Valeurs et vecteurs propres

10 octobre 2018

1 Introduction

Tout au long de ce résumé, nous considérerons A comme une matrice carrée à valeurs réelles et d'ordre n.
Définition du problème
On recherche un vecteur non nul $x \in \mathbb{R}^n$ et une valeur réelle λ telle que :

$$Ax = \lambda x \tag{1}$$

Quelques objectifs
- Etude des équations d'évolution d'un système,
- Recherche des propriétés d'une matrice.

Quelques applications
- Dans les moteurs de recherche tels que google (pertinence des pages web),
- Dans les systèmes à etats markoviens.

2 Propriétés des valeurs propres

Le système (1) est équivalent au système homogène $(A - \lambda I_n)x = 0$. Soit $P(\lambda)$ le déterminant de $(A - \lambda I_n)$. Si $P(\lambda) \neq 0$ alors le système admet une solution unique qui est le vecteur nul. Par conséquent nous étudions le cas où $P(\lambda) = 0$.

2.1 Définitions et propriétés

1. Le déterminant $P(\lambda) = |A - \lambda I_n|$ est *le polynôme caractéristique* dont les racines sont les valeurs propres de la matrice A.
2. A chaque valeur propre λ_i est associé un vecteur propre colonne x^i tel que $Ax^i = \lambda_i x^i$ et un vecteur propre ligne y^i tel que $y^i A = \lambda_i y^i$. Si la matrice A est symétrique alors $y^i = (x^i)^T$.
3. Si x est un vecteur propre, il en est de même pour $\alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$.
4. La trace d'une matrice A est $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

5. $P(0) = |A| = \Pi_{i=1}^{n} \lambda_i$.
6. Si la matrice A est définie positive alors toutes ses valeurs propres sont strictement positives (la réciproque est vraie si A est symétrique).
7. Si λ est valeur propre de la matrice A alors λ^m est valeur propre de $A^m, \forall m$ un entier .

3 Propriétés des vecteurs propres

1. Les vecteurs propres associés à des valeurs propres toutes distinctes sont linéairement indépendants.
2. Les vecteurs propres ligne y^i et colonne x^j sont orthogonaux et vérifient $y^i x^j = 0, i \neq j$.
3. On dit que les vecteurs propres ligne et colonne sont normés si $y^i x^j = 0, i \neq j$ et $y^i x^i = 1$. La matrice A peut sécrire :
$$A = \lambda_1 x^1 y^1 + \lambda_2 x^2 y^2 + \cdots + \lambda_n x^n y^n$$
et
$$A^m = \lambda_1^m x^1 y^1 + \lambda_2^m x^2 y^2 + \cdots + \lambda_n^m x^n y^n.$$
Dans le cas général, on a
$$A = \frac{\lambda_1 x^1 y^1}{y^1 x^1} + \frac{\lambda_2 x^2 y^2}{y^2 x^2} + \cdots + \frac{\lambda_n x^n y^n}{y^n x^n}$$
et
$$A^m = \frac{\lambda_1^m x^1 y^1}{y^1 x^1} + \frac{\lambda_2^m x^2 y^2}{y^2 x^2} + \cdots + \frac{\lambda_n^m x^n y^n}{y^n x^n}.$$

4 Méthodes de calcul

4.1 Par construction du polynôme caractéristique

La méthode de Leverrier permet de déterminer les coefficients du polynôme caractéristique $P(\lambda) = |A - \lambda I_n| = a_n + a_{n-1}\lambda + a_{n-2}\lambda^2 + \cdots + a_0\lambda^n$. Soit $S_p = Tr(A^p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p$. Comme $A^p x = \lambda^p x, \forall p$, les identités de Newton permettent de relier les traces des différentes puissances de A aux coefficients du polynôme caractéristique de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 & = & (-1)^n \\ a_1 & = & -a_0 S_1 \\ 2a_2 & = & -(a_0 S_2 + a_1 S_1) \\ 3a_3 & = & -(a_0 S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ pa_p & = & -(a_0 S_p + a_1 S_{p-1} + \cdots + a_p S_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ na_n & = & -(a_0 S_n + a_1 S_{n-1} + \cdots + a_n S_1) \end{array} \right. \tag{2}$$

Les racines du polynôme peuvent être déterminées par des méthodes appropriées.

4.2 A l'aide des puissances itérées

Cette méthode permet de calculer la plus grande valeur propre en valeur absolue du spectre de la matrice A.
On suppose que toutes les valeurs propres sont distinctes. Les vecteurs propres x^i sont alors linéairement indépendants. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ peut ainsi s'écrire : $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i$. Si on multiplie m fois cette égalité par A, on obtient :

$$A^m v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^m x^i \qquad (3)$$

Si le spectre de A est tel que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$ alors pour m très grand, le rapport $\frac{\lambda_i^m}{\lambda_1^m}$ tend vers 0 pour $i = 2, \ldots, n$. Notons $v_{m+1} = A^m v$, alors d'après, (3), lorsque m est grand, $v_{m+1} = A^m v$ tend vers $\alpha_1 x^1 \lambda_1^m$. Par conséquent, le rapport de deux vecteurs successifs $\frac{v_{m+1,i}}{v_{m,i}}$ tend vers $\lambda_1, \forall i = 1, \ldots, n$.
On en déduit le processus itératif suivant :

- Choisir un vecteur v_1 initial.
- Pour $k \geq 1$, calculer $v_{k+1} = A^k v_1 = A v_k$
- Arrêter lorsque le rapport $\frac{v_{m+1,i}}{v_{m,i}} \approx \frac{v_{m+1,j}}{v_{m,j}}$ pour toute paire de composantes i et j de ces vecteurs.

Le vecteur propre x^1 associé à la valeur propre λ_1 peut être calculé en utilisant l'équation suivante :

$$Ax^1 = \lambda_1 x^1$$

.

4.3 Méthode de la déflation

Elimination d'une valeur propre
Soient λ_i une valeur propre de la matrice A et x^i et y^i les vecteurs propres correspondants. On suppose que x^i et y^i sont normés.
La matrice carrée B définie par

$$B = A - \lambda_i x^i y^i$$

a les mêmes valeurs propres que A sauf λ_i qui est remplacée par la valeur propre 0.

En effet, $Bx^k = Ax^k - \lambda_i x^i y^i x^k$ d'où :

- si $i \neq k$ alors $y^i x^k = 0$ et $Bx^k = Ax^k = \lambda^k$, A et B ont les mêmes valeurs propres.
- si $i = k$ alors $y^i x^i = 1$ et $Bx^i = Ax^i - \lambda_i x^i = 0 = 0x^i$. 0 est valeur propre de B quand λ_i est valeur propre de A.

On peut alors appliquer cette élimination à une matrice A dont on a déterminé la plus grande valeur propre λ_1 par la méthode des puissances itérées en procèdant de la manière suivante :

(1) Déterminer la plus grande valeur propre λ_1 de la matrice A et calculer les vecteurs propres ligne et colonne correspondants.

(2) Eliminer la valeur propre λ_1 de A en calculant la matrice B ;

(3) Faire $A := B$ et revenir en (1).