§14.2 通路与回路

定义 设G是一个无向标定图，G中顶点和边的交替序列

$$\Gamma=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots v_{l-1}e_lv_l$$

其中$v_i\in V(G)$，$(v_{i-1},v_i)=e_i\in E(G)$，$i=1,2,\cdots,l$，称$\Gamma$为$v_0$到$v_l$的**通路**（或$(v_0,v_l)$-通路），$v_0,v_l$分别称为$\Gamma$的**始点**和**终点**，$\Gamma$上边的数目$l$称为$\Gamma$的**长**；若$v_0=v_l$，则称$\Gamma$为**回路**。

注 在后面的讨论中，通路不包括回路。

定义 设G是一个无向标定图，对G中的通路Γ(或回路)，若Γ上的边不重复，则称Γ为**简单通路**(或**简单回路**)；若Γ上的顶点不重复，则称Γ为**初级通路**(或**初级回路**)。

注

① 初级通路也称**路径**，初级回路也称**圈**；

② 长为n的圈记为C_n，n为奇(偶)数时称为**奇(偶)圈**；

③ 在简单图中，通路和回路可用顶点表示。

定理 设G是一个无向图，若G中存在(v_0,v_l)-通路，则一定存在(v_0,v_l)-初级通路（路径）。

证明 设G中存在(v_0,v_l)-通路

$$\Gamma=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots v_{l-1}e_lv_l$$

若Γ不是初级回路，则Γ中存在顶点重复的情况，即存在$0\le i<j\le l$，使得$v_i=v_j$。于是，从Γ中删除子通路$v_ie_{i+1}v_{i+1}e_{i+2}v_{i+2}\cdots v_{j-1}e_jv_j$ ($v_i=v_j$保留) 得到

$$\Gamma_1= v_0e_1v_1\cdots v_ie_{j+1}v_{j+1}e_{j+2}v_{j+2}\cdots v_{l-1}e_lv_l$$

仍然是(v_0,v_l)-通路。

若Γ_1仍然有顶点重复，则对Γ_1重复上述做法。反复上述处理，最终得到不含重复顶点的(v_0,v_l)-通路，即(v_0,v_l)-路径。 ▌

例 设G是一个n阶无向图，$v_0,v_l \in V(G)$，则或者G中不存在(v_0,v_l)-通路，或者存在长度小于n的(v_0,v_l)-路径。

证明 设G中存在(v_0,v_l)-通路，则由前面定理得G中存在 (v_0,v_l)-路径

$$\Gamma=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots v_{l-1}e_lv_l$$

因为Γ的顶点不重复，且G是n阶图，故 $l+1\leq n$。由此得，$l\leq n-1$，即Γ的长小于n。 ▌

定理 设G是一个无向图，若G中存在v到自身的简单回路，则G中存在v到自身的圈。

例 设G是一个n阶无向图，$v\in V(G)$，则或者G中不存在v到自身的简单回路，或者存在v到自身长度小于等于n的圈。

定理 无向图G是二部图的充要条件是G不含奇圈。

对有向图D，也有相应的概念

①（有向）通路：$\Gamma=v_0e_1v_1e_2\cdots v_{l-1}e_lv_l$，其中

$v_i\in V(D)$，$<v_{i-1},v_i>= e_i\in E(D)$

②（有向）回路：$v_0=v_l$时的通路

③（有向）路径、圈。

在有向图中，通路（回路）的走向与有向边的方向一致。