第一章 矩阵

复习

1. 可逆矩阵定义

对于n 阶方阵A, B，若 $AB=E$ ，则方阵A, B是可逆的，且$B=A^{-1}, A=B^{-1}$.

2. 可逆矩阵性质

(1) 若A可逆，则 A^{-1} 亦可逆，且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

(2) 若A可逆，数 $\lambda\neq 0$，则 λA 可逆，且 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$

(3) 若A,B为同阶方阵且均可逆，则AB亦可逆,且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(4) 若A可逆，则 A^T 也可逆，且 $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$

3. 可逆矩阵计算

复习

(1) 求2阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

当 $\underline{ad-bc\neq 0}$ 时, A可逆， $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

分块对角阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},\quad \text{其中 } A_i\ (i=1,2,\cdots s)\ \text{都是方阵}$$

分块对角阵的性质

(1) $$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}$$

(2) $$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},\qquad A^k=\begin{pmatrix} A_1^k & & & \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^k \end{pmatrix}$$

分块对角阵

复习

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_i\ (i=1,2,\cdots s)$ 都是方阵

其中A_i可逆 $(i=1,2,\cdots,s)$，则A可逆，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_i \neq 0$

第一章 矩阵

第一章 矩阵

1.4 高斯消元法

- 高斯消元法
- 初等行变换与初等列变换
- 用初等行变换求解线性方程组 ★
- 矩阵的秩 ★

1. 高斯消元法

例1 求解线性方程组 $\begin{cases} 3x+4y-6z=4 \\ x-y+4z=1 \\ -x+3y-10z=1 \end{cases}$

问题： 1. 高斯消元法的过程用到方程之间的那些运算？

2. 高斯消元法的过程能否简化？

1. 高斯消元法

例1 求解线性方程组 $\begin{cases} 3x+4y-6z=4 \\ x-y+4z=1 \\ -x+3y-10z=1 \end{cases}$

解：

$$\begin{cases} 3x+4y-6z=4 & (1) \\ x-y+4z=1 & (2) \\ -x+3y-10z=1 & (3) \end{cases} \xrightarrow{(1)\Leftrightarrow(2)} \begin{cases} x-y+4z=1 & (1) \\ 3x+4y-6z=4 & (2) \\ -x+3y-10z=1 & (3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(3)+(1)]{(2)-3(1)} \begin{cases} x-y+4z=1 & (1) \\ 7y-18z=1 & (2) \\ 2y-6z=2 & (3) \end{cases} \xrightarrow[1/2(2)]{(2)\Leftrightarrow(3)} \begin{cases} x-y+4z=1 & (1) \\ y-3z=1 & (2) \\ 7y-18z=1 & (3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(3)-7(2)} \begin{cases} x-y+4z=1 & (1) \\ y-3z=1 & (2) \\ 3z=-6 & (3) \end{cases} \xrightarrow{\text{得解}} \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \\ z=-2 \end{cases}$$

1. 高斯消元法

例1 求解线性方程组 $\begin{cases} 3x+4y-6z=4 \\ x-y+4z=1 \\ -x+3y-10z=1 \end{cases}$

问题： 1.高斯消元法的过程用到方程之间的那些运算？

2.高斯消元法的过程能否简化？

1. 方程之间的三种运算：(1) $(i)\Leftrightarrow(j)$

(2) $(i)\times k$

(3) $(i)+k(j)$

2. 在消元过程中,只有变量的系数和常数项参与运算，因此消元过程可以在增广矩阵上实现.

$$\begin{cases} 3x+4y-6z=4 \\ x-y+4z=1 \\ -x+3y-10z=1 \end{cases}$$

在增广矩阵上实现消元过程：

$$(A,b)=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[(1)\Leftrightarrow(2)]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)+(1)]{(2)-3(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -18 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[1/2(2)]{(2)\Leftrightarrow(3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -18 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)-7(2)} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{\text{得解}} \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \\ z=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+4y-6z=4 \\ x-y+4z=1 \\ -x+3y-10z=1 \end{cases}$$

在增广矩阵上实现消元过程：

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)\Leftrightarrow(2)]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)+(1)]{(2)-3(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -18 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[1/2(2)]{(2)\Leftrightarrow(3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -18 & 1 \end{pmatrix}$$

阶梯阵

$$\xrightarrow{(3)-7(2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

（1）可画出一条阶梯线,线的下方全为零；

（2）每个台阶只有一行,台阶数即是非零行的行数，非零行的第一个元素为非零元.

阶梯阵的特点：

（1）可画出一条阶梯线,线的下方全为零；

（2）每个台阶只有一行,台阶数即是非零行的行数，非零行的第一个元素为非零元.

例
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
√

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
×

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
√

$$\begin{cases} 3x+4y-6z=4 \\ x-y+4z=1 \\ -x+3y-10z=1 \end{cases}$$

在增广矩阵上实现消元过程：

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)\Leftrightarrow(2)]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)+(1)]{(2)-3(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -18 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[1/2(2)]{(2)\Leftrightarrow(3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -18 & 1 \end{pmatrix}$$

阶梯阵

$$\xrightarrow{(3)-7(2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

矩阵行之间的三种运算：

$$\left.\begin{aligned} &(1)\ r_i \Leftrightarrow r_j \\ &(2)\ r_i \times k \\ &(3)\ r_i + kr_j \end{aligned}\right\}$$ 矩阵的初等行变换

第一章 矩阵

1.4 高斯消元法

- 高斯消元法
- 初等行变换与初等列变换
- 用初等行变换求解线性方程组 ★
- 矩阵的秩 ★

2. 初等变换

注意：求解线性方程组只能用初等行变换

初等行变换 下面三种变换称为矩阵的初等行变换:

1) 对调两行,记作 $r_i \leftrightarrow r_j$

2) 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行的所有元素，记作 $r_i \times k$

3) 把某一行(第j 行)所有元素的k倍加到另一行(第i行）对应的元素上去，记作 $r_i + kr_j$

初等列变换 下面三种变换称为矩阵的初等列变换:

1) 对调两列, 记作 $c_i \leftrightarrow c_j$

2) 以数 $k \neq 0$ 乘以某一列的所有元素，记作 $c_i \times k$

3) 把某一列(第 j 列)所有元素的k倍加到另一列(第i列）对应的元素上去，记作 $c_i + kc_j$

初等行变换的逆变换

1) 对调两行 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换 $r_i \leftrightarrow r_j$

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \underset{r_i \leftrightarrow r_j}{\overset{r_i \leftrightarrow r_j}{\rightleftarrows}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = B_{m\times n}$$

初等行变换的逆变换

2) 用非零数乘以某一行 $r_i \times k$ 的逆变换 $r_i \times (\frac{1}{k})$

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \underset{r_i \div k \quad r_i \times (\frac{1}{k})}{\overset{r_i \times k}{\rightleftarrows}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = B_{m\times n}$$

初等行变换的逆变换

3) 把第j行的k倍加到第i行上 $r_i + kr_j$ 逆变换 $r_i + (-k)r_j$

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \underset{r_i - kr_j}{\overset{r_i + kr_j}{\rightleftarrows}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = B_{m\times n}$$

初等行变换的逆变换

1) 对调两行 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换 $r_i \leftrightarrow r_j$;

2) 用非零数乘以某一行 $r_i \times k$ 的逆变换 $r_i \times (\frac{1}{k})$

3) 把第j行的k倍加到第i行上 $r_i + kr_j$ 的逆变换 $r_i + (-k)r_j$

结论：初等变换的逆变换仍为初等变换，且类型相同.

初等行变换与初等列变换统称为初等变换.

第一章 矩阵

1.4 高斯消元法

- 高斯消元法
- 初等行变换与初等列变换
- 用初等行变换求解线性方程组 ★
- 矩阵的秩 ★

3. 用初等行变换求解线性方程组：

$$\begin{cases} 3x+4y-6z=4 \\ x-y+4z=1 \\ -x+3y-10z=1 \end{cases} \longrightarrow B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

增广矩阵

同解方程组

初等行变换

$$\begin{cases} x-y+4z=1 \\ y-3z=1 \\ 3z=-6 \end{cases} \longleftarrow \begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \hline \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

阶梯阵

解：$\begin{cases} x=4 \\ y=-5 \\ z=-2 \end{cases}$

问题：阶梯阵是最简单的矩阵吗？

$$\begin{cases} 3x+4y-6z=4 \\ x-y+4z=1 \\ -x+3y-10z=1 \end{cases}$$

阶梯阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \div 3} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \end{array}$$

$$\xrightarrow[r_1-4r_3]{r_2+3r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

行简化阶梯阵

方程组的解：$\begin{cases} x=4 \\ y=-5 \\ z=-2 \end{cases}$

(1) 非零行的第一个非零元为1

(2) 非零元1所在的列其他元素为0

用初等行变换求解线性方程组的步骤：

$$\begin{cases} 3x+4y-6z=4 \\ x-y+4z=1 \\ -x+3y-10z=1 \end{cases} \xrightarrow{(1)} B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$ 增广矩阵

(2) 初等行变换

同解方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$ 阶梯阵

行变换 (3)

行简化阶梯阵

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(4) 得解：$\begin{cases} x=4 \\ y=-5 \\ z=-2 \end{cases}$

第一章 矩阵

1.4 高斯消元法

- 高斯消元法
- 初等行变换与初等列变换
- 用初等行变换求解线性方程组 ★
- 矩阵的秩 ★

矩阵的秩

$$\begin{cases} 3x+4y-6z=4 \\ x-y+4z=1 \\ -x+3y-10z=1 \end{cases} \longrightarrow B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

增广矩阵

$$\xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

阶梯阵

$$\xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

行简化阶梯阵

方程组有唯一解

⇓

有效方程个数=变量个数=3

⇓

非零行数=变量个数=3 $= r(B)$

定理1.3 一个矩阵A总可以经过有限次初等行变换化成阶梯阵和行简化阶梯阵，且非零行数 r 是唯一确定的.

矩阵秩的定义： 矩阵的秩 $= r(A)$

矩阵秩的意义： **方程组有效方程的个数**

矩阵秩的计算： 初等行变换的方法

注： 矩阵的秩在Ch3-2节中进一步研究，给出更深层次的含义.

第一章 矩阵

1.4 高斯消元法

- 高斯消元法
- 初等行变换与初等列变换
- 用初等行变换求解线性方程组 ★
- 矩阵的秩 ★

初等行变换求解线性方程组(齐次)

齐次线性方程组：$Ax=0$

$$r(A)\begin{cases} =n, Ax=0 \text{ 有唯一解----零解} \\ <n, Ax=0 \text{ 有无穷多解---非零解} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline \end{array}}$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \end{pmatrix}} \underset{x}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = \underset{0}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \end{array} \to \underset{\text{阶梯阵}}{\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$r(A)=n=3$

唯一零解

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \to \underset{\text{阶梯阵}}{\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \to \underset{\text{行简化阶梯阵}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$r(A)=2<n=3$

无穷多非零解，求通解

例2 求解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0 \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0 \end{cases}$

解:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{阶梯阵}]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{非零行} \\ \to \text{零行} \end{matrix}$$

$r=2$

阶梯阵中非零行数 r 就是方程组中有效方程的个数

方程组无穷多非零解, 求通解

例2 求解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0 \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0 \end{cases}$

解：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{阶梯阵}]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\div(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r=2$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{行简化阶梯阵}}$$

方程组无穷多非零解，求通解

例2 求解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0 \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0 \end{cases}$.

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

行简化阶梯阵

$r=2<n=4$

同解方程组 $\begin{cases} x_1 \quad -2x_3-\frac{5}{3}x_4=0 \\ \quad x_2+2x_3+\frac{4}{3}x_4=0 \end{cases}$

x_1, x_2为非自由变量，

x_3, x_4为自由变量。

$$\begin{cases} x_1 = 2c_1+5/3\,c_2 \\ x_2 = -2c_1-4/3\,c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

通解: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 5/3 \\ -4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c_1, c_2为任意常数

练习1

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

求齐次线性方程组的通解

系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+4r_2]{r_2\div(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

阶梯阵

行简化阶梯阵

$r(A) = 2 < n = 4$, 方程组有无穷多解，求通解：

练习1

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

求齐次线性方程组的通解

系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$r(A) = 2 < n = 4$, 方程组有无穷多解，求通解：

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 + c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

⇨ 通解: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c_1, c_2 为任意常数

线性方程组的表示

将线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

写成矩阵乘积的形式.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \longrightarrow Ax = b$$

系数矩阵 A $\quad x \quad b$

初等行变换求解线性方程组(非齐次)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 10x_3 = 6 \end{cases}$$

非齐次线性方程组: $Ax = b$

$Ax = b$ 有解 $\Leftrightarrow$

$Ax = b$ 无解 $\Leftrightarrow$

$$(A,b) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

初等行变换求解线性方程组(非齐次)

$$(A,b)=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

非齐次线性方程组：$Ax=b$

$$Ax=b \text{ 有解} \Leftrightarrow r(A)=r(A,b)\begin{cases} =n, \text{有唯一解} \\ <n, \text{有无穷多解} \end{cases}$$

$$Ax=b \text{ 无解} \Leftrightarrow r(A)<r(A,b) \quad \text{有矛盾方程}$$

$$(A,b)=\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \to \underset{\text{阶梯阵}}{\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}} \to \underset{\text{行简化阶梯阵}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}}$$

$r(A)=r(A,b)=n=3,$

求唯一解

$$(A,b)=\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A)=r(A,b)=2<n=3,$

求通解

$$(A,b)=\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \end{array} \to \text{矛盾方程}$$

$r(A)=2<r(A,b)=3,$

无解

例3 当c, d为何值时,方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = c \\ 5x_1 + 4x_2 + (3+d)x_3 = 0 \end{cases}$$

(1) 无解;

(2) 有唯一解;

(3) 有无穷解, 求其通解.

解:

$$(A,b) = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & c \\ 5 & 4 & 3+d & 0 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & c-3 \\ 0 & -1 & d-2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 + r_2]{r_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3-c \\ 0 & 0 & d & -2-c \end{pmatrix}$$

阶梯阵

$r(A) < r(A,b)$

(1) 当$d = 0, c \neq -2$ 时, 无解　有矛盾方程

(2) 当$d \neq 0$ 时, 有唯一解　$r(A) = r(A,b) = n$

(3) 当$d = 0, c = -2$时, 有无穷解.

$r(A) = r(A,b) < n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯阵　　　　行简化阶梯阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3-c \\ 0 & 0 & d & -2-c \end{pmatrix}$$

(3) 当$d = 0, c = -2$时，有无穷解.

同解方程组 $\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 = -4 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \quad x_3 - 4 \\ x_2 = -2x_3 + 5 \end{cases}$

令自由变量 $x_3 = c_1$

通解: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 4 \\ -2c_1 + 5 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ 其中c_1为任意常数

非齐次方程组解的结构-Ch3

例3 当c, d为何值时,方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = c \\ 5x_1 + 4x_2 + (3+d)x_3 = 0 \end{cases}$$

(1)无解;

(2)有唯一解;

(3)有无穷解, 求其通解.

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & c \\ 5 & 4 & 3+d & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3-c \\ 0 & 0 & d & -2-c \end{pmatrix}$$ 阶梯阵

(1) 当$d=0, c\neq -2$时, 无解 有矛盾方程 $r(A)=2<r(A,b)=3$

(2) 当$d\neq 0$时, 有唯一解 $r(A)=r(A,b)=n=3$

(3)当 $d=0, c=-2$时, 有无穷解. $r(A)=r(A,b)=2<n=3$

通解: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1-4 \\ -2c_1+5 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ 其中c_1为任意常数

第一章 矩阵

1.4 高斯消元法

- 高斯消元法
- 初等行变换与初等列变换
- 用初等行变换求解线性方程组
- 矩阵的秩

练习2

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

增广矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+2r_2]{r_2\times(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 阶梯阵

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\div 2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$ 行简化阶梯阵

$r(A)=r(A,b)=2<n=4,$ 方程组有无穷多解，求通解：

练习2

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1/2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -1/2 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1/2 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

行简化阶梯阵

$$\begin{cases} x_1 + 1/2\,x_2 - 1/2\,x_3 = 1/2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1/2\,x_2 + 1/2\,x_3 + 1/2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$r(A) = r(A,b) = 2 < n = 4,$ 方程组有无穷多解，通解：

$$\begin{cases} x_1 = -1/2\,c_1 + 1/2\,c_2 + 1/2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c_1, c_2 为任意常数

作业 习题一

授课内容	习题一
1.1 矩阵及运算	9,10 矩阵运算，11(3)(4)(5) ,13(6)(7)乘法，14(1) 矩阵运算
1.2 分块矩阵	42 分块矩阵乘法
1.3 可逆矩阵	34,35,36,40,41(1)(2)求逆，45(1)分块矩阵逆阵，50
1.4 高斯消元法	1(1)(4)消元法，3,5消元法(含参) √
1.5 矩阵秩 初等变换	30(1)(4) ,31求逆，39解矩阵方程，24(2),25秩，45(2)分块矩阵逆阵

（04, 13分）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

试问：当a, b为何值时，

(1) 方程组无解；

(2) 方程组有唯一解；

(3) 方程组有无穷多解，并求通解.

（04, 13分）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

试问：当a, b为何值时，

(1) 方程组无解；

解：

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(1) 当 $a=0,\ b\neq 0$ 时， $r(A)=2<r(A,b)=3,$ 方程组无解.

$a=0, b=0$ $r(A)=1<r(A,b)=2,$ 方程组无解.

（04, 13分）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

试问：当a, b为何值时，

(2) 方程组有唯一解；

解：

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-1/a \\ 0 & 1 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

(2) 当 $a \neq 0, a \neq b$ 时，

$r(A) = r(A,b) = 3,$ 方程组有唯一解 $\begin{cases} x_1 = 1-1/a \\ x_2 = 1/a \\ x_3 = 0 \end{cases}$

（04, 13分）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

试问：当a, b为何值时，

(3) 方程组有无穷多解，并求通解.

解：

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(3)当 $a=b\neq 0$时，

$r(A)=r(A,b)=2<3,$

方程组有无穷多组解，

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\to\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-1/a \\ 0 & 1 & -1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

通解：

$$\begin{cases} x_1 = 1-1/a \\ x_2 = c+1/a \\ x_3 = c \end{cases}\to\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ c \\ c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1-1/a \\ 1/a \\ 0 \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1-1/a \\ 1/a \\ 0 \end{pmatrix}$$