

Devoir sur table
18 novembre 2015

Note : seul l'aide-mémoire fourni est autorisé. L'utilisation de propriétés autres que celles de l'aide-mémoire devront être démontrées. Les ellipses (...) pourront être utilisées pour signifier qu'une construction se répète, y compris dans les constructions d'automates ou de grammaires.

EXERCICE 1: Soit le langage suivant : $L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{toutes les positions impaires de } w \text{ contiennent un } 1\}$ (mot vide non compris).

- ① Donner un automate déterministe fini qui reconnaît ce langage.
- ② Donner l'automate non-déterministe fini à deux états qui reconnaît ce langage.
- ③ Donner l'expression régulière qui reconnaît ce langage.
- ④ Combien y-a-t-il de L_1 -classes d'équivalence ? On les énumèrera.
- ⑤ Donner la grammaire libre du contexte qui génère ce langage avec le minimum de règles.

EXERCICE 2: Soit le langage suivant : $L_2 = \{a^i b^j c^k \mid j = i + k\}$.

- ① Montrer que ce langage n'est pas régulier.
- ② Donner la grammaire libre du contexte qui génère ce langage.
- ③ Donner l'automate à pile qui génère ce langage.
- ④ Donner le graphe de la machine de Turing qui reconnaît ce langage.

EXERCICE 3: Soit E l'ensemble des langages de $\{0, 1\}^*$, tel qu'un langage $L \in E$ ssi $\forall w \in L$, $\#_1 w = 2$ et $\#_0 w > 0$ (= il y a exactement deux 1 et au moins un 0 dans tout mot de L).

- ① Choisir un langage $L_R \in E$, tel que L_R soit un langage régulier et son cardinal de taille non finie.
- ② Donner l'automate déterministe fini associé au langage L_R .
- ③ Donner ses L_R -classes d'équivalence.
- ④ Choisir un langage $L_G \in E$, tel que L_G soit un langage libre de contexte mais pas régulier.
- ⑤ Démontrer que ce langage L_G n'est pas régulier.
- ⑥ Donner la grammaire libre de contexte qui reconnaît L_G .
- ⑦ Donner l'automate à pile qui reconnaît L_G .
- ⑧ Choisir un langage $L_{MT} \in E$, tel que L_{MT} soit récursivement énumérable mais pas libre de contexte.
- ⑨ Démontrer que ce langage L_{MT} n'est pas libre de contexte.
- ⑩ Donner la machine de Turing qui reconnaît L_{MT} .

EXERCICE 4: Pour une chaîne $w \in \{0, 1\}^*$, on note \bar{w} est la chaîne w dans laquelle les 1s ont été remplacés par des 0s et les 0s par des 1s (par exemple, si $w = 01101$, $\bar{w} = 10010$). On note w^R la chaîne w écrite dans l'ordre inverse (par exemple, si $w = 01101$, $w^R = 10110$).

Soit $L = \{w\bar{w}^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$.

- ① Montrer que L n'est pas régulier.
- ② Donner une grammaire libre de contexte qui reconnaît L .
- ③ Donner un automate à pile qui reconnaît L .
- ④ Donner le code de la machine de Turing qui reconnaît L .

EXERCICE 5: On considère la propriété P "reconnait le mot 1" (= mot constitué d'un seul symbole et ce symbole est 1). Dans les réponses aux questions qui suivent, chaque code proposé devra être spécifiquement adapté à la propriété P à reconnaître.

- ① Soit le langage $L_{\text{ADF}}^1 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ est un ADF et le mot 1 appartient au langage reconnu par } M\}$.
 - (a) Montrer que L_{ADF}^1 est récursivement énumérable.
 - (b) Peut-on déduire de la question précédente que L_{ADF}^1 est décidable ?
- ② Soit le langage $L_{\text{GLC}}^1 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ est une GLC sous forme normale de Chomsky et le mot 1 appartient au langage reconnu par } M\}$.
 - (a) Montrer que L_{GLC}^1 est récursivement énumérable.
 - (b) Peut-on déduire de la question précédente que L_{GLC}^1 est décidable ?
- ③ Soit le langage $L_{\text{MT}}^1 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ est une machine de Turing et le mot 1 appartient au langage reconnu par } M\}$.
 - (a) Montrer que L_{MT}^1 est récursivement énumérable.
 - (b) L_{MT}^1 est-il décidable ?
- ④ A quelles questions précédentes auraient-on pu répondre directement en utilisant des résultats vus en cours ?

EXERCICE 6: Soit M_u la machine de Turing universelle. Soit M_r la machine de Turing universelle modifiée de la manière suivante : si la machine simulée accepte, alors rejeter ; si la machine simulée rejette, alors accepter.

- ① Quel est le langage L_r reconnu par M_r ?
- ② L_r est-il décidable ?
- ③ Soit $M_{ur}(w) = M_u(M_r(w))$. Quel est le langage reconnu par M_{ur} ?

EXERCICE 7:

- ① \mathcal{R} est-il fermé par complémentation ?
- ② Est-il alors possible de trouver un exemple de langage décidable dont le complémentaire n'est pas décidable ? Si oui, on donnera un exemple ; si non, expliquera pourquoi.
- ③ \mathcal{RE} est fermé par complémentation ?
- ④ Est-il alors possible de trouver un exemple de langage récursivement énumérable mais pas décidable dont le complémentaire n'est pas décidable ? Si oui, on donnera un exemple ; si non, justifiera pourquoi.
- ⑤ Est-il alors possible de trouver un exemple de langage décidable dont le complémentaire n'est pas récursivement énumérable ? Si oui, on donnera un exemple ; si non, justifiera pourquoi.

EXERCICE 8:

- ① Est-il possible de construire un langage récursivement énumérable mais pas décidable à partir de l'union de deux langages décidables ? On justifiera.
- ② Donner l'exemple de deux langages récursivement énumérables mais pas décidables dont l'union est un langage décidable.
- ③ Donner l'exemple de deux langages récursivement énumérables mais pas décidables dont l'intersection est un langage décidable non trivial.
- ④ Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?