§17.2 欧拉公式

定理(**欧拉公式**) 设G是一个连通平面图，有n个顶点，m条边，r个面，则 $n-m+r=2$。

推论 设G是一个平面图，有n个顶点，m条边，r个面，k个连通分支，则 $n-m+r=k+1$。

定理 设G是一个连通平面图，有n个顶点，m条边，每个面的次数至少是 l $(l\geq 3)$，则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

推论1 K_5和$K_{3,3}$都不是可平面图。

推论2 设G是一个平面图，有n个顶点, m条边, k个连通分支, 每个面的次数至少为 l ($l \geq 3$)，则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-k-1)$$

例 设G是一个极大可平面图，有n个顶点，m条边，则 $m=3n-6$。

例 设G是一个简单可平面图，有n个顶点，m条边，则 $m \leq 3n-6$。

例 $n\ (n\geq 11)$阶无向简单图G和$\overline{G}$中至少有一个是非平面图。

证明 设G和$\overline{G}$分别有m和$\overline{m}$条边，因为K_n有$\frac{n(n-1)}{2}$条边，所以$m+\overline{m}=\frac{n(n-1)}{2}$。

若G可平面，则 $m\leq 3n-6$，由此得

$$\overline{m}\geq\frac{n(n-1)}{2}-(3n-6)=m'$$

又

$$m'-(3n-6)=\frac{1}{2}[(n-3)(n-10)-6]$$

故当 $n\geq 11$时，$m'-(3n-6)>0$，从而

$$\overline{m}-(3n-6)>m'-(3n-6)>0$$

$$\Rightarrow\quad \overline{m}>3n-6$$

于是，$\overline{G}$ 不可平面。 ∎

定理 设G是一个简单可平面图，则$\delta(G)\leq 5$。