第4章 不定积分

第1节 不定积分的概念与性质

简单概括一下：积分就是微分的逆运算，微分是已知 $f(x)$ 求 $f'(x)dx$ ，积分是已知 $f'(x)dx$ 求 $f(x)$ 。

原函数与不定积分的概念

- 原函数：如果在区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$ ，即对任一 $x\in I$ ，都有 $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$ 那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ （或 $f(x)dx$ ）在区间 I 上的一个原函数
（简单来说，一个函数是其导数的原函数）

- 不定积分：在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ （或 $f(x)dx$ ）在区间 I 上的不定积分，记作 $\int f(x)dx$

- 记号 $\int$ 为积分号， $f(x)$ 为被积函数， $f(x)dx$ 为被积表达式， x 为积分变量。

- 连续函数一定有原函数

不定积分的性质

1. $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$
2. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$
3. $d\int f(x)dx=f(x)$

第2节 换元积分法

- 第1类换元法（凑微分法）

  - $\int f[g(x)]g'(x)dx=\int f(u)du,u=g(x)$

- 第2类换元法（设微分法）

  - $\int f(x)dx=\int f[g(t)]g'(t)dt,t=g^{-1}(x)$
  - 常用代换：
    $\sqrt{a^2-x^2}\Longrightarrow x=a\sin t$
    $\sqrt{a^2+x^2}\Longrightarrow x=a\tan t$
    $\sqrt{x^2-a^2}\Longrightarrow x=a\sec t$

第3节 分部积分法

- $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$
  通常用于当 $\int uv'dx$ 求起来比较困难，而 $\int u'vdx$ 求起来比较容易的时候。
  常见场景：

1. 被积函数为 $x^k\sin x,x^k\cos x,x^ke^x$ 的形式时，可以用分部积分降幂。

2. 被积函数为 $x^k\arcsin x, x^k\arccos x, x^k\arctan x, x^k\log_\alpha x$ 的形式时，可以用分部积分化去反三角函数和对数。

3. 被积函数为 $e^x\sin x, e^x\cos x$ 的形式时，可以用分部积分两次来形成周期求出解。

第4节 有理函数的积分

- 有理函数的积分

化成真分式，分成多个项之和，分别求积分。

- 可化为有理函数的积分

先变量替换化成有理函数，然后参照上面方法求解。

第5节 积分表的使用

无脑查表。