§7.2 二元关系

定义 满足下列条件之一的集合R称为**二元关系**（简称**关系**）：

（1）R是空集；

（2）R由有序对构成。

若$<x, y> \in R$，称x到y有关系R，记为xRy。若x到y没有关系R，则$<x, y> \notin R$，记为$x\not{R}y$。

定义 设A与B是两个集合，由$A \times B$的子集定义的二元关系称为**A到B的二元关系**；当$A=B$时，称之为**A上的二元关系**。

例 设$A=\{0,1\}$，则$R_1=\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,1\rangle\}$，$R_2=\varnothing$，$R_3=A\times A$都是$A$上的二元关系。

例 设A是n元集，则A上有 2^{n^2}个二元关系。

例 设A是集合，称$\varnothing$为A上的空关系，$E_A=A\times A$为A上的全域关系，$I_A=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\}$ 为A上的恒等关系，

例 设$A\subseteq\mathbb{R}$，称

$$L_A=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x\le y\}$$

为A上的小于等于关系。

例 设$A\subseteq\mathbb{Z}^*$，称

$$D_A=\{<x, y>\mid x, y\in A\wedge x\mid y\}$$

为A上的**整除关系**。

例 设B是集合，$S\subseteq P(B)$，称

$$R_{\subseteq}=\{<x, y>\mid x, y\in S\wedge x\subseteq y\}$$

为S上的**包含关系**。

例 设$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{a,b\}$，则A上的小于等于关系为

$$L_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$$

A上的整除关系为

$$D_A = \{ <1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3> \}$$

P(B)上的包含关系为

$$R_{\subseteq} = \{<\varnothing, \varnothing>, <\varnothing, \{a\}>, <\varnothing, \{b\}>,$$
$$<\varnothing, \{a,b\}>, <\{a\}, \{a\}>, <\{a\}, \{a,b\}>,$$
$$<\{b\}, \{b\}>, <\{b\}, \{a,b\}>, <\{a,b\}, \{a,b\}>\}$$

例 设A={1,2,3,4}，则

$$R_1 = \{<x, y> \mid x, y \in A \wedge y \mid x\}$$
$$= \{<1,1>,<2,1>,<3,1>,<4,1>,$$
$$<2,2>,<4,2>, <3,3>,<4,4>\}$$

$$R_2 = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge (x-y)^2 \in A\}$$

$$= \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 2,3\rangle,$$

$$\langle 3,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,3\rangle\}$$

$$R_3 = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge (x \div y = \text{素数})\}$$

$$= \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,2\rangle\}$$

$$R_4 = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x \neq y\}$$

$$= \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 1,4\rangle,$$

$$\langle 4,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,2\rangle,$$

$$\langle 3,4\rangle, \langle 4,3\rangle\}$$

二元关系的表示：

1. 集合表示法

$$R=\{<x,y>\mid x,y\text{具有的关系属性}\}$$

2. 关系矩阵

设$A=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$R$是$A$上的一个二元关系。令

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & <x_i,x_j>\in R \\ 0, & <x_i,x_j>\notin R\end{cases} \qquad i,j=1,2,\cdots,n$$

则称n阶方阵$M_R=[r_{ij}]_{n\times n}$为R的**关系矩阵**。

例 设$A=\{1,2,3,4\}$，构造A上的二元关系

$$R=\{<x,y>\mid x,y\in A\wedge(x-y)^2\in A\}$$

$$=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>,<3,1>,<2,3>,$$
$$<3,2>,<2,4>,<4,2>,<3,4>,<4,3>\}$$

则R的关系矩阵为

$$M_R=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$$

3．关系图

设$A=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$R$是$A$上的一个二元关系。构造有序对$G_R=<V, E>$，其中$V=A, E=R$，从点$v_i$到$v_j$画一条有向线$\Leftrightarrow <v_i, v_j>\in R$，则称$G_R$为$R$的**关系图**。

称v_i为关系图G_R的顶点，从点v_i到v_j的有向线为G_R的有向边。

用关系矩阵或关系图描述集合A上的二元关系，要求A必须是有穷集。

例 设A={1,2,3,4}，构造A上的二元关系

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge (x-y)^2\in A\}$$

$$=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,3\rangle,$$

$$\langle 3,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$$

则R的关系图为

G_R