§5.3 一阶逻辑的推理理论

定义 设A, B是两个谓词公式，若公式$A\to B$是重言式，则称之为**重言蕴涵式**，记为$A\Rightarrow B$。

定义 设$A_1, A_2, \cdots, A_k, B$都是谓词公式，称由前提$A_1, A_2, \cdots, A_k$推出结论B的形式结构为

$$\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_k\}\vdash B$$

若$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k\Rightarrow B$，则称推理是**有效的**或**正确的**，并称$B$是**有效的结论**。

推理定律：

第一组：命题逻辑推理定律的代换实例

第二组：一阶逻辑中等值式生成的推理定律

第三组：一阶逻辑中特有的重言蕴涵式

（1）$\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))$

（2）$\exists x(A(x)\wedge B(x)) \Rightarrow \neg\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

推理规则：

第一组：命题逻辑推理规则的代换实例

第二组：一阶逻辑特有的规则

设推理的前提为 $\Gamma=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$。

1．全称量词消去（∀−）

$$\frac{\forall x A(x)}{\therefore A(y)} \quad \text{或} \quad \frac{\forall x A(x)}{\therefore A(\mathrm{c})}$$

这里，*x*, *y*是个体变项，*c*是个体常项， 在*A*中*y*和*c*不在∀*x*, ∃*x*的辖域内自由出现。

2．全称量词引入（∀+）

$$\frac{A(y)}{\therefore \forall x A(x)}$$

这里，*y*是个体变项，不在前提*Γ*的任何公式中自由出现。

3．存在量词消去（∃–）

$$\frac{\exists x A(x)}{\therefore A(y)} \text{ 或 } \frac{\exists x A(x)}{\therefore A(\mathrm{c})}$$

这里，*x*, *y*是个体变项，*c*是个体常项， *y*不在前提*Γ*的任何公式中自由出现。

4．存在量词引入（∃+）

$$\frac{A(y)}{\therefore \exists x A(x)} \text{ 或 } \frac{A(\mathrm{c})}{\therefore \exists x A(x)}$$

这里，*x*, *y*是个体变项，*c*是个体常项，在*A*中*x*和*c*不在∀*y*, ∃*y*的辖域内自由出现。

定义 一阶逻辑的自然自推理系统 $N_{\mathscr{L}}$由以下部分组成：

1．字母表：同一阶语言$\mathscr{L}$的字母表

2．合式公式：同一阶语言$\mathscr{L}$的合式公式

3. 推理规则：

（1）前提引入

（2）结论引入

（3）置换

（4）假言推理

（5）附加

（6）化简

（7）拒取式

（8）假言三段论

（9）析取三段论

（10）构造性两难

（11）合取引入

（12） ∀−

（13） ∀+

（14） ∃−

（15） ∃+

上述规则的（1）~（11）同命题逻辑的推理规则，推理的证明同自然推理系统中推理的证明。

定义 设公式$A_1, A_2, \cdots, A_k$是前提，B是结论，$C_1, C_2, \cdots, C_l$是公式序列。若对任意$i\,(i=1,2,\cdots,l)$，C_i或是某个A_j，或是可由序列中前面的公式应用推理规则得到，并且$C_l=B$，则称序列$C_1, C_2, \cdots, C_l$是由$A_1, A_2, \cdots, A_k$是推出B的**证明**。

例 证明苏格拉底三段论。

证明 把苏格拉底三段论符号化：

$F(x)$：x是人　　$G(x)$：x是会死的

a：苏格拉底

前提：$\forall x(F(x)\to G(x))$，$F(a)$

结论：$G(a)$

证明：

①	$\forall x(F(x)\to G(x))$	前提
②	$F(a)\to G(a)$	① $\forall-$
③	$F(a)$	前提
④	$G(a)$	②,③蕴涵

由此得推理正确。 ■

例 构造下列推理的证明

不存在能表示成分数的无理数。有理数都能表示为分数。因此，有理数都不是无理数。

证明 把给定问题符号化

$F(x)$：x是无理数　　　　$G(x)$：x是有理数

$H(x)$：x能表示成分数

前提：$\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$，$\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

结论：$\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

证明：① $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$　　　　前提

② $G(y)\rightarrow H(y)$	① $\forall-$
③ $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$	前提
④ $\forall x\,\neg(F(x)\wedge H(x))$	③置换
⑤ $\neg(F(y)\wedge H(y))$	④ $\forall-$
⑥ $\neg F(y)\vee\neg H(y))$	⑤ 置换
⑦ $H(y)\rightarrow\neg F(y)$	⑥置换
⑧ $G(y)\rightarrow\neg F(y)$	②,⑦ 蕴涵
⑨ $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$	⑧ $\forall+$

所以，推理正确。 ∎

例 证明下列推理的有效性

前提：$\forall x(F(x)\to G(x))$，$\exists xF(x)$

结论：$\exists xG(x)$

证明：	① $\exists xF(x)$	前提
	② $F(c)$	① $\exists-$
	③ $\forall x(F(x)\to G(x))$	前提
	④ $F(c)\to G(c)$	③ $\forall-$
	⑤ $G(c)$	②,④蕴涵
	⑥ $\exists xG(x)$	⑥ $\exists+$

所以，推理正确。 ▌

小结：

1. 熟练掌握一阶逻辑的等值演算

常用等值式（涉及量词），等值演算规则

2. 熟练掌握谓词公式的范式

3. 熟练一阶逻辑推理的形式结构

推理的有效性，常用重言蕴涵式，基本方法

4. 熟练掌握自然推理系统

形式系统，自然推理系统，推理规则

构造证明的方法