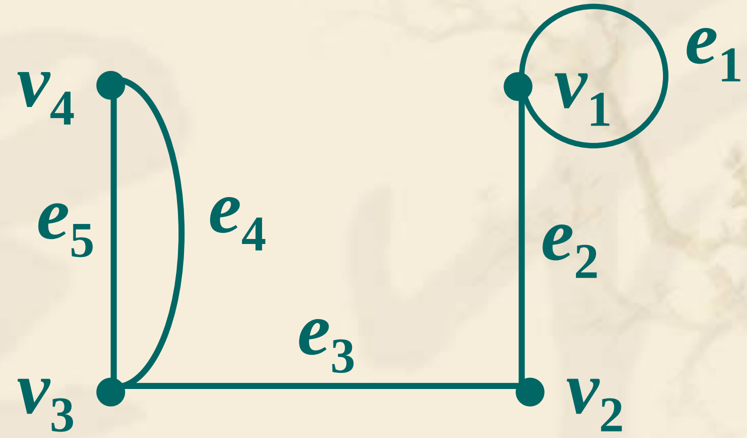
§14.4 图的矩阵表示

定义 对无向图$G=<V,E>$，$V=\{v_1,v_1,\cdots,v_s\}$，$E=\{e_1,e_1,\cdots,e_t\}$，令

$$m_{ij}=v_i\text{与}e_j\text{的关联次数}$$

则称矩阵$M(G)=[m_{ij}]_{s\times t}$为$G$的**关联矩阵**。

例 设G的图示如下图，求其关联矩阵$M(G)$。



注 无向图的关联矩阵具有如下性质：

① $\sum_{i=1}^{s} m_{ij} = 2, \quad j = 1, 2, \cdots, t$

② $\sum_{j=1}^{t} m_{ij} = d(v_i), \quad i = 1, 2, \cdots, s$

③ $\sum_{i,j} m_{ij} = 2t$

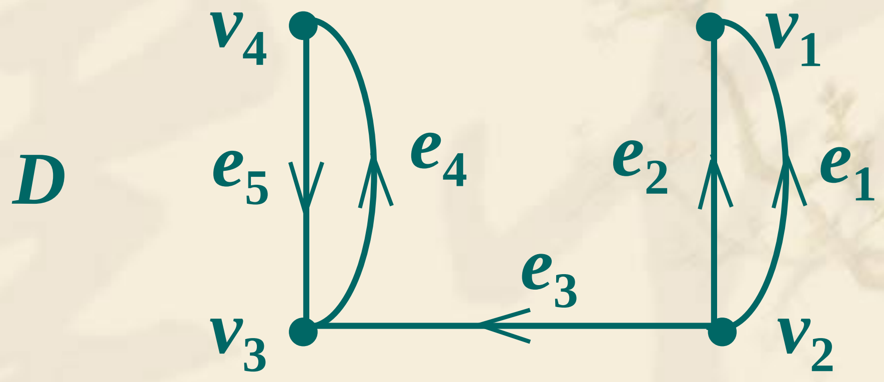
④ 第i列与第j列相同 $\Leftrightarrow$ e_i与e_j是平行边

⑤ 第i行元素全为零 $\Leftrightarrow$ v_i是孤立点

定义 对无环有向图$D=<V, E>$，$V=\{v_1,v_1,\cdots,v_s\}$，$E=\{e_1,e_1,\cdots,e_t\}$，令

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{是}e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{不是}e_j\text{的端点}\\ -1, & v_i\text{是}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

则称矩阵$M(D)=[m_{ij}]_{s\times t}$为$D$的**关联矩阵**。



注 有向图的关联矩阵具有如下性质：

① $\sum_{i=1}^{s} m_{ij} = 0, \quad j = 1,2,\cdots,t$

② $\sum_{i,j} m_{ij} = 0$

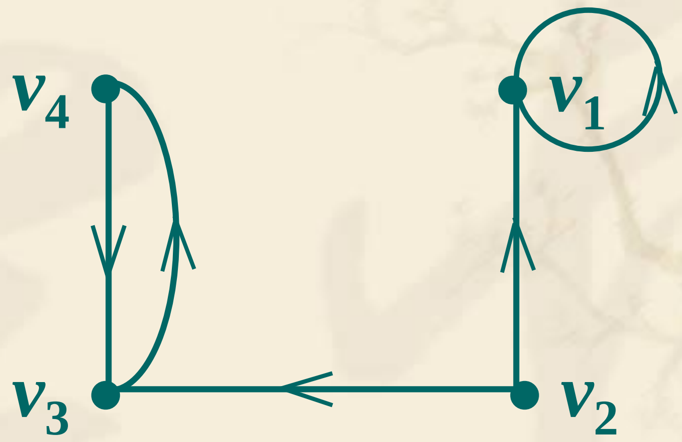
③ 第i行1的个数$=d^{+}(v_i)$，-1的个数$=d^{-}(v_i)$

定义 对有向图$D=<V,E>$，$V=\{v_1,v_1,\cdots,v_n\}$，令

$$a_{ij}^{(1)}=\text{有向边}<v_i,v_j>\text{的数目}$$

则称矩阵$A(D)=[a_{ij}^{(1)}]_{n\times n}$为$D$的**邻接矩阵**，简记$A$。

定义 求下列有向图D 的邻接矩阵：



注 有向图的邻接矩阵具有如下性质：

① $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i),\quad i = 1,2,\cdots,n$

② $a_{ij}^{(1)}$ =长为1的(v_i,v_j)-通路的数目，$i \neq j$

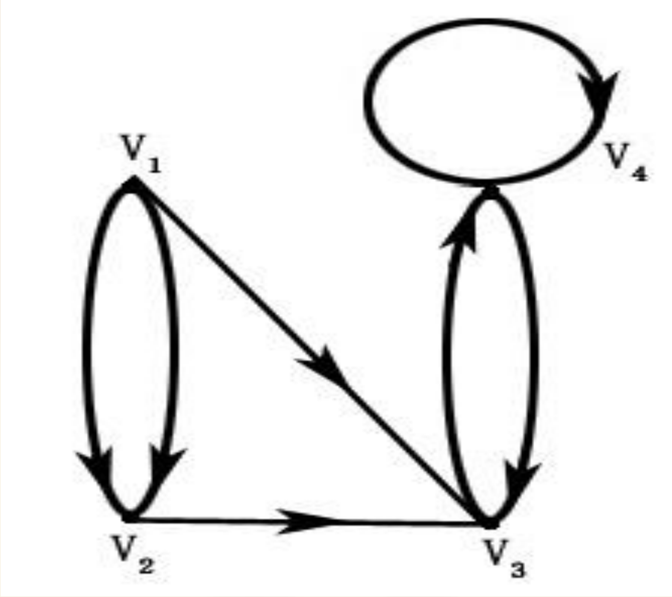
③ $a_{ii}^{(1)}$ =长为1的经过v_i的回路数目

定理 设A是有向图D的邻接矩阵，令

$$A^{l} = [a_{ij}^{(l)}]_{n\times n}，\ i=1,2,\cdots$$

$a_{ij}^{(l)}(i \neq j)$ 是长为l的(v_i,v_j)-通路的数目， $a_{ii}^{(l)}$是长为l的v_i到自身的回路的数目。

例 已知有向图D，其邻接矩阵为



$$A=\begin{pmatrix}0&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\qquad A^3=\begin{pmatrix}0&0&1&3\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{pmatrix}$$

定义 对有向图$D=<V,E>$，$V=\{v_1,v_1,\cdots,v_n\}$，令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \to v_j \\ 0, & v_i \nrightarrow v_j\end{cases}$$

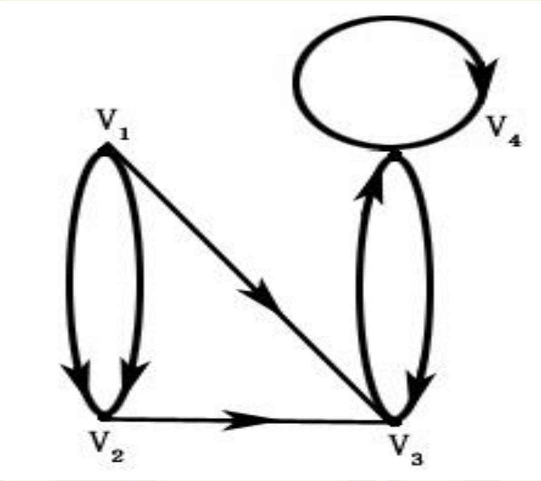
则称矩阵$P(D)=[p_{ij}]_{n\times n}$为$D$的**可达矩阵**，简记$P$。

注

① P的主对角元全为1；

② 令$B_l=A+A^2+\cdots+A^l=[b_{ij}^{(l)}]_{n\times n}$，则对n阶有向图$D$有

$$p_{ij}=1 \Leftrightarrow b_{ij}^{(n-1)}>0$$



例 已知有向图D，由邻接矩阵A得

$$B_{4-1}=B_3=A+A^2+A^3=\begin{pmatrix}0&2&4&4\\0&0&2&2\\0&0&2&4\\0&0&4&6\end{pmatrix}$$

故得可达矩阵P为

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$