Структуры данных

1. Реализуйте очередь с помощью двух стеков.

2. Продемонстрируйте работу процедуры `Build_Max_Heap` (второе издание Кормена) построения кучи с максимальным свойством на входе

$$[10,\ 7,\ 6,\ 8,\ 5,\ 4,\ 3,\ 18,\ 16].$$

```
1 Function Build_Max_Heap (a) :
2 |   n = a.size;
3 |   heap_size(a) = n;
4 |   for i = ⌊n/2⌋ downto 1 do
5 |   |   Max_Heapify(a, i);
6 |   end
7 end
```

Процедура `Max_Heapify`(a, i) устраняет коллизии, разрешая их начиная с узла, соответствующего i-му элементу массива.

3. Сортировка HeapSort задана псевдокодом

```
1 Function HeapSort(a) :
2 |   n = a.size;
3 |   Build_Max_Heap(a);
4 |   for i = 1 to n − 1 do
5 |   |   s = heap_size(a);
6 |   |   a[s] = Ext_Max(a);
7 |   end
8 end
```

```
1 Function Ext_Max(a) :
2 |   max = a[1];
3 |   a[1] =
  |    a[heap_size(a)];
4 |   heap_size(a) =
5 |   = heap_size(a) − 1;
6 |   Max_Heapify(a, 1);
7 |   return (max);
8 end
```

Докажите, что сортировка HeapSort работает за $\Theta(n \log n)$.

4. На вход задачи подаётся массив из пар ключ-значение

$$[(k_1, v_1), (k_2, v_2), \ldots, (k_n, v_n)].$$

Необходимо построить бинарное дерево поиска минимальной глубины. Предложите алгоритм, решающий задачу за $\Theta(n \log n)$.

5. Один программист решил хранить двоичное дерево поиска в массиве, используя ту же схему, что и для хранения кучи (во втором издании Кормена). Сколько ячеек массива понадобится ему в худшем случае для хранение дерева с n вершинами?

6. Бинарное дерево поиска имеет очень много ключей, поэтому для его обхода в программе можно использовать только стек во внешней памяти, работающий через запросы, и $O(1)$ оперативной памяти (в ней можно хранить конечное число ключей). На вход подаётся последовательность ключей $k_1, \ldots k_n$, которая помещается в оперативную память. Постройте алгоритм, который возвращает пары (k_i, v_i) для всех ключей последовательности, и при этом совершающий число шагов по дереву, которое отличается от минимально необходимого не больше, чем в два раза.
Примечание. В случае, когда сами ключи находятся недалеко друг от друга их поиск со стартом в корне будет неоптимальным.