§6.4 集合恒等式

性质 设E是全集，A, B, C是E的子集，则有

1．幂等律：$A \cup A = A$，$A \cap A = A$

2．结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3．交换律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$

4．分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5．同一律：$A \cup \varnothing = A$，$A \cap E = A$

6．零　律：$A \cup E = E$，$A \cap \varnothing = \varnothing$

7．排中律：$A \cup {\sim} A = E$

8．矛盾律：$A\cap\sim A=\varnothing$

9．吸收律：$A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$

10．德摩根律：$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$

$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

$\sim E=\varnothing$

$\sim\varnothing=E$

11. 双重否定率：$\sim\sim A=A$

例 证明：$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

证明 对任意的x

$$x\in A-(B\cup C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A)\wedge(x\notin B\cup C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A)\wedge\neg(x\in B\cup C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A)\wedge\neg((x\in B)\vee(x\in C))$$

$$\Leftrightarrow (x\in A)\wedge\neg(x\in B)\wedge\neg(x\in C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A)\wedge(x\in A)\wedge\neg(x\in B)\wedge\neg(x\in C)$$

$$\Leftrightarrow ((x\in A)\wedge(x\notin B))\wedge((x\in A)\wedge(x\notin C))$$

$$\Leftrightarrow (x\in(A-B))\wedge(x\in(A-C))$$

$$\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)$$ ▌

例 证明：$(A-B)=A\cap\sim B$

证明 对任意的x

$$x\in A-B$$

$$\Leftrightarrow x \in A\wedge x\notin B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\in E\wedge x\notin B)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in(E-B)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\sim B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\cap\sim B$$

所以，恒等式成立。 ▌

例 证明：$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

证明 根据集合恒等式

$$
\begin{aligned}
& A-(B\cup C) \\
&= A\cap\sim(B\cup C) \\
&= A\cap(\sim B\cap\sim C) \\
&= A\cap A\cap\sim B\cap\sim C \\
&= (A\cap\sim B)\cap(A\cap\sim C) \\
&= (A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

更多的集合关系

12. $A\cap B\subseteq A$， $A\cap B\subseteq B$， $A-B\subseteq A$

$A\subseteq A\cup B$， $B\subseteq A\cup B$

13. $A\cup B=B \Leftrightarrow A\subseteq B$

$\Leftrightarrow A\cap B=A$

$\Leftrightarrow A-B=\varnothing$

14. $A\oplus B=B\oplus A$

$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

$A\oplus\varnothing=A$

$A\oplus A=\varnothing$

$A\oplus B=A\oplus C \Rightarrow B=C$

例 化简 $((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)$

解 因为 $A\cup B\subseteq A\cup B\cup C$，所以

$$(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B)=A\cup B$$

又因为 $A\subseteq A\cup(B-C)$，所以

$$(A\cup(B-C))\cap A=A$$

由此得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= (A\cup B)-A \\
&= (A\cup B)\cap\sim A \\
&= (A\cap\sim A)\cup(B\cap\sim A) \\
&= \varnothing\cup(B-A) \\
&= B-A
\end{aligned}$$

小结：

1. 熟练掌握集合的基本概念

元素，子集，属于，包含，表示

2. 熟练掌握集合的运算与性质

并，交，相对补，对称差，绝对补，广义并，广义差

3. 熟练掌握集合的运算性质

常用恒等式，恒等式与集合关系的推导，有穷集合的计数

格奥尔格·康托尔

（Cantor，Georg Ferdinand Ludwig Philipp，1845.3.3-1918.1.6）德国数学家，集合论的创始人。

康托尔29岁（1874）时在《数学杂志》上发表了关于集合论的第一篇论文，提出了“无穷集合”这个数学概念，引进了无穷点集的一些概念，如：基数，势，序数等，试图把不同的无穷离散点集和无穷连续点集按某种方式加以区分。1874年证明了代数数集和有理数集的可数性和实数集的不可数性，建立了实数连续性公理，被称为“康托尔公理”。1877年证明了直线上，平面上，三维空间乃至高维空间的所有点的集合，都有相同的势。1895-1897年撰写了最重要的著作《超越数理论基础》。