z)$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx \xlongequal{\text{独立}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx = f_X * f_Y$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\,dy \xlongequal{\text{独立}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy = f_X * f_Y$$

2. 分布函数法：

(1) 求 $F_Z(z)$

(2) $f_Z(z) = F_Z'(z)$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

例1. 若X 和 Y 相互独立，具有相同的概

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其　它}\end{cases}$$

求：$Z=X+Y$ 的概率密度

解1 用卷积公式：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ z-1\le x\le z\end{cases}$$

求被积函数取值非零的区域：

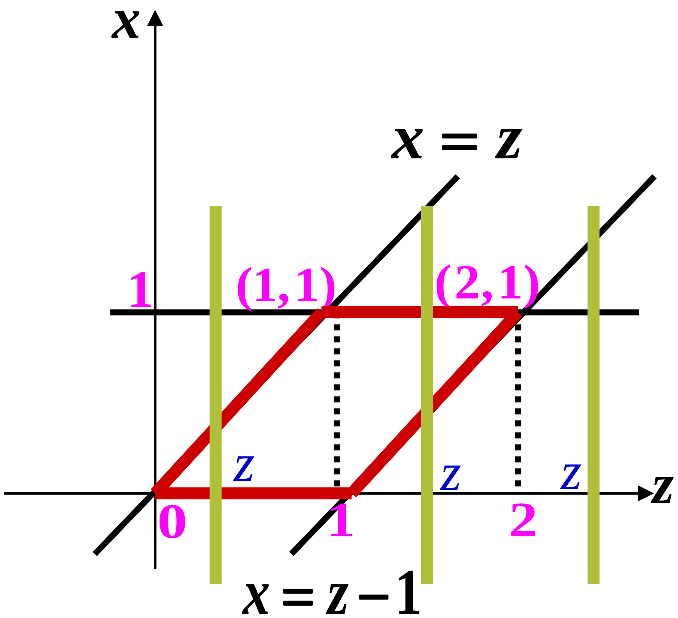
$$f(x)f(z-x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1,\\ & z-1\le x<z\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

1. 投影
2. 积分（分区间）
3. 画线（确定上下限）

★ $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,f(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_0^z \mathrm{d}x = z & 0\le z<1\\ \int_{z-1}^1 \mathrm{d}x = 2-z & 1\le z<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



$$f(x)\,f(z-x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1,\\ & z-1\le x<z\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

1. 投影
2. 积分（分区间）
3. 画线（确定上下限）

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

例1. 若X 和 Y 相互独立，具有相同的概率密度：　$f_Z(z)=F_Z'(z)$

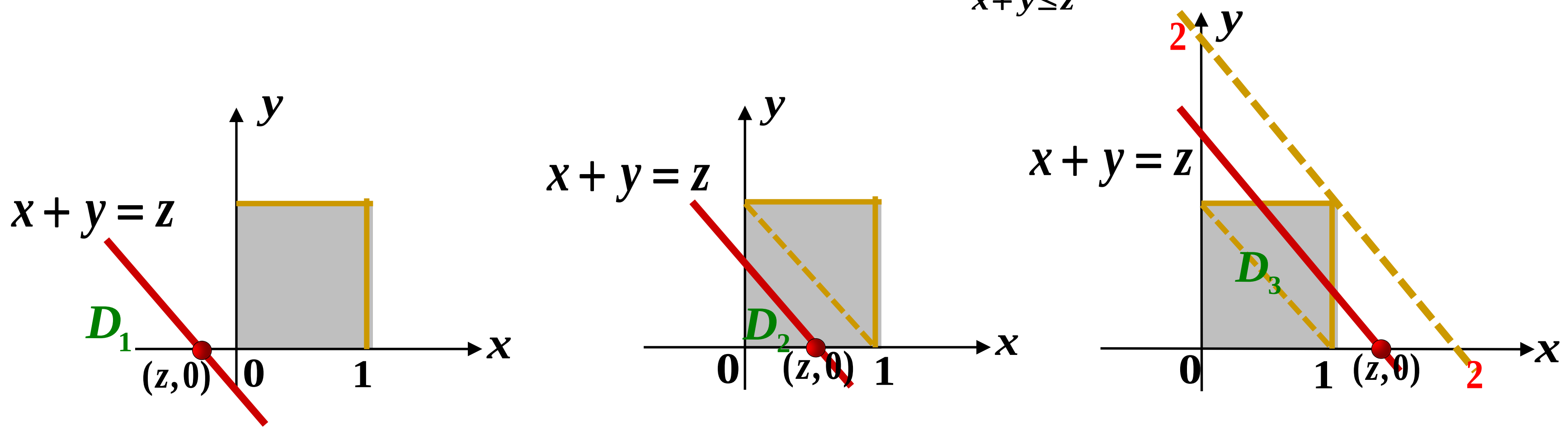
$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其\quad 它\end{cases}$$

求：$Z=X+Y$ 的概率密度

解2 分布函数法：因为X,Y 相互独立，所以

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



例1. 若X 和 Y 相互独立，具有相同的概率密度： $f_Z(z)=F_Z'(z)$

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其\quad 它\end{cases}$$ 求：$Z=X+Y$ 的概率密度

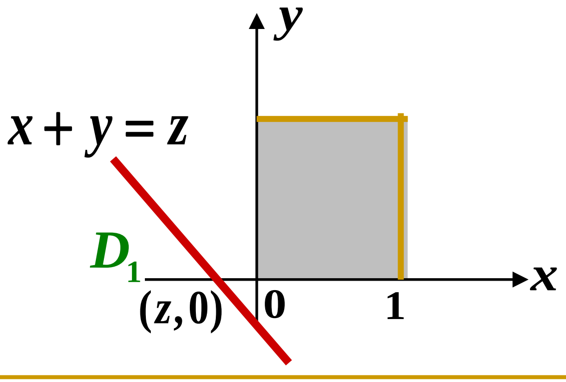
解2 分布函数法：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当 $z\le 0$ 时，

$$=0$$



$$f_Z(z)=F_Z'(z)=0$$

例1. 若X 和 Y 相互独立，具有相同的概率密度： $f_Z(z)=F_Z'(z)$

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其　它}\end{cases}$$

求：$Z=X+Y$ 的概率密度

解2 分布函数法：

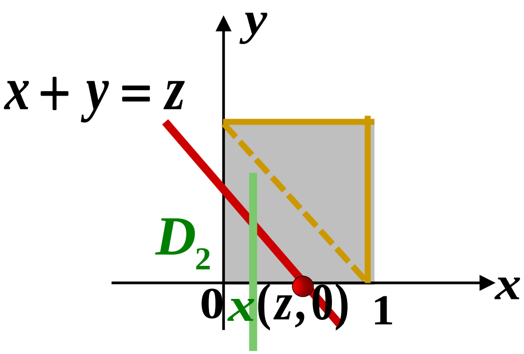
$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=z^2-\int_0^z x\mathrm{d}x$$

当$0\le z\le 1$时，

$$=\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{z-x}1\cdot\mathrm{d}y=\int_0^z (z-x)\mathrm{d}x=\int_0^z z\mathrm{d}x-\int_0^z x\mathrm{d}x$$



$$=z\int_0^z \mathrm{d}x-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^z=z^2-\frac{1}{2}z^2=\frac{1}{2}z^2$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=z$$

例1. 若X 和 Y 相互独立，具有相同的概率密度： $f_Z(z)=F_Z'(z)$

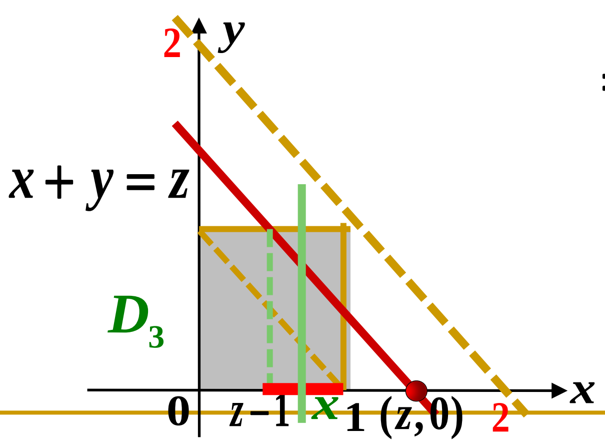
$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其\quad 它\end{cases}$$ 求：$Z=X+Y$ 的概率密度

解2 分布函数法：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当$1\le z\le 2$时，



$$=1-\int_{z-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{z-x}^{1}1\cdot\mathrm{d}y=1-\frac{1}{2}(2-z)^2$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=2-z$$

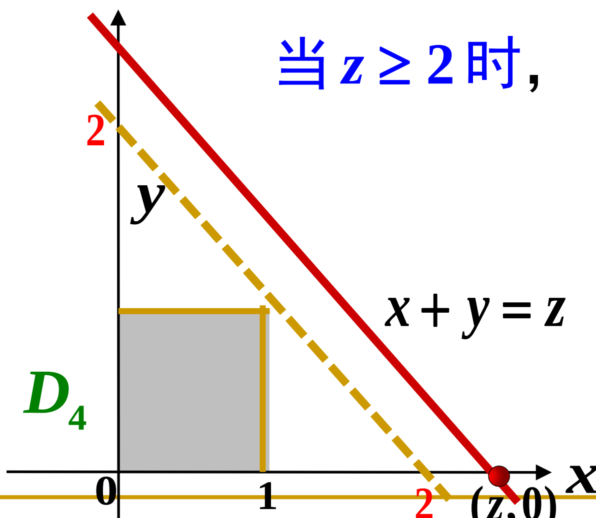
例1. 若X 和 Y 相互独立，具有相同的概率密度： $f_Z(z)=F_Z'(z)$

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其\quad 它\end{cases}$$ 求：$Z=X+Y$ 的概率密度

解2 分布函数法：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



当$z\ge 2$时，

$$=\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1}} 1\cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=0$$

例1. 若X 和 Y 相互独立，具有相同的概率密度： $f_Z(z)=F_Z'(z)$

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其\quad 它\end{cases}$$ 求：$Z=X+Y$ 的概率密度

解2 分布函数法：

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0, & 当z\le 0, z\ge 2时,\\ z, & 当0\le z\le 1时,\\ 2-z, & 当1\le z\le 2时,\end{cases}$$

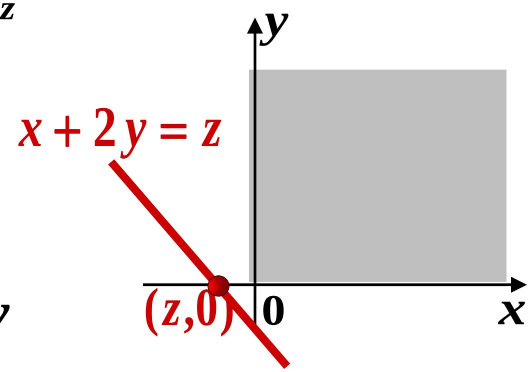
例2. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为： $f_Z(z)=F_Z'(z)$

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求：$Z=X+2Y$的概率密度

解： 分布函数法：

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+2Y\le z)=\iint\limits_{x+2y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



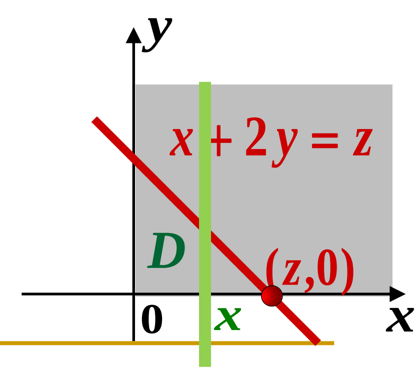
当$z\le 0$时，$F_Z(z)=0$

当$z>0$时，

$$F_Z(z)=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{\frac{z-x}{2}}2e^{-(x+2y)}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^z e^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{z-x}{2}}e^{-2y}\mathrm{d}2y=\int_0^z e^{-x}(1-e^{x-z})\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^z e^{-x}\mathrm{d}x-\int_0^z e^{-z}\mathrm{d}x=\int_0^z e^{-x}\mathrm{d}x-ze^{-z}$$



例2. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为： $f_Z(z)=F_Z'(z)$

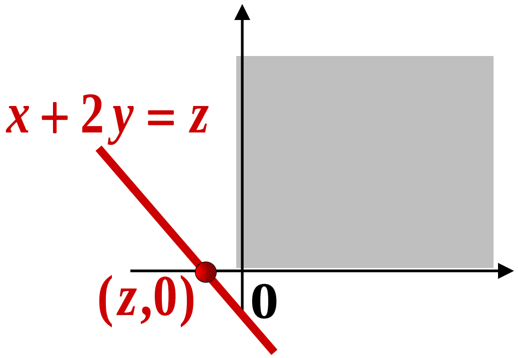
$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求：$Z=X+2Y$ 的概率密度

解： 分布函数法：

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+2Y\le z)=\iint\limits_{x+2y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

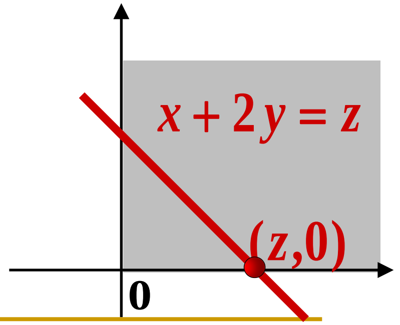
当$z\le 0$时, $F_Z(z)=0$



当$z>0$时, $F_Z(z)=\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)}\mathrm{d}y$

$$=\int_0^z e^{-x}\mathrm{d}x-ze^{-z}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=e^{-z}-(e^{-z}-ze^{-z})=ze^{-z}$$



$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}ze^{-z}, & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

例3 设 X 和 Y是相互独立的随机变量，且

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

求：$Z = X + Y$ 的概率密度 $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

解： 卷积公式：

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{[(z-x)-\mu_2]^2}{2\sigma_2^2}}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(z-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} e^{-\frac{[z-(\mu_1+\mu_2)]^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}$$

结论

- 若随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$
  $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则它们的和仍服从正态分布，
  即：$X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

- 推广到 n 个相互独立正态随机变量之和，即：

  $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2) \quad i=1,2,3,\cdots n$ 且它们相互独立，
  则它们的和仍服从正态分布。即有：
  $$X_1+X_2+\cdots+X_n \sim N(\mu_1+\mu_2+\cdots\mu_n,\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2)$$

- 更一般的有：有限个相互独立的正态随机变量的的线性组合仍然服从正态分布。

$$k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_nX_n$$

$$\sim N(k_1\mu_1+k_2\mu_2+\cdots k_n\mu_n,k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2+\cdots+k_n^2\sigma_n^2)$$

结论 ➢推广到 n 个相互独立正态随机变量之和，即：

$X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2) \quad i=1,2,3,\cdots n$ 且它们相互独立，

则它们的和仍服从正态分布。即有：

$$X_1+X_2+\cdots+X_n \sim N(\mu_1+\mu_2+\cdots\mu_n,\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2)$$

➢更一般的有：有限个相互独立的正态随机变量的的线性组合仍然服从正态分布。

$$\overset{1}{k_1}X_1+\overset{-1}{k_2}X_2\cancel{+\cdots+k_nX_n}$$

$$\sim N(\overset{1}{k_1}\mu_1+\overset{-1}{k_2}\mu_2\cancel{+\cdots k_n\mu_n},\overset{1}{k_1^2}\sigma_1^2+\overset{-1}{k_2^2}\sigma_2^2\cancel{+\cdots+k_n^2\sigma_n^2})$$

例: $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\ X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ $\qquad$ $X_1, X_2 \sim N(1,4)$

$X_1-X_2 \sim N(\ \mu_1-\mu_2\ ,\sigma_1^2+\sigma_2^2\ )$ $\qquad$ $X_1-X_2 \sim N(\ 0\ ,\ 8\ )$

$2X_1-3X_2 \sim N(2\mu_1-3\mu_2,\ 4\sigma_1^2+9\sigma_2^2\ )$ $\qquad$ $2X_1-3X_2 \sim N(-1,52)$

第三章 多维随机变量及其分布

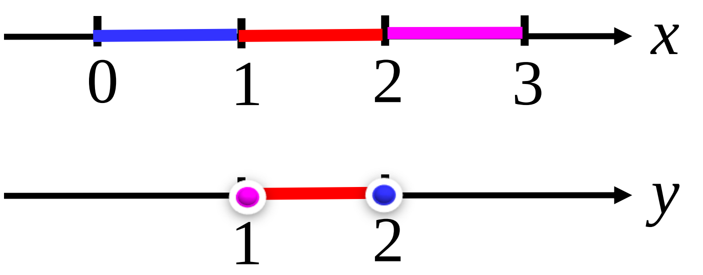
第五节 两个随机变量的函数的分布

- 两个随机变量和的分布
- $U=\max(X,Y)$及$V=\min(X,Y)$ 的分布

二. $U=\max(X,Y)$ 及 $V=\min(X,Y)$ 的分布

设随机变量X的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases} 1/9x^2, & 0<x<3 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

令随机变量 $Y=\begin{cases} 2, & X\le 1 \\ X, & 1<X<2 \\ 1, & X\ge 2 \end{cases}$



求随机变量U和V的表达式

$$U=\max\{X,Y\}=\begin{cases} 2, & X\le 1 \\ X, & 1<X<2 \\ X, & X\ge 2 \end{cases}=\begin{cases} 2, & X\le 1 \\ X, & X>1 \end{cases}$$

$$V=\min\{X,Y\}=\begin{cases} X, & X\le 1 \\ X, & 1<X<2 \\ 1, & X\ge 2 \end{cases}=\begin{cases} X, & X<2 \\ 1, & X\ge 2 \end{cases}$$

二. $U=\max(X,Y)$ 及 $V=\min(X,Y)$ 的分布

设X,Y是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为$F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$

求： $U=\max(X,Y)$ 及 $V=\min(X,Y)$ 的分布函数

解： 1. $U=\max(X,Y)$ 的分布函数

$$\boxed{F_X(x)=P(X\le x)}$$

$$\begin{aligned}F_U(z) &= P(U\le z)\\ &= P(X\le z, Y\le z)\\ &= P(X\le z)\cdot P(Y\le z)\\ &= F_X(z)\cdot F_Y(z)\end{aligned}$$

由独立性

$$F_U(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)$$

$$f_U(z)=F_U'(z)$$

设X，Y是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$

2. $V=\min(X,Y)$分布函数

$$\boxed{F_X(x)=P(X\le x)}$$

$$\begin{aligned}F_V(z)&=P(V\le z)\\&=1-P(V>z)\\&=1-P(X>z,Y>z)\\&=1-P(X>z)\cdot P(Y>z)\\&=1-[1-P(X\le z)]\cdot[1-P(Y\le z)]\\&=1-[1-F_X(z)]\cdot[1-F_Y(z)]\end{aligned}$$

$$F_V(z)=1-[1-F_X(z)]\cdot[1-F_Y(z)]\qquad f_V(z)=F_V'(z)$$

$U = \max(X, Y)$ $\quad F_U(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z)$

$V = \min(X, Y)$ $\quad F_V(z) = 1 - [1 - F_X(z)] \cdot [1 - F_Y(z)]$

注: ➢推广：$X_1, X_2, \cdots X_n$ 是 n个相互独立的随机变量，

它们的分布函数分别为：$F_{X_i}(x_i) = F(x) \cdot\cdot n$，则：

$U = \max(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 与 $V = \min(X_1, X_2 \cdots X_n)$

的分布函数分别为:

$$F_U(z) = F_{X_1}(z) \cdot F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z) = [F(z)]^n$$

$$F_V(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)] \cdot [1 - F_{X_2}(z)] \cdots [1 - F_{X_n}(z)]$$

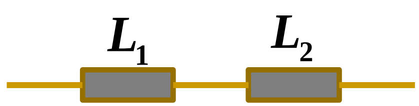
$$= 1 - [1 - F(z)]^n$$

例4. 设系统L由两个相互独立的子系统L_1, L_2联接而成，联接的方式分别为(1)串联, (2)并联，(3)备用(当L_1损坏时, L_2开始工作)，又设L_1, L_2, L的寿命分别是X, Y, Z，已知它们的概率密度分别是:

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

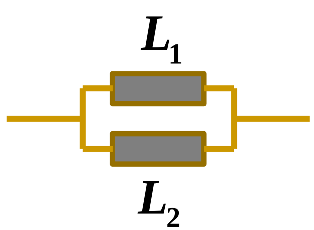
分别就以上三种方式写出L的寿命 Z 的概率密度.

解: (1)串联



$$Z=\min(X,Y)$$

(2)并联



$$Z=\max(X,Y)$$

(3)备用

$$Z=X+Y$$

(1)串联 $f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $f_Y(y)=$

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$$

解： $Z=\min(X,Y)$

$$F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

$$F_X(z)=\begin{cases}1-e^{-\alpha z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}\qquad F_Y(z)=\begin{cases}1-e^{-\beta z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$$F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$f_Z(z)=F_Z'(z)$ $$f_Z(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

(2)并联 $f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

解： $Z=\max(X,Y)$ $f_Z(z)=F_Z'(z)$ $\boxed{F_Z(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)}$

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

$$F_X(z)=\begin{cases}1-e^{-\alpha z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}\qquad F_Y(z)=\begin{cases}1-e^{-\beta z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$$F_Z(z)=\begin{cases}(1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}), & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

(3)备用 $f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

解：$Z=X+Y$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$$

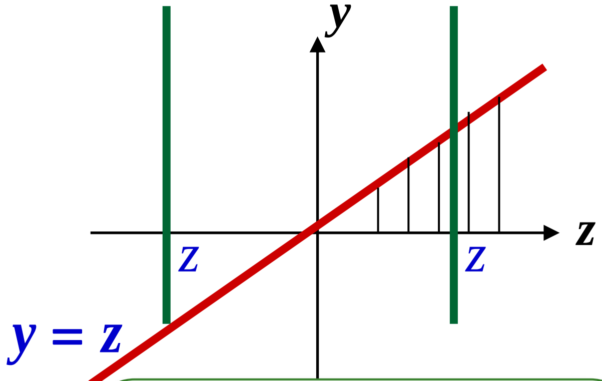
$$=\begin{cases}\int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)}\beta e^{-\beta y}\mathrm{d}y, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}(e^{-\beta z}-e^{-\alpha z}), & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

当 $y>0, z-y>0$ 时，

当 $z>y>0$ 时，

$f_X(z-y)f_Y(y)\neq 0$



1. 投影

2. 积分（分区间）

3. 画线（确定上下限）

第三章 多维随机变量及其分布

第五节 两个随机变量的函数的分布

- 两个随机变量和的分布
- $U = \max(X, Y)$ 及 $V = \min(X, Y)$ 的分布

第三章 多维随机变量及其分布

小结

第三章中计算难点

1） $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}x=\iint\limits_{D\text{交集}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}x$

2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$　　分区间

X,Y 独立

$Z=X+Y$

3） $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{f_X(z-y)f_Y(y)}\mathrm{d}y$　　非零区域分区间

4） $Z=g(X,Y)$　　$f(x,y) \longrightarrow f_Z(z)=?$　　$f_Z(z)=F_Z'(z)$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D(z)\text{ 交集}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

D是积分区域 $g(x,y)\le z$ 与 $f(x,y)$ 取值非零区域的交集

作 业

授课内容	习题三
3.1 二维随机变量	1 (1) (2) 离散，3连续
3.2 边缘分布	6离散，7, 8, 9连续
3.3 条件分布	10离散, 14连续
3.4 相互独立的随机变量	16 (2) , 18, 19连续,
3.5 随机变量函数的分布	21(1),22

设X_1和X_2是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$和$f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$和$F_2(x)$，则有 **(D)**

(A) $f_1(x)+f_2(x)$必为某一随机变量的概率密度

(B) $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

(C) $F_1(x)+F_2(x)$必为某一随机变量的分布函数

(D) $F_1(x)\cdot F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

解： $X=\max\{X_1,X_2\}$

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(X_1\le x,X_2\le x)$$

$$=P(X_1\le x)\cdot P(X_2\le x)=F_1(x)\cdot F_2(x)$$

19, 4分

设随机变量X与Y相互独立，且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则

$P(|X-Y|<1)$ ___(A)___

(A) 与 μ 无关，与 σ^2 有关　　(B) 与 μ 有关，与 σ^2 无关

(C) 与 μ，σ^2 都有关　　(D) 与 μ，σ^2 都无关

解：由于 $X,Y \sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 $X-Y \sim N(0,2\sigma^2)$，$\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$，

所以 $P(|X-Y|<1) = P\left(\left|\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) = P\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma} < \dfrac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma} < \dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)$

$$= \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - 1$$ 故选(A)

$X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, $X_1 - X_2 \sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

07, 11分

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其 它}\end{cases}$$

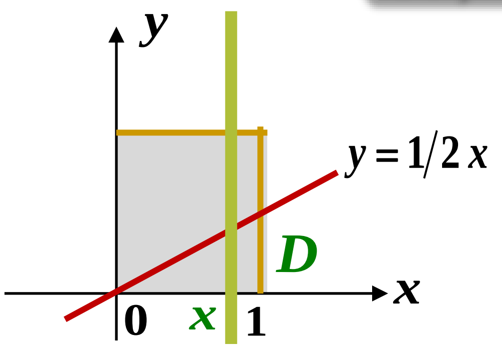
1) 求$P\{X>2Y\}$;

2) 求$Z=X+Y$的概率密度。

07, 11分

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其　它}\end{cases}$$



1) 求$P\{X>2Y\}$;

解:

$$P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}(2-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1/2x}(2-x-y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x[\int_0^{1/2x}(2-x)\mathrm{d}y-\int_0^{1/2x} y\mathrm{d}y]$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x[(2-x)y\Big|_0^{1/2x}-\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{1/2x}]=\int_0^1[\frac{1}{2}x(2-x)-\frac{1}{8}x^2]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(x-\frac{5}{8}x^2)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x-\frac{5}{8}\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1-\frac{5}{24}x^3\Big|_0^1=\frac{7}{24}$$

07, 11分

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其　它}\end{cases}$$

2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度

解1 公式法：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x$$

求被积函数不为 0 的区域：

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ z-1\le x\le z\end{cases}$$

$$f(x,z-x)=2-x-(z-x)$$
$$=2-z$$

$$f(x,z-x)=\begin{cases}2-z, & 0\le x<1, z-1\le x<z\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

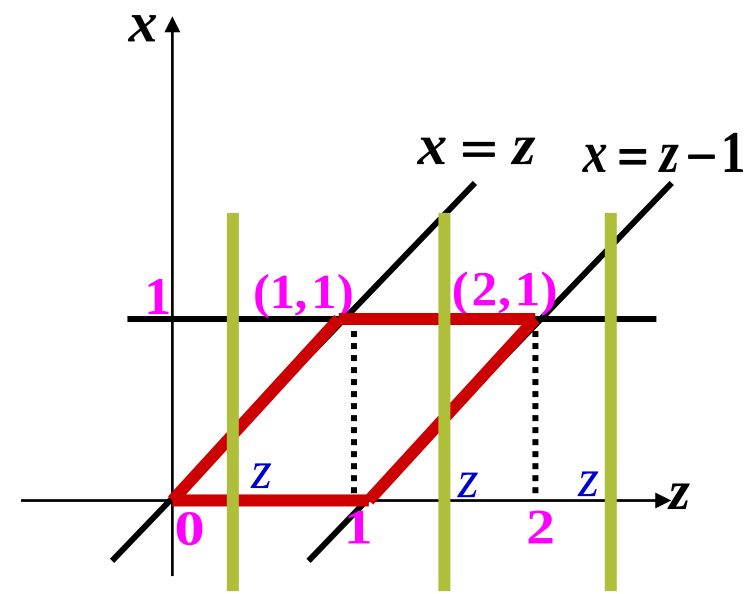
设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其　它}\end{cases}$$

2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^z (2-z)dx=(2-z)z, & 0\le z<1\\ \int_{z-1}^1 (2-z)dx=(2-z)^2, & 1\le z<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



$$f(x,z-x)=\begin{cases}2-z, & 0\le x<1, z-1\le x<z\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

1. 投影
2. 积分（分区间）
3. 画线（确定上下限）

07, 11分

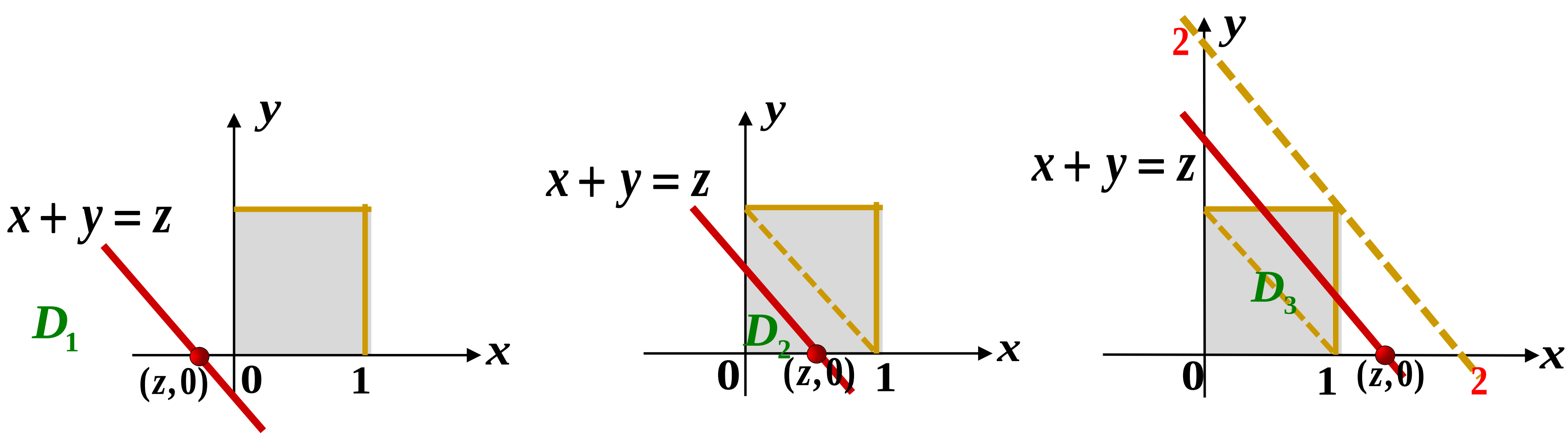
设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & 其\quad 它\end{cases}$$

2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度

解2：分布函数法：$f_Z(z)=F_Z'(z)$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



07, 11分

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

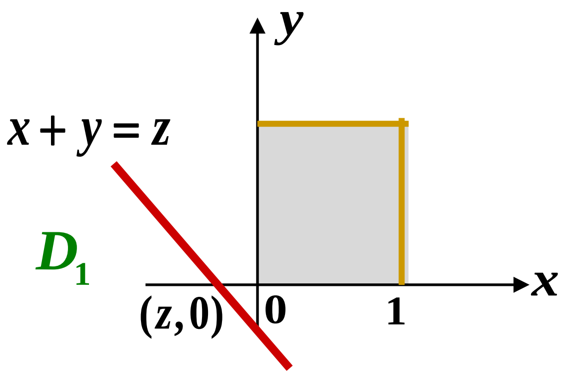
$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其　它}\end{cases}$$

2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度

解2: 分布函数法: $f_Z(z)=F_Z'(z)$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当 $z<0$ 时,



$$=0$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=0$$

07, 11分

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其　它}\end{cases}$$

2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度

解2：**分布函数法：** $f_Z(z)=F_Z'(z)$　　$f_Z(z)=F_Z'(z)=2z-z^2$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

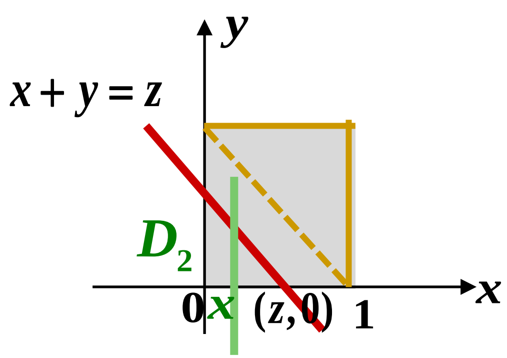
当$0\le z<1$时，

$$=\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{z-x}(2-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^z(2z-\frac{1}{2}z^2-2x+\frac{1}{2}x^2)\mathrm{d}x \overset{1}{=} z^2-\frac{1}{3}z^3$$

$$\overset{2}{=}\int_0^z[(2z-\frac{1}{2}z^2)-(2x-\frac{1}{2}x^2)]\mathrm{d}x$$

$$=(2z-\frac{1}{2}z^2)z-\int_0^z(2x-\frac{1}{2}x^2)\mathrm{d}x$$



$$f_Z(z)=F_Z'(z)$$

$$=(2-z)z+\cancel{(2z-\frac{1}{2}z^2)}-\cancel{(2z-\frac{1}{2}z^2)}=2z-z^2$$

07, 11分

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其　它}\end{cases}$$

2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度

解2：分布函数法：$f_Z(z)=F_Z'(z)$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当$1\le z<2$时，

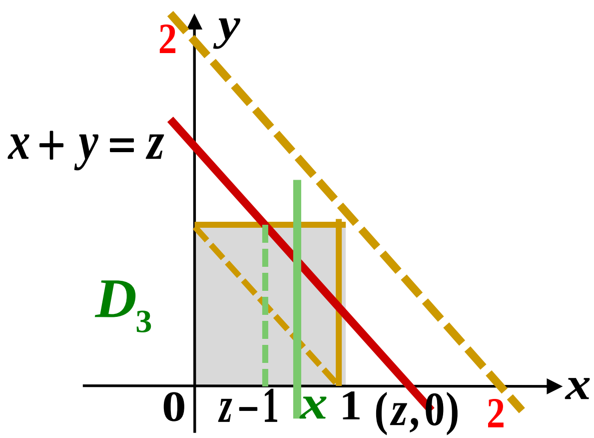
$$=1-\int_{z-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{z-x}^{1}(2-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=1-\int_{z-1}^{1}\left(\frac{3}{2}-2z+\frac{1}{2}z^2+x-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$$

2

$$=1-\int_{z-1}^{1}\left[\left(\frac{3}{2}-2z+\frac{1}{2}z^2\right)+\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=1-\left(\frac{3}{2}-2z+\frac{1}{2}z^2\right)(2-z)+\int_{1}^{z-1}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$$



$$f_Z(z)=F_Z'(z)=(2-z)^2+\cancel{\left(\frac{3}{2}-2z+\frac{1}{2}z^2\right)}+\cancel{(z-1)}-\cancel{\frac{1}{2}(z-1)^2}=(2-z)^2$$

07, 11分

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其　它}\end{cases}$$

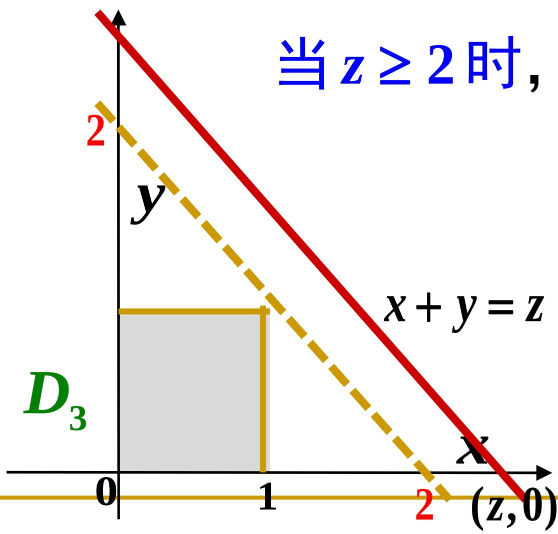
2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度

解2: 分布函数法: $f_Z(z)=F_Z'(z)$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当 $z\ge 2$ 时,

$$=1$$



$$f_Z(z)=F_Z'(z)=0$$

07, 11分

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其　它}\end{cases}$$

2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度

解2: 分布函数法: $f_Z(z)=F_Z'(z)$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0, & \text{当} z<0, z\ge 2 \text{时}\\ 2z-z^2, & \text{当} 0\le z<1 \text{时}\\ (2-z)^2, & \text{当} 1\le z<2 \text{时}\end{cases}$$

11, 11分

设随机变量X与Y的概率分布为： 且 $P\{X^2=Y^2\}=1$

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

1) 求二维随机变量(X,Y)的概率分布;

2) 求 $Z=XY$ 的概率分布；

3) 求 X与Y 的相关系数ρ_{XY}。---Ch4

11, 11分

设随机变量X与Y的概率分布为： 且 $P\{X^2=Y^2\}=1$

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

$X \backslash Y$	-1	0	1	
0	0	$\boxed{1/3}$	0	1/3
1	$\boxed{1/3}$	0	$\boxed{1/3}$	2/3
	1/3	1/3	1/3	

1) 求二维随机变量(X,Y)的概率分布;

解：

$$1=P\{X^2=Y^2\}=P\{X=Y=0\}+P\{X=1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=1\}$$

2) 求 $Z=XY$ 的概率分布； $Z=0,1,-1$

Z	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

$$P\{Z=0\}=\underset{1/3}{P\{X=Y=0\}}+\underset{0}{P\{X=0,Y=-1\}}+\underset{0}{P\{X=0,Y=1\}}+\underset{0}{P\{X=1,Y=0\}}$$

$$=1/3$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=1/3$$

$$P\{Z=-1\}=P\{X=1,Y=-1\}=1/3$$

17, 11分

设随机变量X与Y相互独立，且X 的分布律为$P(X=0)=P(X=1)=1/2$,

Y的概率密度为 $f(y)=\begin{cases} 2y, & 0<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

(1)求$P(Y \le EY)$; ---Ch4

(2)求 $Z = X+Y$ 的概率密度。

设随机变量X与Y相互独立，且X的分布律为$P(X=0)=P(X=1)=1/2$，Y的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

(2)求 $Z=X+Y$ 的概率密度。 $f_Z(z)=F_Z'(z)$ $\qquad F_Y'(y)=f(y)$

解：

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$$ 全概率公式

$$=\underbrace{P(X=0)}_{1/2}P(X+Y\le z\mid X=0)+\underbrace{P(X=1)}_{1/2}P(X+Y\le z\mid X=1)$$

$$=1/2\,P(Y\le z)+1/2\,P(Y\le z-1)$$

$$=1/2\,F_Y(z)+1/2\,F_Y(z-1)$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\ 1/2\underbrace{f(z)}_{\substack{0<z<1\\2z}}+1/2\underbrace{f(z-1)}_{\substack{0<z-1<1\\2(z-1)}}=\begin{cases}z, & 0<z<1\\ z-1, & 1<z<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

08, 11分

设随机变量X与Y相互独立，Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0, & 其\quad 它\end{cases},$$

X的分布律为 $P\{X=i\}=1/3, (i=-1,0,1)$

记 $Z=X+Y$

1) 求 $P\{Z\le \frac{1}{2}\big|X=0\}$;

2) 求 Z 的概率密度。

08, 11分

设随机变量X与Y相互独立，Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0, & 其\quad 它\end{cases},$$

X的分布律为 $P\{X=i\}=1/3, (i=-1,0,1)$

记 $Z=X+Y$

1) 求 $P\{Z\le \frac{1}{2}|X=0\}$;

解:

$$P\{Z\le \frac{1}{2}|X=0\}=P\{X+Y\le \frac{1}{2}|X=0\}$$

$$=P\{Y\le \frac{1}{2}\}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} 1\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$$

08, 11分

设随机变量X与Y相互独立，Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0, & 其\quad 它\end{cases},$$

X的分布律为 $P\{X=i\}=1/3,(i=-1,0,1)$

记 $Z=X+Y$

2) 求 Z 的概率密度。

解：分布函数法：$f_Z(z)=F_Z'(z)$

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$ 全概率公式

$$=\underline{P(X=-1)}P(X+Y\le z\,|\,X=-1)+\underline{P(X=0)}P(X+Y\le z\,|\,X=0)$$

$$+\underline{P(X=1)}P(X+Y\le z\,|\,X=1)$$

$$=\frac{1}{3}(P(X+Y\le z\,|\,X=-1)+P(X+Y\le z\,|\,X=0)+P(X+Y\le z\,|\,X=1))$$

$$=\frac{1}{3}(P(Y-1\le z)+P(Y\le z)+P(Y+1\le z))$$

$$=\frac{1}{3}(P(Y\le z+1)+P(Y\le z)+P(Y\le z-1))$$

08, 11分

设随机变量X与Y相互独立，Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0, & 其\quad 它\end{cases},$$

X的分布律为 $P\{X=i\}=1/3,(i=-1,0,1)$

记 $Z=X+Y$

2) 求 Z 的概率密度。

解：$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

$$=\frac{1}{3}(P(Y\le z+1)+P(Y\le z)+P(Y\le z-1))$$

$$=\frac{1}{3}(F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1))$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{3}(\underset{\substack{0\\0}}{\overset{1}{f_Y(z+1)}}+\underset{\substack{1\\0}}{\overset{0}{f_Y(z)}}+\underset{\substack{0\\1}}{\overset{0}{f_Y(z-1)}})=\begin{cases}1/3, & -1<z<0\\ 1/3, & 0<z<1\\ 1/3, & 1<z<2\end{cases}$$

$$\begin{cases}0<z+1<1\\ 0<z<1\\ 0<z-1<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1<z<0\\ 0<z<1\\ 1<z<2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1/3, & -1\le z<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$