1.2 牛顿运动定律及其应用

1.2.1 牛顿运动定律

1.2.2 自然界中的力

1.2.3 牛顿运动定律的应用

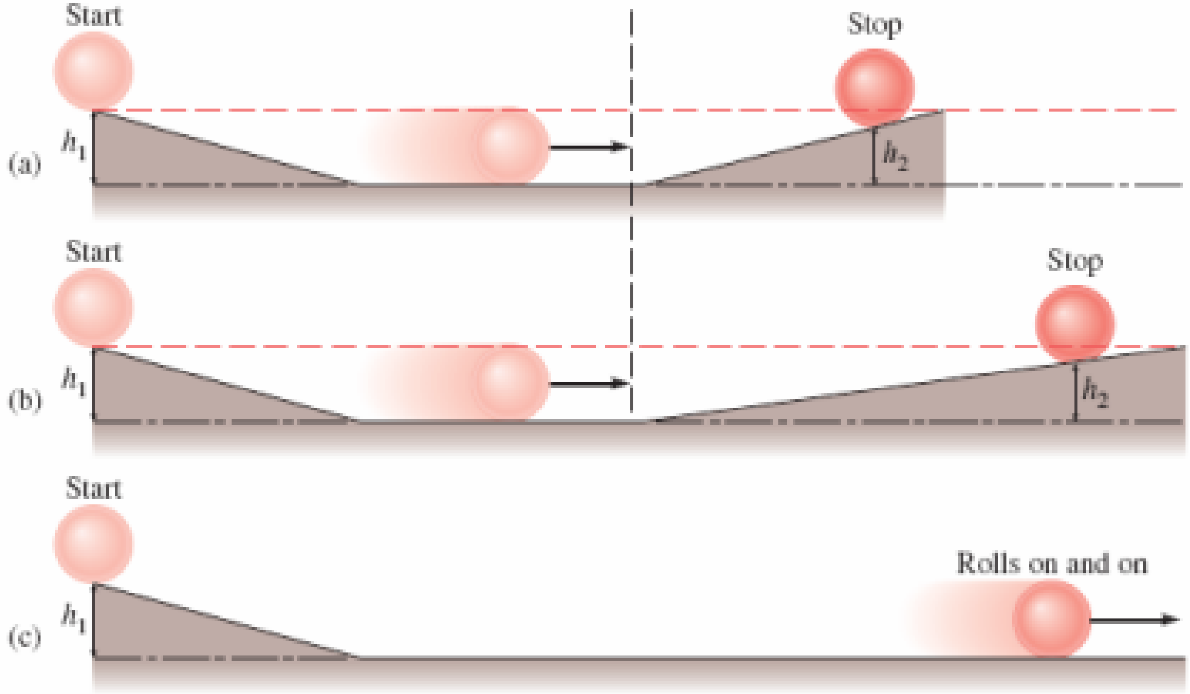
1.2.4 非惯性系与惯性力

牛顿运动定律的应用十分广泛

牛顿运动定律
（Newton′s laws of motion)

惯性 Inertia

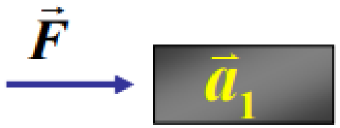
物体保持原来运动状态的性质。



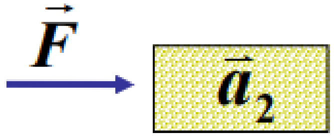
斜面实验

质量 Mass

用质量定量地表示物体惯性的大小。



铅块

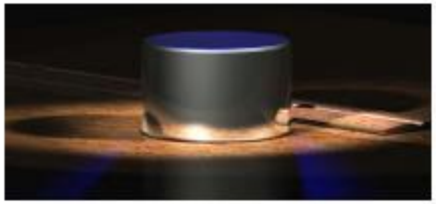


木块

以相同的力作用于这两物体

$$a_1 < a_2 \qquad \frac{a_1}{a_2} = \text{常量}$$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{a_0}{a}$$



千克标准原器示意图

经典力学中，质量m与物体的运动状态和参照系的选择无关

$$m = \frac{a_0}{a} m_0$$

已知m_0，再测出a_0和 a ，便可确定m.

物体移动时惯性的量度. 称为惯性质量.

单位：千克 (kg)

相对论中：$m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$

动量 Linear Momentum

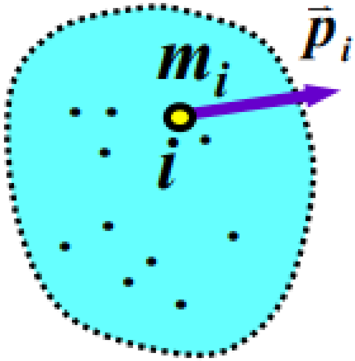
定义：

质点的动量： $\vec{p} = m\vec{v}$　直角系中：$\begin{cases} p_x = mv_x \\ p_y = mv_y \\ p_z = mv_z \end{cases}$

方向与速度方向一致

单位：千克·米/秒 （kg·m/s ）

质点系的动量： $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$



一. 牛顿第一定律（惯性定律）

任何物体如果没有力作用在它上面，都将保持静止的或作匀速直线运动的状态。

1. 定义了惯性参考系

惯性系---在该参照系中观察, 一个不受力作用的物体将保持静止或匀速直线运动状态不变.

使牛顿第一定律成立的参考系

2. 定义了物体的惯性和力

惯性---物体本身要保持运动状态不变的性质.

力---迫使一个物体运动状态改变的一种作用.

定性的给出了力与运动状态变化的关系

二. 牛顿第二定律

质点的加速度与它所受力的方向相同，加速度的大小与它的质量成反比，与它所受合力的大小成正比。

给出了运动的变化与所加的动力之间的定量关系

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

另一种表述：物体的动量对时间的变化率与所受的外力成正比，并且发生的外力的方向上

牛顿第二定律也可表示为: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt}$

这种表示无论是高速（m可变）还是低速运动都正确.

低速时质量不变 $\vec{F} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

同时受几个外力作用 $\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$

注意：上式具有瞬时性，矢量性

直角坐标系　　自然坐标系

分量形式

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = ma_x \\ \sum_i F_{iy} = ma_y \\ \sum_i F_{iz} = ma_z \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_i F_{in} = ma_n = m\dfrac{v^2}{R} \\ \sum_i F_{it} = ma_t = m\dfrac{dv}{dt} \end{cases}$$

三. 牛顿第三定律(作用力与反作用力)

如果物体1对物体2有力的作用，那么物体2对物体1也会有力的作用。两者大小相等，方向相反，沿一条直线。

通常称为作用力与反作用力

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$$

牛顿定律只适用于惯性系。

SI单位

一、单位制

SI即国际单位制

力学物理量

基本量 (长度,质量,时间)	→	基本单位 (m，kg，s)	单位制（SI）
导出量 (速度,加速度,力等)	→	导出单位 (m/s,m/s^2,N等)	

注意

做题时数字后面必须标明单位，否则无物理意义。

自然界中的力

一、万有引力

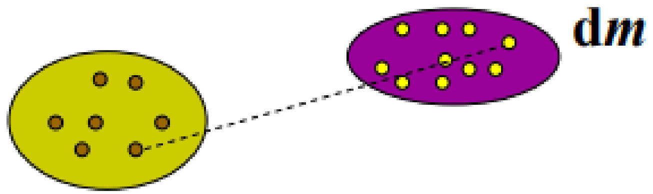
(1) 万有引力定律: $f = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

$G = 6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$ --万有引力恒量

(2) 力的强度: 地面上相隔1 m 的人 ~ 10^{-7} N

说明

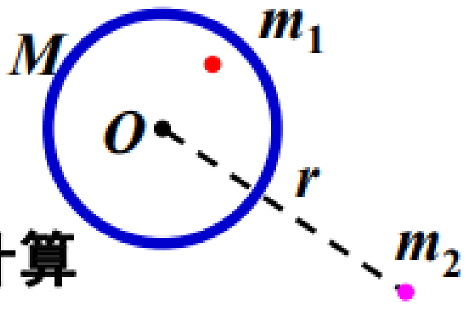
- 不直接适用于两个有限大的物体



- 可直接应用公式计算的特例

(1) 两个均匀球体间的万有引力可用此公式计算

$$f = G\frac{Mm}{r^2}$$

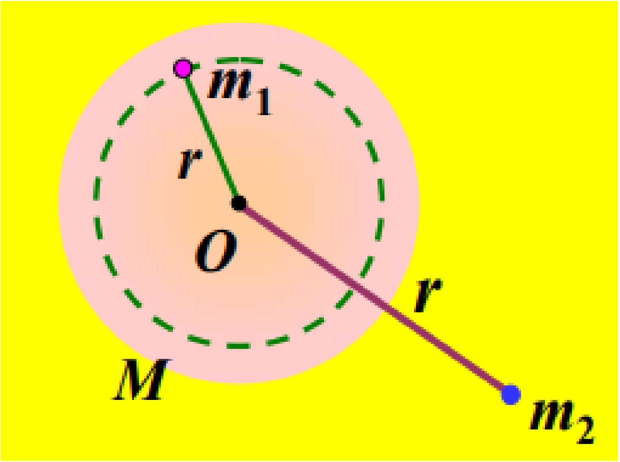


(2) 质量均匀分布的球壳对质点的引力

☺ 质点在球壳内，所受引力为零

☺ 质点在球壳外，引力可直接用此公式计算

(3) 质量均匀分布的球体对质点的引力



☺ 质点m位于球内距球心r 处

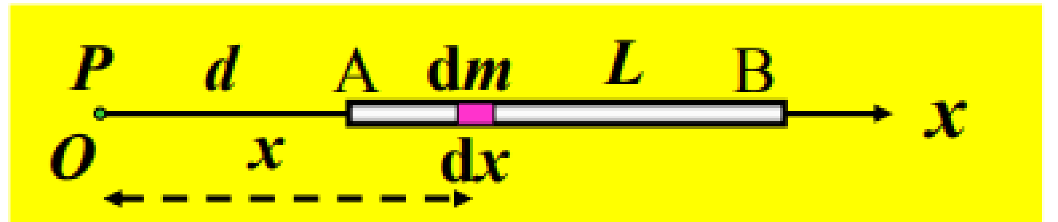
可直接用公式，但是M为半径 r 以内的质量$M_{内}$， 与 外面的质量无关

☺ 质点位于球外，可直接使用公式

例：一水平放置的均匀细棒AB长为L，质量为M。如图所示，在其延长线上距A端d处有一个质量为m_0的质点P，求：细棒与质点P间引力的大小。

解：设细棒的线密度为λ。因质量均匀分布，故

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}l} = \frac{M}{L}$$



质点受到的引力

$$\mathrm{d}f = G\frac{m_0\mathrm{d}m}{x^2} = G\frac{m_0\lambda\mathrm{d}x}{x^2}$$

$$f = \int_d^{L+d} G\frac{m_0\lambda\mathrm{d}x}{x^2} = G\frac{m_0M}{d(d+L)}$$

$L \ll d,\quad f = G\frac{m_0M}{d^2}$

与平方反比定律一致。

二、重力

$\vec{W} = m\vec{g}$　方向竖直向下

地球附近的物质所受的地球引力

一般取 g =9.81 m/s^2

根据万有引力来求重力加速度的值，源自物体与地球之间的万有引力，忽略地球的自转，并设地球是半径为R的球体。

$$P \cong \frac{GmM_E}{R^2} = mg, \quad g = G\frac{M_E}{R^2}$$

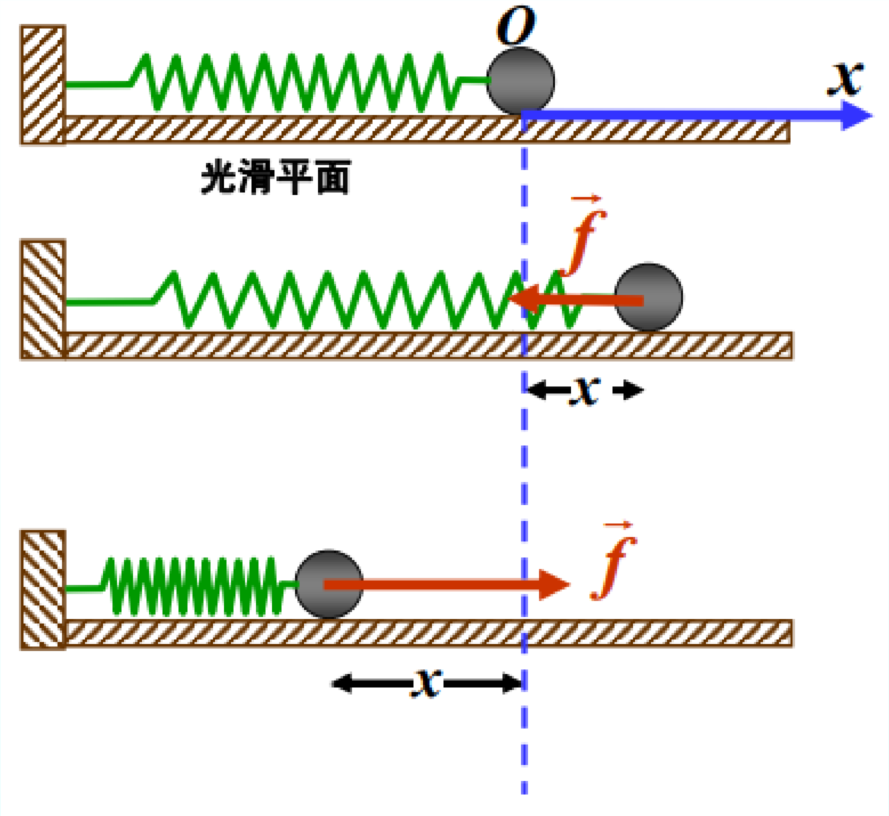
M：地球质量

R：地球半径

三、弹力

作用在相互接触的物体之间，与物体的形变相联系，是一种弹性恢复力。

(1) 弹簧的弹力



胡克定律：

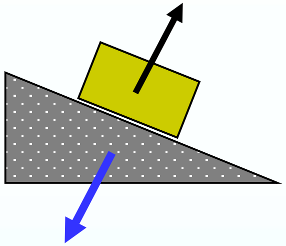
$$\boxed{\vec{f} = -k\vec{x}}$$

正比于物体相对于坐标原点的位移x

x的大小为弹簧的形变量

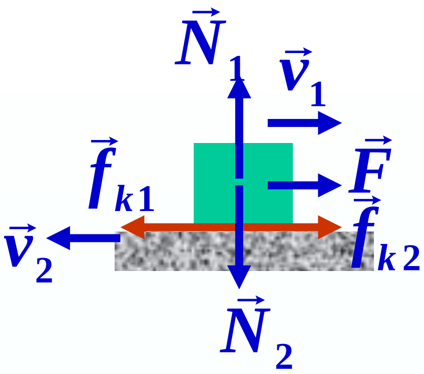
(2) 正压力 N , 支持力,

方向：垂直于接触面指向对方



(3) 张力 T，内部的弹力

四、摩擦力 (the force of friction)



(1) 滑动摩擦力

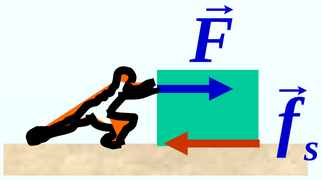
$$f_k = \mu_k N$$

滑动摩擦系数　　支持力

(2) 静摩擦力

$$f_{s\max} = \mu_s N$$

静摩擦系数



注意

静摩擦力不是一个定值，增大推力F，物体所受到的静摩擦力也会随之增大。但是静摩擦力也不会一直增大。

一般来说，同一个物体的静摩擦系数大于滑动摩擦系数

常见物质的摩擦系数：

材料	μ_s	μ_k
钢—钢	0.7	0.6
黄铜—钢	0.5	0.4
铜—铸铁	1.1	0.3
玻璃—玻璃	0.9	0.4
橡胶—水泥路面（干）	1.0	0.8
橡胶—水泥路面（湿）	0.3	0.25
涂蜡的滑雪板和雪面（0℃）	0.1	0.05

五 基本的自然力

四种基本相互作用：

1. 万有引力相互作用（**The gravitational Force**）
2. 电磁相互作用 **(The Electromagnetic Force)**
3. 强相互作用 **(The Strong Nuclear Force)**
4. 弱相互作用**(The weak Nuclear Force)**

相互作用种类	力程（m）	强度*（N）
万有引力相互作用	无限远	10^{-34}
弱相互作用	小于10^{-17}	10^{-2}
电磁相互作用	无限远	10^{2}
强相互作用	10^{-15}	10^{4}

牛顿定律的应用

解题步骤

- 选定对象，隔离物体
- 受力分析，画示意图
- 分析运动
- 选坐标系，列方程，求解未知量
- 检验与讨论

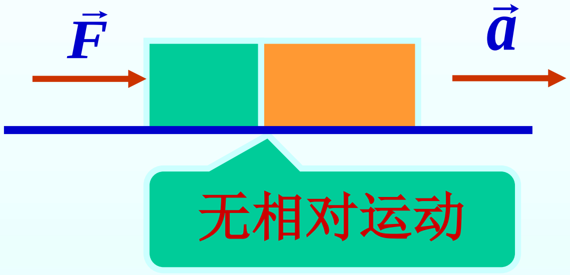
解题步骤

1. 确定研究对象;

一般采用隔离体法. 即把系统中的几个物体分别研究。

如果在运动过程中几个物体之间没有相对运动, 根据问题的需要也可把这几个物体作为一个整体处理.

这时要注意区分内力与外力



2. 受力分析

找出研究对象所受的全部外力, 画出示力图

3. 分析运动

分析研究对象的运动状况, 并确定各研究对象运动状况之间的联系(约束条件).

4. 列方程

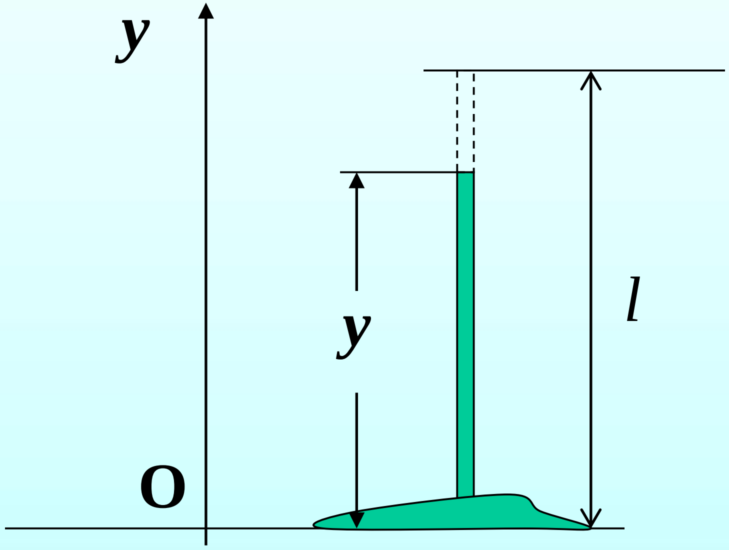
列出牛顿方程. 根据需要选择适当的坐标系,将力和加速度分解, 列出各坐标轴方向的牛顿方程.

5. 解方程，对结果作必要讨论。

例 1：一柔软绳长 l，线密度 ρ，一端着地开始自由下落，下落的任意时刻，给地面的压力为多少?

解：建坐标

以整个绳子为研究对象，分析受力，设任意时刻t, 绳给地面的压力为 N



$$N-\rho g l=\frac{dp}{dt}=\frac{d(mv)}{dt}$$

$$=\frac{d(\rho y v)}{dt}=\rho\left(v\frac{dy}{dt}+y\frac{dv}{dt}\right)$$

$$N - \rho g l = \rho\left(v\frac{dy}{dt} + y\frac{dv}{dt}\right)$$

$$v = \frac{dy}{dt} \qquad\qquad -g = \frac{dv}{dt}$$

$$N = \rho g l + \rho(v^2 - yg)$$

$$v^2 = 2g(l - y)$$

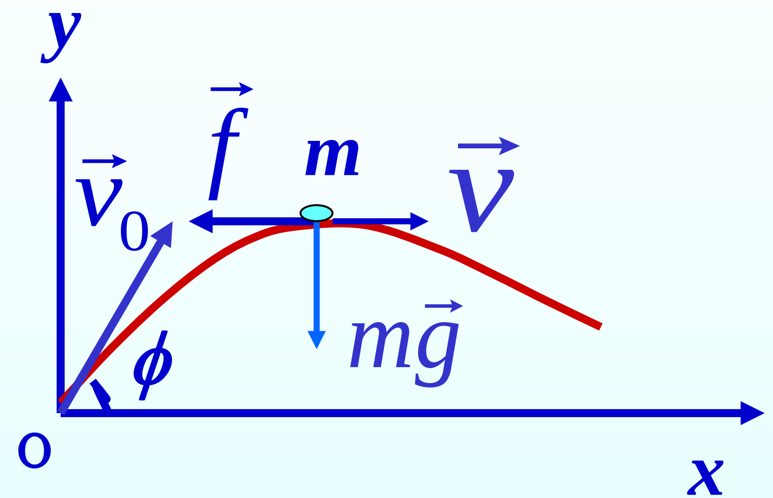
$$N = \rho g l + 2\rho(l - y)g - \rho y g$$

$$N = 3\rho g(l - y)$$

例2：有阻力的抛体问题 .

已知: 质量为m的炮弹,以初速度v_0与水平方向成仰角ϕ射出. 若空气阻力与速度成正比, 即 $\vec{f}=-k\vec{v}$

求：运动轨道方程 $y[x]=$?



解：二维空间的变力情况.

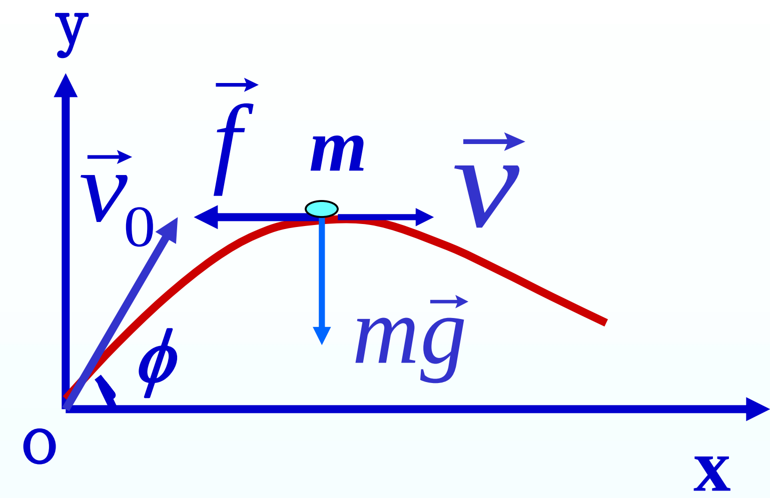
1. 选 m 为研究物体.

2. 建坐标 xoy.

$t=0$ 时, $\begin{cases} x=0,\ y=0 \\ v_{x0}=v_0\cos\phi,\ v_{y0}=v_0\sin\phi \end{cases}$

3. 分析受力: $\begin{cases} \text{重力：} m\vec{g} \\ \text{阻力：} \vec{f} \end{cases}$

列方程: $\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = -kv_x \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = -mg - kv_y \end{cases}$



分离变量 $\begin{cases} \dfrac{dv_x}{v_x} = -\dfrac{k}{m}dt \\ \dfrac{kdv_y}{mg + kv_y} = -\dfrac{k}{m}dt \end{cases}$

分别积分 $\begin{cases} \displaystyle\int_{v_{x0}}^{v_x} \dfrac{dv_x}{v_x} = \int_0^t -\dfrac{k}{m}dt \\ \displaystyle\int_{v_{y0}}^{v_y} \dfrac{kdv_y}{mg + kv_y} = \int_0^t -\dfrac{k}{m}dt \end{cases}$

得 $\begin{cases} v_x = (v_0 \cdot \cos\varphi) \cdot e^{-\frac{kt}{m}} \\ v_y = (v_0 \sin\phi + \frac{m}{k} g) \cdot e^{-\frac{m}{k}t} - \frac{mg}{k} \end{cases}$

再次积分 $\begin{cases} \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_x \cdot dt \\ \int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t v_y \cdot dt \end{cases}$

得 $\begin{cases} x = \dfrac{mv_0 \cos\varphi}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \\ y = (\dfrac{mv_0 \sin\varphi}{k} + \dfrac{m^2 g}{k^2}) \cdot (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \dfrac{mg}{k} t \end{cases}$

消去 t ,得轨道方程:

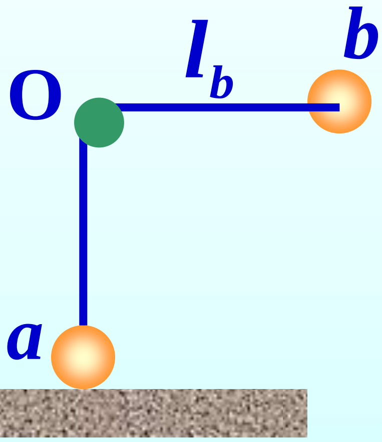
$$y = \left(\tan\phi + \frac{mg}{kv_0 \cos\phi}\right)x + \frac{m^2 g}{k^2} \ln\left(1 - \frac{kx}{mv_0 \cos\phi}\right)$$

例3. 一根不可伸长的轻绳跨过固定在O点的水平光滑细杆，两端各系一个小球。*a*球放在地面上，*b*球被拉到水平位置，且绳刚好伸直。从这时开始将*b*球自静止释放。设两球质量相同。

求：(1) *b*球下摆到与竖直线成θ角时的 v；

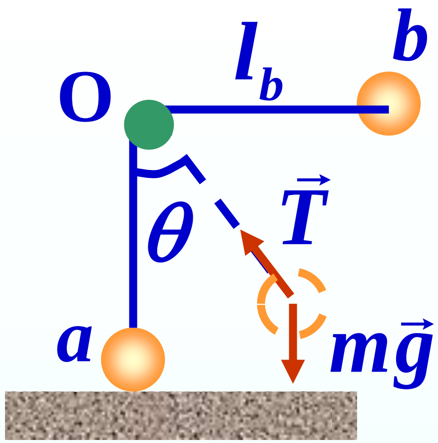
(2) $\theta = ?$ *a* 球刚好离开地面。

解： (1)分析*b*运动



*a*球离开地面前*b*做半径为 l_b 的竖直圆周运动。

分析b受力，选自然坐标系



当b球下摆到与竖直线成θ角时

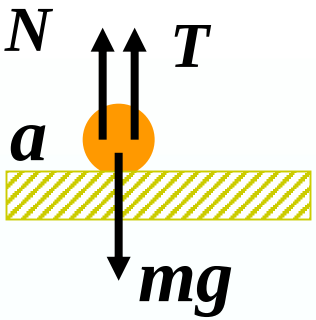
$$
\begin{cases}
F_n = T - mg\cos\theta = m\dfrac{v^2}{l_b} & (1) \\
F_t = mg\sin\theta = m\dfrac{dv}{dt} & (2)
\end{cases}
$$

由(2)式得 $g\sin\theta = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{ds}\cdot\dfrac{ds}{dt} = v\dfrac{dv}{ds}$

$$\therefore \int_0^v v\,dv = \int_0^s g\sin\theta(ds) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} g\sin\theta(-l_b d\theta)$$

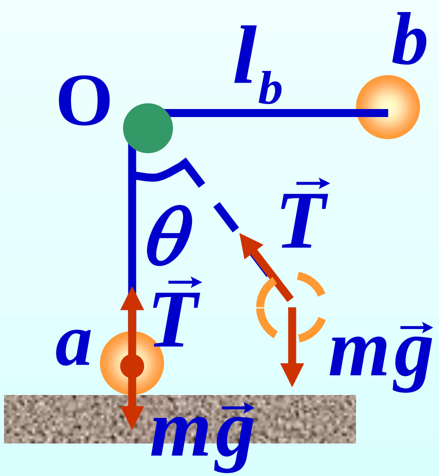
$$\therefore v = \sqrt{2l_b g\cos\theta} \qquad (3)$$

(2) 分析a运动



当 $T = mg$ 时，a 球刚好离地

由（2）式 $F_n = mg - mg\cos\theta = m\dfrac{v^2}{l_b} = m\dfrac{2l_b g\cos\theta}{l_b}$



$$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3}$$

例4. 质量为0.25 kg的质点，受力$\vec{F}=t\vec{i}$ (SI)的作用，$t=0$时该质点以$\vec{v}=2\vec{j}$ m/s的速度通过坐标原点，则该质点任意时刻的位置矢量是：

解：

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}=\frac{t}{0.25}\vec{i}=4t\vec{i}$$

$$\int_{2\vec{j}}^{\vec{v}} d\vec{v}=\int_0^t \vec{a}\,dt \qquad \vec{v}-2\vec{j}=2t^2\vec{i}$$

$$\vec{v}=2t^2\vec{i}+2\vec{j}$$

$$\int_0^{\vec{r}} d\vec{r}=\int_0^t \vec{v}\,dt \qquad \vec{r}=\frac{2}{3}t^3+2t\vec{j}$$

1.2.4　非惯性系与惯性力

(Inertial reference frame)

什么是非惯性系?

相对惯性系作加速运动的参照系为非惯性系.

在惯性系中与在非惯性系中观测物体运动有何区别?

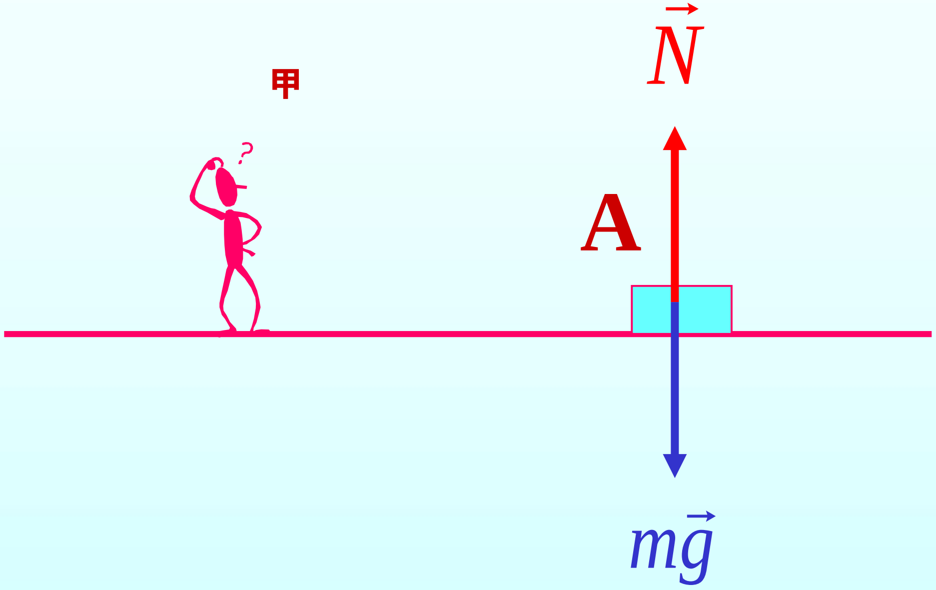
一.　在惯性系中

甲观测A，A物静止.

A物受合外力

$$\vec{F} = 0$$

满足牛顿第二定律

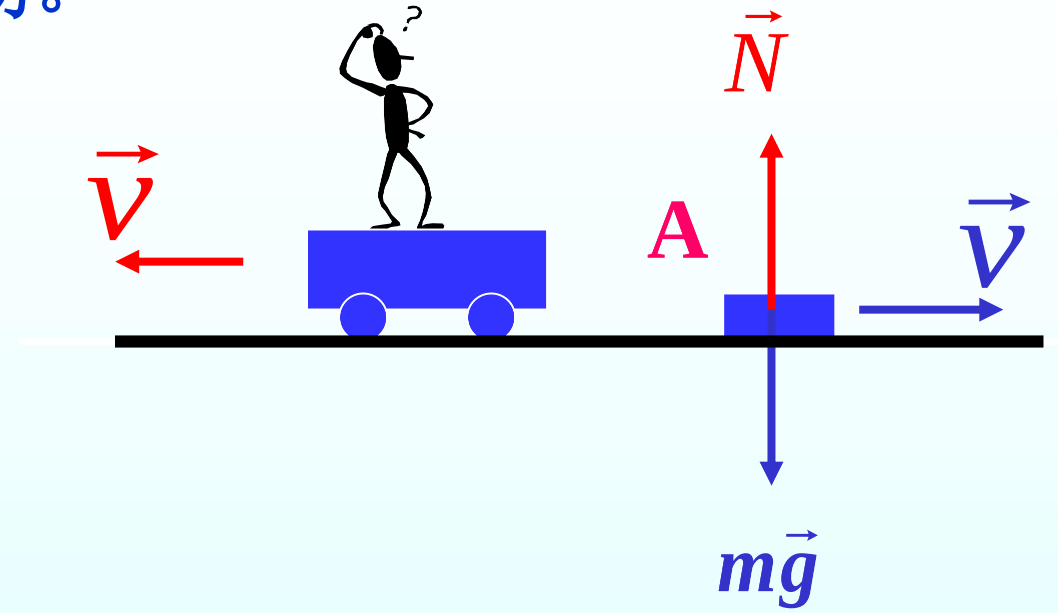


乙在相对地匀速运动的车中 观测A物为匀速运动。

A 物受合外力

$\vec{F} = 0 \quad \vec{a} = 0$

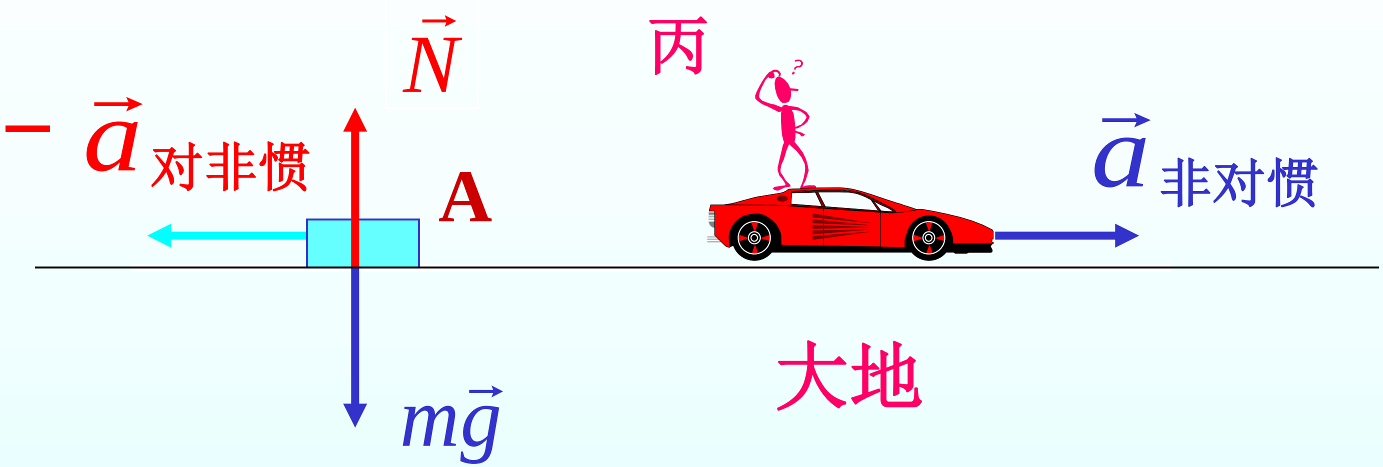
满足牛顿第二定律



惯性系---在该参照系中观察, 一个不受力作用的物体将保持静止或匀速直线运动状态不变.

二. 在非惯性系中

丙在相对地以加速 $\vec{a}$ 向右运动的车上，
看 A 物沿反向 $\vec{a}$ 加速运动.



$\vec{F}=0\quad \vec{a}\neq 0$ 在非惯性系中牛顿定律不再成立.

可见在惯性系中与在非惯性系中观测同一物体运动，其结论却不相同.

三 惯性力 （Inertial force)

(一) 平动参照系中的惯性力

设：S 系为惯性系， S'系为非惯性系，
S'相对于 S 加速度 a_0

物体相对S， 加速度$\vec{a}$,

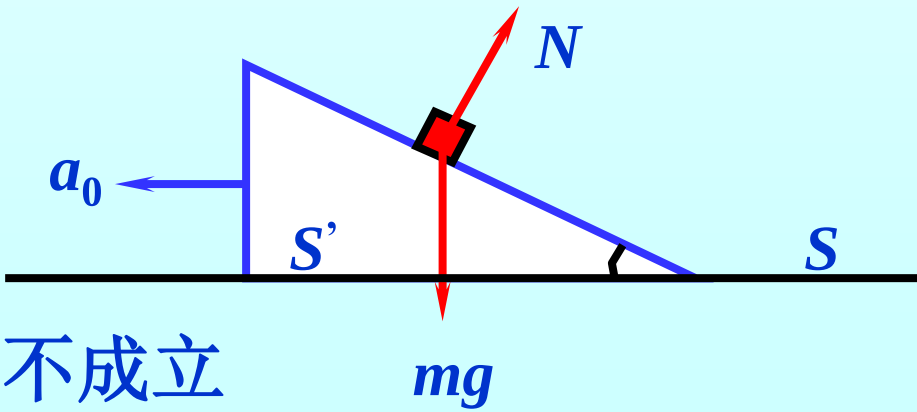
物体相对S' 加速度$\vec{a}'$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$$

质点 m 在 S 系 $\vec{F} = m\vec{a}$ $\vec{F} = m\vec{a}' + m\vec{a}_0$

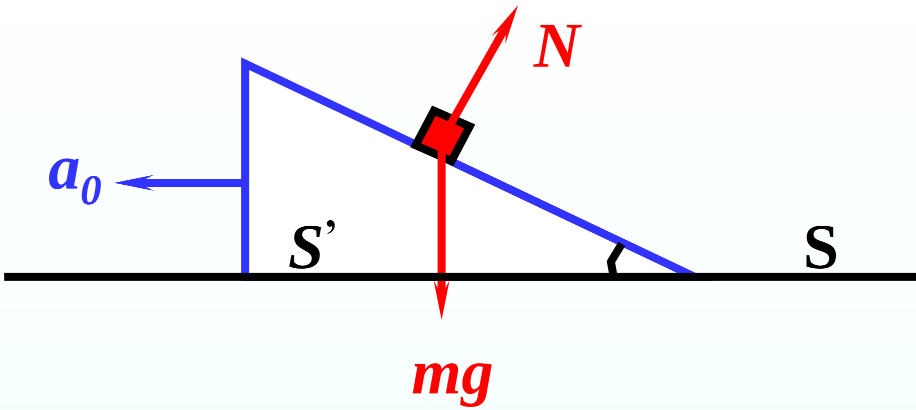
$\vec{F}$ 不随参考系变化

在 S' 系 $\vec{F} \neq m\vec{a}'$



牛顿第二定律在非惯性系不成立

由质点 m 在S系



$$\vec{F} = m\vec{a}' + m\vec{a}_0$$

$$\vec{F} - m\vec{a}_0 = m\vec{a}'$$

令：$\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$ 在非惯性系引入虚拟力---惯性力

$$\vec{F} + \vec{F}_0 = m\vec{a}\,'$$

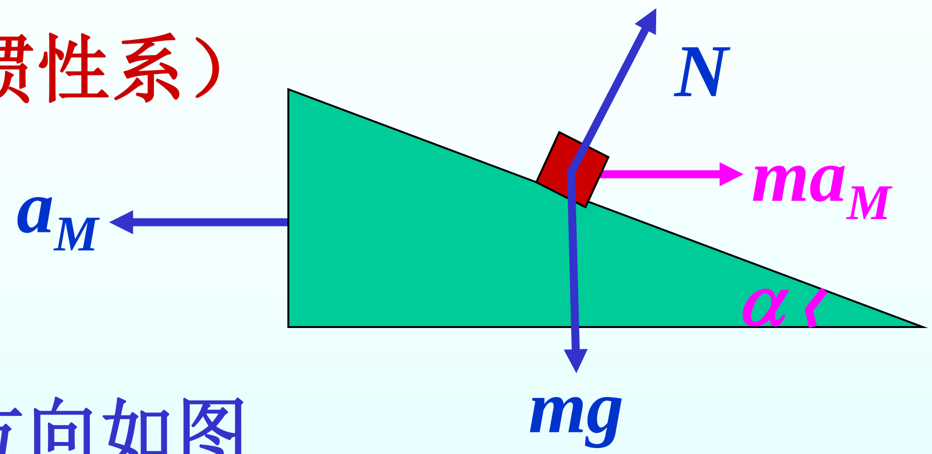
在非惯性系S '中，牛顿第二定律形式上成立

此结论可推广到非平动的非惯性系，如转动参考系。

注意：惯性力不是物体间的相互作用力，没有施力物体，因而也就没有反作用力。惯性力的方向沿 $-\vec{a}_0$ 大小等于物体的质量m乘以参照系的加速度 a_0

例. 质量为M, 倾角为α 的斜面放在光滑的水平桌面上, 斜面光滑, 长为l ， 斜面顶端放一个质量为m的物体, 开始时斜面和物体都静止不动, 求物体从斜面顶端滑到斜面底端所需时间.

解：以斜面为参考系(非惯性系）



物体相对于斜面有沿斜面方向的加速度 a'

当m 滑下时，M 加速度方向如图

分析物体受力

其中 $m\,a_M$就是惯性力. 而 mg 和 N 是真实力.

列方程：

沿斜面方向： $mg\sin\alpha + ma_M\cos\alpha = ma'$

垂直于斜面方向： $N - mg\cos\alpha + ma_M\sin\alpha = 0$

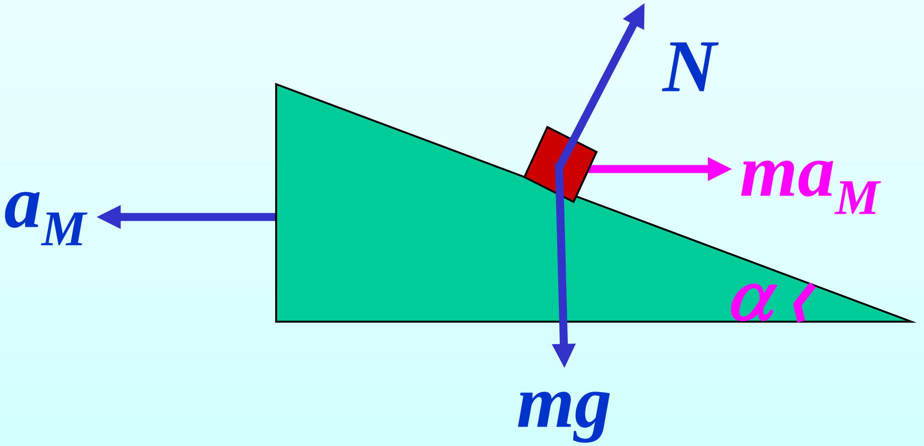
分析M(相对惯性系)：

$N\sin\alpha = Ma_M$ 水平方向

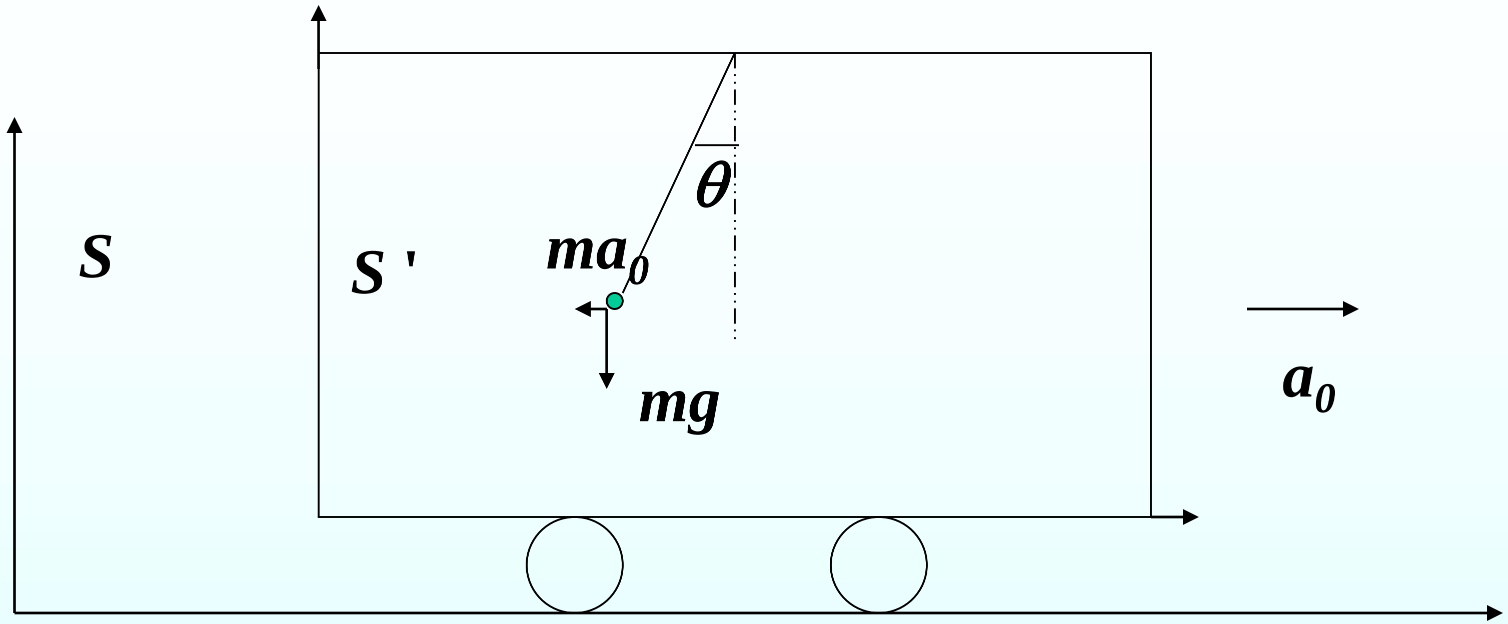
由此解得相对加速度 $a' = (m+M)\sin\alpha g / (M + m\sin^2\alpha)$

由 $l = \dfrac{1}{2}a't^2$

$$t = \sqrt{\frac{2l(m\sin^2\alpha + M)}{(M+m)\sin\alpha\, g}}$$



例：在一匀加速运动的车厢内，观察单摆，求其平衡位置（加速度 a_0，摆长l，质量m）



解：在S '系

$$a = \sqrt{a_0^{\ 2} + g^{\ 2}}$$

平衡位置

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_0}{g}$$

(二) 匀角速转动参照系中的惯性离心力

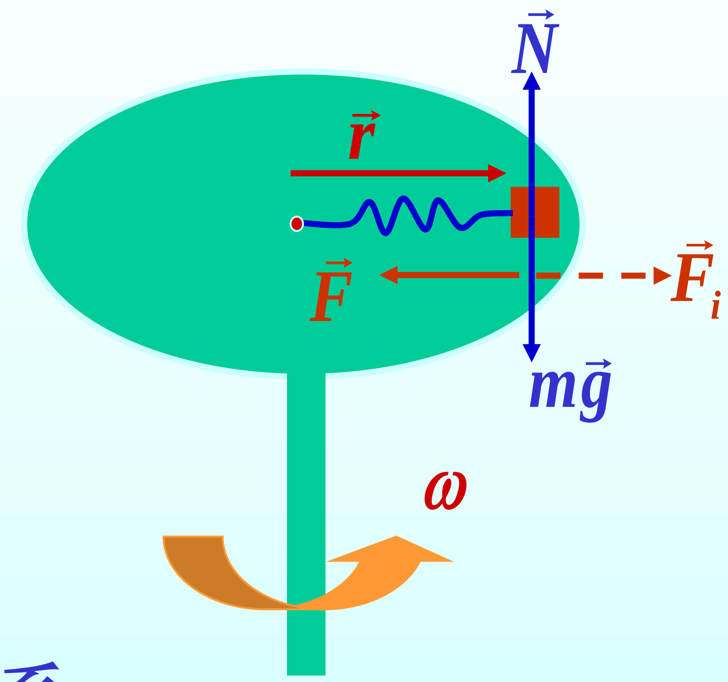
从地面参照系（惯性参照系）观察一转动系统：

$\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$ 方向指向圆心

从水平转台（非惯性参照系）上观察：

$\vec{a}' = 0$ $\vec{F} \neq 0$

牛二在非惯性系不成立



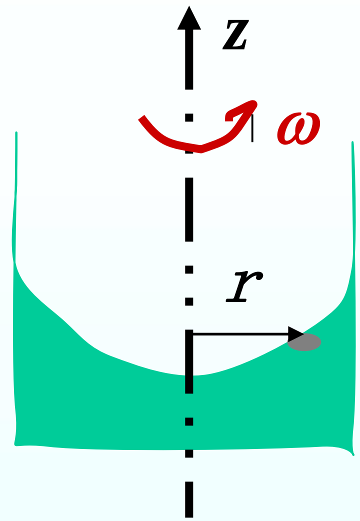
同前面引入惯性离心力:

$\vec{F}_i = m\omega^2\vec{r}$ 指向离心的方向

$\vec{F} + \vec{F}_i = 0$ $\vec{a}' = 0$

引入惯性离心力后，在非惯性系中，牛顿第二定律形式上成立

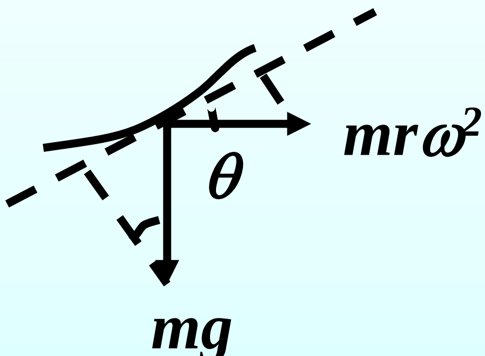
例：水桶以ω 旋转，求水面形状？



解：水面 z 轴对称，选柱坐标系。任选水面一小质元，其在切线方向静止

在旋转参考系中，沿水面切线方向

$$mg\sin\theta - mr\omega^2\cos\theta = 0$$



$$tg\theta = \frac{r\omega^2}{g} \rightarrow \qquad \frac{dz}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}$$

积分 $$\int_{z_0}^{z} dz = \int_{0}^{r} \frac{r\omega^2}{g} dr \qquad z = z_0 + \frac{r^2\omega^2}{2g}$$

注意： 惯性力是虚拟的，但是作用效果却是真实的。

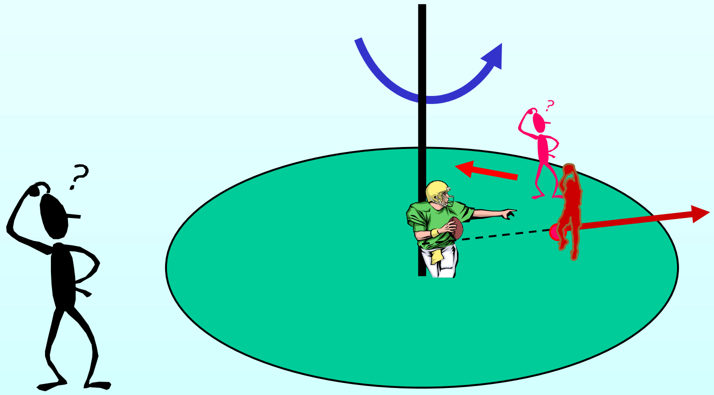
思考生活中哪些时刻有惯性力的效果存在？

(三)科里奥利力（选学）

如果物体相对于匀角速转动参考系而言并不是静止的，而是作相对运动，那么在该转动参考系中的观测者看来，除了惯性离心力以外，物体还将受到另外一种假想的力——科里奥利力（简称科氏力）

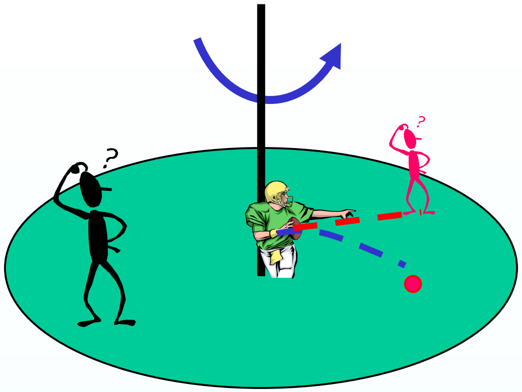
该力与质点（相对于转动参考系）的速度垂直，并产生侧向偏转

设：两人在转动平面上沿径向直线玩投球游戏



在惯性系中看

球离开投掷者后沿直线运动，而接球人随平台运动到该点的左侧，因此接不到它。

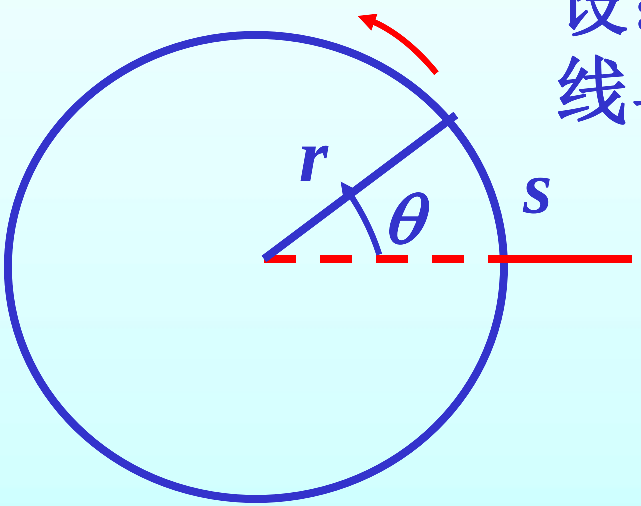


在平台的转动参考系中

接球人静止不动，而球却偏向右边去了，接不到它。

在非惯性系（平台参考系），使球偏离直线运动的力称为科里奥利力

下面通过惯性系中的一个简单例子来计算科里奥利力



设：θ为平台上的一条固定的径向直线与空间某一固定直线之间的夹角

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad s = r\theta$$

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

现假设从圆心沿径向直线朝外以速率 v 投出一球

经过时间 t, 球运动了径向距离 $r = vt$

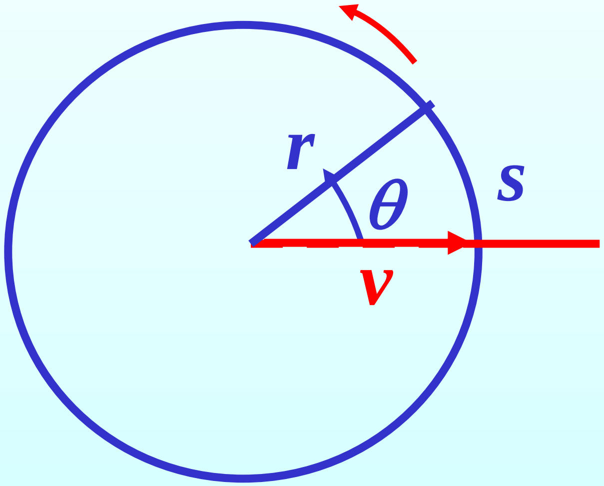
同时r 处的点沿圆弧运动了s 距离 $s = r\,\omega t = (vt)\,\omega t$

s 也是在转动参考系中由科氏力所造成的球的偏转距离

在转动参考系中偏转是向右的（沿速度方向看）

在转动参考系中

$$s = v\omega t^2 = \frac{1}{2}(2\omega v)t^2 = \frac{1}{2}a_{科}t^2$$

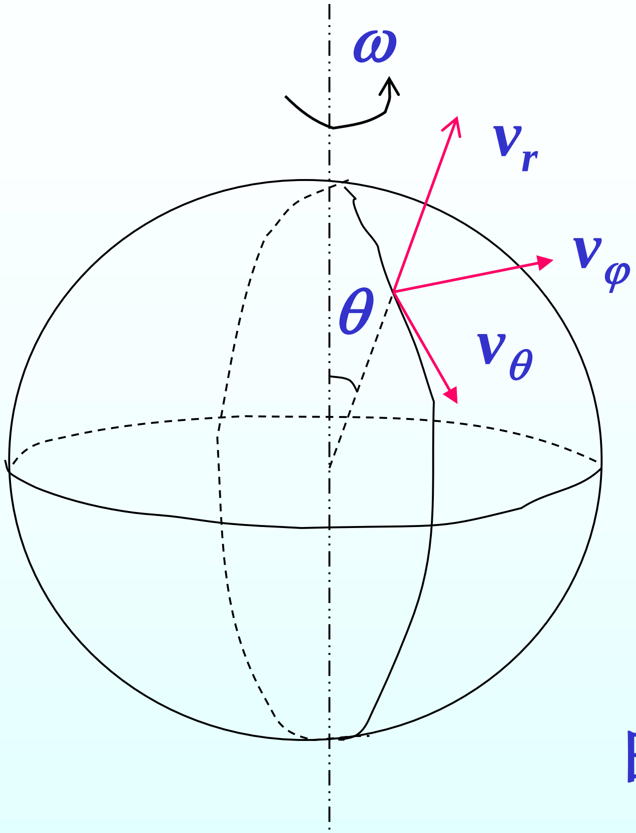


$$a_{科} = (2\omega v)$$

$$F_{科} = ma_{科} = 2m\omega v$$

普遍情况：$\vec{F}_{科} = m\vec{a}_{科} = 2m\vec{v}\times\vec{\omega}$

推广到三维球面



将 v 沿 $(\hat{r},\hat{\theta},\hat{\varphi})$ 方向分解

$$\vec{F}_{科} = 2m\vec{v}\times\vec{\omega}$$

$$\vec{f}_{科} = -2mv_r\omega\sin\theta\hat{\varphi} + 2mv_\varphi\omega\cos\theta\hat{\theta}$$

$$-2mv_\theta\omega\cos\theta\hat{\varphi} + v_\phi\omega\sin\theta\,\hat{r}$$

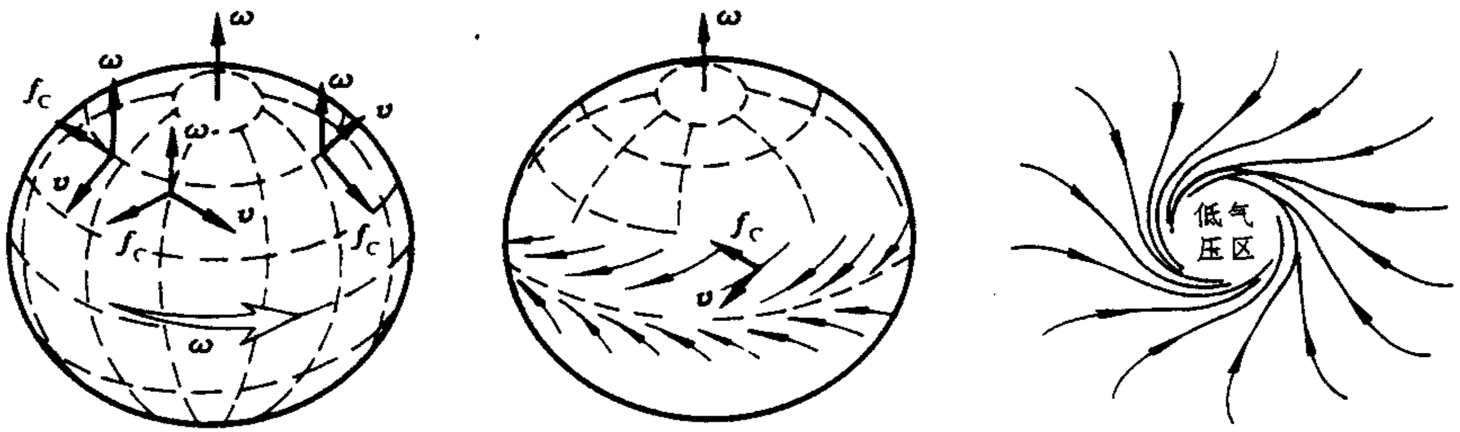
由上式第一项可以说明落体偏东

第二、第三项可以说明当江水沿 v_θ 或 v_ϕ 流动时，在北半球看江水将冲刷其右岸。

说明

1. 无论物体沿哪个方向运动（v有垂直于转轴的分量)，都将受到科氏力的作用，并不仅限于径向运动。

2. $\vec{F}_{科}$ 沿 $\vec{v}\times\vec{\omega}$ 的方向，由此可说明许多自然现象



北半球上的科里奥利力　　　信风的形成　　　旋风的形成

3. 要使质点能沿半径**相对于圆盘**作匀速直线运动，可以将质点放入圆盘上的径向槽内，当盘转动时槽施加给质点一力 F_t，且 $F_t = F_{科}$ 方向相反。

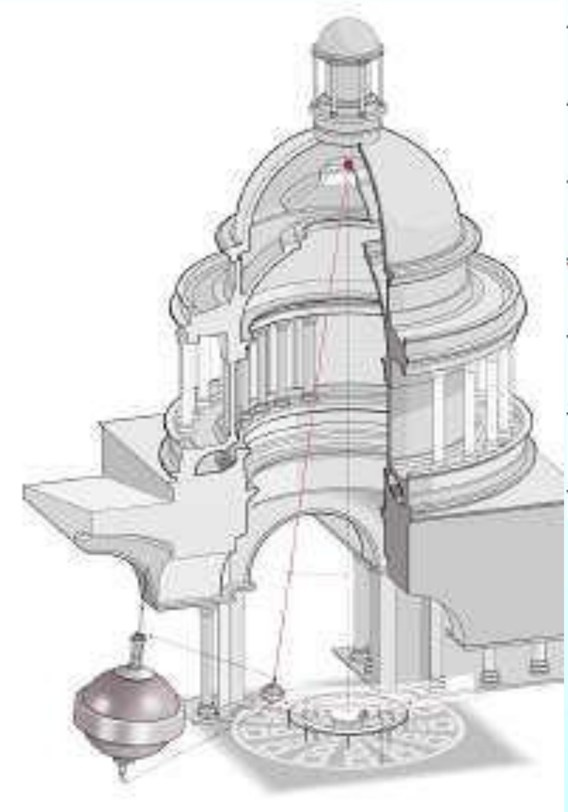
2. 都江堰水利工程（岷江内外江水量调配）

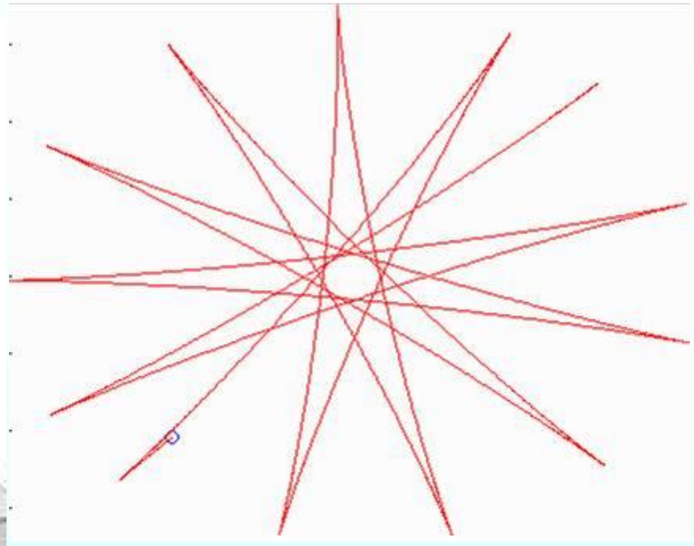
分四六，平潦旱

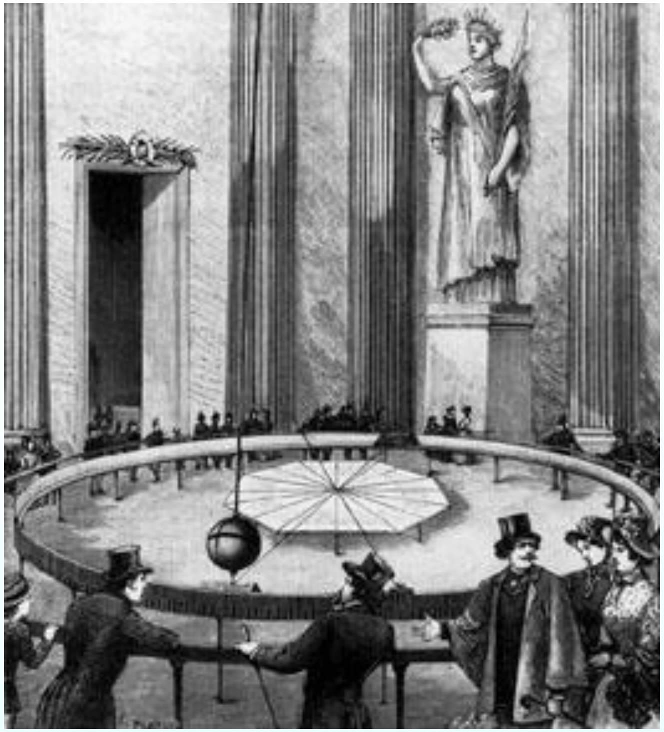
深淘滩，低作堰

3. 傅科摆　证明地球转动的摆

1851年，让 傅科（Jean Foucault）







巴黎国葬院大厅

67米长的绳索悬挂重达28千克的摆锤，下方是巨大的沙盘。

南北极处的科里奥利效应最明显，赤道处傅科摆一般不会发生进动。

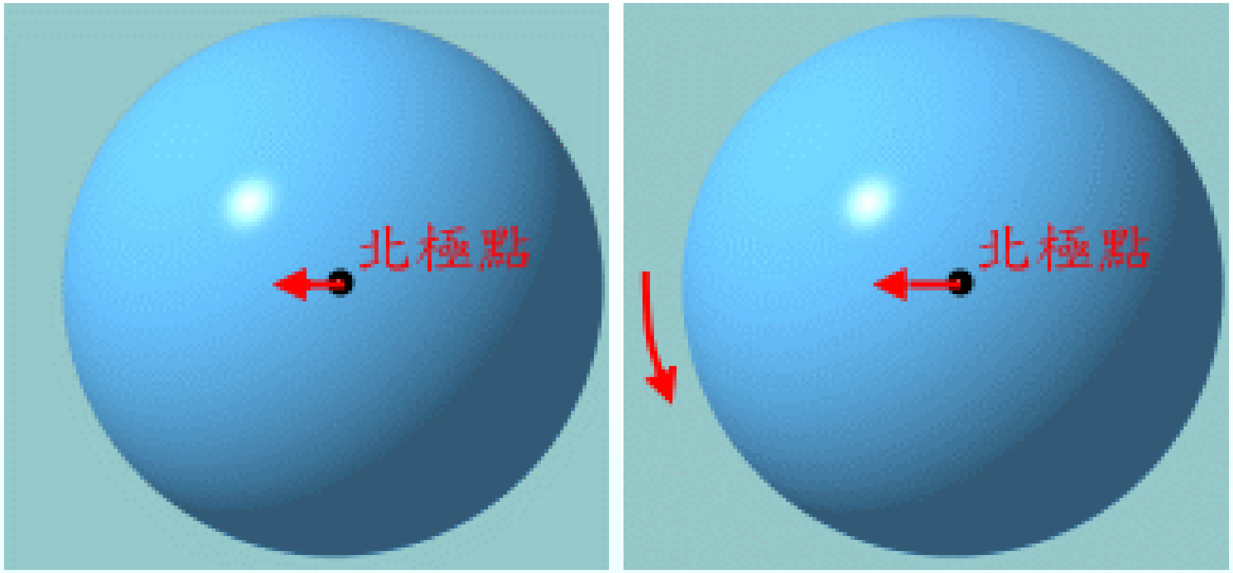
为何使用如此大的摆？

北京天文馆傅科摆复制模型

4. 地球上的其他科里奥利效应

炮弹偏右
（北半球）

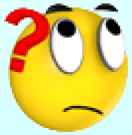
地球不动时炮弹轨迹



真实炮弹轨迹

思考

一战英德马岛海战，校正后的炮弹为什么总是偏离目标向左？



南半球炮弹偏左！

我们身边还有哪些科里奥利效应？