高等数学笔记

目录

1 向量代数与空间解析几何

1.1 向量及其线性运算

1.1.1 向量的概念

向量 既有大小，又有方向的量。记作 $\overrightarrow{a}$

模 向量的大小。记作 $|\overrightarrow{a}|$

$\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 的夹角 记作 $(\widehat{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}})$，$(\widehat{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}})\in[0,\pi]$

若 $(\widehat{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}})=0$ 或 π，则 $\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}$
若 $(\widehat{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}})=\frac{\pi}{2}$，则 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$

1.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加减法

   运算规律：

   (a) 交换律：$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$

   (b) 结合律：$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$

   三角不等式：

   $|\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b}|\leq|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$

2. 向量的数乘

   运算规律：

   (a) 结合律：$\lambda(\mu\overrightarrow{a})=\mu(\lambda\overrightarrow{a})=(\lambda\mu)\overrightarrow{a}$

   (b) 分配律：$\begin{array}{l}(\lambda+\mu)\overrightarrow{a}=\lambda\overrightarrow{a}+\mu\overrightarrow{a}\\ \lambda(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=\lambda\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{a}\end{array}$

   $\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\overrightarrow{a}=\lambda\overrightarrow{b}$

1.1.3 空间直角坐标系

1.1.4 利用坐标做向量的线性运算

1. 定比分点

   M 位于 $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$ 中间，且 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$
   则 $M(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda})$

1.1.5 向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间的距离公式

   $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
   $|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

2. 方向角与方向余弦

   方向角 $\overrightarrow{a}$ 与坐标轴 x,y,z 分别所成的角 α,β,γ

   方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$

$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (\frac{x}{|\overrightarrow{a}|}, \frac{y}{|\overrightarrow{a}|}, \frac{z}{|\overrightarrow{a}|})$
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

3. 向量在轴上的投影
   $a_x = Prj_{\overrightarrow{i}}\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{a})_x, a_y = Prj_{\overrightarrow{j}}\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{a})_y, a_z = Prj_{\overrightarrow{k}}\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{a})_z$

   性质 1 $(\overrightarrow{a})_u = |\overrightarrow{a}|cos\phi$，其中 ϕ 为 $\overrightarrow{a}$ 与坐标轴 u 的夹角

   性质 2 $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})_u = (\overrightarrow{a})_u + (\overrightarrow{b})_u$

   性质 3 $(\lambda\overrightarrow{a})_u = \lambda(\overrightarrow{a})_u$

1.2 数量积、向量积、* 混合积

1.2.1 两向量的数量积

1. 计算
   $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$
   $= |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$
   $= |\overrightarrow{a}|Prj_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b}$
   $= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

2. 性质
   (a) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|^2$
   (b) $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$

3. 运算规律
   (a) 交换律 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$
   (b) 分配律 $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$
   (c) 结合律 $(\lambda\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$

4. 向量夹角
   $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$

1.2.2 两向量的向量积

1. 计算
   $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta$，$\overrightarrow{c}$ 的方向由右手规则（握拳时四指旋转方向夹角小于 π 时大拇指指向的方向）确定
   $$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

2. 性质
   (a) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$
   (b) $\overrightarrow{a} // \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$

3. 运算规律
   (a) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$
   (b) 分配律 $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$
   (c) 结合律 $(\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times (\lambda\overrightarrow{b}) = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$

1.2.3 * 向量的混合积

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

性质：$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面

1.3 平面及其方程

1.3.1 曲面方程与空间曲线方程的概念

1. **曲面方程**

   若曲面 S 与方程 $F(x,y,z)=0$ 有如下关系：

   (a) 曲面 S 上任意一点都满足方程

   (b) 曲面 S 外任意一点都不满足方程

   那么方程 $F(x,y,z)=0$ 就叫做曲面 S 的方程

   曲面 S 就叫做方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形

2. **曲线方程**

   空间曲线 C 的方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

1.3.2 平面的方程

平面的点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y0)+C(z-z_0)=0$，已知平面 Π 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和一个法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

平面的三点式方程 $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}$，已知平面 Π 上 3 点 $M_0(x_0,y_0,z_0),M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$

平面的截距式方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，已知平面 Π 在 x 轴 y 轴 z 轴上的截距分别为 a,b,c

平面的一般式方程 $Ax+By+Cz+D=0$

1.3.3 两平面的夹角

定义：两平面的法线向量的夹角 θ（通常指锐角或直角）

平面 Π_1,Π_2 的法向量分别为 $\vec{n_1}=(A_1,B_1,C_1),\vec{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$

则 Π_1,Π_2 之间的夹角的余弦值为$\cos\theta=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

性质

1. $\Pi_1\perp\Pi_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
2. $\Pi_1//\Pi_2\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

1.3.4 点到平面的距离

已知点 $M(x_0,y_0,z_0)$、平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$

则点到平面度的距离$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

1.4 空间直线及其方程

1.4.1 空间直线的方程

一般式方程 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

对称式方程 $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ ，已知方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$，直线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$

参数式方程 $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$ ，其中 $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p} = t$

1.4.2 两直线的夹角

定义：两直线的方向向量的夹角 θ（通常指锐角或直角）

直线 L_1, L_2 的方向向量分别为 $\vec{s_1} = (A_1, B_1, C_1), \vec{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$

则 L_1, L_2 之间的夹角的余弦值为$\cos\theta = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

1.4.3 直线与平面的夹角

定义：当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线的夹角 $\theta(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2})$

直线 L 的方向向量为 $\vec{s} = (a, b, c)$，平面 Π 的法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$

则 L, Π 之间的夹角的正弦值为$\sin\theta = \dfrac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

1.5 曲面及其方程

1.5.1 旋转曲面

旋转曲面 一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面

母线 旋转的曲线

轴 定直线

1.5.2 柱面

柱面 直线 L 沿定曲线 C 平移形成的轨迹

母线 定曲线 C

准线 动直线 L

1.5.3 二次曲面

1. **椭圆锥面** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z^2$
2. **椭球面** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$
3. **单叶双曲面** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$
4. **双叶双曲面** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$
5. **椭圆抛物面** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z$

6. 双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$

7. 椭圆柱面

8. 双曲柱面

9. 抛物柱面

1.6 空间曲线及其方程

1.6.1 空间曲线的方程

- 一般方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

- 参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

1.6.2 空间曲线在坐标面上的投影

求法：将不需要的维度消掉，得到柱面公式，再令该维度为 0 即可得到

- 在 xOy 平面上的投影 $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

- 在 xOz 平面上的投影 $\begin{cases} H(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$

- 在 yOz 平面上的投影 $\begin{cases} H(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$