§9.3 代数系统的同态与同构

利用已知的事物，通过对比来研究未知事物，是人们常用的一种方法。

定义 设$V_1=<A,\circ>$, $V_2=<B,*>$是两个同类型的代数系统，这里$\circ$,$*$都是二元运算。设

B的函数(映射)，若对$\forall x,y\in A$，有

保持运算

$$f(x\circ y)= f(x)*f(y)$$

则称f是代数系统V_1到V_2的**同态映射**，简称**同态**。

若f是单射，则称为单同态；若f是满射，则称为满同态，此时称V_2是V_1的同态像；若f是双射，则称为**同构**，此时称V_1同构于V_2，记为$V_1\cong V_2$。

若 f 是代数系统V到V的同态，则称为**自同态**；相应地，有单自同态，满自同态，自同构等概念。

例 设f是代数系统$V_1=<A,\circ>$到$V_2=<B,*>$的同态映射，则有

（1）若V_1的运算$\circ$满足交换律、结合律、幂等律，则在同态像 $f(V_1)$中，运算$*$满足同样的规律；

（2）若e,θ分别是V_1的单位元与零元，则 $f(e)$, $f(\theta)$分别是同态像 $f(V_1)$ 的单位元与零元；

（3）若$x\in A$有逆元 x^{-1}，则 $f(x^{-1})=f(x)^{-1}$。

例 已知代数系统$V_1 = <\mathbb{Z},+,0>$和$V_2 = <\mathbb{R}^+, ;1>$，令

$$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+, \quad f(n)=e^n$$

则 f是V_1到V_2的单同态，$f(0)=1$。

例 已知代数系统$V_1=<\mathbb{Z},+,0>$和$V_2=<Z_n,\oplus,0>$，令

$$f: \mathbb{Z} \to Z_n, \quad f(k)=k \ (\mathrm{mod}\ n)$$

则 f是V_1到V_2的满同态，$f(0)=0$。

例 已知代数系统$V_1=<\mathbb{N},+>$和$V_2=<2\mathbb{N},+>$，令

$$f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}, \quad f(n)=2n$$

则 f是V_1到V_2的同构。

一个进程代数的描述实例

进程代表一个系统的行为(动作)；一个**系统**是一个能表现出各种行为的事物；在计算机科学中，进程主要指一个软件系统的行为，一个软件系统也可以在一定的序列下完成一系列动作。

进程代数是建立在进程上的代数结构，进程之间的运算满足特定的约束。

自动机是进程代数最早、最简单的理论模型。

进程集合：

A={coin, coffee, tea, $\overline{\text{coin}}$, $\overline{\text{coffee}}$, $\overline{\text{tea}}$, τ}

进程算子：

$$0,\ .\ ,\ +\ ,\ |\ ,\ \text{new}\ \tilde{a},\ !$$

进程代数：

$$\text{OCS} \triangleq <A,\ 0,\ .\ ,\ +\ ,\ |\ ,\ \text{new}\ \tilde{a},\ !>$$

性质：

选择运算 + 和并行运算 | 满足交换律和结合律

小结：

1. 掌握代数运算的基本概念

   代数运算的性质

2. 代数系统

   代数系统的性质

3. 代数系统的对比

   同态与同构

埃瓦里斯特·伽罗瓦

（**Évariste Galois**，1811.10.25—1832.5.31
法国数学家，群论的创始人。

现代数学中的分支学科群论的创立者。用群论彻底解决了根式求解代数方程的问题，而且由此发展了一整套关于群和域的理论，称之为伽罗瓦理论，伽罗瓦群（**Galois Group**）。