# 5.5 波动的基本特征  平面简谐波的波函数

一定扰动的传播称为波动，简称波。例如，

机械波：机械扰动在介质中的传播。声波、超声波、次声、水波、地震波等。

电磁波：变化电场和变化磁场在空间的传播。无线电波、光波、X 射线、γ射线等。

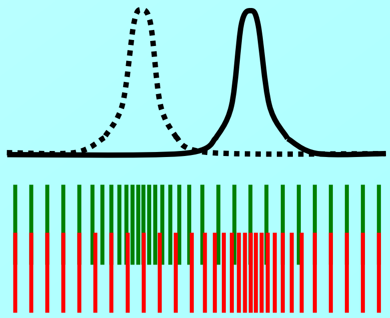
## 1. 行波 (Traveling Wave)

振动状态及能量都在传播叫行波。例如脉冲波、简谐波。注意介质并没有沿传播方向迁移。

横波：质元运动方向 ⊥ 波的传播方向

纵波：质元运动方向 // 波的传播方向

(Transverse and longitudinal waves)



❑ 数学描述：

取行波的传播方向为 $x$ 轴，当波经过原点时，起初处于原点的质元发生位移 $y_0$，它与时间 $t$ 的函数关系为 $y_0 = f(t)$。

设波沿 $+x$ 方向以速度 $u$ 传播，**坐标为 $x$ 的点在 $t$ 时刻的位移 $y$ 为 $t - x/u$ 的函数**，即

$$\boxed{y = f\left(t - \frac{x}{u}\right)} \qquad (\text{沿 } +x \text{ 传播})$$

它可以表示任意位置的质元在任意时刻的位移，称为波函数 (wave function) 。

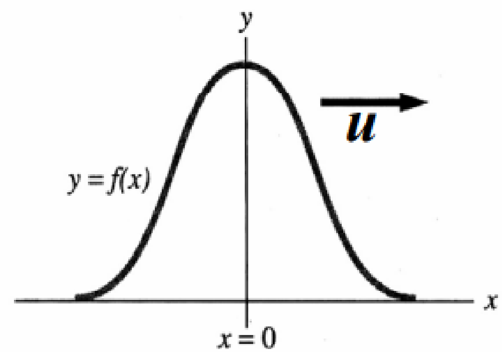
若波以速度 $u$ 沿 $-x$ 方向传播，则波函数为

$$\boxed{y = f\left(t + \frac{x}{u}\right)} \qquad (\text{沿 } -x \text{ 传播})$$

例：如图，在$t=0$时刻，一根弦上的脉冲形状由以下方程给出

$$y(x)=\exp(-x^2)$$

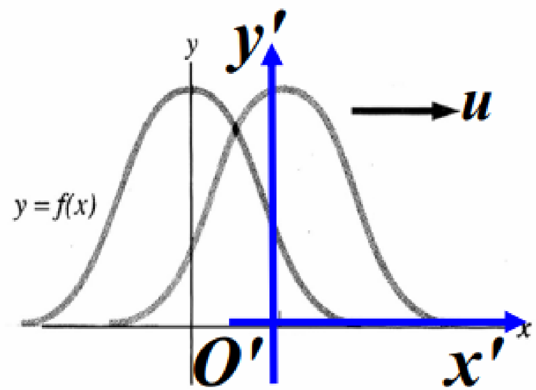
已知它以速度 $u$ 沿$x$轴正向传播，
求这个波的波函数。




解：如图建立$S'$ 系$y'(x')=\exp(-x'^2)$

$$x'=x-ut$$

$$y(x,t)=f(x-ut)=\exp[-(x-ut)^2]$$



## 2. 惠更斯原理 (Huygens' principle)

### (1) 波线和波面 (wave line and surface)

波传播方向的直线形象地称为波线。

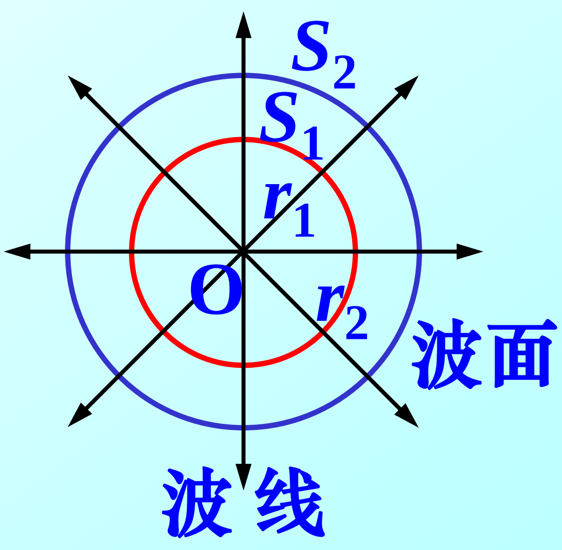
波传播过程中相位相同的点组成的平面叫波面。

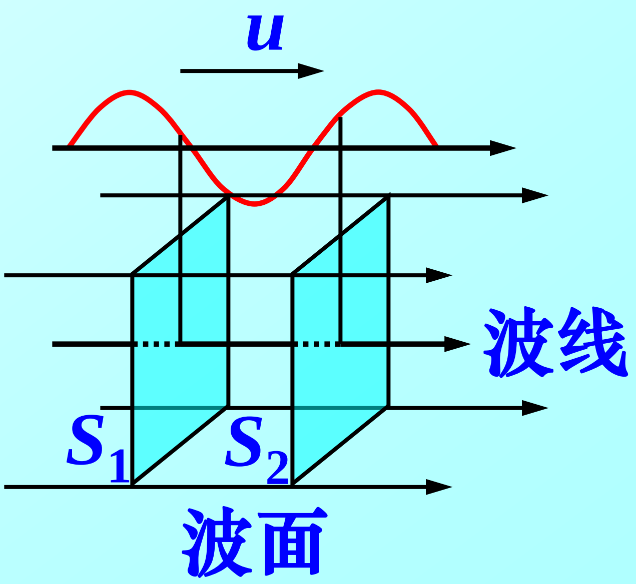
波传播时最前面的波面称为波阵面或波前。

一般情况下，波线垂直于波面。

波面是平面的波叫做平面波。

波面是球面的波叫做球面波。

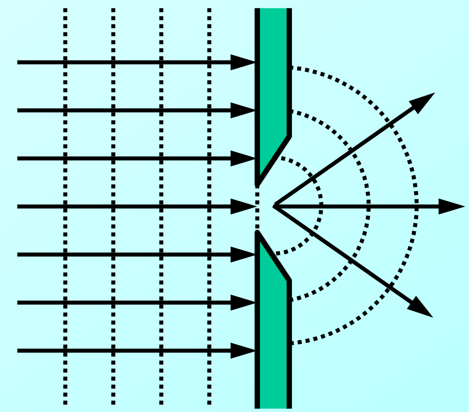


## (2) 惠更斯原理

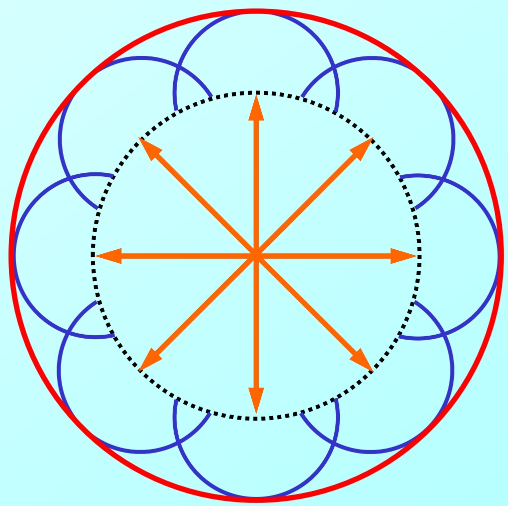
惠更斯原理是有关波的传播方向的规律：

波阵面上的各点都可以看作是发射子波的波源，其后任一时刻的波阵面就是这些子波的包迹(包络面)。

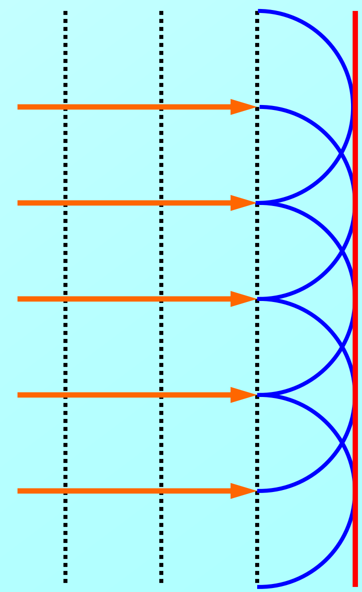


平面波在某一时刻的波前是平面，在下一时刻的波前仍是平面。

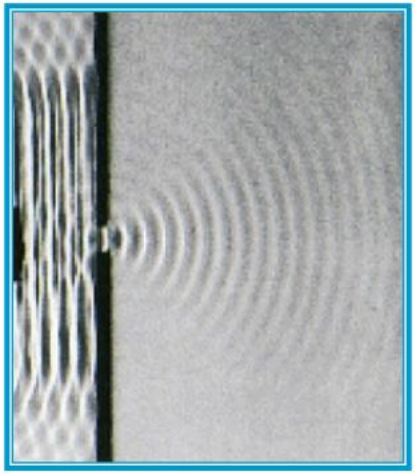
球面波在某一时刻的波前是球面，在下一时刻的波前仍是球面。



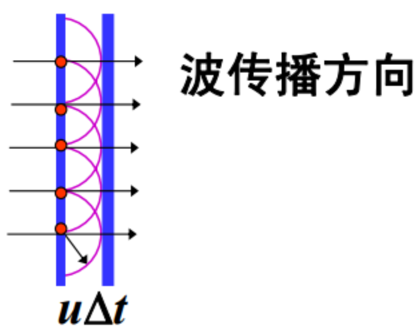
新的波前



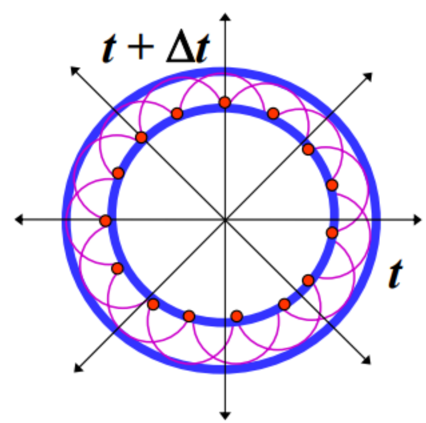
新的波前



$t$ 时刻波面→ 判断$t+\Delta t$时刻波面→ 波的传播方向




平面波




球面波

# 描述波的特征量

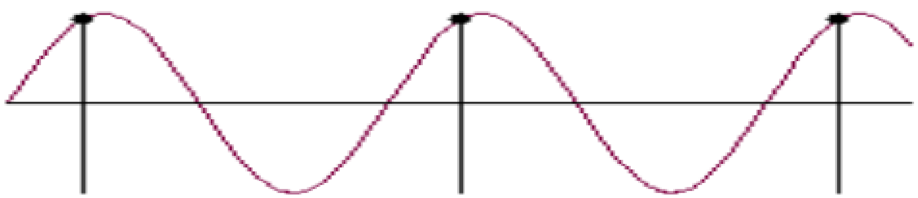
**1. 周期 $T$ 与 频率 $\nu$**

**波场中的任意点，作简谐振动，周期为$T$，该这段时间为波的周期$T$。**

**频率 $\nu$： 周期的倒数。**

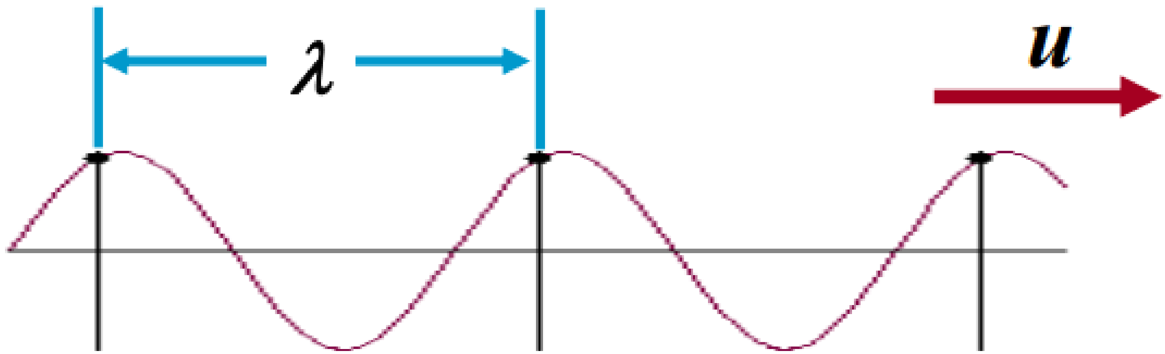
$$\nu = \frac{1}{T}$$

**单位时间内通过媒质中某一点完整波形的个数。**



## 2. 波长 $\lambda$ (空间周期):

波的传播方向上两个相邻的同相质元间的距离。




波速 $$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$$

## 三、波函数 ( Wave Function )

平面简谐波在均匀、无限大，无吸收媒质中传播，考虑一维情况

1. 设波沿 $x$ 正向传播，$O$ 为坐标原点

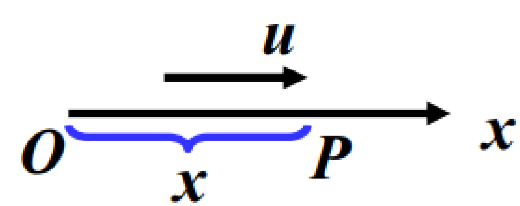
设 $O$ 点处质元的振动表达式：

$$y = A\cos(\omega t + \varphi)$$

任意时刻沿波的传播方向，

每隔一个波长，质元的相位落后 $2\pi$

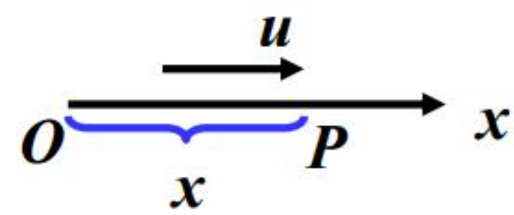
单位长度上，相落后 $2\pi / \lambda$




$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$ 角波数 （单位长度的相差）

$2\pi$ 长度内包含完整波形的个数。

$\overline{OP} = x$ $P$点相位落后$O$点 $\dfrac{2\pi}{\lambda}x$




$O$点： $y = A\cos(\omega t + \varphi)$

时刻 $t$： $O$点相位$(\omega t + \varphi)$, $P$点相位 $(\omega t + \varphi) - \dfrac{2\pi}{\lambda}x$

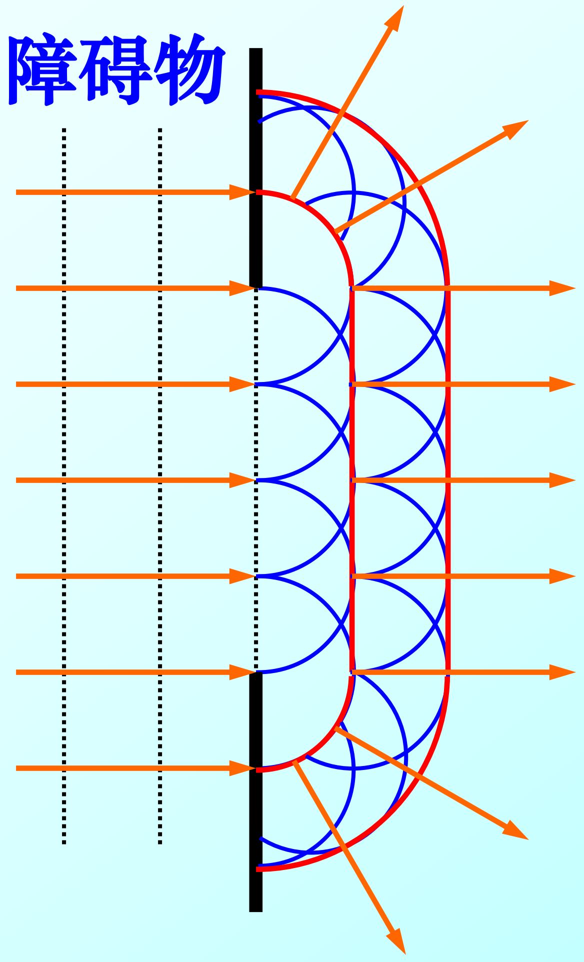
沿 $x$ 轴正向传播平面简谐波的波函数。

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi)$$

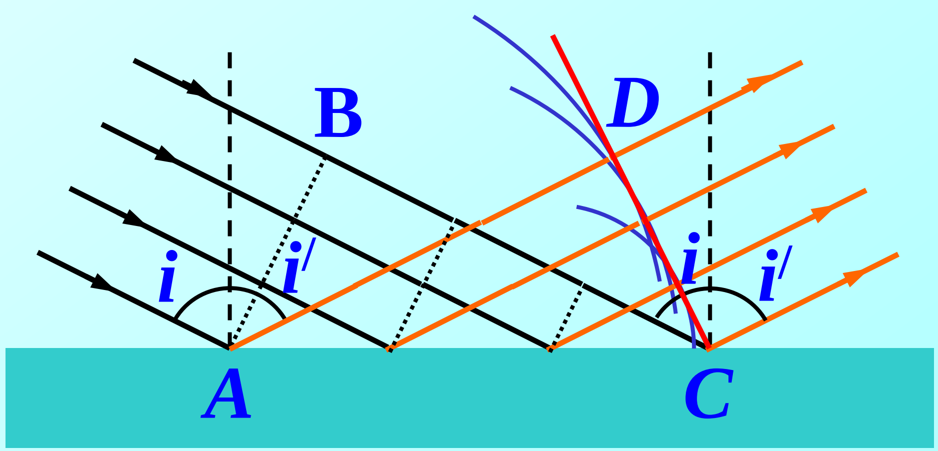
$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

## (3) 利用惠更斯原理解释波传播的一些现象

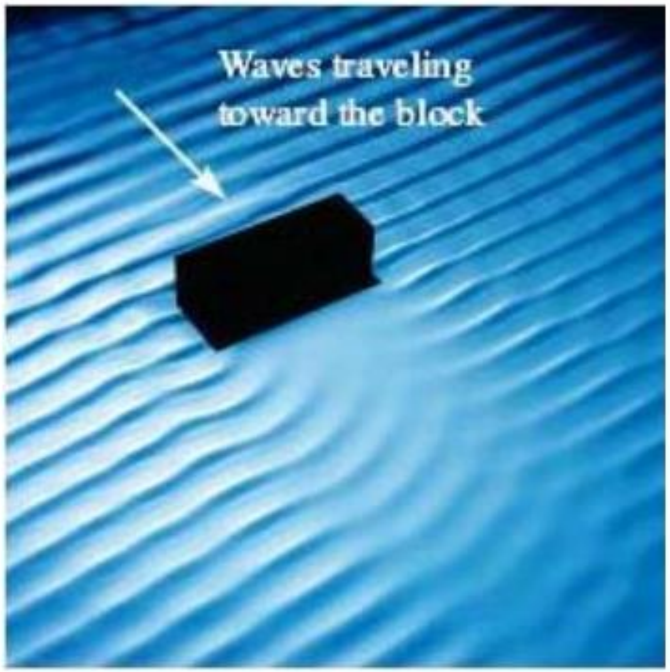
a. 衍射：波遇到障碍物而改变传播方向。

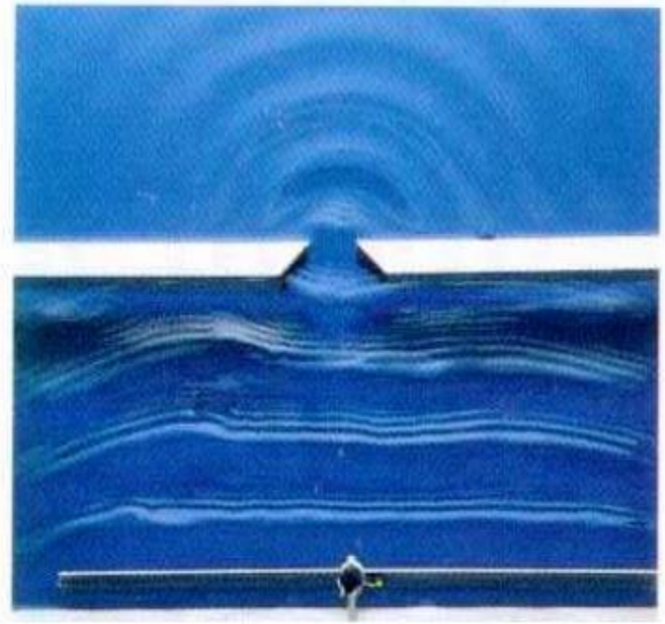



b. 波的反射定律：入射角等于反射角，$i = i'$。



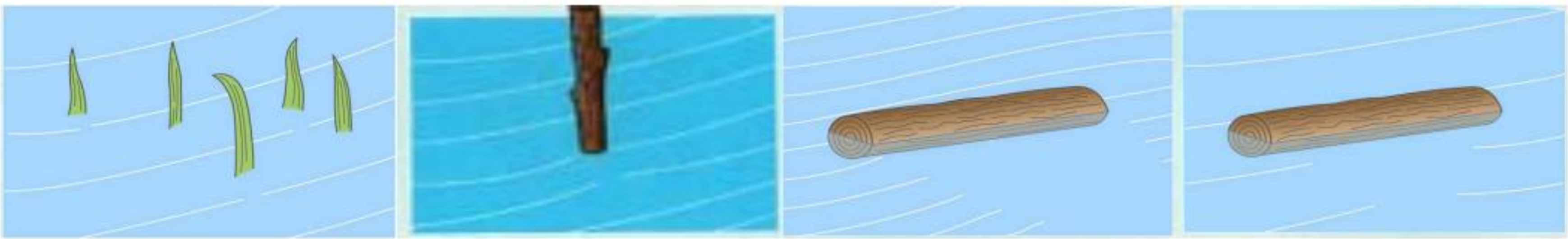
## 现象



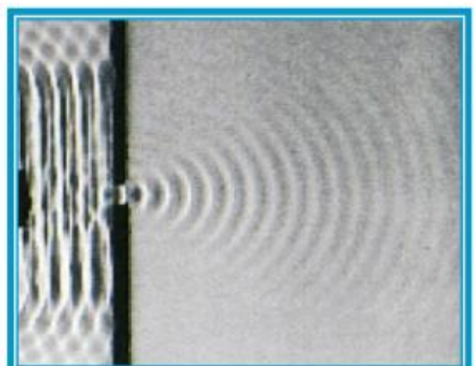
水波通过窄缝时的衍射

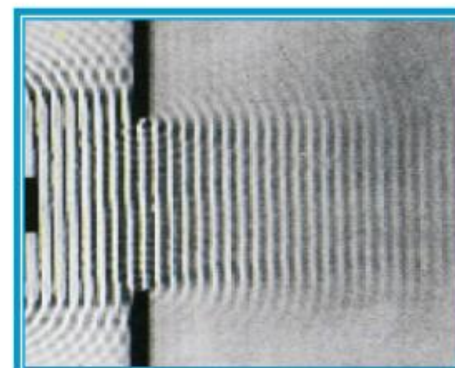
波的衍射：波传播过程中遇到障碍物时，能绕过障碍物的边缘而传播的现象。



(a) Water waves passing blades of grass　(b) Stick in water　(c) Short- wavelength waves passing log　(d) Long- wavelength waves passing log

粗略地讲：
波长与障碍物或孔的尺度相比拟时，衍射现象比较明显。

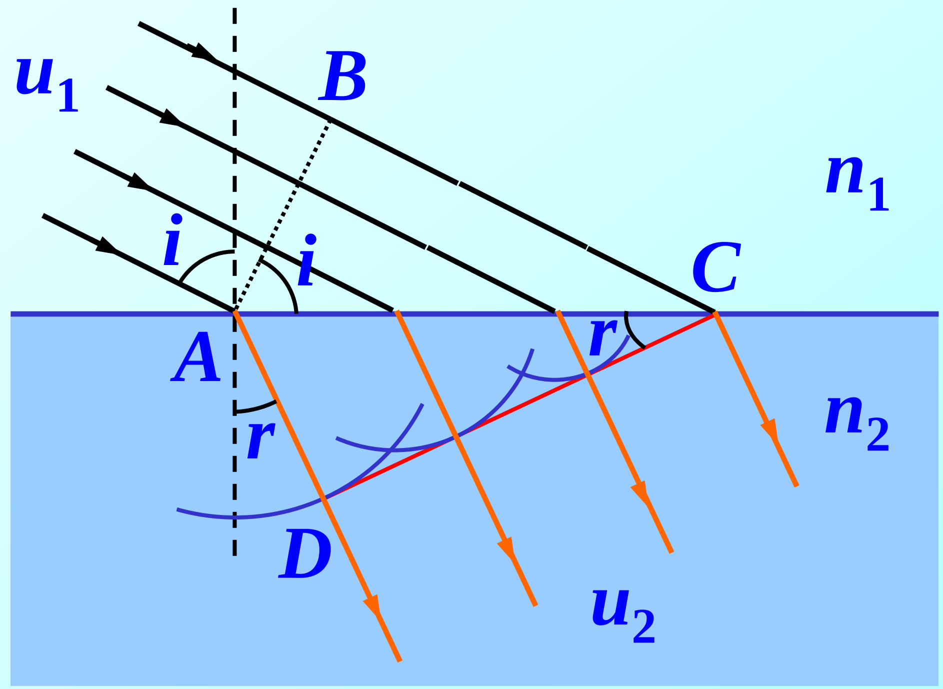




c. 波的折射定律：

$$BC = u_1\Delta t = AC\sin i$$

$$AD = u_2\Delta t = AC\sin r$$



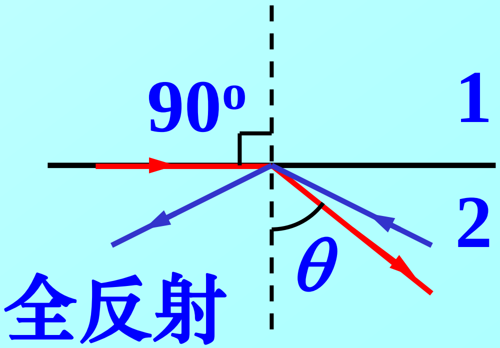

两式相除，得

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u_1}{u_2} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$$

$n_{21}$ 称为第二种介质相对于第一种介质的相对折射率。$n_1, n_2$ 为绝对折射率。

以 $90^{\circ}$ 入射角从介质 1 向界面入射，折射角 $\theta$ 为全反射的临界角

$$\sin 90^{\circ}/\sin\theta = n_{21}, \quad \theta = \arcsin(1/n_{21})$$

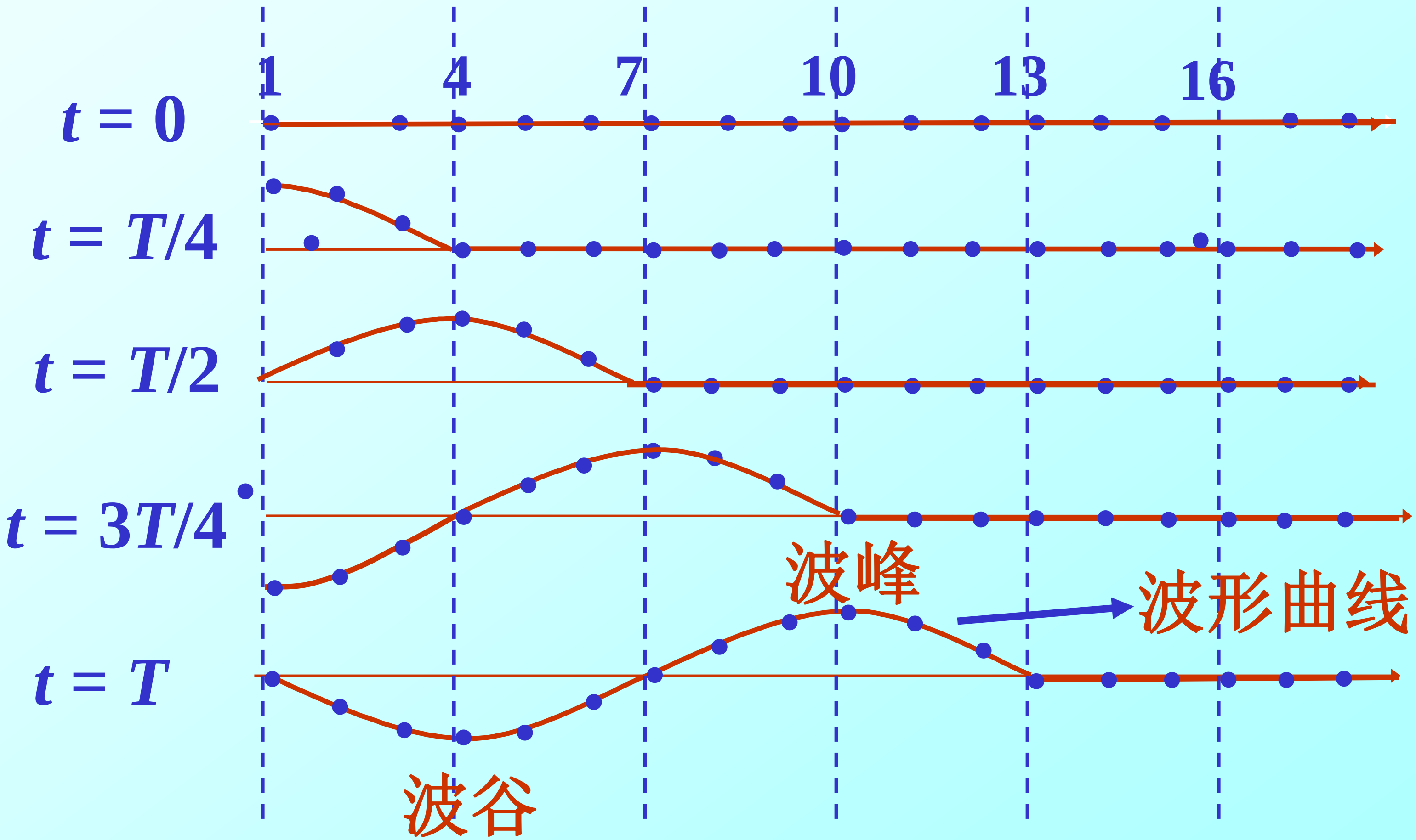



介质 2 中大于 $\theta$ 的入射波有全反射。

## 3. 简谐波 (Simple Harmonic Wave)

**简谐振动的传播叫做简谐波，它是最简单的波。**

以横波为例



## 4. 平面简谐波的波函数

设原点振动函数为 $y_0 = A\cos(\omega t+\varphi)$，则沿 $+x$ 方向传播的平面简谐波的波函数 为

$$y = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

可理解为 $x$ 点振动相位比原点振动相位**落后** $\omega x/u$

沿 $-x$ 方向传播的平面简谐波的波函数为

$$y = A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

可理解为 $x$ 点振动相位比原点振动相位**超前** $\omega x/u$

其中 $A$, $\omega$, $u$ 分别为简谐波的振幅、角频率和传播速度 (相速度，或波速)。(amplitude, angular frequency)

## 讨论

(1) 波函数变形形式:

$$y = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right] = A\cos\left[\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\varphi\right]$$

$$= A\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$$= A\cos\left[2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi\right] = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi\right]$$

其中，表征时间周期性的量有

周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ 频率 $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ Period Frequency

表征空间周期性的量有

波长 $\lambda = uT = \dfrac{2\pi u}{\omega}$ 波数 $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ Wavelength Wave Number

(2) 在空间某位置 $x=x_1$，有

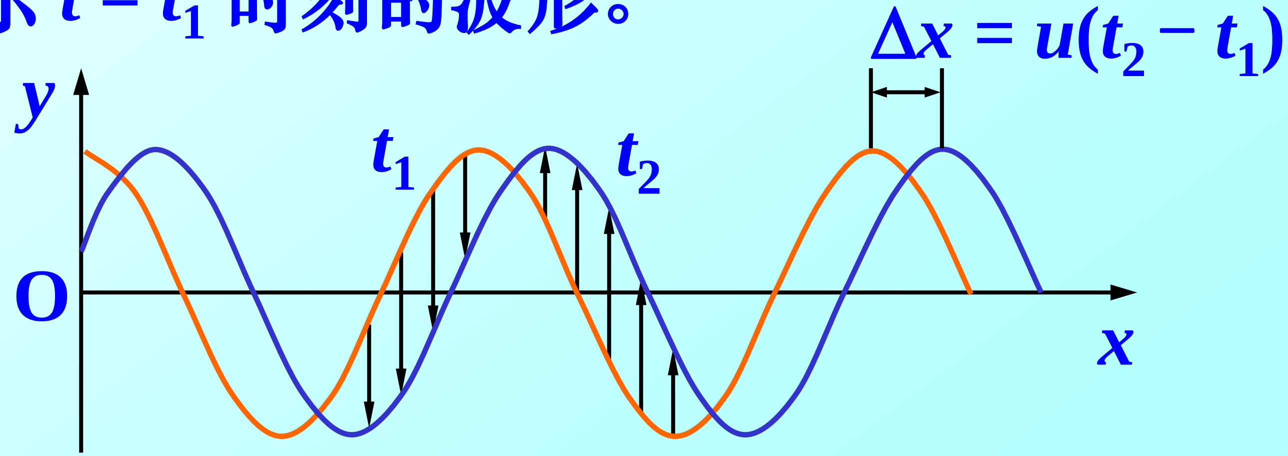
$$y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x_1}{u}\right)+\varphi\right]=A\cos\left[\omega t+\left(\varphi-\frac{\omega x_1}{u}\right)\right]$$

它表示 $x=x_1$ 处的振动函数，其中 $\varphi-\dfrac{\omega x_1}{u}$ 为初相。

(3) 在某时刻 $t=t_1$，有

$$y=A\cos\left[\omega\left(t_1-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]=A\cos\left[\frac{\omega x}{u}-(\varphi+\omega t_1)\right]$$

它表示 $t=t_1$ 时刻的波形。



(4) 质元运动速度 $$v=\frac{\partial y}{\partial t}=-\omega A\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

与 $u$ 无直接关系。

波速 $u$ 由媒质定：$\begin{cases}\text{弹性性质} & \text{弹性模量}\\ \text{惯性性质} & \text{密度}\end{cases}$

$$u=\sqrt{\frac{\text{弹性模量}}{\text{密度}}}$$

例如：在固体中，横波波速和纵波波速分别为

切变模量 杨氏模量

$$u_{\mathrm{T}}=\sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad u_{\mathrm{L}}=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

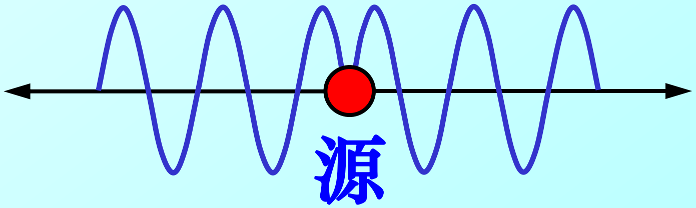
质元运动加速度 $$a=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\omega^2 A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

(5) 如果在 $x = x_1$ 点处有一个简谐波源，其振动函数为

$$y = A\cos(\omega t + \varphi)$$

则该波源引起的简谐波的波函数为

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{|x - x_1|}{u}\right) + \varphi\right]$$



**4. 波动方程**

行波波函数的一般形式为 $y = f(\beta) = f\left(t \mp \frac{x}{u}\right)$

将 $y$ 分别对 $x$ 和 $t$ 求二阶偏导数，则有

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2}$$

比较以上两式，可得 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ —— 波动方程

任何物理量 $y(x, t)$，只要波动方程，则这一物理量就以波的形式传播，而且波的传播速度可由波动方程的系数求得。

例1 一列平面简谐波以波速 $u$ 沿 $+x$ 方向传播，波长 $\lambda$，已知在 $x_0=\lambda/4$ 处质元的振动函数为 $y_0=A\cos\omega t$。写出波函数，并画出 $t=T$ 和 $t=5T/4$ 时的波形图。

解：$x_0$ 处的质元在早些时刻 $(x-x_0)/u=(x-\lambda/4)/u$ 的

振动位移为 $$y=A\cos\omega\left(t-\frac{x-\lambda/4}{u}\right)$$

相应的相位在经过时间 $(x-\lambda/4)/u$ 后传至 $x$ 点，因此这就是 $x$ 处 $t$ 时刻的振动函数，即波函数

$$y=A\cos\left(\omega t-2\pi\frac{x}{\lambda}+\frac{\pi}{2}\right)$$

其中用到 $$\frac{\omega}{u}=\frac{2\pi\nu}{u}=\frac{2\pi}{uT}=\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$y = A\cos\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right)$$

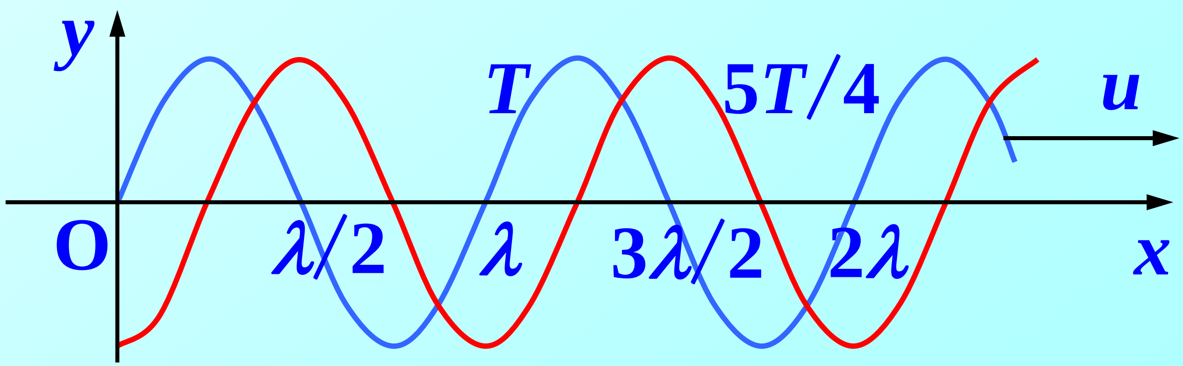
$t = 0$ 时刻的波形为

$$y = A\cos\left(-2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) = A\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$$

根据波的时间周期性，$t = T$ 时刻的波形与此相同。

在 $t = 5T/4$ 时刻，波形较 $t = T$ 时刻的波形移动了距离

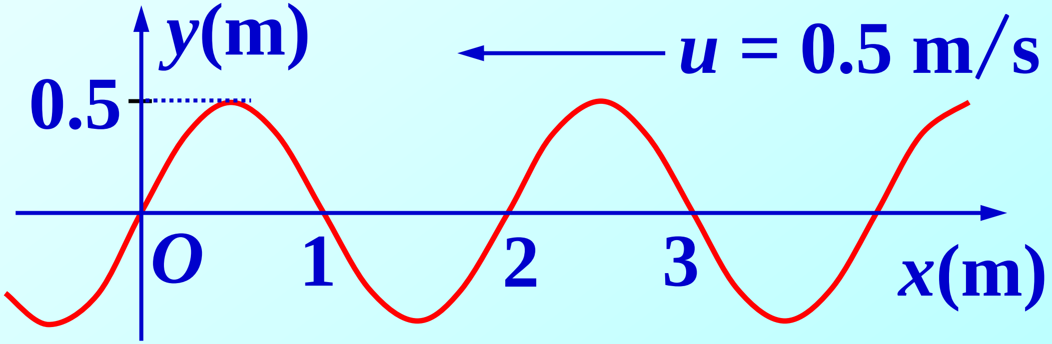
$$\Delta x = u\Delta t = u\left(\frac{5}{4}T - T\right) = \frac{1}{4}uT = \frac{1}{4}\lambda$$



例2 已知 $t = 2$ s 时一列简谐波的波形如图，求波函数及 $O$ 点的振动函数。

解：波函数标准方程

$$y = 0.5\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{0.5}\right) + \varphi_0\right]$$




已知 $\lambda = 2$ m，$\omega = 2\pi u/\lambda = \pi/2$ rad/s

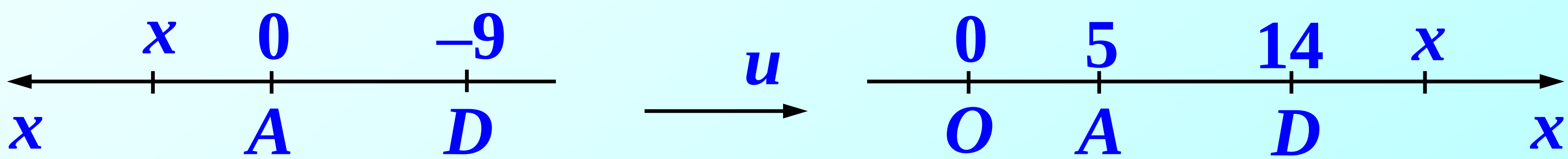
由 $0.5 = y(t=2, x=0.5) = 0.5\cos\left[\frac{\pi}{2}\times\left(2 + \frac{0.5}{0.5}\right) + \varphi_0\right]$

得 $\frac{3}{2}\pi + \varphi_0 = 2\pi$ 即 $\varphi_0 = \pi/2$

所以波函数为 $y = 0.5\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi x + \frac{\pi}{2}\right)$ (m)

$O$ 点的振动函数为 $y_O = 0.5\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$ (m)

例3 平面简谐波以 $u = 20\text{m/s}$ 向右传播，已知点 $A$ 振动 $y = 3\cos(4\pi t - \pi)$ m，已知 $D$ 在 $A$ 右 9m 处，分别对以下两种情况写出波函数和 $D$ 点振动函数：(1) $x$ 轴向左，$A$ 为原点；(2) $x$ 轴向右，以 $A$ 左方 5m 处 $O$ 点为原点




解：(1) $x$ 点相位比 $A$ 点领先

$$\omega\frac{x}{u} = 4\pi\frac{x}{20} = \frac{\pi}{5}x$$

所以 $x$ 点振动函数即波函数为

$$y = 3\cos\left[4\pi t + \frac{\pi}{5}x - \pi\right](\text{m})$$

$D$ 点振动函数

$$y_D = 3\cos\left[4\pi t - \frac{4}{5}\pi\right](\text{m})$$

(2) $x$ 点相位比 $A$ 点落后

$$\omega\frac{x-5}{u} = \frac{\pi}{5}(x-5)$$

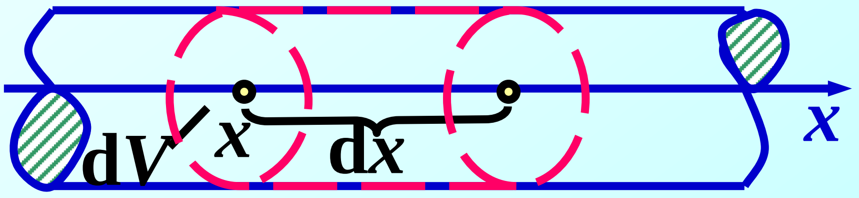
$$y = 3\cos\left[4\pi t - \pi(x-5)/5 - \pi\right.$$

$$= 3\cos\left[4\pi t - \frac{\pi}{5}x\right](\text{m})$$

$$y_D = 3\cos\left[4\pi t - \frac{4}{5}\pi\right](\text{m})$$

# § 5.6 波的能量

## 1. 波的能量传播特征:




媒质 $\rho$、$E$、$S$

$$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$$

平面简谐纵波 $y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$

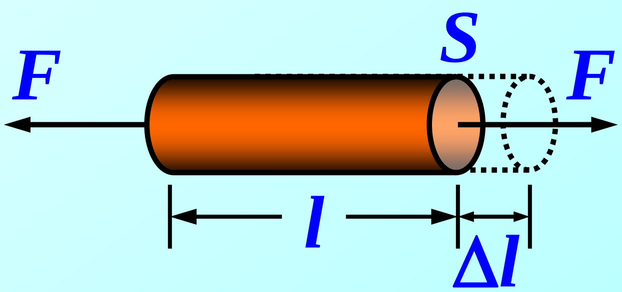
在弹性介质中传播，质元 dV 的速度为

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

则其振动动能为

$$\mathrm{d}W_\mathrm{k} = \frac{1}{2}v^2 \rho \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \mathrm{d}V \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

受到外力的物体，形状或体积都会发生变化，称为形变。去掉外力，形状或体积仍能复原，这样的形变叫做弹性形变。




线应变 $\Delta l/l$，伸缩应力 $F/S$

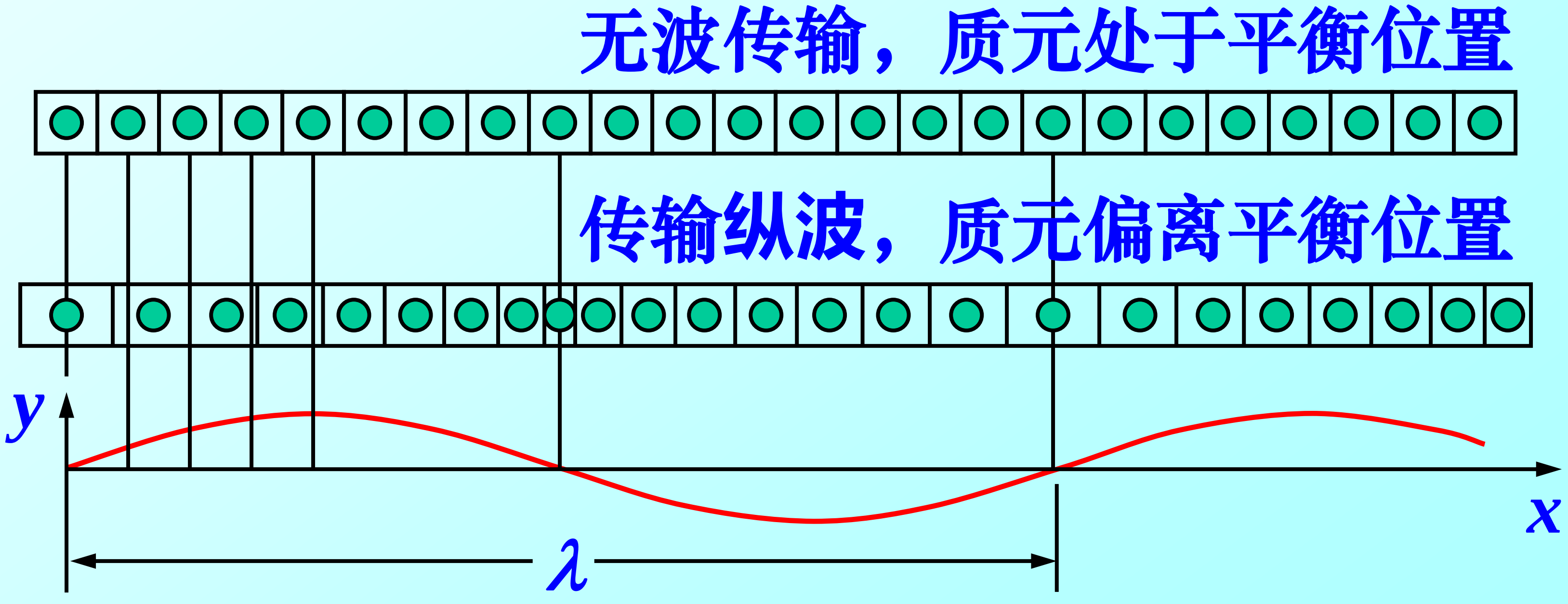
胡克定律：弹性限度内 $\boxed{\dfrac{F}{S}=Y\dfrac{\Delta l}{l}}$　　$Y$ —— 杨氏模量

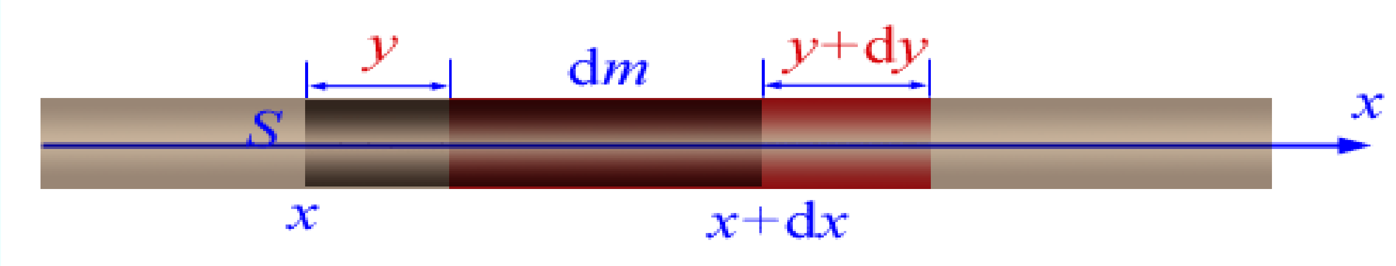
$$F=\frac{ES}{l}\Delta l=k\Delta l$$

当外力不太大时，$\Delta l$ 较小，$S$ 基本不变，因而 $k=ES/l$ 近似为常数。

材料发生线应变时，具有弹性势能

$$W_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}\frac{ES}{l}(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}ESl\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 = \frac{1}{2}EV\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2$$






由杨氏模量的定义 $Y = \dfrac{\text{应力}}{\text{应变}} = \dfrac{F/S}{\partial y/\partial x}$

胡克定律 $F = k(\mathrm{d}y)$

有 $k = \dfrac{YS}{\mathrm{d}x}$

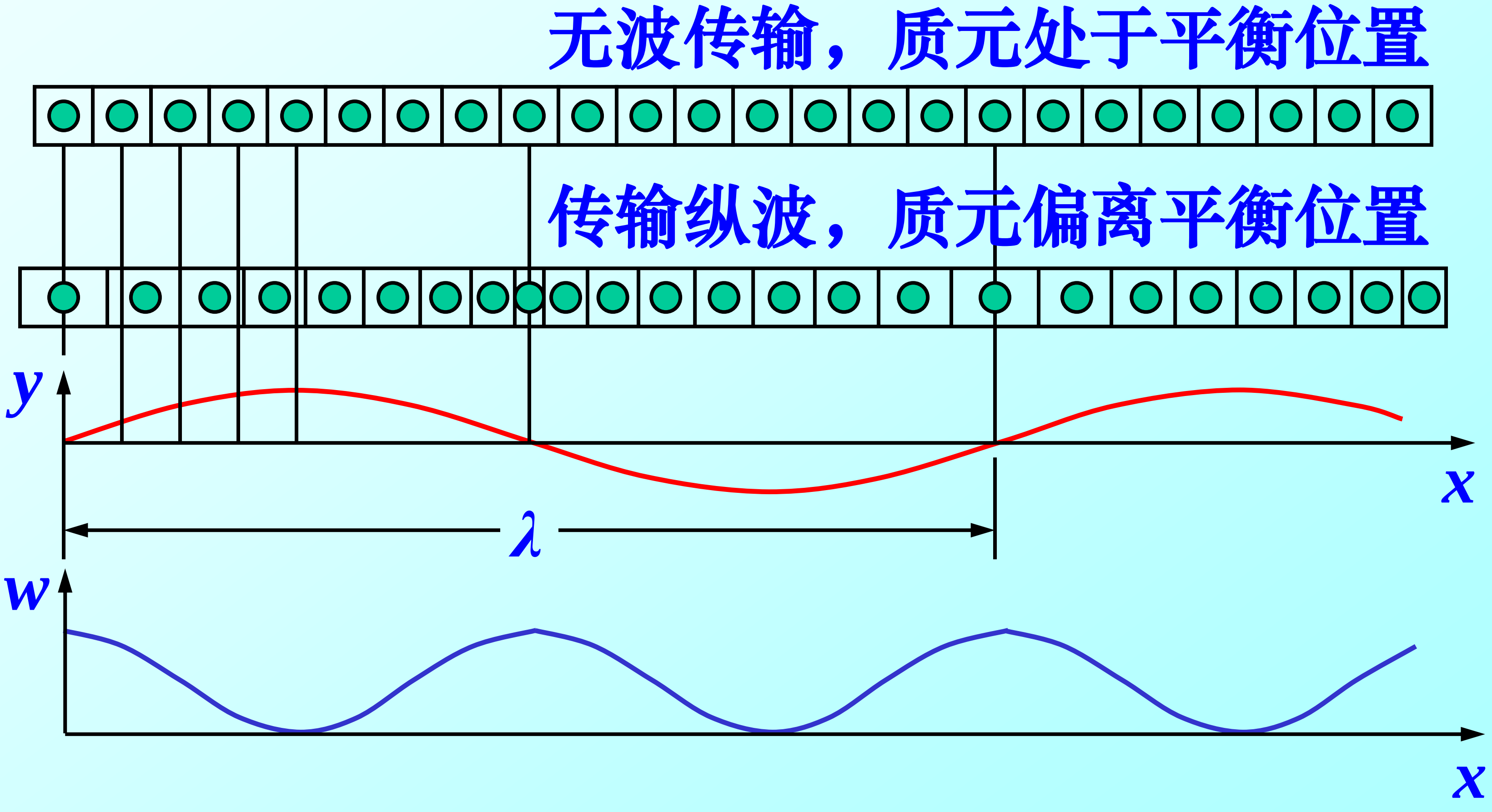
该质元的弹性势能为

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}k(\mathrm{d}y)^2 = \frac{1}{2}YS\mathrm{d}x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}Y\mathrm{d}V\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

又 $Y = \rho u^2$ $\quad \dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\omega A}{u}\sin\omega\left(t - \dfrac{x}{u}\right)$

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}(\rho\mathrm{d}V)\omega^2A^2\sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

可见，在平面简谐波中，同一质元每时每刻都具有相同的动能和势能，这是参与波动的质元不同于孤立振动系统的一个重要特点。



2. 能量密度： 波动中的介质单位体积内的总机械能

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{k}} + \mathrm{d}W_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}V} = \rho\omega^2 A^2 \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

质元机械能不守恒，时大时小，体现了波的传播。

平均能量密度：
$$\overline{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$$

3. 能流：单位时间内通过垂直于波速的平面的能量

$$P = \frac{wSu\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = wSu = \rho u\omega^2 A^2 S \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

能流密度：$P/S = w\,u$

平均能流密度 (波的强度)：
$$I = \frac{\overline{P}}{S} = \overline{w}u = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 u$$

例：在各向同性、均匀、无吸收媒质中的平面波的振幅。

**根据能量守恒，$T$ 内通过 $S_1$ 和 $S_2$ 面的能量相等，则**

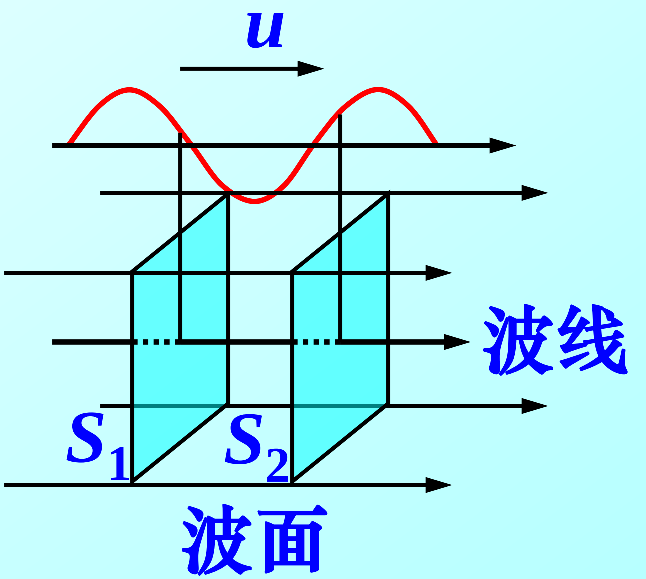
$$I_1 S_1 T = I_2 S_2 T,$$

$$\frac{1}{2}\rho u \omega^2 A_1^2 S_1 T = \frac{1}{2}\rho u \omega^2 A_2^2 S_2 T,$$

$$S_1 = S_2$$

**所以** $A_1 = A_2$ **，**

**即在均匀的不吸收能量的介质中传播的平面波的振幅保持不变。**



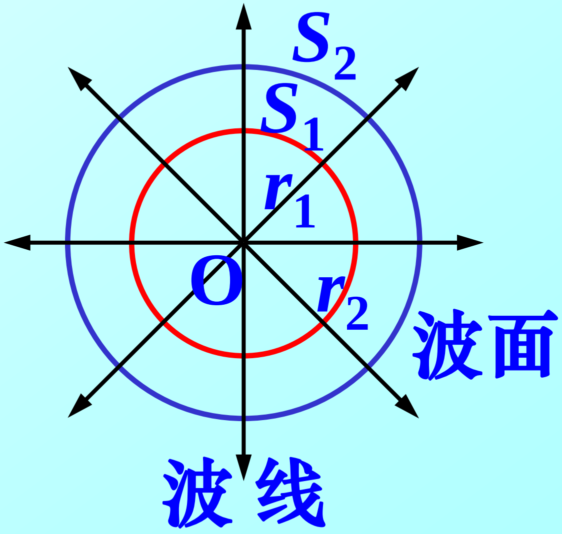
例：在各向同性、均匀、无吸收媒质中的球面波

一定时间内通过 $S_1$ 和 $S_2$ 面的能量相等，

即 $A_1 r_1 = A_2 r_2$，

球面波振幅与到点波源的距离成正比。

$$A_1^2 \pi r_1^2 = A_2^2 \pi r_2^2$$




球面简谐波的波函数为

$$\boxed{y = \frac{A_1}{r}\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]}$$

实际的波由于介质的吸收等原因，其强度及振幅都要沿传播方向逐渐减小。

## §5.7 波的叠加

### 1. 波的叠加原理(superposition principle of waves)

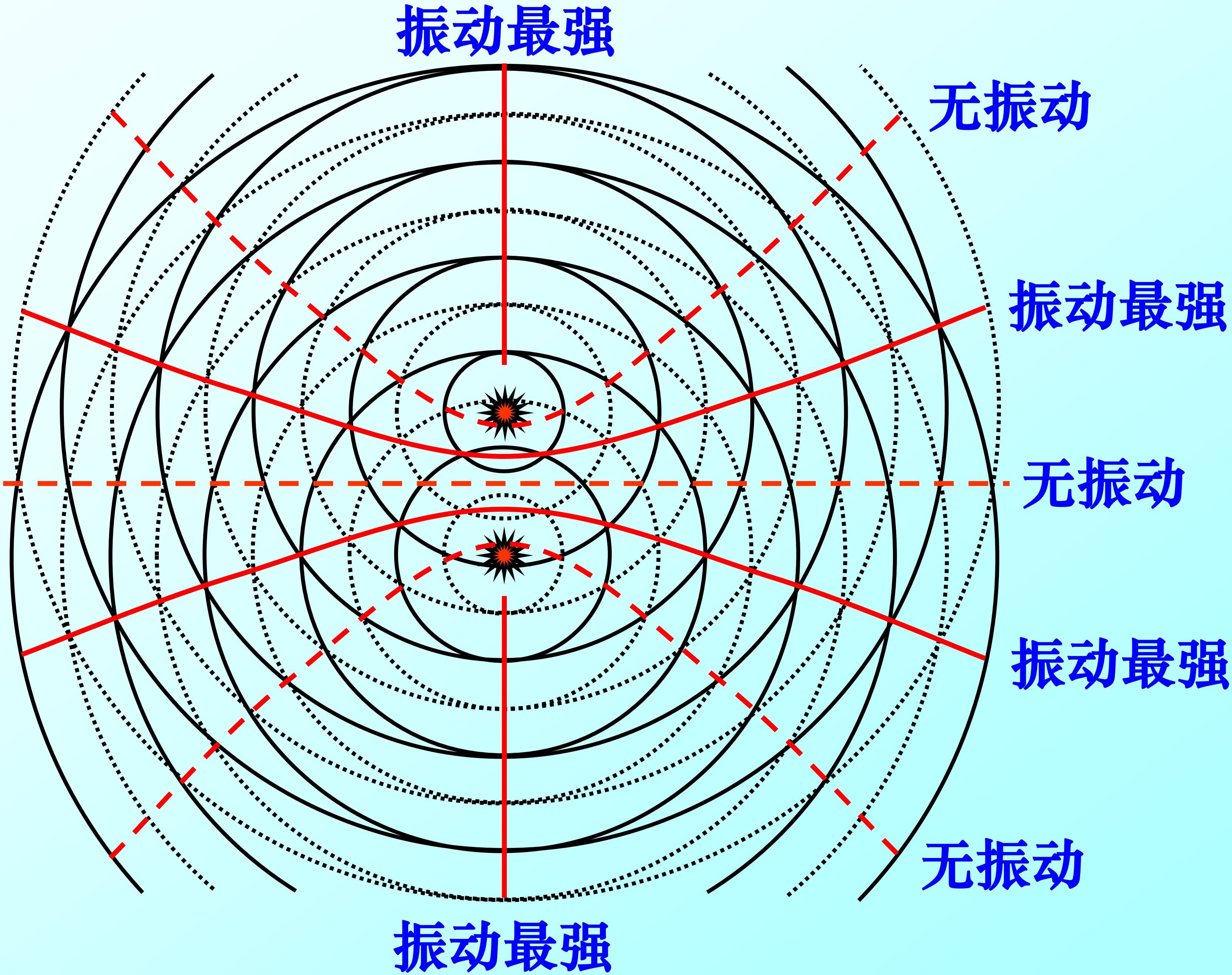
波在传播过程中相遇，各自独立，互不干扰（振幅、频率、波长、振动方向、传播方向都不变）。任一点的位移, 为各个波单独在该点产生的位移的合成。这个规律叫做波的叠加原理或波的独立传播原理。

满足条件的波为**较弱波**和**经典波**。

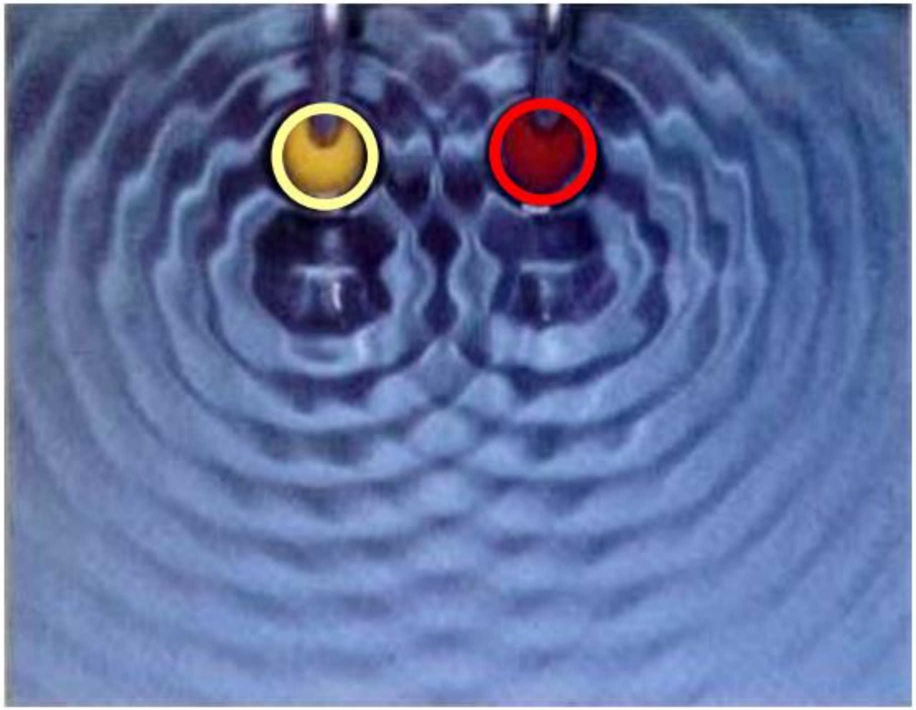
### 2. 波的干涉

(1) 现象：波相遇时，空间上周期性地出现加强或减弱的现象，而且图案不随时间而改变。

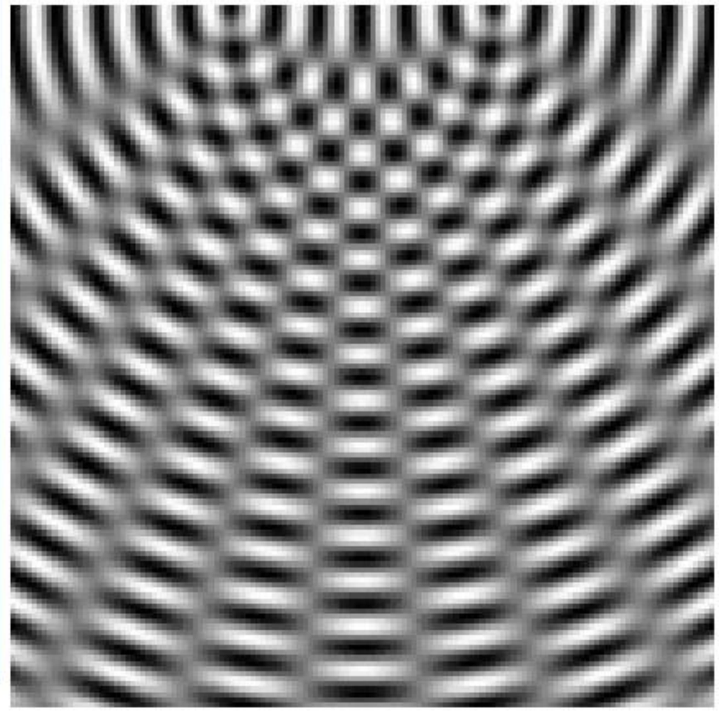
(2) 条件 (相干条件)：频率相同、相位差恒定、振动方向相同；振幅相差不大。相应的波叫相干波。


振动最强
无振动
振动最强
无振动
振动最强
无振动
振动最强

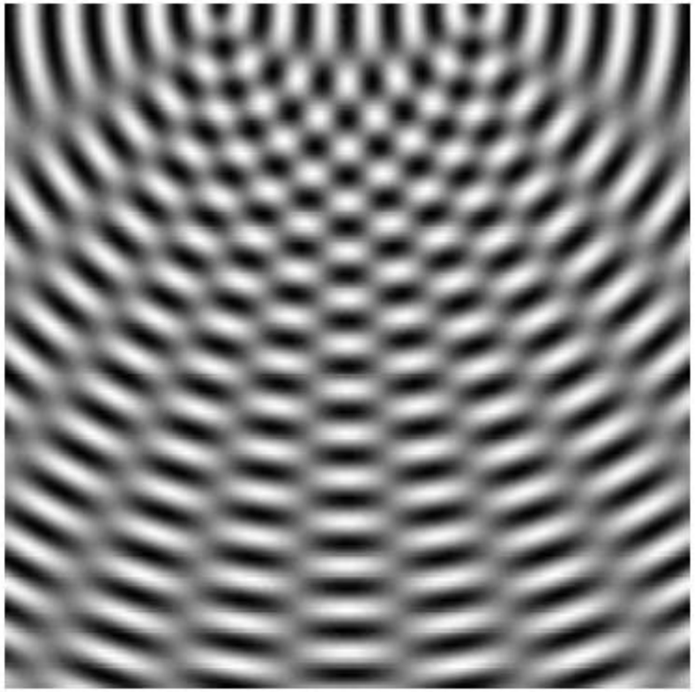
# 波叠加时在空间出现稳定的振动加强和减弱的分布



水波盘中的干涉现象



频率相同、振动方向平行、相位差恒定的两列波相遇时，有的地方振动始终加强、有的地方振动始终减弱的现象，叫做波的干涉。



2. 相干波与相干波源

相干波：产生干涉现象的波

相干波源

(3) 规律：两列平面简谐波在某点引起振动，$r_1$，$r_2$ 为各自振源到该点的距离

$$y_1 = A_1\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r_1 + \varphi_1\right), \quad y_2 = A_2\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r_2 + \varphi_2\right)$$

根据同频同向简谐振动的合成规律，仍得简谐振动

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi), \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$\boxed{\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)}$$

当 $\Delta\varphi = \pm 2k\pi$ 时，$A = A_1 + A_2$，振动互相加强；

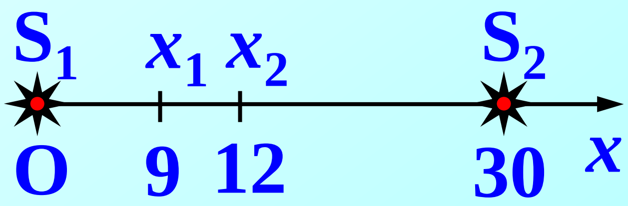
当 $\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi$ 时，$A = |A_1 - A_2|$，振动互相减弱。

若 $\varphi_1 = \varphi_2$，则波程差 $\delta = r_1 - r_2 = \dfrac{\Delta\varphi}{2\pi}\lambda = \begin{cases} \pm k\lambda & \text{加强} \\ \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{减弱} \end{cases}$

例　$S_1, S_2$ 为两相干波源，坐标如图，它们在 $x_1 = 9\text{cm}$, $x_2 = 12\text{cm}$ 处产生相邻的干涉极小，求波长，以及波源的最小正相位差。

解：设波源 $S_1, S_2$ 振动函数分别为

$$y = A_1\cos(\omega t + \varphi_1),\quad y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$




则它们发出两列波的波函数为

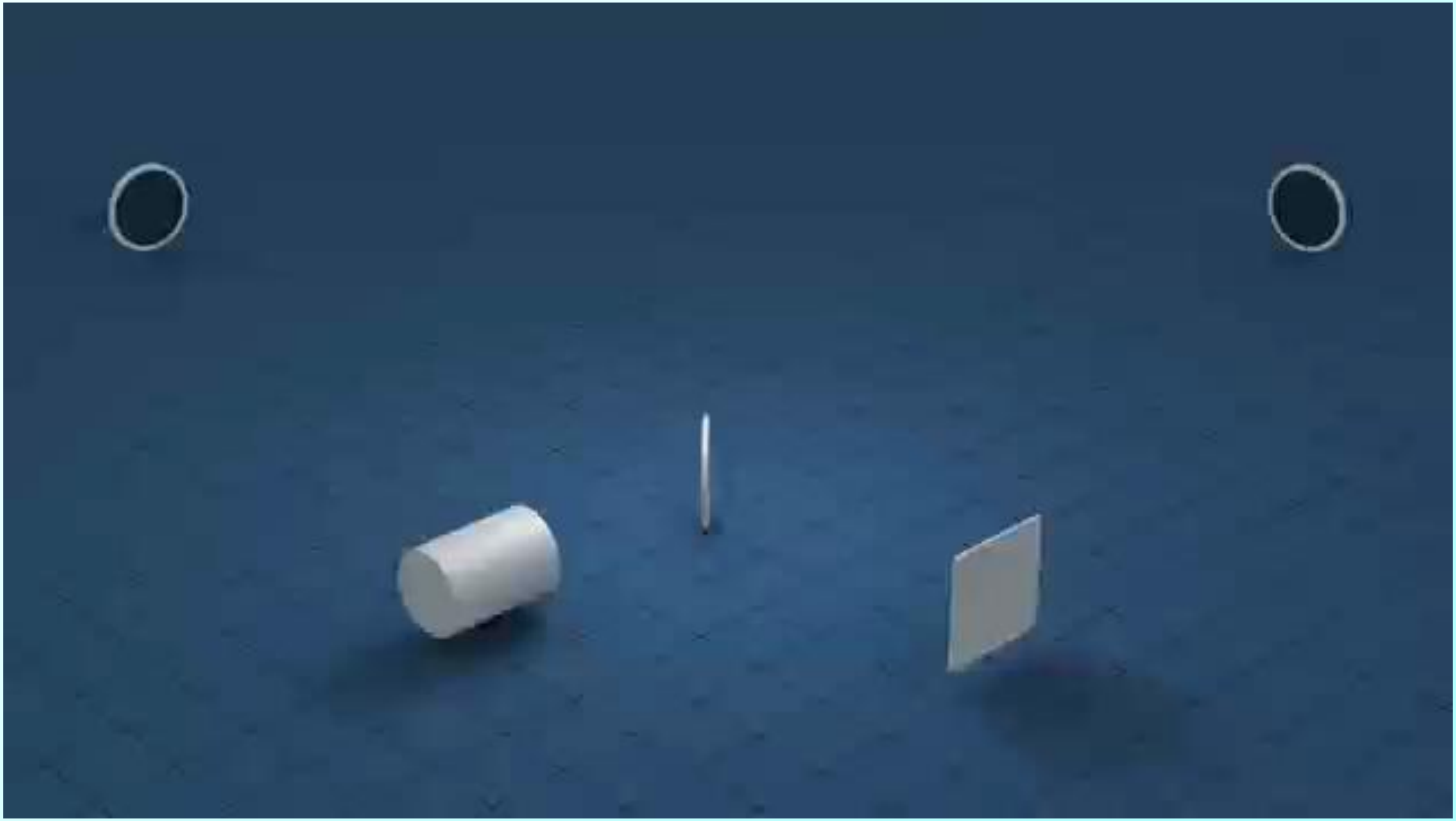
$$y = A_1\cos\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda} + \varphi_1\right),\quad y = A_2\cos\left(\omega t - 2\pi\frac{30 - x}{\lambda} + \varphi_2\right)$$

由 $x_1$ 点干涉极小得 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi\dfrac{30 - 2x_1}{\lambda} = (2k+1)\pi$

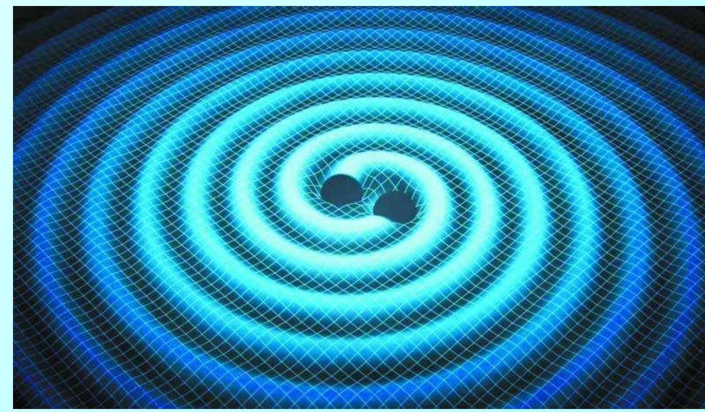
由 $x_2$ 点干涉极小得 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi\dfrac{30 - 2x_2}{\lambda} = (2k+3)\pi$

两式相减得波长 $\lambda = 2(x_2 - x_1) = 6\text{cm}$　而波源的相位差为

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi + 2\pi(30 - 2\times 9)/6 = (2k+1)\pi + 4\pi$$ 最小为 $\pi$



激光干涉引力波天文台（Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, LIGO）

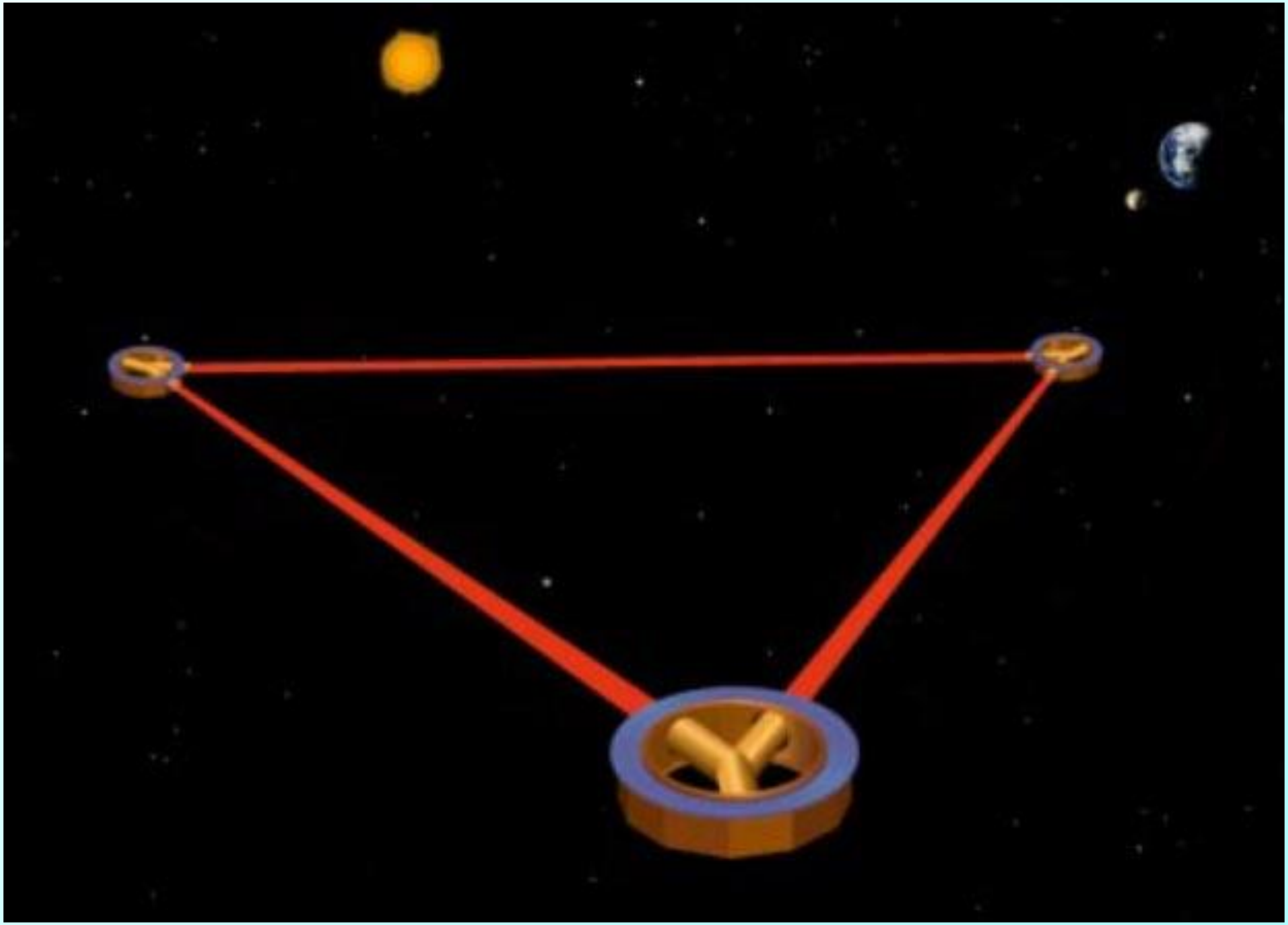



此外， 干涉中包含了光程差的信息，也被广泛应用于相位成像，半导体形貌检测等。

# LIGO: laser interferometer gravitational-wave observatory

# AIGO: Australian International Gravitational-wave Observatory

# LISA: Laser Interferometric Space Antenna



## 3. 驻波 (Standing Wave)

同一介质中两列频率、振动方向、振幅都相同的简谐波，在同一直线上沿相反方向传播时形成驻波。

$$y_1 = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right), \quad y_2 = A\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

相加得驻波表达式 $y = y_1 + y_2 = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t$

$x = 0, \quad y = 2A\cos\omega t$

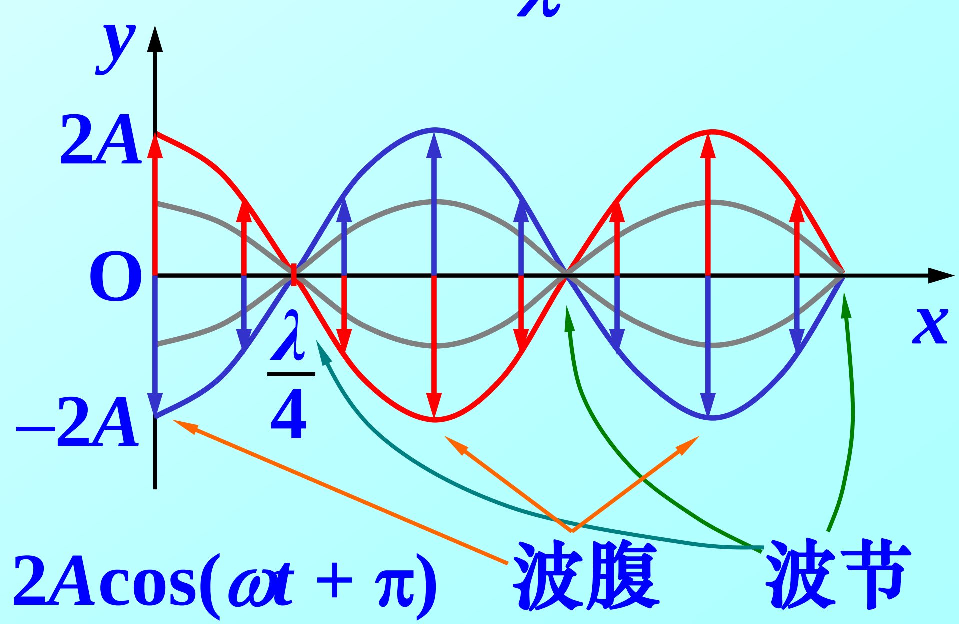
$x = \lambda/6, \ y = A\cos\omega t$

$x = \lambda/4, \ y = 0$

$x = \lambda/3, \ y = -A\cos\omega t$

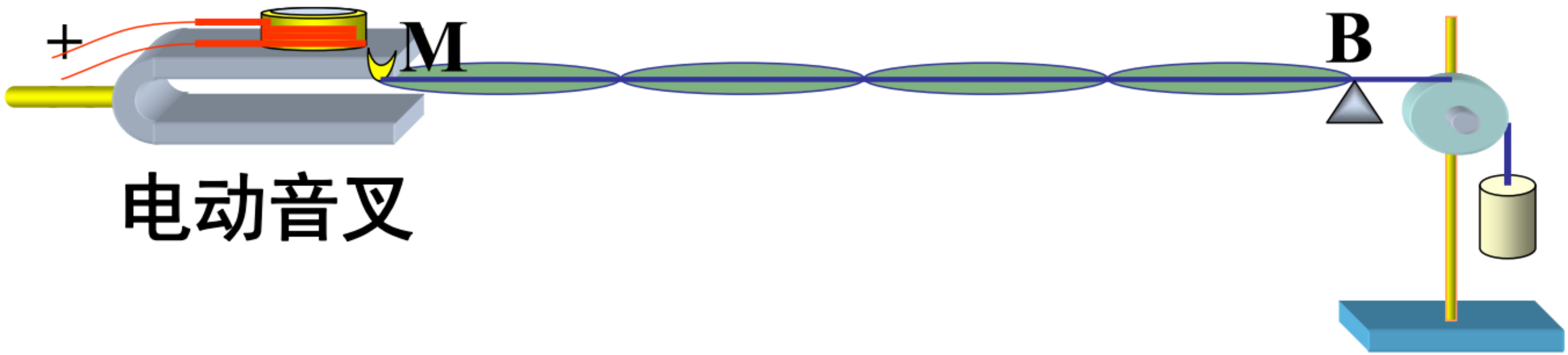
$\quad = A\cos(\omega t + \pi)$

$x = \lambda/2, \ y = -2A\cos\omega t = 2A\cos(\omega t + \pi)$



两列振幅相同的相干波在同一直线上沿相反方向传播彼此相遇叠加而形成的波-驻波

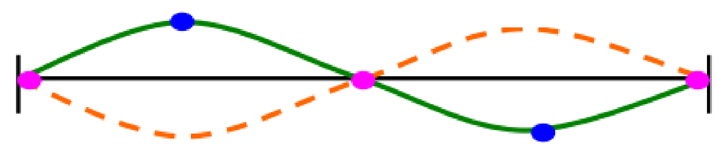
## 1、驻波的形成



3、驻波的特征 1）振幅分布 $|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x|$

波腹 振幅最大的点称为波腹

$$|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x|=1$$



波腹的位置 $x=k\frac{\lambda}{2}$ $k=0,\pm1,\pm2\ldots$

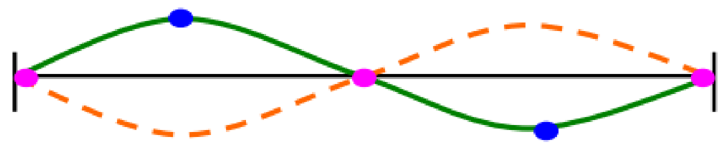
结论 两相邻波腹间的距离$\lambda/2$

## 3、驻波的特征

### 1) 振幅分布

$$y = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos\omega t$$

$$\left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$$



波节 振幅为零的点称为**波节** $\left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right| = 0$

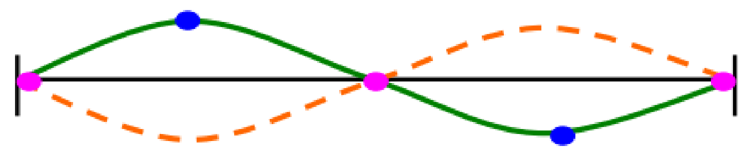
波节的位置 $x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

**结论** 两相邻波节间的距离 $\lambda / 2$

## 3、驻波的特征 1）振幅分布 $\left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$

两相邻波腹间的距离$\lambda/2$

两相邻波节间的距离$\lambda/2$



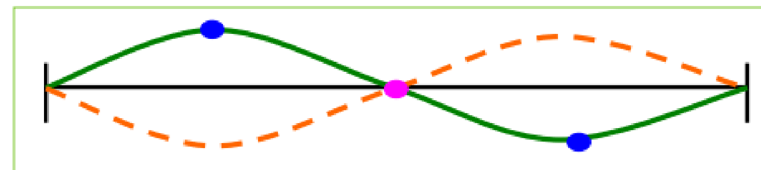
## 应用

振幅分布的这一结论可以用来测量波长，只要测定两个相邻波节(或波腹)之间的距离，就可以确定原来两个相干行波的波长

## 2) 相位分布

$$y = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos\omega t$$

$\cos 2\pi\dfrac{x}{\lambda} > 0$ 相位 $\omega t$



$\cos 2\pi\dfrac{x}{\lambda} < 0$ 相位 $\omega t + \pi$

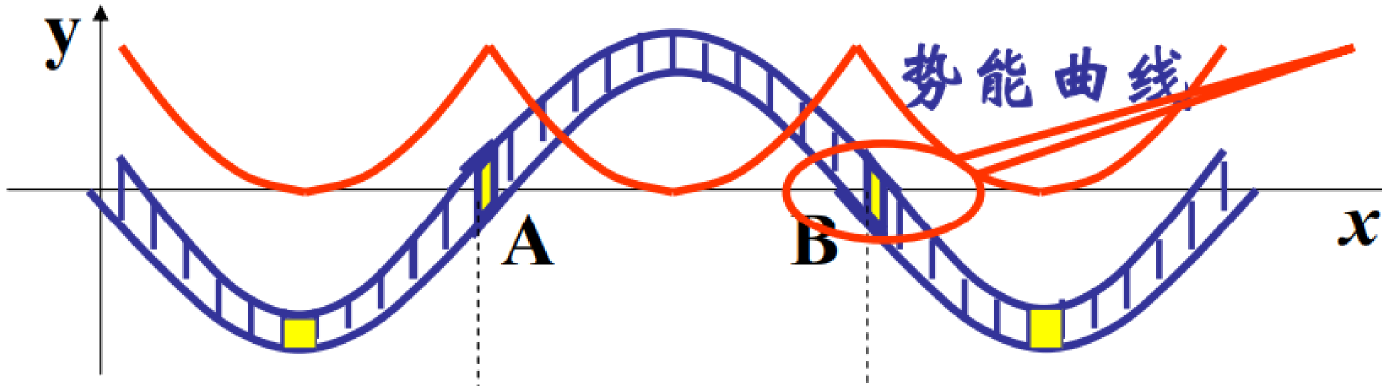
结论 在波节两侧点的振动相位相反

两个波节之间的点其振动相位相同

同段同相，邻段反相

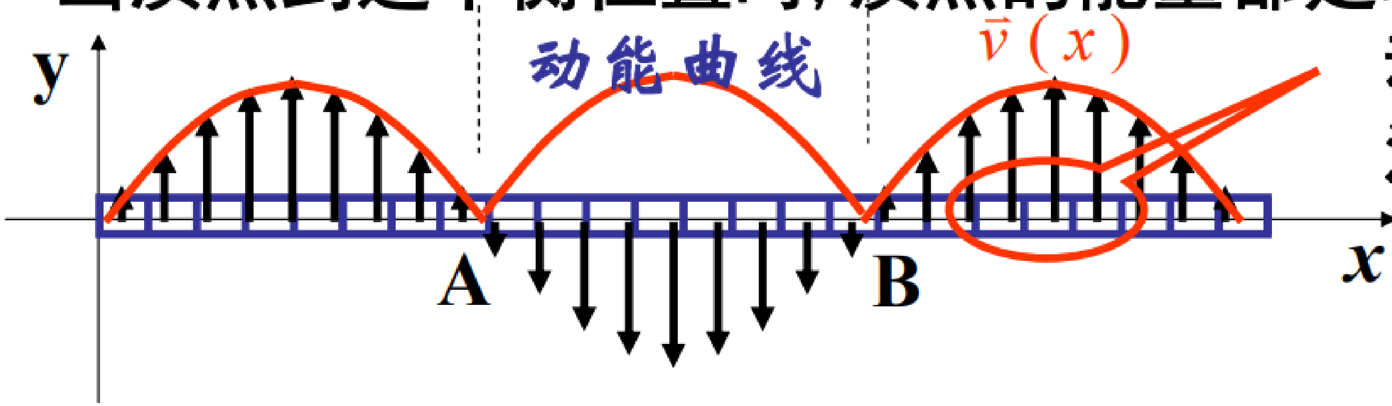
## 3) 能量分布

当介质中质点的位移最大时，质点的能量都是势能



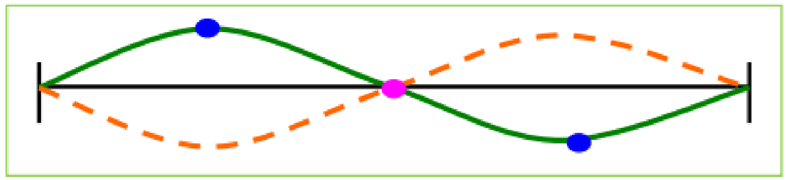

势能集中在波节附近

当质点到达平衡位置时，质点的能量都是动能




动能集中在波腹附近

## 结论



在驻波场中，能量不断地在波腹和波节之间往复转移，并且在动能和势能之间不断相互转换，没有能量的定向传播

**讨论**

(1) 驻波振幅随 $x$ 周期性变化，同波腹内质元振动同相，相邻波腹内的质元反相。

(2) 由驻波表达式 $y = y_1 + y_2 = 2A\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t$ 得

波腹 $\left|\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}x\right| = 1,\quad \dfrac{2\pi}{\lambda}x = \pm k\pi,\quad x = \pm k\dfrac{\lambda}{2}\ (k = 0, 1, 2, \cdots$

波节 $\left|\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}x\right| = 0,\quad \dfrac{2\pi}{\lambda}x = \pm(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\quad x = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{4}$

所以相邻两波腹 (或相邻两波节) 之间的距离为 $\lambda/2$ 。

(3) 驻波的平均能流密度为零。

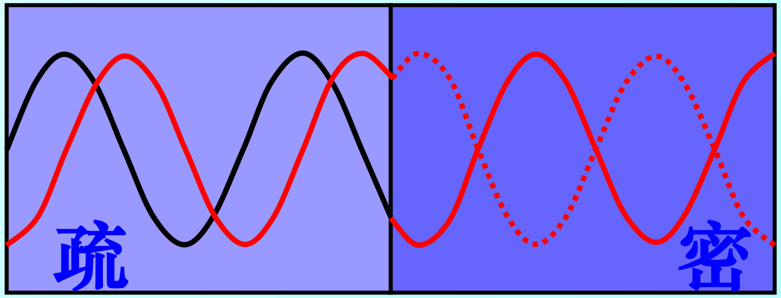
(4) 利用驻波可测波长：利用入射波和反射波叠加成驻波，相邻波腹 (或波节) 距离为半个波长。

## ❑ 半波损失 (Half-wave Loss):

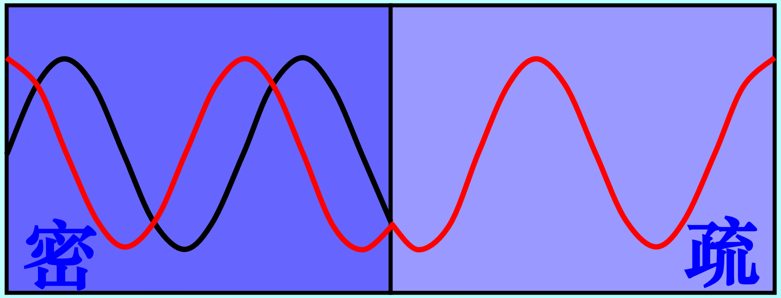
当波由波疏介质向波密介质垂直入射时，界面的反射波不是入射波的反向延伸，而有 $\pi$ 的相位突变，也就是半个波长的损失，这种现象称为半波损失。

用 $\rho u$ 表示介质对波的疏密程度, 其中 $\rho$ 是介质的密度, $u$ 是波在介质中的传播速度。

$\rho u$ 小表示波疏介质，$\rho u$ 大表示波密介质。对于光波, 折射率 $n$ 小的为光疏介质，$n$ 大的为光密介质。

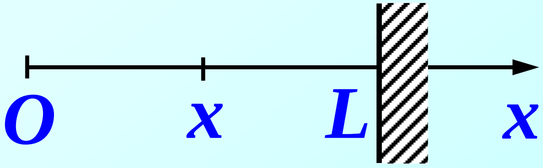



反射波有半波损失




反射波无半波损失

(5) 设入射波波函数为




$$y_1 = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right)$$

则由波密介质向波疏介质入射的反射波波函数为

$$y_2 = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi L}{\lambda} + \varphi - \frac{2\pi(L-x)}{\lambda}\right)$$

驻波 $$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x-L)\cos(\omega t - \frac{2\pi L}{\lambda} + \varphi)$$

若由波疏介质向波密介质入射，反射波波函数为

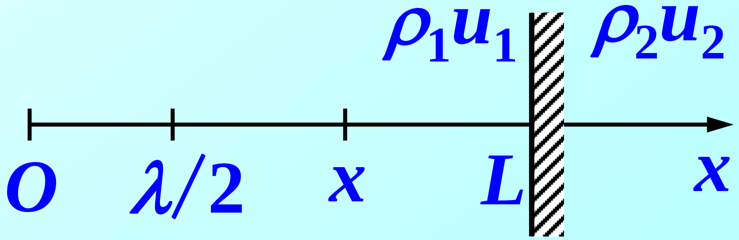
$$y_2 = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi L}{\lambda} + \varphi + \pi - \frac{2\pi(L-x)}{\lambda}\right)$$ (半波损失)

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-L) + \frac{\pi}{2}\right]\cos\left[\omega t - \frac{2\pi L}{\lambda} + \varphi + \frac{\pi}{2}\right]$$

两种情况反射面 $L$ 处分别为波腹和波节。

**例　波长为 $\lambda$ 的简谐平面波沿 $x$ 轴正向传播，已知 $x = \lambda/2$ 处波引起质点的振动函数为 $y = A\cos\omega t$，(1) 求波函数；(2) $x = L\ (>\lambda/2)$ 处有反射面，$\rho_1 u_1 < \rho_2 u_2$，反射波振幅为 $A'$，求反射波的波函数。**

解：用滞后法解。已知某点振动，其下游点的振动相位都比其落后。




(1) $$y = A\cos\left(\omega t - 2\pi\frac{x-\lambda/2}{\lambda}\right)$$

$$= A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \pi\right)$$

(2) 有半波损失，所以反射波波函数为

$$y = A'\cos\left(\omega t - \frac{2\pi L}{\lambda} + \pi + \pi - 2\pi\frac{L-x}{\lambda}\right)$$

注意符号

$$= A'\cos\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{4\pi L}{\lambda}\right)$$

# 多普勒效应

## 一、多普勒效应

如果波源或观察者或两者都相对于介质运动，则观察者接收到的频率将不同于波源发出的频率，这种现象称为多普勒效应

奥地利物理学家多普勒
(J. C. Doppler,1803-1853)

## 二、三种不同情况下频率的变化

设波源或观察者沿着二者的连线运动

$u$ 表示媒质中的波速

$v_R$ 表示观察者相对于介质的运动速度

$v_s$ 表示波源相对于介质的运动速度

## 基本概念

**波的频率** $\nu$ ：单位时间内通过介质中某点的“完整波”的数目

**波源频率** $\nu_s$ ：单位时间内波源振动的次数或单位时间内发出的“完整波”的数目

**观察者接收到的频率** $\nu_R$ ：观察者在单位时间内接收到的“完整波”的个数

单位 Hz

## 1.波源不动, 观察者运动

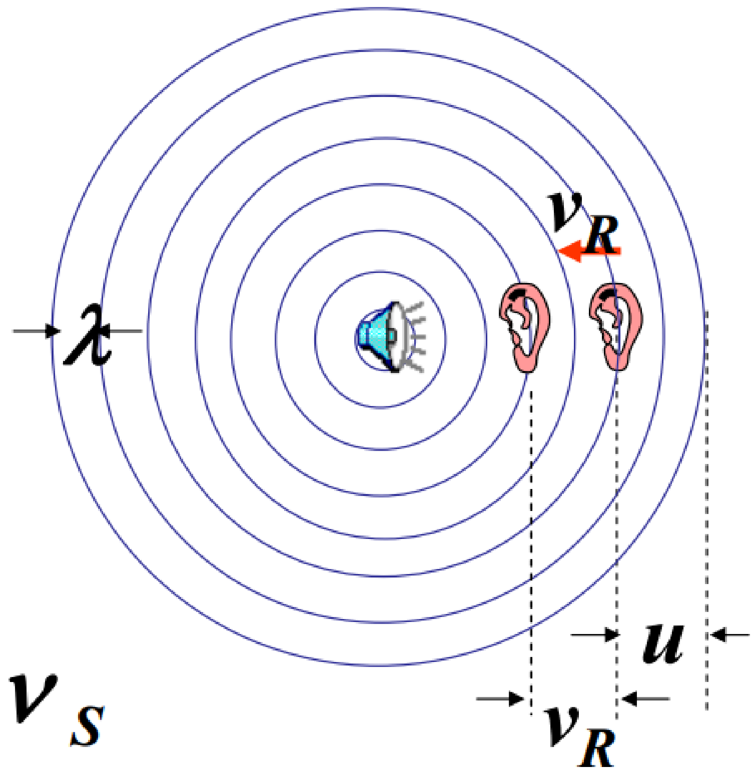
设观察者向着波源运动

观察者接收的频率

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{\lambda} = \frac{u + v_R}{u / \nu}$$

$$= \frac{u + v_R}{u}\nu = \frac{u + v_R}{u}\nu_S$$

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u}\nu_S$$

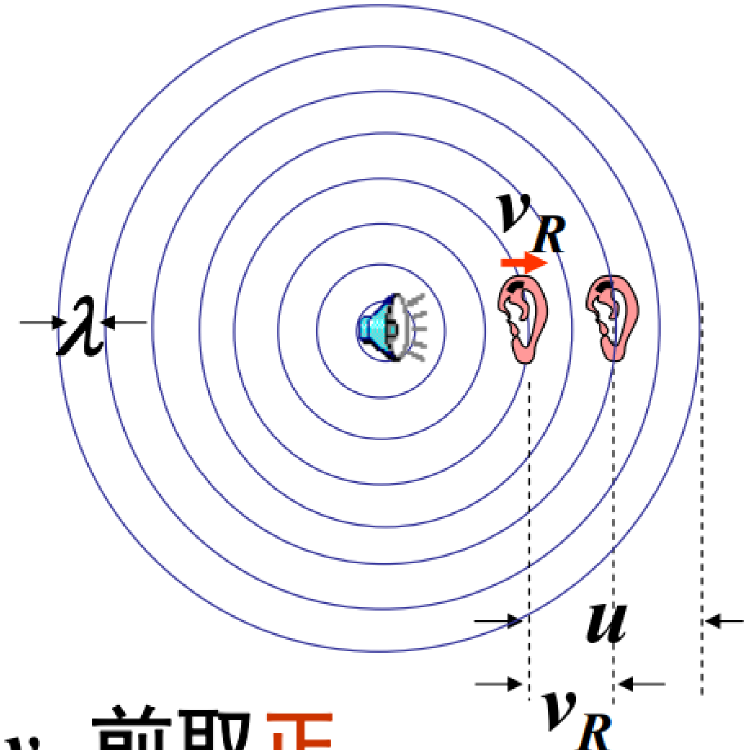


1.波源不动, 观察者运动

设观察者背着波源运动

观察者接收的频率

$$\nu_R = \frac{u - v_R}{u}\nu_S \qquad \nu_R = \frac{u \pm v_R}{u}\nu_S$$

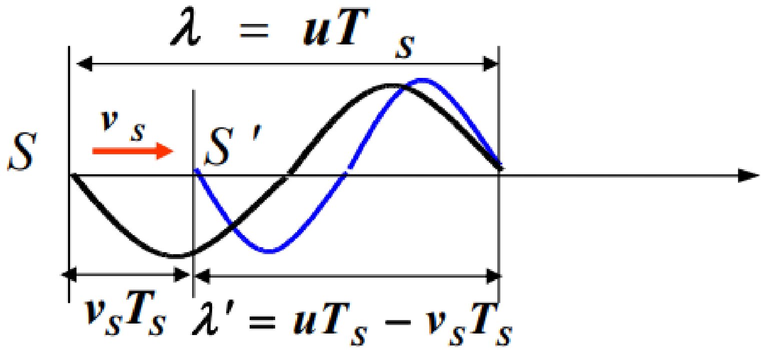


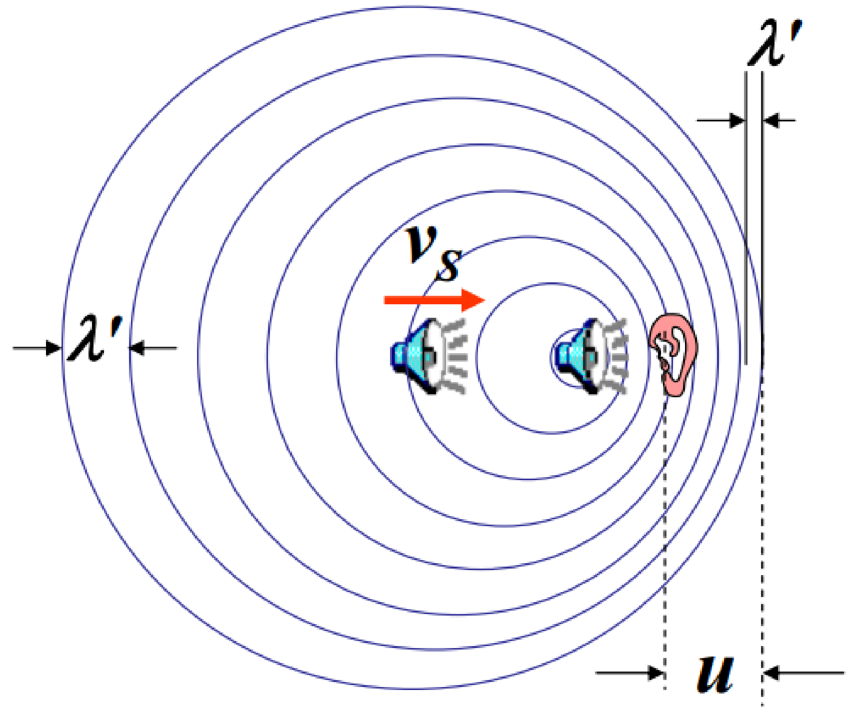

说明: 观察者向着波源运动时, $v_R$ 前取正

观察者背着波源运动时, $v_R$前取负

## 2.波源运动, 观察者不动

## 设波源向着观察者运动

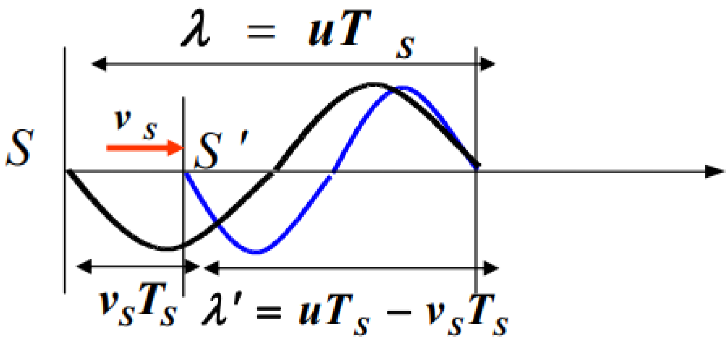


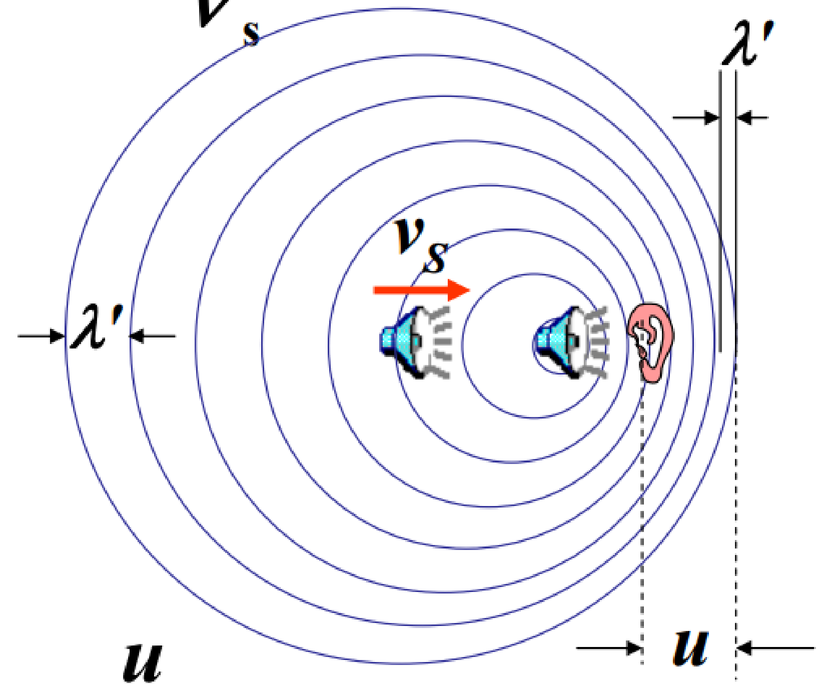




$$\lambda' = (u - v_S)T_S \qquad \lambda' = \frac{u - v_S}{\nu_s}$$

## 2.波源运动, 观察者不动 $\lambda' = \dfrac{u - v_S}{\nu_s}$

设波源向着观察者运动



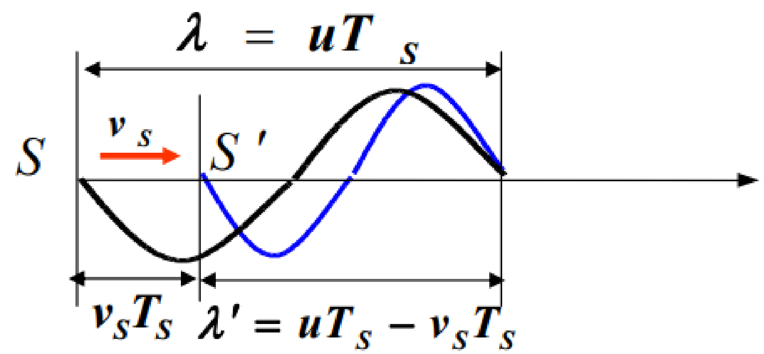

观察者接收的频率

$$\nu_R = \nu = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{(u - v_S)/\nu_S} = \frac{u}{u - v_S}\nu_S$$

## 2.波源运动, 观察者不动

设波源向着观察者运动

观察者接收的频率




$$\nu_R = \frac{u}{u - v_S}\nu_S \qquad \nu_R = \frac{u}{u \mp v_S}\nu_S$$

说明: 波源向着观察者运动时, $v_S$前取负

波源背着观察者运动时, $v_S$前取正

## 3.波源和观察者均相对媒质运动

观察者接收的频率

$$\boxed{\nu_R = \frac{u \pm v_R}{u \mp v_S}\nu_S}$$

说明

(1)波源和观察者相向运动时, 分子取正,分母取负

(2)波源和观察者背向运动时, 分子取负,分母取正

# 小　结

1. 行波：$\pm x$ 方向波函数 $y(t,x)=f\left(t\mp\frac{x}{u}\right)$，$u$ 为波速

波形曲线　$y(t_1,x)=f\left(t_1\mp\frac{x}{u}\right)$

振动曲线　$y(t,x_1)=f\left(t\mp\frac{x_1}{u}\right)$

2. 平面简谐波：$\pm x$ 方向波函数

$$y(t,x)=A\cos\left[\omega\left(t\mp\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}\mp\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi\right]$$

$$=A\cos[(\omega t\mp kx)+\varphi]$$

周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，频率 $\nu=\frac{1}{T}$，波长 $\lambda=uT$，波数 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$

3. 半波损失：当波由波疏介质向波密介质垂直入射时，界面的反射波有 π 的相位突变，即半个波长的损失。

4. 波动方程： $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$

固体中纵波波速 $u=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ 横波波速 $u=\sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$

液体气体纵波波速 $u=\sqrt{\dfrac{K}{\rho}}$

5. 简谐波的能量：

平均能量密度 $\overline{w}=\dfrac{1}{2}\rho\omega^2A^2$

平均能流密度 (波的强度) $I=\overline{w}u=\dfrac{1}{2}\rho\omega^2A^2u$

6. 惠更斯原理：介质中波阵面上各点都可以看作是发射子波的波源，其后任一时刻的波阵面就是这些子波的包迹 (包络面)。

7. 波的干涉：波相遇时，空间上周期性地出现加强或减弱的现象。

相干条件：频率相同、相位差恒定、振动方向相同；振幅相差不大。相应的波叫相干波。

8. 驻波：两列频率、振动方向、振幅都相同的简谐波在同一直线上沿相反方向传播时形成驻波。它是稳定的分段振动，有波节和波腹。

$$y = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) + A\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t$$