

Algorithmes de résolution de systèmes d'équations linéaires

30 septembre 2018

1 Rappels sur le calcul matriciel

Un système d'équations linéaires formé de plusieurs équations linéaires s'écrit :

— En lignes (equation) :

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$$

Il existe dans ce système deux inconnues : x_1 et x_2 qui sont les variables, leurs coefficients dans chaque équation et la valeur constante à droite de chaque équation.

— En colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

le même système est lu verticalement en séparant les coefficients des variables.

— Par matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

On peut rassembler tous les coefficients dans une matrice dont les colonnes sont justement les deux vecteurs à gauche.

On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients réels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

1. Un vecteur ligne u à n composantes appartient à $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et s'écrit $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, son vecteur transposé noté u^T est un vecteur colonne qui appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et s'écrit

$$u^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

2. *Produit*

- Produit scalaire de deux vecteurs $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un scalaire $s = u^T v = \sum_{i=1}^n u_i v_i$.
- Produit d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et d'un vecteur $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur colonne $v \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, $v_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} u_k, \forall i = 1, \dots, m$.
- Produit matriciel : Pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$, le produit de A par B est une matrice $C \in \mathcal{M}_{m,l}(\mathbb{R})$ telle que $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \forall i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, l$.

3. Formes de Matrices

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a pour transposée une matrice notée $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telle que $a_{ji}^T = a_{ij}, \forall i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est dite carrée. Elle est inversible si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ telle que $A.B = B.A = I_n$ où I_n est la matrice identité dont les éléments valent 1 sur la diagonale et 0 partout ailleurs, B est notée A^{-1} .
- $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^T.A = A.A^T = I_n$.
- $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est symétrique si $A = A^T$. (Le produit $A^T.A$ (ou $A.A^T$) est symétrique.)

4. Determinant, vecteurs linéairement indépendants, rang

- Le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est :
pour un indice de ligne i fixé de A : $|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} s_{ij}$ où $s_{ij} = (-1)^{(i+j)} m_{ij}$ et m_{ij} est le déterminant de la matrice A privée de la ligne i et de la colonne j .
- Les vecteurs $u^1, u^2, \dots, u^p \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ sont linéairement indépendants (libres) si

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i u^i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$$

- le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est $Rang(A) = \text{Minimum}\{p, q\}, p \leq n, q \leq n$ où p = Nombre maximum de colonnes linéairement indépendantes dans A et q = Nombre maximum de lignes linéairement indépendantes dans A .

5. Propriétés

Soient A et B deux matrices carrées réelles d'ordre n ,

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$
- $(AB)^{-1} = (B)^{-1} (A)^{-1}$
- les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - A est inversible,
 - $|A| \neq 0$,
 - $Rang(A) = n$,
 - $Ax = 0$ admet comme seule solution le vecteur nul.
 - $\forall b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $Ax = b$ a une solution unique.

6. Valeurs et vecteurs propres

- $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Une valeur propre λ de la matrice A est une des racines du polynôme $|A - \lambda I_n| = 0$.
- Le vecteur propre colonne $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associé à la valeur propre λ est solution du système $Av = \lambda v$.

- Le spectre d'une matrice A noté $sp(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A .
Le rayon spectral est $\rho(A) = \max\{|\lambda_i| : \lambda_i \in sp(A)\}$.
- A est inversible si et seulement si $0 \notin sp(A)$.

2 Méthodes de résolution d'un système $Ax = b$

Il existe deux types de méthodes de résolution :

- Les méthodes directes : Transformer le système de façon à obtenir des équations plus faciles et plus rapides à résoudre. La solution obtenue est exacte.
- Les méthodes indirectes ou itératives : Choisir un point initial puis passer d'un point à un autre jusqu'à atteindre un point qui se rapproche de la solution.

2.1 Méthodes directes

- *La méthode de Cramer :*

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ inversible, le système $Ax = b$ admet comme solution le vecteur \bar{x} dont les composantes sont

$$\bar{x}_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \forall i = 1, \dots, n$$

où A_i est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa $i^{\text{ème}}$ colonne par le vecteur b .

Cet algorithme est élégant mais peu efficace en temps, il dépend de la méthode utilisée pour le calcul des déterminants.

- *Les cas de résolution faciles*

1. La matrice A est diagonale ($a_{ij} = 0, i \neq j$) alors

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \forall i = 1, \dots, n$$

.

2. La matrice A est triangulaire supérieure $a_{ij} = 0, i > j$ alors

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

et

$$\forall i = n-1, n-2, \dots, 1, x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right)$$

3. La matrice A est triangulaire inférieure $a_{ij} = 0, i < j$ alors

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

et

$$\forall i = 2, \dots, n, x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j \right)$$

— *Principe de résolution par les méthodes directes*

On cherche des matrices M et $N \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ telles que $A = M.N$ où M est facile à inverser (triangulaire, diagonale,...) et N est triangulaire.

On a alors $Ax = b \Leftrightarrow M.Nx = b \Leftrightarrow Nx = M^{-1}b$.

Ce nouveau système est résolu en 2 temps :

1. Trouver $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $My = b$
2. Trouver $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Nx = y$

2.1.1 Méthode de Gauss

Elle permet le calcul d'une solution exacte en un nombre fini d'étapes (Méthode de Gauss simple).

Des problèmes d'accumulation d'erreurs au cours de la résolution peuvent affecter la solution (Méthode de Gauss avec pivot).

1. Algorithme de Gauss simple :

— Etape 1 : La triangularisation

Passage du système $Ax = b$ au système $A'x = b'$ où A' est triangulaire supérieure. Pour obtenir cette forme on applique l'algorithme suivant :

Pour $k = 1, \dots, n - 1$ **faire**

Pour $i = k + 1, \dots, n$ **faire**

Calculer le pivot

$$\alpha_i^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

Pour $j = k + 1, \dots, n$ **faire**

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \alpha_i^{(k)} a_{kj}^{(k)}$$

FinPour j

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \alpha_i^{(k)} b_k^{(k)}$$

FinPour i

FinPour k

— Etape 2 : Résolution facile

2. Quelques remarques

- L'algorithme transforme $Ax = b$ et en déduit la solution \bar{x} . Au total l'algorithme a une complexité de l'ordre de $O(n^3)$, ($\frac{2n^3}{3}$ opérations).
- La méthode de Gauss simple nécessite qu'aucun élément de la diagonale de A ne soit nul.
- Lorsqu'un pivot est nul ou presque nul on utilise une stratégie de choix du pivot maximal :
 - Lorsqu'on travaille sur la colonne i , on peut choisir pour pivot l'élément a_{ji} pour $j = i, i+1, \dots, n$ de valeur absolue maximum. On permute alors les lignes i et j (Cas du pivot partiel).
 - On peut également choisir pour pivot l'élément a_{jk} avec $j, k = i, \dots, n$ de valeur absolue maximum, on permute les lignes i et j , les colonnes i et k . Les indices de la variable x subissent aussi une permutation (Cas du pivot total).

2.1.2 Factorisation LU

- On cherche les matrices : L triangulaire inférieure de diagonale à 1 et U triangulaire supérieure de diagonale non nulle telles que $A = LU$.
- Utilisons la notation $M^{(k)}$ pour désigner une matrice carrée de taille k formée avec les premières lignes et colonnes de M .
- On peut montrer par récurrence que $A^{(k)} = (LU)^{(k)} = L^{(k)}U^{(k)}$.
- Si A est inversible et $A = LU$ alors L et U sont inversibles.
- Si A est inversible et si toutes les sous matrices $A^{(k)}$ sont inversibles alors la décomposition $A = LU$ est unique.
- Calcul de la forme LU :

Initialisation : $L^{(1)} = [1]; U^{(1)} = [u_{11}] = [a_{11}] = A^{(1)}$

Iteration : Pour $k \geq 1$, on pose

$$P = \begin{pmatrix} a_{1,k+1} \\ a_{2,k+1} \\ \dots \\ a_{k,k+1} \end{pmatrix}; Q = \begin{pmatrix} a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \dots & a_{k+1,k} \end{pmatrix}; a = a_{k+1,k+1}$$

$$A^{(k+1)} = \begin{bmatrix} A^{(k)} & P \\ Q & a \end{bmatrix}; L^{(k+1)} = \begin{bmatrix} L^{(k)} & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix}; U^{(k+1)} = \begin{bmatrix} U^{(k)} & Y \\ 0 & u \end{bmatrix}$$

où $0 \in \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{R})$ est la matrice nulle et $Y = L^{(k)(-1)}P$, $X = QU^{(k)(-1)}$ et $u = a - XY$.

- Complexité de l'ordre de $O(n^3)$, ($\frac{2n^3}{3}$ opérations).
- Méthode efficace pour le calcul de $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$.

2.1.3 Méthode de Cholesky

Si A est symétrique ($A^T = A$) et définie positive ($x^T A x > 0, x \neq 0$) alors il existe au moins une matrice R triangulaire supérieure telle que $A = R^T R$.

Si A est symétrique et inversible et $A = R^T R$ avec tous les éléments diagonaux de R strictement positifs alors cette factorisation est unique et A est définie positive.

Soit A une matrice inversible et symétrique

Algorithme de recherche de la matrice R :

Il s'appuie sur la relation suivante :

$$a_{ij} = a_{ji} = \sum_{k=1}^n r_{ik}^T r_{kj} = \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} r_{ki} r_{kj}$$

Début

Pour $i = 1, \dots, n$ faire

$$s := a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} r_{ji}^2$$

— Si $s \leq 0$ alors arrêter. A n'est pas définie positive. R n'existe pas.

— Sinon Poser $r_{ii} = \sqrt{s}$

Pour $j = i + 1, \dots, n$ faire

$$r_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj}}{r_{ii}}$$

Fin

- Cet algorithme est plus rapide que la méthode LU . Complexité de l'ordre de $O(n^3)$, ($\frac{n^3}{2}$ opérations).

- Il fournit un test rapide pour savoir si A est définie positive.

2.2 Méthodes indirectes itératives

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ inversible, La résolution du système $Ax = b$ se fait de manière approximative et efficace. On cherche des matrices M et $N \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ telles que $A = M - N$ avec M facile à inverser (triangulaire, diagonale,...).

On a alors $Ax = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$, on note $F(x) = M^{-1}Nx + M^{-1}b$, l'algorithme itératif qui s'en déduit est le suivant :

Choisir un point initial $x^{(0)}$;

Pour $k \geq 0$

Poser $x^{(k+1)} = F(x^{(k)}) = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$

Si la suite $(x^{(k)})_k$ entier converge, on a un point fixe $x^{(\infty)} = F(x^{(\infty)}) = M^{-1}Nx^{(\infty)} + M^{-1}b$ qui est solution approchée du système d'équations linéaires.

La convergence est obtenue si $\forall b$ et x^0 , la suite $(x^k)_{k \text{ entier}}$ est telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x\| = 0$$

L'arrêt s'obtient si le résidu $r^{(k)} = |Ax^k - b|$ est très petit.

La convergence de la suite $(x^k)_{k \text{ entier}}$ vers la solution \bar{x} est donnée par le théorème suivant :

Théorème :

Pour tout point initial x^0 et pour tout vecteur b , la suite x^k tend vers \bar{x} si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Décomposition de la matrice A :

$$A = D - E - F$$

où D est diagonale, E (F) est triangulaire inférieure (supérieure) :

$$d_{ii} = a_{ii}, e_{ii} = 0 = f_{ii}, i = 1, \dots, n$$

$$d_{ij} = 0, e_{ij} = -a_{ij}, f_{ij} = 0, i = 1, \dots, n; j < i$$

$$d_{ij} = 0, e_{ij} = 0, f_{ij} = -a_{ij}, i = 1, \dots, n; j > i$$

2.2.1 Méthode de Jacobi

On pose $M = D$ et $N = E + F$ d'où

$$Ax = b \Leftrightarrow Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b$$

pour l'itération $k + 1$.

L'algorithme de Jacobi s'écrit pour une précision ϵ :

Choisir un point initial $x^{(0)}$, une erreur $\epsilon^{(0)}$, $k = 0$;

Tant que $(\epsilon^{(k)} \geq \epsilon)$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} [b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)}], i = 1, \dots, n$$

$$\epsilon^{(k+1)} = \|Ax^{(k+1)} - b\| ;$$

$k = k + 1$;

Fin Jacobi

2.2.2 Méthode de Gauss-Seidel

On pose $M = D - E$ et $N = F$ d'où

$$Ax = b \Leftrightarrow Dx^{(k+1)} = Ex^{(k+1)} + Fx^{(k)} + b$$

pour l'itération $k + 1$.

L'algorithme de Gauss-Seidel s'écrit pour une précision ϵ :

Choisir un point initial $x^{(0)}$, une erreur $\epsilon^{(0)}$, $k = 0$;

Tant que $(\epsilon^{(k)} \geq \epsilon)$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} [b_i - \sum_{j(i>j)} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j(i<j)} a_{ij} x_j^{(k)}], i = 1, \dots, n$$

$$\epsilon^{(k+1)} = ||Ax^{(k+1)} - b||;$$

k=k+1;

Fin Gauss-Seidel

2.2.3 Méthode de sur-relaxation

Pour $\omega \in]0, 2[$, on pose $M = \frac{D}{\omega} - E$ et $N = -(1 - \frac{1}{\omega})D + F$ d'où

$$Ax = b \Leftrightarrow \frac{D}{\omega} x^{(k+1)} = Ex^{(k+1)} + (-(1 - \frac{1}{\omega})D + F)x^{(k)} + b$$

pour l'itération $k + 1$.

L'algorithme de sur-relaxation s'écrit pour une précision ϵ :

Choisir un point initial $x^{(0)}$, une erreur $\epsilon^{(0)}$, $k = 0$;

Tant que ($\epsilon^{(k)} \geq \epsilon$)

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} [b_i - \sum_{j(i>j)} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j(i<j)} a_{ij} x_j^{(k)}], i = 1, \dots, n$$

$$\epsilon^{(k+1)} = ||Ax^{(k+1)} - b||;$$

k=k+1;

Fin

La méthode de sur-relaxation correspond à la méthode de Gauss-Seidel pour $\omega = 1$.

2.2.4 Comparaison des 3 méthodes

Matrice diagonale strictement dominante

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est à *diagonale strictement dominante* si et seulement si

$$\forall i, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

- Si A est définie positive alors la méthode de Jacobi est définie. Si de plus, A est à diagonale strictement dominante alors la méthode de Jacobi converge.
- Si A est symétrique définie positive alors les méthodes de Gauss-Seidel et sur-relaxation convergent.
- La sur-relaxation est plus rapide que Gauss-Seidel qui est plus rapide que Jacobi. Jacobi est bien adaptée au calcul parallèle.
- Le coût d'une itération est faible dans le cas de matrices creuses.