第四章 随机变量的数字特征

第一节 随机变量的数学期望

第二节 随机变量的方差与矩

第三节 协方差与相关系数

第四节 协方差矩阵

教学计划：2次课-6学时

第四章 随机变量的数字特征

第一节 随机变量的数学期望

- 离散型随机变量的数学期望
- 连续型随机变量的数学期望
- 随机变量的函数的数学期望
- 数学期望的性质

数学期望的引入

若随机变量 X 的分布律为：

X	0	1	2	3
p	1/4	1/4	1/4	1/4

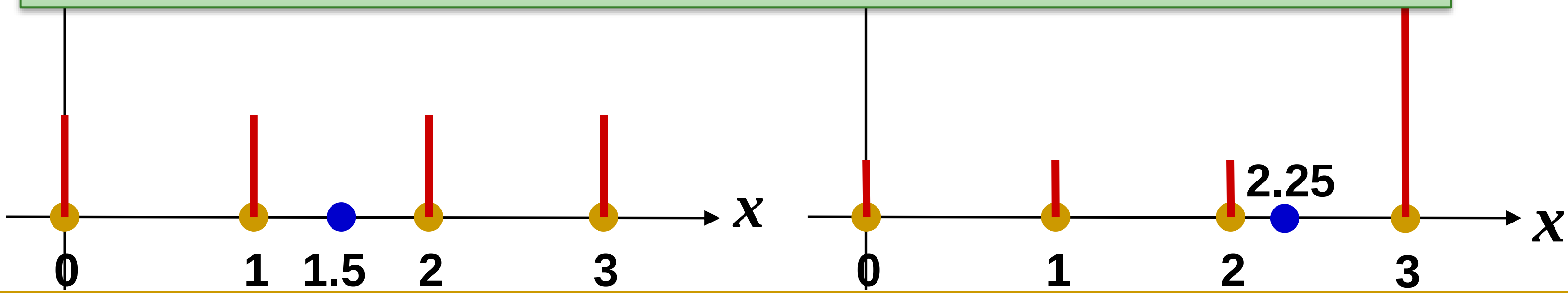
则 X 取值的平均值为：$\dfrac{0+1+2+3}{4}$ $=0\cdot\dfrac{1}{4}+1\cdot\dfrac{1}{4}+2\cdot\dfrac{1}{4}+3\cdot\dfrac{1}{4}=1.5$

若随机变量 X 的分布律为：

X	0	1	2	3
p	1/8	1/8	1/8	5/8

则 X 取值的平均值应如何计算？ $0\cdot\dfrac{1}{8}+1\cdot\dfrac{1}{8}+2\cdot\dfrac{1}{8}+3\cdot\dfrac{5}{8}=2.25=E(X)$

结论：随机变量的取值按概率作平均是合理的



$$E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{5}{8}=2.25$$

一. 离散型随机变量的数学期望

1. 离散型随机变量数学期望的定义

定义1 设 X 是离散型随机变量，它的分布律为:

X	x_0	x_1	$x_2 \cdots$	$x_n \cdots$
P_k	p_0	p_1	$p_2 \cdots$	$p_n \cdots$

如果级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛， 则称此级数的和

为随机变量 X 的数学期望， 记为: $E(X)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$

注: ➢$E(X)$是一个实数。本质上体现了是X 的取值的平均值，

故称 $E(X)$ 为 X 的均值。

2. 三种常见分布的数学期望

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k\, p_k$$

(1) (0-1) 分布

$$E(X)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$$

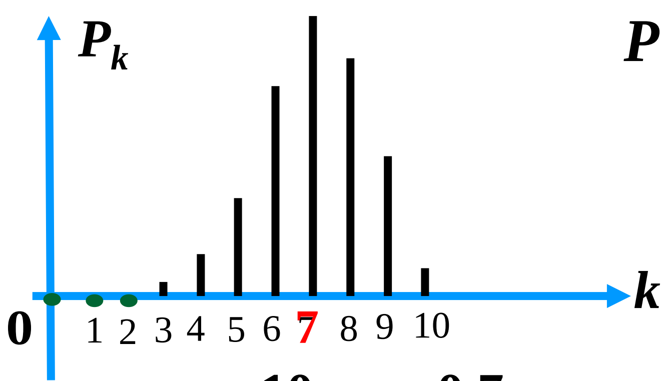
X	0	1
p	$1-p$	p

X	0	1
p	0.2	0.8

(2) 二项分布 $X \sim B(n,\ p)$

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2\cdots n$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot P(X=k)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k p^k q^{n-k}=np$$



$n=10,\ p=0.7$

$$P(X=k)=C_{10}^k 0.7^k 0.3^{10-k},\quad k=0,1,2,\cdots,10$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{10} k\cdot C_{10}^k 0.7^k 0.3^{10-k}$$

$$=10\times 0.7=7$$

2. 三种常见分布的数学期望

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k\, p_k$$

(1) (0-1) 分布

$$E(X)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$$

X	0	1
p	$1-p$	p

(2) 二项分布 $X \sim B(n,\ p)$

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2\cdots n$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot P(X=k)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k p^k q^{n-k}=np$$

(3) 泊松分布 $X \sim P(\lambda)$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\quad k=0,1,2,\cdots$$

泰勒级数

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

例1 某人的一串钥匙上有 n 把钥匙, 其中只有一把能打开自己家的门, 他随意地试用这串钥匙中的某一把去开门, 若每把钥匙试开一次后除去. 求：打开门时试开次数的数学期望.

解: 设试开次数为 X, $P(X=k)=1/n,\ k=1,2,\ldots,n$

设 $A_i=\{$第 i 次打开门$\}$, $i=1,2,\cdots,n$

$$P(X=1)=P(A_1)=\frac{1}{n}$$

$$P(X=2)=P(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$$

$$P(X=3)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}=\frac{1}{n}$$

例1 某人的一串钥匙上有 n 把钥匙, 其中只有一把能打开自己家的门, 他随意地试用这串钥匙中的某一把去开门, 若每把钥匙试开一次后除去. 求：打开门时试开次数的数学期望.

解: 设试开次数为 X, $P(X=k)=1/n,\ k=1,2,\ldots,n$

设 $A_i=\{$第 i 次打开门$\}$, $i=1,2,\cdots,n$

$$P(X=1)=P(A_1)=\frac{1}{n}$$

$$P(X=2)=P(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}\cdot\frac{(1+n)n}{2}=\frac{n+1}{2}$$

第四章 随机变量的数字特征

第一节 随机变量的数学期望

- 离散型随机变量的数学期望
- 连续型随机变量的数学期望
- 随机变量的函数的数学期望
- 数学期望的性质

连续型随机变量数学期望

由于 x_i 与 x_{i+1} 很接近, 所以[x_i , x_{i+1}) 中的值可以用 x_i 来近似代替.

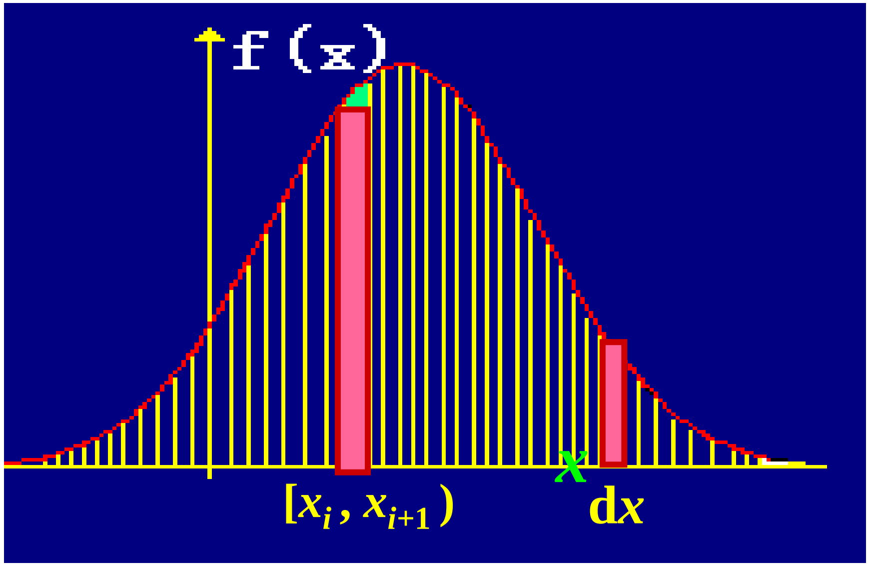
设X是连续型随机变量，其概率密度为 $f(x)$，在数轴上取很密的分点 $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$， 则 X 落在小区间 $[x_i, x_{i+1})$ 的概率是:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx f(x_i)(x_{i+1}-x_i) = f(x_i)\Delta x_i$$

$$E(X) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_i x_i f(x_i)\Delta x_i$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{x} f(x)\mathrm{d}x$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$



二. 连续型随机变量的数学期望

1. 连续型随机变量数学期望的定义

定义2 设 X 是连续型随机变量，其概率密度函数为 $f(x)$，如果积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\mathrm{d}x$$ 绝对收敛，

则称为连续型随机变量 X 的数学期望，

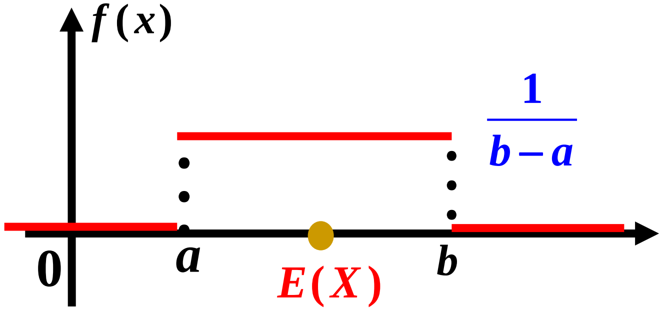
记为：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$

2. 三种常见分布的数学期望

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$$

(1) 均匀分布 $X \sim U[a,b]$ $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



解:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{a} x\cdot 0\,\mathrm{d}x+\int_{a}^{b} x\cdot\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x+\int_{b}^{+\infty} x\cdot 0\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} x\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{a+b}{2}$$

2. 几种常见分布的数学期望

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$$

(2) 指数分布 $X \sim E(\theta)$ $E(X)=\theta$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

解: 分部积分法

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\mathrm{d}x =\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty} x\cdot f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x =-\int_{0}^{+\infty} x\cdot \boxed{e^{-\frac{x}{\theta}}}\mathrm{d}(-\frac{x}{\theta}) =\int_{+\infty}^{0} x\cdot \mathrm{d}e^{-\frac{x}{\theta}}$$

$$=xe^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_{+\infty}^{0}-\int_{+\infty}^{0} e^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x =\underbrace{0e^{-\frac{0}{\theta}}}_{0}-\underbrace{\infty e^{-\frac{\infty}{\theta}}}_{0}-\int_{+\infty}^{0} e^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x$$

$$=\theta\int_{+\infty}^{0} e^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}(-\frac{x}{\theta}) =\theta e^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_{+\infty}^{0} =\theta e^{-\frac{0}{\theta}}-\theta e^{-\frac{\infty}{\theta}}=\theta$$

2. 几种常见分布的数学期望

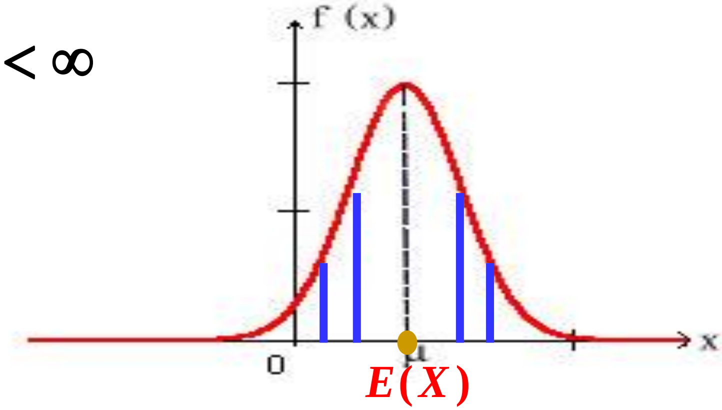
$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x$$

(1) 均匀分布 $X \sim U[a,b]$ $\quad E(X)=\dfrac{a+b}{2}$

(2) 指数分布 $X \sim E(\theta)$ $\quad E(X)=\theta$

(3) 正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $\quad E(X)=\mu$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

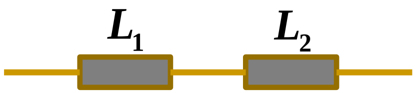


例2. 设某系统 L 有三种联接方式，其寿命 Z

$$E(Z_i)=\int_{-\infty}^{+\infty} z\ f_{Z_i}(z)\mathrm{d}z$$

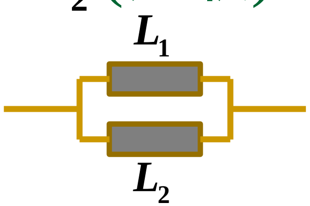
已知这三种联接方式各自寿命的概率密度分别为：

Z_1 (串联)



$$f_{Z_1}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}\qquad (\alpha>0,\beta>0)$$

Z_2 (并联)



$$f_{Z_2}(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

Z_3 (备用)

$$f_{Z_3}(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}] & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

求：这三种联接方式中哪种方式的平均寿命最长？

解：

$$f_{Z_3}(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}] & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

$e^{-(\alpha+\beta)z}$ $z>0$

$z\le 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_{Z_i}(z)\mathrm{d}z$

(串联) $E(Z_1)=\int_0^{+\infty} z(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}\mathrm{d}z=\dfrac{1}{\alpha+\beta}$

(并联) $E(Z_2)=\int_0^{+\infty} z\alpha e^{-\alpha z}\mathrm{d}z+\int_0^{+\infty} z\beta e^{-\beta z}\mathrm{d}z-\int_0^{+\infty} z(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}\mathrm{d}z$

$$=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha+\beta}$$

(备用) $E(Z_3)=\int_0^{+\infty} z[\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}(e^{-\beta z}-e^{-\alpha z})]\mathrm{d}z=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

显然：$E(Z_3)>E(Z_2)$， $E(Z_2)-E(Z_1)=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta(\alpha+\beta)}>0$

结论： 在备用的联接方式下其平均寿命最长。

第四章 随机变量的数字特征

第一节 随机变量的数学期望

- 离散型随机变量的数学期望
- 连续型随机变量的数学期望
- 随机变量的函数的数学期望
- 数学期望的性质

三. 随机变量的函数的数学期望

定理. 设 $Y=g(X)$（g是连续函数），则：

(1) X是离散型随机变量，它的分布律为：

$$p_k=P(X=x_k),\quad k=1,2,\cdots,$$

$$\boxed{E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k}$$

若 $\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则有：$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$

证明：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$
Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$

三. 随机变量的函数的数学期望

定理. 设 $Y=g(X)$（g是连续函数），则：

(1) X是离散型随机变量，它的分布律为：

$$p_k=P(X=x_k),\quad k=1,2,\cdots,$$

$$\boxed{E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k}$$

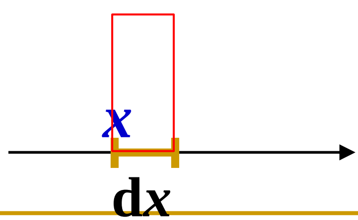
若 $\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则有：$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$

(2) X是连续型随机变量，它的概率密度为 $f(x)$，

若 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则有：

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{g(x)}_{\text{取值近似}}\underbrace{f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{概率近似}}$$

$$\boxed{E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x}$$



注:

➢此定理可以推广到二维的情形： $Z = g(X,Y)$, g是连续的函数。

(1) 若(X,Y)为离散型随机变量，其联合分布律为：

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \cdots$$

则有： $E(Z) = E[g(X,Y)] = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$

$$\boxed{E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k}$$

这里设上式右边的级数绝对收敛.

证明：

(X,Y)	(x_i, y_j)
p	p_{ij}
Z	$g(x_i, y_j)$

注:

➢此定理可以推广到二维的情形： $Z=g(X,Y)$， g是连续的函数。

(1) 若(X,Y)为离散型随机变量，其联合分布律为:

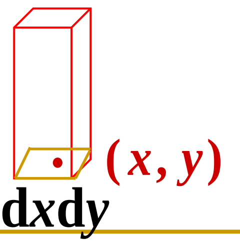
$$P(X=x_i,Y=y_j)=P_{ij},\qquad i,j=1,2,\cdots$$

则有：$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

(2) 若(X,Y)为连续型随机变量，其联合概率密度为$f(x,y)$,

则有：$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{g(x,y)}_{\text{取值近似}}\underbrace{f(x,y)}_{\text{概率近似}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里设右边的积分绝对收敛.



小结 随机变量的数学期望

	离散型随机变量	连续型随机变量
X	$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$	$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$
$Y=g(X)$ g连续	$E(Y)=E[g(X)]$ $=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$	$E(Y)=E[g(X)]$ $=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$
$Z=g(X,Y)$ g连续	$E(Z)=E[g(X,Y)]$ $=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$	$E(Z)=E[g(X,Y)]$ $=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

例3. 设二维连续

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$f(x,y)=\begin{cases}3x & \boxed{0<y<x<1}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求：$Z=XY$ 的数学期望

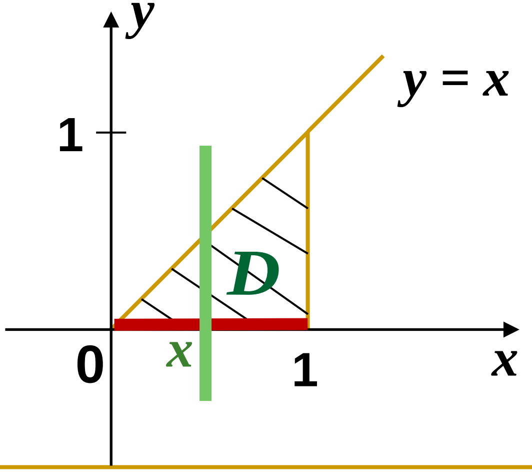
解：

$$E(Z)=E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\ f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{0<y<x<1}xy\cdot 3x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x xy\cdot 3x\,\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^x y\,\mathrm{d}y=3\int_0^1 x^2\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^1 x^4\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\,\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{3}{10}$$



第四章 随机变量的数字特征

第一节 随机变量的数学期望

- 离散型随机变量的数学期望
- 连续型随机变量的数学期望
- 随机变量的函数的数学期望
- 数学期望的性质

四. 数学期望的性质

X	c
p	1

1. 设c是常数，则 $E(c)=c$

2. 设c是常数, X 是随机变量, 则 $E(cX)=cE(X)$

3. X, Y是两个随机变量，则 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

注：该性质可推广到任意有限个随机变量之和的情形.

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$$

4. 若随机变量X, Y相互独立, 则 $E(XY)=E(X)E(Y)$

注：该性质可推广到任意有限个相互独立的随机变量之积的情形.

$$E(X_1\cdot X_2\cdot\cdots\cdot X_n)=E(X_1)\cdot E(X_2)\cdot\cdots\cdot E(X_n)$$

小结

随机变量的数学期望

	离散型随机变量	连续型随机变量
X	$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$	$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$
$Y=g(X)$ g连续	$E(Y)=E[g(X)]$ $=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$	$E(Y)=E[g(X)]$ $=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$
$Z=g(X,Y)$ g连续	$E(Z)=E[g(X,Y)]$ $=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$	$E(Z)=E[g(X,Y)]$ $=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
$E(X)$性质	$E(c)=c \quad E(cX)=cE(X) \quad E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ X,Y 独立, $E(XY)=E(X)E(Y)$	

小结

三种常见分布的数学期望和方差

	概率分布		$E(X)$	$D(X)$
离散型	(0-1)分布	$X \sim B(1, p)$	p	
	二项分布	$X \sim B(n, p)$	np	
	泊松分布	$X \sim P(\lambda)$	λ	
连续型	均匀分布	$X \sim U(a,b)$	$(a+b)/2$	
	指数分布	$X \sim E(\theta)$	θ	
	正态分布	$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	μ	

例4 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且均服从(0-1)分布,

求: $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

X_i	0	1
p_k	q	p

$E(X_i) = p$

解1: 设 $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$,

由数学期望的性质有:

$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$
$$= p + p + \cdots + p = np$$

解2: 由题意，每一个随机变量 X_i 服从(0-1)分布

每次试验只有两个可能的结果，A发生与A不发生，$P(A)=p$

$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ —— n次独立试验中A发生的次数

$Y \sim B(n, p)$　　$E(Y) = np$

例5. 设由自动线加工的某种零件的内径 $X \sim N(\mu,1)$，内径小于10或大于12的为不合格品，其余为正品。已知销售利润 T 与销售零件的内径 X 有如下关系：

$$T=\begin{cases}-1, & X<10\\ 20, & 10\le X\le 12\\ -5, & X>12\end{cases}$$

$\because X \sim N(\mu,1)$

$\therefore X-\mu \sim N(0,1)$

$E(X)=\mu$　　$E(T)$

问平均内径 μ 取何值时，销售一个零件的平均利润最大？

解： $E(T)=20\cdot P(10\le X\le 12)-1\cdot P(X<10)-5\cdot P(X>12)$

$=20\cdot P(10-\mu\le X-\mu\le 12-\mu)-1\cdot P(X-\mu<10-\mu)-5P(X-\mu>12-\mu)$

$=20[\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu)]-1\cdot\Phi(10-\mu)-5[1-\Phi(12-\mu)]$

$=25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)-5$

例5. $T=\begin{cases}-1, & X<10\\ 20, & 10\le X\le 12\\ -5, & X>12\end{cases}$

$$\Phi'(x)=\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$E(X)=\mu$ $E(T)$

问平均内径 μ 取何值时，销售一个零件的平均利润最大？

解： $E(T)=20\cdot P(10\le X\le 12)-1\cdot P(X<10)-5P(X>12)$

$$=25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)-5$$

$$0=\frac{\mathrm{d}E(T)}{\mathrm{d}\mu}=-25\varphi(12-\mu)+21\varphi(10-\mu)$$

$$\frac{25}{21}=\frac{\varphi(10-\mu)}{\varphi(12-\mu)}=\frac{e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}}{e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}}=e^{2(11-\mu)}\rightarrow \ln\frac{25}{21}=2(11-\mu)$$

$$\rightarrow \mu=11-\frac{1}{2}\ln\frac{25}{21}\approx 10.9$$

17, 4分

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=1/2\Phi(x)+1/2\Phi(\frac{x-4}{2})$,

则 $EX=$ ___2___

解: $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ $\qquad f(x)=F'(x)=1/2\varphi(x)+1/4\varphi(\frac{x-4}{2})$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x}_{0}+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(\frac{x-4}{2})\mathrm{d}x$$

$\frac{x-4}{2}=t\rightarrow x=2t+4$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+4)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}t\varphi(t)\mathrm{d}t}_{0}+2\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t}_{1}=2$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=0$$

（09, 4分）

设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi(\frac{x-1}{2})$

则 $E(X)=$ __(C)__

$f(x)=F'(x)$　　$\Phi'(x)=\varphi(x)$

(A) 0　　(B) 0.3　　(C) 0.7　　(D) 1

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

解：X 的概率密度 $f(x)=0.3\varphi(x)+\frac{0.7}{2}\varphi(\frac{x-1}{2})$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot[0.3\varphi(x)+\frac{0.7}{2}\varphi(\frac{x-1}{2})]\mathrm{d}x$$

$$=0.3\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x}_{0}+\frac{0.7}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\varphi(\boxed{\frac{x-1}{2}}^{\,t})]\mathrm{d}x$$

$x=2t+1$

$\mathrm{d}x=2\mathrm{d}t$

$$=0.7\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+1)\varphi(t)]\mathrm{d}t=1.4\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}t\varphi(t)\mathrm{d}t}_{0}+0.7\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$=0.7\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t}_{1}=0.7$$　故选(C)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=0$$

第四章 随机变量的数字特征

第一节 随机变量的数学期望

- 离散型随机变量的数学期望
- 连续型随机变量的数学期望
- 随机变量的函数的数学期望
- 数学期望的性质

第四章 随机变量的数字特征

第一节 随机变量的数学期望

第二节 随机变量的方差与矩

第三节 协方差与相关系数

第四章 随机变量的数字特征

第二节 随机变量的方差与矩

- 方差的定义
- 方差的性质
- 离散型随机变量的方差
- 连续型随机变量的方差
- 矩

方差的引出

实际问题： 如何评价一个班的概率考试成绩.

评价指标： $E(X)$大； $D(X)$小； $\sigma(X)$

指标1：学生概率成绩的平均成绩要高；

$\underbrace{\text{学生概率成绩}}_{X}$的$\underbrace{\text{平均成绩}}_{E(X)}$

指标2：每个学生概率成绩与平均成绩的偏差程度要小；

$\underbrace{\text{偏差程度}}_{D(X)}$

如何定义 $D(X)$：

$$E\left|X-E(X)\right|$$

方差 $D(X)=E[X-E(X)]^2$

均方差 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

一. 方差的定义

定义 设X是一个随机变量，若$E[X-E(X)]^2$存在，

则称 $D(X)=E[X-E(X)]^2$ 为 X 的方差。

注: ➢$D(X)$是一个非负实数，本质上体现了X与平均值的偏离程度，故它是衡量X取值分散程度的一个量；

$D(X)$越小 ⟶ X的取值越集中在$E(X)$周围

$D(X)$越大 ⟶ X的取值越分散

➢ 称$\sqrt{D(X)}$为标准差或均方差。记为: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

➢$D(X)$实际上是X的函数$g(X)=(X-E(X))^2$的数学期望。

第四章 随机变量的数字特征

第二节 随机变量的方差与矩

- 方差的定义
- 方差的性质
- 离散型随机变量的方差
- 连续型随机变量的方差
- 矩

$$D(X)=E[X-E(X)]^2$$

二. 方差的性质

1. $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 \Rightarrow E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2$

证明： $D(X)=E[X-E(X)]^2$

$$=E[X^2-2X\,E(X)+(E(X))^2]$$

$$=E(X^2)+E[-2X\,E(X)]+E[(E(X))^2]$$

$$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$\boxed{E(X_1+X_2+X_3)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)}$$

$\boxed{E(cX)=cE(X)}$ $\boxed{E(c)=c}$

$$D(X)=E[X-E(X)]^2$$

2. 若 c 是常数，则 $D(c)=0$

3. 若c 是常数, X 是随机变量, 则 $D(cX)=c^2D(X)$

X	c
p	1

证明：$D(cX)=E[(cX)^2]-[E(cX)]^2$

$$=E(c^2X^2)-[cE(X)]^2$$

$$=c^2E(X^2)-c^2[E(X)]^2$$

$$=c^2[E(X^2)-(E(X))^2]=c^2D(X)$$

4. 若X, Y是相互独立的随机变量，则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

证明： $D(X+Y)=E[(X+Y)-E(X+Y)]^2$

由方差定义

4. 若X, Y相互独立，则 $D(X+Y) =$

$$D(X)=E[X-E(X)]^2$$

$$E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$$

证明：

$$D(X+Y)=E[(X+Y)-E(X+Y)]^2$$

$$=E[X+Y-E(X)-E(Y)]^2=E\{[X-E(X)]+[Y-E(Y)]\}^2$$

$$=E\{[X-E(X)]^2+[Y-E(Y)]^2+2[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=E[X-E(X)]^2+E[Y-E(Y)]^2+2E\{[X-E(X)][(Y-E(Y)]\}$$

$$=D(X)+D(Y)+2E[X-E(X)]\cdot E[Y-E(Y)]$$

$$=D(X)+D(Y)+2[\underbrace{E(X)-E(X)}_{0}]\cdot[\underbrace{E(Y)-E(Y)}_{0}]$$

$$=D(X)+D(Y)$$

注： 此性质可推广到任意有限多个相互独立的随机变量之和的情形。$D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)$

二. 方差的性质

1. $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

2. 若 c 是常数，则 $D(c) = 0$

3. 若c 是常数, X 是随机变量, 则 $D(cX) = c^2 D(X)$

4. 若X, Y 相互独立，则 $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

5. $D(X) = 0$ 的充分必要条件是 $P(X = c) = 1$

可用切比雪夫不等式证明，略。

小结

随机变量的数字特征

$E(X)$性质	$E(c)=c$ $E(cX)=cE(X)$ $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ X,Y独立 $E(XY)=E(X)E(Y)$
$D(X)$性质	$D(c)=0$ $D(cX)=c^2D(X)$ $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ X,Y独立, $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ $D(X)=0 \Leftrightarrow P(X=c)=1$

作 业

授课内容	习题四
4.1 数学期望	2, 6(1), 8离散, 5, 7(1), 9(1), 11, 12连续
4.2 方差	13, 21, 22连续
4.3 协方差及相关系数	26,29,31,32

11, 4分

设二维随机变量(X,Y)服从正态分布$N(\mu,\mu,\sigma^2,\sigma^2,0)$，

则$E(XY^2)=$ $\underline{\mu(\sigma^2+\mu^2)}$

解：X与Y独立同分布，X与Y^2也独立，$X,Y\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$E(XY^2)=EX\cdot EY^2=\mu(\sigma^2+\mu^2)$$

$$\boxed{E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)}$$

$$EX=\mu$$

$$EY^2=DY+(EY)^2=\sigma^2+\mu^2$$

$$\boxed{D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2}$$

结论： 设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则$X$和$Y$是相互独立$\Longleftrightarrow \rho=0$

01, 8分

设二维随机变量(X,Y)在以点(0,1)，(1,0)，(1,1)为顶点的三角形区域上服从均匀分布，$Z = X + Y$， 求DZ.

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in G\\ 0, & (x,y)\notin G\end{cases}$$

解：X与Y的联合概率密度为

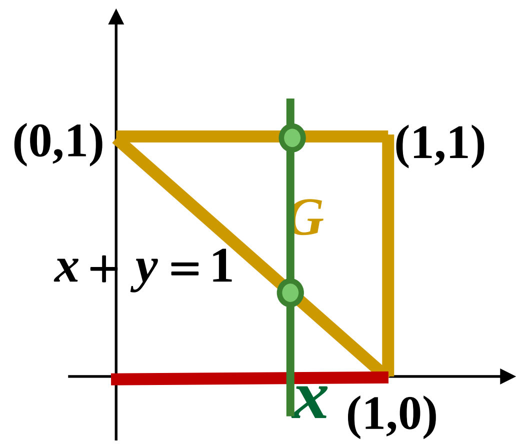
$$EZ = E(X+Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_G (x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^1 2(x+y)\mathrm{d}y = \int_0^1 (2x+x^2)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$$

$$EZ^2 = E(X+Y)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^1 2(x+y)^2\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 (2x+2x^2+\frac{2}{3}x^3)\mathrm{d}x = \frac{11}{6}$$

$$DZ = EZ^2 - (EZ)^2 = \frac{11}{6} - (\frac{4}{3})^2 = \frac{1}{18}$$



$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

08, 4分

设随机变量$X \sim P(\lambda=1)$，则 $P\{X=EX^2\}=$ $\underline{\dfrac{1}{2}e^{-1}}$

解：

$$X \sim P(\lambda=1) \rightarrow EX = DX = \lambda = 1$$

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$EX^2 = DX + (EX)^2 = 2$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$P\{X=EX^2\}=P\{X=2\}=\frac{1^2 e^{-1}}{2!}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-1}$$

练习1

设随机变量X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x<\pi \\ 0, & 其它\end{cases}$

对X的独立重复地观察4次，用Y表示观察值大于 $\pi/3$ 的次数，

求：$E(Y^2)$

解： $P(X>\frac{\pi}{3})=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}\frac{x}{2}$

$$=\sin\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{1}{2}$$

用Y表示4次观察中$\{X>\frac{\pi}{3}\}$的次数，$Y\sim B(4,\frac{1}{2})$

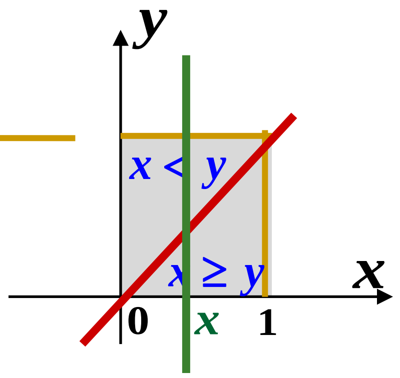
$E(Y)=4\times\frac{1}{2}=2\qquad D(Y)=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1$

$E(Y^2)=D(Y)+E^2(Y)=5$

练习2

设随机变量X与Y相互独立，均服从(0,1)上的均匀分布，令

$$Z=\begin{cases}2X, & X<Y\\ X+Y, & X\geq Y\end{cases}$$ 则 $E(Z)=$ $\frac{5}{6}$



$$Z=g(X,Y)$$

解： $$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$z=g(x,y)=\begin{cases}2x, & x<y\\ x+y, & x\geq y\end{cases}$$

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\substack{0<x<1\\0<y<1}}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{0<x<y<1}2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{1>x\geq y>0}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 2x\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x+y)\mathrm{d}y=\frac{5}{6}$$

练习3

设随机变量 X,Y 相互独立, $X\sim N(1,1/4), Y\sim N(1,3/4)$,

求 $E(|X-Y|)=E(|Z|)$

解： $Z=X-Y\sim N(\mu,\sigma^2)$ $\qquad Z=X-Y\sim N(0,1)$ $\qquad f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$

$$\mu=E(X-Y)=EX-EY=1-1=0$$

$$\sigma^2=D(X-Y)=DX+D(-Y)=DX+(-1)^2D(Y)=DX+D(Y)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$$

$$E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|z|e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}z^2=2z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}\left(-\frac{z^2}{2}\right)=\frac{-2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{-2}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{\infty^2}{2}}-e^0\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$$