高等数学笔记

目录

1 重积分

1.1 二重积分的概念与性质

1.1.1 二重积分的概念

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy$$

1. 被积函数 $f(x,y)$
2. 被积表达式 $f(x,y)d\sigma$
3. 面积元素 $d\sigma$
4. 积分变量 x,y
5. 积分区域 D

1.1.2 二重积分的性质

1. $\iint_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]d\sigma = \alpha\iint_D f(x,y)d\sigma + \beta\iint_D g(x,y)d\sigma$
2. $\iint_D \alpha f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$
3. $\sigma = \iint_D 1\cdot d\sigma = \iint_D d\sigma$，$\sigma$ 为 D 的面积
4. 若在 D 上 $f(x,y)\le g(x,y)$，则 $\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma$
   $\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma$
5. $m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma$，其中 m,M 分别为 $f(x,y)$ 在 D 上的最小值和最大值
6. 二重积分中值定理 $\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$，其中 $(\xi,\eta)\in D$

1.2 二重积分的计算法

1.2.1 利用直角坐标系计算二重积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

简单来说就是把积分拆成 2 次计算，
先把 x 看成常数计算 y 从 $y_1(x)$ 到 $y_2(x)$ 的定积分，
然后再把结果对 x 计算 $[a,b]$ 上的定积分
关键：确定积分限

1.2.2 利用极坐标系计算二重积分

$$\begin{aligned}\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta &= \int_\alpha^\beta\left[\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho\right]d\theta \\ &= \int_\alpha^\beta d\theta\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho\end{aligned}$$

重要结论：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & \text{，n 为正偶数}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} & \text{，n 为大于 1 的正奇数}\end{cases}$$

1.2.3 * 二重积分的换元法

1.3 三重积分

1.3.1 三重积分的概念

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$$

1.3.2 三重积分的计算

简单来说就是把积分拆成 3 次计算

1. 直角坐标系
$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$

2. 柱面坐标系 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z\end{cases}$
$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\iiint_\Omega F(\rho,\theta,z)\rho d\rho d\theta dz$

3. * 球面坐标系 $\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\phi\\ y=r\sin\theta\sin\phi\\ z=r\cos\phi\end{cases}$

1.4 重积分的应用

1.4.1 曲面面积

面积元素 $dA=\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}d\sigma$

曲面面积 $A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}d\sigma$

* 用曲面参数方程求曲面面积

1.4.2 质心

平面薄板的质心

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} \frac{\iint_D x\mu(x,y)d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)d\sigma}$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{M} \frac{\iint_D y\mu(x,y)d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)d\sigma}$$

1.4.3 转动惯量

$$dI_x = y^2\mu(x,y)d\sigma, dI_y = x^2\mu(x,y)d\sigma$$

$$I_x = \iint_D y^2\mu(x,y)d\sigma$$

$$I_y = \iint_D x^2\mu(x,y)d\sigma$$

1.4.4 引力

一空间物体对某一质点的引力

$$\begin{aligned} \vec{F} &= (\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z) \\ &= (\iiint_\Omega \frac{G\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}dv, \iiint_\Omega \frac{G\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}dv, \iiint_\Omega \frac{G\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}dv) \end{aligned}$$

1.5 * 含参变量的积分