第三章 命题逻辑的推理理论

- 命题逻辑的主要任务就是用数学的方法研究推理演算。
- **推理**：从前提出发推出结论的思维过程。
- **前提**：已知命题公式集合。
- **结论**：从前提出发应用推理规则推出的命题公式。

§3.1 推理的形式结构

定义 设$A_1, A_2, \cdots, A_k, B$都是命题公式，若每一个使命题公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$为真的赋值也是命题公式$B$的成真赋值，则称由前提$A_1, A_2, \cdots, A_k$推出结论$B$的推理是**有效的**或**正确的**，并称$B$是**有效的结论**。

推理的形式结构记为

$$\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \vdash B$$

推理正确，记为

$$\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \vDash B$$

推理无效，记为

$$\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \nvDash B$$

例 判断推理的有效性 $\{p\to q, \neg q\}\vdash \neg p$。

解 （方法一）构造真值表

p	q	$p\to q$	$\neg q$	$\neg p$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

因为 $\neg q\wedge(p\to q)$为真时$\neg p$也为真，所以推理正确。

（方法二）考虑命题公式 $\neg q\wedge(p\to q)\to\neg p$

$$\neg q\wedge(p\to q) \Leftrightarrow \neg q\wedge(\neg p\vee q)\to\neg p$$

$\Leftrightarrow (\neg q\wedge\neg p)\vee(\neg q\wedge q)\rightarrow\neg p$

$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\vee 0)\rightarrow\neg p \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\rightarrow\neg p$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\wedge\neg q)\vee\neg p$

$\Leftrightarrow (p\vee q)\vee\neg p \Leftrightarrow (p\vee\neg p)\vee q$

$\Leftrightarrow 1\vee q \Leftrightarrow 1$

因为 $\neg q\wedge(p\rightarrow q)\rightarrow\neg p$是重言式，所以当 $\neg q\wedge(p\rightarrow q)$为真时， $\neg p$一定也为真，故该推理是有效的。

定理 由命题公式$A_1, A_2, \cdots, A_k$推出命题公式B的推理正确的充分必要条件是$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k\rightarrow B$为重言式。

证明 充分性 设

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \to B$$

是重言式，则在任意赋值下，$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \to B$ 的真值恒为真。而蕴涵式前件为真时，仅当后件也为真时，该式为真。因此，当某一赋值使得

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$$

为真时，该赋值必使公式B为真。所以，推理正确。

充分性 设推理正确，则使

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$$

为真的赋值，也使B为真。在此赋值下，上述蕴涵

式的真值为 1→1⇔1。对使

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$$

的真值为假的赋值，无论B的真值如何，蕴涵式

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B$$

的真值均为真。故在任意赋值下，上述蕴涵式的真值永为真，使用该式为重言式。 ■

注 由上述定理的

① 推理正确，结论未必为真。

② 推理只注重结构。

例 判断推理的有效性 $\{p, p\to q\}\vdash q$。

解 考虑命题公式 $p\wedge(p\to q)\to q$

$$
\begin{aligned}
p\wedge(p\to q)\to q &\Leftrightarrow p\wedge(\neg p\vee q)\to q \\
&\Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee(p\wedge q))\to q \\
&\Leftrightarrow 0\vee(p\wedge q)\to q \\
&\Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\vee q \\
&\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee q \\
&\Leftrightarrow \neg p\vee 1 \Leftrightarrow 1
\end{aligned}
$$

由此得推理形式结构 $p\wedge(q\to p)\to q$ 为重言式，所以该推理是有效的。

例 判断下述推理是否正确？

（1）若a能被4整除，则a能被2整除。a能被4整除。所以a能被2整除。

（2）若下午气温超过30℃，则王小燕必去游泳。若她去游泳，则她就不去看电影了。所以，若王小燕没去看电影，则下午气温必超过了30℃。

解 (1) 把命题符号化

p：a能被4整除　　　q：a能被2整除

前提：$p \to q$，p

结论：q

推理的形式结构： $p\wedge(p\to q)\to q$

由前例可得该推理正确。

(2) 把命题符号化

p：下午气温超过 30°C

q：王小燕去游泳

r：王小燕去看电影

前提：$p\to q,\ q\to\neg r$

结论：$\neg r\to p$

推理的形式结构：$(p\to q)\wedge(q\to\neg r)\to(\neg r\to p)$

因为

$$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow\neg r)\rightarrow(\neg r\rightarrow p)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee\neg r)\rightarrow(r\vee p)$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee\neg r))\vee(p\vee r)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee\neg(\neg q\vee\neg r)\vee(p\vee r)$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(q\wedge r)\vee(p\vee r)$$

$$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\vee p)\vee((q\wedge r)\vee r)$$

$$\Leftrightarrow p\vee r$$

$$\Leftrightarrow p\vee 0\vee r$$

$$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$$

$$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r) = M_0\wedge M_2$$

上式为推理的形式结构的主合取范式，可见其有两个成假赋值，其不是重言式。所以，该推理是无效的。 ▌

定义 设A, B是两个命题公式，若公式$A\rightarrow B$是重言式，则称之为**重言蕴涵式**，记为$A\Rightarrow B$。

注 “$\Rightarrow$” 不是联结词，是元语言。

这样，推理的形式结构 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}\vdash B$ 记为

$$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k\Rightarrow B$$

性质 设A,B,C是任意命题公式，则有

1．附加律：$A \Rightarrow (A \vee B)$

2．化简律：$(A \wedge B) \Rightarrow A$

3．假言推理：$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$

4．拒取式：$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

5．析取三段论：$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

6．假言三段论：$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$

7．等价三段论：$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$

8．构造性二难：

$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$$

9．破坏性二难：

$$(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(\neg B\vee\neg D)\Rightarrow(\neg A\vee\neg C)$$

定理 $A\leftrightarrow B$是重言式当且仅当$A\rightarrow B$与$B\rightarrow A$都是重言式，即$A\Leftrightarrow B$当且仅当$A\Rightarrow B$且$B\Rightarrow A$。

证明 **必要性** 设$A\leftrightarrow B$是重言式，则在任意赋值下，$A\leftrightarrow B$为真，即A与B有相同的真值。此时，$A\rightarrow B$与$B\rightarrow A$的真值全为真。即在任意赋值下，$A\rightarrow B$与$B\rightarrow A$的真值全为真。故$A\rightarrow B$与$B\rightarrow A$都是重言式。

充分性 $A\to B$与$B\to A$都是重言式，则在任意赋值下，$A\to B$与$B\to A$的真值全为真。如果存在赋值α，使得A与B的真值不相同，则$A\to B$与$B\to A$必有一个的真值为假。与已知条件矛盾。于是，对任意赋值，A与B一定有相同的真值，即$A\leftrightarrow B$恒为真。此时，$A\leftrightarrow B$是重言式。▌

根据上述结论，每个等值式对应两个重言蕴涵式，极大地丰富了推理定律的内容。