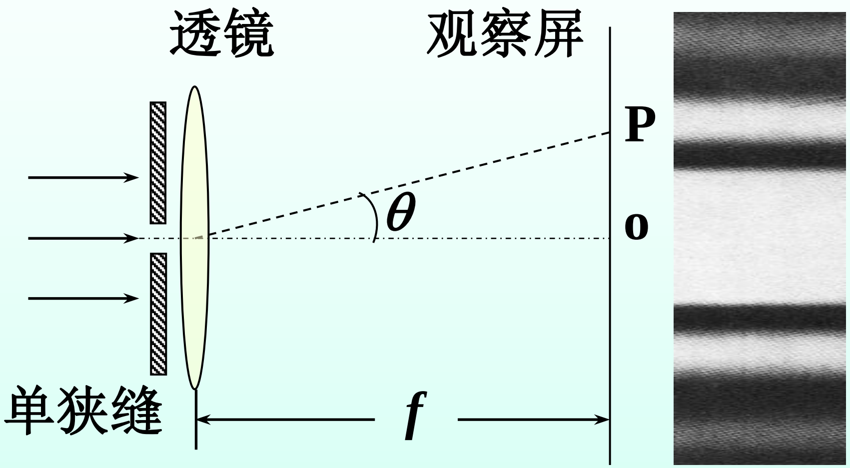
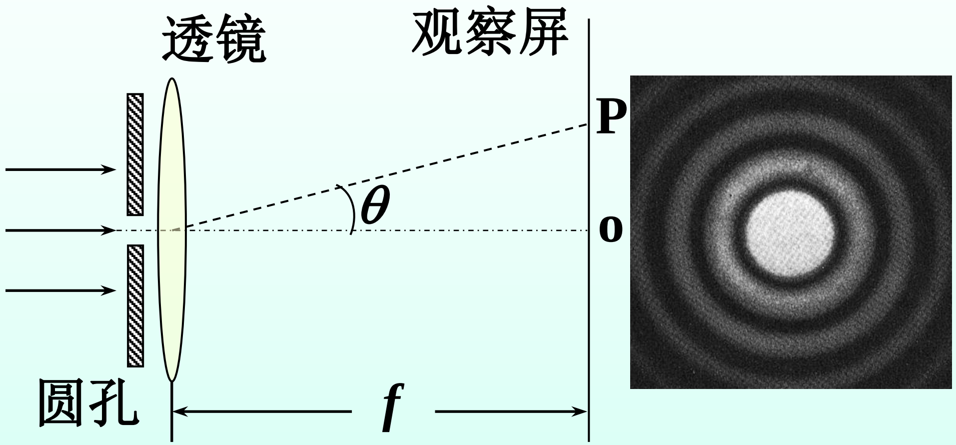
光的衍射(绕射)
(Diffraction of Light)

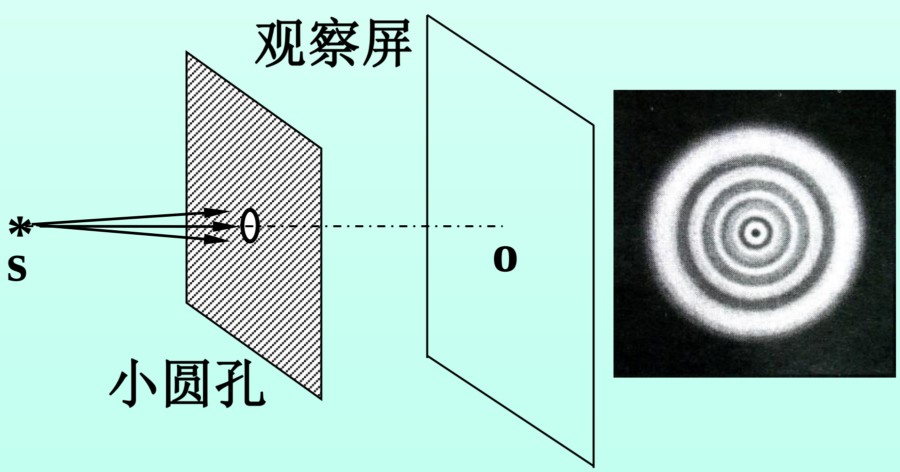
光在传播过程中能绕过障碍物边缘，偏离直线传播的现象称为衍射。

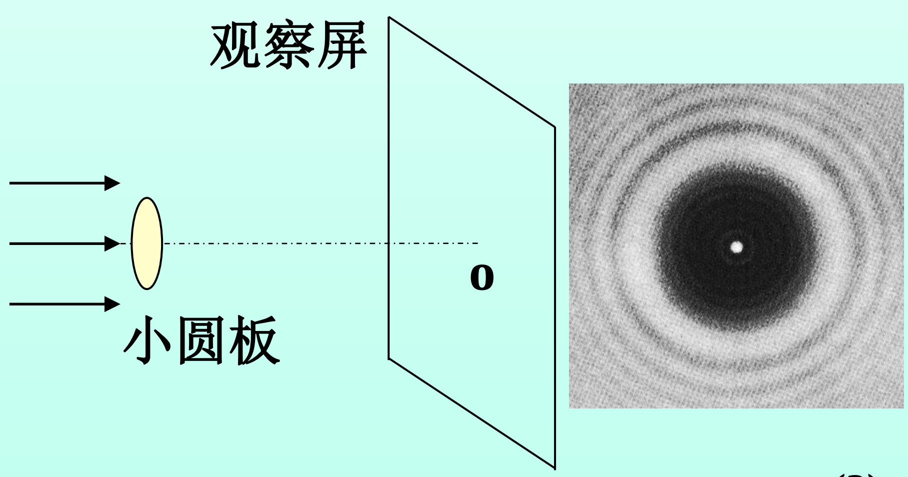
6.4 光的衍射
(diffraction of light)

6.4.1 光的衍射现象









惠更斯-菲涅耳原理

1690年，荷兰物理学家惠更斯(C.Huygens，1629-1695)提出了一条描述波传播特性的子波理论

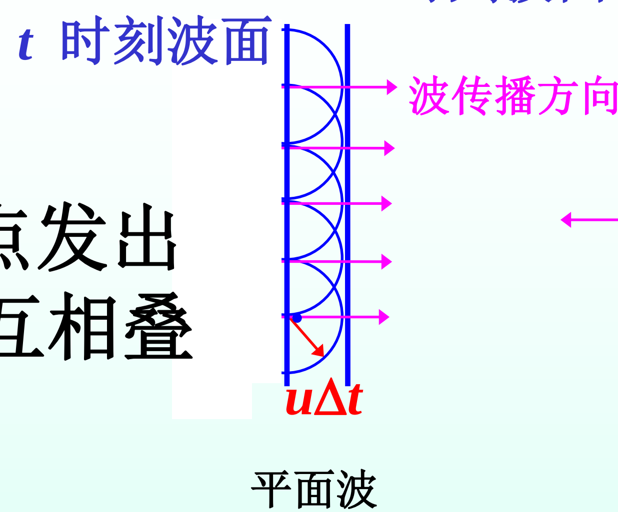
在波的传播过程中，波阵面上的每一点都可看作是发射球面子波的波源，在其后的任一时刻，这些子波的包迹就成为新的波阵面，称为惠更斯原理

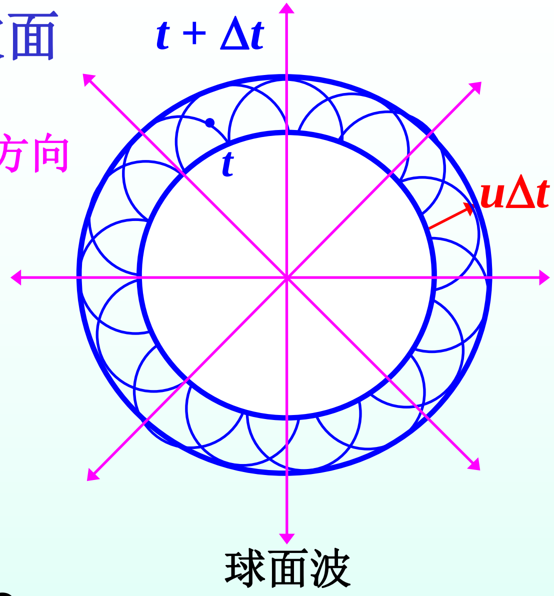
利用惠更斯原理能够满意地解释光的直线传播、反射、折射以及定性说明光的衍射现象

惠更斯原理只说明了光（波）的传播方向问题，没有涉及光强

6.4.2惠更斯-菲涅耳原理(Huygens-Fresnel principle)

1.惠更斯原理





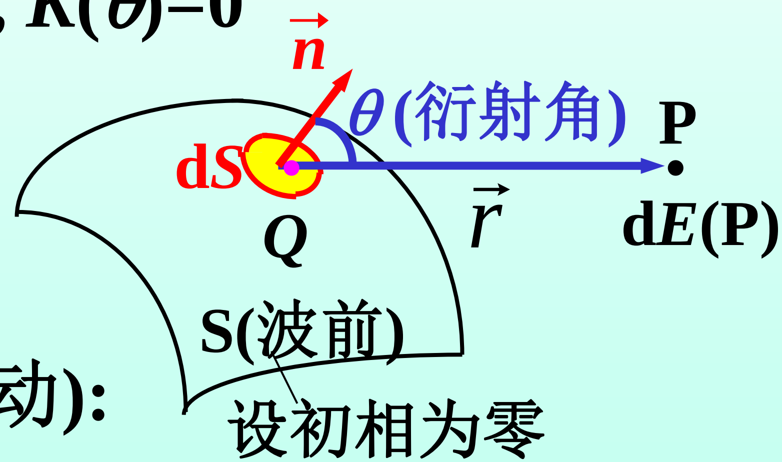
2.菲涅耳假说

1)从同一波阵面上各点发出子波在空间相遇时,互相叠加而产生干涉现象。

2)引入倾斜因子$K(\theta)$,在$\theta \geq \pi/2$ 时, $K(\theta)=0$

子波d*S*在P点的光振动:

$$\mathrm{d}E = K(\theta)\frac{C\cdot \mathrm{d}S}{r}\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}r)$$



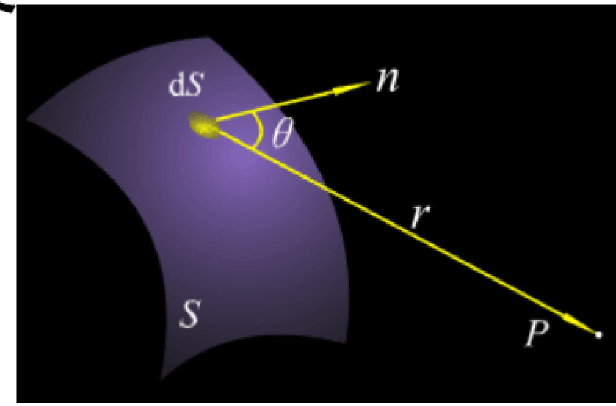
波面S在P点的光振动(子波合振动):

$$E=\int_S C\frac{K(\theta)}{r}\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}r)\cdot \mathrm{d}S$$

菲涅耳积分

(3)

子波到达P点的振幅与相位假设

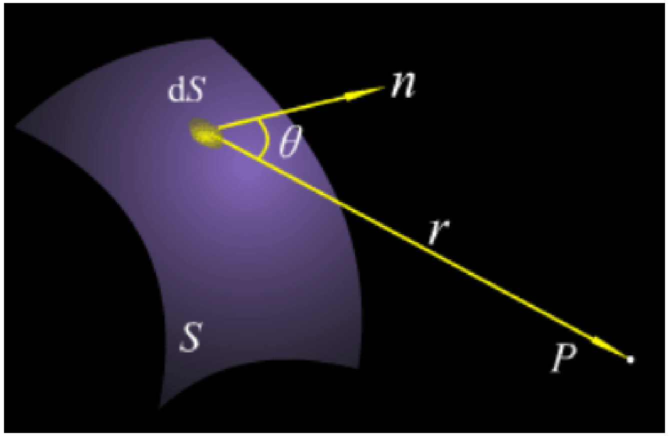


1）S 为同相面，各个子波源相位相同. 设 $\varphi = 0$

2）dS发出的子波在 P 点引起的振幅与dS成正比，与 r 成反比

$$A_p \propto \mathrm{d}S \qquad A_p \propto \frac{1}{r}$$

3） dS在p点引起的振幅与波面法线和r之间的夹角 θ 的某个函数$K(\theta)$成正比. $K(\theta)$叫倾斜因子，$K(\theta)$随 θ 的增加单调减小.且假设当 $\theta \geqslant (\pi/2)$时, $K(\theta)=0$

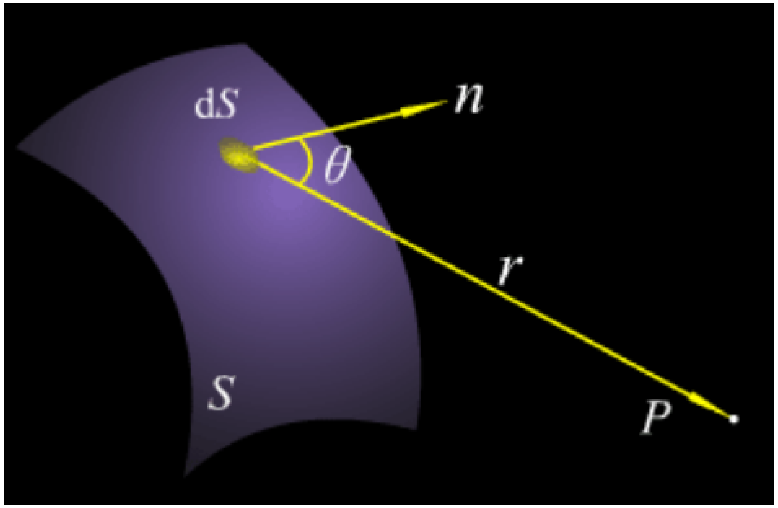


$$A_p \propto K(\theta)$$

4) dS在 P 点引起的光振动的相位，由dS 到P点的光程 r 决定

子波dS在P点的光振动:

$$dE = K(\theta)\frac{C \cdot dS}{r}\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r)$$



波面S在P点的光振动

(子波合振动):

$$E = \int_S C\frac{K(\theta)}{r}\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r)dS$$

菲涅耳积分

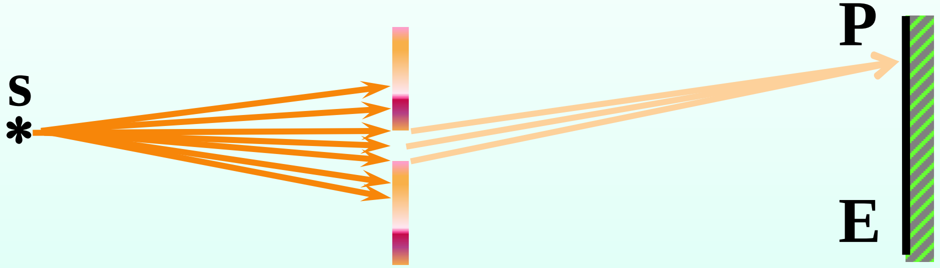
6.4.3 菲涅耳(A.J.Fresnel,1788-1827)衍射 夫琅禾费(J.Fraunhofer)衍射


菲涅耳, A.-J.

1.菲涅耳(A.J.Fresnel,1788-1827)衍射

光源到障碍物; 障碍物到受光屏;

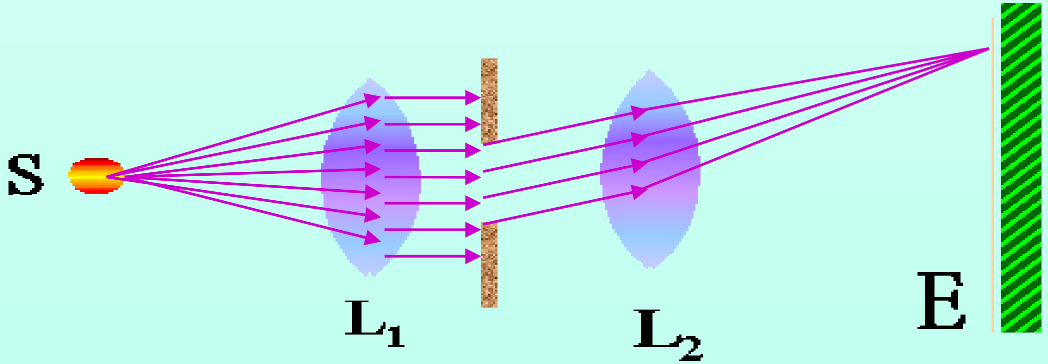
二者均为有限远, 或者有一个为有限远



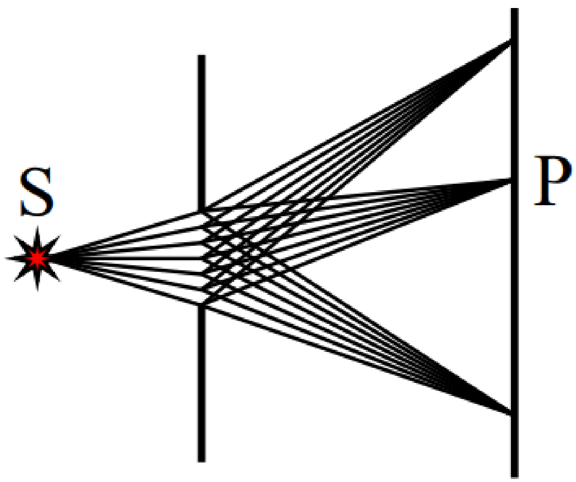
2.夫琅禾费(J.Fraunhofer)衍射

光源到障碍物: 无限远 (入射光为平行光)

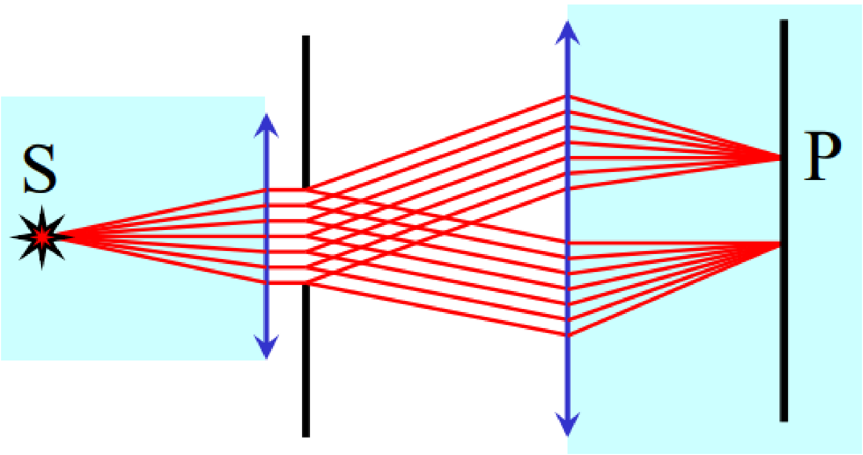
障碍物到受光屏: 无限远 (衍射光为平行光)



1)费涅耳衍射 (近场衍射)：光源、障碍物、屏相距有限远，或三者中有两者相距有限远



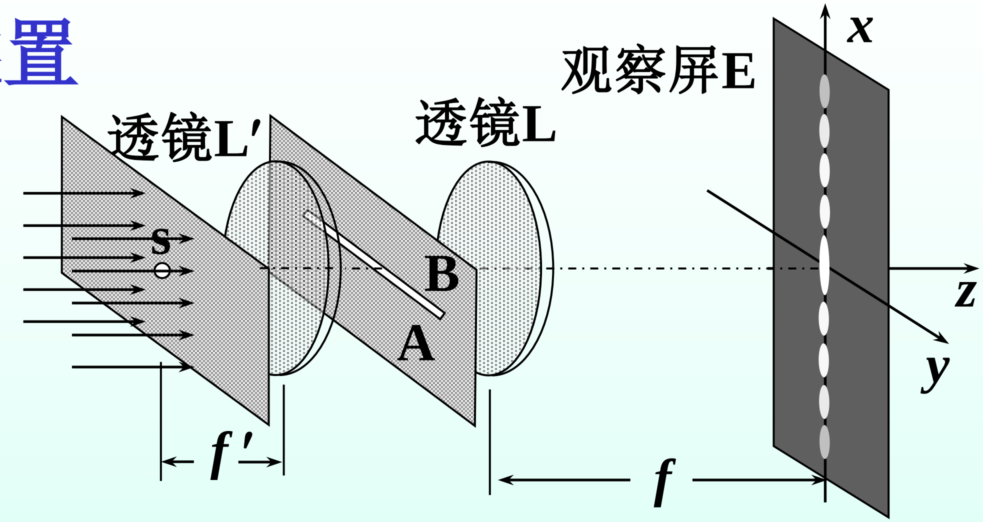
2) 夫琅和费衍射（远场衍射）：三者相距无限远



利用凸透镜把平行光聚焦，等效于光源和屏无限远

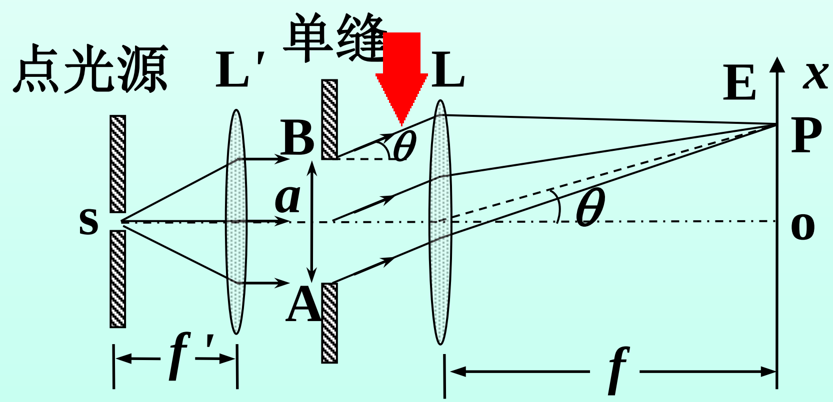
6.5 夫琅禾费单缝衍射
(Diffraction by single slit)

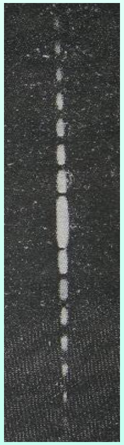
6.5.1 夫琅禾费单缝衍射装置



1.衍射光线: 平行光线

P点明暗取决于单缝处波阵面上所有子波发出的平行光线到达P点的振动的相干叠加。





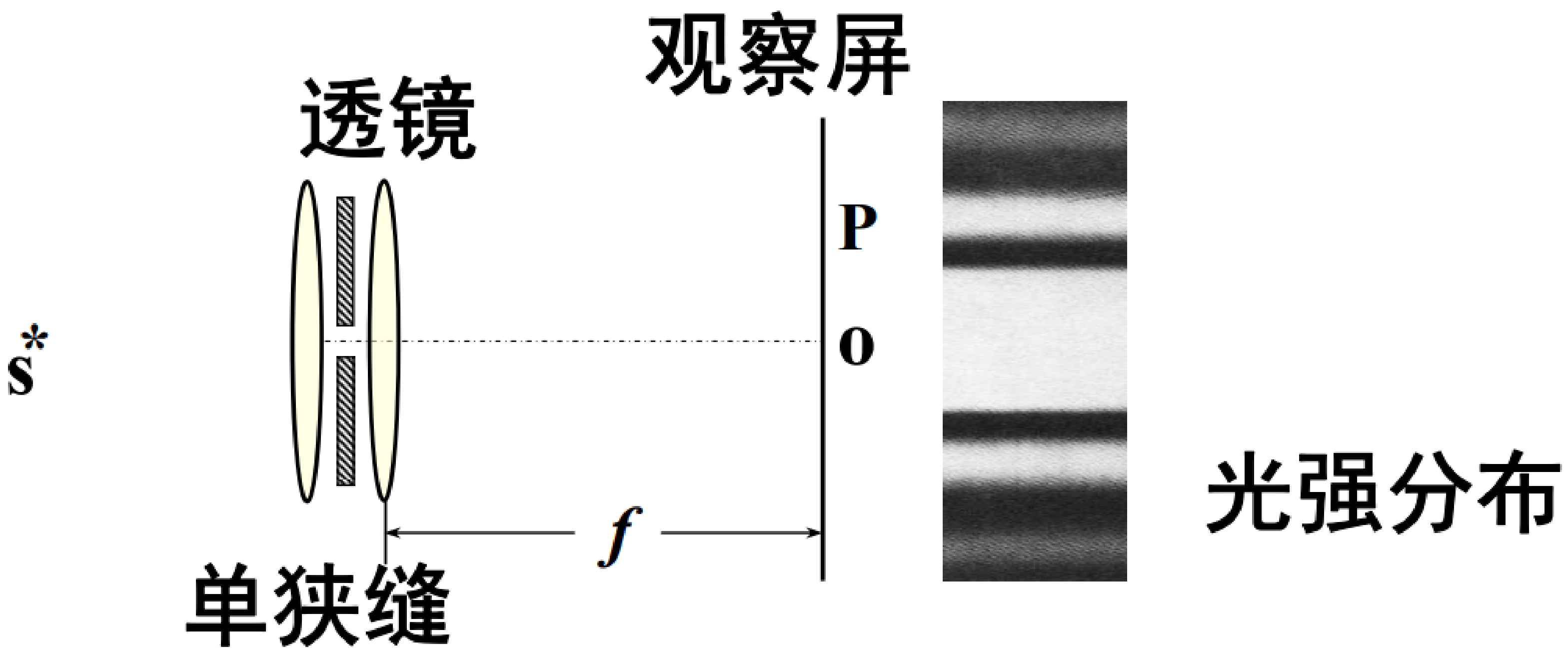
2.衍射角θ: 衍射光线与单缝平面法线方向的夹角。

规定:逆时转过的角, 取 “+”
顺时转过的角, 取 “-”

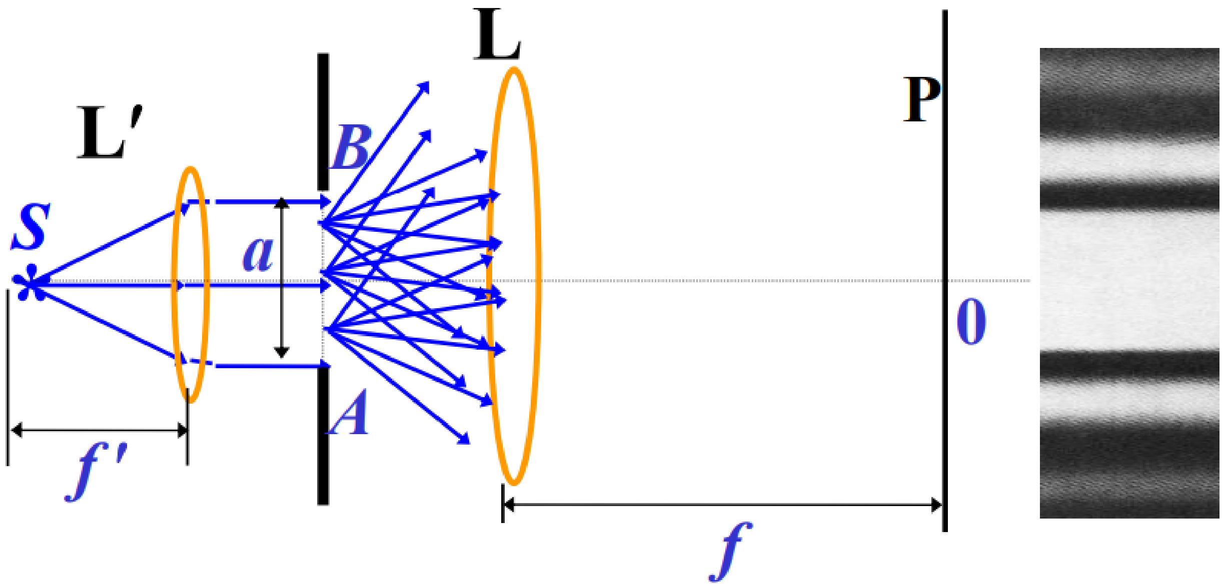
θ在$\pm\pi/2$ 范围内

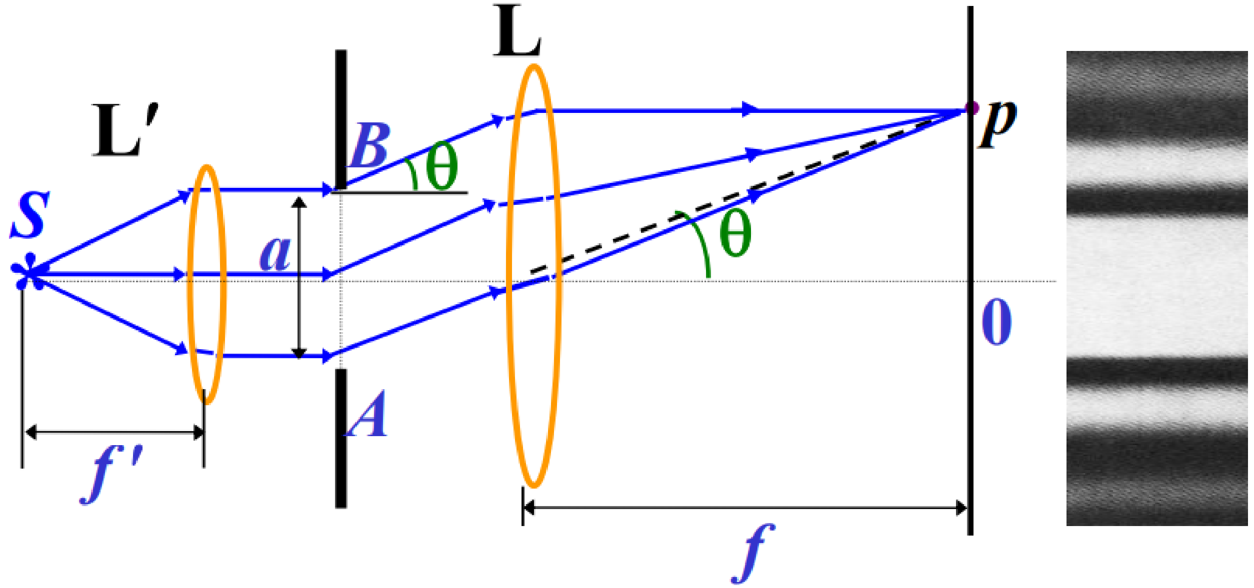
夫琅和费的单缝衍射

实验装置及光路示意图



光路示意图



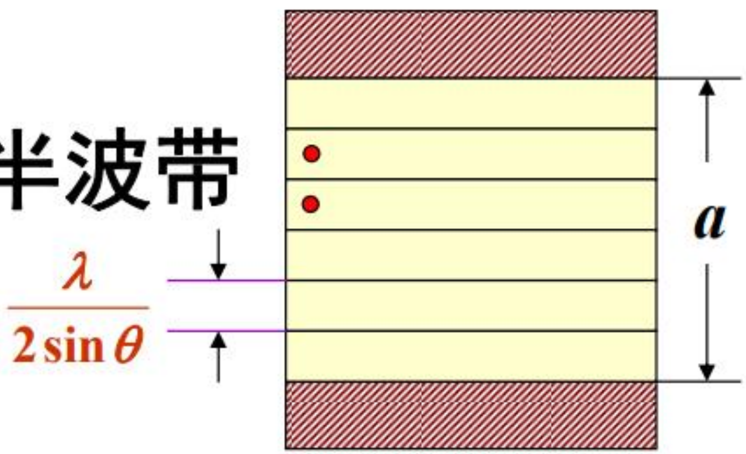


$$E=\int_S C\frac{K(\theta)}{r}\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}r)\mathrm{d}S$$

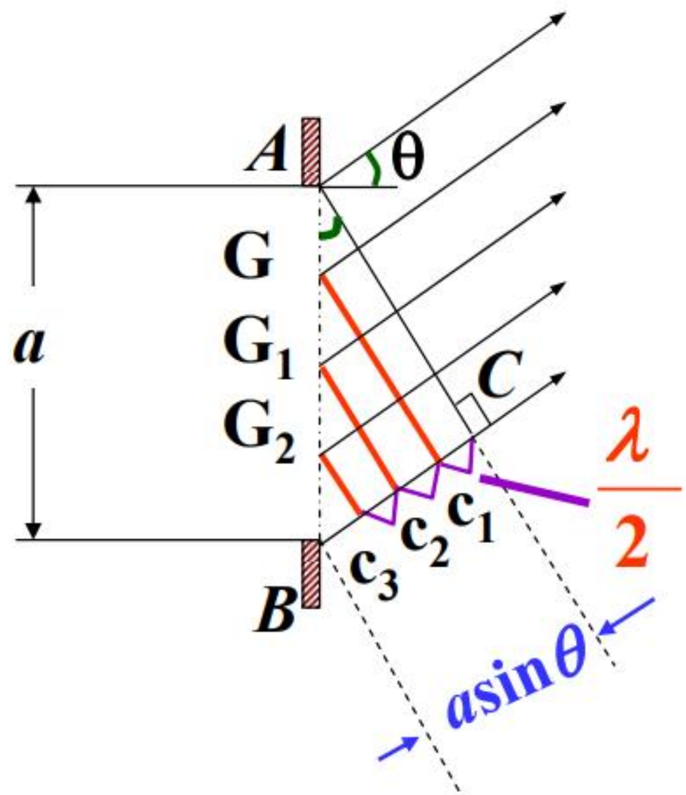
菲涅耳积分

半波带法

半波带



$\frac{\lambda}{2\sin\theta}$
a

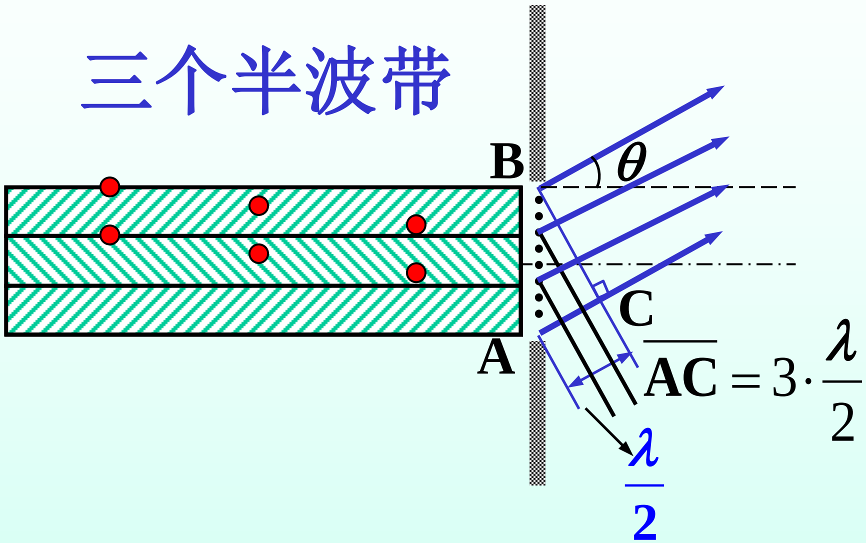


A
θ
G
G_1
G_2
a
C
$\frac{\lambda}{2}$
c_1
c_2
c_3
B
$a\sin\theta$

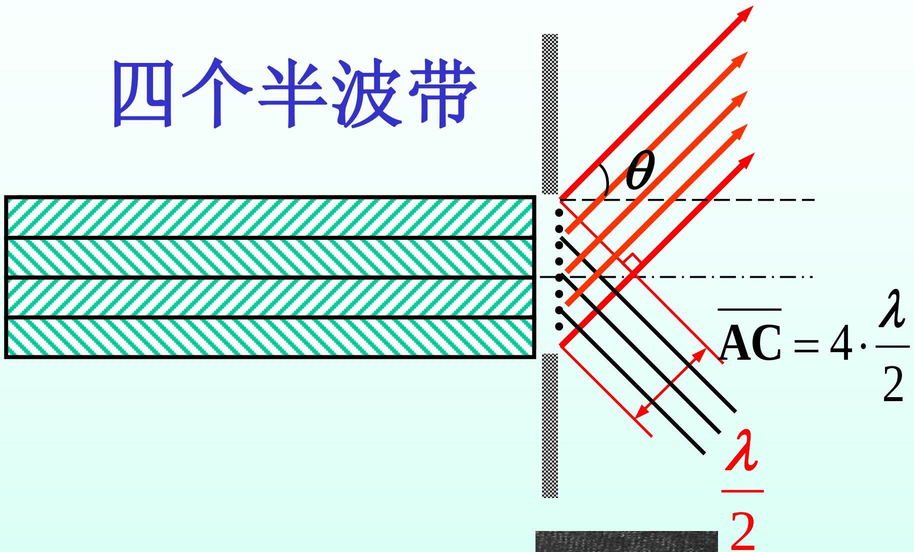
6.5.2用菲涅耳半波带分析夫琅禾费单缝衍射图样

1.半波带(half-wave zone)

三个半波带

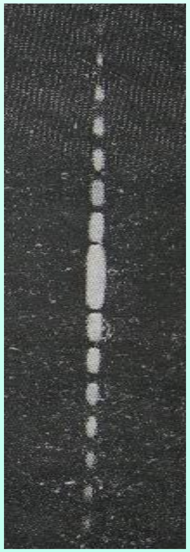


四个半波带



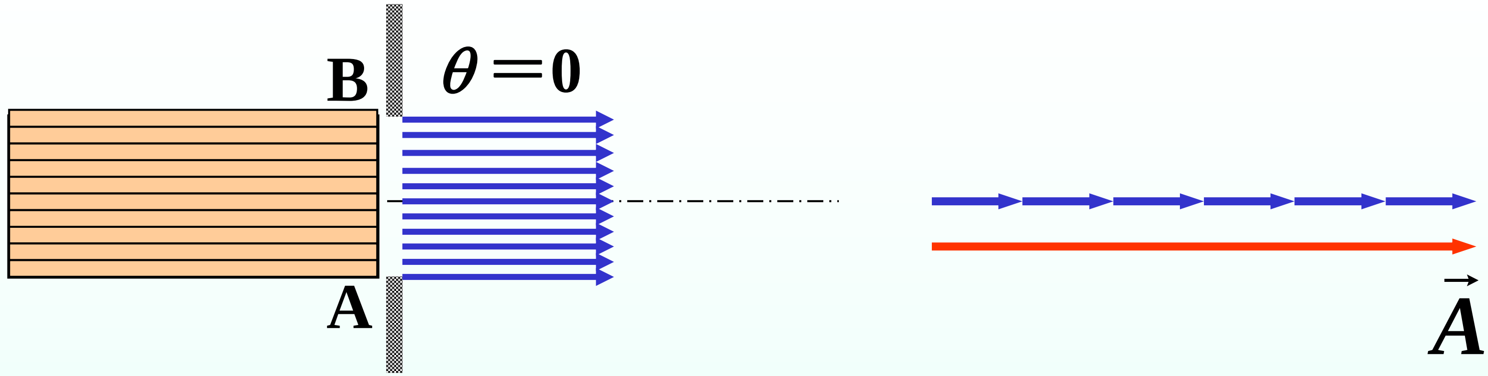
2.衍射条纹分析

$$\begin{cases} a \cdot \sin\theta = 2k\dfrac{\lambda}{2} & k=\pm 1, \pm 2, \ldots \text{暗} \\ a \cdot \sin\theta = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & k=\pm 1, \pm 2, \ldots \text{明} \end{cases}$$

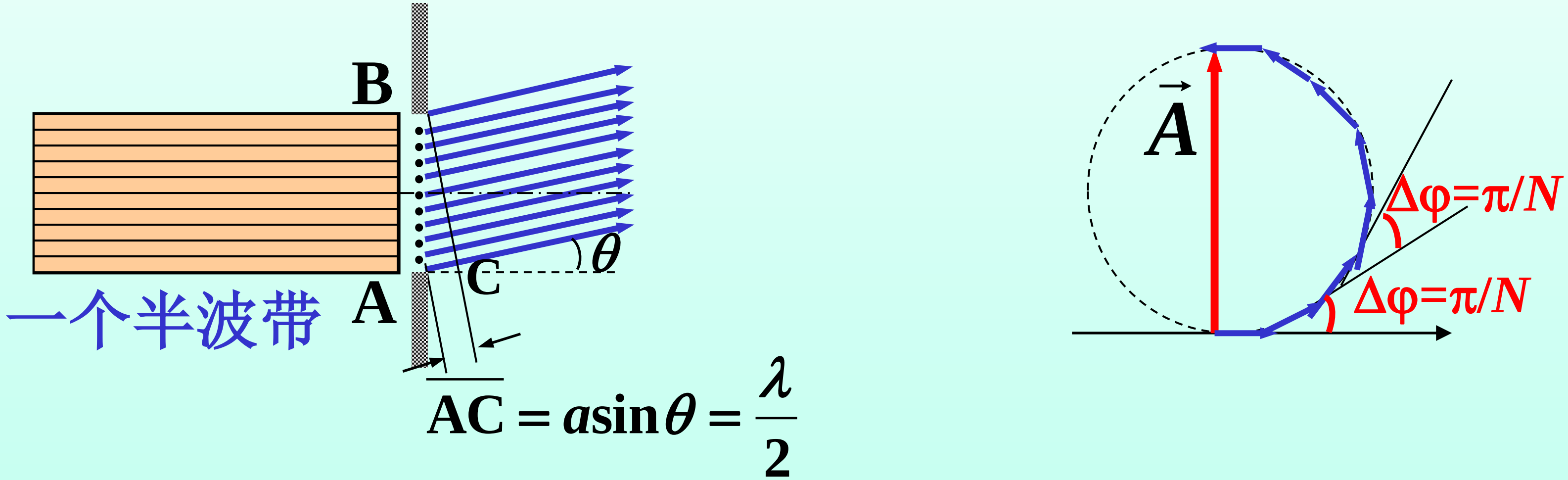


(6)

中央零级明纹区域: $-\lambda < a \cdot \sin\theta < \lambda$

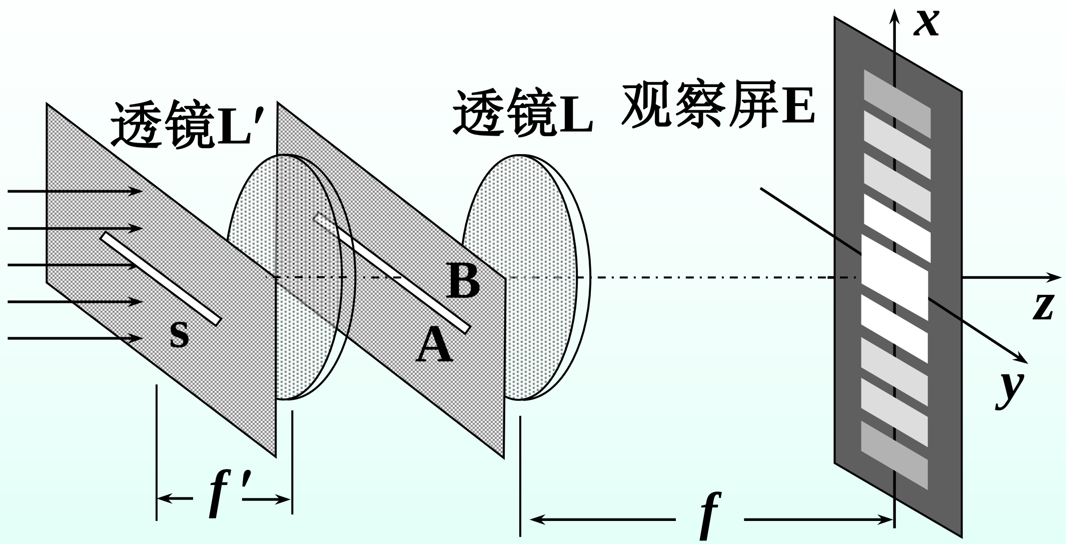


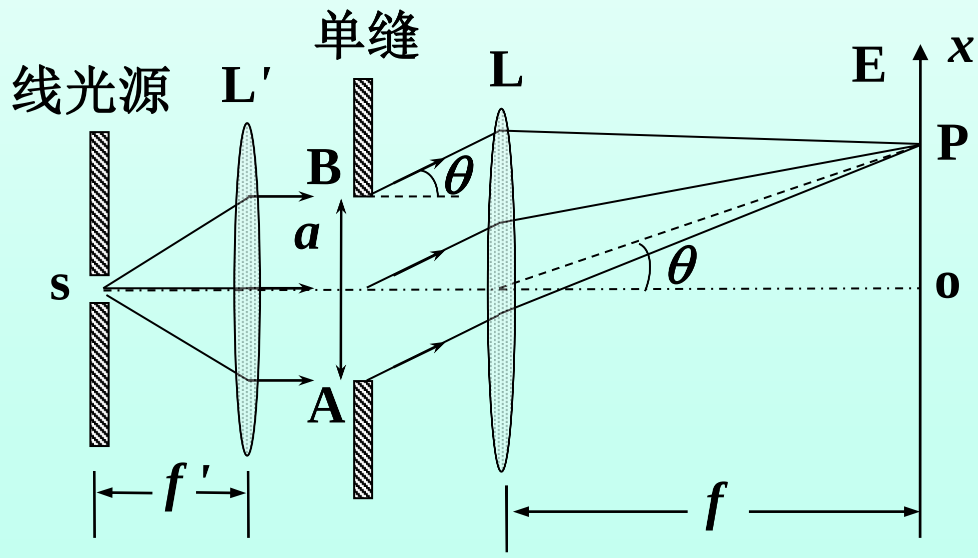
上图中: 露出的波面被分为N个细带, 各个细带发出的光在P点的振幅矢量, 其大小相等, 相位相同, 叠加后加强。

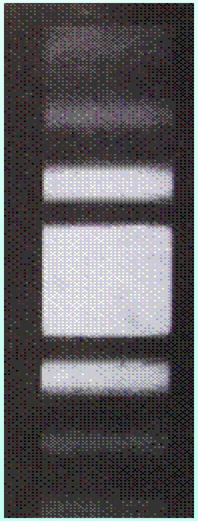


上图中: 半波带被分为N个细带, 各个细带发出的光在P点的振幅矢量, 其大小相等, 相位逐个相差 π/N

3.线光源照明的夫琅和费单缝衍射图样



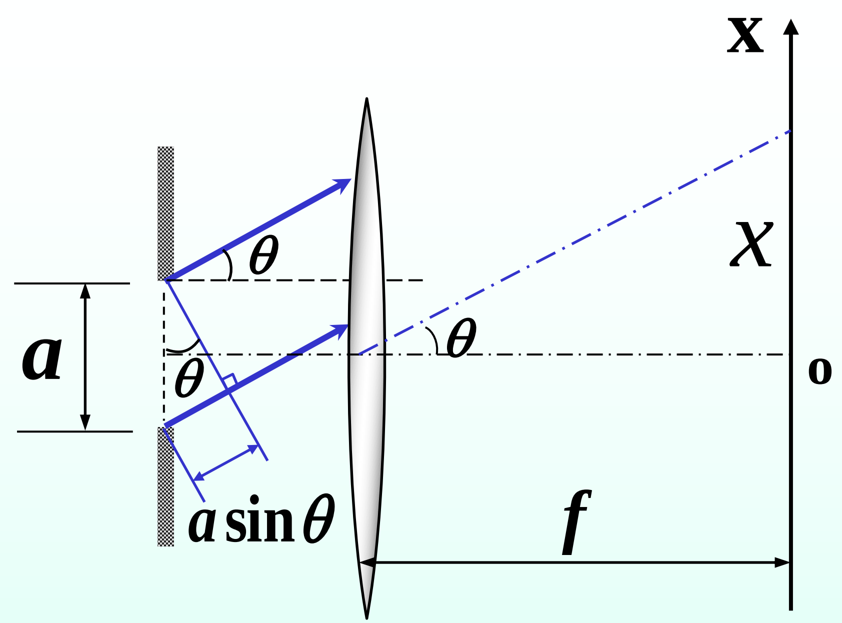




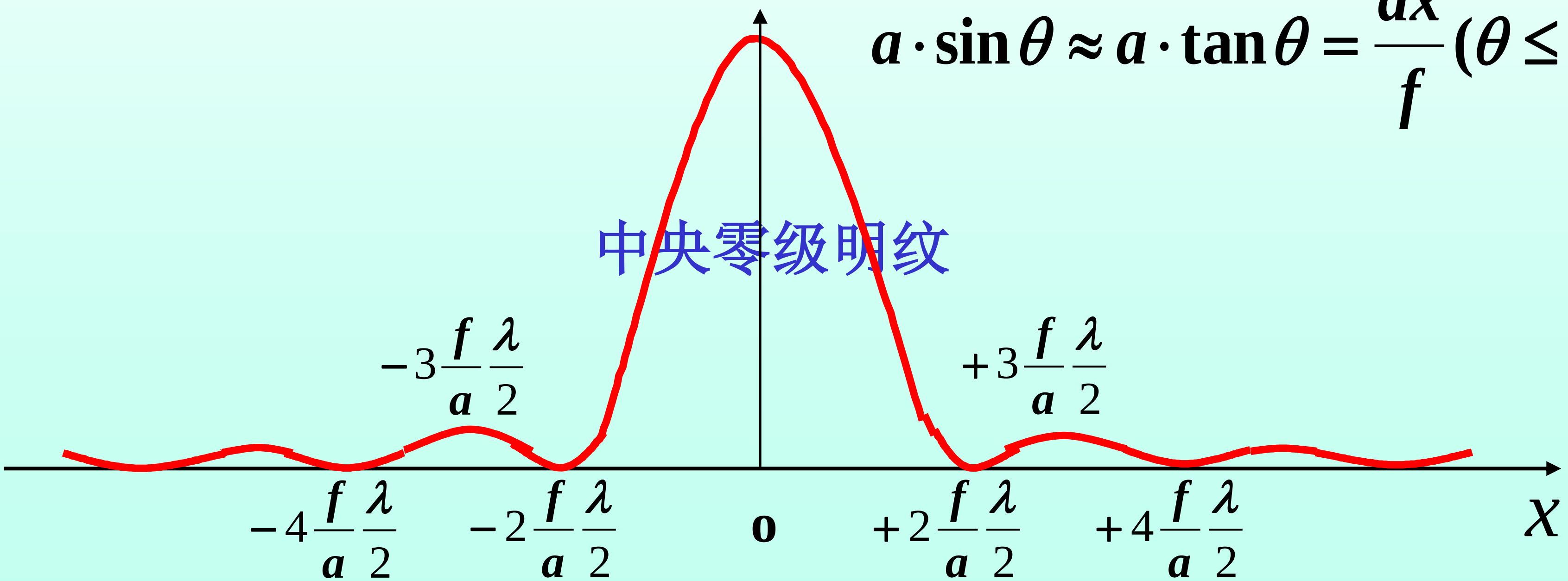
6.5.3 单缝衍射的条纹分布

1.单缝衍射条纹的位置

$$x=\begin{cases}(2k+1)\dfrac{f\lambda}{2a},k=\pm1,\pm2,\cdots(\text{明})\\[2ex] 2k\dfrac{f\lambda}{2a},k=\pm1,\pm2,\cdots(\text{暗})\end{cases}$$



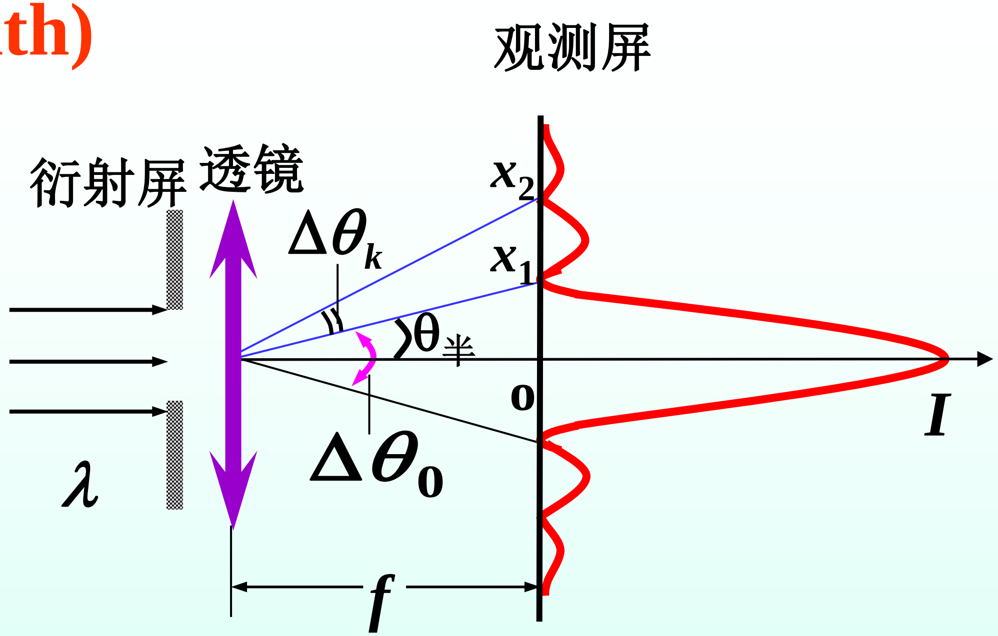
$$a\cdot\sin\theta\approx a\cdot\tan\theta=\frac{ax}{f}(\theta\le5^\circ)$$



2.衍射条纹宽度(fringe width)

1)角宽度(angular width)

某一明纹的角宽度为该明纹两侧两相邻暗纹中心对透镜光心所张的角度。



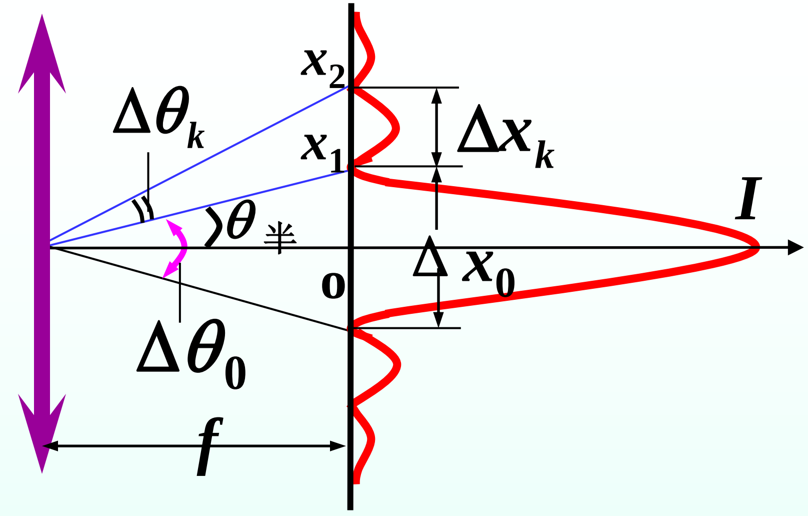
设第 k 级明纹角宽度为$\Delta\theta_k$，由暗纹条件得

$$a\cdot\sin\theta_k=\pm k\lambda \qquad \sin\theta_k\approx\theta_k \qquad \theta_k=\frac{k\lambda}{a}$$

$$\Delta\theta_k=\theta_{k+1}-\theta_k=\frac{\lambda}{a}$$ (与 k 无关)

中央明纹角宽度$\Delta\theta_0$

$$\Delta\theta_0 = \theta_{+1} - \theta_{-1} = \frac{\lambda}{a} - (-\frac{\lambda}{a}) = \frac{2\lambda}{a}$$



$$\theta_半 = \frac{\lambda}{a}$$ 半角宽度**(half-angular width)**

2)衍射明纹的线宽度

中央明纹: $\Delta x_0 = 2f\,\mathrm{tg}\theta_半 \approx 2f\theta_半 = 2f\frac{\lambda}{a}$

其它明纹: $\Delta x_k = f\Delta\theta_k = f\frac{\lambda}{a}$

讨论:

1)缝宽 a 对条纹影响

中央明纹宽度: $\Delta x_0 = \dfrac{2f\lambda}{a}$ 其它明纹宽度: $\Delta x_k = \dfrac{f\lambda}{a}$

f, λ相同: a 越小 Δx_k越大,条纹越疏(衍射显著)

.... a 越大 Δx_k 越小,条纹越密(a不可过大)

当 $a >> \lambda$ 时, $\dfrac{\lambda}{a} \to 0$ $\Delta x_k \to 0$

各级衍射条纹合并成单一的亮线 ——光源s的几何光学像。

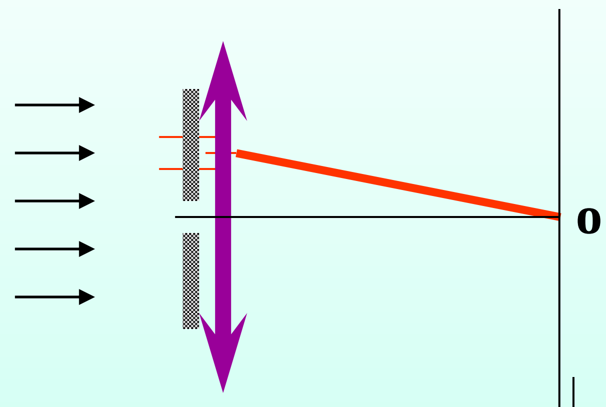
∴几何光学是波动光学在 $\lambda/a \to 0$ 时的极限情形。

2)k越大明纹亮度越小(为什么?)

3)衍射光谱: 白色光入射

-2级光谱 -1级光谱 中央明纹 1级光谱 2级光谱

$$a\cdot\sin\theta=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$



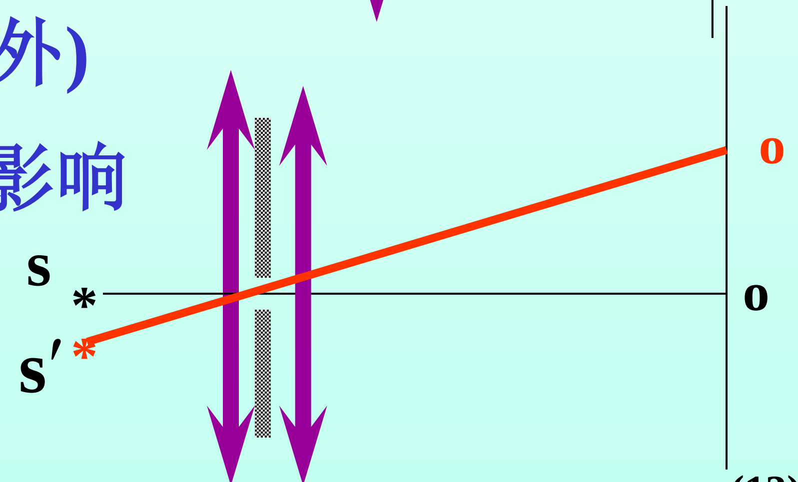
a,k,同: λ越大 ⇨ θ越大, x越大

各级明纹为彩色条纹

中央零级明纹中心是白色的,

边缘是彩色条纹(紫在内红在外)

4)单缝上下移动对条纹分布无影响



5)光源上下移动对条纹的影响

例12:单缝夫琅禾费衍射,已知:a=0.3mm, f=12.62cm
第五级暗纹之间距离L=0.24cm;

求: 1) λ, 2) k=5的暗纹对应的半波带数。

解: 1) $a\cdot\sin\theta_5=k\lambda$ $k=5$ (1)

$L=2x_5$ (2)

$x_5=f\cdot\tan\theta_5$ (3) $\sin\theta_5\approx\tan\theta_5\approx\theta_5$

由(1)得: $\theta_5=\dfrac{5\lambda}{a}$ 代入(3): $x_5=\dfrac{5f\lambda}{a}$

$$L=2x_5=\frac{10f\lambda}{a}\qquad \lambda=\frac{aL}{10f}=\frac{0.3\times0.24}{10\times12.62}\times10^{-7}=5705[\text{Å}]$$

2) $a\cdot\sin\theta_5=2k\dfrac{\lambda}{2}$ $2k$=10个半波带

例13: 单缝衍射,已知:a=0.5mm, f=50cm 白光垂直照射,观察屏上x=1.5mm处为明条纹,求1) 该明纹对应波长? 衍射级数? 2) 该条纹对应半波带数?

解:1) $a\cdot\sin\theta=(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$ (1)

$$x = f\tan\theta \qquad (2) \qquad \sin\theta\approx\tan\theta=\frac{x}{f}$$

$$\lambda=\frac{2ax}{(2k+1)f}=\frac{2\times0.5\times1.5}{(2k+1)500}\times10^{7}=\frac{3\times10^{4}}{2k+1}[\text{Å}]$$

k=1: λ_1=10000 k=3: λ_3=4286Å

k=2: λ_2=6000Å k=4: λ_4=3333Å

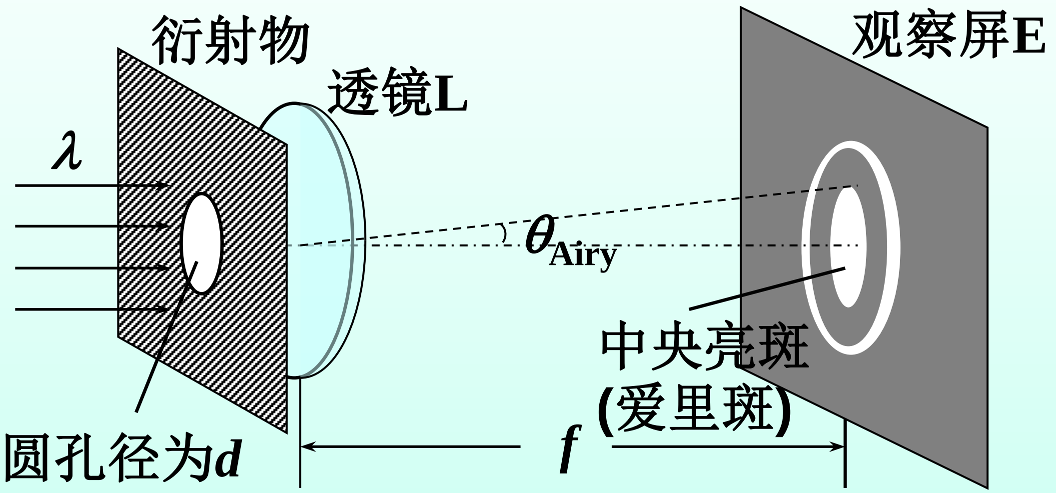
答:x=1.5mm处有 λ_2=6000Å, λ_3=4286Å

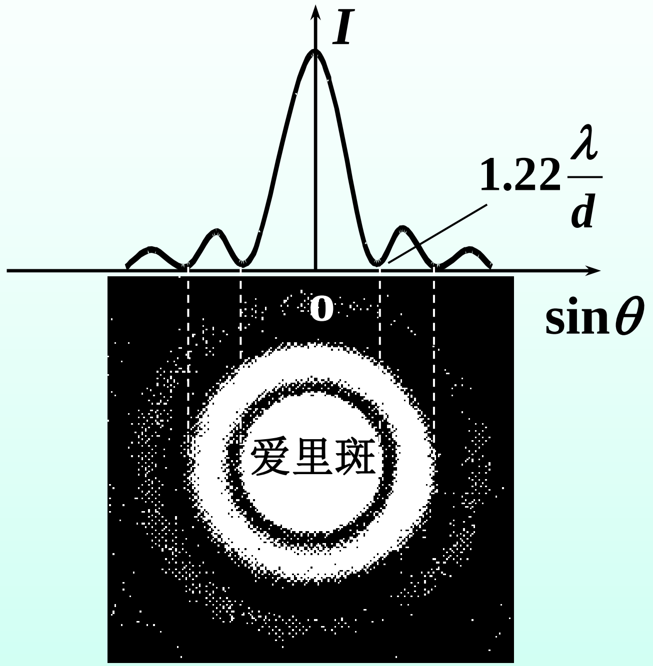
2)对6000Å, k=2时 $2k$+1=5 单缝分为5个半波带

对4286Å , k=3时 $2k$+1=7 单缝分为7个半波带

6.6 夫琅禾费圆孔衍射 光学仪器的分辨本领
(Fraunhofer diffraction by circular hole and resolving power of optical instrument)

6.6.1 夫琅禾费圆孔衍射





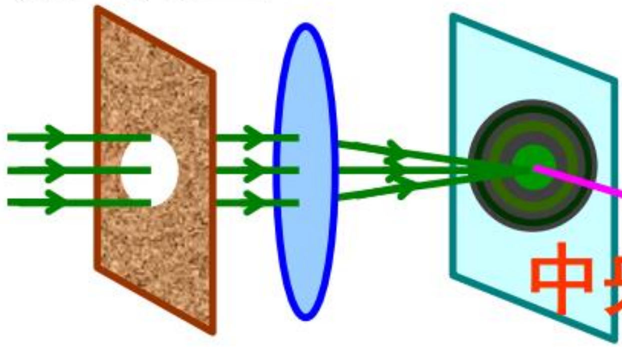
爱里斑(Airy disk)的半角宽度θ_{Airy}：

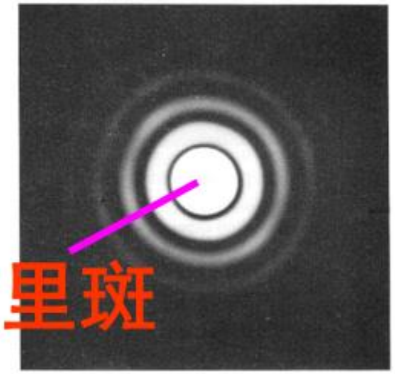
$$\theta_{\text{Airy}} \approx \sin\theta_1 = 0.61\frac{\lambda}{r} = 1.22\frac{\lambda}{d}$$

式中r 和d 是圆孔的半径和直径

在光学仪器中所使用的透镜都是圆形的，
而且大多数是通过平行光或近似的平行光
成像的
光通过透镜的衍射相当于光通过夫琅和费
圆孔衍射

实验装置



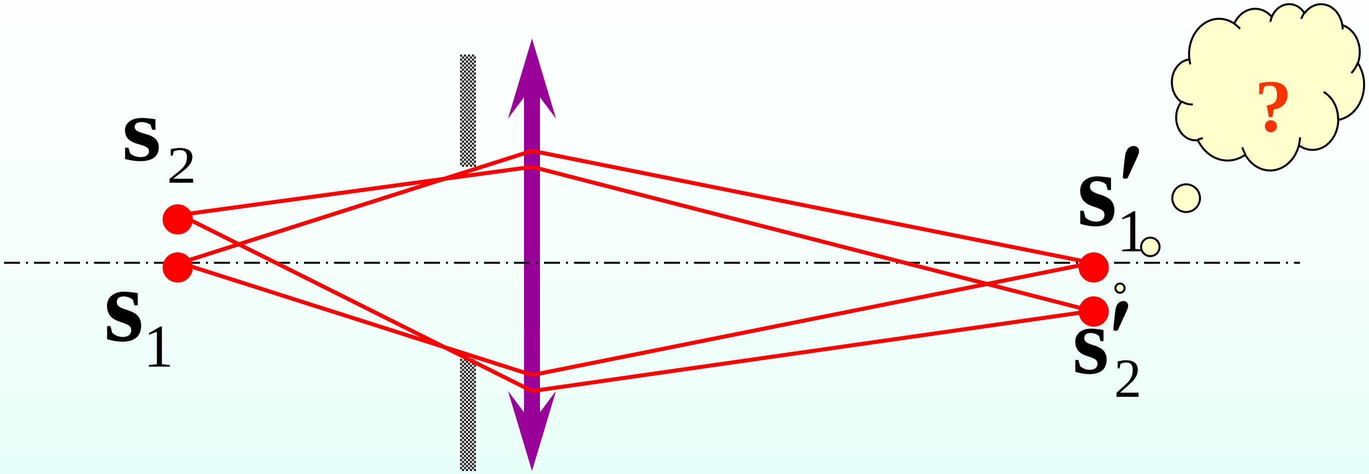


中央亮斑— 艾里斑

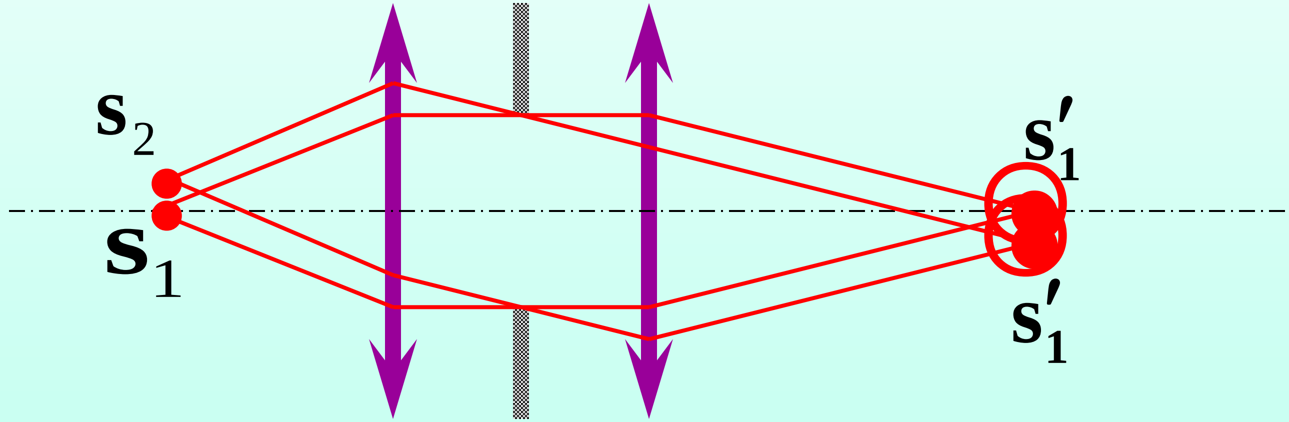
集中了约 84%
的衍射光能

由菲涅耳积分公式，可计算出观察屏上的光强
分布和各级明暗纹的位置

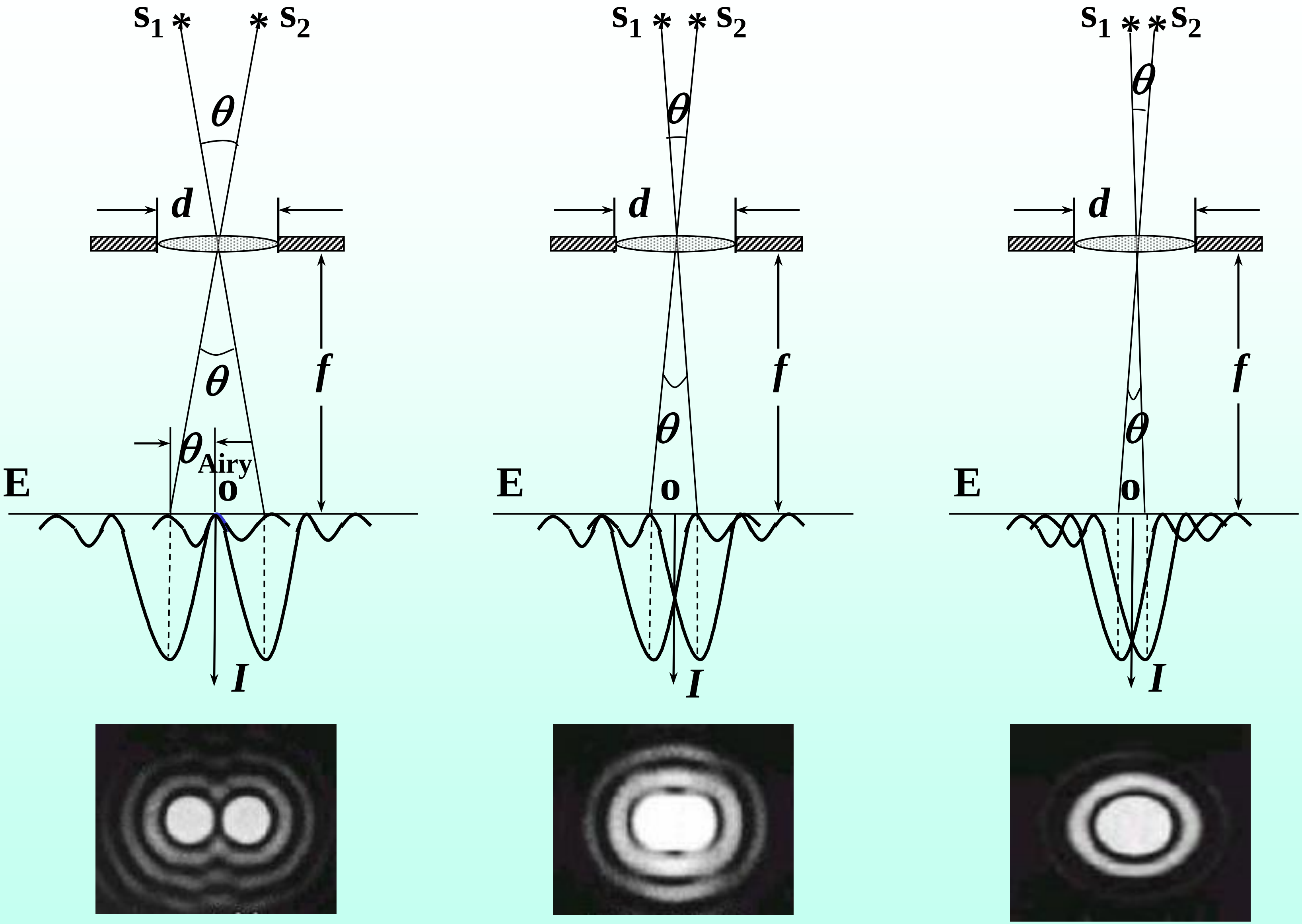
6.6.2 光学仪器的分辨本领(resolving power)



等效光路



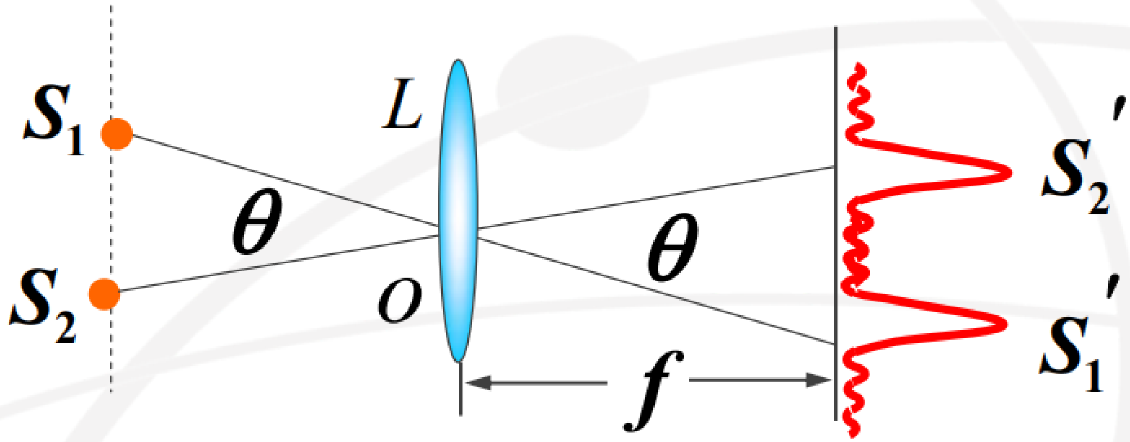
物点的像斑就是一个夫琅禾费衍射图样


S1 S2
θ
d
f
E
o
I
θAiry

光学仪器的分辨本领

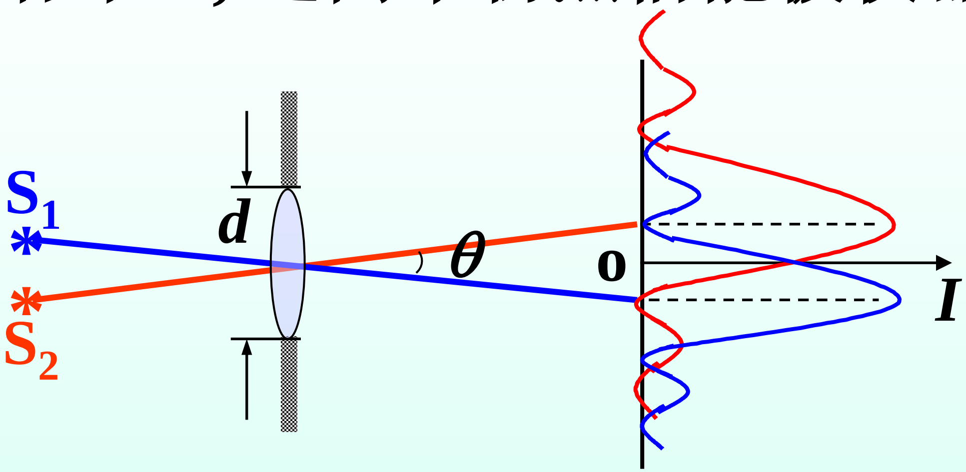
分辨本领是指光学仪器分辨微小细节的能力。从几何光学的观点出发，一个理想的光学仪器使点物成点象，因而它的分辨本领是无限的。但是，实际上由于光的衍射，一个物点形成一个衍射象斑（艾里斑），因此光学仪器的分辨本领是有限的

可分辨两个物点、光源或两颗星星的成象



当两个物点距离足够小时，就存在能否分辨的问题

瑞利判据(Rayleigh criterion):如果一物点在像平面上形成的爱里斑中心，恰好落在另一物点的衍射第一级暗环上, 这两个物点恰能被仪器分辨。



$\theta > \theta_{Airy}$ 可分辨

$\theta = \theta_{Airy}$ 恰可分辨

$\theta < \theta_{Airy}$ 不可分辨

最小分辨角(angle of minimum resolution):

$$\boxed{\theta_{min} = \theta_{Airy} = \frac{1.22\lambda}{d}}$$

分辨本领(resolving power): $R = \dfrac{1}{\theta_{min}} = \dfrac{1}{1.22}\dfrac{d}{\lambda}$

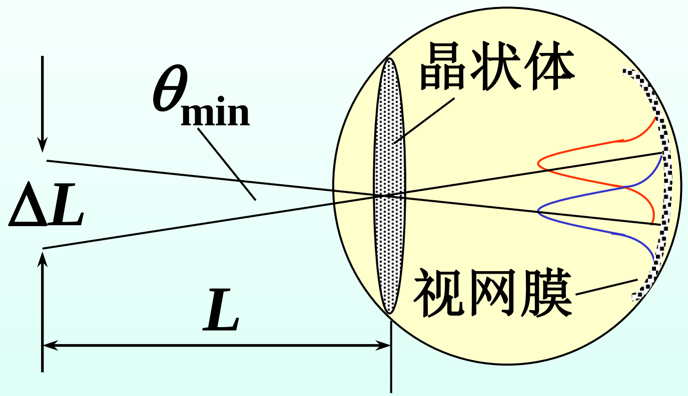
思考: 单缝夫琅禾费衍射的最小分辨角? $(\theta_{min} = \theta_{半} = \dfrac{\lambda}{a})$

例14: 在通常亮度下,人眼的瞳孔直径约3mm,人眼最敏感的波长为550nm(黄绿光), **求:** 1)人眼的最小分辩角? 2)在明视距离(250mm)或30m处, 字体间距多大时人眼恰能分辩?

解: 1)

$$\theta_{\min} = \frac{1.22\lambda}{d} = \frac{1.22\times 550\times 10^{-6}}{3}$$

$$= 2.24\times 10^{-4}[\text{rad}]$$



2)在明视距离250mm处:

$$\Delta L = L\cdot\theta_{\min} = 250\times 2.24\times 10^{-4} = 5.6\times 10^{-2}[\text{mm}]$$

在30mm处:

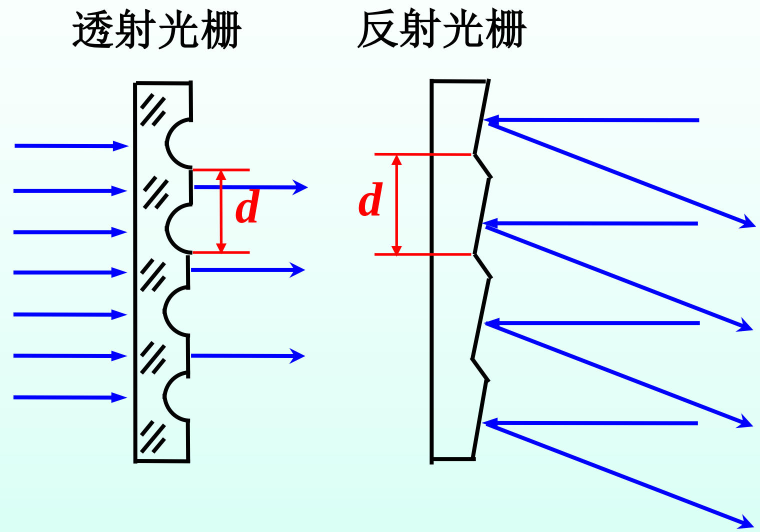
$$\Delta L = L\cdot\theta_{\min} = 6.72[\text{mm}]$$

6.7 光栅衍射 (grating diffraction)

6.7.1 光栅(grating)

1.光栅:由大量等宽等间距的平行狭缝组成的光学系统

2.光栅常数(grating constant):

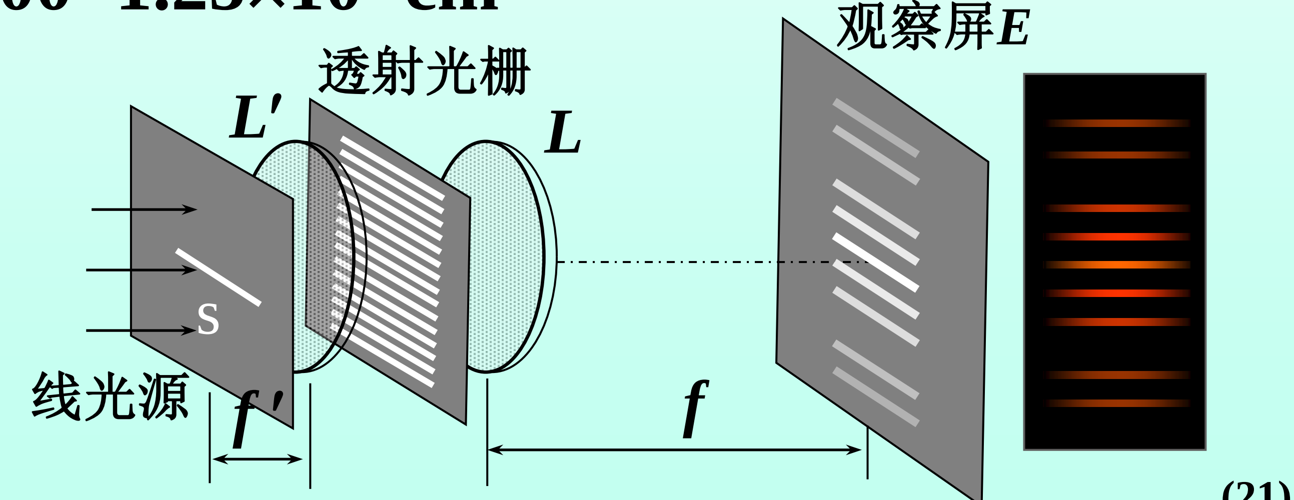


$\boxed{d=a+b}$

每cm有几百、
几千条刻痕

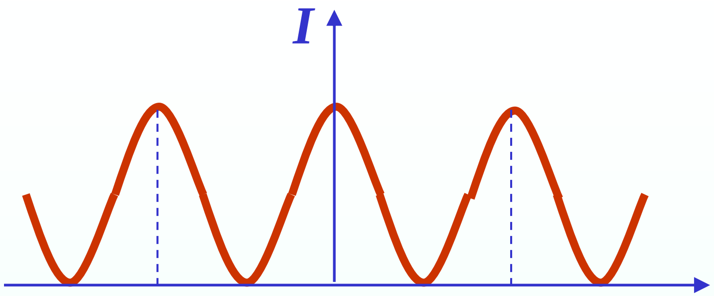
光栅常数 d 与缝数/cm
成倒数关系。如:8000刻痕/cm,
则 $d=a+b=1/8000=1.25\times10^{-4}$cm

3.光栅衍射现象



6.7.2 光栅衍射条纹的形成

1. 双缝衍射条纹的形成



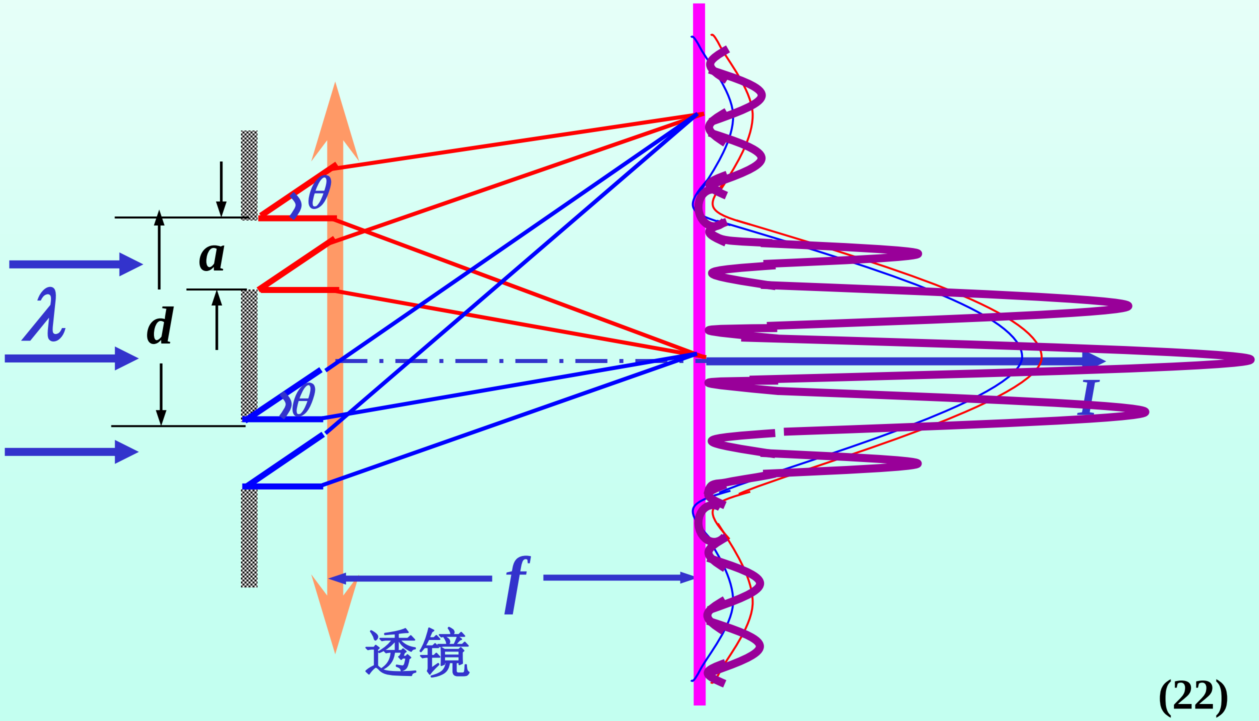
不考虑衍射,

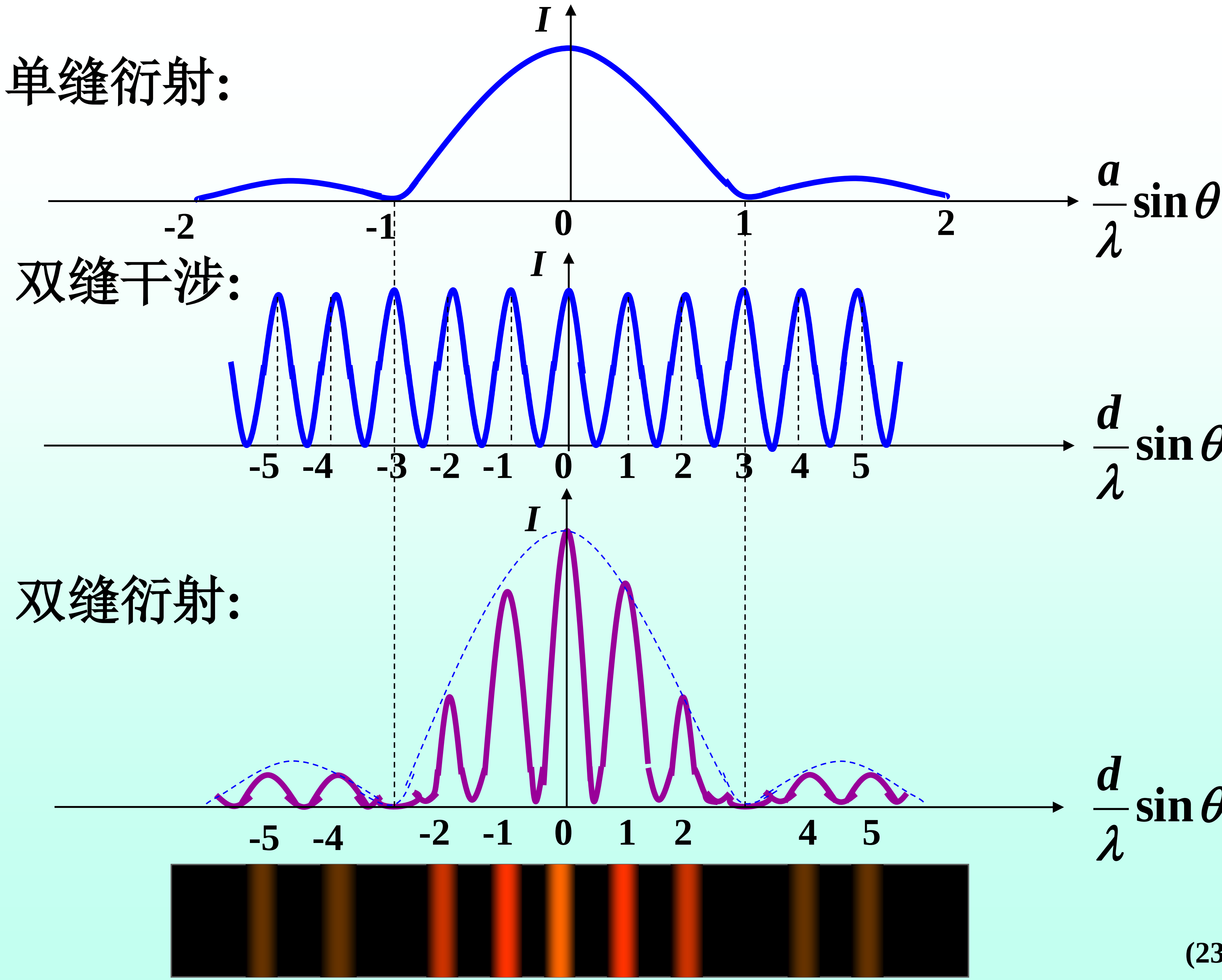
双缝干涉光强分布图(右上)

考虑衍射的影响,

每个缝的单缝衍射图样分布是相互重叠的。

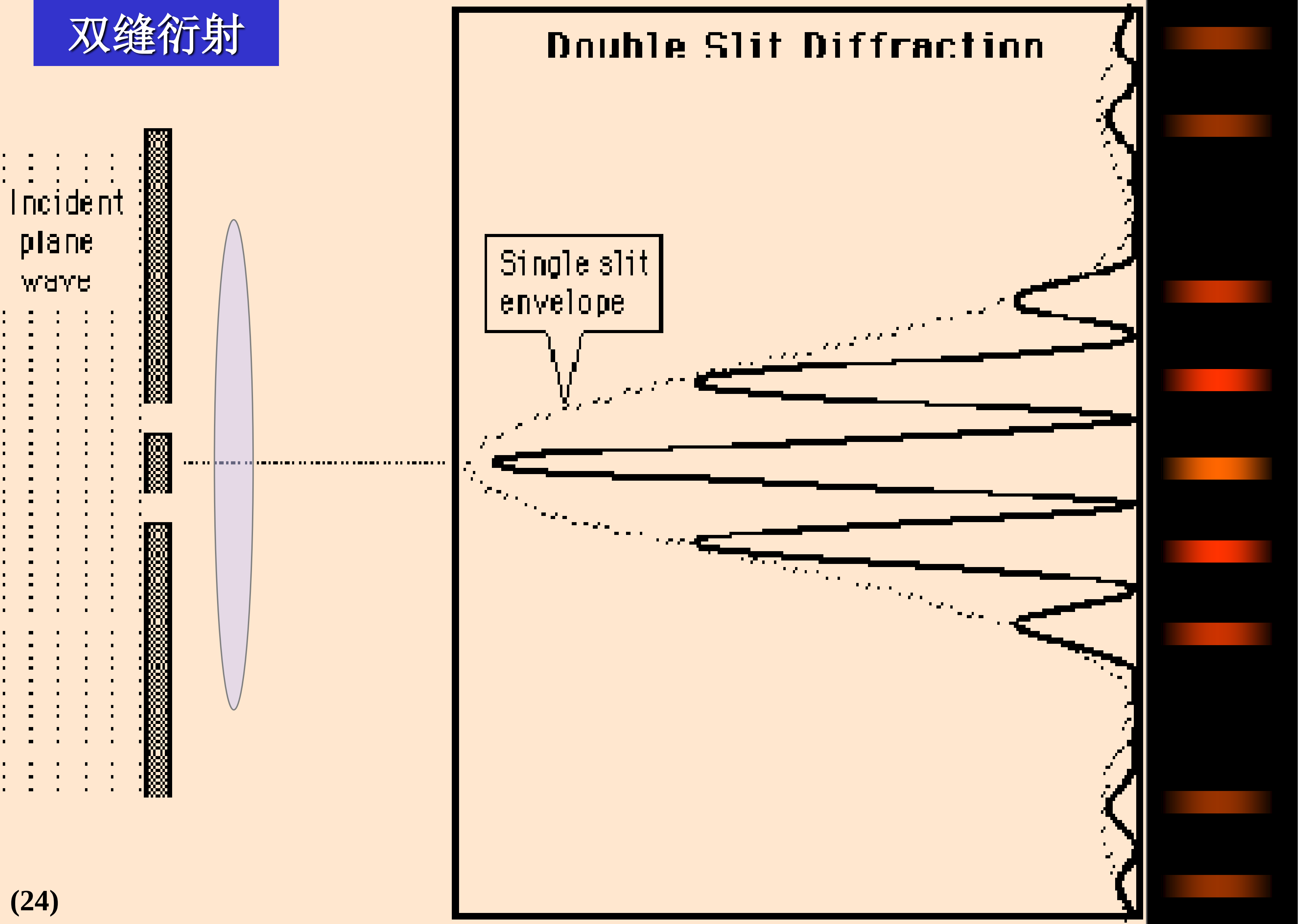
每个缝内各处的子波相互叠加形成的单缝衍射光(等效为一束光)在焦平面上相遇产生干涉。





单缝衍射:
I
-2
-1
0
1
2
$\frac{a}{\lambda}\sin\theta$
双缝干涉:
I
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
$\frac{d}{\lambda}\sin\theta$
双缝衍射:
I
-5 -4 -2 -1 0 1 2 4 5
$\frac{d}{\lambda}\sin\theta$

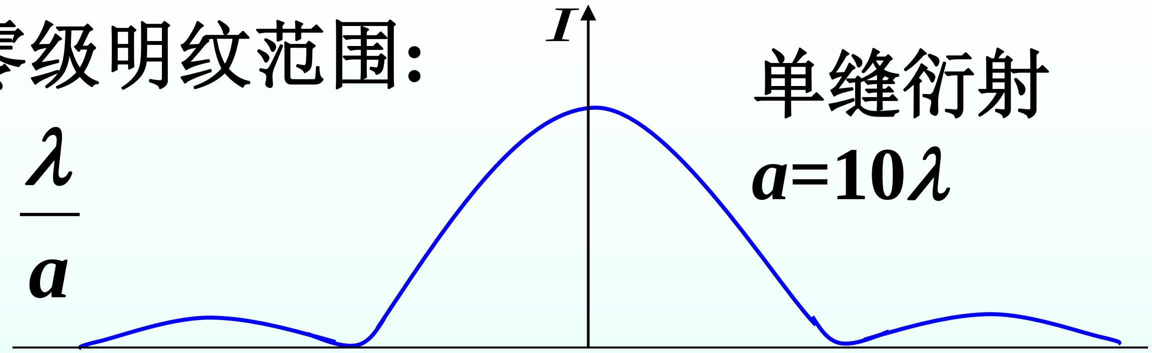
双缝衍射


Incident
plane
wave
Double Slit Diffraction
Single slit
envelope

扬氏双缝干涉和双缝衍射的区别:

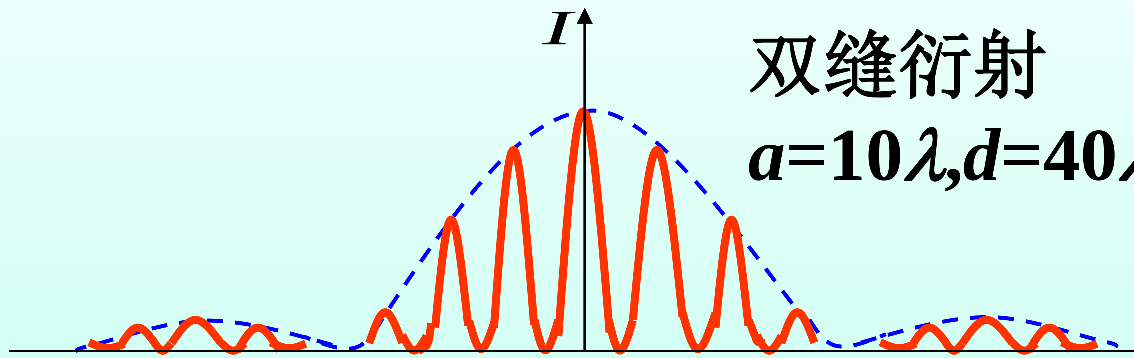
单缝衍射中央零级明纹范围:

$$-\frac{\lambda}{a} < \sin\theta < \frac{\lambda}{a}$$



单缝衍射

a=10λ



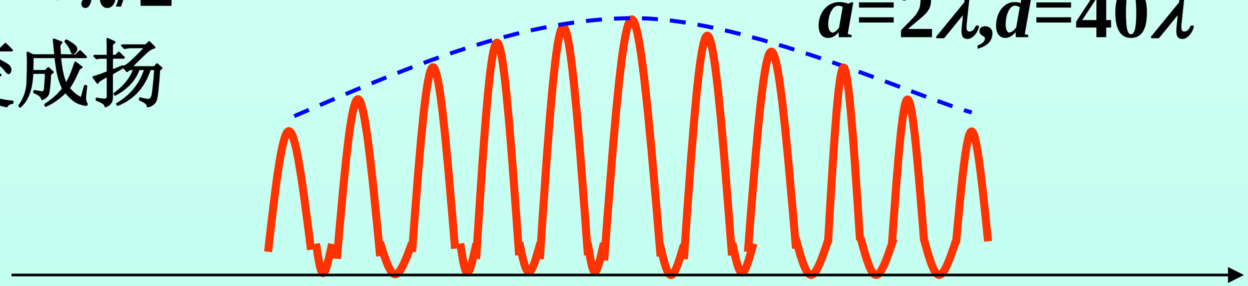
双缝衍射

a=10λ,d=40λ

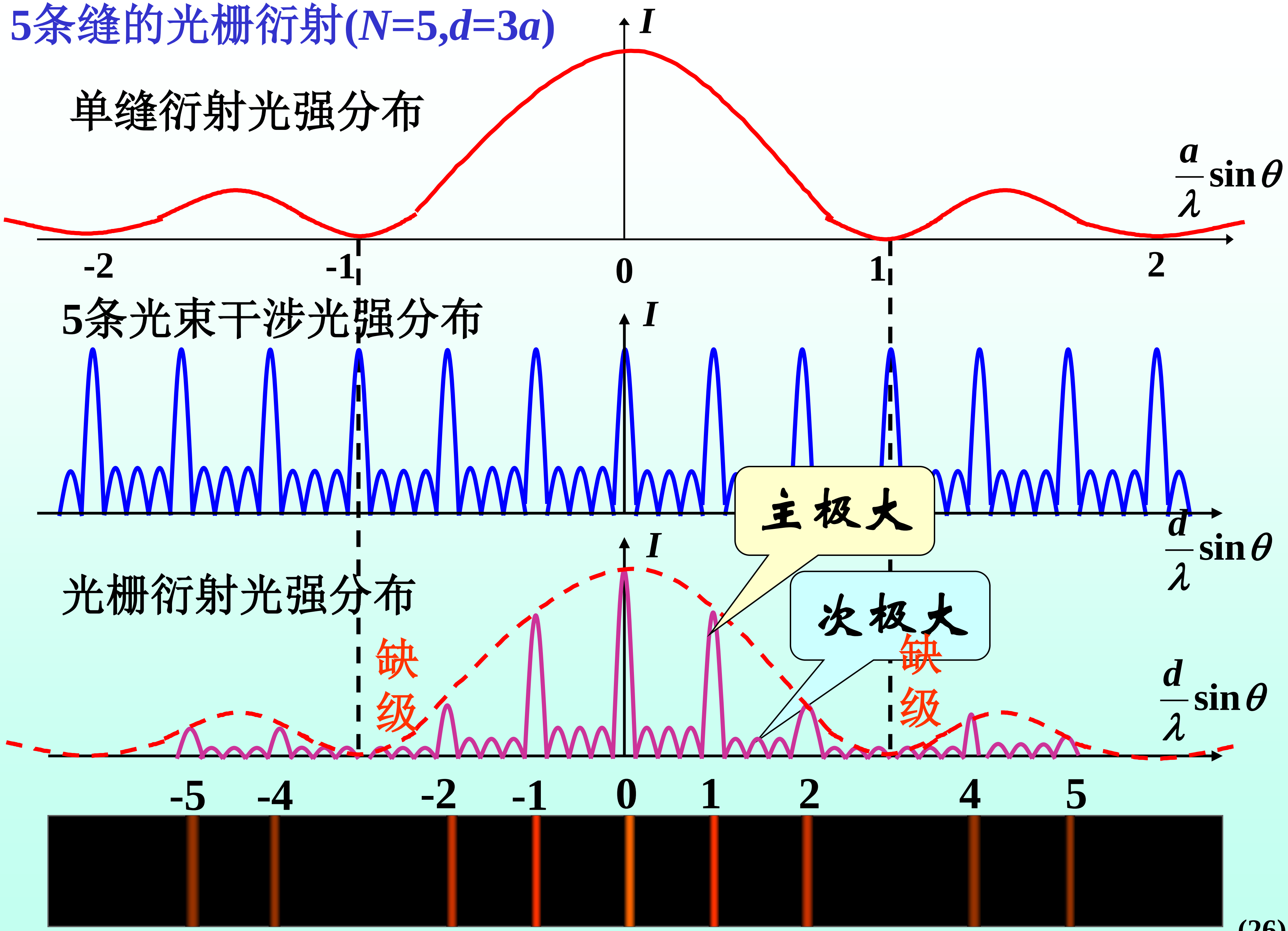
当$a \to \lambda$时, $\theta \to \pi/2$

双缝衍射演变成扬氏双缝干涉

a=2λ,d=40λ

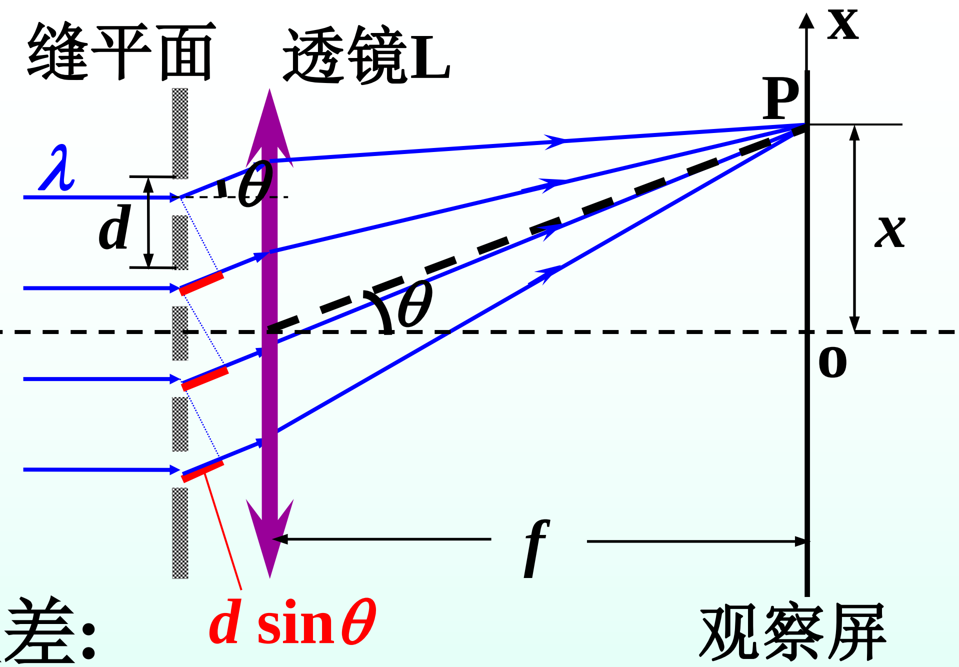


5条缝的光栅衍射(N=5,d=3a)



2.明纹条件

P点的光强分布主要由相邻二单缝产生的衍射光的光程差决定。



相邻二单缝衍射光的光程差:

$$\delta = (a+b)\sin\theta$$

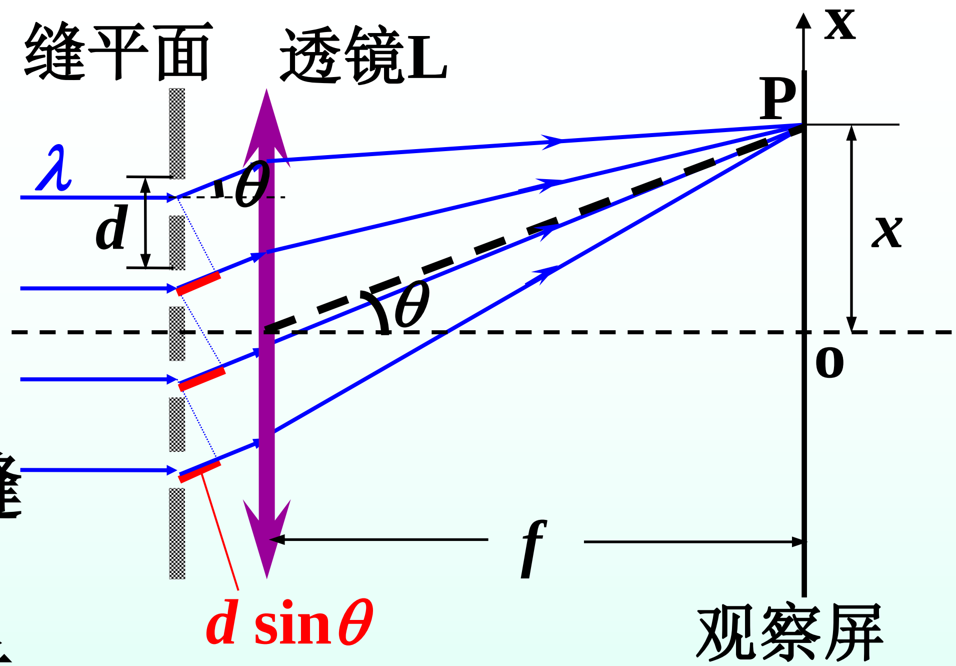
$$\boxed{d \cdot \sin\theta = k\lambda}$$

k=0,±1,±2,……主极大

光栅方程(grating equation)

讨论:

$$\boxed{d\cdot\sin\theta = 2k\frac{\lambda}{2}}$$



1)$d\cdot\sin\theta$表示相邻两缝在θ方向的衍射光的光程差。

例如:第二级明纹相邻两缝衍射光的光程差为2λ,第1条缝与第N条缝衍射光的光程差为$(N\text{-}1)2\lambda$。

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{x}{f}\quad(\theta<5°)$$

思考:光栅第五级明纹的第1条缝与第N条缝衍射光的光程差是多少?

2)主极大的位置:

$$x = k\frac{f\lambda}{d}\qquad k=0,\pm1,\pm2,\ \ldots\ldots$$

3.暗纹条件

1)满足单缝衍射暗纹的位置必为光栅衍射的暗纹

$$a \cdot \sin\theta = \pm k'\lambda \qquad k'=1,2,\ldots\ldots \text{暗}$$

2)单缝衍射虽为明纹但各缝来的衍射光干涉而相消时也为暗纹(即多缝干涉的极小值)

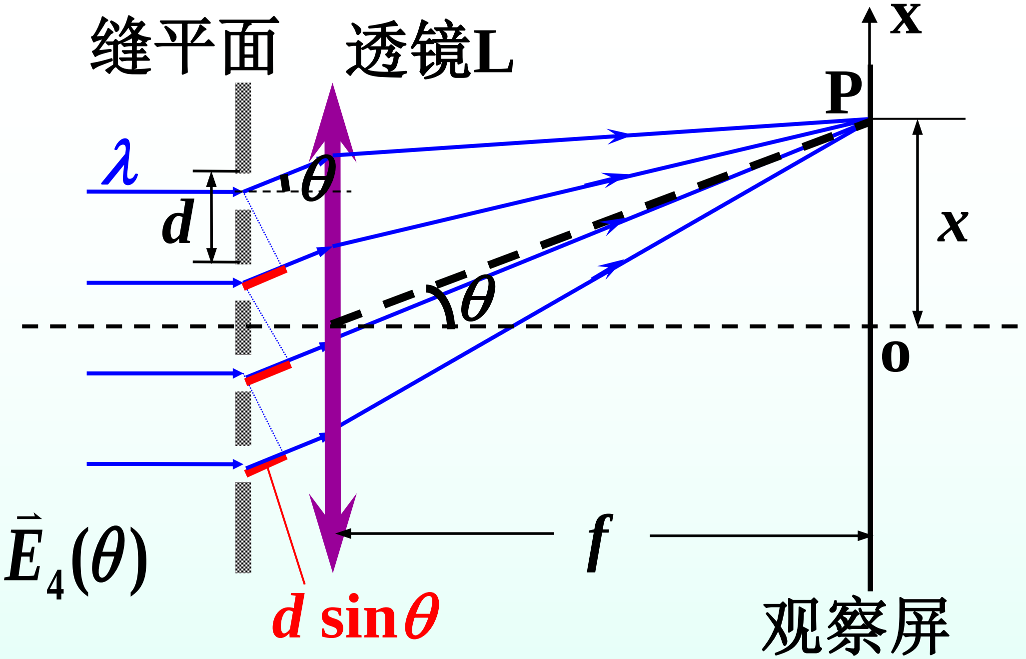
$$d \cdot \sin\theta = \pm k'' \frac{\lambda}{N} \qquad \text{极小}$$

$$k'' = 1,2,\ldots(N\text{-}1),\ N+1,\ldots(2N\text{-}1),\ 2N+1,\ldots kN\text{-}1,\ kN+1\ldots$$

$k'' \neq 0$ $k=0$ $\quad$ $k'' \neq N$ $k=1$ $\quad$ $k'' \neq 2N$ $k=2$ $\quad$ $k'' \neq kN$ k

例:设N=4, 每个缝衍射光的振幅相等为$E_0(\theta)$

衍射角θ对应的P点处的合振幅:



$$\vec{E}(\theta)=\vec{E}_1(\theta)+\vec{E}_2(\theta)+\vec{E}_3(\theta)+\vec{E}_4(\theta)$$

$$d\sin\theta=\pm 2k\frac{\lambda}{2}$$ k=0,1,2,.... 主极大

$$d\sin\theta=\pm k''\frac{\lambda}{4}$$ 极小

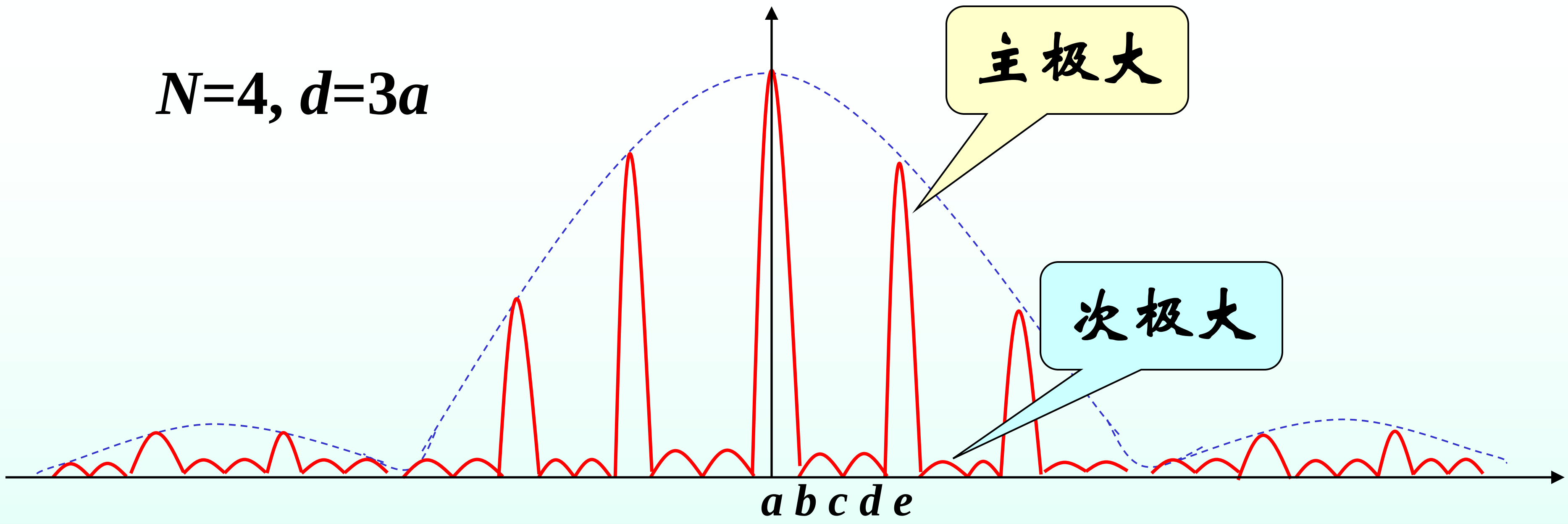
$k''=$ 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, … 4k-1, 4k+1, …

$k''\neq 0$ k=0

$k''\neq 4$ k=1

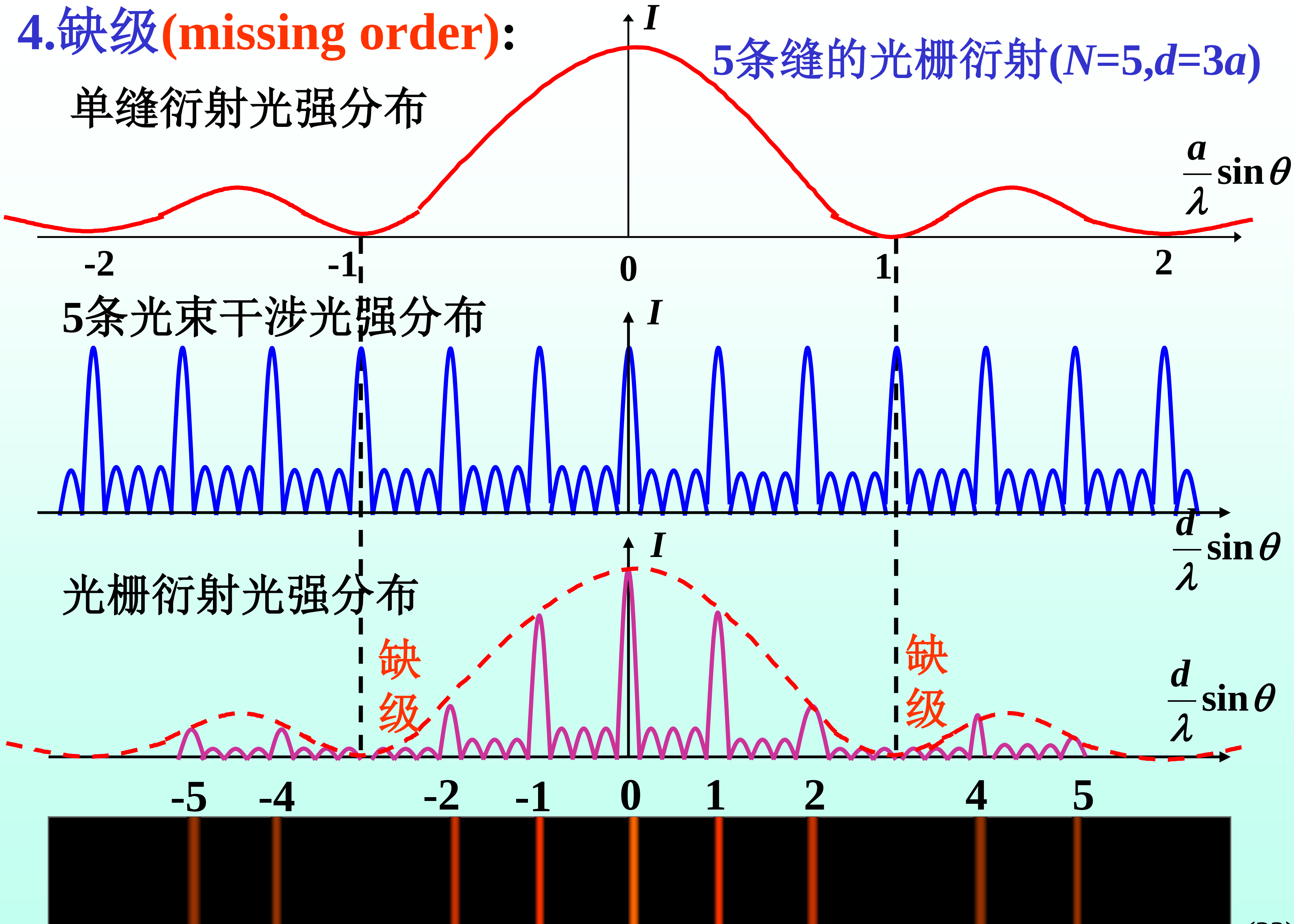
$k''\neq 8$ k=2

$k''\neq 4k$ k



N=4, d=3a
主极大
次极大
a b c d e

4.缺级(missing order):



缺级的定量计算:

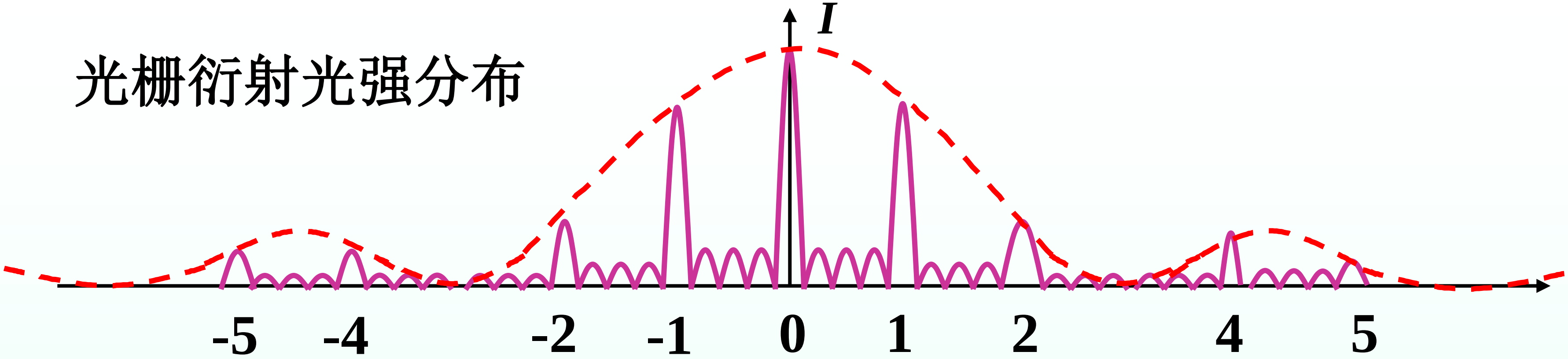
$$\begin{cases} d\sin\theta = \pm 2k\dfrac{\lambda}{2} & k=0,1,2,\ldots\text{主极大} \quad (1) \\ a\sin\theta = \pm k'\lambda & k'=1,2,\ldots\ldots\text{暗} \quad (2) \end{cases}$$

由(2)得: $\sin\theta = \dfrac{k'\lambda}{a}$ 代入(1)得: $(a+b)\dfrac{k'\lambda}{a} = \pm k\lambda$

$$k = \pm\frac{a+b}{a}k' = \pm mk' \qquad k' = 1,2,\ldots$$

$$k = \pm m, \pm 2m, \pm 3m, \ldots\ldots$$

$\dfrac{a+b}{a} = m$ 当 m 为整数时会出现缺级。



讨论:

1) *d* 对条纹影响

$$d \cdot \sin\theta = \pm k\lambda$$

*d*大, *θ*小, 条纹密, 衍射不显著

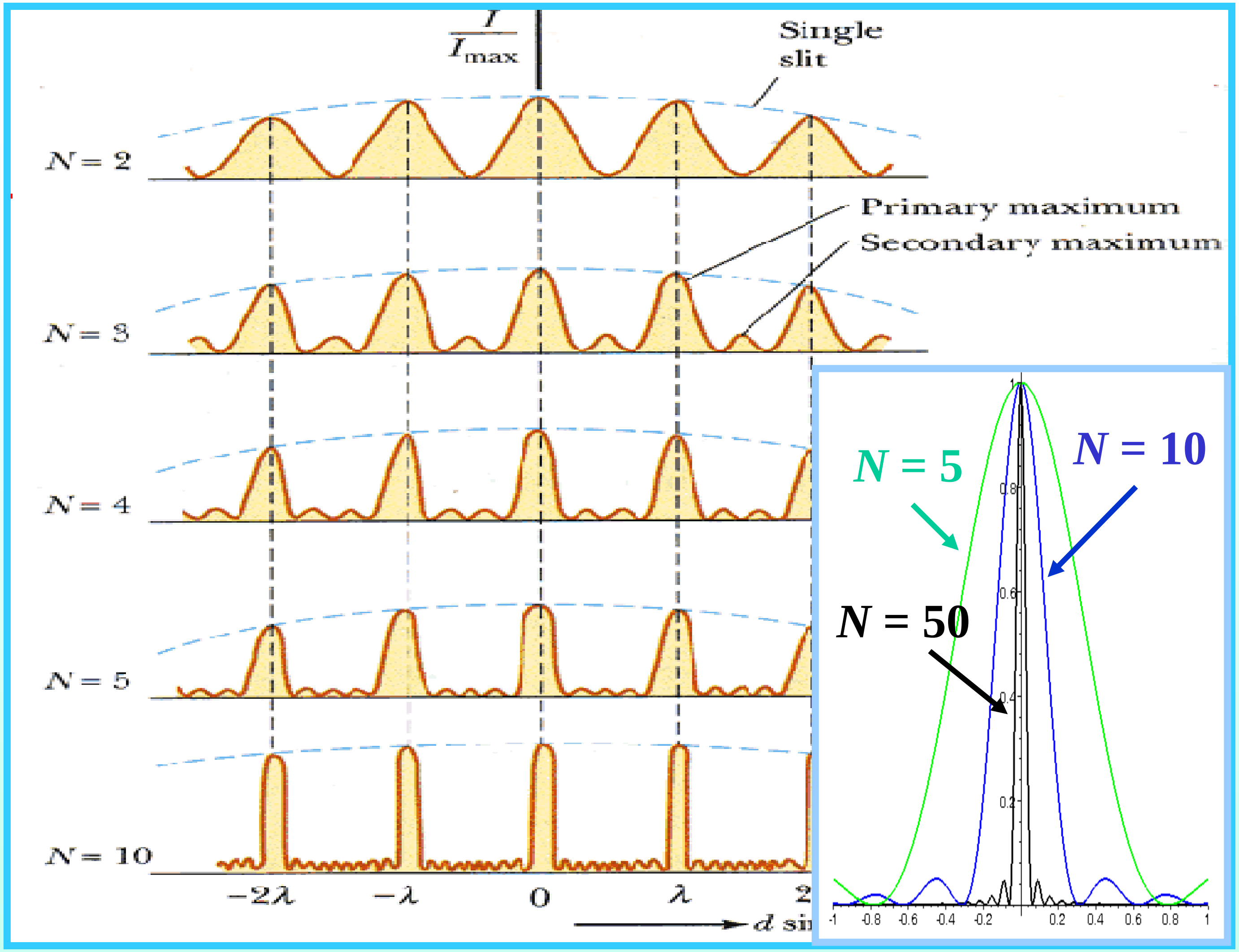
*d*小, *θ*大, 条纹疏, 衍射显著

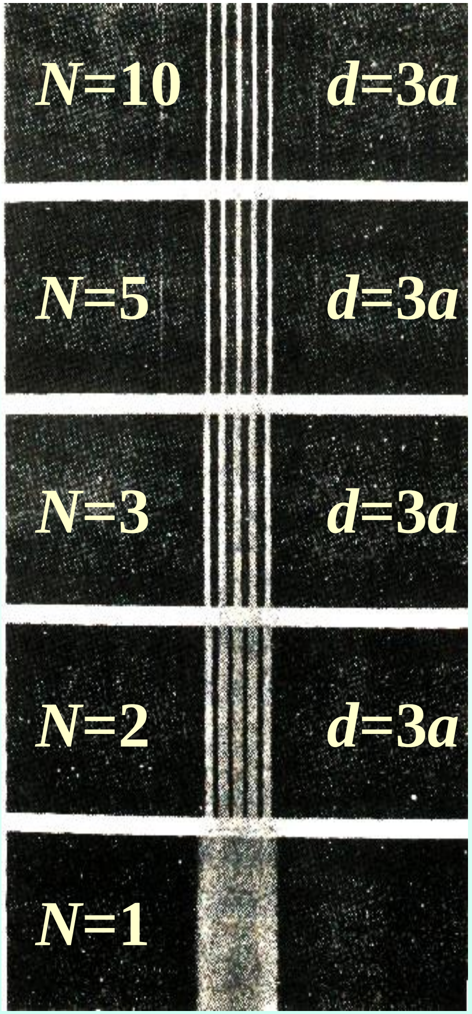
2) *a* 对条纹影响

设*d*不变, *a*变

单缝的中央明纹宽度范围内,包含的主极大数目变。

3) *N* 对条纹的影响





单缝衍射中央明纹区域内的干涉条纹

衍射条纹随*N*的增多而变得细锐;

相邻主极大之间有(*N*-1)条暗纹,有(*N*-2)个次极大。

例15: 激光器发出红光: λ=6328Å 垂直照射在光栅上, 第一级明纹在38° 方向上,求:1) d ? 2)第三级的第1条缝与第7条缝的光程差? 3)某单色光垂直照射此光栅,第一级明纹在27° 方向上, 此光波长为多少?

解:1) $d\cdot\sin\theta=k\lambda$　　　$d\cdot\sin 38^\circ=6328$ [Å]

$$d=\frac{6328}{\sin 38^\circ}=\frac{6328}{0.6156}=10278\ [\text{Å}]$$

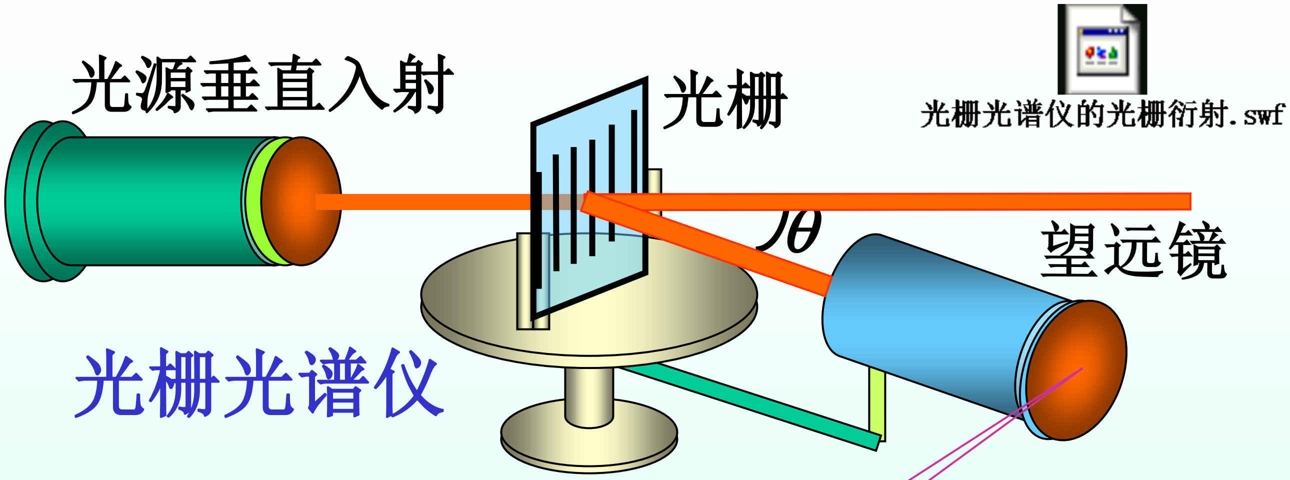
2)第三级相邻两缝之间衍射光的光程差为3λ

则第1条缝与第7条缝的光程差为$(7-1)3\lambda=101248$[Å]

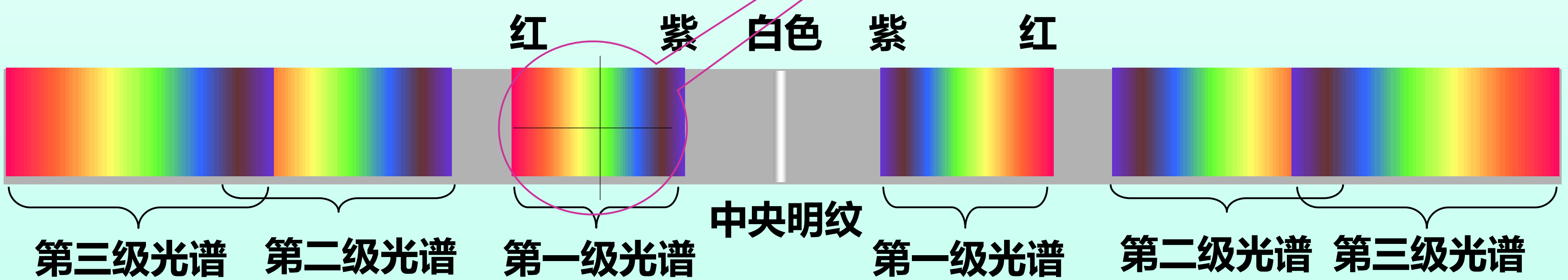
3)　$d\sin 27^\circ=k\lambda'$

$$\lambda'=10278\times\sin 27^\circ=4666\ [\text{Å}]$$

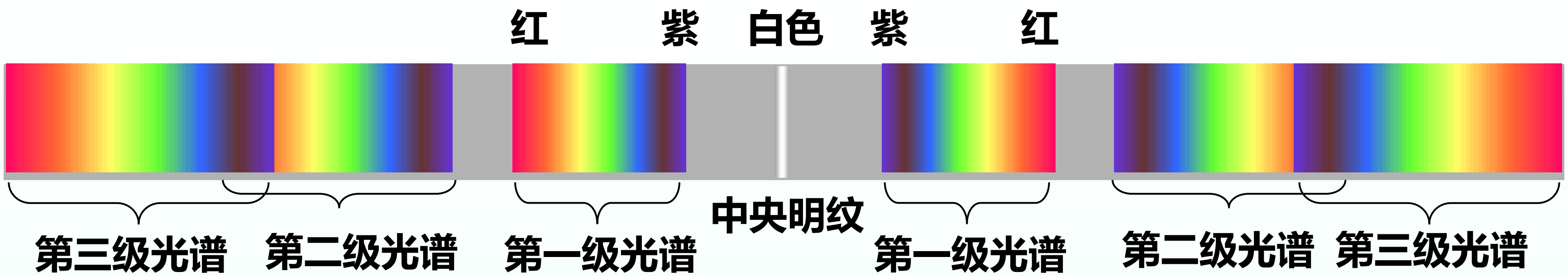
6.7.3 光栅光谱(grating spectrum)(又叫衍射光谱)



入射光为复色光(或白光)　$d \cdot \sin\theta = \pm k\lambda$



高级次光谱会出现重叠



光栅出现不重叠光谱的条件:

$$\sin\theta_{k\text{红}} < \sin\theta_{k+1\text{紫}}$$

光栅出现完整光谱的条件:

$$d\cdot\sin 90^{\circ} = k\lambda_{\text{红}}$$

光栅出现最高级次光谱的条件:

$$d\cdot\sin 90^{\circ} = k_{\max}\lambda_{\text{紫}}$$

例16: 波长为 $\lambda_1 = 5000$Å和$\lambda_2 = 5200$Å 的两种单色光垂直照射光栅,光栅常数为0.002cm, $f = 2$ m, 屏在透镜焦平面上。**求**(1)两光第三级谱线的距离;(2)若用波长为4000Å~7000Å 的光照射,第几级谱线将出现重叠;(3)能出现几级完整光谱?

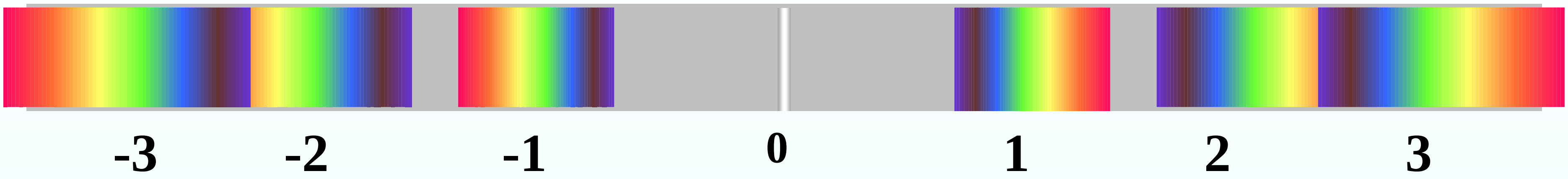
解: (1) $(a+b)\sin\theta = 3\lambda$

$$\sin\theta_1 = \frac{3\lambda_1}{a+b} \qquad x_1 = f\tan\theta_1 \approx f\sin\theta_1 = \frac{3f\lambda_1}{a+b}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{3\lambda_2}{a+b} \qquad x_2 = \frac{3f\lambda_2}{a+b}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{3f(\lambda_2 - \lambda_1)}{a+b} = 6[\mathrm{mm}]$$

(2)设λ_1=4000Å的第k+1 级与λ_2=7000Å的第k级开始重叠



λ_1的第k+1级角位置：$\sin\theta_1 = \dfrac{(k+1)\lambda_1}{a+b} = 2\times10^{-2}(k+1)$

λ_2的第k级角位置：$\sin\theta_2 = \dfrac{k\lambda_2}{a+b} = 3.5\times10^{-2}k$

当 $k=2$, $\sin\theta_2 > \sin\theta_1$　　从 $k=2$ 开始重叠。

(3) $(a+b)\sin\theta = k\lambda_2$　　$\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

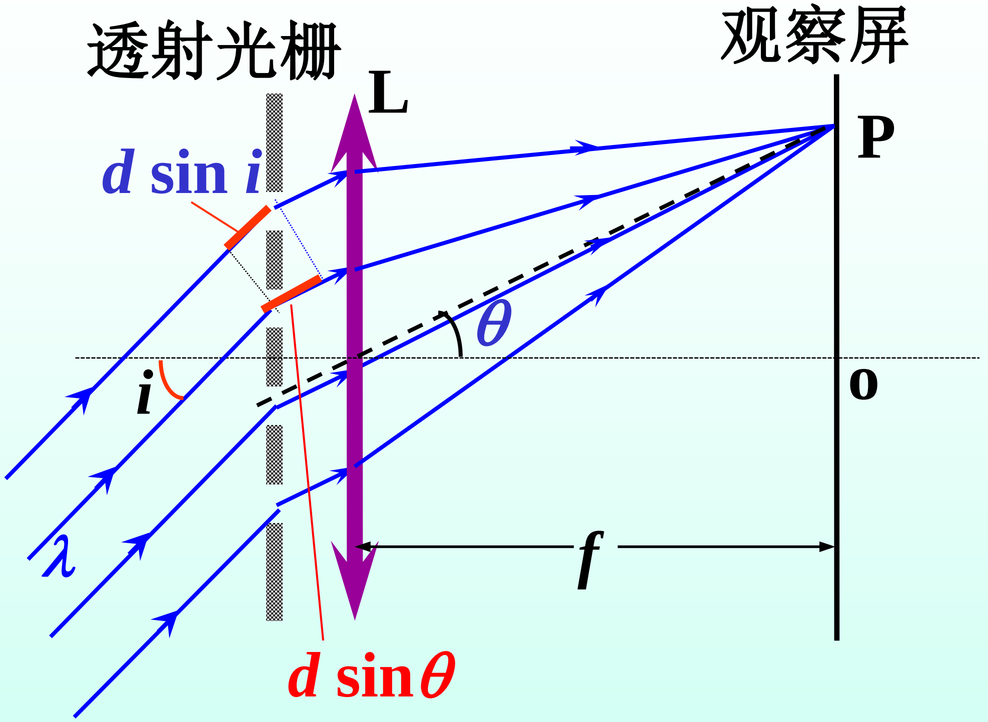
$$k_{max} = \frac{a+b}{\lambda_2} = \frac{0.002\times10^{-2}}{7000\times10^{-10}} = 28.6$$

能出现28级完整光谱

斜入射的光栅方程补充

以光栅面法线为轴,
θ, i 逆时取 + ; 顺时取 -

透射式光栅:



相邻两缝的光程差为

$$\delta = d(\sin\theta - \sin i)$$

$$\boxed{d(\sin\theta - \sin i) = \pm k\lambda}$$

例17: 每厘米有5000刻痕的平面透射光栅, 观察钠黄光(5893Å), 1)光线垂直入射时第三级谱线衍射角为多大? 最多可以看到几级条纹? 2)光线以30° 角入射时最多可以看到几级?

解: 1) $d=10^8/5000=20000$ [Å]

$$d \cdot \sin\theta = \pm k\lambda$$

$k=3$: $$\sin\theta_3 = \frac{\pm 3\lambda}{d} = \pm\frac{3\times 5893}{20000} = \pm 0.884$$

$$\theta_3 = \pm 62.12^\circ$$

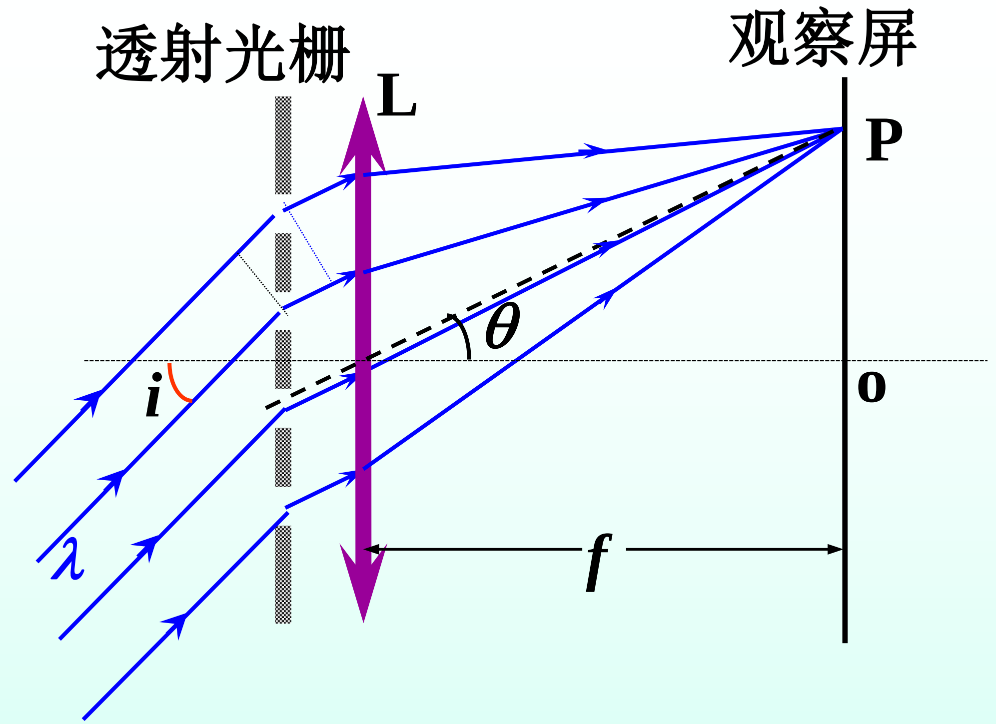
$$d \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \pm k\lambda \qquad k = \frac{d}{\lambda} = \frac{20000}{5893} = 3.39$$

答:最多可看到三级条纹

2)由斜入射的光栅方程:

$$d(\sin\theta - \sin i) = \pm k\lambda$$

当i =30° 时, θ = -π/2能看见的级数最多。



$$\therefore k = \frac{d(\sin\theta - \sin i)}{\lambda}$$

$$= \frac{20000(-1-1/2)}{5893} = -5.09$$

答:最多可看到五级,可见斜入射比垂直入射能看到的级次多。

6.7.4 光栅的分辨本领

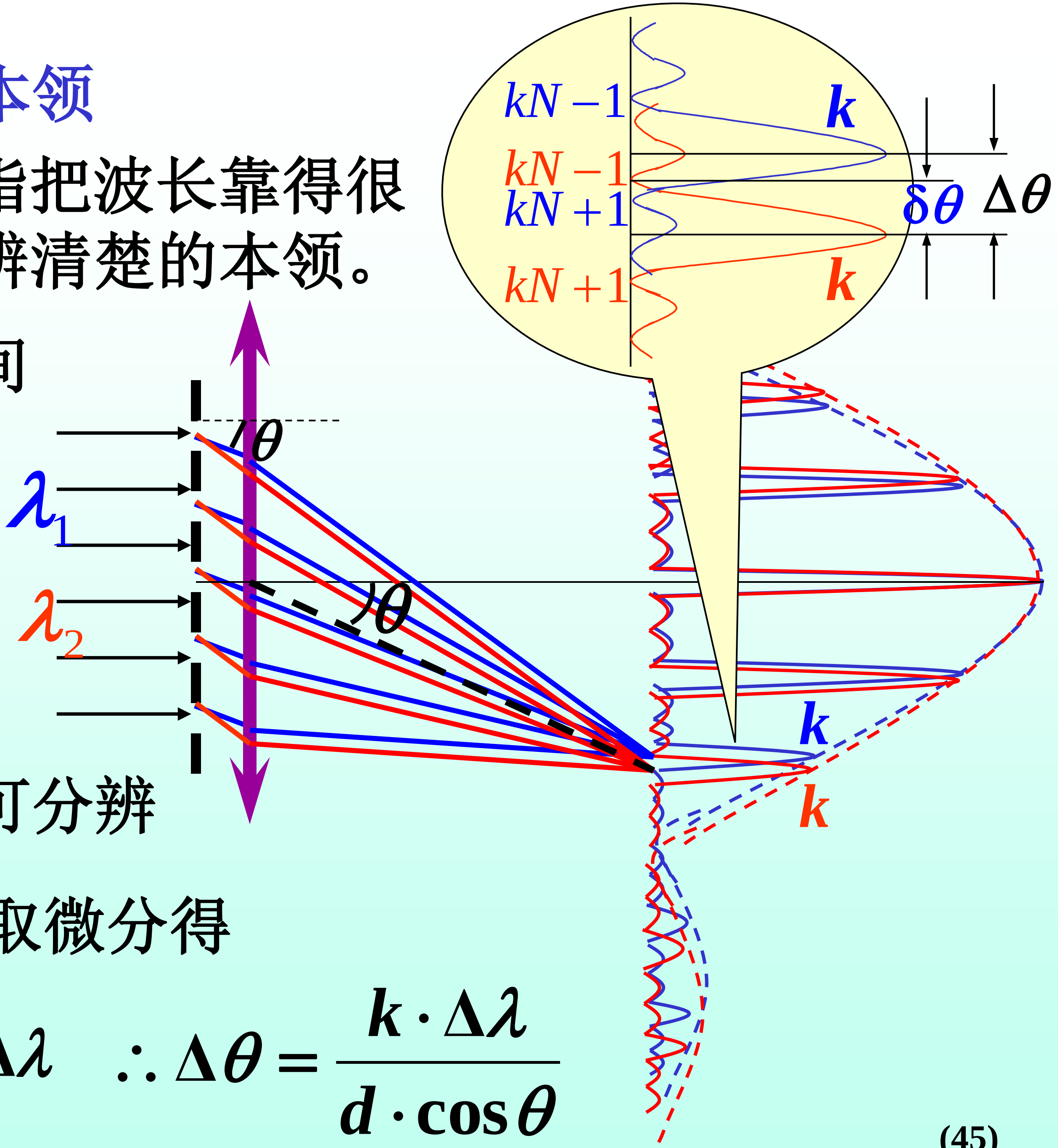
光栅分辨本领是指把波长靠得很近的两条谱线分辨清楚的本领。

设两条谱线的角间隔为$\Delta\theta$

每条谱线的半角宽度为$\delta\theta$

由瑞利准则:

当$\Delta\theta=\delta\theta$时, 刚可分辨



对光栅方程两边取微分得

$$d\cdot\cos\theta\cdot\Delta\theta=k\cdot\Delta\lambda \qquad \therefore \Delta\theta=\frac{k\cdot\Delta\lambda}{d\cdot\cos\theta}$$

λ的第k 级主极大的角位置: $d \cdot \sin\theta = k\lambda$

λ的第k 级主极大附近极小的角位置:

$$d \cdot \sin(\theta + \delta\theta) = (Nk + 1)\lambda / N$$

由以上两式得 $d \cdot [\sin(\theta + \delta\theta) - \sin\theta] = \dfrac{\lambda}{N}$

$\because \cos\delta\theta \approx 1,\ \sin\delta\theta \approx \delta\theta,\ \cos\theta \cdot \delta\theta = \dfrac{\lambda}{Nd} \quad \therefore \delta\theta = \dfrac{\lambda}{Nd\cos\theta}$

由瑞利准则: $\Delta\theta = \delta\theta$ 时,可分辨 $\Longrightarrow$ $\dfrac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$

光栅的分辨本领: $\boxed{R = \dfrac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN}$

例18:设计一光栅,要求1)能分辩钠光谱的5.890×10^{-7}m和5.896×10^{-7}m 的第二级谱线; 2)第二级谱线衍射角 $\theta = 30^{o}$; 3)第三级谱线缺级。

解:1) 按光栅的分辩本领: $R = \dfrac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$

$$N = \frac{\lambda}{k\cdot\Delta\lambda} = \frac{5.893\times10^{-7}}{2\times0.006\times10^{-7}} = 491$$

即必须$N \geq 491$条

2)由 $(a+b)\sin\theta = k\lambda$

$$a+b = \frac{k\lambda}{\sin\theta} = \frac{2\times5.893\times10^{-7}}{\sin30^{\circ}} = 2.36\times10^{-3}[\text{mm}]$$

3)由缺级条件 $\dfrac{a+b}{a}=3$

$$a=\frac{a+b}{3}=\frac{2.36\times10^{-3}}{3}=0.79\times10^{-3}[\mathrm{mm}]$$

$$b=2.36\times10^{-3}-0.79\times10^{-3}=1.57\times10^{-3}[\mathrm{mm}]$$

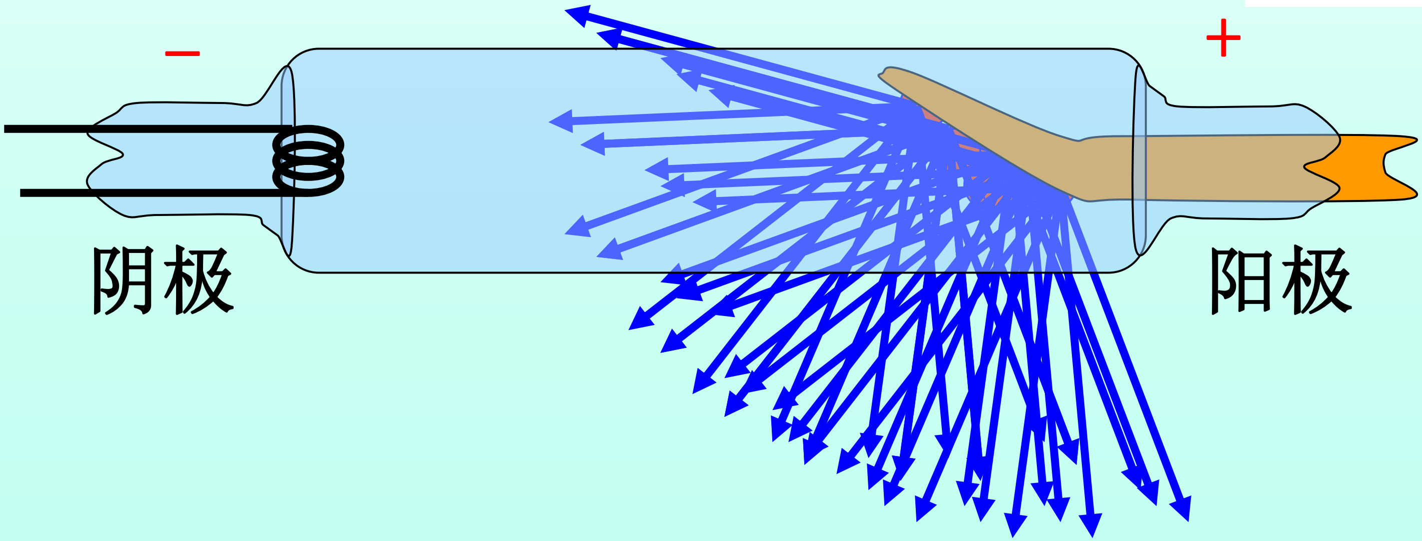
这里,光栅的N, a, b 均被确定

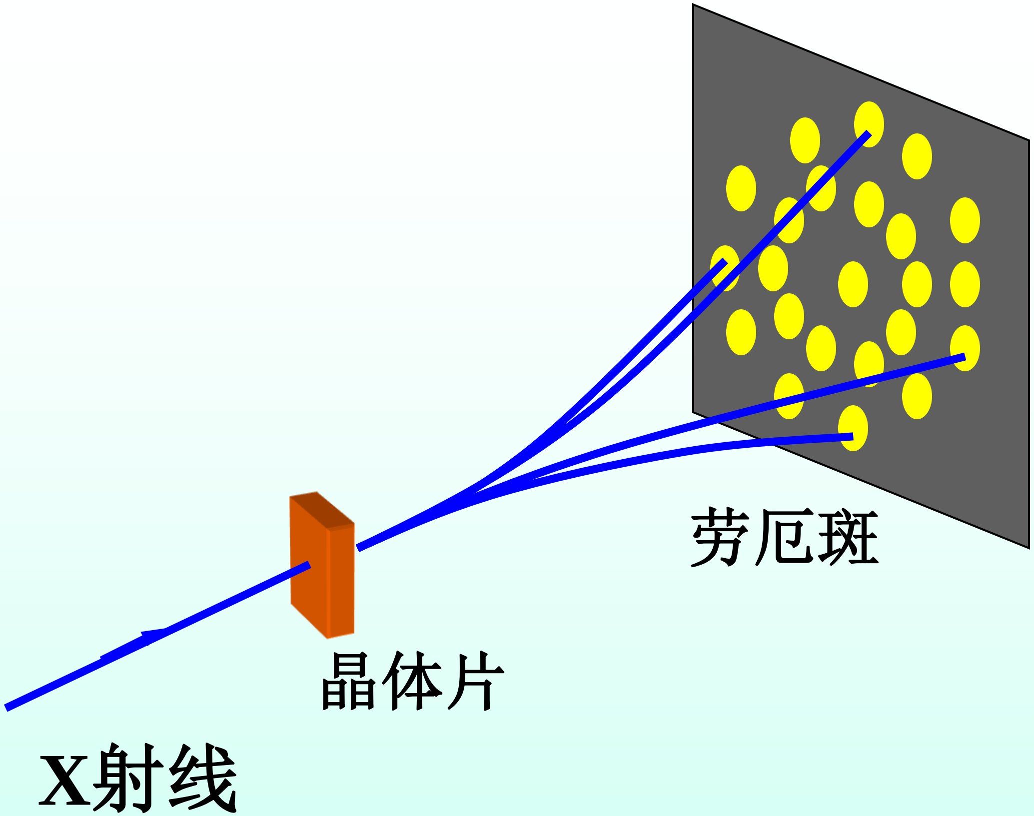
*6.8 晶体对X-射线的衍射
(Diffraction of X-rays in the crystal)

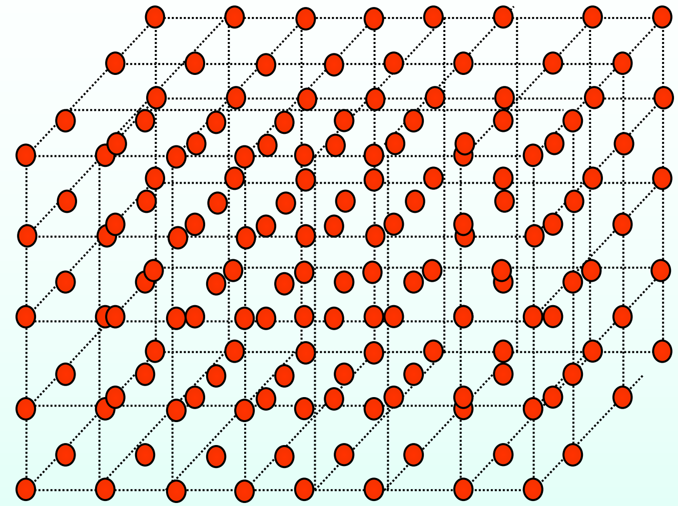
6.8.1 X射线的衍射现象—— 劳厄实验

X射线是一种波长很短(10^{-10}m)的电磁波,一般由高速电子撞击金属产生

伦琴 (Röntgen W.K., 1845-1923)





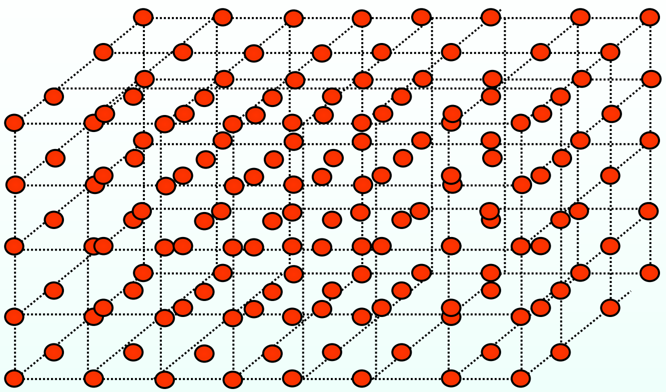


晶体的三维光栅

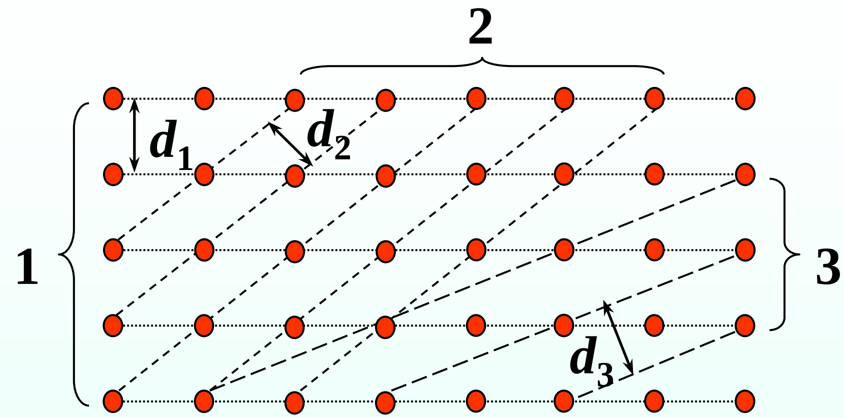
劳厄(Vonlaue)实验:

不仅反映X射线的波动性，同时证实晶体中原子(离子或分子)按一定规律排列，

6.8.2 布拉格公式(Bragg formula)



晶体点阵中原子的排列



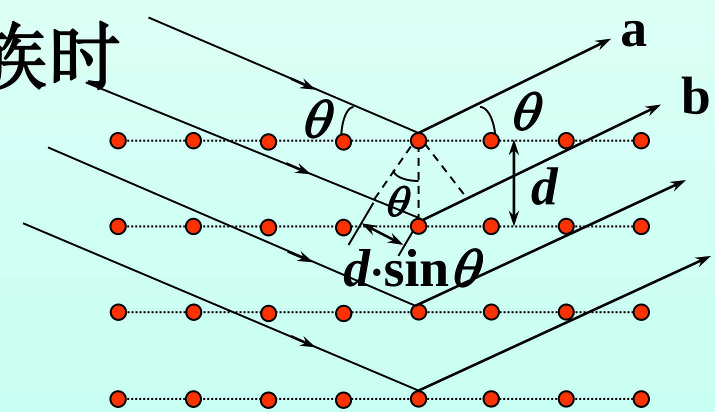
晶体点阵中不同取向的晶面族

考察同一晶面族不同原子层面衍射光的叠加

当波长为λ的X射线射到“1”晶面族时

a、b衍射光线的光程差为$2d\cdot\sin\theta$

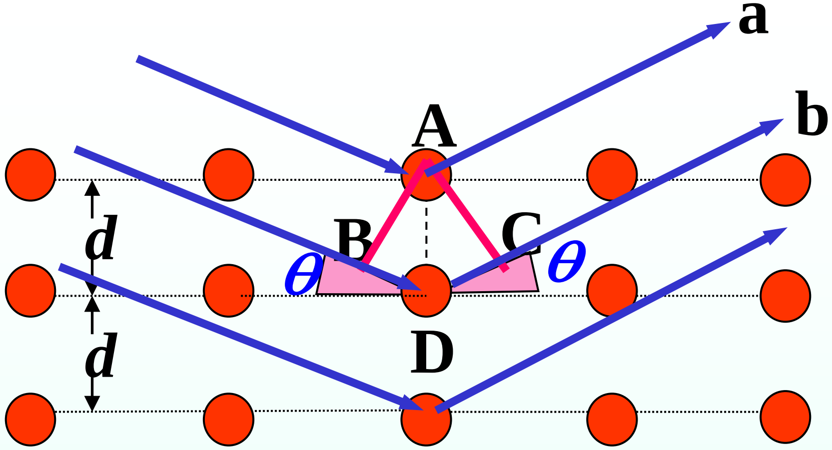
为使θ方向的衍射光互相加强, 应满足:



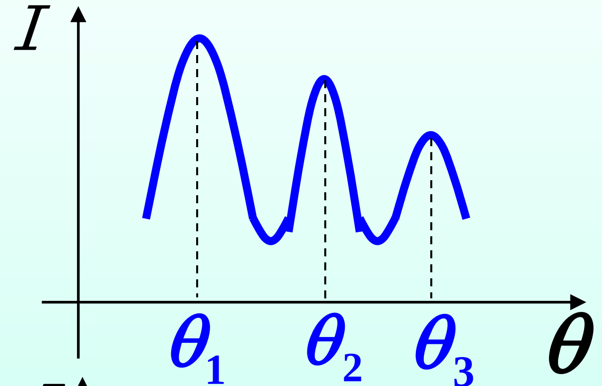
$$\boxed{2d\sin\theta = k\lambda} \quad (k = 1,2,3,\cdots) \quad \text{(Bragg formula)}$$

布格公式讨论:

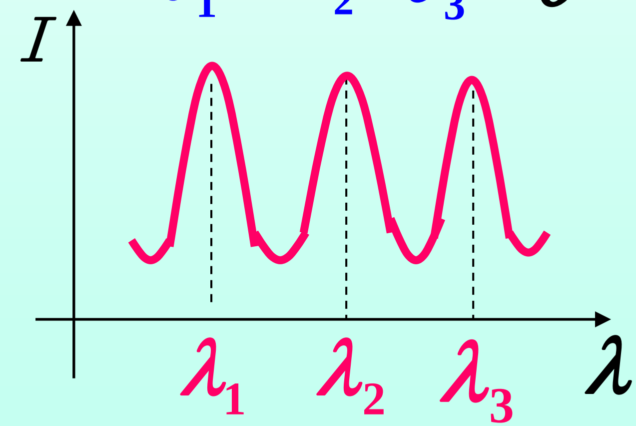
$$2d\sin\theta = k\lambda$$



1)d 和λ 一定时,只能在某些特定的方向观测到最强的衍射。

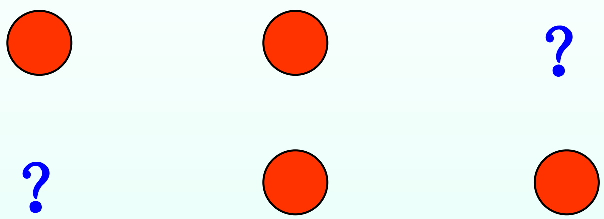


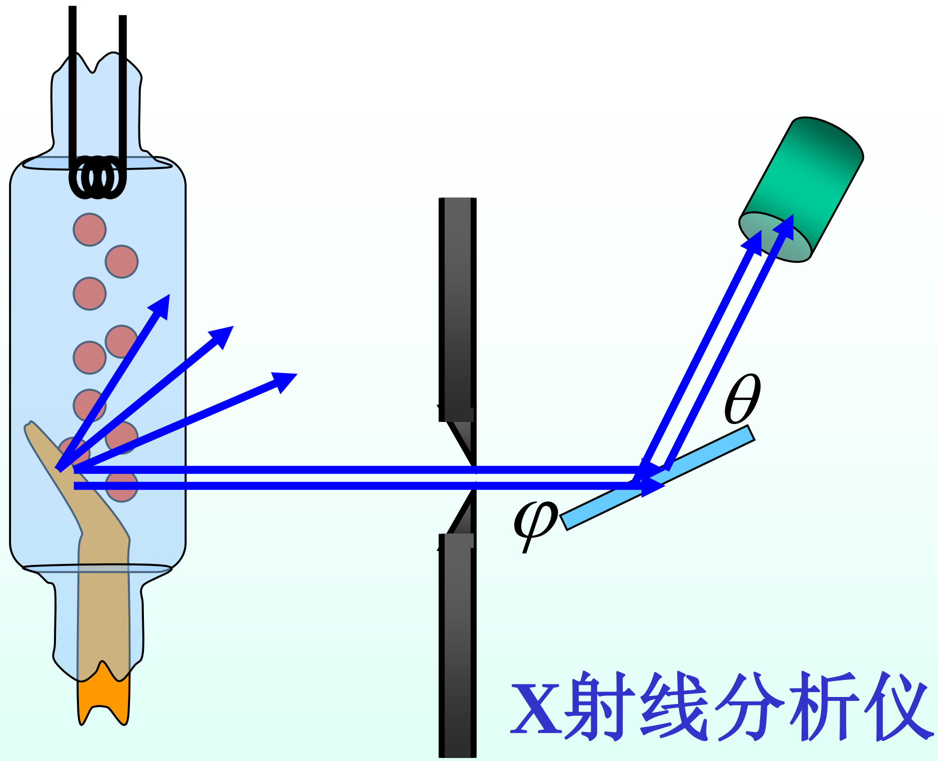
2)d 和θ 一定时, 只有某些特殊波长的X射线才能产生最强的衍射。



X射线衍射的应用

$$2d\sin\theta = k\lambda$$





1.已知晶体的晶格常数, 可测定X射线的波长;
发展成为**X射线的光谱分析**

2.已知X射线的波长, 可测定晶体的晶格常数;
发展成为**X射线的晶体结构分析**

惠更斯-菲涅耳原理 → 光的衍射现象

夫琅和费衍射

圆孔夫琅和费衍射(爱里斑):

$$\theta_{\text{Airy}} \approx \sin\theta_1 = \frac{1.22\lambda}{d}$$

光学仪器最小分辨角:

$$\theta_{\min} = \theta_{\text{Airy}} = \frac{1.22\lambda}{d}$$

分辨本领:

$$R = \frac{1}{\theta_{\min}} = \frac{1}{1.22}\frac{d}{\lambda}$$

单缝夫琅和费衍射(半波带法分析)

中央明纹: $\theta=0$

k级暗纹中心:

$a\sin\theta = 2k\lambda/2$

k级明纹中心:

$a\sin\theta = (2k+1)\lambda/2$

光栅衍射

光栅方程(垂直):

$(a+b)\sin\theta = k\lambda$

缺级: $m = \frac{a+b}{a}$

光栅分辨本领:

$R = \lambda/\delta\lambda = kN$

光栅光谱(垂直入射)

完整清晰光谱: $\sin\theta_{k红} \le \sin\theta_{k+1紫}$

完整光谱: $d\sin\frac{\pi}{2} = k\lambda_{红}$

最高级次光谱: $d\sin\frac{\pi}{2} = k\lambda_{紫}$