第五章 一阶逻辑等值演算与推理

继承、拓展命题逻辑的等值演算规则与推理规则，方便一阶公式的类型判断和一阶逻辑的证明构造。

§4.1 一阶逻辑等值式与置换规则

例 每个人都会犯错误。

采用全总个体域。引入特性谓词 $M(x)$：x是人，主谓词 $F(x)$：x会犯错误。则该命题可符号化为

$$\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$$

$$\neg\exists x(M(x)\wedge\neg F(x))$$

定义 设 A, B 是两个谓词公式，若复合公式 $A\leftrightarrow B$是永真式，则称 A与B**等值**，记为$A\Leftrightarrow B$。

注 ① “⇔” 不是联结词，是元语言。

② “⇔” 与 “=” 不同。

常用基本等值式：

第一组：命题逻辑中常用等值式的代换实例

第二组：一阶逻辑中的特有等值式

1．消去量词

当 $D=\{a_1, a_2,\cdots, a_n\}$时，有

① $\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n)$

② $\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_n)$

2．量词否定

① $\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

② $\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

3．辖域收缩与扩张

$$\forall x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B$$

$$\forall x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge B$$

$$\exists x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee B$$

$$\exists x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge B$$

其中，B是不含自由出现的x的谓词公式。

4．量词分配

$$\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$$

$$\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$$

演算规则：

1. 置换规则

设$\varphi(A)$是含公式A的谓词公式，$\varphi(B)$是用公式B置换$\varphi(A)$中的所有A后得到的谓词公式。若$A \Leftrightarrow B$，则

$$\varphi(A) \Leftrightarrow \varphi(B)$$

2．换名规则

设A是谓词公式，把A中某指导变元对应的全部约束出现替换为A中未出现过的符号，而A中其余部分不变，设所得谓词公式为A'，则 $A \Leftrightarrow A'$。

3．代替规则

设A是谓词公式，把A中某个体变项的全部自由出现替换为A中未出现过的符号，而A中其余部分不变，设所得公式为A'，则 $A \Leftrightarrow A'$。

例 （1）$\forall xF(x,y,z) \rightarrow \exists yG(x,y,z)$

把个体变项x换名为s，把y换名为t，得

$$\forall xF(x, y, z) \rightarrow \exists yG(x, y, z) \Leftrightarrow \forall sF(s, y, z) \rightarrow \exists tG(x, t, z)$$

（2）$\forall x(F(x, y) \rightarrow \exists yG(x, y, z))$

把个体变项x代替为s，把y代替为t，得

$$\forall x(F(x, y) \rightarrow \exists yG(x, y, z)) \Leftrightarrow \forall x(F(x, t) \rightarrow \exists yG(s, y, z))$$

例 给定解释

I：$D_I=\{2,3\}$，a：2，b：3

$G(x, y)$：$G(a, a)=G(a, b)=G(b, a)=1$，$G(b, b)=0$

$F(x)$：$F(a)=0$，$F(b)=1$

判断下列公式的真值：

（1） $\forall x(F(x)\wedge G(x, a))$

（2） $\exists x\forall y G(x, y)$

解 （1） $\forall x(F(x)\wedge G(x, a))$

$$\Leftrightarrow (F(a)\wedge G(a, a))\wedge(F(b)\wedge G(b, a))$$

$$\Leftrightarrow (0\wedge 1)\wedge(1\wedge 1)\Leftrightarrow 0$$

（2） $\exists x \forall y G(x, y)$

$$\Leftrightarrow \exists x(G(x, a) \wedge G(x, b))$$

$$\Leftrightarrow (G(a, a) \wedge G(a, b)) \vee (G(b, a) \wedge G(b, b))$$

$$\Leftrightarrow (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \Leftrightarrow 1 \qquad \blacksquare$$

例 证明：

$$\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$

证明 $\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \Leftrightarrow \neg \forall x(\neg F(x) \vee G(x))$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg(\neg F(x) \vee G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg G(x)) \qquad \blacksquare$$