1 (2). Определим $f(n)$ как количество выводов «Hello, World!» следующей функцией (на входе n). Оцените асимптотику роста $f(n)$.

```
Function HelloWorld(n):
    if n > 2020 then
        HelloWorld(⌊n/4⌋);
        print("Hello, World!");
        HelloWorld(⌊n/4⌋);
        for i = 1 to 2020 do
            print("Hello, World!");
        end
        HelloWorld(⌊n/4⌋);
    else
        for i = 1 to n do
            print("Hello, World!");
        end
    end
end
```

2 (2). Предположим, удалось установить, что любое число можно возвести в квадрат за $O(n)$, где n – длина числа в двоичной записи. Докажите, что тогда любые два числа можно перемножать за $O(n)$, где n – длина максимального из чисел в двоичной записи.

Комментарий: *Для простоты можно, считать, что в рекуррентных соотношениях числа не целые, а вещественные. Тогда можно игнорировать округления.*

3 (3). Найдите Θ-асимптотику рекуррент:

a) $T(n) = 36T(\lfloor \frac{n}{6} \rfloor) + n^2$; $T(n) = 3T(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + n^2$; $T(n) = 4T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \lfloor \frac{n}{\log n} \rfloor$.

4 (4). Оцените трудоемкость рекурсивного алгоритма, разбивающего исходную задачу размера n на n задач размеров $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ каждая, используя для этого $\Theta(n)$ операций.

1. Можно считать n степенью двойки.

2*. Решите для произвольного n.

5 (3).[ДПВ 1.33] Постройте эффективный алгоритм для вычисления НОК и оцените его сложность. В данной задаче используется модель вычислений с атомарными битовыми операциями (т. е. время выполнения арифметических действий пропорционально длине чисел).

6 (3). На вход подаётся числовой массив A из n элементов. Требуется найти число инверсий в массиве, т. е. пар индексов (i, j), таких что $i < j$ и $a[i] > a[j]$.

Указание. Модифицируйте алгоритм сортировки слиянием.

7 (2). Докажите, что если $T_1(n) = aT_1(\frac{n}{b}) + f(n)$, $T_2(n) = aT_2(\frac{n}{b}) + g(n)$ и $f(n) = \Theta(g(n))$, то $T_1(n) = \Theta(T_2(n))$.

8 (6). Найдите Θ-асимптотику рекуррентной последовательности $T(n)$, считая что $T(n)$ ограничено константой при достаточно малых n:

а) $T(n) = T(\lfloor \alpha n \rfloor) + T(\lfloor (1-\alpha)n \rfloor) + \Theta(n) \quad (0 < \alpha < 1)$;

б) $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + 2 \cdot T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n)$;

в) $T(n) = 27T(\frac{n}{3}) + \frac{n^3}{\log^2 n}$.

9 (7). На вход подается массив натуральных чисел $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, предложите эффективный алгоритм нахождения непрерывного подмассива $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$ с максимальным произведением количества элементов в подмассиве и минимума по подмассиву.