

第二章 一维随机变量及其分布

第一节 随机变量

第二节 离散型随机变量及其分布

第三节 随机变量的分布函数

第四节 连续型随机变量及其分布

第五节 随机变量函数的分布

教学计划：4次课-12学时



随机变量

离散型随机变量

连续型随机变量

分布函数

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

右连续

连续

x 左侧区间上的概率和

不直观

概率分布

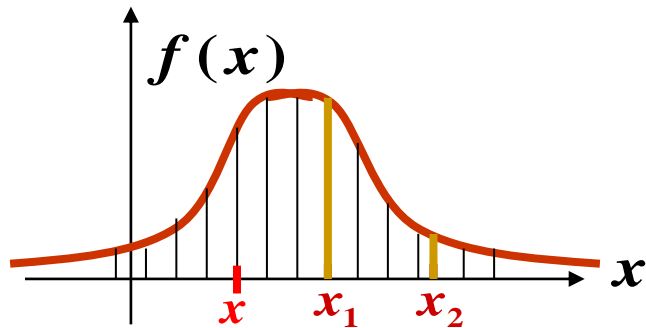
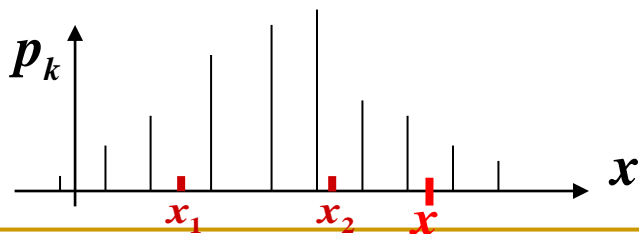
概率1分布
情况, 直观

分布律:

$$\sum p_k = 1$$

概率密度: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$

| | | | | |
|-------|-------|-------|----------|-------|
| X | x_1 | x_2 | \cdots | x_k |
| p_k | p_1 | p_2 | \cdots | p_k |



概率计算

$$P(x_1 < X \leq x_2) = \sum_{x_1 < x_k \leq x_2} p_k$$

$$= F(x_2) - F(x_1)$$

$$P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$$

$$= F(x_2) - F(x_1)$$



第二章 一维随机变量及其分布

第一节 随机变量

第二节 离散型随机变量及其分布

第三节 随机变量的分布函数

 第四节 连续型随机变量及其分布

第五节 随机变量函数的分布

教学计划：4次课-12学时



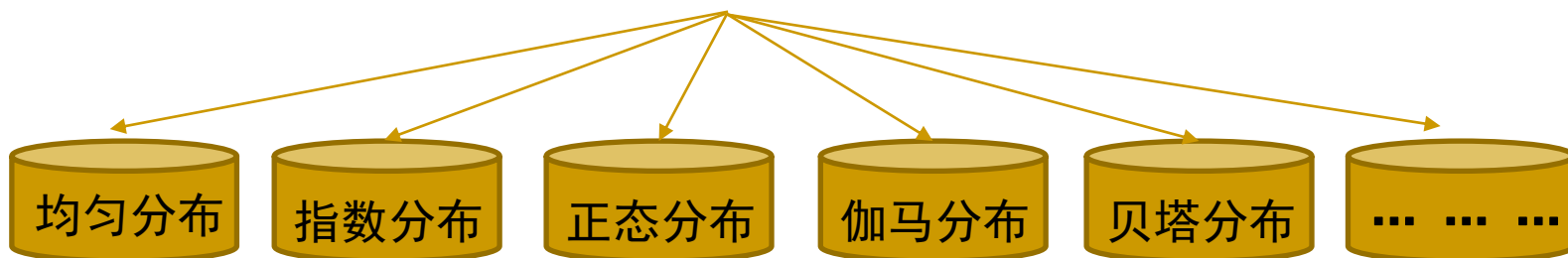
第二章 一维随机变量及其分布

第四节 连续型随机变量及其分布

- ✓ 连续型随机变量的概率密度
 - 几种常见的连续型随机变量的分布

$$P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$$

连续型随机问题



第二章 一维随机变量及其分布

第四节 连续型随机变量及其分布

✓ 连续型随机变量的概率密度

➡ 几种常见的连续型随机变量的分布

➡ 均匀分布

- 指数分布

- 正态分布

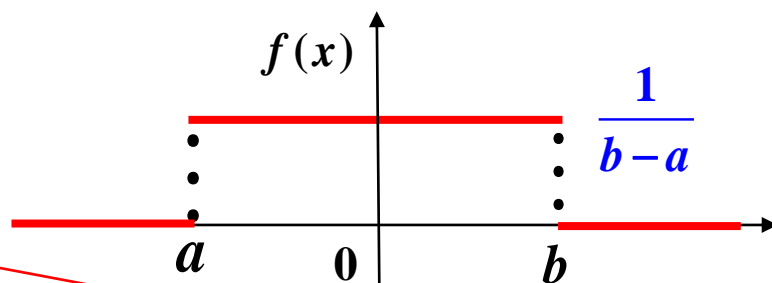
- 正态分布的分位点 ---Ch6



二. 几种常见的连续型随机变量的分布

1. 均匀分布 若连续型随机变量 X 具有概率密度 $f(x)$ 为:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



则称 X 在区间 (a, b) 上服从均匀分布。记为: $X \sim U(a, b)$

注: ➤ 易证 $f(x)$ 满足: 1° $f(x) \geq 0$ 2° $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^a \overset{0}{f(x)} dx + \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} \overset{0}{f(x)} dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b dx = \frac{1}{b-a} x \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} (b-a) = 1 \end{aligned}$$

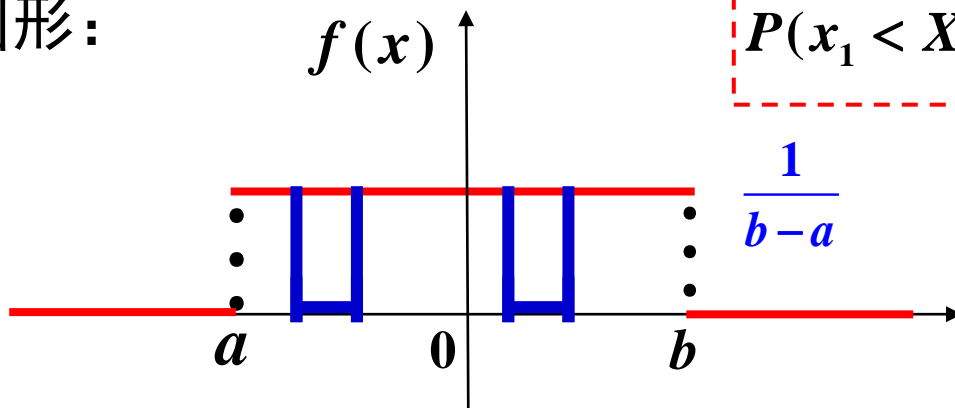


1. 均匀分布

$$X \sim U(a, b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

➤ $f(x)$ 的图形:



$$P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$$

➤ 均匀分布的性质:

X 落在区间 (a, b) 中任意等长度的子区间的概率相同, 它只依赖于子区间的长度, 与位置无关。

➤ 均匀分布只能限制在一个有限区间 (a, b) 内。



1. 均匀分布

$$X \sim U(a, b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求分布函数：

- 1) 分布函数定义在整个实数轴上；
- 2) 用分断点分区间；
- 3) 分区间求分布函数值。

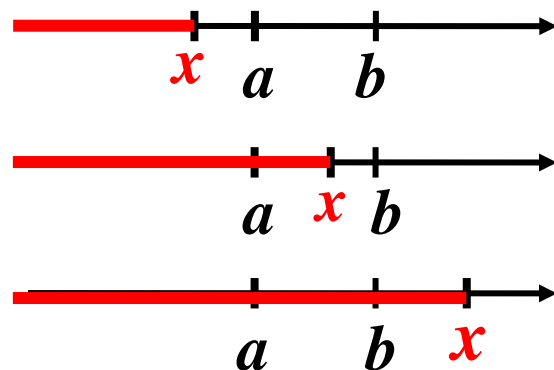
➤ 均匀分布的分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

当 $x < a$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$

当 $a \leq x < b$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^a 0 \cdot dt + \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} t \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$

当 $x \geq b$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^a 0 \cdot dt + \int_a^b \frac{1}{b-a} dt + \int_b^x 0 \cdot dt = \frac{1}{b-a} t \Big|_a^b = 1$

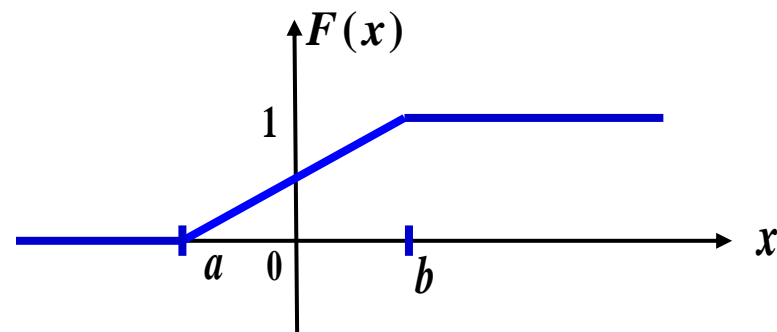


1. 均匀分布

$$X \sim U(a, b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

➤ 均匀分布的分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$



连续且单调增

性质1 $F(x)$ 是一个不减函数

性质2 $0 \leq F(x) \leq 1$ 且

$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

性质3 $F(x)$ 是连续函数



1. 均匀分布

$$X \sim U(a, b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

➤ 均匀分布的分布函数为: $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$

➤ 均匀分布常应用于下列情形:

比如:

- 1) 在数值计算中, 由于四舍五入, 小数点后某位小数进位导致的误差;
- 2) 公交线路路上两辆公共汽车前后通过某车站的时间, 即乘客的候车时间等.

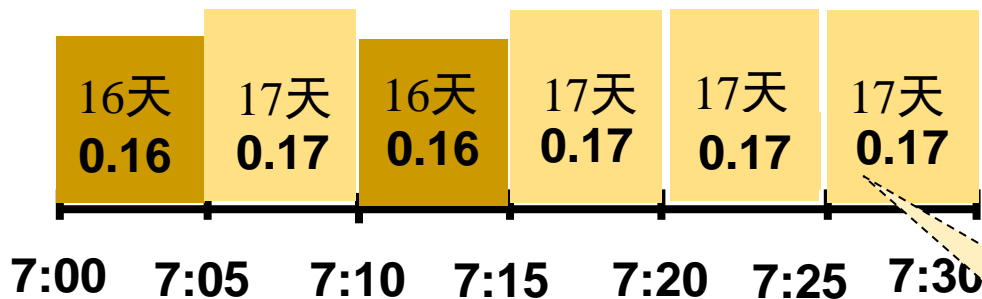


例1. 某公共汽车站从早晨7时起，每15分钟来一班车，即7:00, 7:15, 7:30, 7:45 等时刻有汽车到达此站，如果乘客到达此站时间 X 是7:00到 7:30 之间的均匀随机变量，

- 试求： (1) 乘客候车时间少于 5 分钟的概率；
(2) 乘客候车时间超过10分钟的概率.

均匀分布

Ch8 假设检验
分布拟合检验方法



用100天做统计

频率直方图



例1. 某公共汽车站从上午7时起, 每15分钟来一班车, 即7:00, 7:15, 7:30, 7:45 等时刻有汽车到达此站, 如果乘客到达此站时间 X 是7:00到 7:30 之间的均匀随机变量,

试求: (1) 乘客候车时间少于 5 分钟的概率;

(2) 乘客候车时间超过10分钟的概率.

解: 设以7:00为起点0, 以分为单位, $X \sim U(0,30)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & 0 < x < 30 \\ 0 & \text{其 它} \end{cases}$$



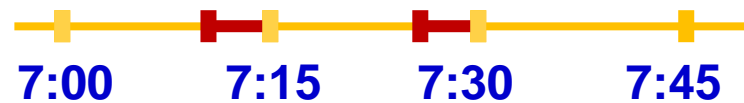
X --- 乘客到达车站时间

$$X \sim U(0, 30) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & 0 < x < 30 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

从上午7时起，
每15分钟来一
班车，即7:00，
7:15，7:30有汽
车到达车站

(1) 乘客候车时间少于 5 分钟的概率

乘客必须在7:00，7:10 到 7:15 之间，或在7:25 到 7:30 之间
到达车站.



故所求概率为：

$$\begin{aligned} & P\{X = 0\} + P\{10 < X < 15\} + P\{25 < X < 30\} \\ &= 0 + \int_{10}^{15} \frac{1}{30} dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{30} \int_{10}^{15} dx + \frac{1}{30} \int_{25}^{30} dx \\ &= \frac{1}{30} x \Big|_{10}^{15} + \frac{1}{30} x \Big|_{25}^{30} = \frac{1}{30} (15 - 10) + \frac{1}{30} (30 - 25) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



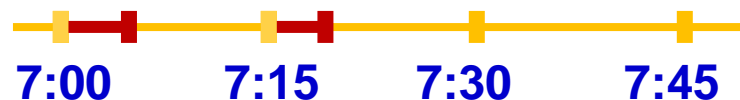
X --- 乘客到达车站时间

$$X \sim U(0, 30) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & 0 < x < 30 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

从上午7时起，
每15分钟来一
班车，即7:00，
7:15，7:30有汽
车到达车站

(2) 乘客候车时间超过10分钟的概率

候车时间超过10分钟，则乘客必须在7:00到7:05或7:15到7:20
之间到达车站



故所求概率为：

$$\begin{aligned} P(0 < X < 5) + P(15 < X < 20) &= \int_0^5 \frac{1}{30} dx + \int_{15}^{20} \frac{1}{30} dx \\ &= \frac{1}{30} \int_0^5 dx + \frac{1}{30} \int_{15}^{20} dx = \frac{1}{30} x \Big|_0^5 + \frac{1}{30} x \Big|_{15}^{20} \\ &= \frac{1}{30} (5 - 0) + \frac{1}{30} (20 - 15) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



第二章 一维随机变量及其分布

第四节 连续型随机变量及其分布

- 连续型随机变量的概率密度
- 几种常见的连续型随机变量的分布
 - ✓ 均匀分布
 - ➡ 指数分布
 - 正态分布
 - 正态分布的分位点



2. 指数分布

若连续型随机变量 X 具有概率密度 $f(x)$ 为：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \text{其中 } \theta > 0 \text{ 为常数}$$

则称 X 为服从参数 θ 的指数分布，记为： $X \sim E(\theta)$

注：➤ 易证 $f(x)$ 满足： 1° $f(x) \geq 0$ 2° $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

证明：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \overset{0}{\int_{-\infty}^0} f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx \\ &= -\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\theta}} d\left(-\frac{x}{\theta}\right) = -e^{-\frac{x}{\theta}} \Big|_0^{+\infty} = -(e^{-\infty} - e^0) = -(0 - 1) = 1 \end{aligned}$$



2. 指数分布

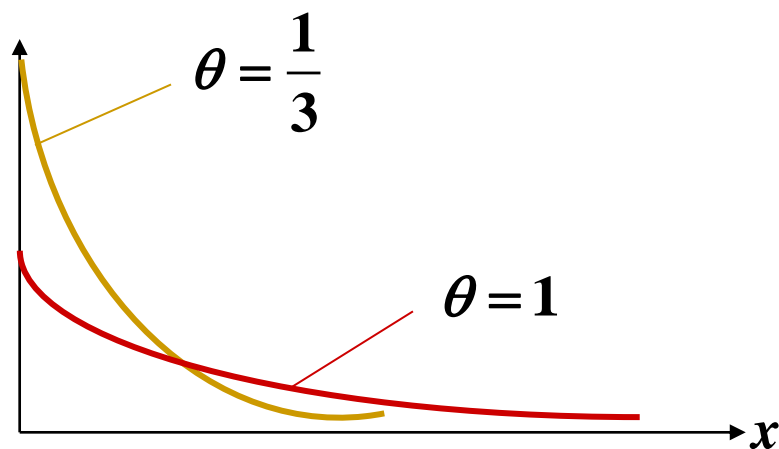
若连续型随机变量 X 具有概率密度 $f(x)$ 为：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \text{其中 } \theta > 0 \text{ 为常数}$$

则称 X 为服从参数 θ 的指数分布，记为： $X \sim E(\theta)$

注：➤ $f(x)$ 的图形：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$



2. 指数分布 $X \sim E(\theta)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

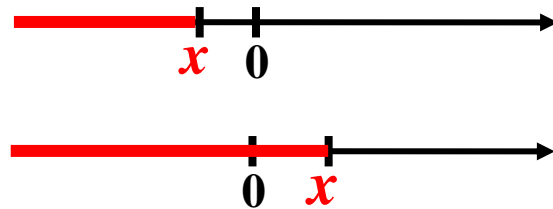
➤ 指数分布的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

当 $x < 0$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$

当 $x \geq 0$ 时,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dt + \int_0^x f(t) dt$$

$$= \int_0^x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} dt = -\int_0^x e^{-\frac{t}{\theta}} d\left(-\frac{t}{\theta}\right) = -e^{-\frac{t}{\theta}} \Big|_0^x = -(e^{-\frac{x}{\theta}} - 1) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$$



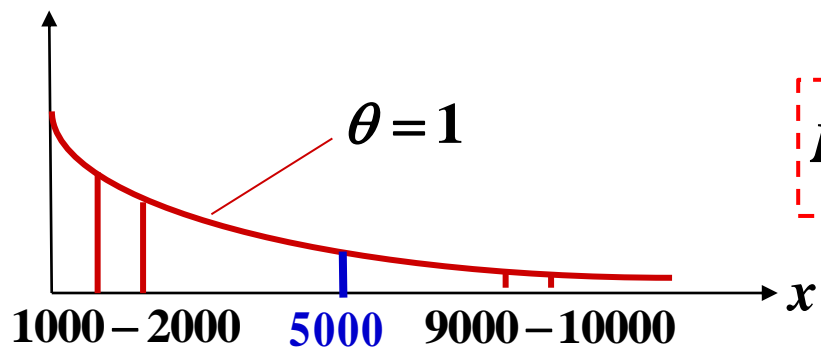
2. 指数分布 $X \sim E(\theta)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

➤ 指数分布常应用于下列情形：

- 1) 电器的寿命，零件的寿命等；
- 2) 可靠性理论，排队论等.

例：灯泡的寿命 $X \sim E(\theta=1)$ $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$



$$P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$$



例2. 设某**计算机的寿命**(单位:小时)是一个连续型随机变量 X , 其密度函数为:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{x}{100}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求: (1) λ 的值. $\lambda = \frac{1}{100}$

X 为服从参数 $\theta = 100$ 的指数分布, $X \sim E(\theta = 100)$

(2) 这台计算机在毁坏前能运行50到150小时的概率.



2. 指数分布 $X \sim E(\theta)$

➤ 指数分布广泛应用于排队理论中，如银行顾客、医院病人排队等候服务的时间都服从指数分布。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \xrightarrow{\text{令 } \lambda = \frac{1}{\theta}} f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$X \sim E(\theta)$ $X \sim E(\lambda)$

λ : 单位时间内平均到达人数；如：每分钟平均到达4人；

$1/\lambda$: 到达者之间平均间隔时间；如：平均间隔时间为15秒。

X : 等候服务的队列中下一个顾客到达的时间, $X \sim E(\lambda)$



2. 指数分布 $X \sim E(\theta)$

➤ 指数分布广泛应用于排队理论中，如银行顾客、医院病人排队等候服务的时间都服从指数分布。

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

λ : 单位时间内平均到达人数;

X : 等候服务的队列中下一个顾客到达的时间, $X \sim E(\lambda)$

例：顾客到达银行ATM机的速度为 20人/小时，即 $\lambda = 20$ ，如果一个顾客刚到，求下一个顾客在6分钟(0.1小时)内达的概率。

解：由于下一个顾客到达的时间 $X \sim E(\lambda = 20)$

$$\begin{aligned} \text{所以所求概率为: } P(X < 0.1) &= \int_0^{0.1} 20e^{-20x} dx \\ &= 1 - e^{-20 \times 0.1} = 0.8647 \end{aligned}$$



第二章 一维随机变量及其分布

第四节 连续型随机变量及其分布

- 连续型随机变量的概率密度
- 几种常见的连续型随机变量的分布
 - ✓ 均匀分布
 - ✓ 指数分布
 - ➡ 正态分布
 - 正态分布的分位点



3. 正态分布

正态分布是应用最广泛的一种连续型分布.

数学家德莫佛最早发现了二项分布的一个近似公式, 这一公式被认为是正态分布的首次问世.

正态分布在十九世纪前叶由数学家高斯加以推广, 所以通常也称为高斯分布.



德莫佛



高斯



3. 正态分布

正态分布的定义

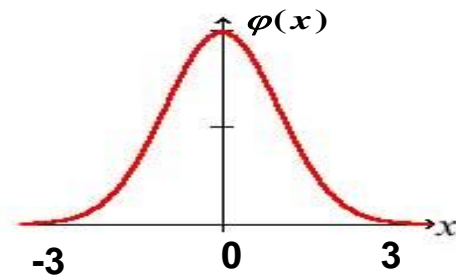
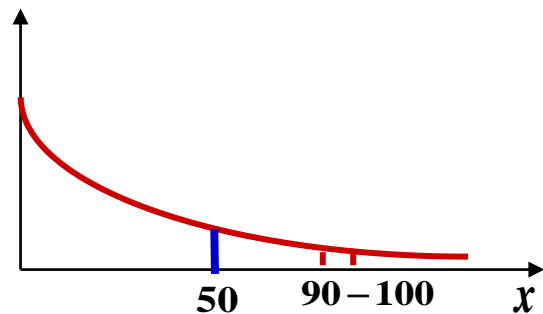
- 正态分布的图形特点
- 正态分布的分布函数
- 标准正态分布
- 正态分布的应用



(1) 正态分布的定义

若随机变量 X 的概率密度为:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$



其中: μ 和 σ^2 都是常数, μ 任意, $\sigma > 0$,

则称 X 服从参数为 μ 和 σ^2 的正态分布,

记作: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

注: ➤ 易证 $f(x)$ 满足: 1° $f(x) \geq 0$

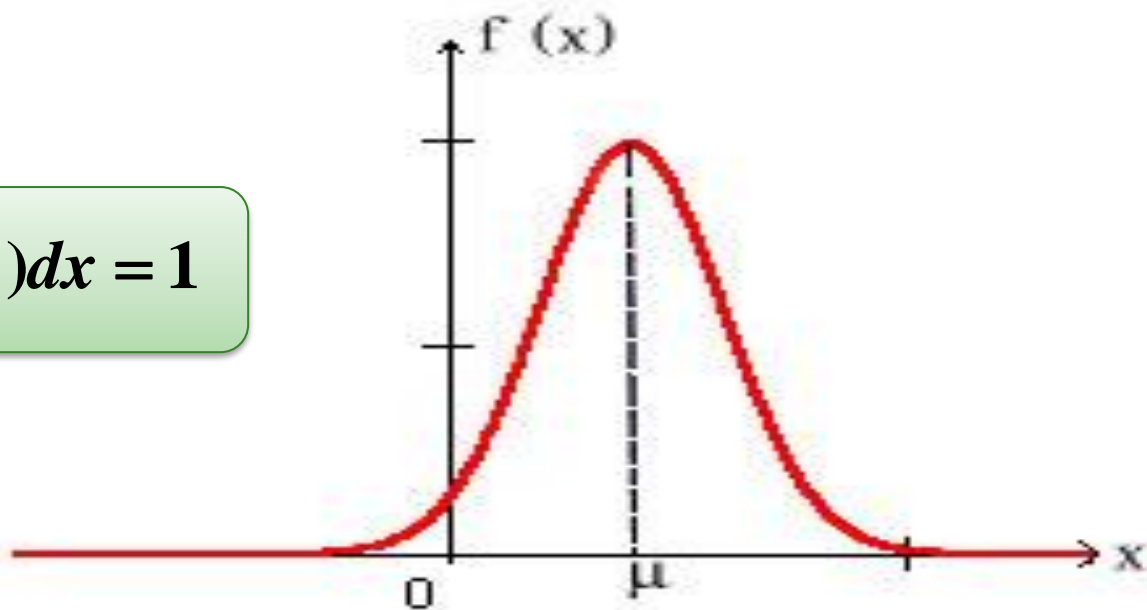
$$2^\circ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$



正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的图形

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$



正态分布的密度曲线是一条关于 μ 对称的钟形曲线，称为正态曲线。



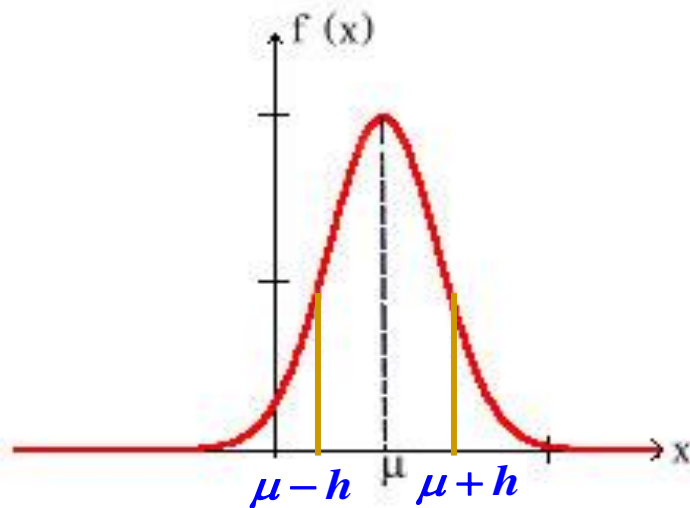
3. 正态分布

- 正态分布的定义
- ➔ 正态分布的图形特点
- 正态分布的分布函数
- 标准正态分布
- 正态分布的应用



(2) 正态分布的图形特点

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$



➤ 1 显然: $f(x) \geq 0$

➤ 2 $f(x)$ 以 μ 为对称轴, 并在 $x = \mu$ 处达到最大值:

$$f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

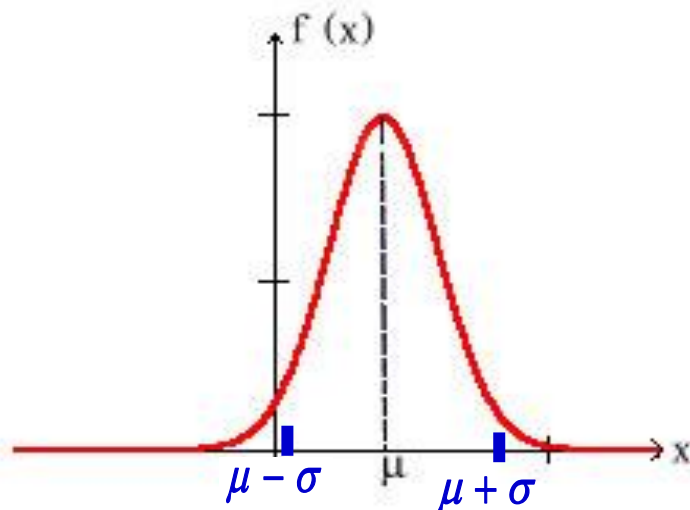
证明: 当 $x = \mu \pm h$ ($h > 0$) 时, 有 $f(\mu + h) = f(\mu - h)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi} \cdot e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$



(2) 正态分布的图形特点

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$



➤ 1 显然: $f(x) \geq 0$

➤ 2 $f(x)$ 以 μ 为对称轴, 并在 $x = \mu$ 处达到最大值: $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

➤ 3 $f(x)$ 以 x 轴为渐近线: 当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$

➤ 4 $x = \mu \pm \sigma$ 为 $f(x)$ 的两个拐点的横坐标.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \mu \pm \sigma$$

➤ 5 μ 决定图形的位置, σ 决定图形的形状。



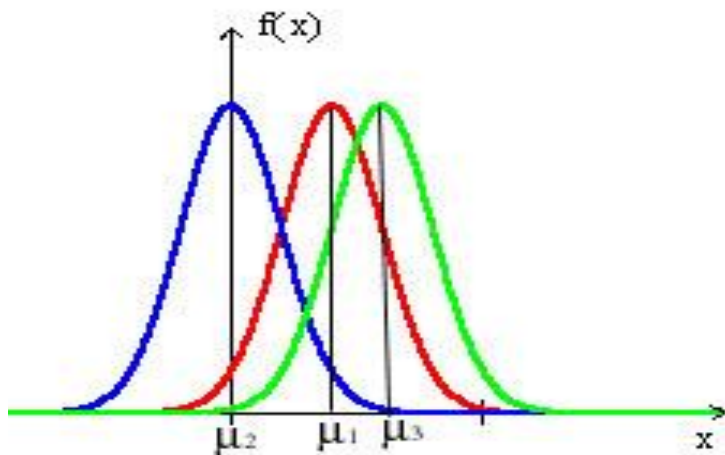
➤ 5 μ 决定图形的位置, σ 决定图形的形状。

固定 σ , 改变 μ , 则图形位置变, 但形状不变。

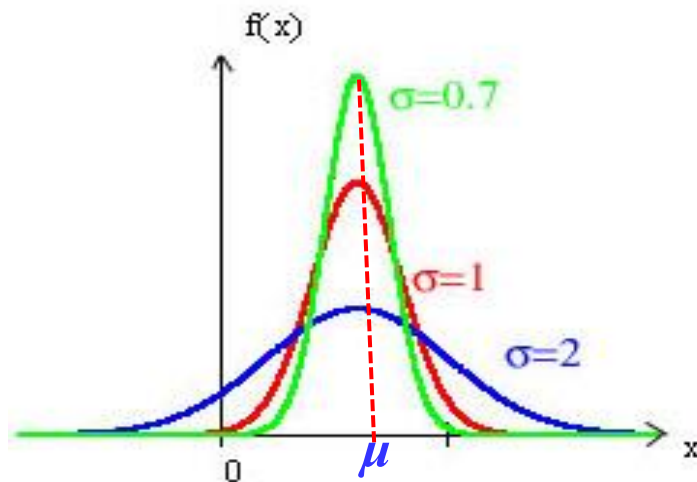
固定 μ , 改变 σ , 则图形位置不变, 但形状改变。

$$f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad \sigma \text{ 越小, } f(\mu) \text{ 越大}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



μ 决定了图形的中心位置




σ 决定了图形的陡峭程度

注: 正态分布由它的两个参数 μ 和 σ 唯一确定, 当 μ 和 σ 不同时, 对应的是不同的正态分布。



3. 正态分布

- 正态分布的定义
- 正态分布的图形特点
-  正态分布的分布函数
- 标准正态分布
- 正态分布的应用



(3) 正态分布的分布函数

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 X 分布函数是

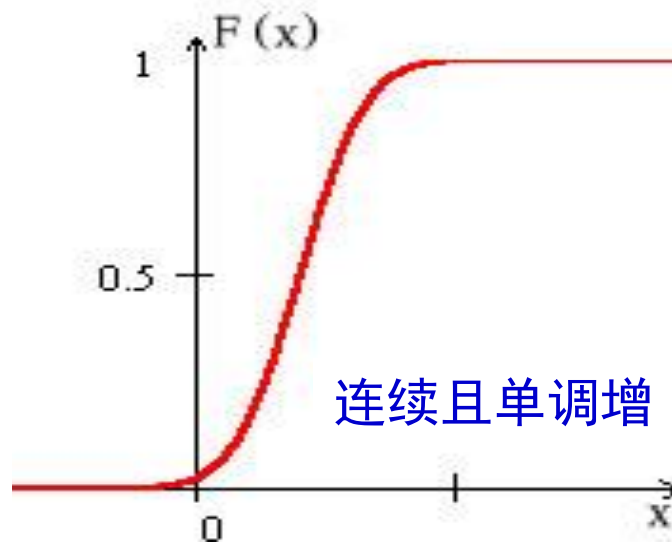
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad -\infty < x < \infty$$
$$\int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt$$

用泰勒公式展开成多项式函数的和，逐项积分

- $f(x)$ 的原函数不是初等函数，所以 $F(x)$ 不能用解析式表达，因此 $F(x)$ 的值只能近似计算。

- 其图形为：



(3) 正态分布的分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

问题： $P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ ✗

$$= F(x_2) - F(x_1) \quad \checkmark$$

解决的办法： 标准正态分布

用标准正态分布的分布函数值计算 $F(x)$



3. 正态分布

- 正态分布的定义
- 正态分布的图形特点
- 正态分布的分布函数
- ➡ 标准正态分布
- 正态分布的应用



(4) 标准正态分布

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

称 $\mu=0, \sigma=1$ 的正态分布为标准正态分布 $N(0,1)$.

其密度函数和分布函数常用 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 表示:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$

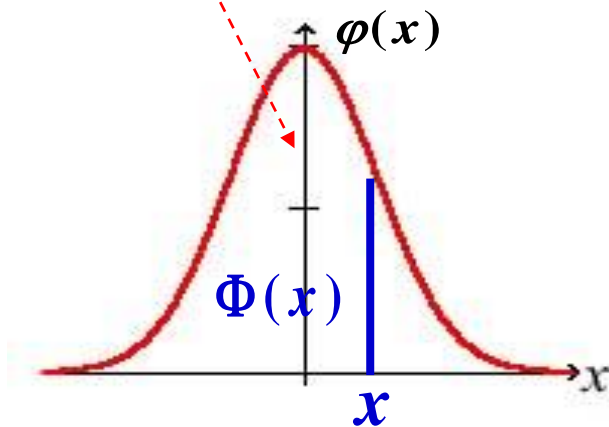
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

泰勒公式展开

逐项(多项式)积分再求和

其图形为:

$$\Phi(0) = 0.5$$



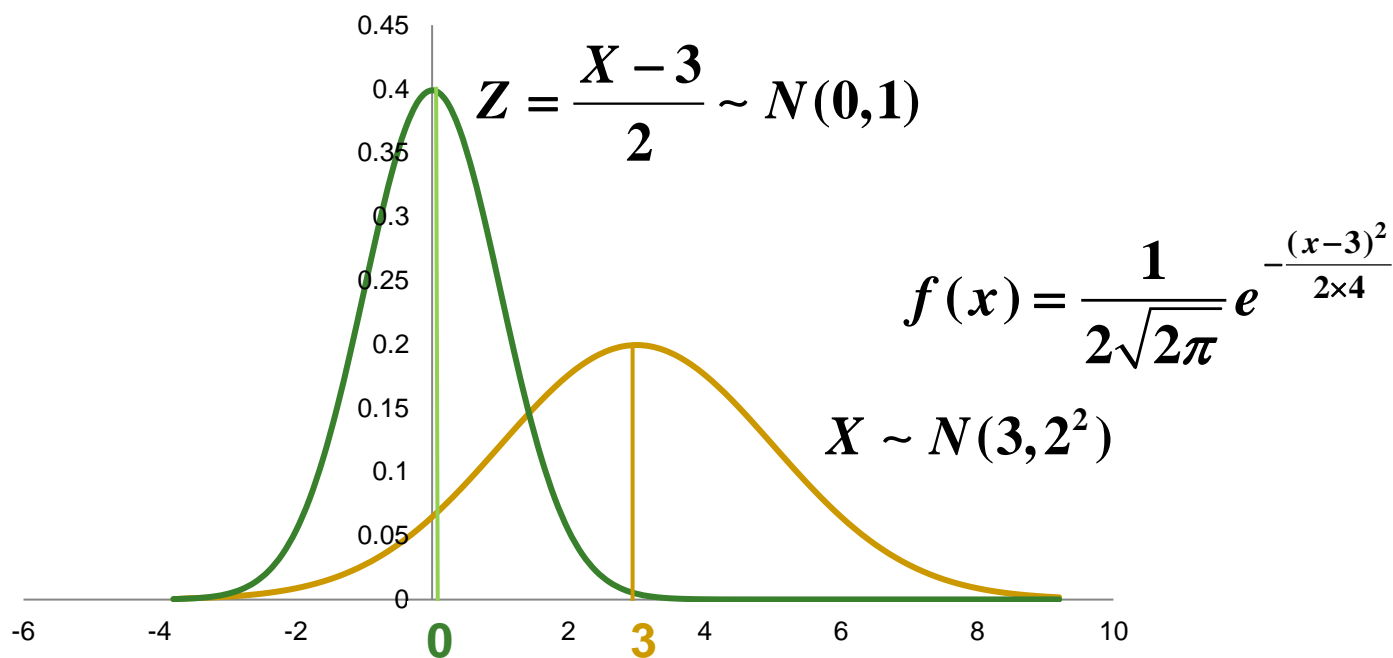
连续且单调增



➤ 标准正态分布的重要性：

任何一个一般的正态分布都可以通过线性变换 $\frac{X-\mu}{\sigma}$ 化为标准正态分布.

引理： 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (证略)



引理: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

➤ 由此可得: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则其分布函数 $F(x)$

$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(\underbrace{Z}_{\sim N(0,1)} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad -\infty < x < \infty$$

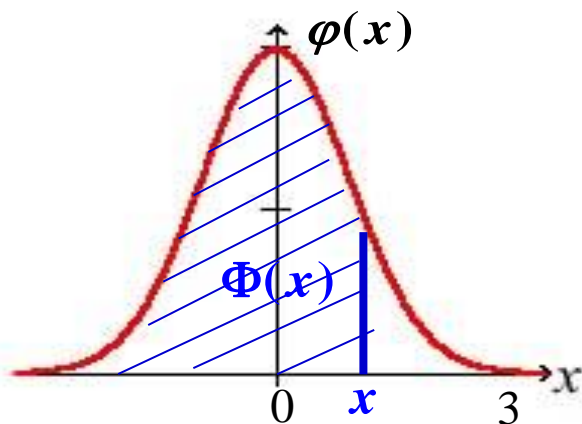
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

根据引理, 只要将标准正态分布的分布函数制成表, 就可以解决一般正态分布的概率计算问题。而现已编制了 $\Phi(x)$ 的表, 可供查用。请见教材P382附表2



➤ 标准正态分布表-附表2 P382

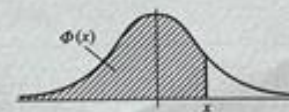
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



$$\Phi(0) = 0.5$$

$$x \geq 0 \quad \Phi(x) \geq 0.5$$

附表2 标准正态分布表

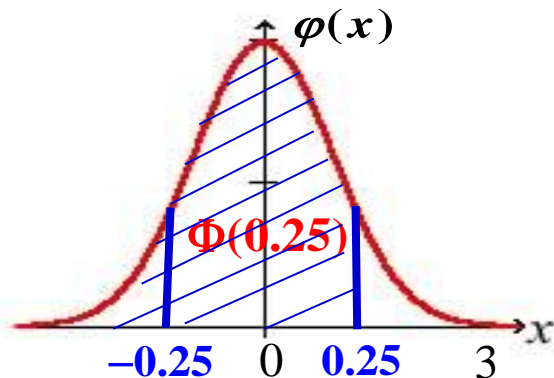


$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

| x | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9065 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9278 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |

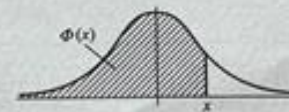


➤ 标准正态分布表-附表2 P382



附表2 标准正态分布表

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$



| x | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |

| x | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 |

$$\Phi(0.25) = 0.5987$$

$$\Phi(-0.25) = ?$$

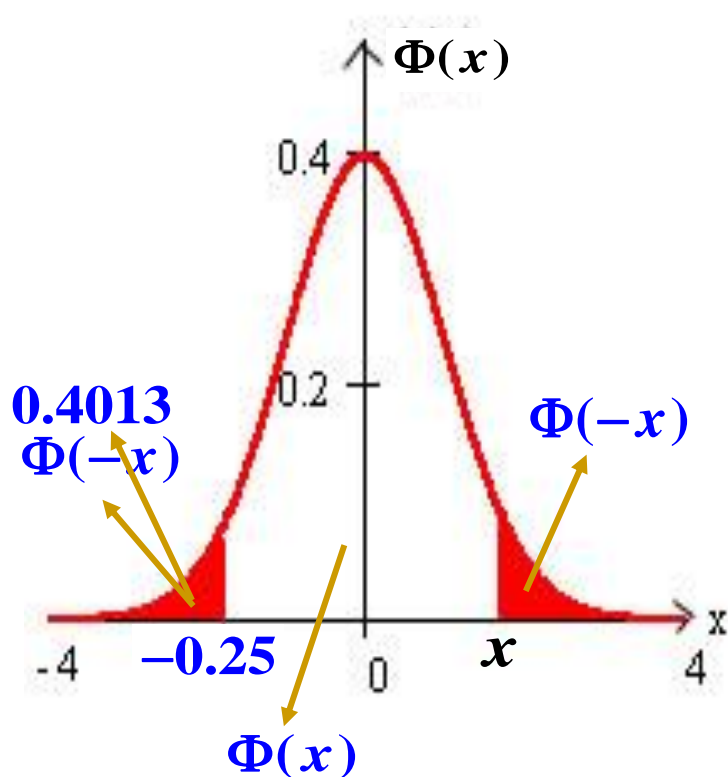
| | | | | | | | | | | |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |



$$X \sim N(0, 1)$$

➤ 关于正态分布表

教材P382附表2为标准正态分布表，借助于附表2，可以查表计算一般正态分布的概率问题。



$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

表中给出的是 $x > 0$ 时, $\Phi(x)$ 的值.

当 $-x < 0$ 时有: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$$\begin{aligned}\Phi(-0.25) &= 1 - \Phi(0.25) \\ &= 1 - 0.5987 = 0.4013\end{aligned}$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$



正态分布概率计算:

$$F(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^b e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

➤ 若 $X \sim N(0,1)$, 则 $P(a < X < b) =$

$$\Phi(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

➤ 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$\text{则有: } P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\begin{aligned} \times F(b) - F(a) &= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Y \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \checkmark \end{aligned}$$

借助于标准正态分布表, 可以查表计算一般正态分布的概率问题。

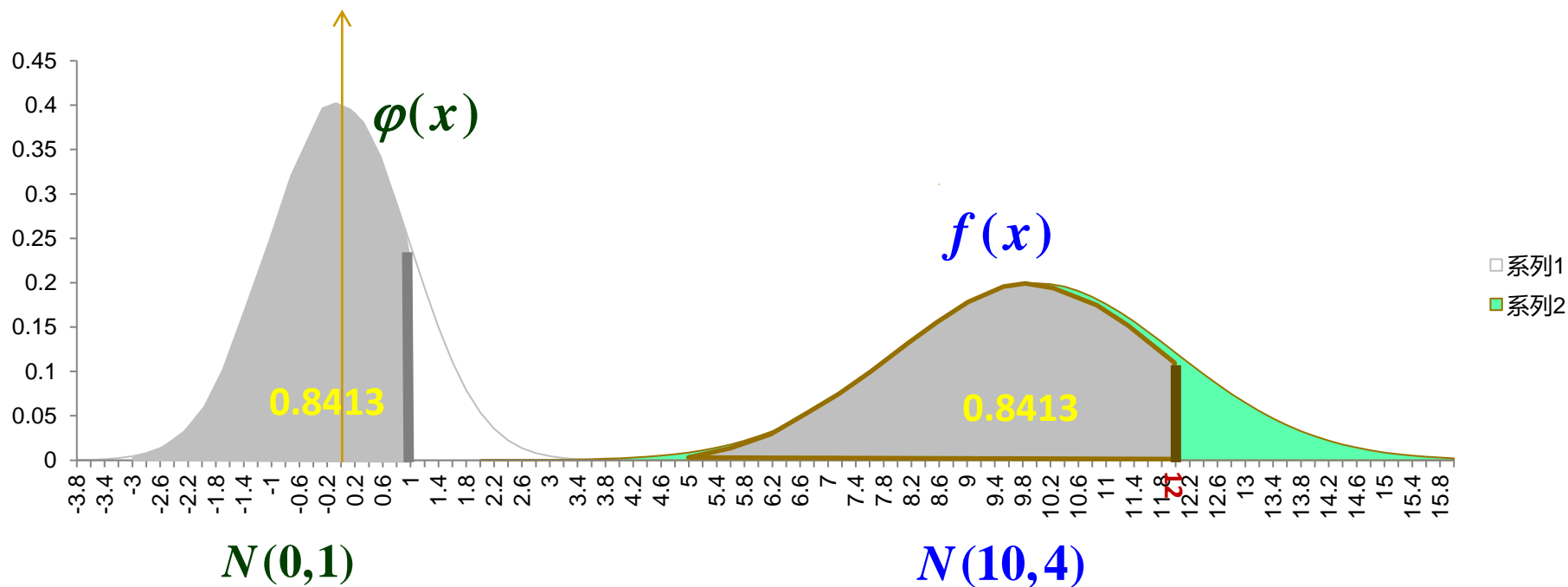


利用线性变换算概率： $X \sim N(10,4)$ $\frac{X-10}{2} \sim N(0,1)$ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$P(X \leq 12) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{12} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= P\left(\frac{X-10}{2} \leq \frac{12-10}{2}\right) = \Phi(1) = 0.8413 \text{查表}$$



例3. 已知自动车床生产的零件的长度 X (毫米)服从正态分布 $N(50, 0.75^2)$, 如果规定零件的长度在 50 ± 1.5 毫米之间为合格品. 求: 生产零件是合格品的概率。

解: $X \sim N(50, 0.75^2)$ $\frac{X - 50}{0.75} \sim N(0, 1)$

所求的概率为:

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$P(|X - 50| < 1.5) = P\left(\left|\frac{X - 50}{0.75}\right| < \frac{1.5}{0.75}\right) = P(-2 < \frac{X - 50}{0.75} < 2)$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2))$$

$$= 2\Phi(2) - 1 = 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544$$

查附表2



例4. 将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器内，调节器调整在 $d^{\circ}\text{C}$ ，液体的温度 X (以 $^{\circ}\text{C}$ 计)是一个随机变量，且 $X \sim N(d, 0.5^2)$

- (1) 若 $d = 90$ ，求 X 小于89的概率；
- (2) 若要求保持液体的温度至少为80的概率不低于0.99，问 d 至少为多少？



例4. 将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器内，调节器调整在 $d^{\circ}\text{C}$ ，液体的温度 X (以 $^{\circ}\text{C}$ 计)是一个随机变量，且 $X \sim N(d, 0.5^2)$

(1) 若 $d = 90$ ，求 X 小于89的概率；

$$\frac{X - 90}{0.5} \sim N(0, 1)$$

$$\text{解: } P(X < 89) = P\left(\frac{X - 90}{0.5} < \frac{89 - 90}{0.5}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{89 - 90}{0.5}\right)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$= \Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$$

$$= 1 - 0.9772 = 0.0228$$



例4. $X \sim N(d, 0.5^2)$

(2) 若要求保持液体的温度至少为80的概率不低于0.99,
问 d 至少为多少?

按题意需求 d 满足:

$$\frac{X - d}{0.5} \sim N(0, 1)$$

$$0.99 \leq P(X \geq 80) = 1 - P(X < 80)$$

$$= 1 - P\left(\frac{X - d}{0.5} \leq \frac{80 - d}{0.5}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{80 - d}{0.5}\right)$$

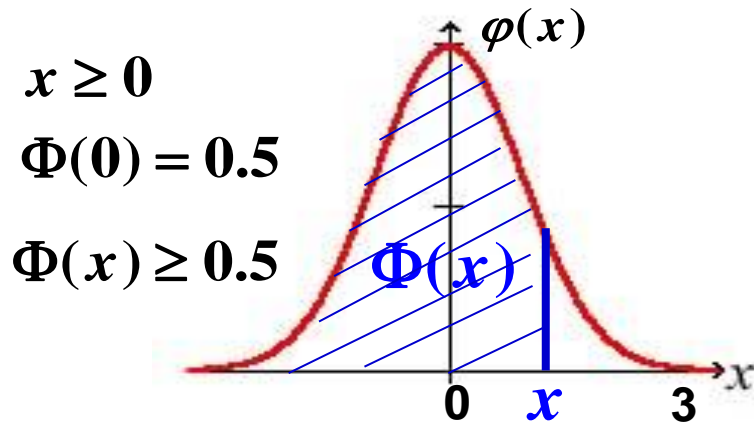
$$\text{即 } \Phi\left(\frac{80 - d}{0.5}\right) \leq 1 - 0.99 = 0.01$$



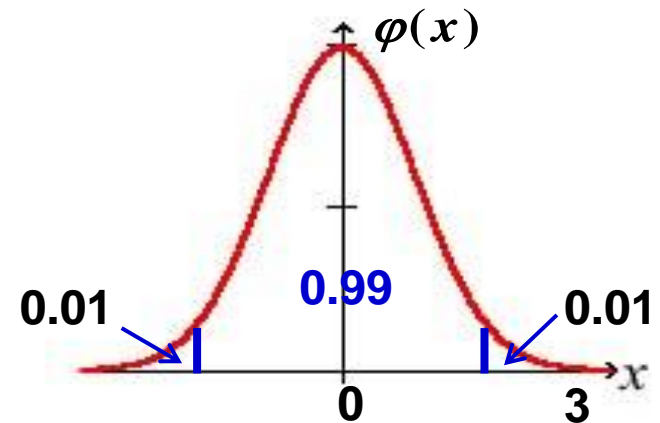
$$0.99 \leq P(X \geq 80) \rightarrow \Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right) \leq 1 - 0.99 = 0.01$$

$0.01 = \Phi(x)$

$$\leq 1 - \Phi(2.33)$$



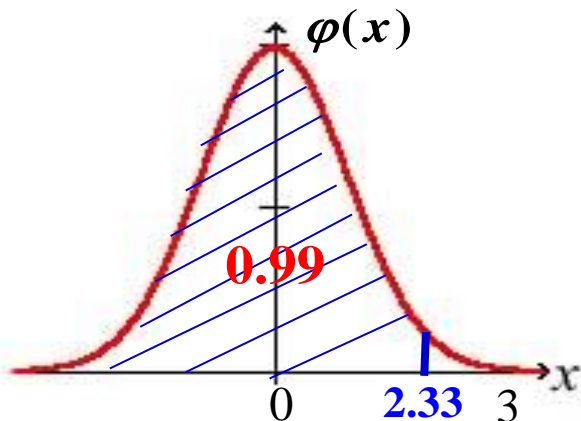
附表2 $x \rightarrow \Phi(x)$



$x \leftarrow \Phi(x) = 0.01$



➤ 标准正态分布表-附表2 P382

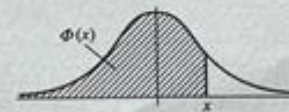


$$2.33 = x \leftarrow \Phi(x) = 0.99$$

$$\Phi(2.33) = 0.99$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$

附表2 标准正态分布表



$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

| x | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9278 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |

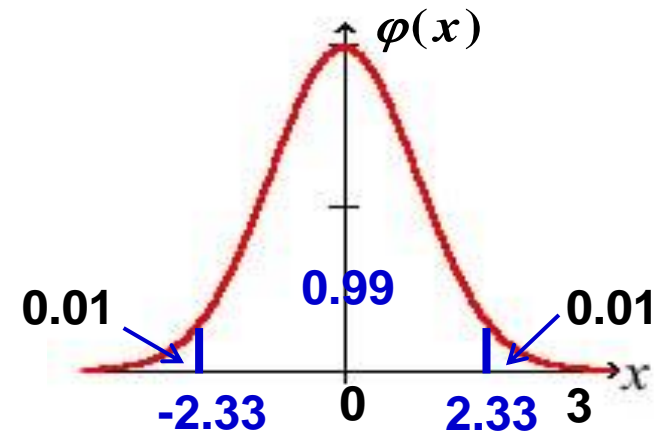
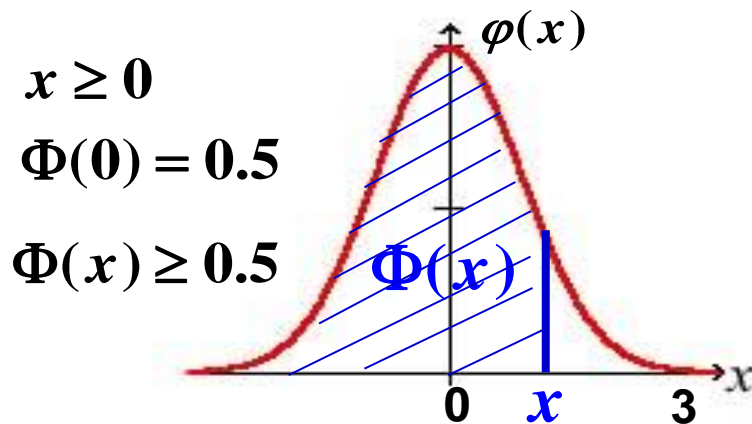


$$0.99 \leq P(X \geq 80) \rightarrow \Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right) \leq 1 - 0.99 = 0.01$$

$0.01 = \Phi(x)$

$$\leq 1 - \Phi(2.33) = \Phi(-2.33)$$

$$\frac{80-d}{0.5} \leq -2.33 \quad \therefore d \geq 80 + 0.5 \times 2.33 = 81.16$$



附表2 $x \rightarrow \Phi(x)$

$$-2.33 = x \leftarrow \Phi(x) = 0.01$$



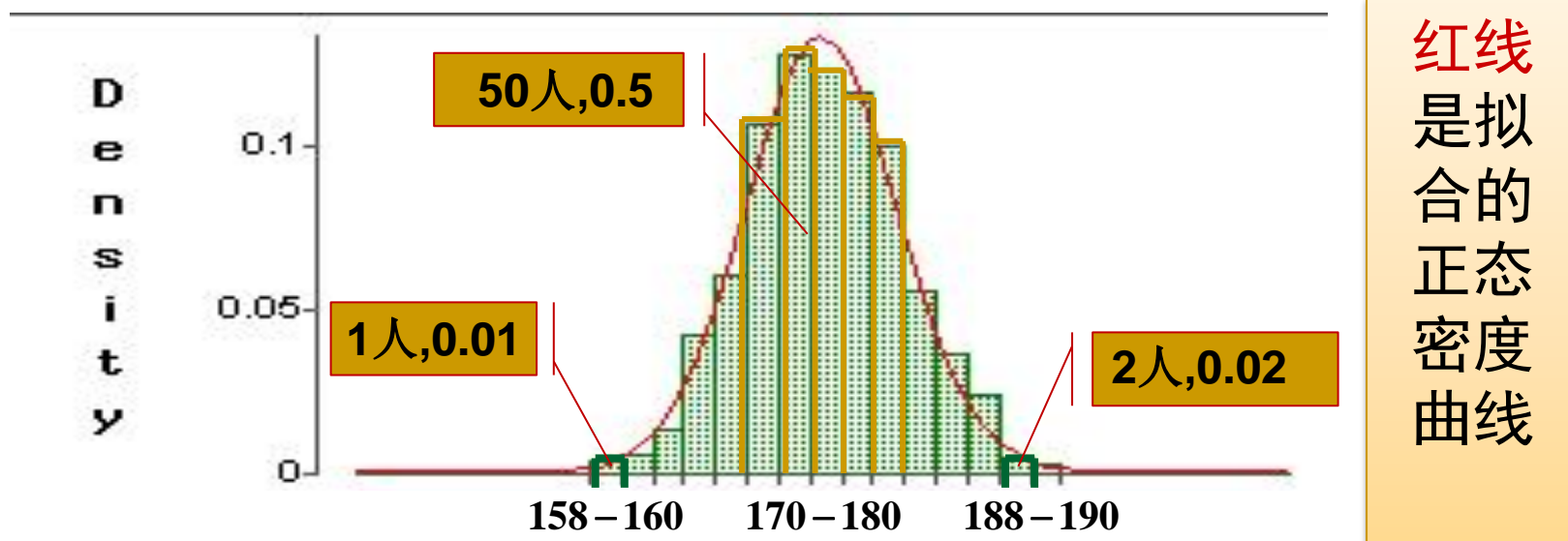
3. 正态分布

- 正态分布的定义
- 正态分布的图形特点
- 正态分布的分布函数
- 标准正态分布
- ➔ 正态分布的应用



(5) 正态分布的应用

下图是用某大学男生身高数据画出的频率直方图:

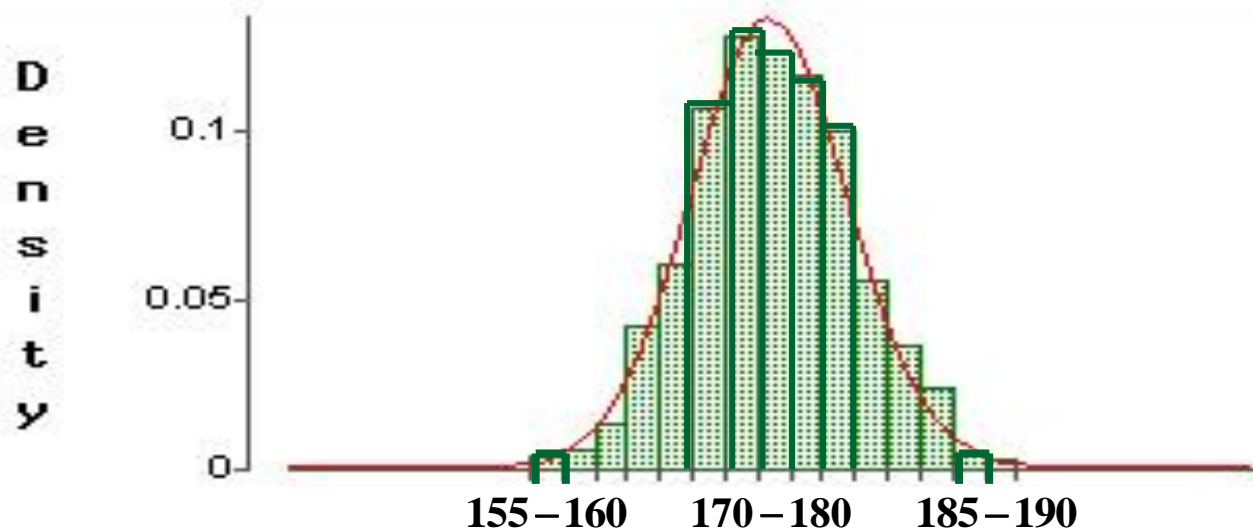


选100人做统计：将158-190cm分为16个单位进行统计，每2cm为一个单位。



(5) 正态分布的应用

下图是用某大学男生身高数据画出的频率直方图:



红线
是拟合的
正态密度
曲线

可见，男生的身高应服从正态分布。

人的身高高低不等，但中等身材的占大多数，特高和特矮的只是少数，而且较高和较矮的人数大致相近，这反映了服从正态分布的随机变量的特点。

2) 用曲线拟合频率直方图，得到概率密度曲线。

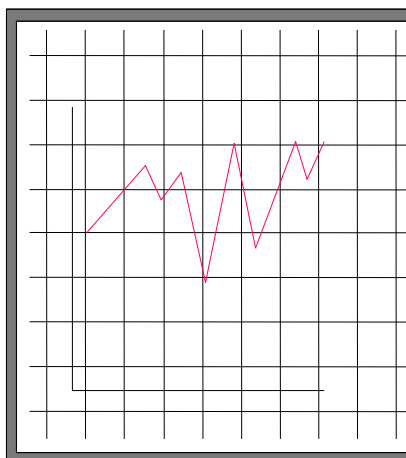
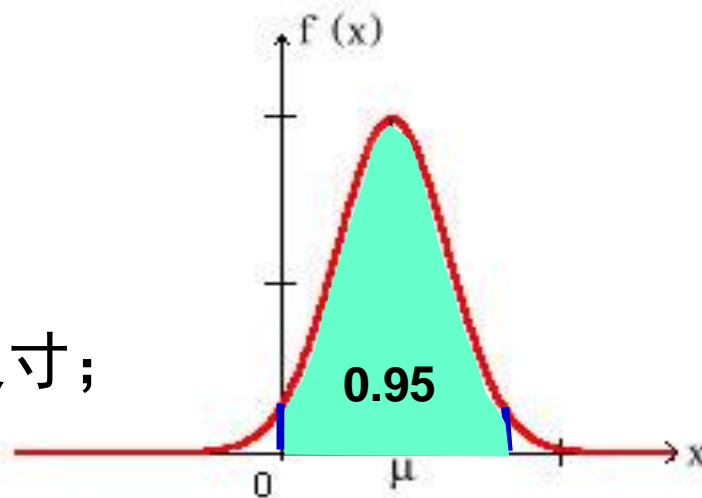


(5) 正态分布的应用

除了身高外，

- 1) 在正常条件下年降雨量；
- 2) 产品的质量指标，如：零件的尺寸；
- 3) 农作物的产量，如小麦的穗长；
- 4) 测量误差，如：射击的水平或垂直偏差；

都服从或近似服从正态分布。



(5) 正态分布的应用 5) 城市用电量;

显然一个城市一天居民用电量是一个随机变量 X , 它是千家万户用电量 X_k 的总和。即



$$X = \sum_{k=1}^n X_k \stackrel[n \text{ 很大}]{\text{近似}} \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Ch5 中心极限定理

分析：每家每户的用电量 X_k 具有以下的特点：

- (1) 相互独立；
- (2) 对城市用电量总和 X 的影响都很小.

算概率：用电负荷至少应该设计多大才能以99%的概率保证居民用电正常。



3. 正态分布

- 正态分布的定义
- 正态分布的图形特点
- 正态分布的分布函数
- 标准正态分布
- 正态分布的应用



第二章 一维随机变量及其分布

第四节 连续型随机变量及其分布

- 连续型随机变量的概率密度
- 几种常见的连续型随机变量的分布
 - ✓ ■ 均匀分布
 - ✓ ■ 指数分布
 - ✓ ■ 正态分布
 - α 分位点 --- Ch6



小结

随机变量

离散型随机变量

连续型随机变量

重要分布

1) (0-1)分布

$$P(X = k) = p^k (1-p)^{1-k} \\ k = 0, 1$$

1) $U(a, b)$ ★

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

2) $B(n, p)$ ★

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ k = 0, 1, \dots, n$$

2) $E(\theta)$ ★

$$f(x) = \begin{cases} 1/\theta e^{-x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

3) $P(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

3) $N(\mu, \sigma^2)$ ★

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$



小结

正态分布

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$N(\mu, \sigma^2)$$

$$N(0, 1)$$

概率密度

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$-\infty < x < \infty$$

分布函数

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$-\infty < x < \infty$$

查表

概率计算

$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$



小结

随机变量

| | 连续型随机变量 | 其它概率分布 |
|------|--|--|
| 重要分布 | <p>1) $U(a, b)$</p> $f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ | <p>4) 瑞利分布 $R(\mu)$</p> <p>5) 贝塔分布 $\beta(p, q)$</p> <p>6) 伽马分布 $\Gamma(\alpha, \beta)$ ✓</p> |
| | <p>2) $E(\theta)$</p> $f(x) = \begin{cases} 1/\theta e^{-x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ | <p>7) χ^2 分布 $\chi^2(n)$ ✓</p> <p>8) t 分布 $t(n)$ ✓</p> <p>9) F 分布 $F(n_1, n_2)$ ✓</p> |
| | <p>3) $N(\mu, \sigma^2)$</p> $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$ | <p>10) 威布尔分布 $W(m, \alpha)$</p> <p>11) 柯西分布 $C(\mu, \alpha)$</p> |



作业

| 授课内容 | 习题二 |
|------------------|-------------------------------|
| 2.2 离散型随机变量及其分布律 | 2(1),3分布律, 6, 7二项分布, 12, 泊松分布 |
| 2.3 随机变量的分布函数 | 17(1)(2), 19 |
| 2.4 连续型随机变量概率密度 | 20,21, 23,概率密度 |
| | 24指数分布, 26,27,29正态分布 |
| 2.5 随机变量函数的分布 | 33离散, 34(1), 35(1)(2)(3)连续 |

