Estadística III: Métodos asintóticos de inferencia

Alejandro López Hernández

24 de febrero de 2019

E1 Leer el capitulo 10 de G. Casella, Roger L. Berger, Statistical Inference[1].

Estimación Puntual
E2 Sea $X_1, ..., X_n \sim \frac{\beta \alpha^\beta}{x^{\beta+1}} 1_{[\alpha, \infty)}$ con α conocida, calcula la varianza asintotica del extimador máximo verosimil de β.
E3 Supongamos que $X_1, X_2, ..., X_n \sim$ Bernoulli(p), si $\hat{p}$ es el estimador de máxima verosimilitud de p, calcula la varianza de $\hat{p}(1-\hat{p})$ y usa el método delta para cálcular la varianza asintotica y compara ambas.
E4 Sea $X_1, ..., X_n \sim$ Uniforme$(0, \theta)$ y $\hat{\theta}_n = \max\{X_1, ..., X_n\}$ prueba que $\hat{\theta}_n$ es un estimador consistente de θ
E5 Sea $X_1, ..., X_n \sim f_\theta(x)$ con $f_\theta(x) = \frac{1}{2}(1 + \theta x)$ con $x, \theta \in (-1, 1)$. Encuentra un estimador consiste para θ
E6 Sea $X_1, ..., X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

a) Muestra que $T_n = \frac{k \sum |X_i|}{n}$ es un estimador consistente de σ si y solo si $k = \sqrt{\pi/2}$
b) Calcula el ARE de T_n con respecto al máximo verosimil de σ

Pruebas de Hipótesis
E7 Para la prueba de hipótesis $H_0 : p = p_0$ contra $H_1 : p \neq p_0$ con un modelo paramétrico Bernoulli(p). Calcula $-2 \log \lambda(X)$ y establece la región de rechazo de nivel α asumiendo la convergencia de $-2 \log \lambda(X)$.
E8 Sea $X_1, ..., X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

a) Si μ es desconocido y σ conocido encuentra un estadístico de Wald para probar $H_0 : \mu = \mu_0$
b) Si μ y σ son desconocidos encuentra un estadístico de Wald para probar $H_0 : \mu = \mu_0$
c) Si μ es conocido y σ desconocido encuentra un estadístico de Wald para probar $H_0 : \sigma = \sigma_0$
d) Si μ y σ son desconocidos encuentra un estadístico de Wald para probar $H_0 : \sigma = \sigma_0$

E9 Sea $X_1, ..., X_n \sim$ Gamma(α, β) con α conocido, encuentra el estadístico de score para probar $H_0 : \beta = \beta_0$.
E10 Sea $X_1, ..., X_n \sim$ Geométrica(p) encuentra una estadístico de Wald para probar $H_0 : p = p_0$
E11 Sea $X_1, ..., X_n \sim$ Exp(θ) encuentra una estadístico de Wald para probar $H_0 : \theta < \theta_0$ y encuentra la region de rechazo.

Estimación por intervalos
E12 Sea $X_1, ..., X_n \sim$ Exp(θ) construir un intervalo de confianza asintótico de θ por los 4 métodos conocidos.
E13 Sea $X_1, ..., X_n \sim$ Poisson(λ) construir un intervalo de confianza asintótico de λ por los 4 métodos conocidos.
E14 Sea $X_1, ..., X_n \sim$ Geo(p) construir un intervalo de confianza asintótico de p por los 4 métodos

conocidos.
E15 Sea $X_1, ..., X_n \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ con β conocida. Construir un intervalo de confianza asintótico de α usando el cociente de verosimilitudes.

Referencias

[1] George Casella asnd Roger L. Berger, *Statistical Inference*. Second Edition, 2002.