§ 2.2 析取范式与合取范式

命题公式如果只包含否定、合取与析取联结词，则公式的真值、类型、等值等问题就比较容易解决。

定义 命题变项及否定称为**文字**，有限个文字的析取式称为**简单析取式**(或子句)，有限个文字的合取式称为**简单合取式**(或短语)。

有限个简单析取式的合取式称为**合取范式**，有限个简单合取式的析取式称为**析取范式**，合取范式与析取范式统称为范式。

析(合)取范式是矛盾(重言)式当且仅当它的每个简单合(析)取式都是矛盾(重言)式。

例 求命题公式 $(p\to q)\leftrightarrow r$ 的范式。

解（1）求合取范式

$$
\begin{aligned}
& (p\to q)\leftrightarrow r \\
\Leftrightarrow\ & ((p\to q)\to r)\land(r\to(p\to q)) \\
\Leftrightarrow\ & ((\neg p\lor q)\to r)\land(\neg r\lor(p\to q)) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg(\neg p\lor q)\lor r)\land(\neg r\lor(\neg p\lor q)) \\
\Leftrightarrow\ & ((p\land\neg q)\lor r)\land(\neg p\lor q\lor\neg r) \\
\Leftrightarrow\ & (p\lor r)\land(\neg q\lor r)\land(\neg p\lor q\lor\neg r)
\end{aligned}
$$

（2）求析取范式

$$(p\to q)\leftrightarrow r \Leftrightarrow ((p\to q)\to r)\wedge(r\to(p\to q))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p\vee q)\to r)\wedge(\neg r\vee(p\to q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg(\neg p\vee q)\vee r)\wedge(\neg r\vee(\neg p\vee q))$$

$$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$$

$$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r))\vee(r\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r))$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg q\wedge q)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg p)\vee(r\wedge q)\vee(r\wedge\neg r)$$

定理 任一命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式。

求范式的步骤：

（1）消去联结词 $\rightarrow$，$\leftrightarrow$；

（2）否定联结词消去或内移；

（3）$\wedge$对$\vee$使用分配律求析取范式，$\vee$对$\wedge$使用分配律求合取范式。

定义 在含 n 个命题变项的简单合取(析取)式中，若每个命题变项或其否定恰出现一次但不同时出现，并且文字按字母顺序或下标递增顺序排列，则称这样的简单合取(析取)式为**极小项**(**极大项**)。

注（1）含 n 个命题变项的极小项有 2^n 个；

（2）每个极小项恰有一个成真赋值，且不同极小项的成真赋值也不同。

n 个命题变项的赋值有 2^n 个，每一个赋值对应一个成真的极小项。

例如，命题变项 p, q, r 的一个赋值101，对应极小项 $p\wedge\neg q\wedge r$，真值为1；反之，一个极小项 $\neg p\wedge q\wedge r$，对应一个成真赋值011。

极小项记为 $m_0, m_1, m_2, \cdots, m_{k-1}$，其中 $k=2^n$。下标的二进制表示即为极小项的成真赋值。

（3）含 n 个命题变项的极大项有 2^n 个；

（4）每个极大项恰有一个成假赋值，且不同极大项的成假赋值也不同。

n 个命题变项的赋值有 2^n 个，每一个赋值对应一个成假的极大项。

例如，命题变项 p, q, r 的一个赋值101，对应极大项 $\neg p \vee q \vee \neg r$，真值为0；反之，一个极大项 $p \vee q \vee \neg r$，对应一个成假赋值001。

极大项记为 $M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{k-1}$，其中 $k=2^n$。下标的二进制表示即为极大项的成假赋值。

定义 由极小项构成的析取范式称为**主析取范式**，由极大项构成的合取范式称为**主合取范式**，主析取范式与主合取范式统称为**主范式**。

例 求命题公式 $(p\to q)\leftrightarrow r$ 的主范式。

解（1）求主合取范式

$$(p\to q)\leftrightarrow r \Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$$

$$\Leftrightarrow (p\vee 0\vee r)\wedge(0\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$$

$$\Leftrightarrow (p\vee(q\wedge\neg q)\vee \ldots \vee\neg r)$$

$$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p \ldots r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$$

$$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$$

$$= M_0\wedge M_2\wedge M_5\wedge M_6$$

（2）求主析取范式

$(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg q\wedge q)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg p)$
$\qquad\vee(r\wedge q)\vee(r\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow 0\vee 0\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg p)\vee(r\wedge q)\vee 0$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge 1\wedge r)\vee(1\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee($ … $)\wedge q\wedge r)$

$= m_1\wedge m_3\wedge m_4\wedge m_7$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee($ … $(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

求主范式的步骤：

（1）先求普通的范式；

（2）若析取范式中某简单合取式 A 不含 p_i 及 $\neg p_i$，则对A做如下处理

$$A \Leftrightarrow A \wedge 1$$

$$\Leftrightarrow A \wedge (p_i \vee \neg p_i)$$

$$\Leftrightarrow (A \wedge p_i) \vee (A \wedge \neg p_i)$$

反复上述过程，直到 A 变为极小项；

若合取范式中某简单析取式 B 不含 p_i 及$\neg p_i$，则对B做如下处理

$$B \Leftrightarrow B \vee 0$$

$$\Leftrightarrow B \vee (p_i \wedge \neg p_i)$$

$$\Leftrightarrow (B \vee p_i) \wedge (B \vee \neg p_i)$$

反复上述过程，直到 B 变为极大项。

注（1）在主析取（合取）范式中，使一个极小（大）项成真（假）的赋值也使整个主析取（合取）范式成真（假）；

（2）在两个主范式中，出现的极小项和极大项对应的赋值包含全部可能的赋值，但二者不重合；

（3）主析取范式中出现的极小项对应命题公式的成真赋值，而主合取范式中出现的极大项对应命题公式的成假赋值；

（4）主范式与成真成假赋值可相互确定，一个主范式可确定另一个主范式；

（5）重言式的主合取范式记为1，矛盾式的主析取范式记为0。

例 讨论命题公式 $p \to q$ 的主范式与各种赋值。

解（方法一）

$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q = M_2$ 主合取范式

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge 1) \vee (1 \wedge q)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \vee ((p \vee \neg p) \wedge q)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

$= m_0 \vee m_1 \vee m_3$ 主析取范式

（方法二）

列出命题公式 $p \to q$ 的真值表

p	q	$p \to p$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

由真值表得 $p \to q$ 的成假赋值为10，所以命题公式对应极大项为 $\neg p \vee q = M_2$。这就是主合取范式。

又因为 $p \to q$ 的成真赋值为 00, 01, 11，它们分别对应极小项 $\neg p \wedge \neg q = m_0$，$\neg p \wedge q = m_1$， $p \wedge q = m_3$，所以主析取范式为 $m_0 \vee m_1 \vee m_3$。

（方法三）

$$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q = M_2$$ 主合取范式

由此得 $p \to q$ 成假赋值10，故成真赋值为

00, 01, 11

它们对应的极小项分别为

$$\neg p \wedge \neg q = m_0，\neg p \wedge q = m_1，\quad p \wedge q = m_3$$

所以，$p \to q \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$ 主析取范式

例 从甲、乙、丙三人中挑选一至两名出国进修，要求

（1）若甲去，则丙同去；

（2）若乙去，则丙不去；

（3）若丙不去，则甲或乙去。

求全部派出方案。

解 构造三个命题

p：派甲去　q：派乙去　r：派丙去

则派出条件可表示为

$$(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r)\wedge(\neg r\rightarrow(p\vee q))$$

$$(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge(\neg r\to(p\vee q))$$

$$\Leftrightarrow(\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge(r\vee(p\vee q))$$

$$\Leftrightarrow(\neg p\vee 0\vee r)\wedge(0\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(p\vee q\vee r)$$

$$\Leftrightarrow(\neg p\vee(q\wedge\neg q)\vee r)\wedge((p\wedge\neg p)\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(p\vee q\vee r)$$

$$\Leftrightarrow(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge((p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(p\vee q\vee r)$$

$$= M_0\wedge M_3\wedge M_4\wedge M_6\wedge M_7$$ 主合取范式

由上式得，原命题的主析取范式为

$$m_1\vee m_2\vee m_5$$

而1, 2, 5的三位二进制表示分别为

001, 010, 101

故得原命题的主析取范式为

$$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)$$

$$m_1 \qquad\qquad m_2 \qquad\qquad m_5$$

由此得有3种派出方案：

m_1：丙去，甲和乙不去

m_2：乙去，甲和丙不去

m_5：甲和丙去，乙不去

例 二进制半加器和全加器甲

二进制半加器和全加器是计算机运算器中实现二进制加法的部件。它是根据如下原理设计的：

二进制半加器有两个输入x,y，两个输出h,d，这里x,y是被加数，h是半和，d是半和。半加器不考虑上一位的进位。

x	y	h	d
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

根据上表，可得h与d的主析取范式

$$h \Leftrightarrow m_1 \vee m_2 = (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$$

$$d \Leftrightarrow m_3 = x \wedge y$$

由于二进制半加器不考虑上一位进位，所以其输出的运算结果不是最终的。我们需要利用半加器设计能输出最终运算结果的二进制全加器。

仍然用x,y表示两个输入，用h表示x,y的半和，d表示求和时产生的半进位(不考虑前一位进位)，用c'表示上一位进位，用c表示最终进位，用s表示最终运算结果，则有真值表

x	y	c'	s	c
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

根据上表，可得s与c的主析取范式

$$s \Leftrightarrow m_1 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_7 = (\neg x \wedge \neg y \wedge c') \vee (x \wedge \neg y)$$

$$s \Leftrightarrow m_1 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_7$$

$$= (\neg x \wedge \neg y \wedge c') \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg c') \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg c') \vee (x \wedge y \wedge c')$$

$$\Leftrightarrow (\neg x \wedge y \wedge \neg c') \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg c') \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge c') \vee (x \wedge y \wedge c')$$

$$\Leftrightarrow (((\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)) \wedge \neg c') \vee (((\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y)) \wedge c')$$

$$\Leftrightarrow (h \wedge \neg c') \vee ((((\neg x \wedge \neg y) \vee x) \wedge ((\neg x \wedge \neg y) \vee y)) \wedge c')$$

$$\Leftrightarrow (h \wedge \neg c') \vee (((\neg x \vee x) \wedge (\neg y \vee x) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee y)) \wedge c')$$

$$\Leftrightarrow (h \wedge \neg c') \vee ((1 \wedge (\neg y \vee x) \wedge (\neg x \vee y) \wedge 1) \wedge c')$$

$$\Leftrightarrow (h \wedge \neg c') \vee (((x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y)) \wedge c')$$

$$\Leftrightarrow (h \wedge \neg c') \vee (\neg(\neg((x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y))) \wedge c')$$

$$\Leftrightarrow (h \wedge \neg c') \vee (\neg((\neg x \vee y) \vee (x \vee \neg y)) \wedge c')$$

$$\Leftrightarrow (h \wedge \neg c') \vee (\neg h \wedge c')$$

$$c \Leftrightarrow m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

$$= (\neg x \wedge y \wedge c') \vee (x \wedge \neg y \wedge c') \vee (x \wedge y \wedge \neg c') \vee (x \wedge y \wedge c')$$

$$\Leftrightarrow (((\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)) \wedge c') \vee (d \wedge \neg c') \vee (d \wedge c')$$

$$\Leftrightarrow (h \wedge c') \vee (d \wedge (\neg c' \vee c'))$$

$$\Leftrightarrow (h \wedge c') \vee (d \wedge 1)$$

$$\Leftrightarrow (h \wedge c') \vee d$$

由此得利用二进制半加器设计二进制全加器的思路。