第五章　特征值与特征向量

5.1 特征值与特征向量

5.2 矩阵的相似对角化

5.3 实对称矩阵的相似对角化

复习

1. 特征值与特征向量的概念

A 是 n 阶方阵，λ，$x \neq 0$，$Ax = \lambda x$

2. 特征值与特征向量的计算

求解：$f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$，得到 A 的 n 个特征值.

对每个特征值 λ_i，求解 $(\lambda_i E - A)x = 0$

得到全部的特征向量 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$

3. 特征值与特征向量的性质

(1) 方阵A的属于不同特征值的特征向量 线性无关.

(2) 方阵A的n个特征值：$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$$

(3) 任一特征值 λ_i 的几何重数 $n - r(\lambda_i E - A)$ $\leq$ 它的代数重数.

例2 求出方阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的全部特征值和相应的特征向量.

解 (1) 求A的特征值:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 4 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)[(\lambda+1)(\lambda-3)+4] = (\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+1)$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-1)^2 = 0$$

所以 A 的特征值为: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

定理5.2 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = a_{11}+a_{22}+a_{33} = 4$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 2 = |A|$$

(2) 求特征向量 $\lambda_1 = 2$ 代数重数1

$(\lambda E - A)x = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

解方程组 $(2E - A)x = 0$

$$2E - A = \begin{pmatrix} 2+1 & -1 & 0 \\ 4 & 2-3 & 0 \\ -1 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

行简化阶梯阵

得基础解系: $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$n - r(2E - A) = 3 - 2 = 1$

几何重数1

$\lambda_1 = 2$的全部特征向量: $k\xi_1 (k \neq 0)$ 直线

特征值2的几何重数 = 它的代数重数 = 1

$(\lambda E - A)x = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 求特征向量 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 代数重数2

解方程组 $(E - A)x = 0$

$$E - A = \begin{pmatrix} 1+1 & -1 & 0 \\ 4 & 1-3 & 0 \\ -1 & 0 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行简化阶梯阵

得基础解系: $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$n - r(E - A) = 3 - 2 = 1$

几何重数1

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的全部特征向量 $k\xi_2 (k \neq 0)$

特征值1的几何重数1 < 它的代数重数2 A不能对角化

第五章 特征值与特征向量

5.1 特征值与特征向量

5.2 矩阵的相似对角化

5.3 实对称矩阵的相似对角化

第五章 特征值与特征向量

5.2 矩阵的相似对角化

- 相似矩阵
  - 相似矩阵的定义
  - 相似矩阵的性质
- 矩阵的对角化

1. 相似矩阵

定义5.2 设A, B都是 n 阶方阵，如果存在n 阶可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$，则称矩阵A与B相似，记作 $A\sim B$

相似矩阵的性质

性质1： 相似矩阵有相同的特征值.

$$\boxed{|\lambda E-A|=0}$$

证明： 设A与B相似，则有 $P^{-1}AP=B$

$$f_B(\lambda)=|\lambda E-B|=|P^{-1}(\lambda E)P-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda E-A)P|$$

$$=|P^{-1}||\lambda E-A||P|=|\lambda E-A|=f_A(\lambda)$$

所以 A 与 B 有相同的特征值.

注： 相似矩阵亦有相同的行列式，迹.

定理5.2 $\rightarrow$ $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$， $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n=|A|$

性质2

若n阶方阵A与对角阵$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$相似,

则$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的$n$个特征值.

证明:

$$|\lambda E-\Lambda|=\begin{vmatrix}\lambda-\lambda_1 & & & \\ & \lambda-\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda-\lambda_n\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=0$$

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是对角阵的$n$个特征值.

因此$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的$n$个特征值.

例1 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似，

对角阵

求 x, y

解 因为 A 与 B 相似，故 A 与 B 有相同的特征值 $2, y, -1$

根据特征值的性质，有

$$2+0+x=2+y+(-1), \quad |A|=-2y$$

而 $|A|=-2$，故 $x=0, y=1$

1. 相似矩阵

定义5.2 设A, B都是 n 阶方阵，如果存在n 阶可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP = B$，则称矩阵A与B相似，记作 $A \sim B$

问题： 如何求B？

（05,13分）

基

设A 为3阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维列向量，且满足

$$\underline{A\alpha_1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \underline{A\alpha_2} = 2\alpha_2 + \alpha_3, \underline{A\alpha_3} = 2\alpha_2 + 3\alpha_3,$$

(1) 求矩阵B，使得 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$；

(2) 求矩阵A的特征值.

（05,13分）

基

设A 为3阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维列向量，且满足

$$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3,$$

(1) 求矩阵B，使得 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$；

解：

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)$$

P 可逆

$$=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ 2\alpha_2+\alpha_3,\ 2\alpha_2+3\alpha_3)$$

$$=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$$ 坐标矩阵

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B\Rightarrow AP=PB\Rightarrow\boxed{P^{-1}AP=B}$$ A与B相似.

1. 相似矩阵

定义5.2 设A, B都是 n 阶方阵，如果存在n 阶可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$，则称矩阵A与B相似，记作 $A\sim B$

问题： 如何求B ？

$$P^{-1}AP=B \Rightarrow AP=PB$$

线性无关

$$\Rightarrow A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$$

$$\Rightarrow (A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$$

$$\Rightarrow (A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$$

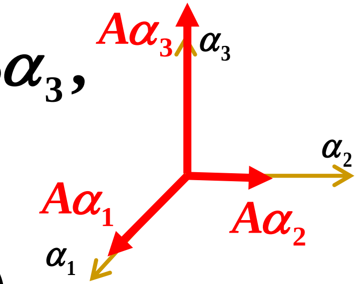
B ---坐标矩阵

（05,13分）

特征向量 $Ax=\lambda x$

设A 为3阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维列向量，且满足

$$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3,$$



(1) 求矩阵B，使得 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$；

解：

$$A\underset{P}{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=\underset{P}{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$$ B ---坐标矩阵

$$=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\lambda_3\alpha_3)=\underset{P}{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$$ Λ ---对角阵

$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B\Rightarrow AP=PB\Rightarrow \boxed{P^{-1}AP=B}$ A与B相似

$AP=P\Lambda\ \Rightarrow P^{-1}AP=\Lambda$ A可以相似对角化

$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是A的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$A$的三个线性无关的特征向量.

（05,13分）

设A 为3阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维列向量，且满足

$$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3,$$

(2) 求矩阵A的特征值；

$$(1)\Rightarrow P^{-1}AP=B \quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$$

解：A与B相似

故A与B有相同的特征值．下面只需求B的特征值：

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&-2\\-1&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)[(\lambda-2)(\lambda-3)-2]=(\lambda-1)[\lambda^2-5\lambda+4]$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0 \qquad \lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4$$

A与B有相同的特征值1，1，4. 验算：$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=6$

第五章 特征值与特征向量

5.2 矩阵的相似对角化

- 相似矩阵
- 矩阵的对角化
  - 矩阵对角化的作用
  - 矩阵对角化的条件
  - 矩阵对角化的步骤

2. 矩阵的对角化

定义5.3 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似，即存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.

第五章 特征值与特征向量

5.2 矩阵的相似对角化

- 相似矩阵
- 矩阵的对角化
  - 矩阵对角化的作用
  - 矩阵对角化的条件
  - 矩阵对角化的步骤

1) 矩阵对角化的作用

若方阵A可以对角化, 即存在可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\quad 则\ A^k=P\Lambda^k P^{-1}=P\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k\end{pmatrix}P^{-1}$$

证明：

$$P^{-1}AP=\Lambda\Rightarrow PP^{-1}APP^{-1}=P\Lambda P^{-1}\Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}$$

$$A^k=(P\Lambda P^{-1})^k=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})$$

$$=P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda((P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}\cdots P)\Lambda P^{-1})$$

$$=P\Lambda^k P^{-1}=P\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k\end{pmatrix}P^{-1}$$

第五章 特征值与特征向量

5.2 矩阵的相似对角化

- 相似矩阵
- 矩阵的对角化
  - 矩阵对角化的作用
  - 矩阵对角化的条件
  - 矩阵对角化的步骤

2) 矩阵对角化的条件

定理5.4 A可以对角化 $\Leftrightarrow$ 每一特征值的几何重数 $=$ 代数重数

推论5.1 A不能对角化 $\Leftrightarrow$ 某个特征值的几何重数 $<$ 代数重数

第五章 特征值与特征向量

5.2 矩阵的相似对角化

- 相似矩阵
- 矩阵的对角化
  - 矩阵对角化的作用
  - 矩阵对角化的条件
  - 矩阵对角化的步骤

3) 矩阵对角化的步骤： $P^{-1}AP=\Lambda$

例2 $A=\begin{pmatrix}5 & -6 & -6\\ -1 & 4 & 2\\ 3 & -6 & -4\end{pmatrix}$ 计算 A^n

解： (1) 求A的特征值 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 6 & 6\\ 1 & \lambda-4 & -2\\ -3 & 6 & \lambda+4\end{vmatrix}$

$$\overset{c_2-c_3}{=}\begin{vmatrix}\lambda-5 & 0 & 6\\ 1 & \lambda-2 & -2\\ -3 & \underset{-(\lambda-2)}{2-\lambda} & \lambda+4\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-5 & 0 & 6\\ 1 & 1 & -2\\ -3 & -1 & \lambda+4\end{vmatrix}\overset{r_3+r_2}{=}(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-5 & 0 & 6\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-5 & 6\\ -2 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\underbrace{(\lambda-5)(\lambda+2)+12}_{(\lambda-2)(\lambda-1)})$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda-5\lambda-10+12)=(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+2)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

A的三个特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=1$ 验算: $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=5$

例2 $A=\begin{pmatrix}5&-6&-6\\-1&4&2\\3&-6&-4\end{pmatrix}$ 计算 A^n

$P^{-1}AP=\Lambda$

$(\lambda E-A)x=0$

解: (1) A的三个特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=1$

(2) 求A的特征向量 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ (2E-A)x=0$

代数重数 $=2$

$$2E-A=\begin{pmatrix}2-5&6&6\\1&2-4&-2\\-3&6&2+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&6&6\\1&-2&-2\\-3&6&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-3&6&6\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{array}{ccc}x_1&x_2&x_3\\ \hline \end{array}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\quad \xi_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

线性无关

$n-r(2E-A)=3-1=2$

几何重数 $=2$

特征值2的几何重数 $=$ 代数重数 $=2$

例2 $A=\begin{pmatrix}5&-6&-6\\-1&4&2\\3&-6&-4\end{pmatrix}$ 计算 A^n $\quad(\lambda E-A)x=0$

$P^{-1}AP=\Lambda$

解： (1) A的三个特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=1$

(2) 求A的特征向量 $\lambda_3=1,\ (E-A)x=0$ 几何重数$\leq$代数重数

代数重数 = 1

$$E-A=\begin{pmatrix}1-5&6&6\\1&1-4&-2\\-3&6&1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&6&6\\1&-3&-2\\-3&6&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&-2\\-4&6&6\\-3&6&5\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1&x_2&x_3\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1/3\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

几何重数 = 1

$n-r(E-A)=3-2=1$

得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\-1/3\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$$

特征值1的几何重数 = 代数重数 = 1

例2 $A=\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ 计算 A^n

解: (1) A的三个特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=1$

(2) 求A的特征向量

$\lambda_1=\lambda_2=2,$　　　　$\lambda_3=1,$　几何重数=代数重数

$\xi_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\xi_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　　$\xi_3=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$　$|\xi_1,\xi_2,\xi_3|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}\neq 0$

定理5.1 A的属于不同特征值的特征向量 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关

定理5.4 A每个特征值几何重数 = 代数重数，能化成对角阵.

定理5.5 3阶方阵A有3个线性无关的特征向量，能化成对角阵.

(1) 特征值： $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=1$

$$Ax=\lambda x$$
$$A\xi_1=2\xi_1$$
$$A\xi_2=2\xi_2$$
$$A\xi_3=1\xi_3$$

(2) 特征向量： $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\quad \xi_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\quad \xi_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$ 线性无关

(3) 求可逆矩阵P，将A化成对角阵 $P^{-1}AP=\Lambda$

$$令P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&0&-1\\0&1&3\end{pmatrix}是\boxed{可逆矩阵}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \xi_3,\xi_2 & & A\xi_3,A\xi_2 & & 1\xi_3,2\xi_2\\ AP & = & A(\xi_1,\xi_2,\xi_3) & = & (A\xi_1,A\xi_2,A\xi_3) & = & (2\xi_1,2\xi_2,1\xi_3)\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\xi_3,\xi_2\\ =(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\end{array}\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$$

定理5.5 3阶方阵A有3个线性无关的特征向量，能化成对角阵.

3) 矩阵对角化的步骤: $P^{-1}AP=\Lambda$

例2 $A=\begin{pmatrix}5 & -6 & -6\\ -1 & 4 & 2\\ 3 & -6 & -4\end{pmatrix}$

(1) 求特征值: $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=1$

(2) 求特征向量: $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ $\xi_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$ 线性无关

(3) 求可逆矩阵P，将A化成对角阵 $P^{-1}AP=\Lambda$

令$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$是可逆矩阵 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$

$$P=\begin{pmatrix}2&2&3\\0&1&-1\\1&0&3\end{pmatrix}$$

(4) 求 A^n $|A^n|$

$$PP^{-1}APP^{-1}=P\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}\Rightarrow A=P\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$A^n=\left(P\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}\right)^n=P\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}^nP^{-1}=P\begin{pmatrix}2^n&&\\&2^n&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}2&2&3\\0&1&-1\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&&\\&2^n&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-6&-5\\-1&3&2\\-1&2&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^{n+2}-3&-3\cdot 2^{n+1}+6&-3\cdot 2^{n+1}+6\\-2^n+1&3\cdot 2^n-2&2^{n+1}-2\\3\cdot 2^n-3&-6\cdot 2^n+6&-5\cdot 2^n+6\end{pmatrix}$$

$$|A^n|=|A\cdot A\cdots A|$$

$$=|A|^n=4^n$$

$$\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=1$$

$(\lambda E - A)x = 0$

例3 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，讨论方阵 A 是否能对角化． $P^{-1}AP \overset{?}{=} \Lambda$

方阵 A 不能对角化

解 (1) 求A的特征值 $|\lambda E - A| = (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

(2) 求A的特征向量

当 $\lambda_1 = 2$ 时， $(2E - A)x = 0$

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$时， $(E - A)x = 0$

代数重数 = 2

$\lambda_1 = 2$ $\quad \xi_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad n - r(2E - A) = 3 - 2 = 1$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ $\quad \xi_2 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\quad n - r(E - A) = 3 - 2 = 1$ 几何重数

$\boxed{\xi_3 = k\xi_2}$

结论: 特征值1的几何重数1 < 代数重数2 $\quad P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 不可逆

$$AP = A(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$$
$$= (A\xi_1, A\xi_2, A\xi_3)$$
$$= (2\xi_1, 1\xi_2, 1\xi_3) = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)\underbrace{\begin{pmatrix}2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}}_{\Lambda} = P\Lambda$$

$A\xi_1 = 2\xi_1$

$A\xi_2 = 1\xi_2$

$A\xi_3 = 1\xi_3$

$AP = P\Lambda \not\Rightarrow P^{-1}AP = \Lambda$

A不能对角化 $\Leftarrow$ A没有3个线性无关的特征向量

某个特征值的几何重数 < 代数重数

2) 矩阵对角化的条件

定理5.4 A可以对角化 $\Leftrightarrow$ 每一特征值的几何重数 = 代数重数

推论5.1 A不能对角化 $\Leftrightarrow$ 某个特征值的几何重数 < 代数重数

定理5.5 n阶方阵A可以对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量

推论5.2 n阶方阵A有n个不同的特征值 $\Rightarrow$ A可以对角化

例4 求方阵A的特征值及特征向量 $A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 6\\ 0 & 2 & 0\\ -3 & -12 & -6\end{pmatrix}$

解:

(1) A的三个特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\ \lambda_3=-3$ $\qquad (\lambda E-A)x=0$

(2) 求A的特征向量

$\lambda_1=0,\ Ax=0$ 基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ $\qquad P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$

$\lambda_2=2,\ (2E-A)x=0$ 基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}4\\ -5/3\\ 1\end{pmatrix}$ $\qquad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$

$\lambda_1=-3,\ (-3E-A)x=0$ 基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

定理5.1 方阵A的属于不同特征值的特征向量 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关

推论5.2 n阶方阵A有n个不同的特征值 $\Longrightarrow$ A可以对角化

第五章 特征值与特征向量

5.2 矩阵的相似对角化

- 相似矩阵
- 矩阵的对角化
  - ✓ 矩阵对角化的作用
  - ✓ 矩阵对角化的条件
  - ✓ 矩阵对角化的步骤

小结

1. 相似矩阵 若 $P^{-1}AP = B$，则 $A \sim B$

性质

(1) 相似矩阵有相同的特征值、行列式、迹.

(2) 若n阶方阵A与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是A的n个特征值

2. 矩阵的对角化 若 $P^{-1}AP = \Lambda$，则A可以对角化.

矩阵对角化的条件

n阶方阵A 可以对角化 $\Longleftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量

$\Longleftrightarrow$ 每个特征值的几何重数=代数重数

n阶方阵A有n个不同的特征值 $\Longrightarrow$ A可对角化

第五章　特征值与特征向量

5.1 特征值与特征向量

5.2 矩阵的相似对角化

5.3 实对称矩阵的相似对角化

第五章 特征值与特征向量

5.3 实对称矩阵的相似对角化

- 实对称矩阵的性质
- 实对称矩阵的对角化

1. 实对称矩阵的性质

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 定理5.6 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量必正交.

定理5.1 方阵A属于不同特征值的特征向量线性无关.

(2) 定理5.7 实对称矩阵每一特征值的几何重数 = 代数重数.

定理5.4 A可以对角化$\Leftrightarrow$每一特征值的几何重数 = 代数重数

(3) 定理5.8 设A为实对称矩阵，则必有正交矩阵Q，

$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$可逆矩阵

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -5 \end{pmatrix}$$

$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$正交矩阵

使 $Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的 n 个特征值.

实对称矩阵一定正交相似于一个对角阵

第五章 特征值与特征向量

5.3 实对称矩阵的相似对角化

- 实对称矩阵的性质
- 实对称矩阵的对角化

2. 实对称矩阵的对角化

例4 $A=\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\-2&-1&-2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$，求正交矩阵$Q$ 使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$

实对称阵

解：**(1)** 求A的特征值

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&2&2\\2&\lambda+1&2\\2&2&\lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+5&\lambda+5&\lambda+5\\2&\lambda+1&2\\2&2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+5)\begin{vmatrix}1&1&1\\2&\lambda+1&2\\2&2&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+5)\begin{vmatrix}1&0&1\\2&\lambda-1&2\\2&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+5)(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&1\\2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+5)(\lambda-1)^2$$

得特征值: $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-5.$ **验证：** $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-3$ √

$$A=\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\-2&-1&-2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$$

$(\lambda E-A)x=0$

(2) 求 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量 $Q^{-1}AQ=\Lambda$

代数重数 = 2

求 $(E-A)x=0$ 的基础解系:

$$E-A=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{array}{ccc}x_1&x_2&x_3\\ \end{array}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

几何重数 = 2

$n-r(E-A)=3-1=2$

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

定理5.7 实对称矩阵每一特征值的几何重数 = 代数重数.

(2) 求 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量 $Q^{-1}AQ=\Lambda$

$$A=\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\-2&-1&-2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$$

$(\lambda E-A)x=0$

求 $(E-A)x=0$ 的基础解系:

$$E-A=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_1&x_2&x_3\end{array}\\\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\xi_1^T\xi_2=1\neq 0$

正交化: $\eta_1=\xi_1,\ \eta_2=\xi_2-\dfrac{(\xi_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}=\boxed{}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

单位化: $p_1=\dfrac{\eta_1}{\|\eta_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\qquad p_2=\dfrac{\eta_2}{\|\eta_2\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

$Ap_1=1\cdot p_1$

$Ap_2=1\cdot p_2$

$$A=\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\-2&-1&-2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$$

(2) 求 $\lambda_3=-5$ 的特征向量

$(\lambda E-A)x=0$

求 $-(5E+A)x=0$ 的基础解系:

$$5E+A=\begin{pmatrix}5-1&-2&-2\\-2&5-1&-2\\-2&-2&5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_1&x_2&x_3\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$n-r(5E+A)=3-2=1$

$$Ap_3=-5p_3$$

得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}p_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_1=\lambda_2=1$

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\xi_1^T\xi_3=0,\quad \xi_2^T\xi_3=0$

定理5.6 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量必正交.

(1) 求特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\quad \lambda_3=-5.$

(2) 求特征向量 $p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, p_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},\quad p_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 正交

(3) 求正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$

$$Q=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$ 使得 $$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -5\end{pmatrix}$$

正交矩阵

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -5$

$p_1 \quad p_2 \qquad p_3$

$$Ap_1 = 1p_1$$
$$Ap_2 = 1p_2$$
$$Ap_3 = -5p_3$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -5 \end{pmatrix}$$

(3) 求正交矩阵Q 使得 $Q^{-1}AQ = \Lambda$

$$AQ = A(p_1, p_2, p_3) = (Ap_1, Ap_2, Ap_3) = (1p_1, 1p_2, -5p_3)$$

$$= \underbrace{(p_1, p_2, p_3)}_{Q}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -5 \end{pmatrix}$$

小结

1. 实对称矩阵的性质

- 属于不同特征值的特征向量正交；
- 特征值的几何重数=代数重数;
- 必存在正交矩阵，将其化为对角矩阵，

2. 实对称矩阵对角化的步骤:

定理5.8 实对称矩阵A一定正交相似于一个对角阵. $Q^{-1}AQ=\Lambda$

步骤： 以例4为例　代数重数：2，1

（1） 求A的特征值: $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-5.$

（2） 求 $(\lambda_i E-A)x=0$ 基础解系：（3）

$\lambda_1=\lambda_2=1$　$\xi_1,\xi_2 \xrightarrow{\text{正交单位化}} p_1, p_2$

$\lambda_3=-5$　$\xi_3 \xrightarrow{\text{单位化}} p_3$

（4）求正交矩阵: $Q=(p_1, p_2, p_3)$

使得 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -5 \end{pmatrix}$

第五章 特征值与特征向量

5.3 实对称矩阵的相似对角化

- 实对称矩阵的性质
- 实对称矩阵的对角化

第五章　特征值与特征向量

5.1 特征值与特征向量

5.2 矩阵的相似对角化

5.3 实对称矩阵的相似对角化

作 业　习题五

授课内容	习题五
5.1特征值与特征向量	1(2)(4)(6), 3 ,7,9特征值与特征向量，2 迹
5.2 矩阵的相似对角化	18(3)(4)(5)，20, 25对角化
5.3 实对称矩阵的相似对角化	29(2)(4)

（04,9分）

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{pmatrix}$的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 A 是否可以相似对角化。

解：

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -\lambda+2 & 0\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda-3 & 3\\ -1 & -a-1 & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)[(\lambda-3)(\lambda-5)+3(a+1)]=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a)$$

（04,9分）

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 A 是否可以相似对角化。

A可对角化 $\Longleftrightarrow$ 每个特征值的几何重数=代数重数

解：$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+\underline{18+3a})=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$

$12\Rightarrow a=-2$

$$\begin{matrix}1 & & -2\\ & \times & \\ 1 & & -6\end{matrix}$$

(1) 特征方程有二重根2，

A的特征值为 2，2，6，求$(\lambda E-A)x=0$的基础解系：

$$2E-A=\begin{pmatrix}2-1&-2&3\\1&2-4&3\\-1&2&2-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

几何重数 = 基础解系中向量个数 = $n-r(2E-A)=3-1=2$

特征值2的几何重数=代数重数=2，所以A能对角化.

（04,9分）

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{pmatrix}$的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 A 是否可以相似对角化。

A可对角化 $\Leftrightarrow$ 每个特征值的几何重数=代数重数

解：$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+\underline{18+3a})=(\lambda-2)(\lambda-4)^2$

$16\Rightarrow a=-2/3$

$\begin{matrix}1 & -4\\ 1 & -4\end{matrix}$

(2) 特征方程有二重根4，

A的特征值为 2，4，4，求$(\lambda E-A)x=0$的基础解系：

$$4E-A=\begin{pmatrix}4-1 & -2 & 3\\ 1 & 4-4 & 3\\ -1 & 2/3 & 4-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & 2/3 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

几何重数 = 基础解系中向量个数 = $n-r(4E-A)=3-2=1$

特征值4的几何重数$1<$代数重数2，所以A不能对角化.

（97,6分）

已知 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 求参数a, b及特征向量 ξ 所对应的特征值;

(2) 问矩阵A能否相似于对角阵，请说明理由.

（97,6分）

已知 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 求参数a, b及特征向量 ξ 所对应的特征值;

解:

设ξ对应的特征值为λ_0，由定义有 $A\xi=\lambda_0\xi$，即

$$A\xi=\lambda_0\xi\Rightarrow\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda_0\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2-1-2&=\lambda_0\\5+a-3&=\lambda_0\\-1+b+2&=-\lambda_0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda_0&=-1\\a&=-3\\b&=0\end{cases}$$

（97,6分）

已知 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量. $\begin{cases}\lambda_0=-1\\a=-3\\b=0\end{cases}$

(2) 问矩阵A能否相似于对角阵，请说明理由.

解：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}\overset{c_3-c_1}{=}\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-\lambda\\-5&\lambda+3&2\\1&0&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_3-c_2}{=}\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-\lambda-1\\-5&\lambda+3&-\lambda-1\\1&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-1\\-5&\lambda+3&-1\\1&0&1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-1&1&0\\-4&\lambda+3&0\\1&0&1\end{vmatrix}=(\lambda+1)[(\lambda-1)(\lambda+3)+4]$$

$$=(\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda+1)=(\lambda+1)^3$$

（97,6分）

已知 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量. $\begin{cases}\lambda_0=-1\\a=-3\\b=0\end{cases}$

(2) 问矩阵A能否相似于对角阵，请说明理由.

解：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda+1)=(\lambda+1)^3$$

特征值：$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$ 代数重数=3

验算：$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-3$

（97,6分）

已知 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量. $\begin{cases}\lambda_0&=-1\\a&=-3\\b&=0\end{cases}$

(2) 问矩阵A能否相似于对角阵，请说明理由.

解：A可对角化 $\Longleftrightarrow$ 每个特征值的几何重数=代数重数

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$ 求$(\lambda E-A)x=0$的基础解系：

$$-E-A=\begin{pmatrix}-1-2&1&-2\\-5&-1+3&-3\\1&0&-1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

几何重数=基础解系中向量个数$=n-r(-E-A)=3-2=1$

特征值-1的几何重数1 $<$ 代数重数3，所以A不能对角化.