

Devoir sur table  
8 novembre 2017

**Note :** seul l'aide-mémoire fourni est autorisé. L'utilisation de propriétés autres que celles de l'aide-mémoire devront être démontrées.

**EXERCICE 1:** Soit  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Soit  $L_1 = \{w \mid w \text{ ne contient pas la chaîne } 001\}$ .

- ① Donner l'ADF qui reconnaît  $L_1$ .
- ② Donner l'expression régulière qui reconnaît  $L_1$ .
- ③ Donner ses  $L_1$ -classes d'équivalence
- ④ Pourquoi la grammaire libre de contexte qui accepte  $L_1$  est triviale ? On la fournira.
- ⑤ Pourquoi l'automate à pile qui accepte  $L_1$  est trivial ? On le fournira.
- ⑥ Pourquoi le graphe de la machine de Turing qui accepte  $L_1$  est trivial ? On la fournira.

**EXERCICE 2:** Soit  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Soit  $L_2 = \{w \mid \#_0 w = \#_1 w\}$  (= ensemble des mots qui contient le même nombre de 0 et de 1).

- ① si  $L_2$  est régulier alors **(a)** donner son automate ; et **(b)** donner son expression régulière. sinon démontrer qu'il n'est pas régulier en utilisant **(a)** le théorème de Myhill-Néode ; puis **(b)** le lemme de l'étoile.
- ② si  $L_2$  est libre de contexte alors donner **(a)** sa grammaire ; et **(b)** son automate à pile. sinon démontrer qu'il n'est pas régulier en utilisant le lemme de l'étoile pour les grammaires libres de contexte.
- ③ donner le graphe de la machine de Turing qui reconnaît  $L_2$ .

**EXERCICE 3:** Soit  $L_3 = \{0^n 1^{n^2} \mid n > 0\}$ .

- ① si  $L_3$  est régulier alors **(a)** donner son automate ; et **(b)** donner son expression régulière. sinon démontrer qu'il n'est pas régulier en utilisant le lemme de l'étoile.
- ② si  $L_3$  est libre de contexte alors donner **(a)** sa grammaire ; et **(b)** son automate à pile. sinon démontrer qu'il n'est pas régulier en utilisant le lemme de l'étoile pour les grammaires libres de contexte.
- ③ donner la machine de Turing qui reconnaît  $L_3$ .
- ④  $L$  est-il décidable ?

**EXERCICE 4:** Soit le langage  $L = \{w \mid w \text{ est un nombre premier}\}$ .

- ① Donner la machine de Turing non déterministe qui reconnaît  $L$ . Elle devra impérativement utiliser le non déterminisme.
- ② La machine donnée à la question précédente est-elle décidable ?
- ③ Peut-on en déduire la machine de Turing non déterministe qui reconnaît  $\bar{L}$  de la première question ?
- ④ Donner alors la machine de Turing non déterministe qui reconnaît  $\bar{L}$ . On indiquera comment le non déterminisme est utilisé dans ce cas.

**EXERCICE 5:** Soit  $\Sigma = \{1\}$ . Démontrer qu'il existe des langages de  $\Sigma^*$  qui ne sont pas récursivement énumérables.

**EXERCICE 6:** Soit  $\Sigma$  un alphabet. On dit qu'un langage trivial si  $L = \emptyset$  ou  $L = \Sigma^*$ .

- ① Est-il possible de trouver deux langages  $A$  et  $B$  irréguliers tels que  $A \cup B$  soit régulier mais pas trivial ? Si oui, on donnera un exemple. Si non, on démontrera pourquoi.
- ② Est-il possible de trouver deux langages  $A$  et  $B$  non libres de contexte tels  $A$  et  $B$  que  $A \cup B$  soit libre de contexte mais ni trivial ni régulier ? Si oui, on donnera un exemple. Si non, on démontrera pourquoi.
- ③ Est-il possible de trouver deux langages  $A$  et  $B$  récursivement énumérables mais pas décidable tels que  $A \cup B$  soit décidable mais pas trivial ? Si oui, on donnera un exemple. Si non, on démontrera pourquoi.

**EXERCICE 7:** Fermeture par concaténation

On étudie dans cet exercice la fermeture de concaténation des différentes classes de langage.

- ① Démontrer que les langages réguliers sont fermés par concaténation.
- ② Démontrer que les langages libre de contexte sont fermés par concaténation.
- ③ Démontrer que les langages décidables sont fermés par concaténation.
- ④ Démontrer que les langages récursivement énumérables sont fermés par concaténation.

**EXERCICE 8:**

On considère le langage  $L = \{ \langle M \rangle \mid \text{la machine de Turing } M \text{ accepte au moins un mot} \}$ .

- ① Montrer que  $L$  est récursivement énumérable.
- ② Quel est l'ensemble des langages contenus dans  $\bar{L}$  le complémentaire de  $L$  ?
- ③ Peut-on déduire du fait que  $E_{MT}$  est indécidable que  $L$  est indécidable ? Si oui, on le démontrera, sinon on expliquera pourquoi.

**EXERCICE 9:** Problème de l'infini

Soit  $INF = \{ \langle M \rangle \mid \mathcal{L}(M) \text{ est infini} \}$ , à savoir l'ensemble des descriptions de machine de Turing  $\langle M \rangle$  telle que le cardinal du langage reconnu par  $M$  est n'est pas fini.

- ① Montrer que  $INF$  est indécidable par réduction de  $A_{MT}$  à  $INF$ . On utilisera la méthode suivante :
  - (a) trouver une fonction calculable  $f$  qui, à un  $\langle M, w \rangle \in A_{MT}$ , associe un  $\langle M' \rangle \in INF$ .
  - (b) démontrer que cette fonction est une réduction de  $A_{MT}$  à  $INF$ .
  - (c) utiliser cette réduction afin de démontrer que  $INF$  est indécidable.
- ② Soit  $\overline{INF} = \{ \langle M \rangle \mid \mathcal{L}(M) \text{ est fini} \}$ . Montrer que  $\overline{INF}$  est indécidable par réduction de  $A_{MT}$  à  $\overline{INF}$ . On utilisera la méthode suivante :
  - (a) trouver une fonction calculable  $f$  qui, à un  $\langle M, w \rangle \in A_{MT}$ , associe un  $\langle M' \rangle \in \overline{INF}$ .
  - (b) démontrer que cette fonction est une réduction de  $A_{MT}$  à  $\overline{INF}$ .
  - (c) utiliser cette réduction afin de démontrer que  $\overline{INF}$  est indécidable.
- ③ Aurait-on pu arriver plus rapidement à ces conclusions ? On prendra soin de rédiger une réponse rigoureuse.
- ④ Démontrer que  $(INF \text{ est indécidable}) \Leftrightarrow (\overline{INF} \text{ est indécidable})$ .
- ⑤ Soit la fonction calculable  $f(\langle M, w \rangle)$  qui produit en sortie la machine de Turing suivante :  
 $M_0(\langle y \rangle) =$  exécuter  $|y|$  transitions de la MT universelle  $U(\langle M, w \rangle)$   
 si  $U$  s'est arrêtée au bout de ces  $|y|$  transitions alors rejeter sinon accepter  
 Expliquer le fonctionnement de la machine de Turing  $M_0$  en fonction des cas où  $\langle M, w \rangle$  appartient ou pas à  $\overline{H_{MT}}$ .
- ⑥ Que peut-on alors déduire de la question précédente ?