第四章 一阶逻辑的基本概念

- 一阶逻辑是公理系统的标准形式逻辑。也称一阶谓词演算、低阶谓词演算、量词理论、谓词逻辑。
- 一阶逻辑可以从命题的内部分析语句的成分，描述个体的量化。解决命题逻辑无能为力的问题。
- 一阶定理无法描述及建构如自然数或实数之类无限的概念。

§3.1 一阶逻辑基本概念

例 陈锦鸿与周星儒都通过了线性代数考试。

两个独立的研究对象：陈锦鸿，周星儒

一个共同的属性：通过了线性代数考试

如果用a,b分别表示陈锦鸿与周星儒，用$F(x)$表示“研究对象x通过了线性代数考试”这一属性F，则原命题可以符号化为

$$F(a)\wedge F(b)$$

个体词：研究对象中可独立存在的具体或抽象的客体。

个体常项：表示具体或特定客体的个体词，用 $a, b, c, \cdots$ 表示。

个体变项：抽象或泛指的个体词，用 $x, y, z, \cdots$ 表示。

个体域（论域）：个体变项的取值范围。

全总个体域：宇宙间一切事物组成的集合。

谓词：刻划个体词的属性或相互关系的词。

谓词常项：表示具体性质或关系的谓词，用 $F, G, H, \cdots$ 表示。

谓词变项：抽象或泛指的谓词，用$F, G, H, \cdots$表示

$F(a), F(x)$：个体常项a、个体变项 x 具有性质F

$F(a,b), F(x,y)$：个体常项a与b、个体变项x与y具有关系F

例 符号化下列命题：

（1）因为m是偶数，所以$(-1)^m = 1$。

（2）如果 5 大于 4，则 4 大于 6。

解 符号化个体与谓词

（1）$F(x)$：x 是偶数

$G(x)$：$(-1)^x = 1$

a：表示m

所以，该命题符号化为$F(a) \to G(a)$。

（2）$G(x, y)$：x 大于 y：

a：表示4

b：表示5

c：表示6

所以，该命题符号化为$G(b,a) \to G(a,c)$。

n 元谓词：含 n 个个体变项 $x_1, x_2, \cdots, x_n$的谓词 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

1 元谓词 $F(x)$表示 x 具有性质 F

$n(\geq 2)$元谓词$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 具有关系P

n元谓词$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$可视为n元函数，自变量取值于个体域，值域为$\{0,1\}$。

0元谓词：不含个体变项的谓词

$$F(a), P(a_1, a_1, \cdots, a_n) \qquad (n \geq 2)$$

量词：表示个体常项或个体变项之间数量关系的词。

全称量词 $\forall$：一切的，所有的，任意的，每一个，凡，都，…

$\forall x, \forall y, \cdots$表示个体域里的所有个体

$\forall xF(x), \forall yG(y), \cdots$表示个体域里的所有个体都具有性质$F, G$

存在量词 $\exists$：存在，有一个，至少有一个，…

$\exists x, \exists y, \cdots$表示个体域里有的个体

$\exists xF(x), \exists yG(y), \cdots$表示个体域里有的个体具有性质$F,G$

例 符号化下列命题

（1）每个人都呼吸。

（2）有的人用左手写字。

解 $F(x)$：x 呼吸　　　$G(x)$：x 用左手写字

（方法一）个体域为人类集合

（1）$\forall xF(x)$

（2）$\exists xG(x)$

（方法二）个体域为全总个体域

引入谓词 $M(x)$：x 是人

（1）$\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$

（2）$\exists x(M(x)\wedge G(x))$

特性谓词：把研究对象从其它事物中区别出来的谓词。

$\forall x(*\rightarrow *)$，$\exists x(*\wedge *)$　　模式固定

特性谓词的使用取决于个体域的选择

例 符号化下列命题：

（1） 所有的人都长着黑头发；

（2） 有的人登上过月球；

（3） 没有人登上过木星；

（4） 在美国留学的学生未必都是亚洲人。

解 若无特别说明，个体域总采用全总个体域。

（1）$F(x)$：x 长着黑头发　　$M(x)$：x 是人

$$\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$$

（2） $G(x)$：x 登上过月球

$$\exists x(M(x)\wedge G(x))$$

（3） $H(x)$：x 登上过木星

$\neg\exists x(M(x)\wedge H(x))$，$\forall x(M(x)\rightarrow\neg H(x))$

（4） $F(x)$：x 是在美国留学的学生

$G(x)$：x 是亚洲人

$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，$\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

例 符号化下列命题：

（1）兔子比乌龟跑得快

（2）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快

（3）不存在跑得同要快的两只兔子

（4）有的兔子比所有的乌龟跑得快

解 设$F(x)$：x 是兔子　　$G(y)$：y 是乌龟

$H(x,y)$：x 比 y 跑得快

$L(x,y)$：x 与 y 跑得同样快

（1） $\forall x \forall y(F(x) \land G(y) \rightarrow H(x, y))$

（2） $\exists x \exists y(F(x) \land G(y) \land H(y, x))$

（3） $\neg \exists x \exists y(F(x) \land F(y) \land L(x, y))$

（4） $\exists x(F(x) \land \forall y(G(y) \rightarrow H(x, y))$