курс «Глубокое обучение»

# Нейронные сети

Александр Дьяконов

09 сентября 2021 года

# План

**Простейшая нейросеть – 1 нейрон**

**Функции активации**

(линейная, пороговая, сигмоида, гиперболический тангенс, softmax, LeakyReLU, ELU, Maxout, Exponential Linear Unit, Maxout, Gaussian Error Linear Unit)

**Функциональная выразимость нейрона**

**Теорема об универсальной аппроксимации**

**Сеть прямого распространения**

**Необходимость глубоких сетей**

**Обучение**

**Обратное распространение градиента (Backpropagation)**

**Функции ошибки**

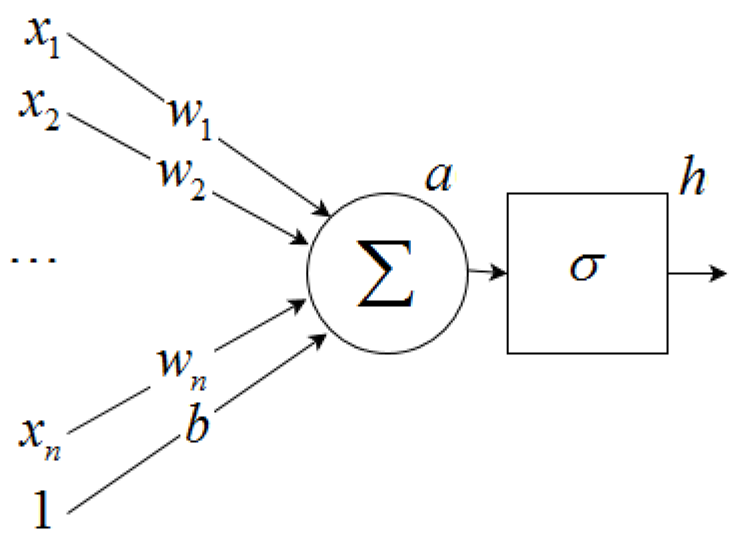
**Нейросеть – вычислительный граф**

**Вычисление градиента на графе**

**Производные на компьютере**

**Проблема затухания градиента**

# Простейшая нейросеть – 1 нейрон




**Разделяющая поверхность – линейная**

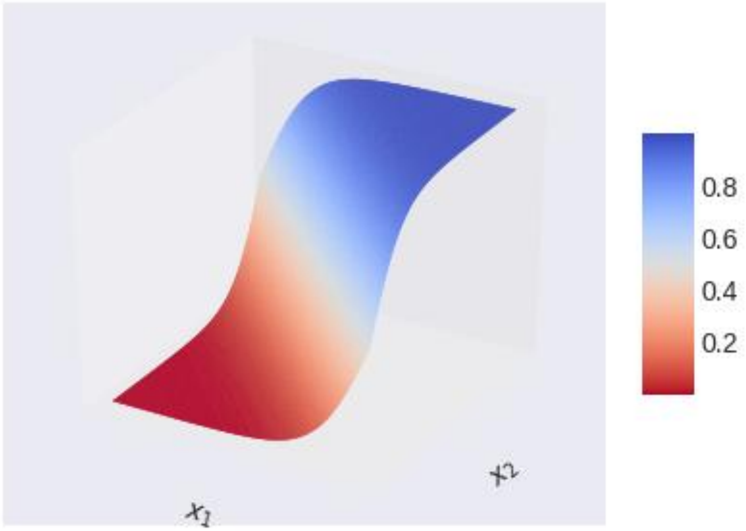
$$a(x) = b + w_1 x_1 + \ldots + w_n x_n = \sum_{t=0}^{n} w_t x_t$$

$$h(x) = \sigma(a(x))$$

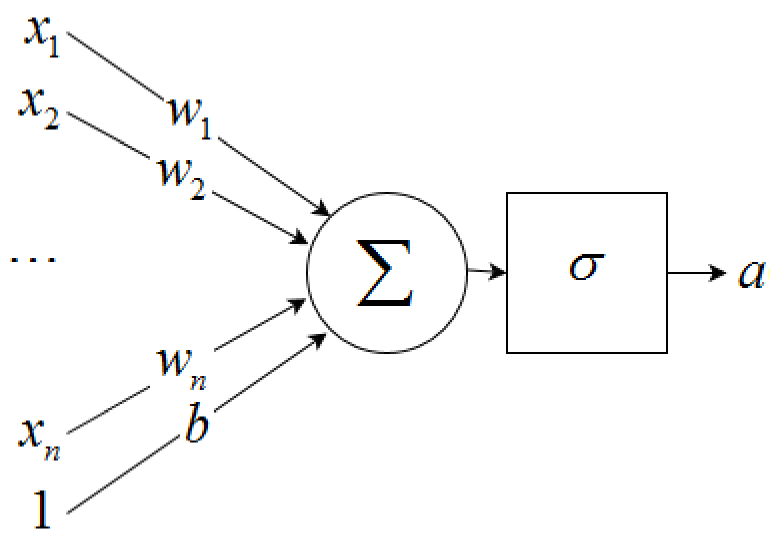
$b$ **– смещение**

$\sigma$ **– функция активации**

$w_t$ **– веса связей**



## Линейные модели – нейросети!




**Линейная регрессия**

$$a(x) = b + w_1x_1 + \ldots + w_nx_n$$

**Логистическая регрессия**

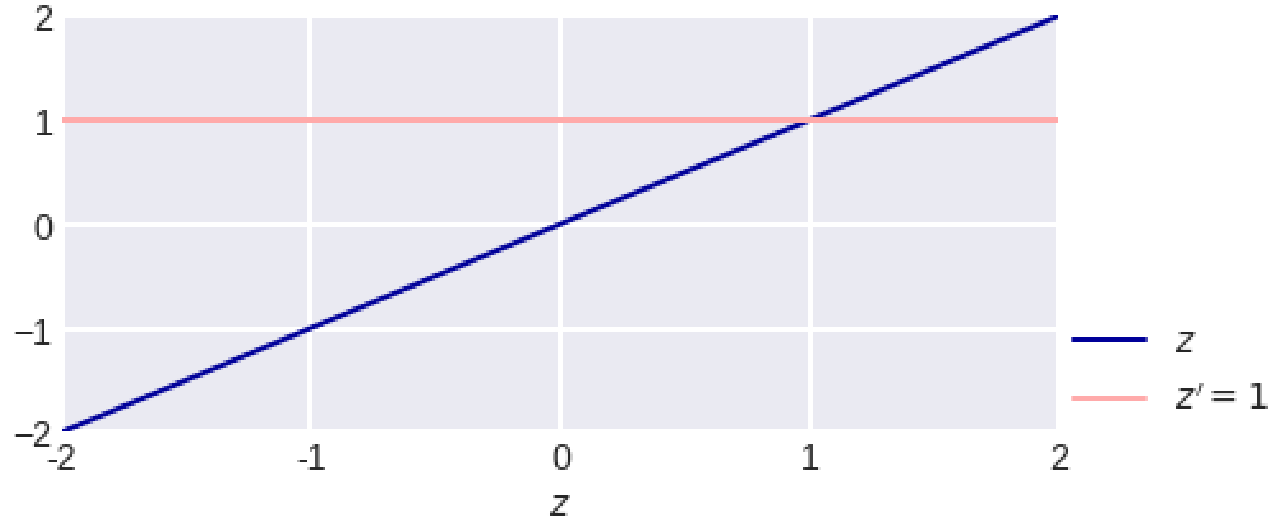
$$a(x) = \sigma(b + w_1x_1 + \ldots + w_nx_n)$$

**Линейный классификатор**

$$a(x) = \mathrm{th}(b + w_1x_1 + \ldots + w_nx_n)$$

## Функции активации

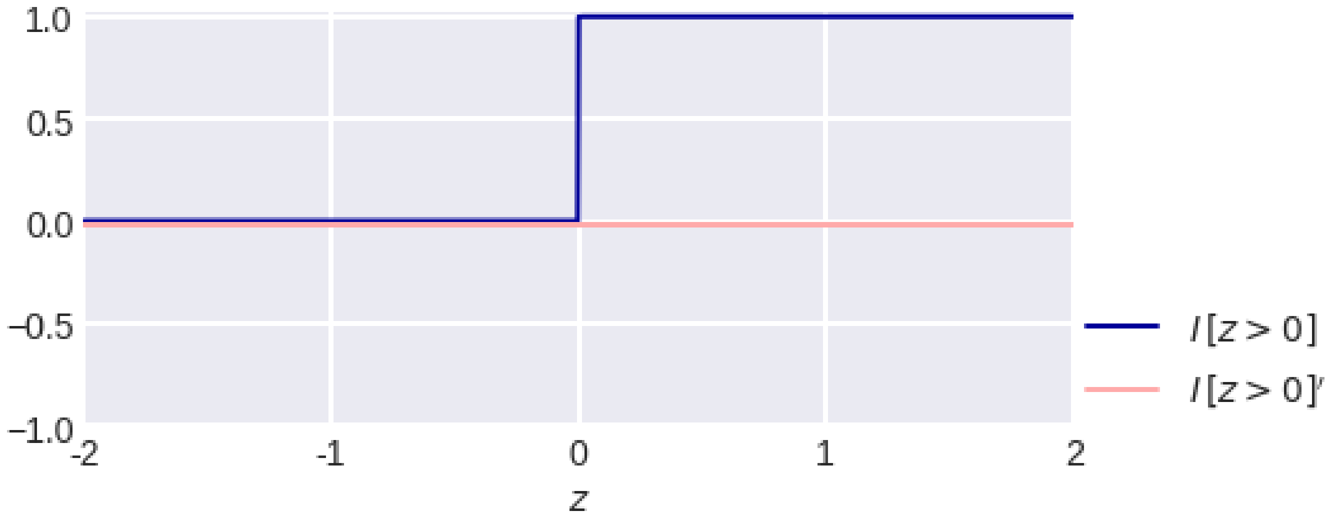
### Тождественная функция (линейная / linear activation function)




$$f(z) = z$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = 1$$

### Пороговая функция (threshold function)

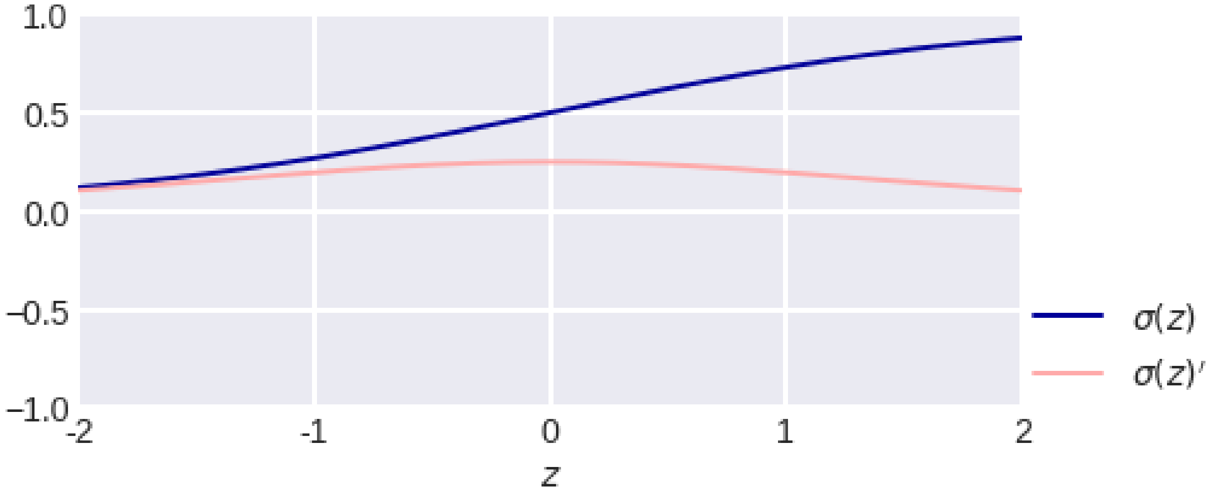



$$\mathrm{th}(z) = I[z > 0]$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{th}(z)}{\partial z} = 0$$

# Функции активации

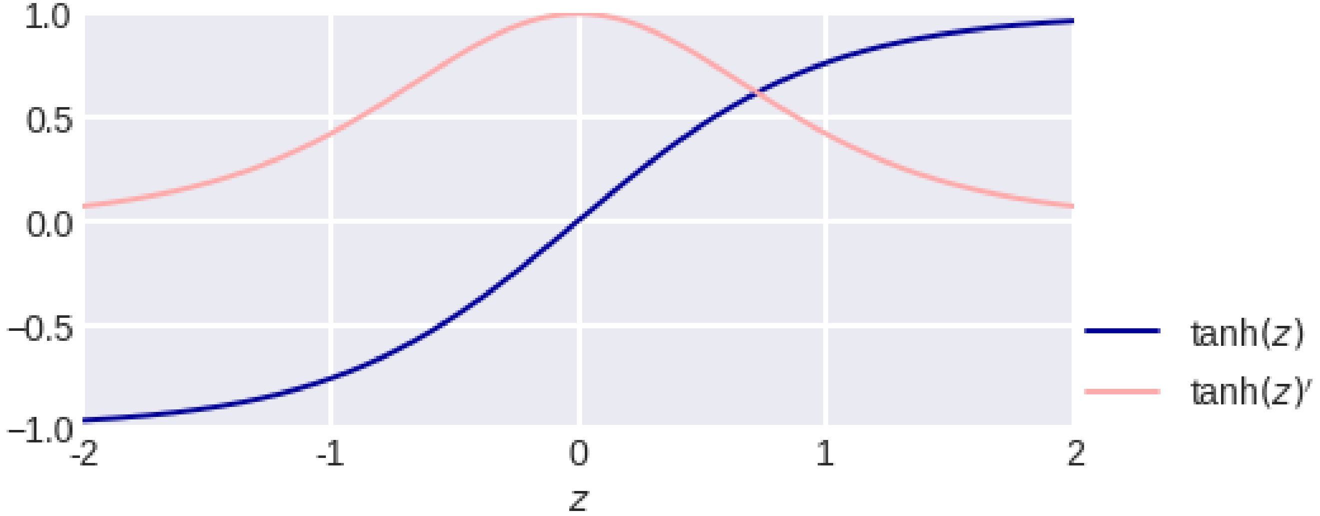
## Сигмоида (sigmoid activation function)




$$\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}} \in (0,1)$$

$$\frac{\sigma(z)}{\partial z} = \sigma(z)(1-\sigma(z)) > 0$$

## Гиперболический тангенс (hyperbolic tangent)




$$\tanh(z) = \frac{2}{1+e^{-2z}} - 1 = \frac{e^{+z} - e^{-z}}{e^{+z} + e^{-z}} = \frac{e^{+2z} - 1}{e^{+2z} + 1}$$

$$\frac{\partial \tanh(z)}{\partial z} = 1 - \tanh^2(z)$$

## Функции активации

**в задачах классификации**

$$\mathrm{softmax}(z_1,\ldots,z_k) = \frac{1}{\sum_{t=1}^{k}\exp(z_t)}(\exp(z_1),\ldots,\exp(z_k))^{\mathrm{т}}$$

**сумма выходов = 1**

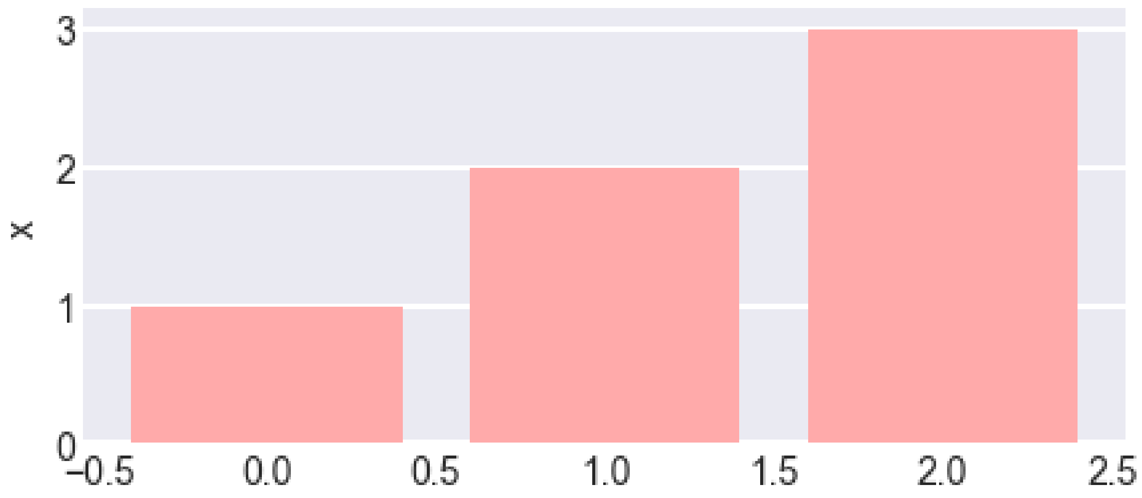
**выходы интерпретируются как вероятности**

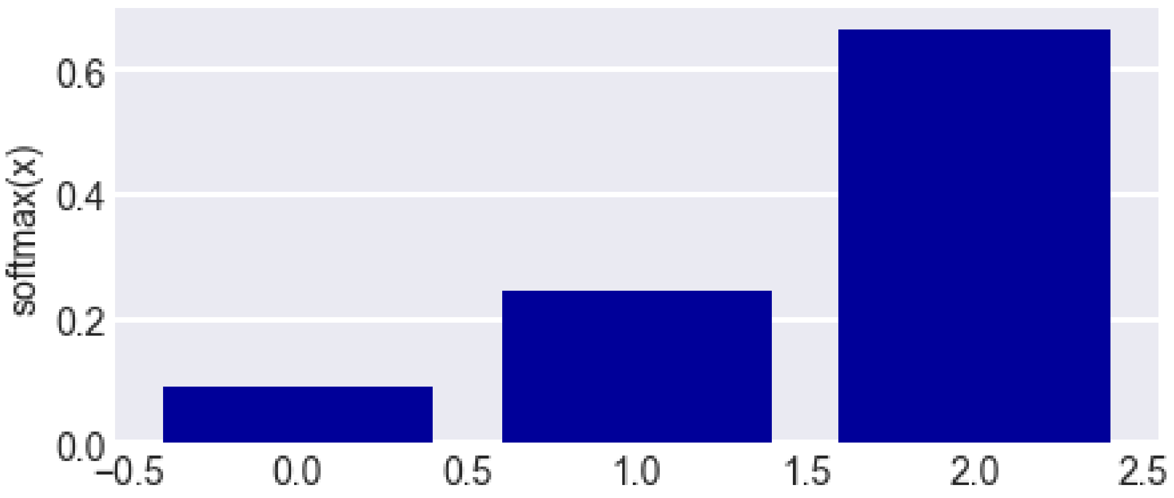
$$[0.5,\ 0.5,\ 0.1,\ 0.7] \to [0.257,\ 0.257,\ 0.172,\ \color{red}{0.314}]$$

$$[-1.0,\ 0,\ 1.0,\ 0,\ \text{-}1.0] \to [0.07,\ 0.18,\ \color{red}{0.5},\ 0.18,\ 0.07]$$

$$[1.0,\ 1.0,\ 1.0,\ 2.0,\ 1.0] \to [0.15,\ 0.15,\ 0.15,\ \color{red}{0.4},\ 0.15]$$

## Минутка кода




```
from torch.nn.functional import softmax
x = torch.tensor([1, 2, 3], dtype=float)
y = softmax(x)
```

**Не всегда softmax нужен в явном виде (например, при NLLLoss)**

# Минутка кода

```
from torch.nn import Sigmoid
from torch.nn.functional import sigmoid
x = torch.tensor([1, 2, 3], dtype=float)
s = Sigmoid() # создаёт nn.Module
s(x), sigmoid(x) # один результат
```

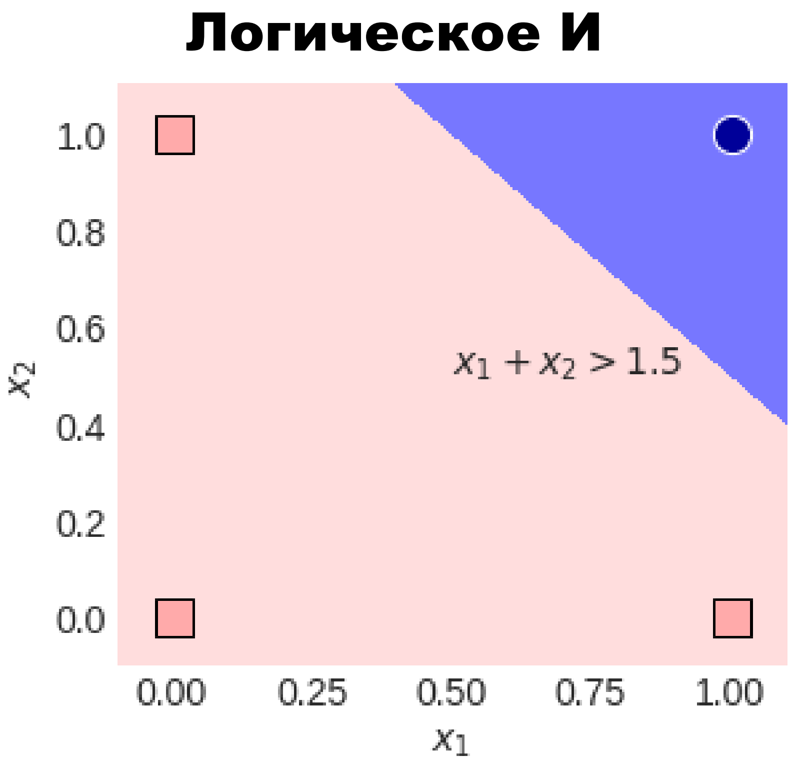
**все нужные функции активации есть…**

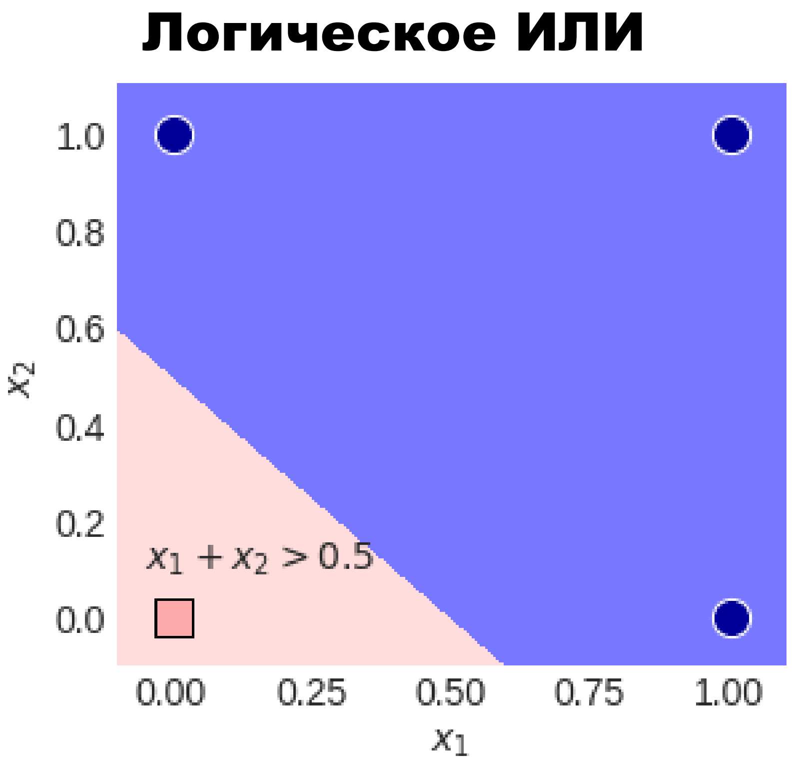
**https://pytorch.org/docs/1.9.0/nn.functional.html**

Non-linear activation functions

| | |
|---|---|
| `threshold` | Thresholds each element of the input Tensor. |
| `threshold_` | In-place version of `threshold()`. |
| `relu` | Applies the rectified linear unit function element-wise. |
| `relu_` | In-place version of `relu()`. |
| `hardtanh` | Applies the HardTanh function element-wise. |

# Что может один нейрон

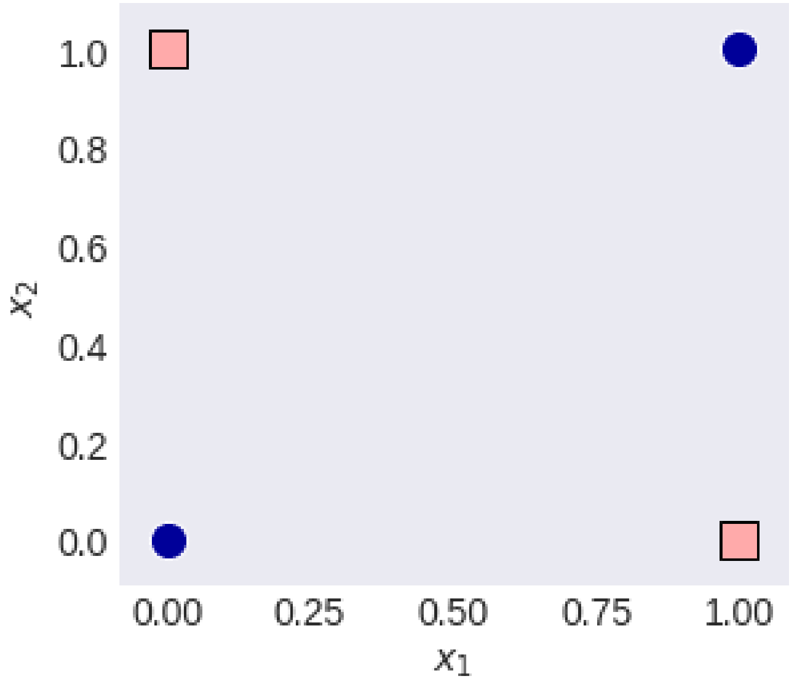



**Для простоты – пороговая функция активации**

## Что НЕ может один нейрон

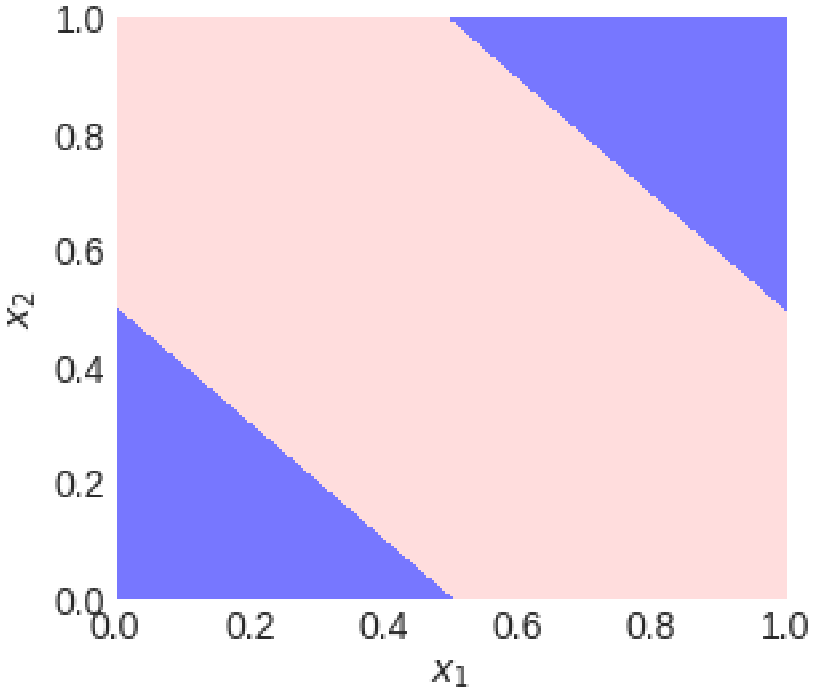
### Исключающее ИЛИ / эквивалентность

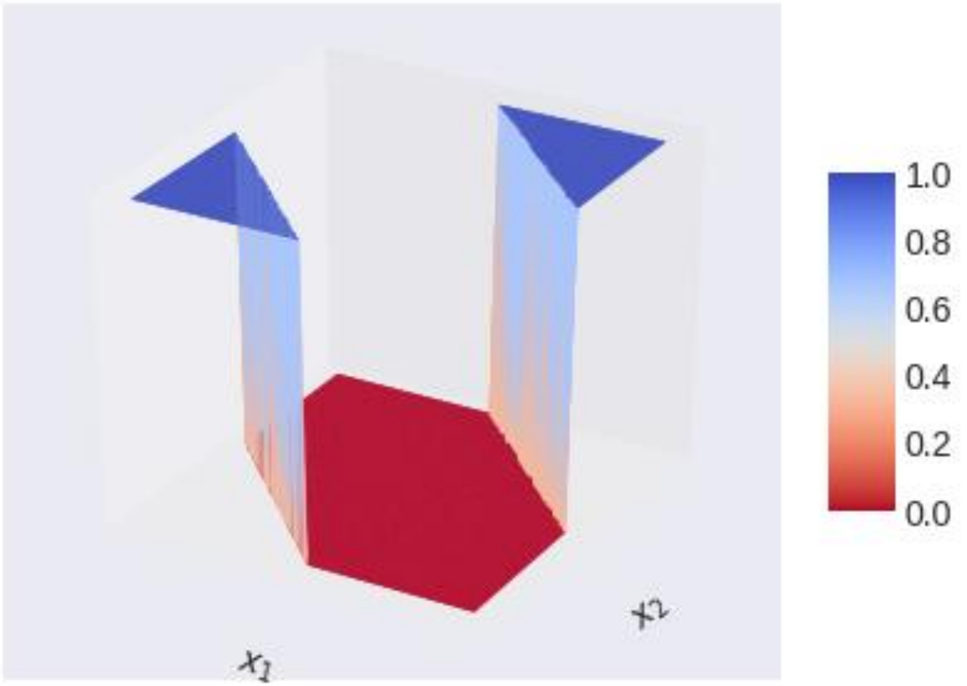


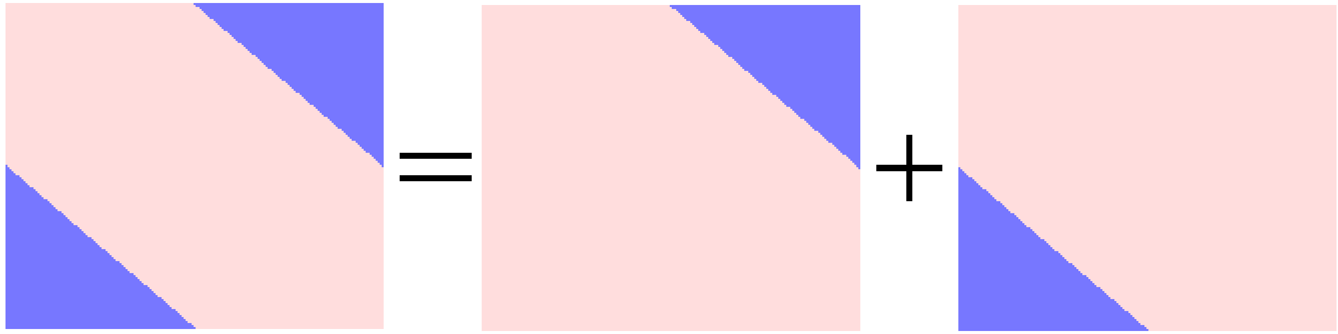

$$\mathrm{th}(\mathrm{th}(x_1 + x_2 - 1.5) + \mathrm{th}(-x_1 - x_2 + 0.5) - 0.5)$$

$$\mathrm{th}(\mathrm{th}(0+0-1.5)+\mathrm{th}(-0-0+0.5)-0.5) = \mathrm{th}(0+1-0.5) = 1$$
$$\mathrm{th}(\mathrm{th}(0+1-1.5)+\mathrm{th}(-0-1+0.5)-0.5) = \mathrm{th}(0+0-0.5) = 0$$
$$\mathrm{th}(\mathrm{th}(1+0-1.5)+\mathrm{th}(-1-0+0.5)-0.5) = \mathrm{th}(0-0-0.5) = 0$$
$$\mathrm{th}(\mathrm{th}(1+1-1.5)+\mathrm{th}(-1-1+0.5)-0.5) = \mathrm{th}(1+0-0.5) = 1$$

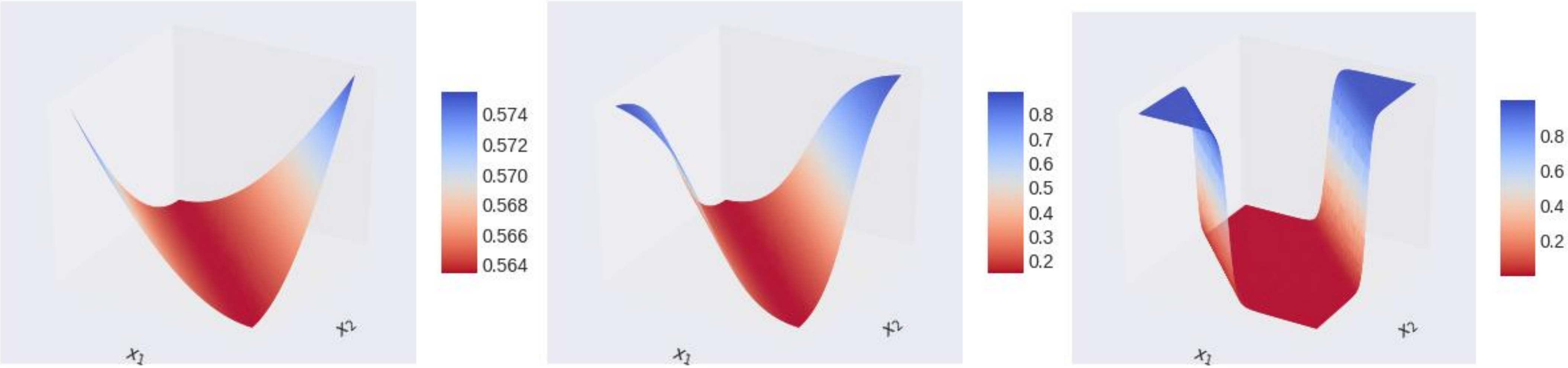
# Что НЕ может один нейрон



## Сигмоида стремится к пороговой функции



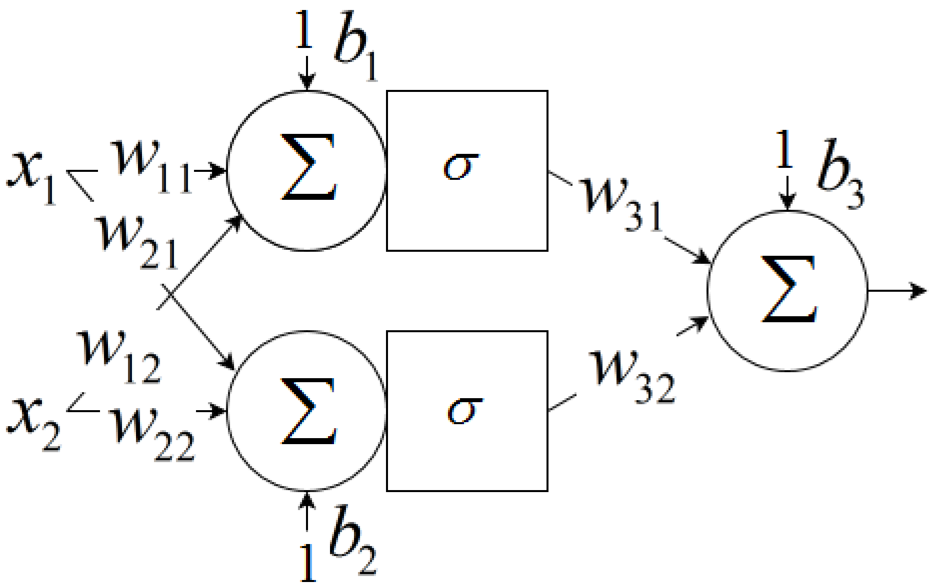

$$\sigma_c(\sigma_c(x_1 + x_2 - 1.5) + \sigma_c(-x_1 - x_2 + 0.5) - 0.5)$$

$$\sigma_c(z) = \frac{1}{1 + e^{-cz}}$$

- **Сигмоиду проще обучать – дифференцируемая**
- **Есть возможность получать «вероятности»**

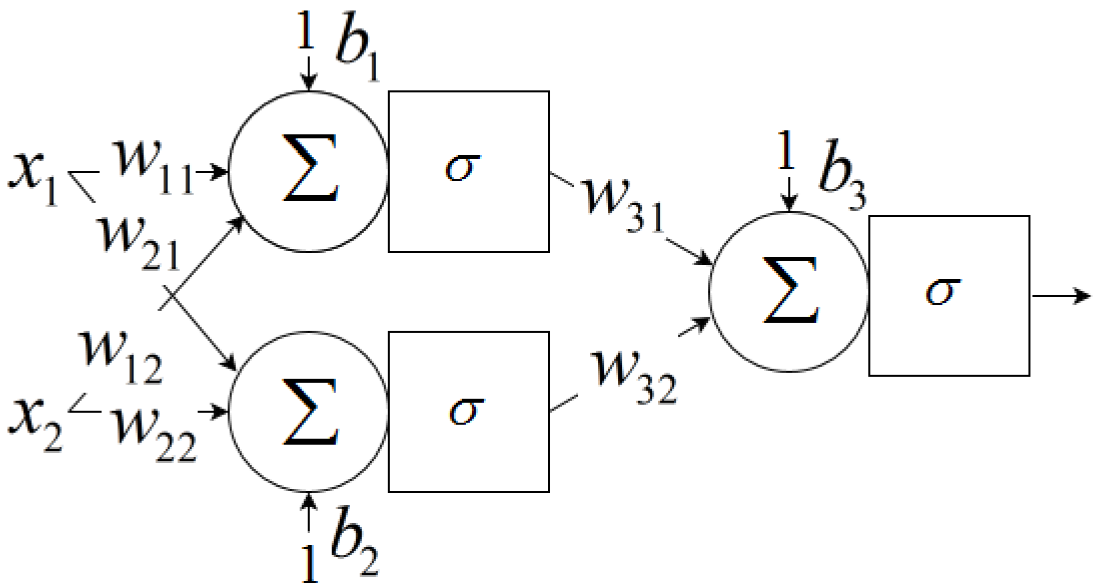
# Двуслойная нейронная сеть

## Регрессия




$$a = b_3 + w_{31}\sigma(b_1 + w_{11}x_1 + w_{12}x_2) + \\ + w_{32}\sigma(b_2 + w_{21}x_1 + w_{22}x_2)$$

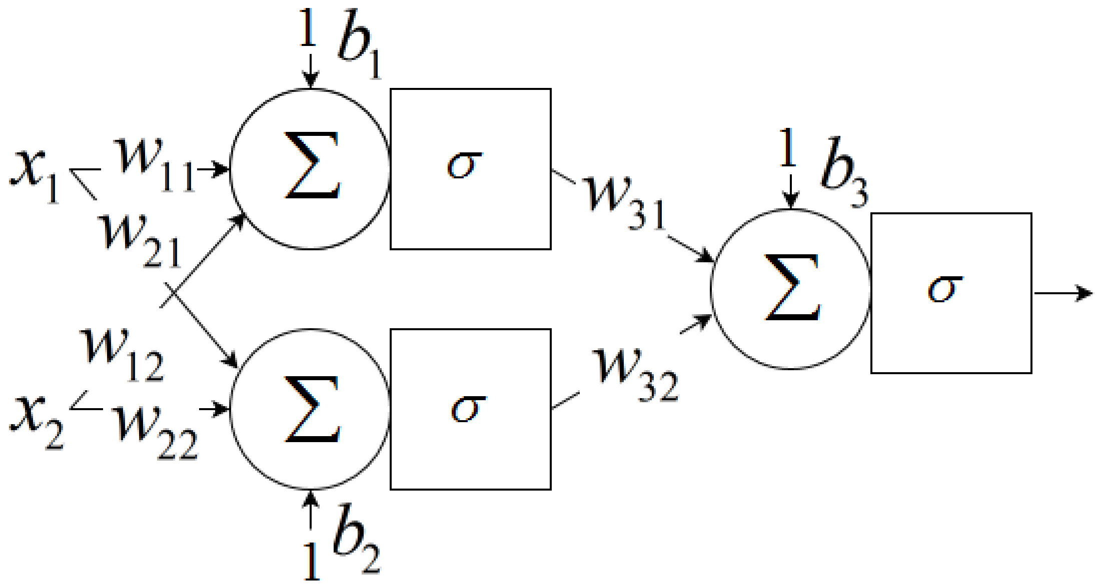
## Классификация




$$a = \sigma(b_3 + w_{31}\sigma(b_1 + w_{11}x_1 + w_{12}x_2) + \\ + w_{32}\sigma(b_2 + w_{21}x_1 + w_{22}x_2))$$

**Такой нейронной сети хватит… (в первом слое м.б. больше нейронов)**

# Двуслойная нейронная сеть




$$\sigma\left(\begin{bmatrix} w_{31} & w_{32} & b_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma\left(\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & b_1 \\ w_{21} & w_{22} & b_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

## Теорема об универсальной аппроксимации [Hornik, 1991]

**Любую непрерывную функцию можно с любой точностью приблизить нейросетью глубины 2 с сигмоидной функцией активации на скрытом слое и линейной функции на выходном слое**

**Нейросеть глубины два с фиксированной функцией активации в первом слое и линейной функцией активации во втором может равномерно аппроксимировать (м.б. при увеличении числа нейронов в первом слое) любую непрерывную функцию на компактном множестве тогда и только тогда, когда функция активации неполиномиальная.**

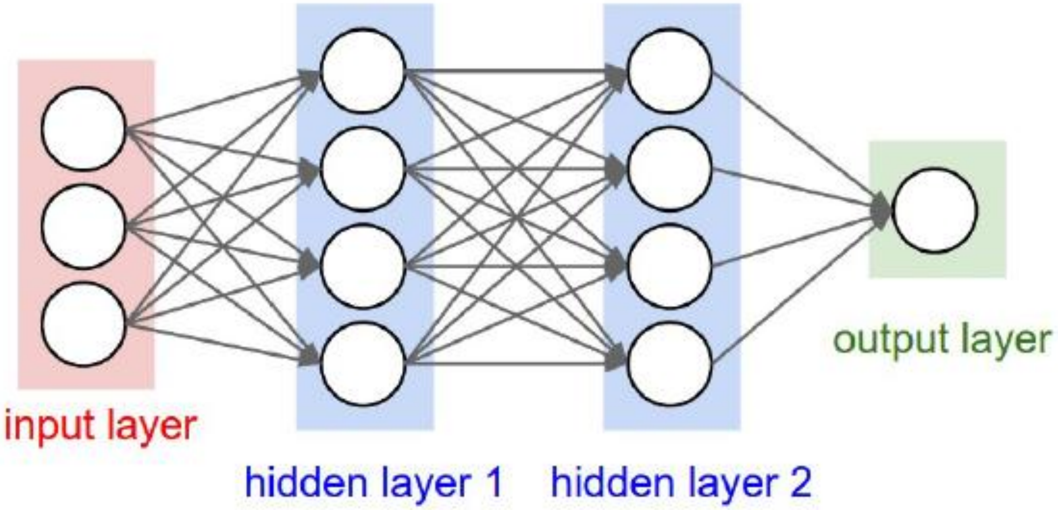
http://www2.math.technion.ac.il/~pinkus/papers/neural.pdf

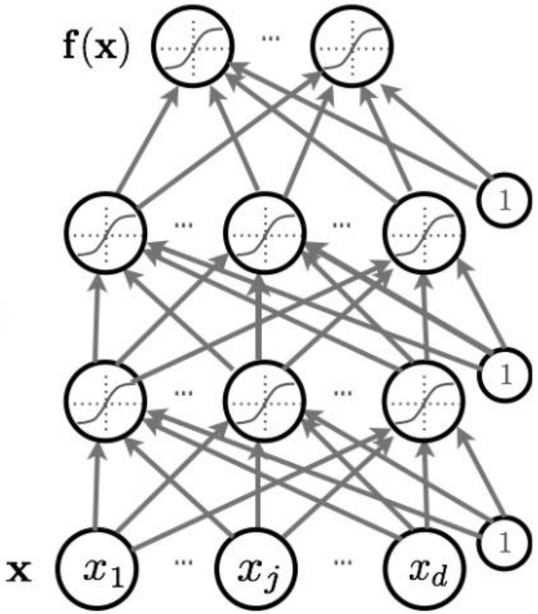
**Более того, функция активации м.б. любая (неполиномиальная)!**

**Но…**

- много нейронов (неизвестно сколько)
- экспоненциальные веса
- сложность обучения

# Многослойная нейронная сеть – пример нелинейной модели



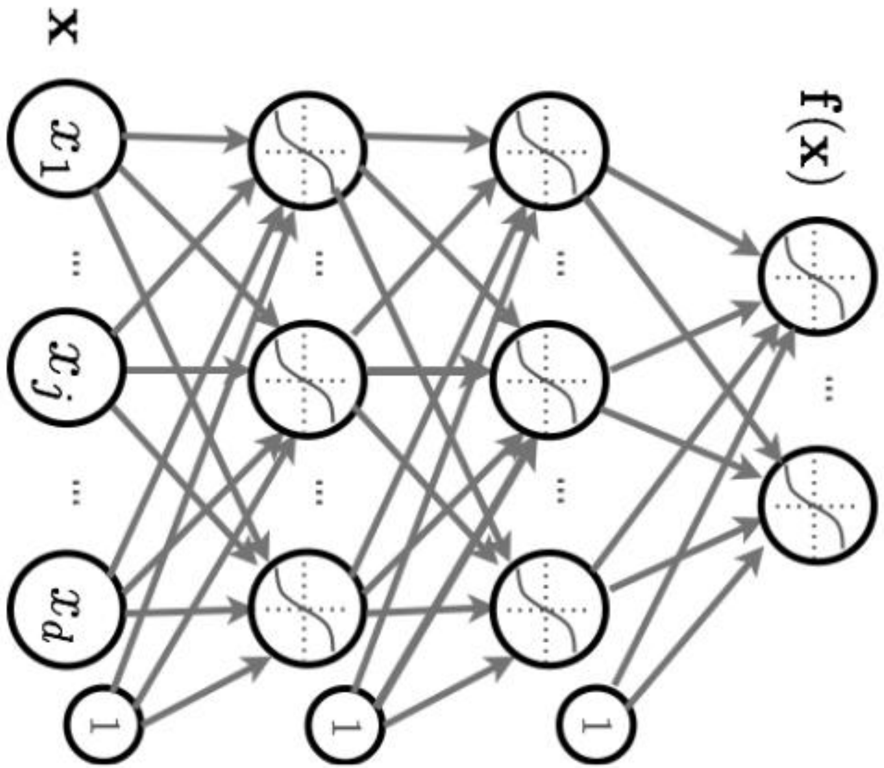

**Ориентированный граф вычислений**

**Вершины – переменные или нейроны**
**Рёбра – зависимости**

# Сеть прямого распространения – Feedforward Neural Network

(т.е. нет циклов)

все нейроны предыдущего слоя связаны с нейронами следующего



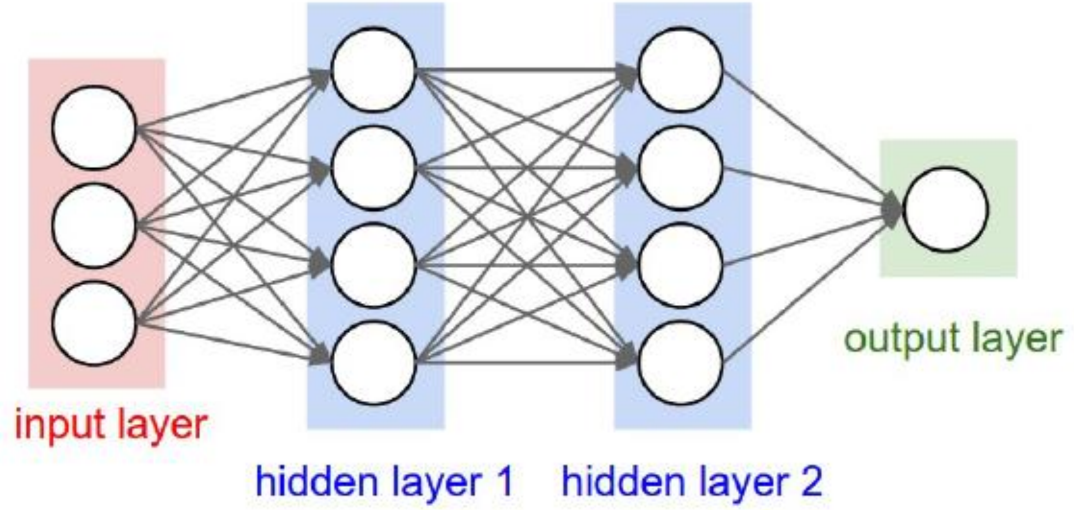
входной слой

один или несколько скрытых слоёв

выходной слой

## Важная аналогия

**Глубокая НС – последовательное преобразование признакового пространства**




$$\varphi_k(W_k \cdot \ldots \cdot \varphi_2(W_2 \cdot \varphi_1(W_1 \cdot x)))$$

иногда чуть другая запись!

**Сейчас наука DL, в основном, как правильно представлять (преобразовывать) признаковые пространства**

увидим потом и в таких моделях, как кодировщик

нельзя просто преобразовывать… надо что-то ещё требовать

## Минутка кода

```
class Feedforward(torch.nn.Module):
        def __init__(self, input_size, hidden_size):
            super(Feedforward, self).__init__()
            self.input_size, self.hidden_size  = input_size, hidden_size
            self.fc1 = torch.nn.Linear(self.input_size, self.hidden_size, bias=True)
            self.relu = torch.nn.ReLU()
            self.fc2 = torch.nn.Linear(self.hidden_size, 1, bias=False)
            self.sigmoid = torch.nn.Sigmoid()

        def forward(self, x):
            hidden = self.fc1(x)
            relu = self.relu(hidden)
            output = self.fc2(relu)
            output = self.sigmoid(output)
            return output

net = Feedforward(3, 5)
x = torch.tensor([1., 2., 3.])
net(x)

tensor([0.5376], grad_fn=<SigmoidBackward>)
```

## Минутка кода

```
net
Feedforward(
  (fc1): Linear(in_features=3, out_features=5, bias=True)
  (relu): ReLU()
  (fc2): Linear(in_features=5, out_features=1, bias=False)
  (sigmoid): Sigmoid()
)
```

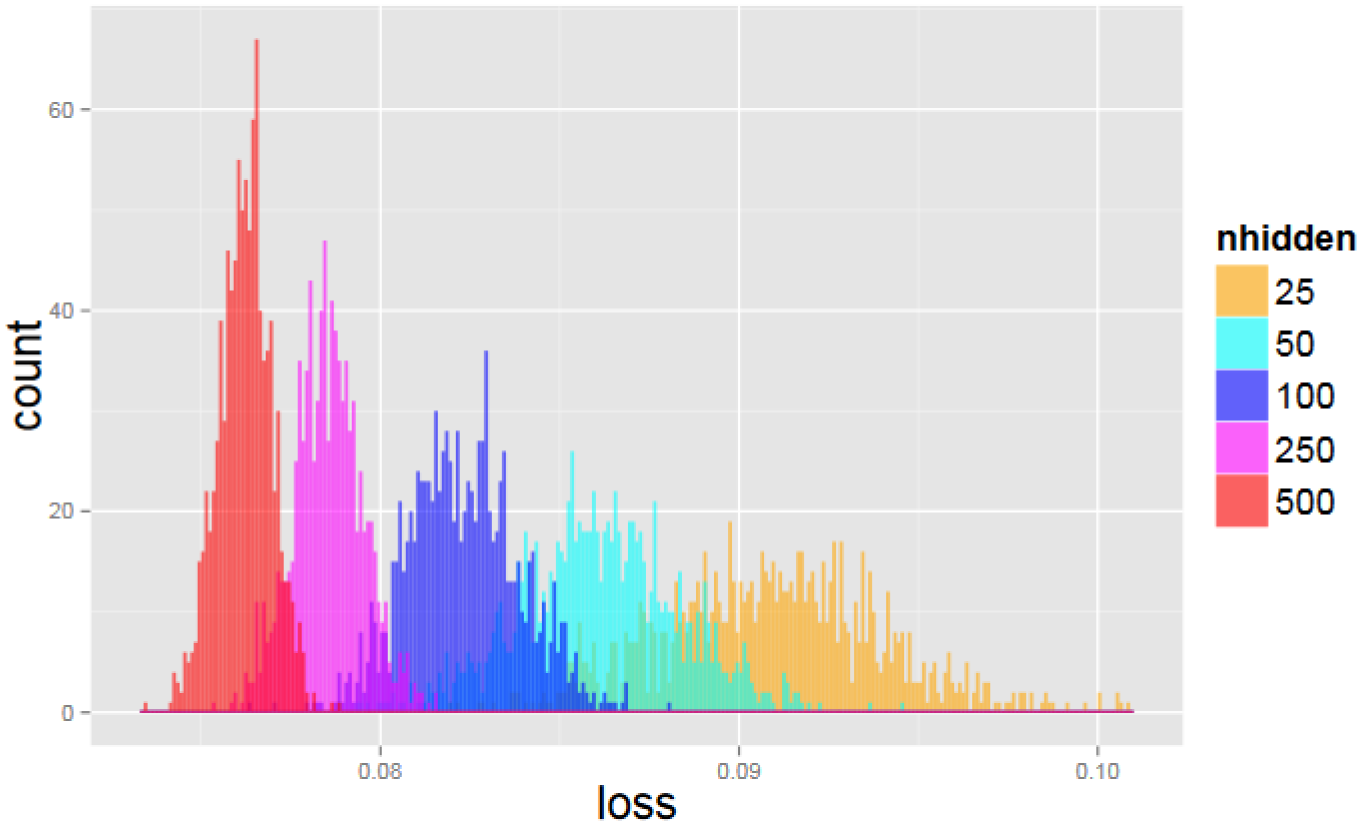
```
net.fc1.weight.data, net.fc1.bias.data, net.fc2.weight.data # net.fc2.bias.data
(tensor([[-0.5727,  0.1885, -0.4232],
         [-0.1383, -0.2233, -0.5384],
         [-0.3583,  0.1175, -0.5696],
         [-0.4284,  0.1711,  0.0918],
         [-0.5539, -0.2273,  0.4973]]),
 tensor([ 0.5525, -0.4201, -0.5736,  0.0464, -0.0297]),
 tensor([[-0.1064, -0.3029,  0.4057,  0.0953,  0.2823]]))
```

**или**

```
from torch import nn
net = nn.Sequential(nn.Linear(3, 5), nn.ReLU(), nn.Linear(5, 1), nn.Sigmoid())
net(x)
```

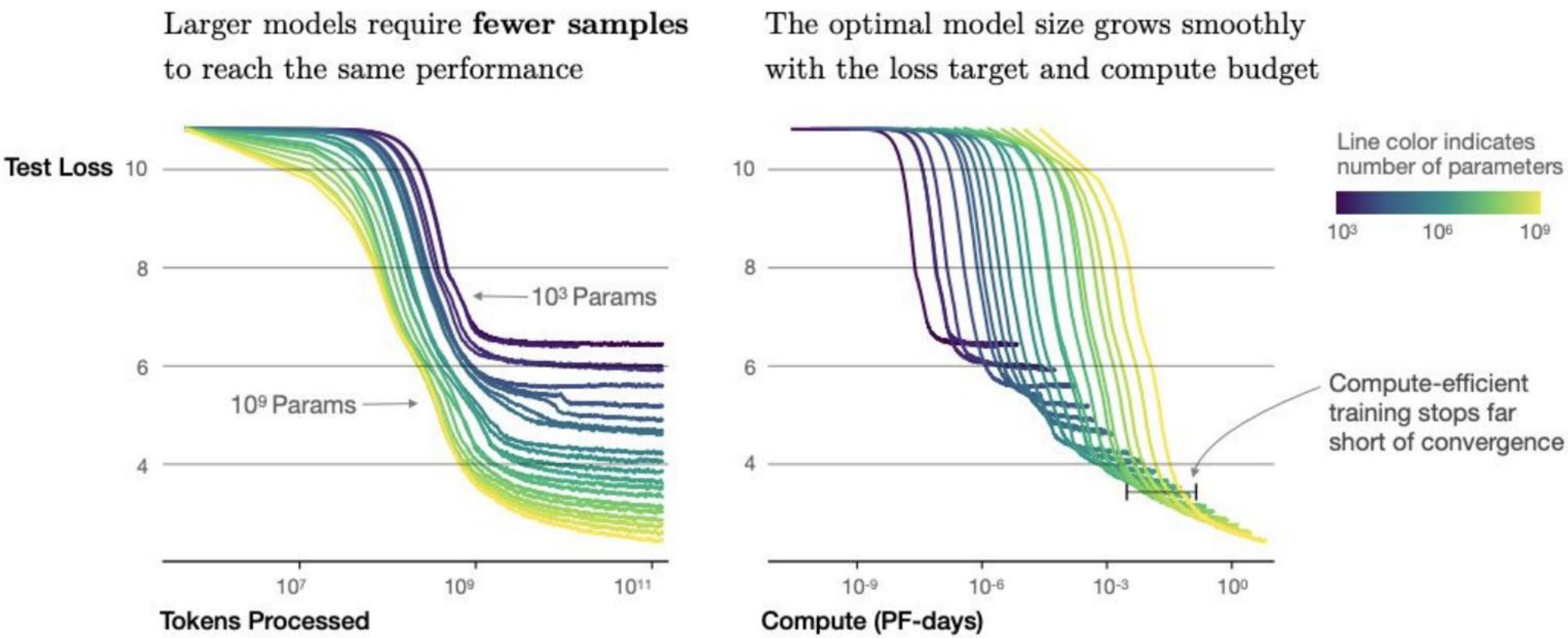
**как реализовать `Feedforward([3, 4, 5, 3, 1])`?**

# Зачем нужны глубокие нейронные сети




Anna Choromanska, Mikael Henaff, Michael Mathieu, Gérard Ben Arous, Yann LeCun «The Loss Surfaces of Multilayer Networks» 2015, https://arxiv.org/abs/1412.0233

## Зачем нужны глубокие нейронные сети




**Большие модели требуют меньше данных!**

stateofai 2020

## Глубокие нейронные сети

**Много слоёв**

**Много данных**

**Достаточно вычислительных мощностей**

## Обучение

**Как принято…**
**минимизация регуляризованного эмпирического риска**

$$\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} L(a(x_i \mid w), y_i) + \lambda R(w) \to \min_{w}$$

**Задача оптимизации невыпуклая!**

**«Настройка» нейронной сети – получение весов** $w$

**Метод стохастического градиента (SGD)**

$$w^{(t+1)} = w^{(t)} - \eta\, \nabla[L(a(x_i \mid w^{(t)}), y_i) + \lambda R(w^{(t)})]$$

**т.к. очень много слагаемых… и так быстрее;)**
**где здесь неточность?**

## Метод стохастического градиента

**1. Случайная инициализация весов** $w^{(0)} \sim \mathrm{norm}(0,\sigma^2)$

**2. Цикл по t до сходимости**

**2.1. Выбираем случайный объект** $x_i$

**2.2. Вычисляем градиент** $\nabla[L(a(x_i \mid w^{(t)}), y_i) + \lambda R(w^{(t)})]$

**2.3. Адаптация весов** $w^{(t+1)} = w^{(t)} - \eta\,\nabla[L(a(x_i \mid w^{(t)}), y_i) + \lambda R(w^{(t)})]$

**почему такая инициализация?**

# Функции ошибки

## Классификация – logloss (CrossEntropyLoss)

$$L((a_1,\ldots,a_l),y) = -\log\frac{\exp(a_y)}{\sum_{j=1}^{l}\exp(a_j)} = -a_y + \log\sum_{j=1}^{l}\exp(a_j)$$

**такая реализация не очень «устойчива»**

**(сумма больших экспонент, разница близких чисел)**

**– Часто при реализации делают так:**

$$-a_y + \max\{a_j\} + \log\left(\sum_{j=1}^{l}\exp(a_j - \max\{a_j\})\right)$$

## Минутка кода

```
input = torch.randn(3, 5, requires_grad=True) # m x l
target = torch.randint(5, (3,), dtype=torch.int64)
loss = F.cross_entropy(input, target)
loss.backward()

input, target, loss

(tensor([[-0.0691, -1.5644, -0.3935,  0.2211,  1.3458],
         [-2.3893,  1.2955,  0.0244, -2.0838,  1.0790],
         [-0.6185, -0.0333,  0.2944, -0.6185,  0.5702]], requires_grad=True),
 tensor([4, 3, 1]),
 tensor(2.1341, grad_fn=<NllLossBackward>))
```

перечисляются номера классов

## Обратное распространение градиента (Backpropagation)

**Идея: вычисление производной сложной функции**

$$\nabla f(w, g(w), h(w)) = \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial g}\nabla g(w) + \frac{\partial f}{\partial h}\nabla h(w)$$

### Автоматическое дифференцирование

**Прямое распространение**

$$x, w \to f(x, w, g(x, w), h(x, w))$$

**вычисление ответов, функции ошибки**

**Обратное распространение**

$$x, w, \nabla g, \nabla h \to \nabla f$$

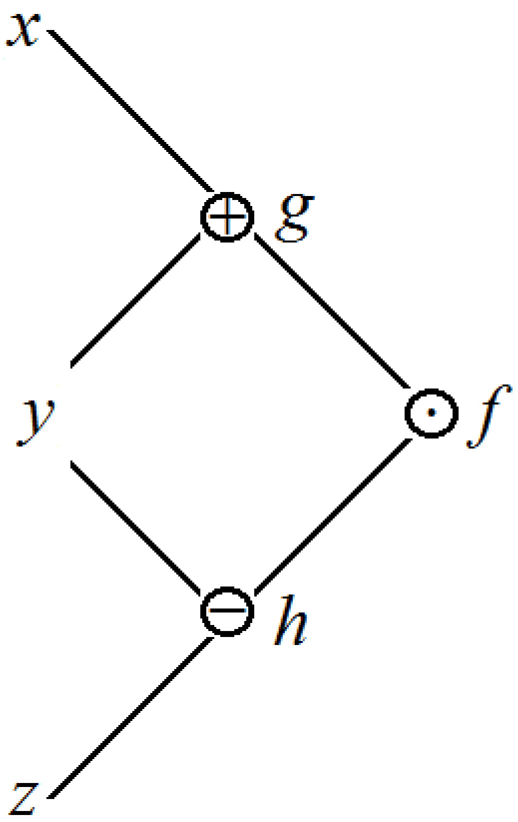
**вычисление градиентов**

# Нейросеть – вычислительный граф

**Другой взгляд на НС**
**вершины – переменные (входные, внутренние, выходные)**
**рёбра – зависимости (+ веса)**
**слой – операция**

тут м.б. более широкое понятие слоя:
линейная комбинация,
нелинейность,
...

## Вычисление градиента на графе



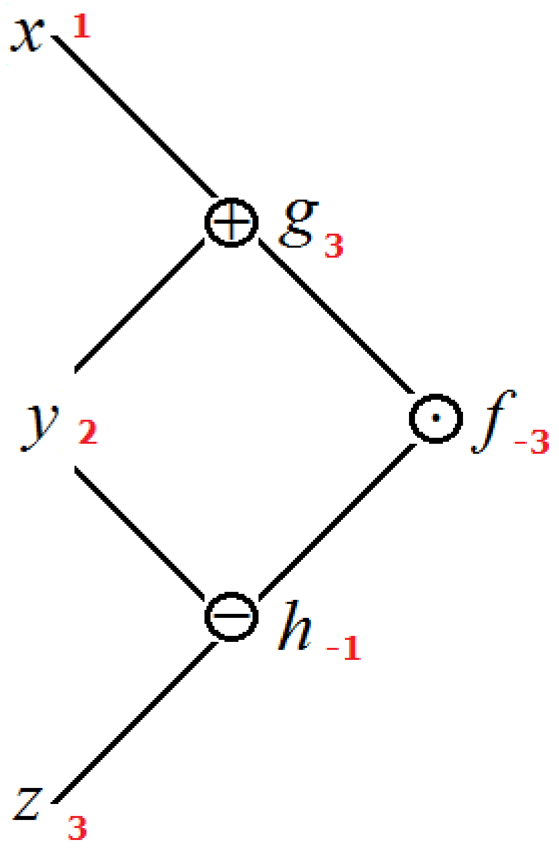

$$f=(x+y)\cdot(y-z)$$

$$f(x,y,z)=\underbrace{(x+y)}_{g(x,y)}\cdot\underbrace{(y-z)}_{h(y,z)}$$

**Как проводится вычисление функции?**

$$x,y,z=1,2,3$$

## Вычисление градиента на графе




$$f = (x+y)\cdot(y-z)$$

$$f(x,y,z) = \underbrace{(x+y)}_{g(x,y)}\cdot\underbrace{(y-z)}_{h(y,z)}$$

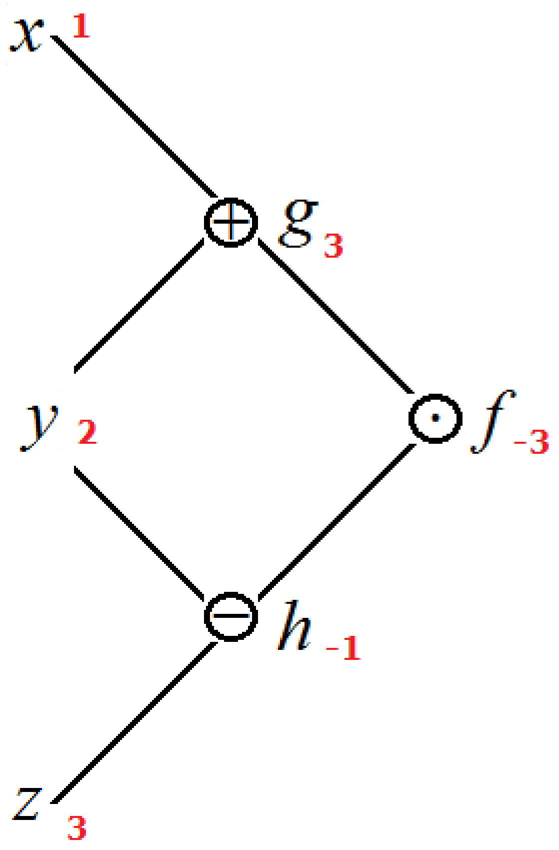
**Как проводится вычисление функции?**

$$x, y, z = 1, 2, 3$$

**«Прямой ход»**

# Вычисление градиента на графе

$$f=(x+y)\cdot(y-z)$$




$$f(x,y,z)=\underbrace{(x+y)}_{g(x,y)}\cdot\underbrace{(y-z)}_{h(y,z)}$$

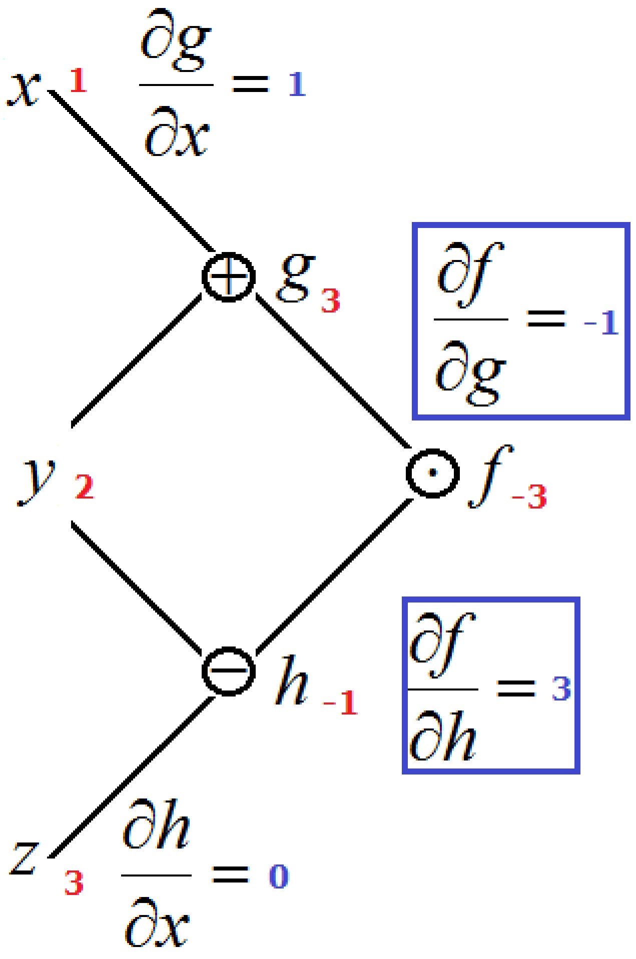
**Как проводится вычисление производных?**

$$\frac{\partial f}{\partial g}=h,\ \frac{\partial f}{\partial h}=g$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=1,\ \frac{\partial h}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x}$$

## Вычисление градиента на графе




$$\frac{\partial f}{\partial x} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial g}} \frac{\partial g}{\partial x} + \boxed{\frac{\partial f}{\partial h}} \frac{\partial h}{\partial x}$$

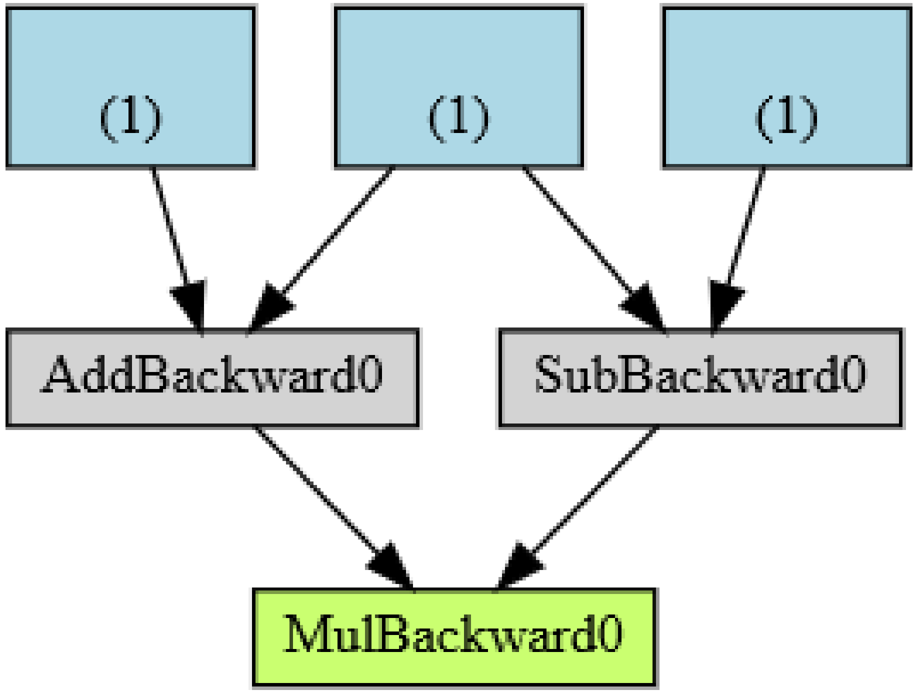
$$f(x,y,z) = \underbrace{(x+y)}_{g(x,y)} \cdot \underbrace{(y-z)}_{h(y,z)}$$

**Как проводится вычисление производных?**

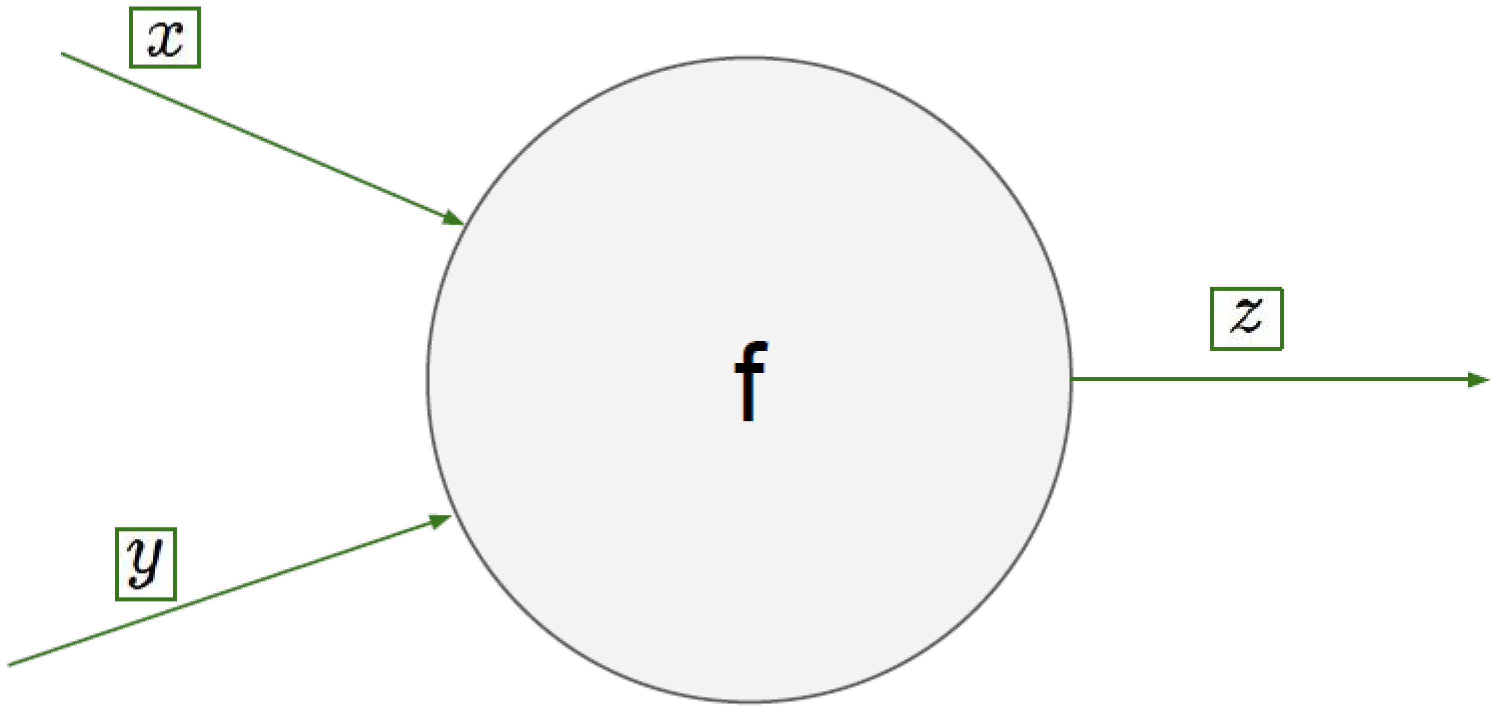
**«Обратный ход»**

# Минутка кода: PyTorch

```
import torch
from torch.autograd import Variable

# переменные
x = Variable(torch.Tensor([1]), requires_grad=True)
y = Variable(torch.Tensor([2]), requires_grad=True)
z = Variable(torch.Tensor([3]), requires_grad=True)

f = (x + y) * (y - z) # прямой проход - вычисление

f.backward() # обратный проход - выч. производных
x.grad, y.grad, z.grad # производные

(tensor([-1.]), tensor([2.]), tensor([-3.]))

from torchviz import make_dot

make_dot(f)
```



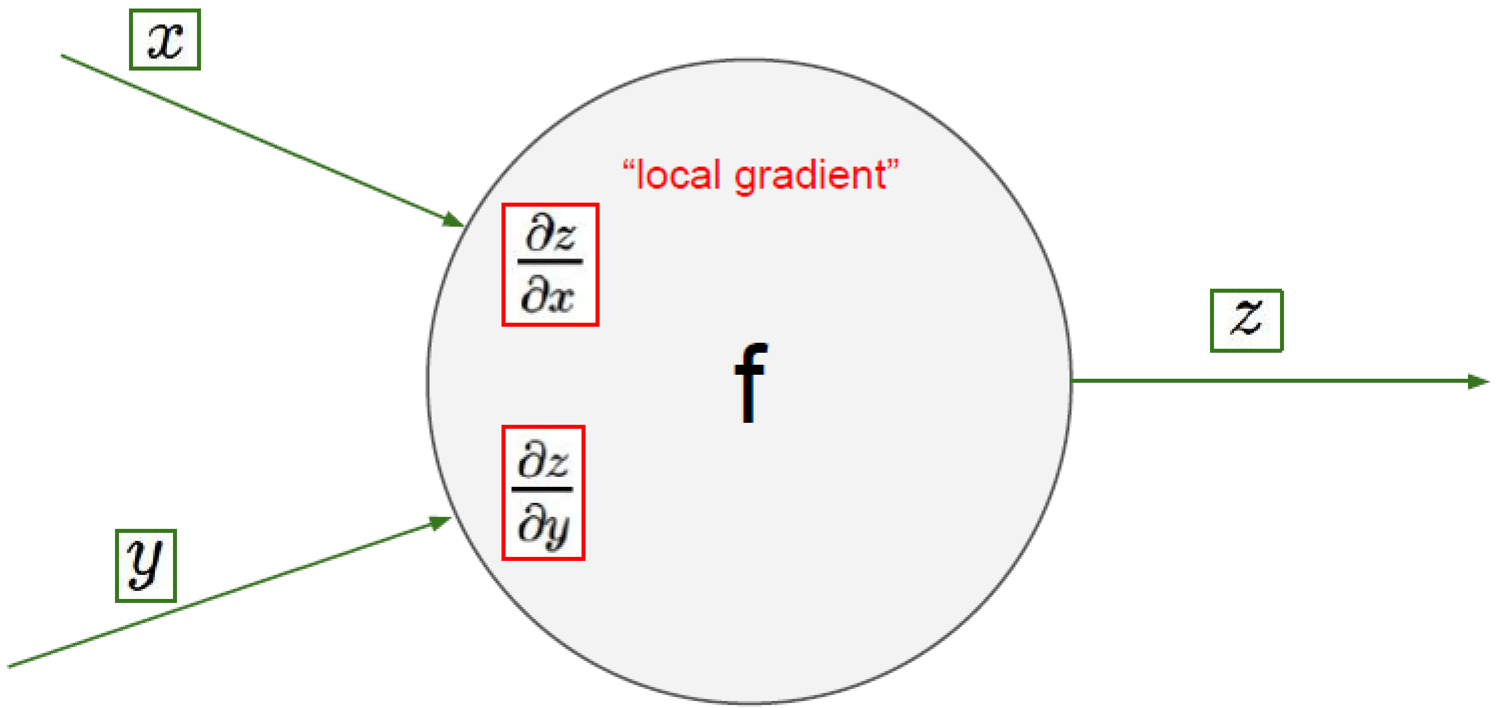
## Обратное распространение градиента (Backpropagation)




http://cs231n.stanford.edu/2017/index.html

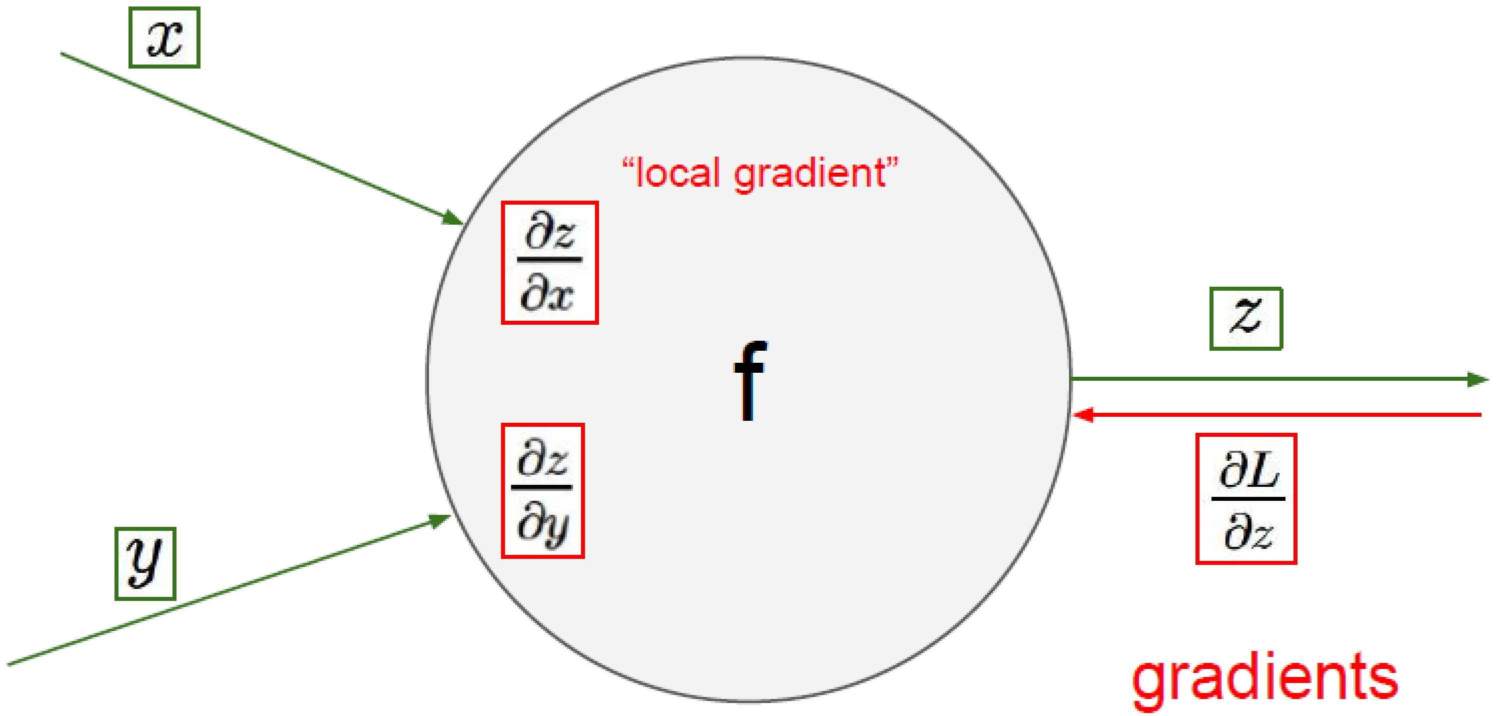
**Обратное распространение = SGD + дифференцирование сложных функций**

# Обратное распространение градиента (Backpropagation)



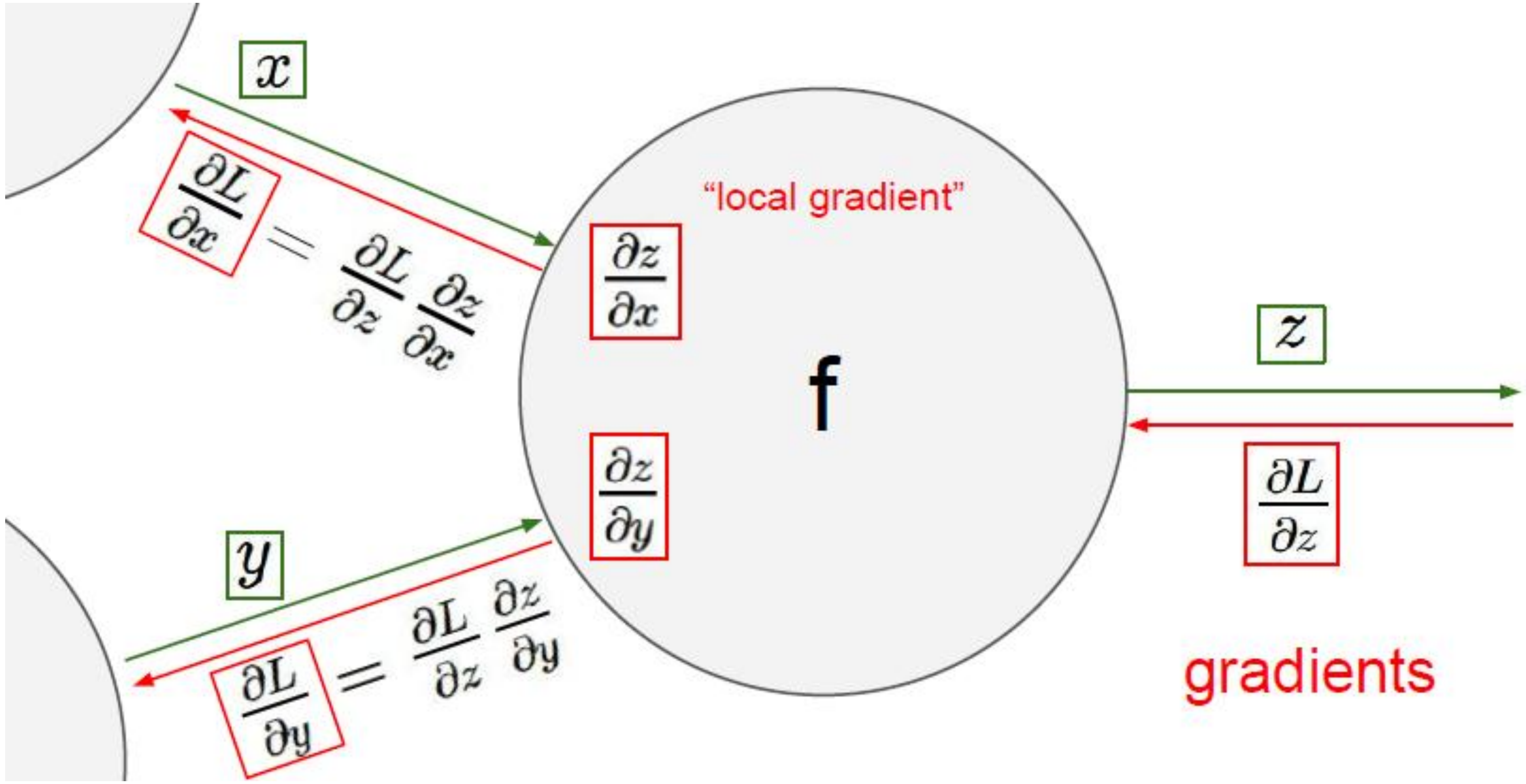

http://cs231n.stanford.edu/2017/index.html

# Обратное распространение градиента (Backpropagation)



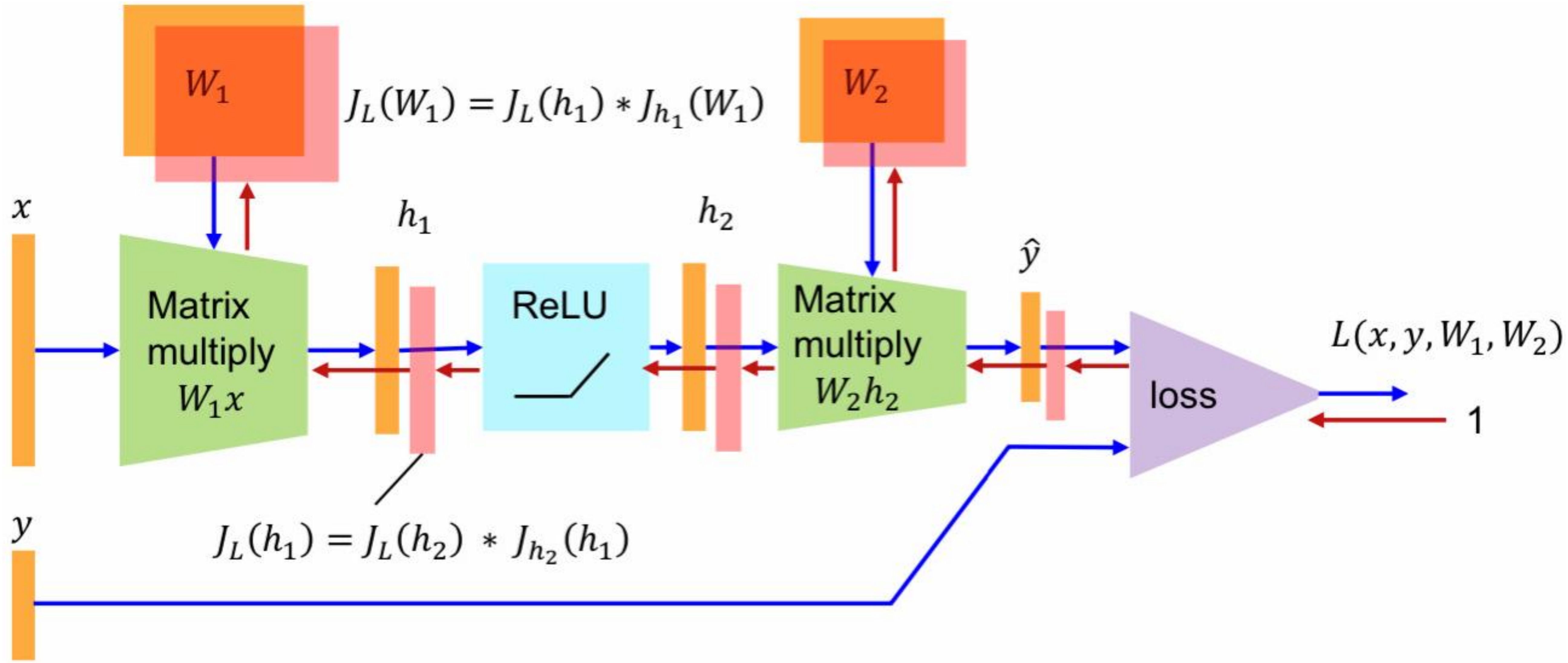

http://cs231n.stanford.edu/2017/index.html

## Обратное распространение градиента (Backpropagation)



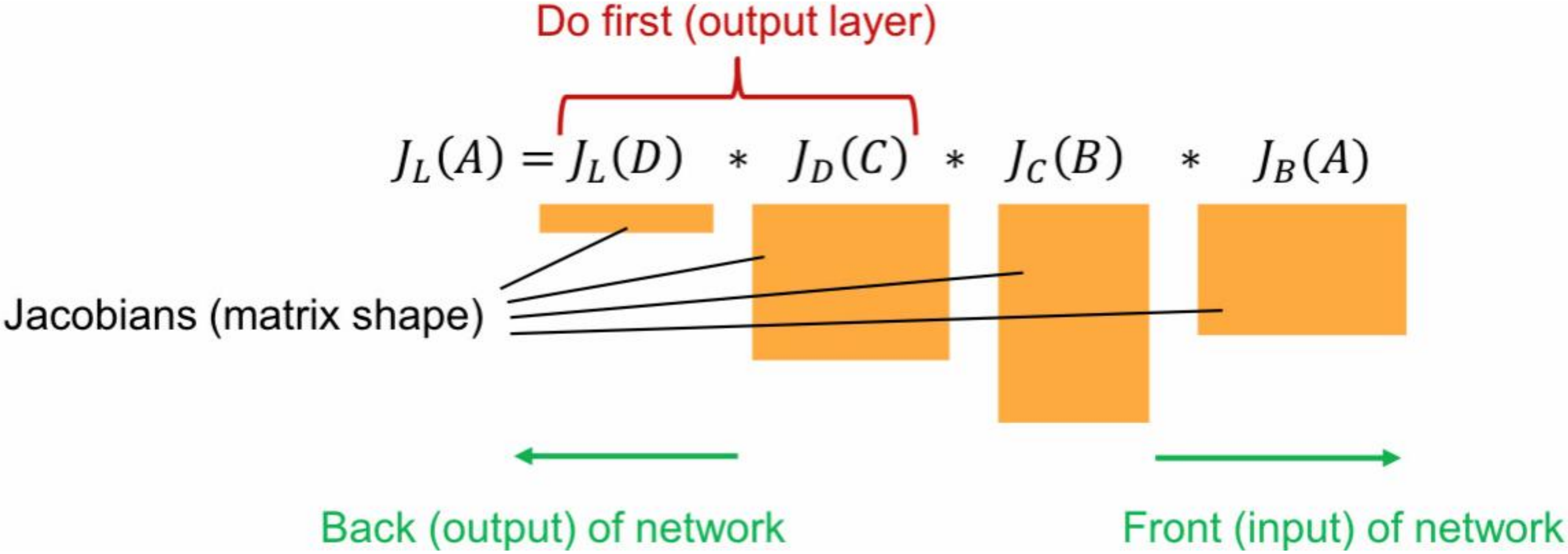

http://cs231n.stanford.edu/2017/index.html

# Обратное распространение градиента (Backpropagation)




https://bcourses.berkeley.edu/courses/1487769/pages/cs-l-w-182-slash-282a-designing-visualizing-and-understanding-deep-neural-networks-spring-2020

# Обратное распространение градиента (Backpropagation)

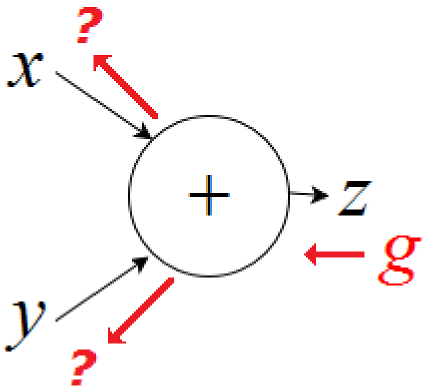



**слева – строка, т.к. ошибка – скаляр**

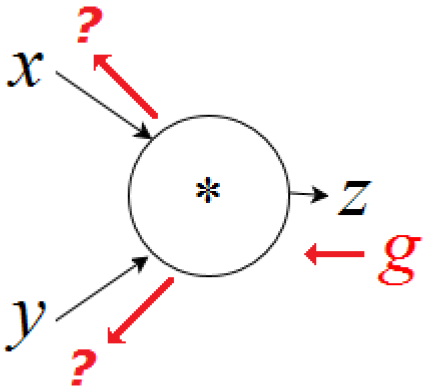
## Прохождение градиента через гейты

**Как здесь проходит градиент?**

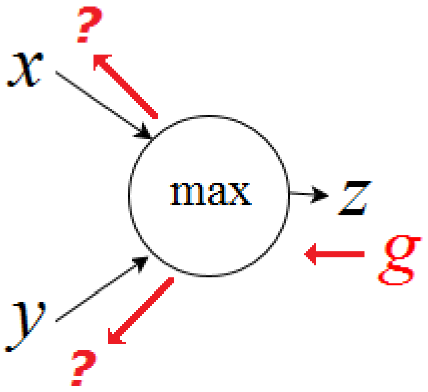
$$z = x + y$$



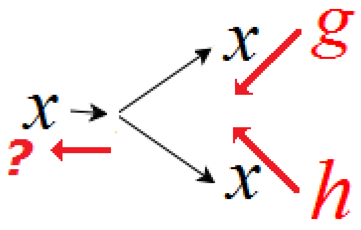

$$z = x * y$$




$$z = \max(x, y)$$




$$z_1 = z_2 = x$$

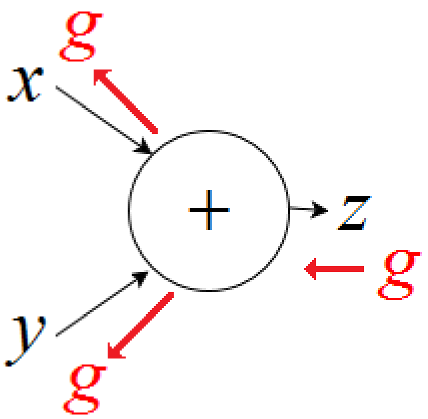


## Прохождение градиента через гейты

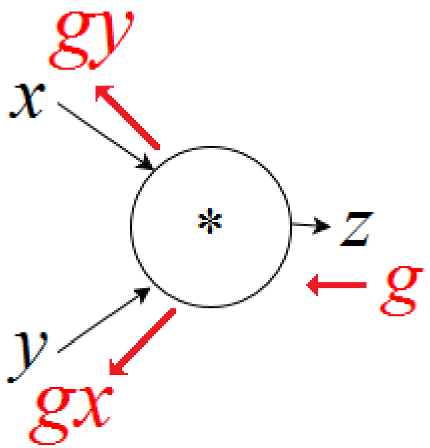
**Как здесь проходит градиент?**

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}= = g\frac{\partial (x+y)}{\partial x}=g$$

$$z=x+y$$




$$z=x*y$$

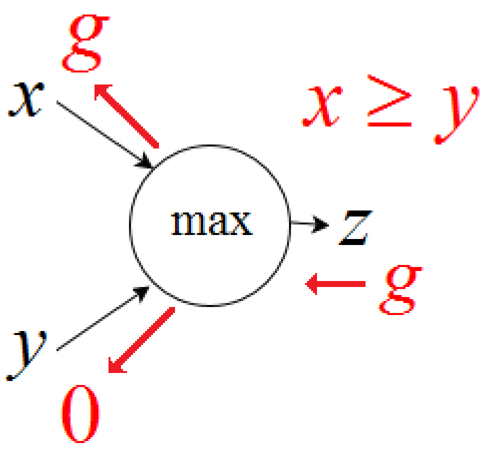



$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}= = g\frac{\partial (xy)}{\partial x}=gy$$

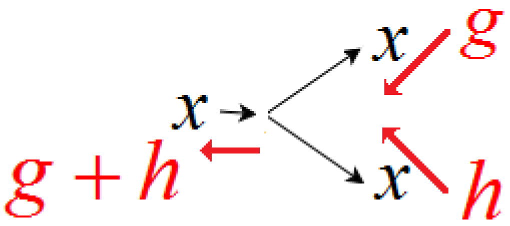
$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}= = g\frac{\partial \max(x,y)}{\partial x}=\begin{cases} g, & x>y\\ 0, & y\geq x\end{cases}$$

**А что при x=y?!**

$$z=\max(x,y)$$

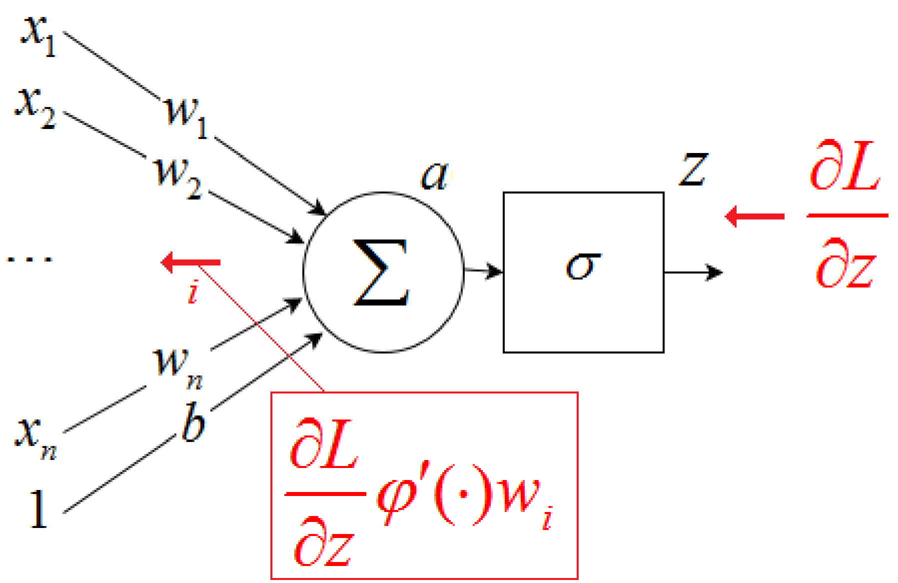



$$z_1=z_2=x$$




**Подумать, почему так? Потом станет яснее…**

## Прохождение градиента через нейрон




$$z = \varphi(w_0 + w_1x_1 + \ldots w_nx_n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial L}{\partial z}\varphi'(\cdot)w_i$$

**при прохождении градиента через нейрон происходит умножение на производную функции активации**

## Проблема затухания градиента

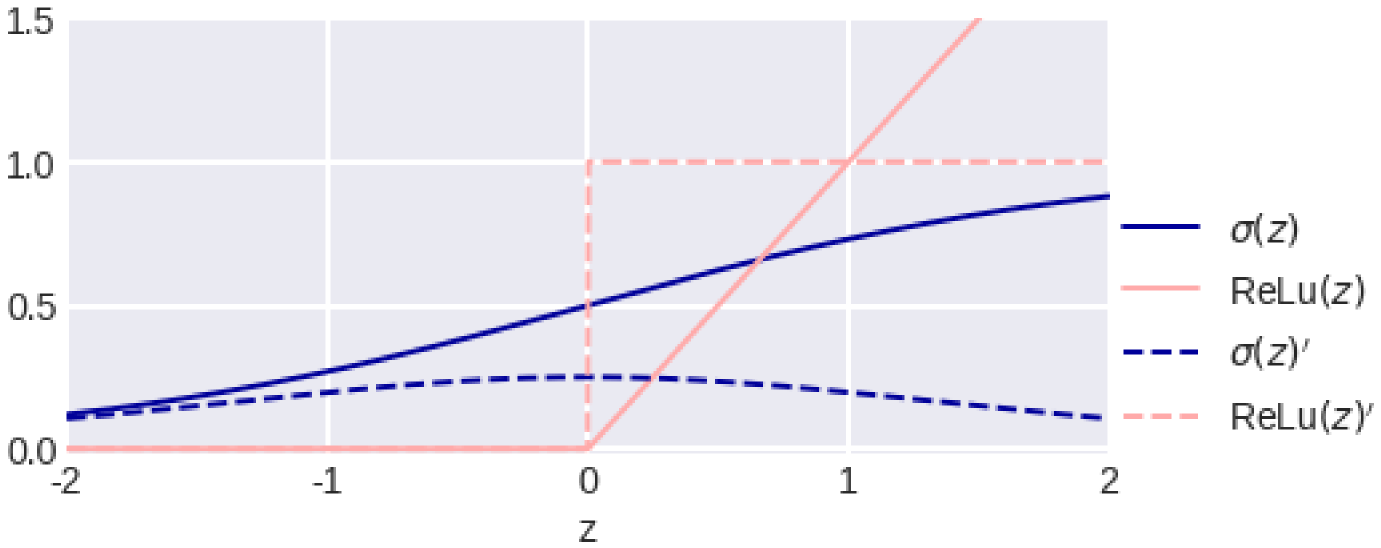
**Производная сигмоиды при «насыщенном сигнале» близка к нулю**

$$\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

$$\frac{\partial\sigma(z)}{\partial z} = \sigma(z)(1-\sigma(z))$$

$$\mathrm{ReLU}(z) = \max(0, z)$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{ReLU}(z)}{\partial z} = I[z>0]$$




**ReLU = Rectified Linear Unit**

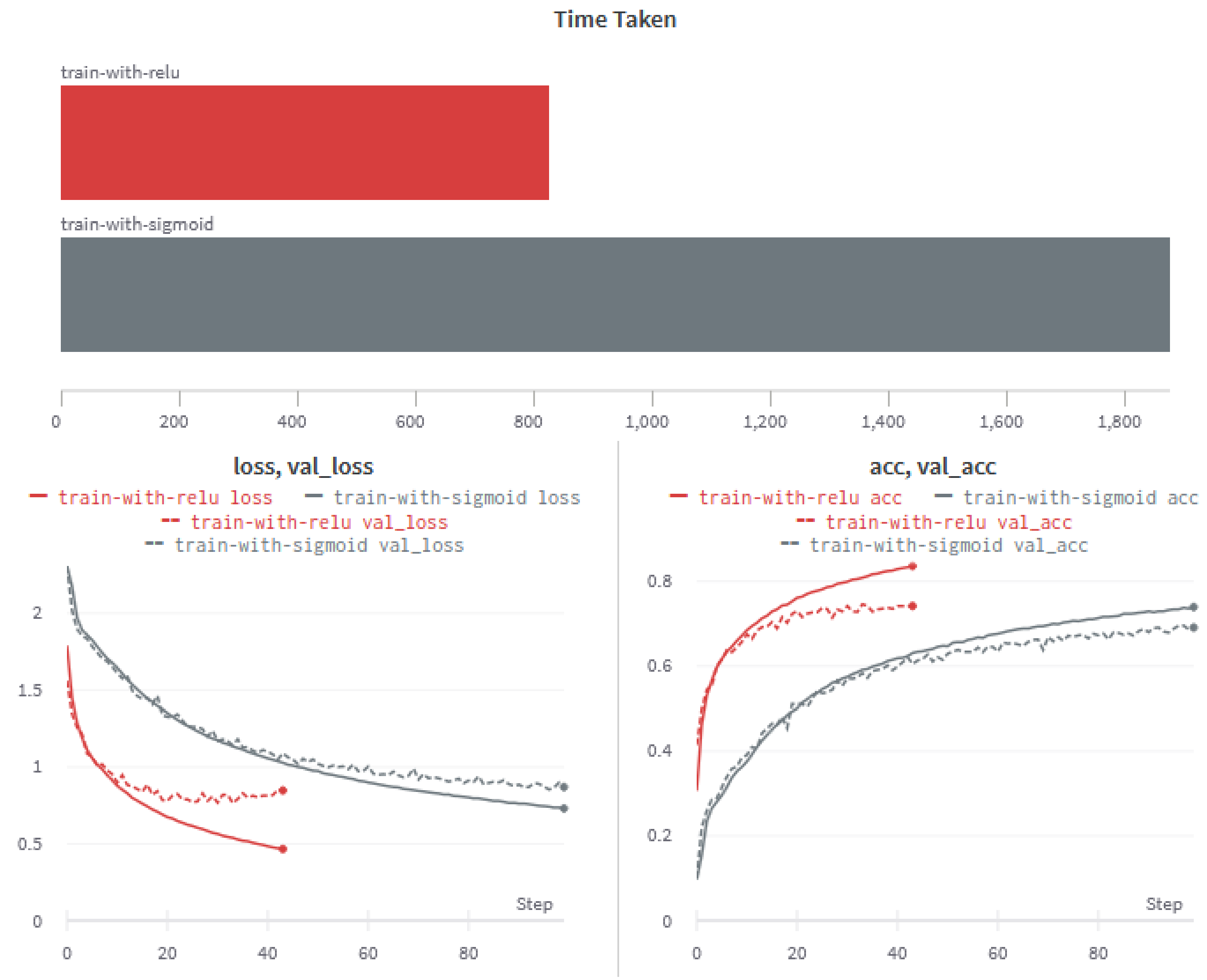
## Что плохого в сигмоиде

- «убивает» градиенты
- выходы не отцентрированы (легко устранить $\to$ tanh)
- вычисление экспоненты всё-таки дорого…

## Что хорошего в ReLU

- быстро вычисляется
- есть теоретические / биологические обоснования
- зоны константного градиента и обнуления (разреженное решение)

# Sigmoid vs ReLU




https://wandb.ai/ayush-thakur/dl-question-bank/reports/ReLU-vs-Sigmoid-Function-in-Deep-Neural-Networks-Why-ReLU-is-so-Prevalent--VmlldzoyMDk0MzI

# Ещё функции активации

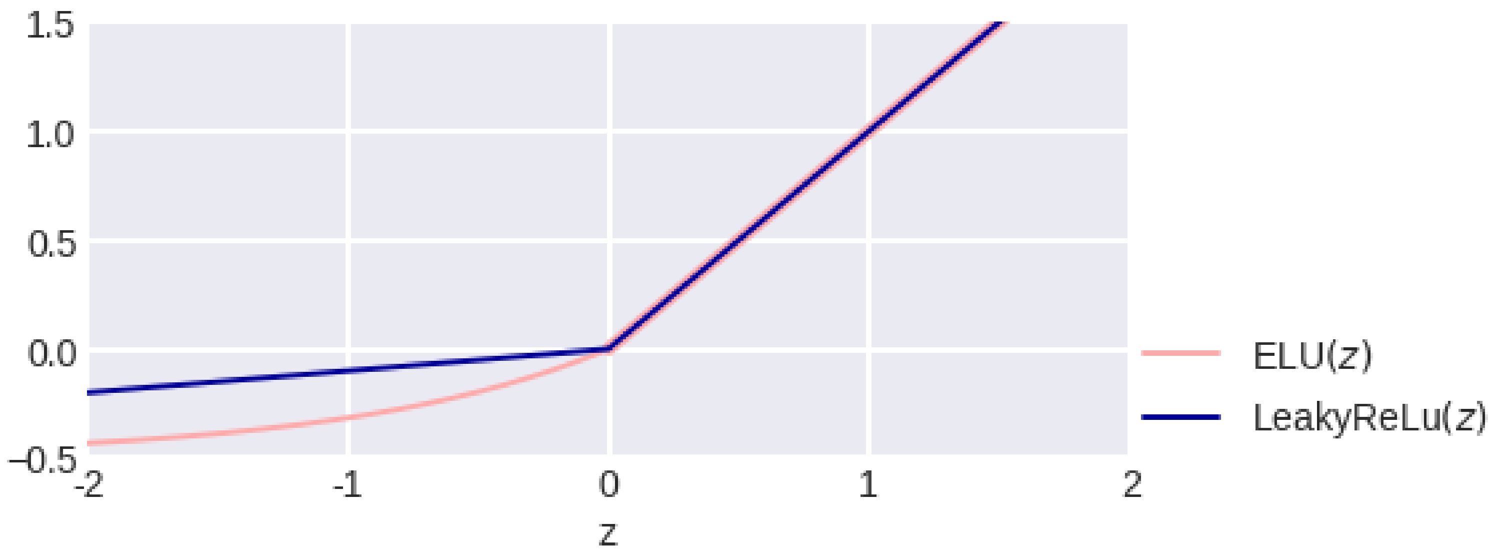
$$\text{LeakyReLU}(z) = \max(0.1z, z)$$

**Exponential Linear Unit**

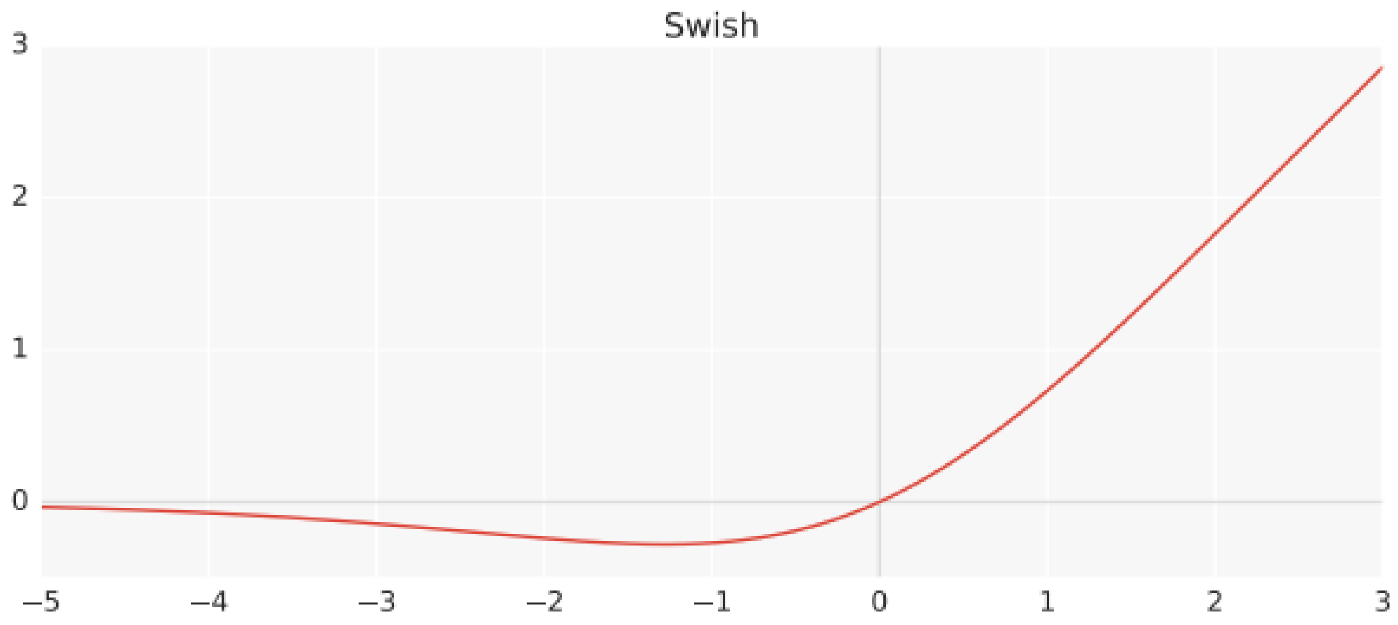
$$\text{ELU}(z) = \begin{cases} z, & z \ge 0, \\ \alpha(e^z - 1), & z < 0. \end{cases}$$

**Scaled Exponential Linear Unit**

$$\text{SELU}(z) = \lambda\,\text{ELU}(z)$$



# Ещё функции активации

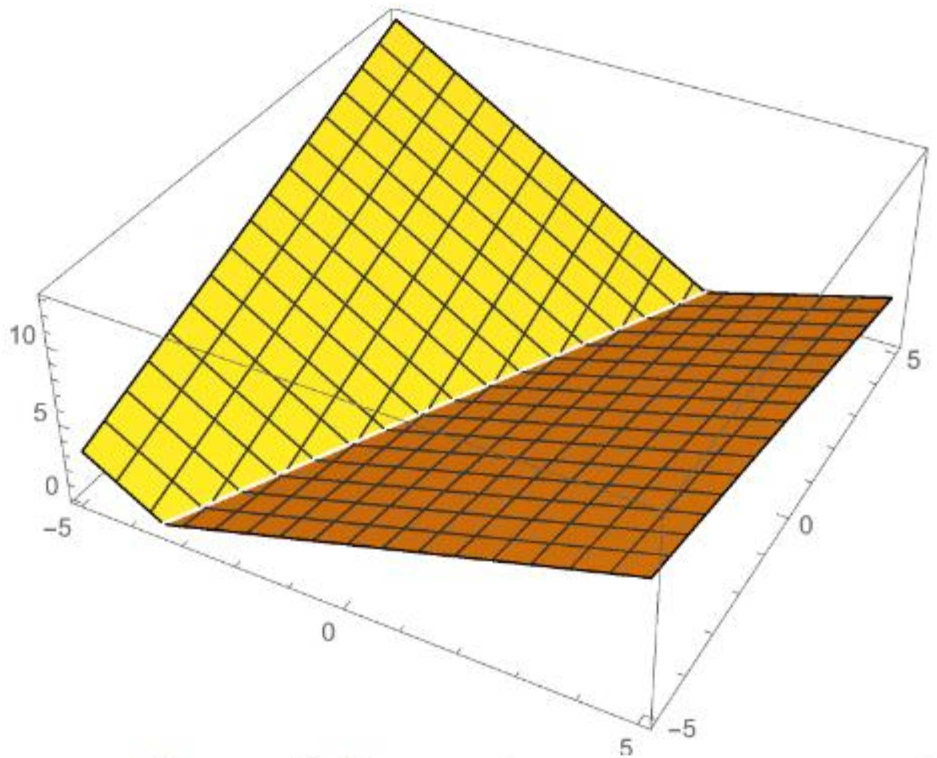



## Swish

$$\mathrm{swish}(z) = x \cdot \sigma(\alpha x)$$

**При замене ReLu на swish в глубоких сетях немного (<1%) улучшается качество**

# Ещё функции активации




$\max\{x_1 - 0.5x_2 + 1, -2x_1 + x_2 - 2\}$

## Maxout

$$\mathrm{Maxout}(z) = \max(w^{\mathrm{T}}z + w_0, v^{\mathrm{T}}z + v_0)$$

**не совсем функция активации, т.к. есть параметры**

https://raw.githubusercontent.com/epfml/ML_course/master/lectures/08/lecture08d_neural_nets.pdf

# Ещё функции активации

**Gaussian Error Linear Unit**

**(Google's BERT, OpenAI's GPT-2)**

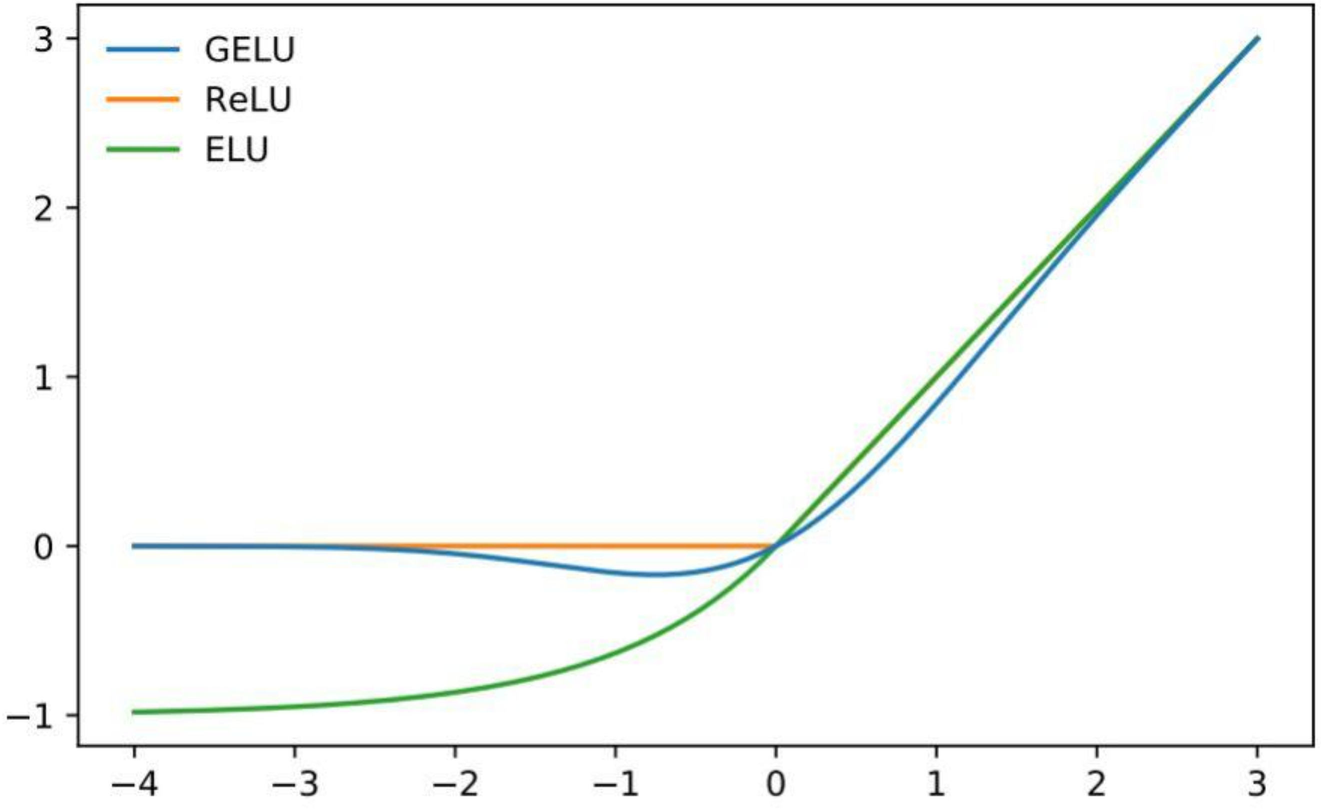
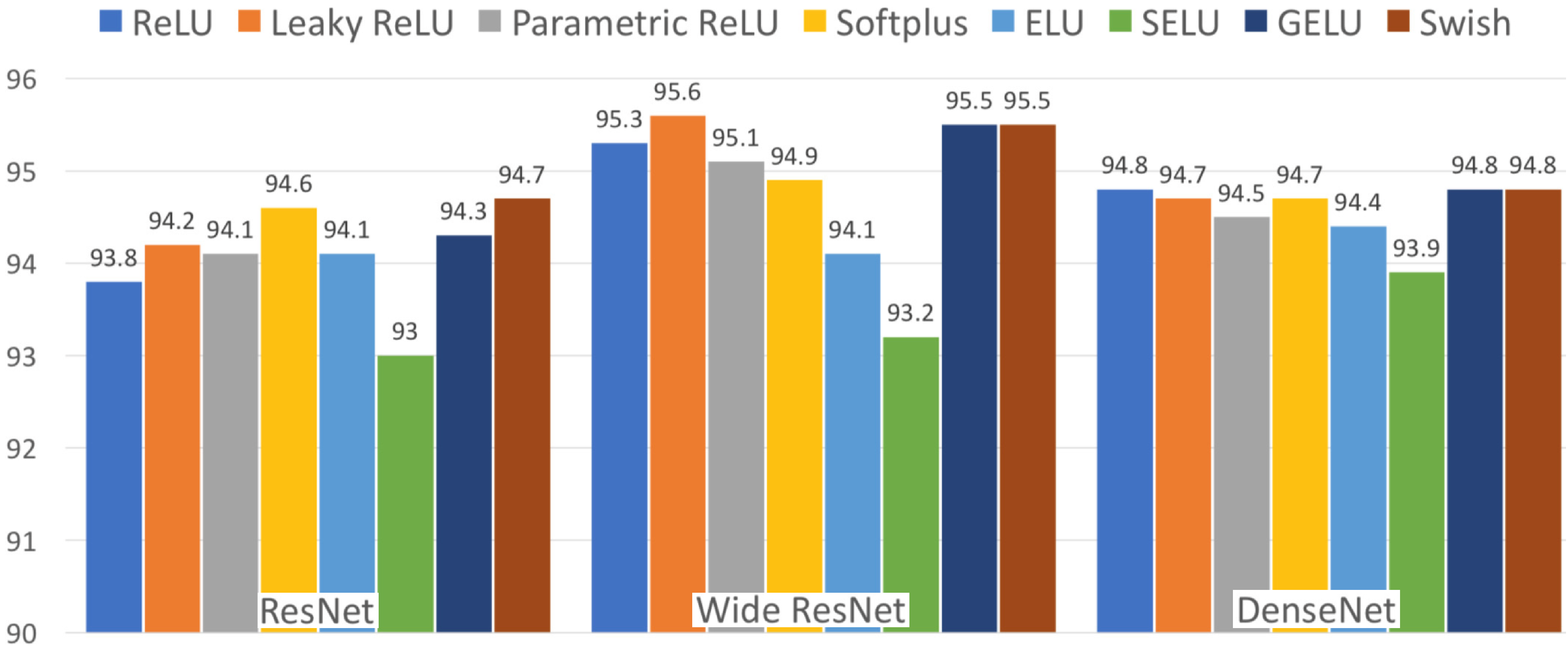



Figure 1: The GELU ($\mu = 0, \sigma = 1$), ReLU, and ELU ($\alpha = 1$).

$$\mathrm{GELU}(z) = \frac{z}{2}\left(1 + \tanh\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}(z + \alpha z^3)\right)\right)$$

$$\alpha = 0.044715$$

## Сравнение на CIFAR10




[Juhstin Johnson] / https://arxiv.org/pdf/1710.05941.pdf

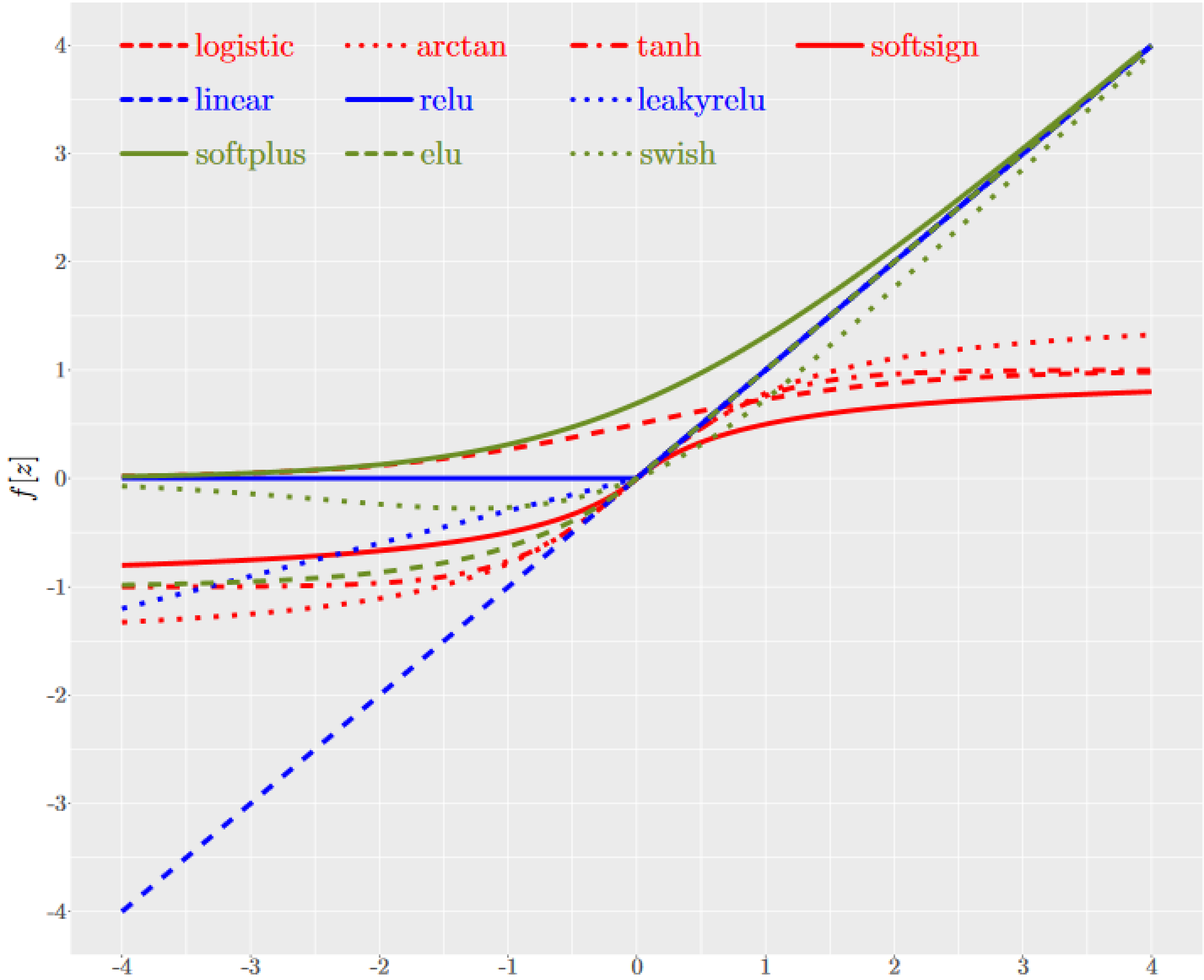
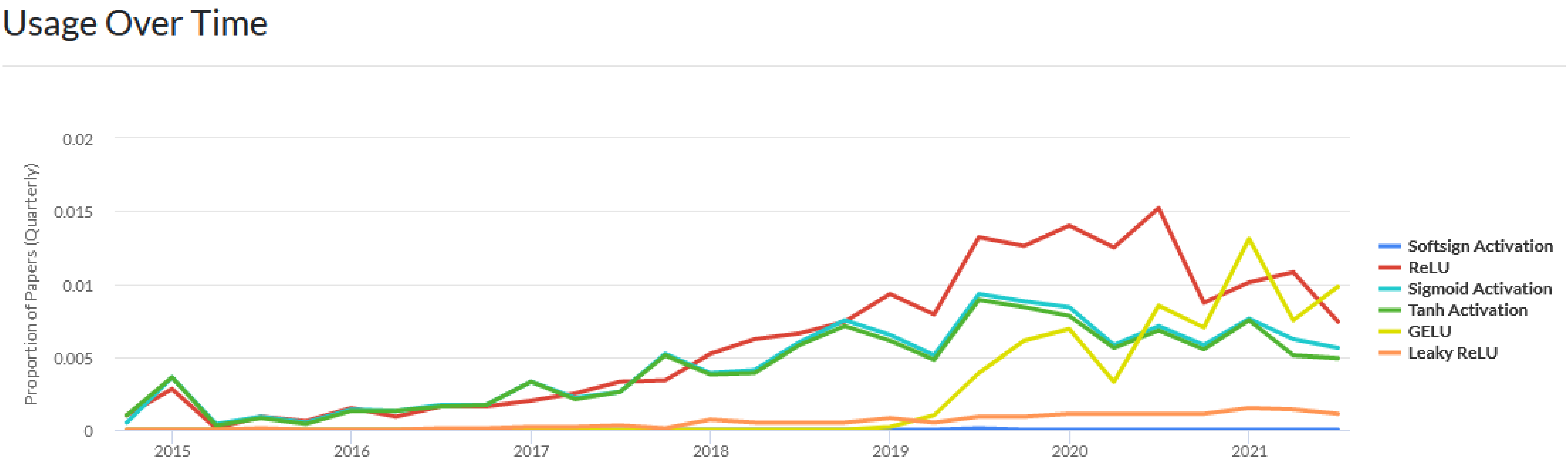



Figure 8: Overview of sigmoid functions (red, see Section 2.1), piecewise-linear functions (blue, see Section 2.2), and other functions (green, see Section 2.3). (Best seen in color.)

**https://arxiv.org/pdf/2101.09957v1.pdf**

# «Популярность» функций активации




https://paperswithcode.com/method/softsign-activation

## Проблемы НС

**Большая сложность модели → переобучение**

следующая лекция

**Нестабильность обучения**

по всему курсу

**Большое время обучение, много данных**

GPU, TPU и т.д.

собирание данных, аугментации и т.п.

эффективные современные алгоритмы настройки

## Итог

**НС – нелинейное обобщение линейных алгоритмов**

- последовательное преобразование признакового пространства
- ансамбль алгоритмов
- суперпозиция «логистических регрессий»
- граф вычислений

**высокая функциональная выразимость**
**обучение градиентными методами**

**Дальше: как делать эффективное обучение?**

# Литература

**Производные на компьютере**

Atilim Gunes Baydin, Barak A. Pearlmutter, Alexey Andreyevich Radul, Jeffrey Mark Siskind «Automatic differentiation in machine learning: a survey» 2015-2018
https://arxiv.org/abs/1502.05767

**лучшая книга по DL**

Ian Goodfellow, Yoshua Bengio, Aaron Courville «Deep Learning»
http://www.deeplearningbook.org/

## Производные на компьютере:

**Аналитическая формула**

**Численный градиент**

**Символьное дифференцирование**

**Алгоритмическое дифференцирование**

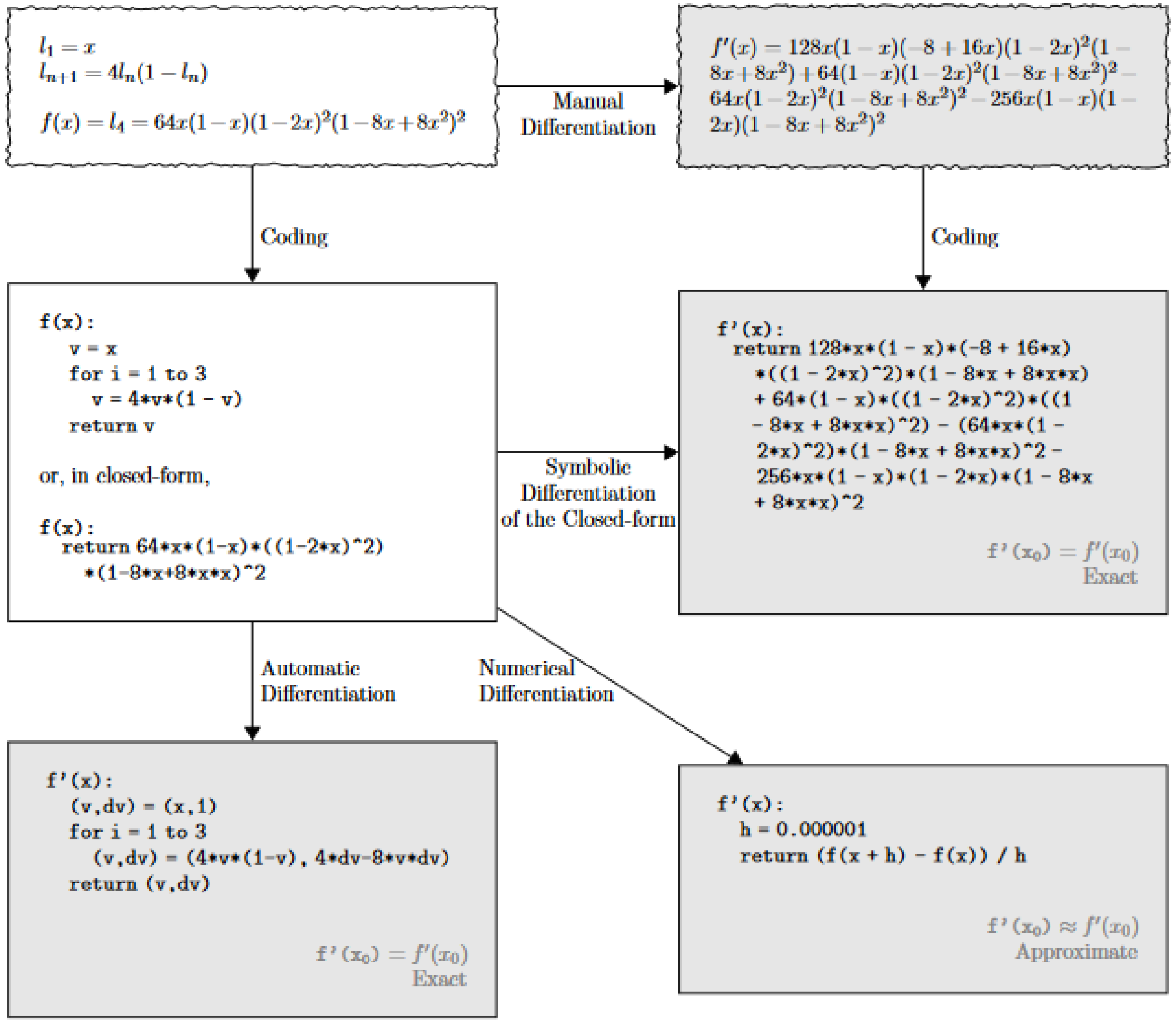



Figure 2: The range of approaches for differentiating mathematical expressions and computer code, looking at the example of a truncated logistic map (upper left). Symbolic differentiation (center right) gives exact results but requires closed-form input and suffers from expression swell; numerical differentiation (lower right) has problems of accuracy due to round-off and truncation errors; automatic differentiation (lower left) is as accurate as symbolic differentiation with only a constant factor of overhead and support for control flow.